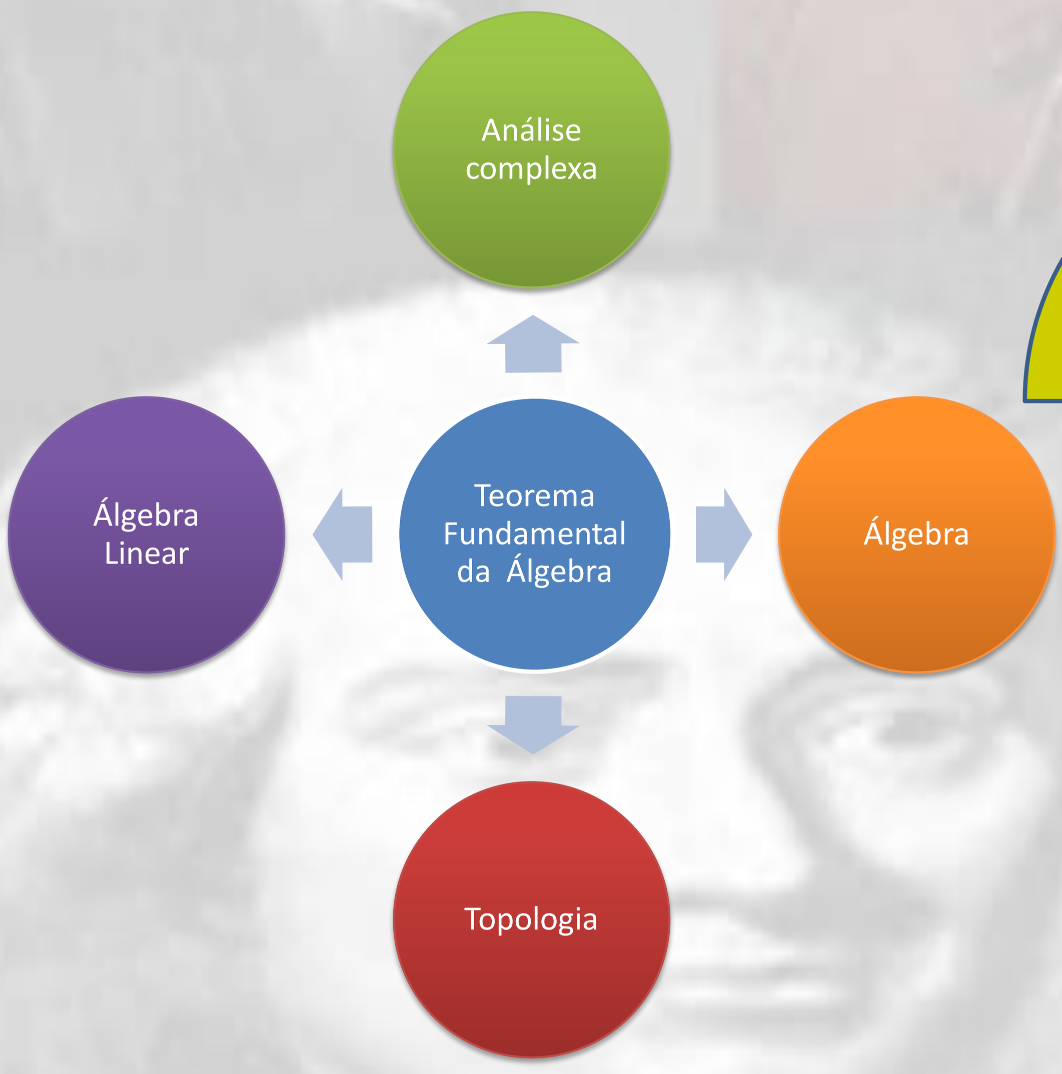
Universidade Federal do Rio Grande

Juliana Ricardo – juliana.s.ricardo@gmail.com

Prof. MSc.Luverci Ferreira – Luverciferreira@furg.br

Uma análise sobre as demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra



O teorema fundamental da álgebra, foi demonstrado pela primeira vez, no século 18 em 1746, pelo matemático francês Jean Baptiste Le Rond d´Alembert, a prova foi considerada fraca por alguns matemáticos, pois o matemático não conseguiu provar o lema que ficou conhecido como, lema d’Alembert. Demonstraremos a seguir a prova dada por d’Alembert, usaremos teorema do valor extremo e o Lema d’Alembert .

Por [3], temos:

Teorema 1. Se p (z) é um polinômio não-constante com z ϵ c e p(z) ≠ 0, então qualquer fronteira de z contém um ponto z tal que | p (z) | <
| p (z) |. A prova deste lema foi dada pelo Puiseux em 1850.

Teorema 2. (Teorema do Valor Extremo) Suponha que f: [a, b] -> IR é uma função contínua, então temos que f atinge um valor mínimo e máximo.

Por este teorema, temos que | p (z) | tem um valor mínimo para | z | -> IR e que o mínimo deve ser maior ou igual a 0, por definição. Se o valor mínimo é superior a 0, no entanto, temos uma contradição com o Lema de d'Alembert, uma vez que não será mais capaz de encontrar | p (z) | <| p (z) |para | p (z0)| próximo a 0. Assim sabemos que existe um ponto z, onde | p (z) | =0 e, portanto p(z)=0.

Em 1844, Liouville publicou o teorema de Liuoville, utilizado na demonstração do teorema fundamental da álgebra. Para esta prova daremos as seguintes definições;

Definição 10. Uma função em ℂ é inteira, desde que seja diferenciável sobre toda a ℂ. Isso é o caso dos polinômios na forma $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ onde z é um número complexo

Definição 11. Uma função em ℂ é analítica se sua derivada existe em um conjunto aberto ℂ. Então podemos perceber que todos os polinômios em ℂ são inteiros e analítico.

Teorema 4. (Teorema de Liouville) Se f (z) é inteira e | f (z) | é limitada para todo z em ℂ, então f (z) é constante.

Note que | f (z) | é simplesmente o valor absoluto da função de z.
Suponhamos então que p(z) não tem zero para qualquer z em ℂ. Então a função f (z) = 1/p (z)/ é analítica em todos os lugares.
Além disso, como z temos que | f (z) | 0. Assim, f (z) é limitada para todos z. Assim, pelo Teorema de Liouville, temos que f (z) é constante. No entanto, sabemos que p (z) não é constante, por isso temos uma contradição. Portanto, p (z) = 0 para pelo menos um z em ℂ.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brolesi, Fogliariano. Teorema Fundamental da Álgebra. Campinas, Primavera de 2006.
[2] Delboni, Roberta Regina. Teorema Fundamental da Álgebra.- RA: 027122. UNICAMP - IMECC
[3] Gessler, Rebecca.The Fundamental Theorem of Algebra. http://www.uccs.edu/~rgressle/Papers%20and%20Links_files/FTA.pdf , May, 2005
[4] Garbi, Gilberto. G. O romance das equações algébricas.Editora Livraria da Fisica. 2ª ed. 240 p. 2006.
[5] Hestein, I.N. Tópicos de álgebra, tradução de Ádalberto P. Bergamasco e L.H Jacy Monteiro. S. Paulo, Editora da Univer. E Polígono, 1970, 408 p.ilus Álgebra.
[6] Monteiro, L.H.Jacy. Elementos de Álgebra. 2 ed - Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos,1978.
[7] Ripoll, Jaime Bruck; Ripoll, Cidara Cavedon; Silveira. José Francisco Porto. Números racionais, reais e complexos. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.
[8] Samuel, Pierre. Theorie Algébrique des nombres. Editora Hermann, Paris1967.
[9] Velleman, Daniel.J.The Fundamental Theorem of Algebra: A Visual Approach. Amhert, MA 01002

Em 1799, Gauss consegue dar a primeira prova válida do teorema fundamental da álgebra, apresentada em sua tese de doutorado. No ano de 1816 Gauss apresenta mais duas versões do teorema, uma delas será apresentada a seguir, por 2 temos

Para demonstrar o teorema é preciso entender, os lemas a seguir:

Lema 1
Todo o polinômio de coeficientes reais de grau ímpar tem uma raiz real.

Lema 2
Todo o polinômio de coeficientes complexos e grau dois, tem pelo menos uma raiz complexa.

Lema 3
Se todo polinômio de coeficientes reais, não constante, tem uma raiz complexa, então todo o polinômio de coeficientes complexos, não constante, tem uma raiz complexa.

Lema 4
Todo o polinômio real não constante tem uma raiz complexa.

Demonstração

Seja $f(x)=a_n x^n+\ldots+ a_0$ um polinômio de coeficientes reais, não constante e $a_n \neq 0$. Vamos provar por indução no grau do polinômio que, f(x) tem uma raiz complexa.
Seja $n=2^m q$ com q ímpar. Vamos fazer uma indução em m.
Se m=0 temos n=q e o grau do polinômio é ímpar. Logo pelo Lema 1, temos que o polinômio tem uma raiz real.
Suponhamos agora que a propriedade se verifica para todos os graus $d=2^k q'$ com k<m e q' ímpar, e que o grau de f é $n=2^m q$.
Seja F' o corpo de decomposição de f(x) sobre IR cujas raízes são $r_1,\ldots, r_n$. Vamos mostrar que pelo menos uma destas raízes é complexa.
Seja g um inteiro e consideremos o polinômio

$$G(x) = \prod_{i \leq j} (x - (r_i + r_j + g\, r_i r_j)).$$

de coeficientes em F'[x].
Ao formar G, escolhemos os pares de raízes $\{r_i,r_j\}$, de modo que o número destes pares seja o número de maneiras possíveis, de escolher dois elementos em n, ou seja,
2 [q(2 q -1)]= 2 q’ , onde q’ é ímpar, então o grau de G é n = 2 q’. Como G é um polinômio simétrico e $\{r_i,r_j\}$, são raízes de um polinômio real, então os coeficientes $s\{r_i,r_j\}$, $s'\{r_i,r_j\}$, de G são reais. Então podemos dizer que G(x) tem coeficientes reais e o grau de G é $2^{m-1}q'$.
Por hipótese de indução temos que G tem uma raiz complexa, logo existe um par $\{r_i,r_j\}$, com $r_i+r_j+gr_ir_j$ pertencente a ℂ. Como g é um inteiro qualquer, podemos dizer que para cada g_1 existe um par $\{r_i,r_j\}$, com $r_i+r_j+g_1r_ir_j$ pertencente a ℂ .Como temos infinitas escolhas para g e finitas possibilidades para i e j, então existe um g_1 e g_2 ϵ IR tal que $z' = r_i+r_j+g_1r_ir_j$ e $z'' = r_i+r_j+g_2r_ir_j$ ℂ, então $z'-z''= (g_1-g_2)r_ir_j$ pertence a ℂ. Mas isso faz com que $g_1r_ir_j$ pertença a ℂ , logo r_i+r_j pertence a ℂ.
Então, $p(x)=(x-r_i)(x-r_j) = x^2-(r_i+r_j)x+r_ir_j$ tem coeficientes complexos, e grau dois, logo pelo Lema 2, as suas raízes são complexas. Como $r_1,\ldots,r_n$ são raízes de f(x), temos que f(x) tem uma raiz complexa.

Teorema: ℂ é um corpo algebricamente fechado.

Demonstração

O Lema 4 diz que qualquer polinômio real não constante, tem uma raiz complexa, e o Lema 3 diz que se todos os polinômios reais não constantes têm uma raiz complexa, concluímos todos os polinômios complexos não constantes, têm uma raiz complexa. Então temos que todos os polinômios complexos, decompõem-se em ℂ , logo, ℂ é um corpo algebricamente fechado.

Observações – As próximas demonstrações a serem estudadas serão nas áreas de Álgebra linear, Teoria de Corpos e Topologia .