

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Sistemas integráveis para condensados de Bose-Einstein

David William Sabino Carvalho

Porto Alegre
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Sistemas integráveis para condensados de Bose-Einstein

David William Sabino Carvalho

Trabalho de conclusão de curso realizado sob orientação da Profa. Dra. Angela Foester e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento do requisito final para a obtenção do título de Bacharel em Física.

Porto Alegre
2011

Este trabalho é dedicado

aos meus pais pela intensa dedicação e a incessante
motivação ao longo da minha vida.

Agradecimentos

★ À orientadora Angela Foester, pelas inúmeras dúvidas sanadas, pela dedicação e paciência demonstrada durante este período.

★ Ao aluno de doutorado Diefferson Rubeni, pela ajuda indispensável para o desenvolvimento deste trabalho.

★ Aos meus amigos, pela informação trocada ao longo do curso e as ajudas cedidas favorecendo o meu desenvolvimento.

★ À Bruna C. Folador e à Alexandra Sabino pela ajuda durante o período de desenvolvimento deste trabalho.

★ À minha família.

Muito Obrigado.

Resumo

Neste trabalho investigamos dois modelos exatamente solúveis para condensados de Bose-Einstein através das *equações do ansatz de Bethe* associadas. Através de uma análise cuidadosa das soluções numéricas das *equações do ansatz de Bethe*, podemos observar uma mudança na estrutura das soluções para o estado fundamental, quando variamos um conjunto de parâmetros do Hamiltoniano em questão. Essa mudança está relacionada com a transição de fase quântica do sistema. Podemos observar esse comportamento por meio de métodos usuais na análise de transições de fase quânticas, como o gap de energia e a fidelidade. Dessa forma podemos utilizar o comportamento das soluções das EAB como um método alternativo para indicar uma transição de fase quântica.

Abstract

In this work we investigate two exactly solvable models for Bose-Einstein condensates by studying the solutions of their Bethe ansatz equations. A careful numerical analysis of these solution for the ground state of both models, as we vary some parameters of the Hamiltonian, shows an abrupt change in the behavior of the roots of the Bethe ansatz equations of the models. Then, by the use of standard techniques for approaching quantum phase transition - gap, fidelity- we find that the change in the scenery in the roots of the Bethe ansatz equations is directly related to a quantum phase transition, thus providing an alternative method for its detection.

Conteúdo

1. Introdução	1
2. Modelo para dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson	4
2.1 O Hamiltoniano	4
2.2 Solução exata	5
2.2.1 Solução das EAB para alguns valores de N	5
2.3 Transição de fase quântica	10
2.3.1 GAP	10
2.3.2 Fidelidade	10
2.3.3 EAB e transições de fase quânticas	13
3. Modelo para um condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular	14
3.1 O Hamiltoniano	14
3.2 Solução exata	15
3.2.1 Solução das EAB para alguns valores de N	15
3.3 Transição de fase quântica	20
3.3.1 GAP	20
3.3.2 Fidelidade	21
3.3.3 EAB e transições de fase quânticas	21
4. Conclusão	23
A. Integrabilidade e solução exata	24
A.1 Solução exata: Forma de produtório	24
A.2 Solução exata: Forma de Somatório	28
Bibliografia	30

Capítulo 1

Introdução

O condensado de Bose-Einstein (CBE), predito teoricamente por Albert Einstein seguindo o trabalho de S. N. Bose em 1925, é um estado da matéria no qual um conjunto de partículas (fracamente interagentes, que obedecem a estatística de Bose-Einstein) se agregam no estado de menor energia do sistema. Esse estado só é atingido em temperaturas muito baixas, sendo, portanto, um fenômeno de natureza quântica. De forma mais geral, podemos descrever a condensação de Bose-Einstein utilizando um argumento simples apresentado em [1] por W. Ketterle: para altas temperaturas os átomos fracamente interagentes de um gás se comportam como bolas de bilhar que se chocam. Diminuindo a temperatura, os átomos podem ser tratados como pacotes de onda com comprimentos de onda de d'Broglie λ_{dB} . A medida que resfriamos o gás, o comprimento de onda de d'Broglie aumenta. Quando atinge-se a temperatura crítica $T = T_C$ o comprimento de onda de d'Broglie fica da ordem da distância média entre as partículas, dessa forma as funções de onda de uma grande parcela de átomos se entrelaçam formando o CBE; ao aproximar a temperatura próxima ao zero absoluto as partículas mais energéticas desaparecem formando um CBE puro, como ilustra a Figura (1.1).

Experimentalmente, os primeiros pesquisadores que obtiveram um CBE, com vapores, foram Cornell, Wieman e Ketterle ([2], [3] e [4]), através do resfriamento de átomos, utilizando técnicas sofisticadas. Após a obtenção dos primeiros CBE, vários experimentos de sucesso foram realizados. Entre eles, é interessante citar a interferência entre dois condensados, que foi observada em [7], onde estes estavam separados por uma pequena distância e foram criados em um poço de potencial duplo. Esses resultados comprovaram diretamente a existência de tunelamento e auto-aprisionamento em CBE. Seguindo-se aos resultados com vapores de átomos, foram obtidas também moléculas ultra-frias do tipo homo-atômicas, isto é, moléculas de dois átomos de mesma espécie, [5], [6].

Do ponto de vista teórico, sabe-se que estes sistemas ultra-frios, atômicos e moleculares, apresentam grandes flutuações quânticas. Ou seja, não é apropriado o uso de métodos aproximados para abordar esses sistemas. Neste sentido, passa a ser de grande relevância o estudo de modelos que sejam exatamente solúveis e que descrevam condensados de Bose-Einstein atômicos e moleculares. Neste trabalho de conclusão vamos investigar dois modelos exatamente solúveis que descrevem estes fenômenos: (i) dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson que descreve o tunelamento de átomos entre dois poços, (ii) um condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular que descreve a interconversão de átomos em moléculas e vice-versa.

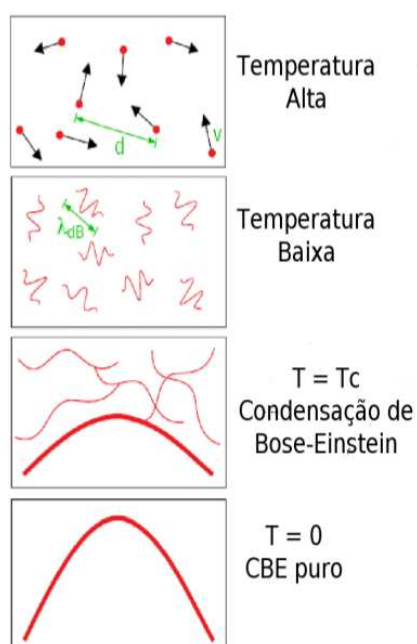


Fig. 1.1: *Etapas na condensação de Bose-Einstein, de cima para baixo. (1) Para altas temperaturas os átomos de um gás se comportam como fossem bolas de bilhar, desprezando a interação entre elas. (2) Baixando a temperatura, numa descrição quântica simplificada, os átomos podem ser vistos como pacotes de onda com comprimento de onda de d’Broglie λ_{dB} . (3) Baixando ainda mais a temperatura, até chegar a temperatura crítica $T = T_c$, o comprimento de onda de d’Broglie fica da ordem da distância média entre as partículas, dessa forma as funções de onda de uma grande parcela de átomos se entrelaçam formando o CBE. (4) Próximo ao zero absoluto de temperatura temos um CBE puro. Figura extraída de [1].*

O objetivo deste trabalho é mostrar como a análise das soluções das *equações do ansatz de Bethe* (EAB) para o estado fundamental podem ser usadas como indicadores de transições de fase quânticas (TFQ) nos sistemas citados acima. Este trabalho está dividido da seguinte forma: no segundo capítulo estudaremos o comportamento das soluções das EAB do modelo que descreve dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson e compararemos com os métodos tradicionais na análise de transição de fase quântica. Finalizaremos o capítulo estabelecendo a relação entre a TFQ e o valor esperado do número de partículas nos condensados. No terceiro capítulo, analisaremos o comportamento das soluções das EAB para o modelo que descreve o condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular, comparando-as, novamente, com os métodos tradicionais na análise da TFQ. Encerraremos este capítulo relacionando a TFQ com o valor esperado do número de átomos e do número de moléculas no condensado. No capítulo 4 apresentaremos a conclusão, e no apêndice mostraremos como obter as EAB e as energias para o modelo de dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson através do método do espalhamento inverso quântico.

Capítulo 2

Modelo para dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento Josephson

2.1 O Hamiltoniano

Para começar a análise precisaremos de uma quantidade que contenha toda informação do sistema. Para isso, temos que o Hamiltoniano mais geral dado por [8] é

$$H = U_1 N_1^2 + U_2 N_2^2 + U_{12} N_1 N_2 + \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 - \frac{\epsilon}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad (2.1)$$

onde U_j , para $j = 1, 2$, é um parâmetro que denota a interação de átomos no condensado j e U_{12} denota a interação entre átomos em diferentes condensados, ϵ é a amplitude de tunelamento de átomos entre os condensados e os μ_j 's os potenciais externos. Os a_i^\dagger e a_i são operadores de criação e destruição, respectivamente, no i -ésimo condensado ($i=1,2$). Esses operadores estão associados a álgebra de Heisenberg e obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0. \quad (2.3)$$

O operador número é dado por $N_j = a_j^\dagger a_j$, cujo autovalor revela quantos bósons há no j -ésimo condensado, o número total de bósons no sistema é dado por $N = N_1 + N_2$. Os comutadores que envolvem esses operadores podem ser deduzidos utilizando as relações (2.2) e (2.3), e são dados por

$$[N_i, a_j] = -\delta_{ij} a_i, \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_i^\dagger \quad (2.4)$$

Dentro da liberdade dos parâmetros que temos, vamos escolher a seguinte particularização:

$$U_1 = U_2 = -\frac{U_{12}}{2} = \frac{K}{8}, \quad (2.5)$$

$$\mu_1 = -\mu_2 = \frac{\Delta\mu}{2}. \quad (2.6)$$

Com isso podemos reescrever o Hamiltoniano (2.1) da seguinte forma:

$$H = \frac{K}{8} (N_1 - N_2)^2 - \frac{\Delta\mu}{2} (N_1 - N_2) - \frac{\epsilon}{2} (a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1). \quad (2.7)$$

Desta forma, podemos reconhecer K como o termo de acoplamento entre os bósons, sendo atrativa se $K < 0$ e repulsiva se $K > 0$, e o parâmetro $\Delta\mu$ como o potencial externo que corresponde a uma assimetria entre os condensados. Neste trabalho vamos nos restringir ao caso $K < 0$, pois foi mostrado em [10] e [14] que no caso atrativo o sistema apresenta uma transição de fase quântica (TFQ). Este Hamiltoniano, apesar de muito simples, apresenta propriedades físicas interessantes como foi discutido em [9], [10] e [11].

2.2 Solução exata

O modelo descrito na seção anterior é interessante pois apresenta solução exata e a integrabilidade dele foi demonstrada usando o *método do espalhamento inverso quântico*. A maior vantagem desse método, também conhecido como *Método Algébrico do Ansatz de Bethe*, é que nos leva à um conjunto de equações conhecidas como *equações do Ansatz de Bethe* cujas soluções, quando inseridas na equação de energia, fornecem os autovalores do Hamiltoniano (ver apêndice A). O conjunto de EAB e a energia para o Hamiltoniano (2.7) podem ser dadas de duas maneiras diferentes: (i) na forma de produtório, (A.41) e (A.42), ou (ii) na forma de somatório, (A.47) e (A.48). Nesse trabalho utilizaremos a forma de somatório, cuja energia é dada por:

$$E = \frac{KN^2}{8} - \frac{\Delta\mu N}{2} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^N v_j, \quad (2.8)$$

onde os parâmetros v_j são soluções das EAB:

$$\frac{(v_i^2 - 1)\epsilon + (2\Delta\mu - K(N-1))v_i}{Kv_i^2} = \sum_{j \neq i}^N \frac{2}{v_j - v_i}. \quad (2.9)$$

Assim, para cada conjunto de solução das EAB (2.9), $\{v_j | j = 1, \dots, N\}$, nós temos um autovalor de energia associado (2.8). Analiticamente não foi encontrada, em geral, uma solução para equação (2.9); portanto, utilizaremos métodos numéricos para resolvê-la. Para o caso atrativo, ($K < 0$), a solução numérica para o estado fundamental apresenta solução complexa na forma $\{v_j | j = 1, \dots, N\} = \{x_k \pm iy_k | k = 1, \dots, \frac{N}{2}\}$. Isto é consistente fisicamente, uma vez que, se uma equação algébrica com coeficientes reais admite solução complexa a sua conjugada também deverá ser solução para que os autovalores sejam reais. Todas as soluções obtidas foram comparadas com as da diagonalização exata, estando em plena concordância.

2.2.1 Solução das EAB para alguns valores de N

Nesta seção apresentaremos algumas soluções do estado fundamental para diferentes valores do número de átomos. Nesses casos adotaremos $\Delta\mu = 0$, uma vez que esse parâmetro

apenas desloca o espectro de energia por uma constante, [10], e também porque muitos experimentos são feitos na ausência de potencial externo, [12]. Através da análise clássica feita em [13] sabemos que podemos utilizar os pontos fixos como candidatos para pontos críticos em uma transição de fase quântica. Foi mostrado em [13] que esse modelo apresenta um ponto de bifurcação quando $\lambda_C^{-1} = -1$, onde λ^{-1} é um parâmetro definido como

$$\lambda^{-1} = \frac{2\epsilon}{KN}. \quad (2.10)$$

Vamos então verificar o que ocorre com a distribuição das raízes das EAB no plano complexo para diferentes valores de λ^{-1} . Começamos com o caso de $N = 40$, apresentado na Figura 2.1, onde ocorre uma mudança no comportamento das soluções acima de um $\lambda^{-1} = \lambda_C^{-1}$. Abaixo de λ_C^{-1} , todas as raízes estão situadas na mesma curva, enquanto que para valores maiores que λ_C^{-1} , as raízes começam a se distribuir sobre famílias distintas de curvas. Isso também acontece para diferentes valores de N , conforme as Figuras 2.2, 2.3 e 2.4.

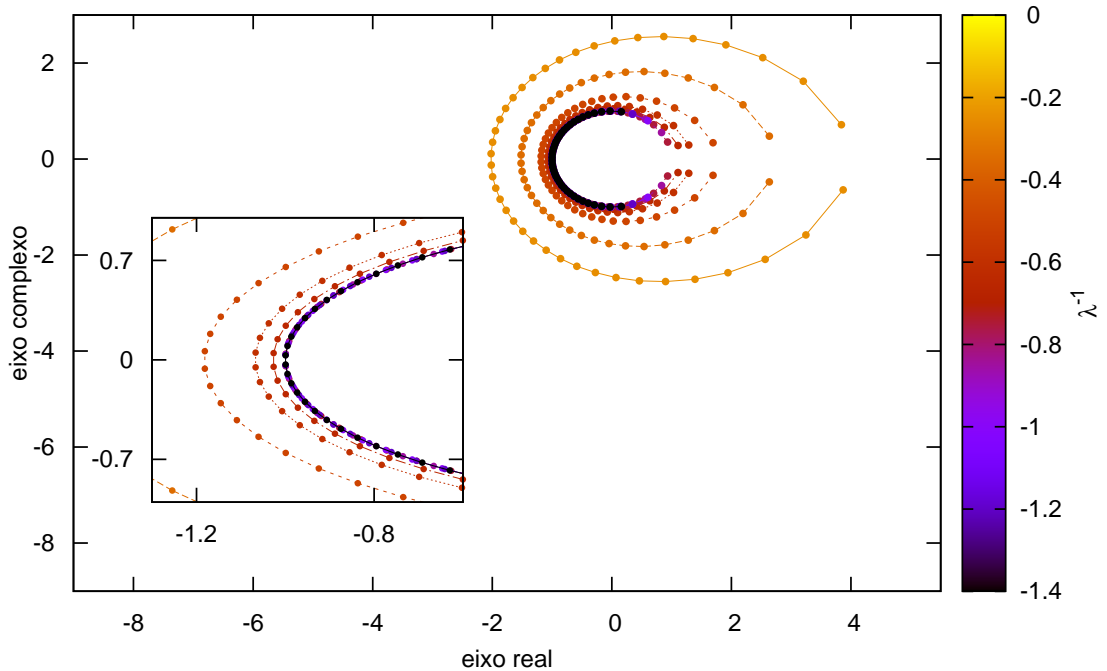


Fig. 2.1: Conjunto de soluções para as EAB (2.9) no plano complexo para o estado fundamental para $N=40$ contendo o zoom da região de interesse. Cada curva está associada a um valor de λ^{-1} , que pode ser identificada pela tabela de cores no lado direito. Uma mudança no comportamento das raízes ocorre em $\lambda^{-1} \approx -0.71$

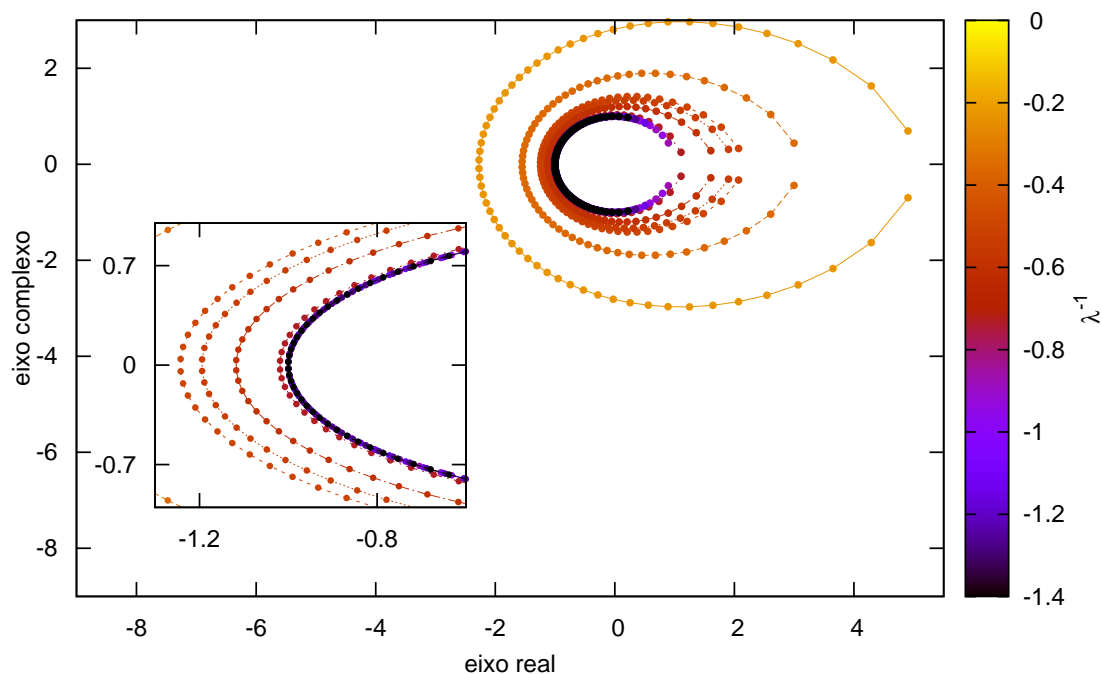


Fig. 2.2: Conjunto de soluções para as EAB (2.9) no plano complexo para o estado fundamental para $N=60$ contendo o zoom da região de interesse. Cada curva está associada a um valor de λ^{-1} que pode ser identificada pela tabela de cores no lado direito. Uma mudança no comportamento das raízes ocorre em $\lambda^{-1} \approx -0.76$

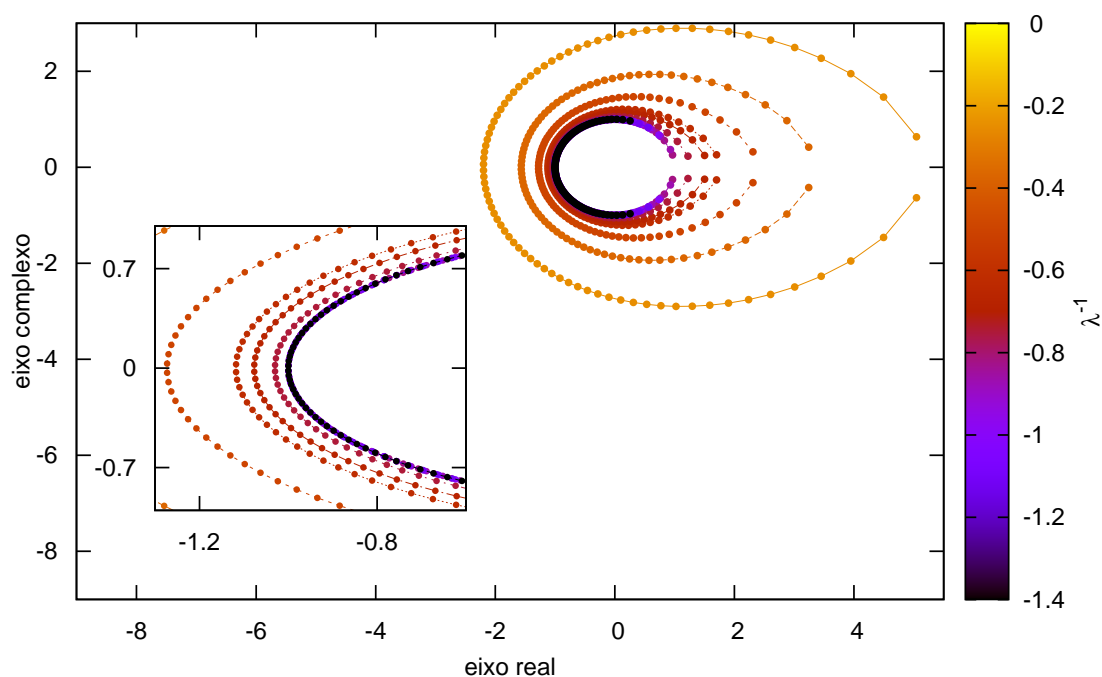


Fig. 2.3: Conjunto de soluções para as EAB (2.9) no plano complexo para o estado fundamental para $N=80$ contendo o zoom da região de interesse. Cada curva está associada a um valor de λ^{-1} que pode ser identificada pela tabela de cores no lado direito. Uma mudança no comportamento das raízes ocorre em $\lambda^{-1} \approx -0.81$

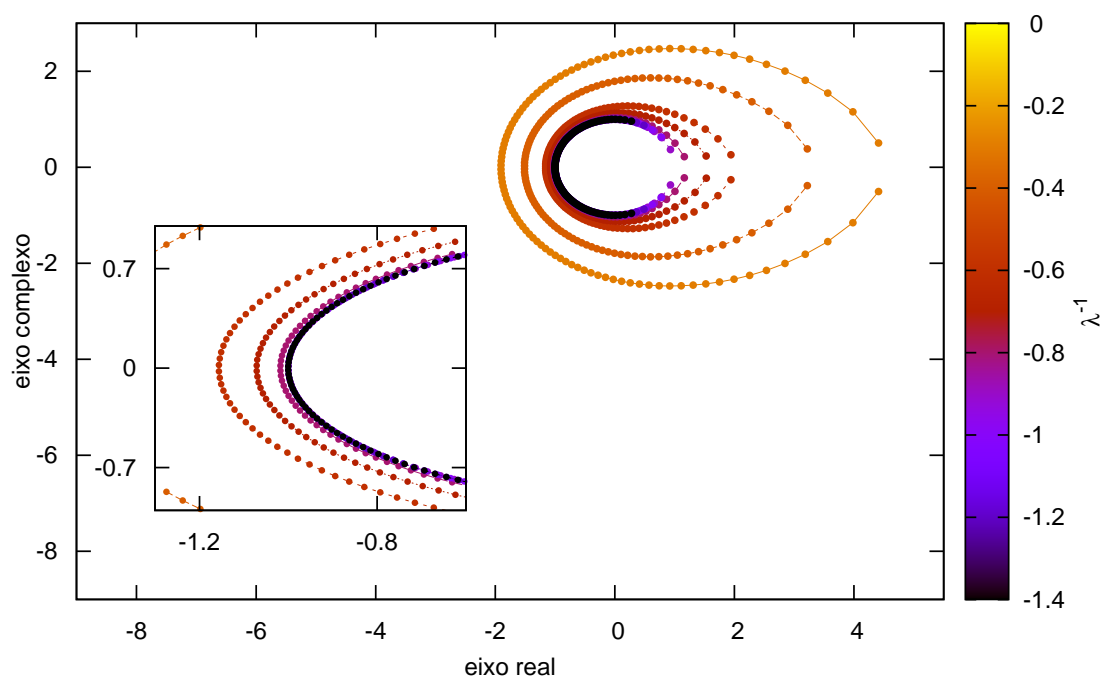


Fig. 2.4: Conjunto de soluções para as EAB (2.9) no plano complexo para o estado fundamental para $N=100$ contendo o zoom da região de interesse. Cada curva está associada a um valor de λ^{-1} que pode ser identificada pela tabela de cores no lado direito. Uma mudança no comportamento das raízes ocorre em $\lambda^{-1} \approx -0.82$

2.3 Transição de fase quântica

Uma transição de fase quântica é usualmente definida como uma transição de fase no estado fundamental do sistema quando variamos algum parâmetro deste sistema. Basicamente há uma mudança abrupta na estrutura do estado fundamental na TFQ, ocasionando súbitas mudanças nas propriedades do sistema. Transições de fase quânticas ocorrem a temperatura nula, devido a flutuações quânticas quando variamos algum parâmetro [15]. Embora a transição de fase quântica seja definida no limite termodinâmico, a análise feita em sistemas finitos indica pontos que mostram uma resposta significativa à variações do estado fundamental, indicando uma possível transição de fase. Rigorosamente, estes pontos são chamados de “pontos de pré-transição de fase quântica”, mas para simplificar, não utilizaremos esta terminologia. Dentre as técnicas existentes utilizaremos o gap de energia e a fidelidade para o estudo da transição de fase quântica, para isso os auto-estados e os autovalores do Hamiltoniano que serão utilizadas a seguir serão extraídos da diagonalização exata.

2.3.1 GAP

Um método tradicional para analisar as transições de fase quânticas é pelo estudo do gap da energia ΔE , definido como a diferença entre o primeiro estado excitado ($E^{(1)}$) e o estado fundamental ($E^{(0)}$) do sistema, isto é,

$$\Delta E = E^{(1)} - E^{(0)}. \quad (2.11)$$

O valor do parâmetro λ^{-1} para qual o gap de energia se anula ou apresenta um mínimo identifica uma TFQ. Continuando a análise do caso atrativo e com potencial externo nulo, na figura (2.5) temos o gap de energia em função de λ^{-1} para diferentes valores de N . Um mínimo nesse gráfico indica uma TFQ e esse ocorre para $\lambda^{-1} \approx -0.68$, $\lambda^{-1} \approx -0.75$, $\lambda^{-1} \approx -0.79$ e $\lambda^{-1} \approx -0.82$, para $N=40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. Conforme N aumenta, vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\lambda_C^{-1} = -1$.

2.3.2 Fidelidade

Outro método para analisar transições de fase quânticas é através do comportamento da fidelidade. Esse conceito é largamente utilizado na teoria da informação quântica, [16]. Podemos definir a fidelidade como o módulo do produto escalar de dois estados quânticos, ou seja,

$$F(\psi, \phi) = | \langle \psi | \phi \rangle |. \quad (2.12)$$

Esse valor varia entre 0 e 1, onde 1 corresponde a estados indistinguíveis e 0 para estados completamente distinguíveis, sendo $|\psi \rangle$ e $|\phi \rangle$ estados fundamentais do sistema onde eles diferem por uma pequena variação no parâmetro λ^{-1} . Na Figura (2.6) apresentamos a fidelidade, onde basicamente, o ponto em que a curva tem um declínio acentuado define o valor crítico para o parâmetro. Uma queda abrupta na fidelidade ocorre para $\lambda^{-1} \approx -0.73$, -0.78 , -0.82 , -0.84 com $N = 40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. A medida que N aumenta, vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\lambda_C^{-1} = -1$.

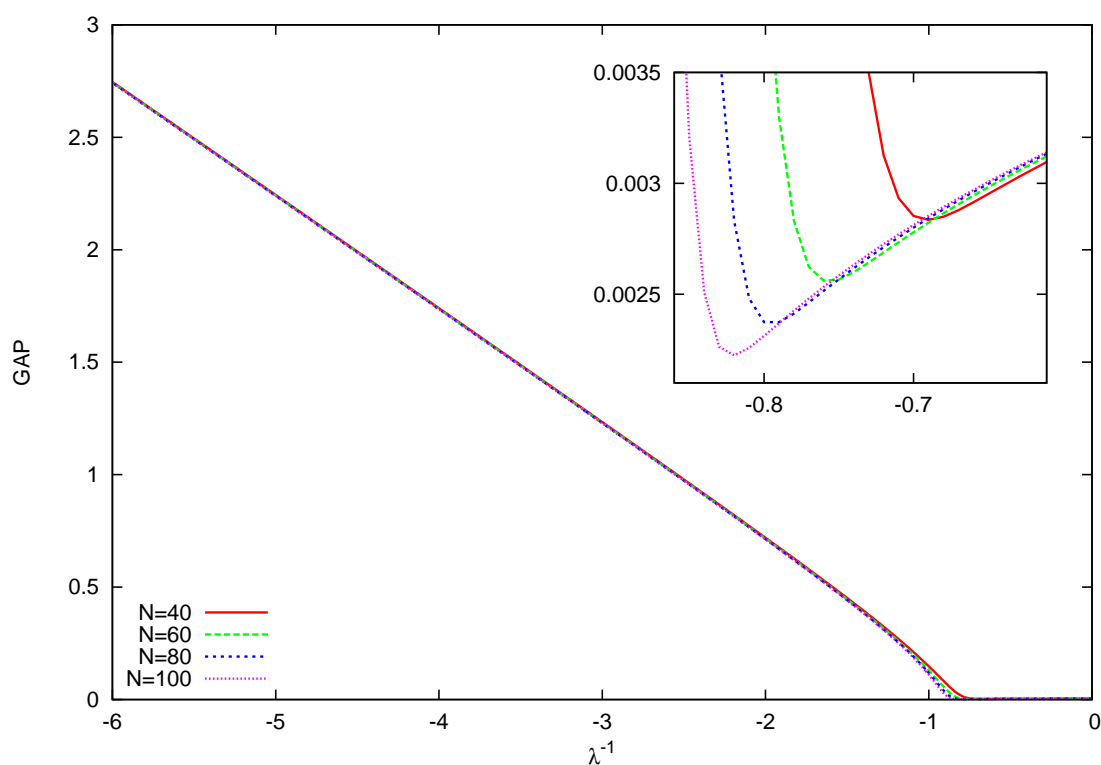


Fig. 2.5: *Gap de energia do estado fundamental como função de λ^{-1} para diferentes valores de N . Um mínimo nesse gráfico indica uma TFQ e esse ocorre para $\lambda^{-1} \approx -0.68$, $\lambda^{-1} \approx -0.75$, $\lambda^{-1} \approx -0.79$ e $\lambda^{-1} \approx -0.82$, para $N=40$, 60, 80 e 100, respectivamente. Conforme N aumenta vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\lambda_C^{-1} = -1$.*

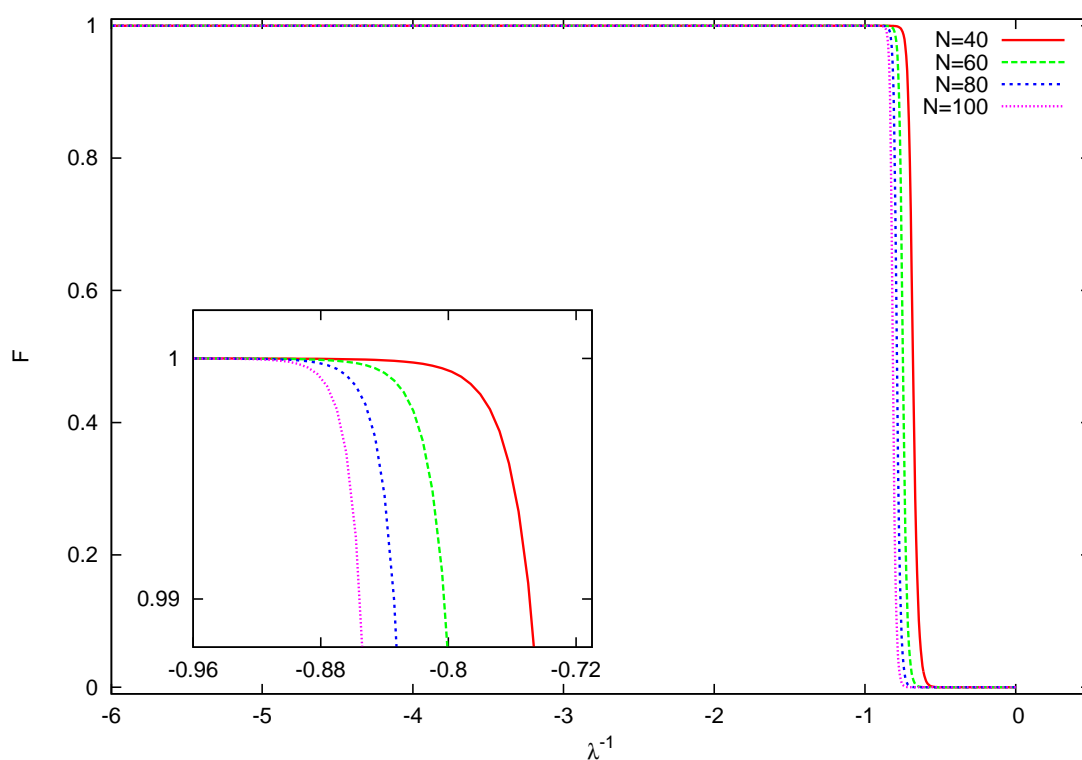


Fig. 2.6: Fidelidade do estado fundamental como função do parâmetro λ^{-1} para diferentes valores de N . Uma queda abrupta na fidelidade ocorre para $\lambda^{-1} \approx -0.73, -0.78, -0.82, -0.84$ com $N = 40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. A medida que N aumenta vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\lambda_C^{-1} = -1$.

2.3.3 EAB e transições de fase quânticas

Observando as figuras (2.5) e (2.6) podemos identificar os pontos de transição de fase utilizando os métodos convencionais para um dado conjunto de parâmetros. Com isso, podemos reparar uma notável correspondência entre os pontos encontrados na análise das EAB do estado fundamental com os observados na Fidelidade e no Gap. Podemos notar também que o aumento do número de bósons aumenta a correspondência entre os métodos tradicionais e o estudo da mudança do comportamento das soluções das EAB tendendo a $\lambda_C^{-1} = -1$, como fora previsto pela análise clássica em [13]. Com isso, podemos utilizar o estudo do comportamento das soluções das EAB como método alternativo para identificar um ponto de transição de fase quântica.

Podemos interpretar essa transição de fase quântica através do valor esperado do número de átomos (normalizado) em um dado condensado, $n_i = \frac{\langle N_i \rangle}{N}$. Observamos na Figura 2.7 que para valores de $\lambda^{-1} < -1$ temos, em média, metade dos átomos em cada condensado, dessa forma estamos na fase em que os bósons estão tunelando, já para $\lambda^{-1} > -1$ temos uma mudança abrupta na curva indicando uma transição de fase onde todos os átomos estão em um dos condensados, ou seja, na fase de auto-aprisionamento. Esse comportamento ocorre em $\lambda^{-1} \approx -1$. Podemos então interpretar como uma transição entre uma fase deslocalizada com tunelamento de átomos para $\lambda^{-1} < -1$ e uma fase localizada para $\lambda^{-1} > -1$.

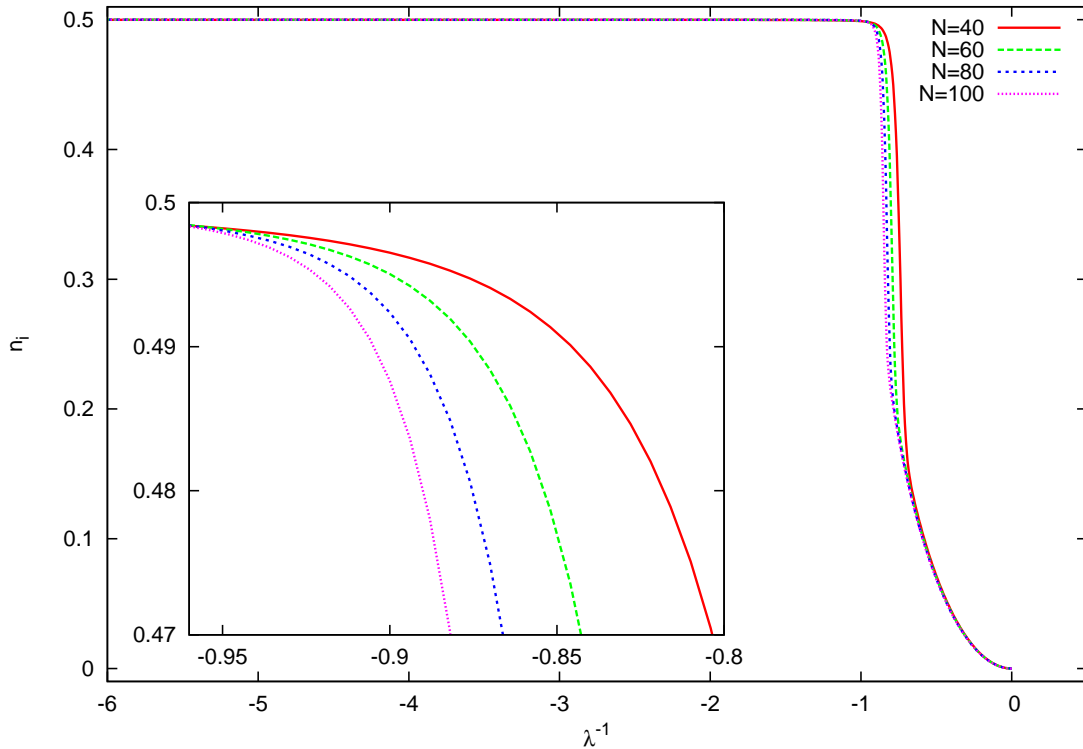


Fig. 2.7: Valor esperado normalizado do número de átomos em um condensado como função de λ^{-1} . Podemos observar uma mudança abrupta na curva perto de $\lambda^{-1} = -1$

Capítulo 3

Modelo para um condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular

3.1 O Hamiltoniano

Agora estudaremos o modelo que descreve a conversão de átomos idênticos em moléculas diatômicas e a dissociação destas num condensado de Bose-Einstein. O Hamiltoniano mais geral que descreve este fenômeno é, [8],

$$H = U_a N_a^2 + U_b N_b^2 + U_{ab} N_a N_b + \mu_a N_a + \mu_b N_b + \Omega (a^\dagger a^\dagger b + b^\dagger a a), \quad (3.1)$$

onde b e b^\dagger são operadores de destruição e criação de moléculas, a e a^\dagger são os operadores de destruição e criação de átomos, respectivamente. O operador $N_a = a^\dagger a$ é o número de átomos não ligados no condensado, enquanto $N_b = b^\dagger b$ é o número de moléculas. O número total de átomos é dado por $N = N_a + 2N_b$, e corresponde a uma quantidade conservada do sistema. O parâmetro U_a denota a interação entre átomos, U_b a interação entre moléculas, U_{ab} a interação entre átomos e moléculas, μ_j 's os potenciais externos e Ω a amplitude de interconversão de átomos \leftrightarrow moléculas. Esses operadores também estão sujeitos a álgebra de Heisenberg (2.2), (2.3) e (2.4),

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger] &= \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j] &= [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \\ [N_i, a_j] &= -\delta_{ij} a_i, \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_i^\dagger, \end{aligned}$$

e também

$$[a, b] = [a, b^\dagger] = [a^\dagger, b^\dagger] = [a^\dagger, b] = 0. \quad (3.2)$$

Estudaremos aqui a seguinte particularização:

$$U_a = U_b = U_{ab} = 0,$$

$$\mu_b = 0.$$

Dessa forma podemos reescrever o Hamiltoniano (3.1) da seguinte forma,

$$H = \mu_a N_a + \Omega (a^\dagger a^\dagger b + b^\dagger a a), \quad (3.3)$$

que, apesar de ser simples, ainda captura as principais propriedades físicas do sistema. A integrabilidade e solução exata deste Hamiltoniano foi estudada em [13] juntamente com o caso mais geral deste, (3.1).

3.2 Solução exata

O modelo para o condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular apresenta solução exata e a integrabilidade pode ser mostrada através do *método do espalhamento inverso quântico*. Pode se mostrar que a energia do estado fundamental para este modelo é dada por [13]

$$E = 2\mu_a \left(M + \frac{p}{2} \right) + 2\Omega \sum_{j=1}^M v_j, \quad (3.4)$$

cujos parâmetros $\{v_j\}$'s estão sujeitos as EAB,

$$\frac{2p+1}{2v_j} - v_j - \frac{\mu_a}{\Omega} = \sum_{k \neq j}^M \frac{2}{v_k - v_j}. \quad (3.5)$$

Sendo

$$M = \frac{N-p}{2}, \quad (3.6)$$

onde p é igual a um se N for ímpar ou zero se N for par.

Dessa forma, para cada conjunto de soluções das EAB, (3.5), nós temos um autovalor de energia associado, (3.4). Em geral, não foram encontradas soluções analíticas para esta equação. Com isso utilizaremos métodos numéricos para resolvê-la. Para o estado fundamental, a solução numérica apresenta somente raízes reais.

3.2.1 Solução das EAB para alguns valores de N

Iremos, nesta seção, verificar o comportamento das soluções das EAB para diferentes valores de N . Através da análise clássica feita em [13], temos que o Hamiltoniano (3.3) apresenta um ponto de bifurcação quando $\alpha_C = -1$, onde

$$\alpha = -\frac{\mu_a}{\Omega\sqrt{2N}}, \quad (3.7)$$

ou seja, esse ponto se torna candidato para uma transição de fase quântica.

Começamos a análise com $N = 40$, ver Figura (3.1). A mudança no comportamento das soluções das EAB se dá através do desprendimento das raízes junto à origem com uma mudança na densidade delas, isto é, para valores de α maiores que α_C vemos que as soluções tem uma distribuição começando exatamente sobre a origem, estando bem próximas umas das outras. Ao diminuir o valor de α vemos que as raízes se tornam menos densas e tendem a se distanciar da origem depois de ultrapassar α_C . Esse comportamento ocorre também para $N = 60, 80$ e 100 , ver Figura (3.2), (3.3) e (3.4).

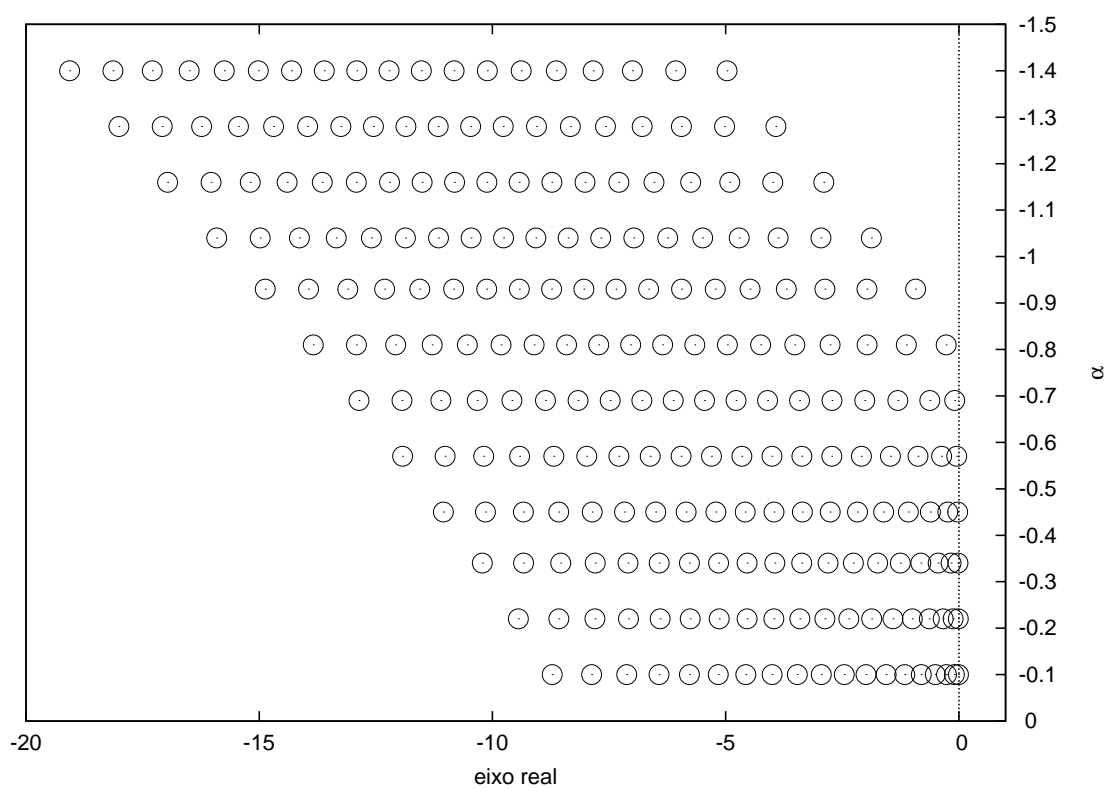


Fig. 3.1: Soluções das EAB (3.5) em função de α com $N = 40$. Cada linha corresponde a uma solução das EAB para um particular valor de α . Podemos notar uma mudança no comportamento das soluções para $\alpha \approx -0.8$.

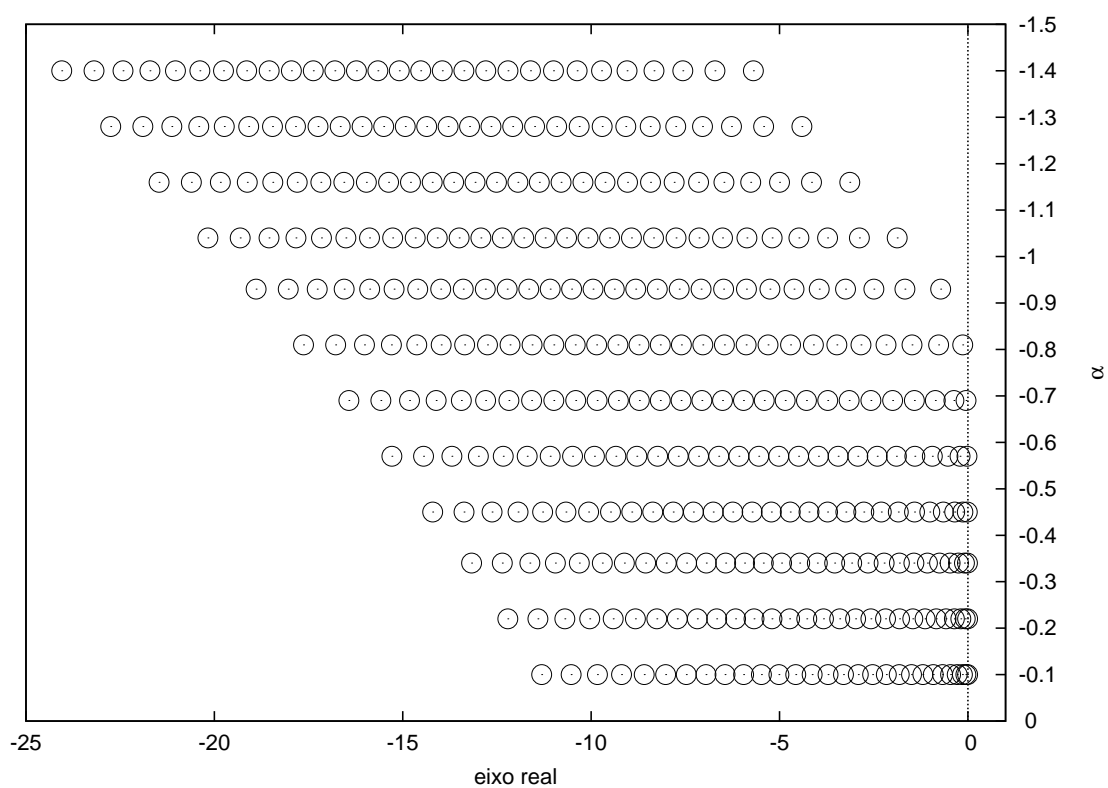


Fig. 3.2: Soluções das EAB (3.5) em função de α com $N = 60$. Cada linha corresponde a uma solução das EAB para um particular valor de α . Podemos notar uma mudança no comportamento das soluções para $\alpha \approx -0.85$.

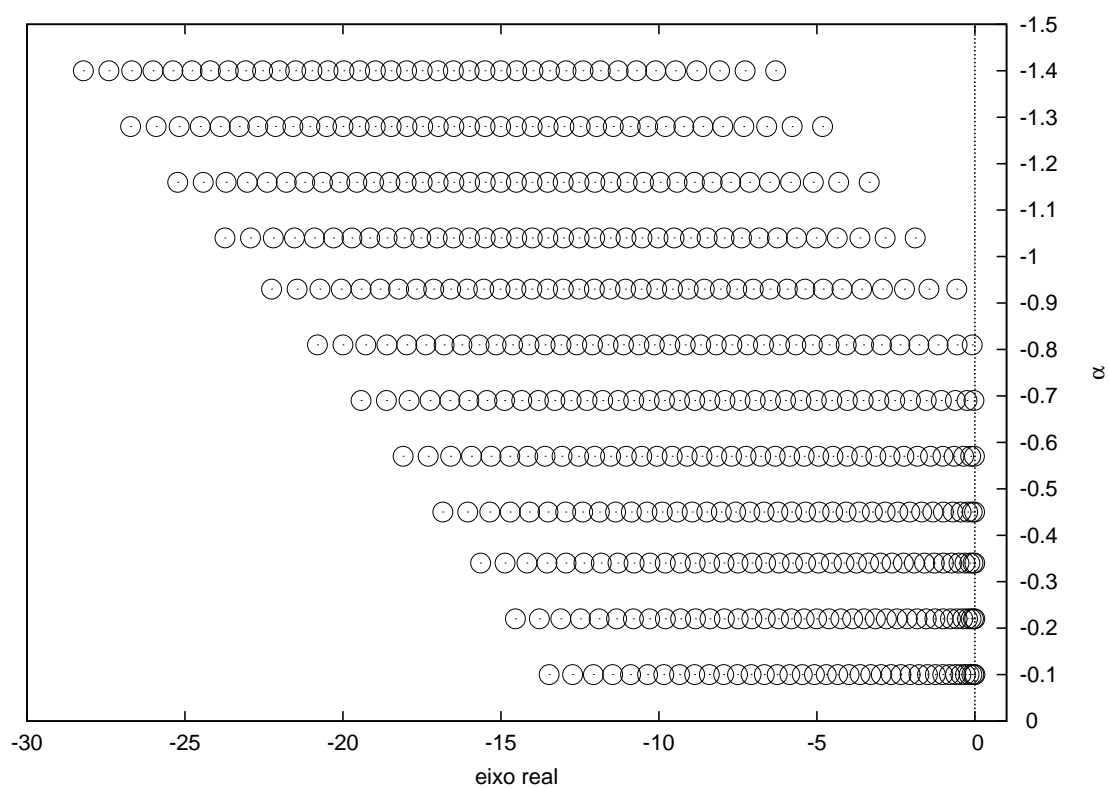


Fig. 3.3: Soluções das EAB (3.5) em função de α com $N = 80$. Cada linha corresponde a uma solução das EAB para um particular valor de α . Podemos notar uma mudança no comportamento das soluções para $\alpha \approx -0.90$.

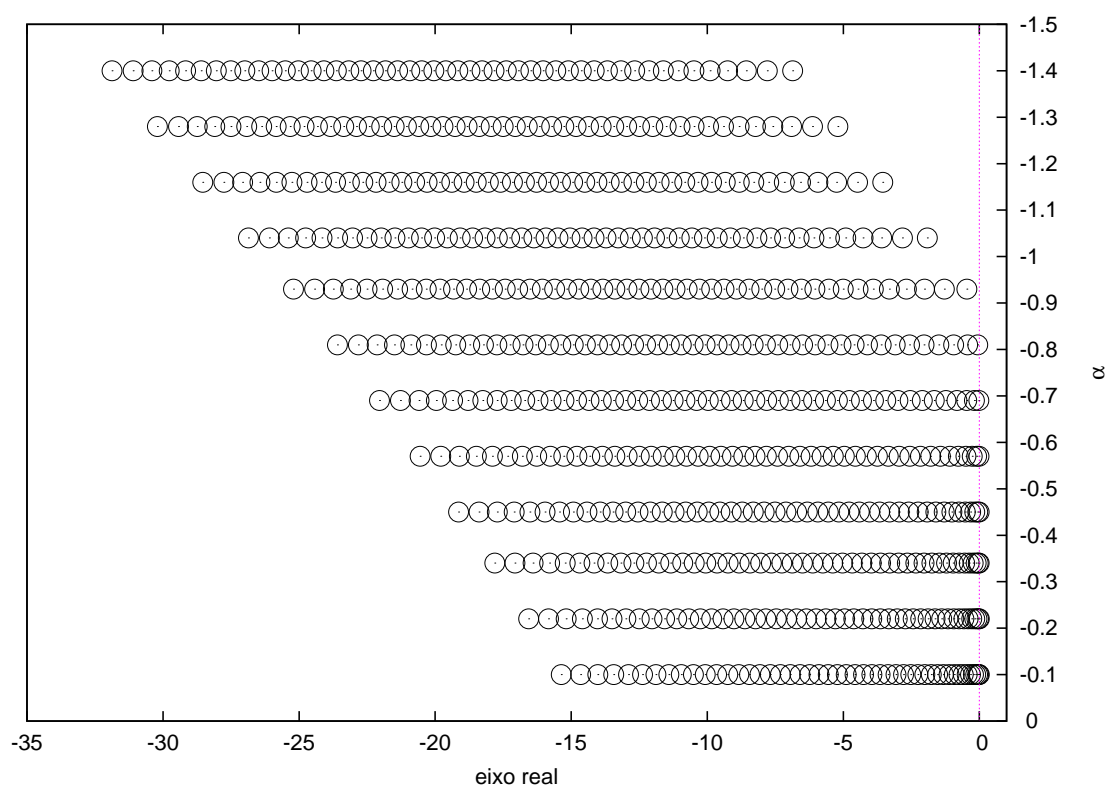


Fig. 3.4: Soluções das EAB (3.5) em função de α com $N = 100$. Cada linha corresponde a uma solução das EAB para um particular valor de α . Podemos notar uma mudança no comportamento das soluções para $\alpha \approx -0.95$.

3.3 Transição de fase quântica

Novamente, utilizaremos métodos tradicionais para o estudo da transição de fase quântica como o gap de energia e a análise da fidelidade utilizando os resultados tirados da diagonalização exata do Hamiltoniano 3.3.

3.3.1 GAP

Como definido na equação (2.11), o gap é a diferença entre a energia do primeiro estado excitado e a energia do estado fundamental do sistema. O valor do parâmetro α para qual o gap de energia se anula ou apresenta um mínimo identifica uma TFQ. Na figura (3.5) temos o gap de energia como função de α para $N = 40, 60, 80$ e 100 com os mínimos em $\alpha = -0.85, -0.87, -0.90$ e -0.91 , respectivamente. Conforme N aumenta vemos que o mínimo se move para $\alpha_C = -1$.

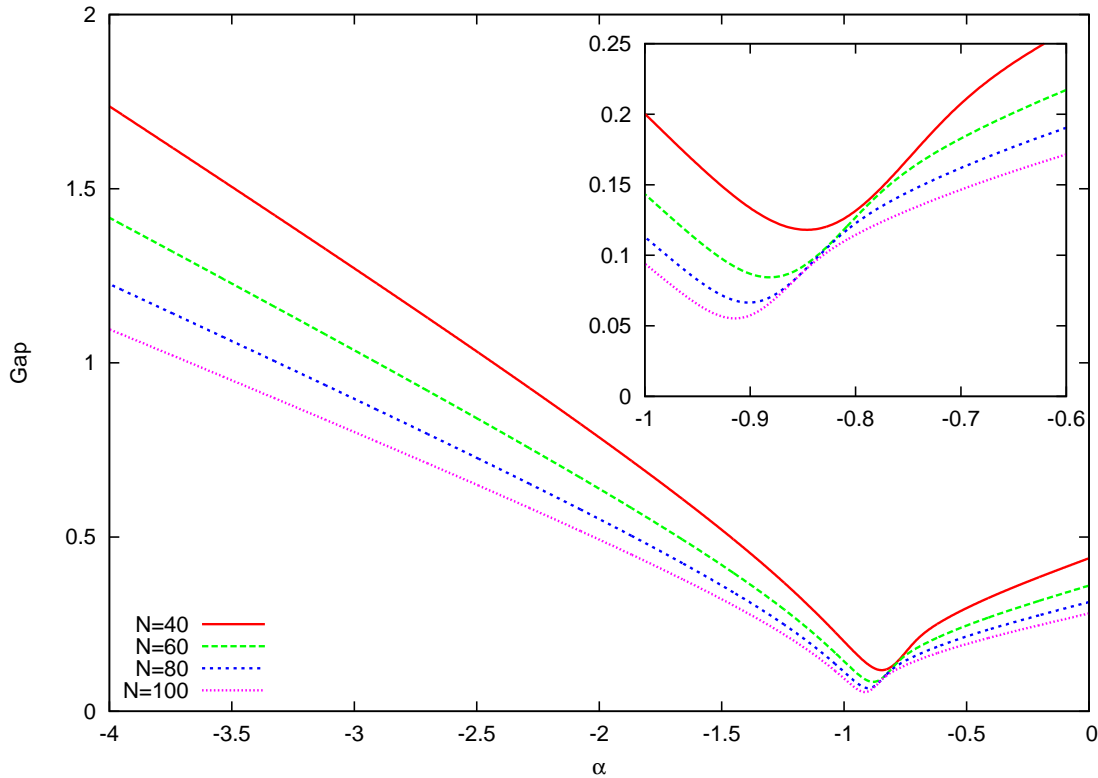


Fig. 3.5: Gap de energia em função de α para diferentes valores de N . Um mínimo nesse gráfico indica uma TFQ e esse ocorre para $\alpha = -0.85, -0.87, -0.90$ e -0.91 quando $N = 40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. Conforme N aumenta vemos que o mínimo se move para $\alpha_C = -1$.

3.3.2 Fidelidade

Como definido na equação (2.12), a fidelidade é o módulo do produto escalar de dois estados quânticos. O valor de α para o qual a fidelidade apresenta um mínimo identifica uma transição de fase quântica. Na Figura (3.6) temos que os valores críticos para o α são $\alpha = -0.85, -0.89, -0.91$ e -0.92 para $N = 40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. A medida que N aumenta vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\alpha_C = -1$.

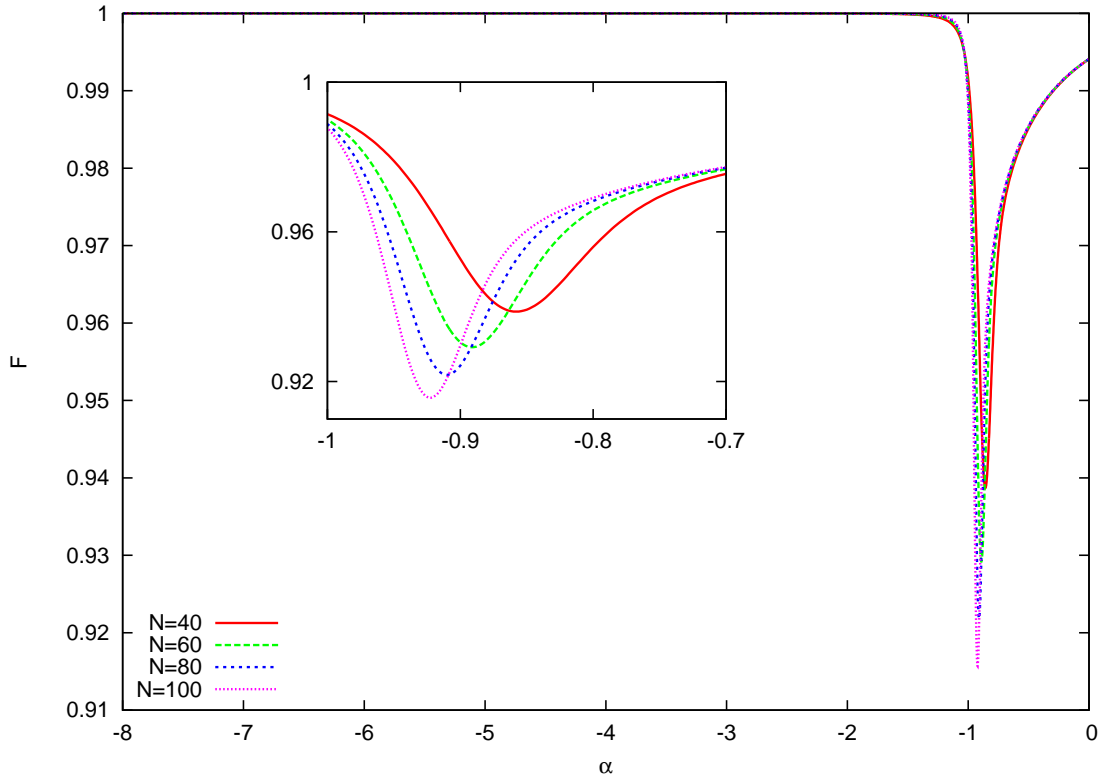


Fig. 3.6: Fidelidade do estado fundamental como função do parâmetro α para diferentes valores de N . Um mínimo nesse gráfico ocorre para $\alpha = -0.85, -0.89, -0.91$ e -0.92 com $N = 40, 60, 80$ e 100 , respectivamente. A medida que N aumenta vemos que o mínimo se move para o ponto crítico $\alpha_C = -1$.

3.3.3 EAB e transições de fase quânticas

Novamente, com ajuda das Figuras (3.5) e (3.6), podemos identificar os pontos de transição de fase quântica utilizando os métodos tradicionais como o gap de energia e a fidelidade. Podemos notar uma correspondência entre os métodos tradicionais e o estudo das soluções das EAB. Logo, a utilização do estudo das soluções da EAB como método alternativo para identificar um ponto de transição de fase é consistente.

Essa transição também pode ser interpretada se olharmos a Figura (3.7), onde o valor esperado do número de moléculas normalizado $n_b = \frac{\langle N_b \rangle}{N}$ do estado fundamental como função de α para diferentes valores de N . Podemos notar que para valores de $\alpha > -1$ temos

uma conversão de átomos em moléculas e vice-versa ocorrendo, enquanto que para $\alpha < -1$ temos uma saturação no número de moléculas onde todos os átomos se ligaram.

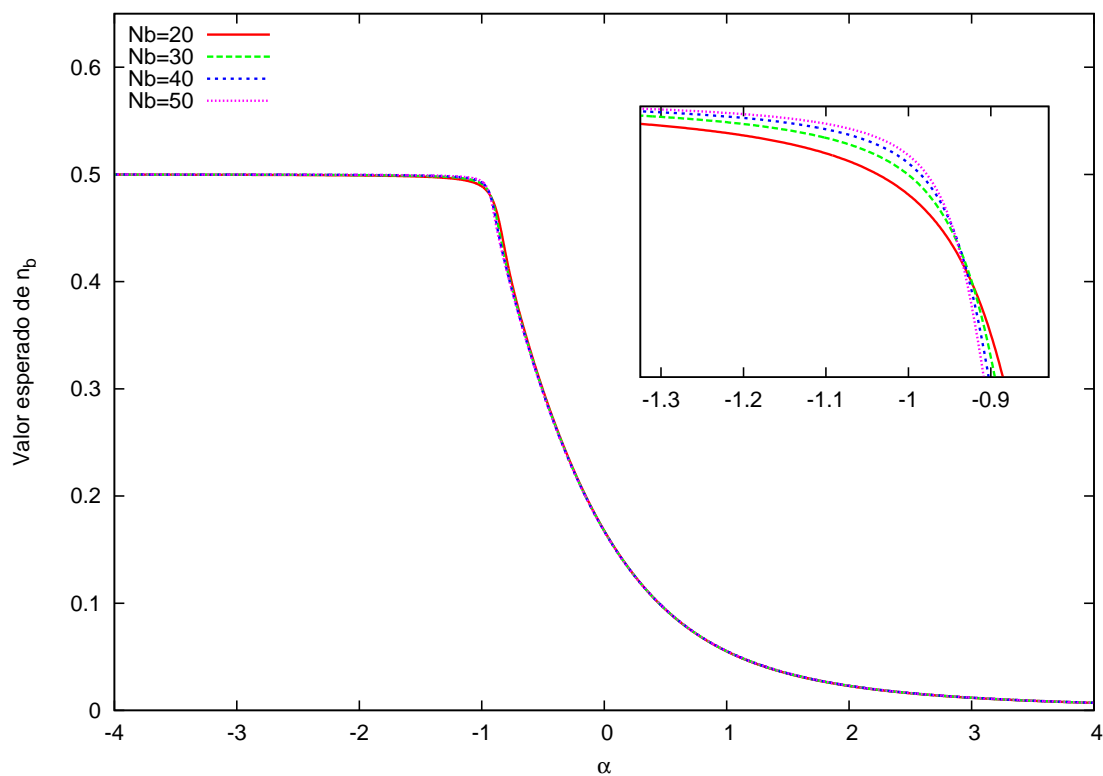


Fig. 3.7: Valor esperado normalizado do número de moléculas (n_b) como função do parâmetro α . Podemos notar uma transição abrupta perto do ponto crítico $\alpha_C = -1$

Capítulo 4

Conclusão

A principal proposta desse trabalho foi mostrar que a identificação de uma transição de fase quântica pode ser inferida através do estudo do comportamento das EAB dos modelos integráveis. Para isto, revisamos o método algébrico do Ansatz de Bethe, obtendo assim os autovalores do Hamiltoniano e as EAB para um modelo de dois condensados de Bose-Einstein acoplados por tunelamento de Josephson. Encontramos as soluções numéricas das EAB para o estado fundamental desse sistema, e verificamos que ocorre uma mudança abrupta no comportamento das raízes das EAB ao variar os parâmetros do sistema. Comparando estes resultados com métodos tradicionais de análise de transição de fase, como o gap e a fidelidade, pudemos notar uma correspondência entre o ponto de transição de fase quântica e o ponto crítico onde ocorre a mudança no comportamento das soluções das EAB.

Posteriormente, partimos dos autovalores do Hamiltoniano para um condensado do tipo atômico-molecular juntamente com as EAB associadas, resolvendo-as numericamente para alguns casos no estado fundamental. Novamente quando comparamos estes resultados com os métodos tradicionais de análise das transições de fase quânticas pudemos notar o mesmo tipo de correspondência. As estruturas das soluções, embora diferentes entre os modelos, apresentam um comportamento peculiar quando variamos alguns parâmetros do Hamiltoniano indicando que as soluções das EAB para o estado fundamental refletem uma mudança no comportamento do espectro de energia. Ou seja, pudemos verificar que a análise das soluções das equações do ansatz de Bethe pode ser usada como método alternativo para indicar uma transição de fase quântica.

Apêndice A

Integrabilidade e solução exata

A.1 Solução exata: Forma de produtório

Esta seção tem como objetivo mostrar que o Hamiltoniano (2.7) é integrável, obter as equações do ansatz de Bethe e os autovalores para o condensado de Bose-Einstein com tunelamento Josephson utilizando a álgebra de Yang-Baxter. O mesmo procedimento pode ser adotado para o modelo de condensado de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular. Primeiramente apresentaremos a equação de Yang-Baxter,

$$R_{12}(u-v)R_{12}(u)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{12}(u)R_{12}(u-v), \quad (\text{A.1})$$

onde R_{ij} , age sobre um $END(V \otimes V)^*$ sendo V um espaço vetorial, atuando não trivialmente sobre o i -ésimo e o j -ésimo espaço e como identidade nos outros. Esta equação é fundamental na teoria dos sistemas integráveis, pois a partir dela estes sistemas podem ser construídos, como exemplificaremos a seguir.

A matrix R pode ser vista como constante de estrutura para a álgebra de Yang-Baxter que é gerada pela matriz de monodromia $T(u)$ e regida pela seguinte equação:

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v), \quad (\text{A.2})$$

chamada de álgebra de Yang-Baxter para a matriz de monodromia.

Explicitamente, para os modelos deste trabalho, a matriz R utilizada é

$$R_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde $b(u) = \frac{u}{u+\eta}$, $c(u) = \frac{\eta}{u+\eta}$, η é um parâmetro complexo arbitrário e α, β, δ e γ variam de um até dois. Dessa forma, a $T(u)$ deve ser uma matriz 2×2 , onde a forma mais geral dela, de forma explícita, é dada por

$$T_{\alpha}^{\beta}(u) = \begin{pmatrix} T_1^1(u) & T_2^1(u) \\ T_1^2(u) & T_2^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

* END denota o endomorfismo sobre o espaço em questão

e a equação (A.2) pode ser escrita explicitamente da seguinte forma

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 R_{\alpha\beta}^{a'b'}(u-v)T_{c'}^{\alpha}(u)T_{d'}^{\beta}(v) = \sum_{\alpha,\beta=1}^2 T_{\alpha}^{b'}(v)T_{\beta}^{a'}(u)R_{c'd'}^{\beta\alpha}(u-v). \quad (\text{A.5})$$

Variando a', b', c' e d' podemos tirar as relações de comutação da álgebra, isto é,

$$[A(u), A(v)] = 0, \quad [B(u), B(v)] = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$[C(u), C(v)] = 0, \quad [D(u), D(v)] = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} [A(u), D(v)] &= \frac{\eta}{u-v} (C(v)B(u) - C(u)B(v)) \\ &= \frac{\eta}{u-v} (B(u)C(v) - B(v)C(u)), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$A(u)B(v) = \frac{u-v-\eta}{u-v} B(v)A(u) + \frac{\eta}{u-v} B(u)A(v), \quad (\text{A.9})$$

$$A(u)C(v) = \frac{u-v+\eta}{u-v} C(v)A(u) - \frac{\eta}{u-v} C(u)A(v), \quad (\text{A.10})$$

$$D(u)B(v) = \frac{u-v+\eta}{u-v} B(v)D(u) - \frac{\eta}{u-v} B(u)D(v), \quad (\text{A.11})$$

$$D(u)C(v) = \frac{u-v-\eta}{u-v} C(v)D(u) + \frac{\eta}{u-v} C(u)D(v), \quad (\text{A.12})$$

$$B(u)A(v) = \frac{u-v-\eta}{u-v} A(v)B(u) + \frac{\eta}{u-v} A(u)B(v), \quad (\text{A.13})$$

$$B(u)D(v) = \frac{u-v+\eta}{u-v} D(v)B(u) - \frac{\eta}{u-v} D(u)B(v), \quad (\text{A.14})$$

$$C(u)A(v) = \frac{u-v+\eta}{u-v} A(v)C(u) - \frac{\eta}{u-v} A(u)C(v), \quad (\text{A.15})$$

$$C(u)D(v) = \frac{u-v-\eta}{u-v} D(v)C(u) + \frac{\eta}{u-v} D(u)C(v), \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} [B(u), C(v)] &= \frac{\eta}{u-v} (A(u)D(v) - A(v)D(u)) \\ &= \frac{\eta}{u-v} (D(v)A(u) - D(u)A(v)). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Tendo as relações de comutação podemos seguir [8] e [17], e usar a seguinte realização:

$$L(u) = \pi(T(u)) = L_1^a(u + \omega)L_2^a(u - \omega), \quad (\text{A.18})$$

onde

$$L_i^a(u) = \begin{pmatrix} u + \eta N_i & a_i \\ a_i^\dagger & \eta^{-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad (\text{A.19})$$

e ω é um parâmetro arbitrário, a ser escolhido posteriormente. Dessa forma,

$$L(u) = \begin{pmatrix} (u + \omega + \eta N_1)(u - \omega + \eta N_2) + a_2^\dagger a_1 & (u + \omega + \eta N_1)a_1 + \eta^{-1}a_1 \\ (u - \omega + \eta N_2)a_1^\dagger + \eta^{-1}a_2^\dagger & a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Podemos verificar que $L(u)$ satisfaz a álgebra de Yang-Baxter, isto é,

$$R_{12}(u - v)L_1(u)L_2(v) = L_2(v)L_1(u)R_{12}(u - v). \quad (\text{A.21})$$

ou seja, a escolha da realização é pertinente. Posteriormente vamos mostrar que esta escolha será oportuna e nos permitirá fazer uma conexão com o Hamiltoniano (2.7). Com isso podemos fazer a identificação

$$\pi(A(u)) = (u + \omega + \eta N_1)(u - \omega + \eta N_2) + a_2^\dagger a_1, \quad (\text{A.22})$$

$$\pi(B(u)) = (u + \omega + \eta N_1)a_1 + \eta^{-1}a_1, \quad (\text{A.23})$$

$$\pi(C(u)) = (u - \omega + \eta N_2)a_1^\dagger + \eta^{-1}a_2^\dagger, \quad (\text{A.24})$$

$$\pi(D(u)) = a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2}. \quad (\text{A.25})$$

Agora podemos definir de forma usual a matriz de transferência como o traço da matriz de monodromia. Em termos da realização escolhida, temos:

$$\begin{aligned} t(u) &= \pi \left(\sum_{a=1}^2 T_a^a \right) = \\ &= u^2 + u\eta N + \eta^2 N_1 N_2 + \eta\omega(N_2 - N_1) + a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2 + \eta^{-2} - \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

É fácil mostrar através das relações de comutação para a matriz de monodromia que $[t(u), t(v)] = 0$; ou seja, o sistema é integrável.

O Hamiltoniano (2.7) pode ser escrito em termos da matriz de transferência e de algumas constantes como

$$H = -\kappa \left(t(u) - \frac{1}{4}(t'(0))^2 - ut'(0) - \eta^{-2} + \omega - u^2 \right), \quad (\text{A.27})$$

onde foram feitas as seguintes identificações

$$t'(0) = \left. \frac{dt}{du} \right|_{u=0} = \eta N, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{K}{4} = \frac{\kappa\eta^2}{2}, \quad \frac{\Delta\mu}{2} = -\kappa\eta\omega, \quad \frac{\epsilon}{2} = \kappa. \quad (\text{A.29})$$

O próximo passo para continuarmos a aplicar o método algébrico do Ansatz de Bethe é encontrar um pseudovácuo $|0\rangle$, tal que

$$A(u)|0\rangle = a(u)|0\rangle \quad (\text{A.30})$$

$$B(u)|0\rangle = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$C(u)|0\rangle \neq 0 \quad (\text{A.32})$$

$$D(u)|0\rangle = d(u)|0\rangle \quad (\text{A.33})$$

onde $a(u)$ e $d(u)$ são funções escalares. O vácuo escolhido é o vácuo do espaço de Fock pois ele é aniquilado pelo $B(u)$ e assim as funções escalares são dadas por

$$a(u) = (u + \omega)(u - \omega), \quad (\text{A.34})$$

$$d(u) = \eta^{-2}. \quad (\text{A.35})$$

Escolhemos o estado de Bethe como

$$|\vec{v}\rangle = |v_1, v_2, \dots, v_M\rangle = \prod_{i=1}^M C(v_i)|0\rangle, \quad (\text{A.36})$$

não importando a ordem dos C's, ver equação (A.7). Agora precisamos ver como a matriz de transferência age sobre esse estado, (A.36). Para isso utilizaremos (A.10), (A.8), (A.34) e (A.35). Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} t(u)|\vec{v}\rangle &= \pi(A(u))|\vec{v}\rangle + \pi(D(u))|\vec{v}\rangle = \\ & \Lambda(u)|\vec{v}\rangle - \sum_{i=1}^M \left[d(v_i) \left(\prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} \right) \right] C(u)|v_i\rangle \\ & + \sum_{i=1}^M \left[a(v_i) \left(\prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} \right) \right] C(u)|v_i\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

onde

$$\Lambda(u) = a(u) \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} \right) + d(u) \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} \right) \quad (\text{A.38})$$

e

$$|v_i\rangle = |v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_M\rangle. \quad (\text{A.39})$$

Dessa forma, o estado (A.36) só será autoestado da matriz de transferência se

$$d(v_i) \left(\prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j} \right) - a(v_i) \left(\prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j} \right) = 0 \quad (\text{A.40})$$

usando (A.34) e (A.35) podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$(v_i^2 - \omega^2) \eta^2 = \prod_{j \neq i}^M \frac{v_i - v_j - \eta}{v_i - v_j + \eta} \quad (\text{A.41})$$

sendo essa equação a *Equação do Ansatz de Bethe* (EAB).

Agora aplicando o Hamiltoniano, (2.7), sobre um estado $|\vec{v}\rangle$, cujos parâmetros satisfazem a EAB, podemos tirar que a energia é dada por

$$\begin{aligned} E &= -\kappa \left(\eta^{-2} \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{\eta}{v_i - u} \right) + (u^2 - \omega^2) \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{\eta}{v_i - u} \right) \right) \\ &+ \kappa \left(\eta^{-2} - \omega^2 + u^2 + \frac{\eta^2 N^2}{4} - u\eta N \right). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Para o modelo do condensando de Bose-Einstein do tipo atômico-molecular o procedimento geral e a matriz R , (A.3), são os mesmos, mas utiliza-se outra realização para a matriz de monodromia para gerar o Hamiltoniano (3.3). Maiores detalhes podem ser encontrados em [13].

A.2 Solução exata: Forma de Somatório

Existe uma forma alternativa das EAB e energias, escritas em termos de somatórios no lugar de produtórios (A.41), (A.42). Esta formulação foi discutida em detalhes em [18]. Aqui revisaremos a idéia principal do método e apresentaremos a solução em forma de somatório. Para isso, utilizamos a realização de Jordan-Schwinger para álgebra $\mathfrak{su}(2)$ que é dada por

$$S^+ = a_1^\dagger a_2, \quad S^- = a_2^\dagger a_1, \quad S^z = \frac{1}{2}(N_1 - N_2),$$

com isso o Hamiltoniano (2.7) pode ser escrito da seguinte forma

$$H = \frac{K}{2} (S^z)^2 - \Delta\mu (S^z) - \frac{\epsilon}{2} (S^+ + S^-). \quad (\text{A.43})$$

Utilizando uma realização equivalente da álgebra $\mathfrak{su}(2)$ que é dada por

$$S^+ = \frac{d}{du}, \quad S^- = nu - u^2 \frac{d}{du}, \quad S^z = \frac{n}{2} - u \frac{d}{du},$$

onde esses operadores agora agem sobre um espaço cuja base é dada por $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$. Portanto podemos representar o Hamiltoniano (2.7) como

$$H = \frac{K}{2} u^2 \frac{d^2}{du^2} + \frac{1}{2} ((K(1-n) + 2\Delta\mu)u - \epsilon(1-u^2)) \frac{d}{du} - \frac{\epsilon n}{2} u + \frac{Kn^2}{8} - \frac{\Delta\mu n}{2}. \quad (\text{A.44})$$

Para acharmos a energia do sistema resolvemos a equação de autovalores

$$HQ(u) = EQ(u), \quad (\text{A.45})$$

onde $Q(u)$ é o ansatz de Bethe utilizado, sendo este dado por

$$Q(u) = \prod_{j=1}^n (u - v_j). \quad (\text{A.46})$$

Ou seja, se colocarmos (A.46) e (A.44) em (A.45) e avaliarmos em $u = v_k$, temos

$$\begin{aligned} \frac{(v_k^2 - 1)\epsilon + (-2\Delta\mu - K(n-1))v_k}{Kv_k^2} &= -2 \frac{\left(\sum_{l \neq k}^n \prod_{j \neq k, j \neq l}^n (v_k - v_j) \right)}{\prod_{j \neq k}^n (v_k - v_j)} \\ &= \sum_{j \neq k}^n \frac{2}{v_j - v_k}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Sendo essa a EAB para o Hamiltoniano (2.7) na forma de somatório. Para achar a energia usaremos a expansão assintótica $Q(u) \sim u^n - u^{n-1} \sum_{j=1}^n v_j$ aplicando em (A.44) e avaliando a igualdade no termo de maior ordem, tiramos os autovalores de energia, dados por

$$E = \frac{Kn^2}{8} - \frac{\Delta\mu n}{2} + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^n v_j. \quad (\text{A.48})$$

Bibliografia

- [1] Ketterle, W. Nobel lecture: when atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, Melville, v. 74, n. 4, p. 1131-1151, Oct. 2002.
- [2] Cornell E. A.; Wieman C. E. Nobel lecture: Bose-Einstein in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments *Rev. Mod. Phys.* 74 (2002) 875-893.
- [3] Anglin, J. R.; Ketterle W. Bose-Einstein condensation of atomic gases *Nature* 416, (2002) 211-218.
- [4] Cornell E. Very cold indeed: the nanokelvin physics of Bose-Einstein condensation. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, Washington, v. 101, n. 4, p.419-434, July/Aug. 1996.
- [5] Donley, E. A.; Neil R. Claussen; Sarah T. Thompson; Carl E. Wieman Atom-molecule coherence in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, London, v. 417, n. 5, p. 529-533, May 2002.
- [6] Herbig, J.; Kraemer T.; Mark M.; Weber T.; Chin C.; Nägerl H.-C.; Grimm R. Preparation of pure molecular quantum gas. *Science*, Washington, v. 301, n.9, p. 1510-1513, Sept. 2003.
- [7] Albiez, M.; Gati R.; Fölling J.; Hunsmann S.; Cristiani M.; Oberthaler M. K. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. *Physical Review Letters*, Melville, v. 95, n. 6, 010402 4p., July 2005.
- [8] Links, J.; Zhou H.-Q.; McKenzie R. H.; Gould M. D. Algebraic Bethe ansatz method for exact calculation of energy spectra and form factors: applications to models of Bose-Einstein condensates and metallic nanograins. *Journal Physical A*, London, v. 36, n. 19, p. R63-R104, May 2003.
- [9] Hines, A. P.; McKenzie, R. H.; Milburn, G. J. Entanglement of two-mode Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A* 67 (2003) 013609.
- [10] Tonel, A. P.; Links, J.; Foerster, A. Quantum dynamics of a model for two Josephson-coupled Bose-Einstein condensates, *J. Phys. A* 38 (2005) 1235.

-
- [11] Albiez, M.; Gati, R.; Folling, J.; Hunsmann, S.; Cristiani, M.; Oberthaler, M. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 010402.
- [12] Zibold, T.; Nicklas, E.; Gross, C.; Oberthaler, M. K. Classical bifurcation at the transition from Rabi to Josephson dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 204101.
- [13] Santos, G. Modelos de condensados de Bose-Einstein exatamente solúveis. Tese de doutorado IF-UFRGS, Porto Alegre (2007).
- [14] Pan, F.; Draayer, J. P. Quantum critical behavior of two coupled Bose-Einstein condensates, *Phys. Lett. A*, 339 (2005) 403.
- [15] Sadchev, S. Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press (2001).
- [16] Steane, A. Quantum Computing. *Reports on progress in physics*, Bristol, v. 61, n.2, p. 117-173, Feb. 1998
- [17] Foerster, A.; Links, J.; Zhou, H.-Q. Exact solvability in contemporary physics. In: Kundu, A. (Ed.). *Classical and Quantum nonlinear integrable systems*. Bristol: Institute of physics Publishing, 2003. p. 214-239.
- [18] Rubeni, D. Transições de fase quânticas e equações do ansatz de Bethe para o modelo de Bose-Hubbard de dois sítios. Tese de mestrado IF-UFRGS, Porto Alegre (2010).