

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# **O Procedimento de Renormalização em Teoria Quântica de Campos e a Constante de Acoplamento Forte na Cromodinâmica Quântica (QCD)**

**Ernany Rossi Schmitz**

Porto Alegre  
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# **O Procedimento de Renormalização em Teoria Quântica de Campos e a Constante de Acoplamento Forte na Cromodinâmica Quântica (QCD)**

*Trabalho de Conclusão de Curso*

**Ernany Rossi Schmitz**

**Orientador:  
Magno V. T. Machado**

Porto Alegre

2011

# *Sumário*

## **Resumo**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 6
<b>2</b>	<b>Aspectos históricos da renormalização em Teorias Quânticas de Campos</b>	p. 8
2.1	Aspectos gerais	p. 8
2.2	Renormalização às teorias de calibre pós-QED	p. 13
2.3	Polêmica sobre a renormalização	p. 15
<b>3</b>	<b>Regras e diagramas de Feynman em teorias quânticas de campos: QED</b>	p. 19
3.1	Operador S	p. 19
3.2	Diagramas de Feynman	p. 20
<b>4</b>	<b>Obtenção do acoplamento <i>running</i> da QED</b>	p. 24
4.1	Correções radiativas de segunda ordem da QED	p. 25
4.2	Auto-energia do fóton	p. 29
4.3	Auto-energia do elétron	p. 34
4.4	Renormalização de linhas externas	p. 36
4.5	Modificação de vértice	p. 36
4.6	Renormalização de carga revisitada	p. 37
4.6.1	Constante de acoplamento eletromagnético	p. 39
4.7	Aspectos finais	p. 40
<b>5</b>	<b>Métodos de Regularização</b>	p. 42

5.1	Pré-requisitos matemáticos . . . . .	p. 43
5.1.1	Integrais padrão . . . . .	p. 43
5.1.2	Parametrização de Feynman . . . . .	p. 43
5.2	Regularização com método <i>cutoff</i> : deslocamento de massa do elétron $\delta m$ . . .	p. 45
5.3	Regularização dimensional . . . . .	p. 46
5.3.1	Introdução . . . . .	p. 46
5.3.2	Extrapolação do caso de D inteiro para o caso de D não-inteiro . . . .	p. 48
5.4	Polarização do vácuo: auto-energia do fóton . . . . .	p. 49
<b>6</b>	<b>Obtenção do acoplamento <i>running</i> da QCD</b>	<b>p. 52</b>
6.1	Esquema de Renormalização . . . . .	p. 52
6.1.1	Propagador do fóton . . . . .	p. 52
6.1.2	O propagador do elétron . . . . .	p. 54
6.1.3	Renormalização de carga . . . . .	p. 55
6.2	O grupo de renormalização . . . . .	p. 57
6.2.1	As equações do grupo de renormalização . . . . .	p. 57
6.2.2	Transformações de escala . . . . .	p. 59
6.2.3	Carga <i>running</i> . . . . .	p. 61
6.3	A constante de acoplamento forte . . . . .	p. 63
6.3.1	Fatores de cor . . . . .	p. 64
6.3.2	Diagramas nulos . . . . .	p. 65
6.3.3	Renormalização da constante de acoplamento . . . . .	p. 65
6.3.4	O acoplamento <i>running</i> na QCD . . . . .	p. 71
<b>7</b>	<b>Comparação do acoplamento <i>running</i> da QCD com o experimento</b>	<b>p. 73</b>
7.1	Motivação . . . . .	p. 73
7.2	Introdução teórica . . . . .	p. 74

7.2.1	Métodos não-perturbativos . . . . .	p. 76
7.3	Processos para obtenção de $\alpha_S(\mu_0)$ . . . . .	p. 77
7.3.1	Acoplamento $\alpha_S$ a partir de decaimento leptônico de $\tau$ . . . . .	p. 77
7.3.2	Acoplamento $\alpha_S$ a partir de quarkonia pesados . . . . .	p. 78
7.3.3	$\alpha_S$ a partir de espalhamento profundamente inelástico . . . . .	p. 79
7.3.4	$\alpha_S$ a partir de formas de evento hadrônico e de produção de jatos na aniquilação $e^+e^-$ . . . . .	p. 80
7.3.5	$\alpha_S$ a partir de dados de precisão eletrofracos . . . . .	p. 80
7.4	Média global de $\alpha_S(\mu_0)$ . . . . .	p. 81
7.4.1	Determinação da média global . . . . .	p. 81
7.5	Parâmetro $\Lambda$ a partir da aproximação de 1-loop . . . . .	p. 82
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	p. 85
	<b>Apêndice A – Regras de Feynman para a QCD</b>	p. 86
A.0.1	Propagadores e vértices . . . . .	p. 87
A.0.2	Regras de Feynman: QCD . . . . .	p. 88
	<b>Referências Bibliográficas</b>	p. 91
	<b>Bibliografia</b>	p. 91

# *Resumo*

Neste trabalho, expomos a fundamentação teórica necessária para a obtenção do acoplamento da interação forte. O fato de esta ser dependente da escala de energia é responsável pela liberdade assintótica e permite o uso de métodos perturbativos para processos de interação forte como aqueles que ocorrem em aceleradores de partículas atuais. Apresentamos uma breve história acerca da técnica de renormalização, chegando à renormalização em QED e mostrando sua importância na obtenção do acoplamento eletromagnético. Também tomamos parte do processo pelo qual a renormalização é efetuada, a regularização. Finalmente, obtemos a descrição do acoplamento forte na QCD. Neste ponto, comparamos a predição teórica com os dados experimentais vindos de aceleradores.

# 1 *Introdução*

Nesta monografia tratamos da obtenção da constante de acoplamento forte na Cromodinâmica Quântica (QCD) e fazemos a comparação desta quantidade com os resultados experimentais obtidos em aceleradores de partículas em altas energias. Em especial, o comportamento deste acoplamento no regime de momentos grandes no processo de interação forte permite o uso de técnicas de teoria de perturbação. Assim, o comportamento de liberdade assintótica da constante de acoplamento é crucial para o poder preditivo da QCD quando analisamos processos de colisão de partículas hadrônicas em altas energias, como aquelas estudadas no Large Hadron Collider (LHC). Do ponto de vista teórico, o comportamento variável (running) da constante de acoplamento com a escala de momento do processo advem em última análise das equações de grupo de renormalização, da qual trataremos em algum detalhe nesta monografia. A renormalização é um processo geral para o cancelamento de infinitos que aparecem na obtenção de algumas quantidades físicas como a carga e a massa quando calculadas em Teorias Quânticas de Campos. O exemplo histórico deste tipo de problema teórico ocorreu na Eletrodinâmica Quântica (QED), o que deu origem aos métodos de subtração e sua evolução posterior para métodos de regularização. Atualmente, a renormalizabilidade foi elevada a critério de escolha de uma boa teoria quântica de campos. Nos capítulos que seguem, veremos os aspectos formais da obtenção da constante de acoplamento forte que perpassam pela metodologia de renormalização.

No primeiro capítulo, revisamos os principais aspectos históricos da origem dos métodos de regularização no âmbito da QED e como a renormalizabilidade evoluiu como um critério de construção de uma teoria quântica de campos. Esse capítulo contextualiza historicamente os procedimentos de regularização e como o seu status em teorias quânticas de campos evoluiu. Ele motivará os próximos capítulos onde tratamos da obtenção das correções de auto-energia do elétron e polarização do vácuo na QED. O mesmo tipo de correção aparecerá na QCD, com estruturas adicionais pelo fato de ela ser uma teoria não-Abeliana.

No segundo capítulo revisamos brevemente os aspectos gerais da obtenção dos diagramas de Feynman para a QED que serão necessários para a representação pictórica dos processos de correção em QED mencionados anteriormente.

No terceiro capítulo, efetuamos formalmente o processo de renormalização na QED, a partir do esquema na casca (*on-shell*), sem necessariamente expor alguns métodos matemáticos envolvidos, efet-

uando a redefinição de parâmetros físicos como massa e carga para os tornarem finitos. Ao fim, obtemos o acoplamento para a interação eletromagnética (no caso, a carga renormalizada) em função da energia considerada, por exemplo, em um espalhamento elétron-pósitron.

Expomos os métodos matemáticos envolvidos no capítulo anterior no capítulo cinco. Estes métodos serão também necessários para a determinação do acoplamento da interação forte. Exemplificamos e ilustramos o método de corte (*cutoff*) e também o método de regularização dimensional para a manipulação das integrais divergentes de forma a as tornarem finitas e interpretáveis.

No capítulo 6, obtemos a dependência do acoplamento forte da QCD com a escala de energia do processo. Para o cálculo do mesmo, utilizamos o grupo de renormalização para a interpretação da escala de massa  $\mu$ , além de um esquema novo de renormalização, esquema  $\overline{MS}$ . Porém, o acoplamento running da QCD não fica completamente determinado pois no processo de renormalização alguns parâmetros devem ser determinados a partir dos resultados experimentais.

Ao final, no capítulo 7 determinarmos a dependência em  $\mu$  deste acoplamento completamente e verificamos o fenômeno da liberdade assintótica utilizando os resultados experimentais de aceleradores de partículas de altas energias. Em particular, investigamos como é obtida a média global (incluindo vários conjuntos experimentais) da constante de acoplamento forte. Como um estudo fenomenológico, a partir da derivação da nossa fórmula em um-loop para a constante de acoplamento, fazemos um ajuste a um conjunto de dados experimentais em colisões elétron-pósitron e obtemos o acoplamento na escala energética de referência  $\mu_0$ . Ao fim, comparamos o nosso estudo fenomenológico com a média global.

Finalmente, na conclusão resumimos os estudos realizados nesta monografia.



## 2 *Aspectos históricos da renormalização em Teorias Quânticas de Campos*

Faremos aqui um parêntese histórico: apresentamos e ressaltamos o fato de que as técnicas de renormalização desempenharam um papel fundamental ao longo de todo o processo de desenvolvimento e consolidação das teorias quânticas de calibre. Esta parte vem como uma introdução à técnica de renormalização, técnica central sobre a qual estão apoiadas as teorias quânticas de campos (TQC's) da qual falaremos, com base matemática, no capítulo posterior.

### 2.1 Aspectos gerais

A teoria quântica de campos nasceu da descrição quântica da interação eletromagnética, através da QED. A partir do sucesso desta teoria para explicar uma força da natureza, pensou-se em expandir este programa de TQC para as outras três forças da natureza: forças fraca, forte e gravitacional.

Estendida com sucesso à força fraca - com a unificação da mesma com a eletromagnética, gerando a teoria eletrofraca - e com relativo sucesso à força forte \*, a força gravitacional ainda não pode ser entendida como uma teoria quântica de campo. Apesar do *fracasso gravitacional*, o programa da TQC obteve vários sucessos empíricos. No entanto, ele se deparou desde seu surgimento com um problema sério, que é o problema dos infinitos: em muitas situações, cálculos que deveriam resultar em quantidades finitas e observáveis como correções de carga e massa de partículas como as do elétron, resultavam em quantidades divergentes.

Nesta contextualização histórica, apenas trataremos dos casos iniciais divergentes importantes na eletrodinâmica quântica como a **auto-energia do elétron** e a **polarização do vácuo**. Para contextualizarmos esse problema, começamos com uma revisão cronológica da teoria quântica de campos.

A TQC, como expresso anteriormente, surge de uma configuração básica de três componentes: (i) a teoria lagrangiana de campos, (ii) mecânica quântica † e a (iii) relatividade restrita, com o objetivo de

---

\*Devido à constante de acoplamento  $\alpha_s$  se tornar maior que 1 para o regime de momenta baixos, a teoria perturbativa não é mais válida a baixas energias. Cálculos nesses limites são difíceis de tratar, e não há um método geral simples para resolvê-los.

†Ou melhor, princípios básicos advindos da mesma, como o princípio de primeira quantização

descrever campos, sistemas com um número infinito de graus de liberdade  $x^\mu$ . A primeira tentativa de estender princípios quânticos aos campos nos leva aos anos de formulação da teoria, mais precisamente 1926, [1], quando Born, Heisenberg e Jordan descreveram o campo eletromagnético na ausência de cargas e correntes como um sistema de osciladores, com cada oscilador oscilando com frequência  $\omega$ , concluindo assim que a energia do campo seria quantizada.

Em 1927, [2] Paul M. Dirac criou o método da segunda quantização, e então iniciou a formulação da primeira TQC, a eletrodinâmica quântica (QED), que permitiu tratar por exemplo da emissão e absorção de radiação (criação e destruição de fótons), pois um dos saltos em nosso conhecimento dados pela TQC foi o de destruição e criação de partículas a partir de excitações do vácuo dadas pelos operadores quantizados de campo, por exemplo:  $A^\mu |0\rangle = C|\gamma\rangle + \underbrace{D|-\gamma\rangle}_{\equiv 0} = C|\gamma\rangle$ .

Em 1928, [3] Jordan e Wigner estenderam o método da segunda quantização, inicialmente formulado para bósons (relações de comutação), para então descrever férmions (relações de anticomutação); Jordan e Pauli tornaram o método relativístico, ainda em 1928, [4]. Após essas contribuições, os anos 30 foram de bastante progresso na formulação e no entendimento da teoria quântica de campos.

Historicamente, foi na QED que o problema dos infinitos apareceu pela primeira vez, e também foi no meio desta TQC que a renormalização tomou parte pela primeira vez <sup>‡</sup>. Uma forma em que o problema aparece é a chamada *catástrofe ultravioleta* que surge ao calcularmos, por exemplo, os efeitos da auto-energia do elétron <sup>§</sup> e da polarização do vácuo. Ambos os efeitos estão relacionados com a criação de partículas virtuais.

A auto-energia do elétron resulta do fato de que há uma contínua emissão e reabsorção de fótons virtuais por qualquer carga elétrica (consequência desta ser a geradora da interação eletromagnética, que envolve fótons virtuais como agentes de troca desta interação). Assim, o elétron fica envolto por esta nuvem de fótons virtuais produzidos por ele mesmo. Um observador, olhando o **elétron** do lado de fora de sua nuvem, detectaria sua massa  $m$  como a energia total:  $m_{e_0} + m_{nuvem}$ . Esta auto-interação tem, portanto, o efeito de esconder a energia do elétron inicial  $e_0$ ; então obtemos o valor de massa efetiva (elétron inicial + nuvem = elétron medido).

Já na polarização do vácuo, o campo eletrostático de um elétron leva à assimetria na distribuição de pares elétron-pósitron virtuais que são criados a partir dos fótons virtuais ( $e_*^+ e_*^- \rightarrow \gamma_*$ , processo permitido pela QED) advindos da nuvem em volta do elétron  $e_0$ . Assim como em um meio dielétrico, em que um campo externo polariza o meio inicialmente não-polarizado, o campo elétrico do elétron

<sup>‡</sup>Citação deve ser feita acerca de um tipo de divergência que apareceu na teoria ao calcular-se a energia referente a energias de partículas e antipartículas. Chegou-se à expressão  $E = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (N_{part}(\vec{k}) + 1/2 + N_{anti}(\vec{k}) + 1/2)$  e identificou-se a energia infinita  $\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$  como a energia do vácuo pois não conta partículas como  $N_{part}$  e  $N_{anti}$  contam. No entanto, não precisamos invocar o processo de renormalização a esse problema. Resolvemos esse problema dizendo que só medimos diferenças de energia em vez da energia absoluta, portanto, excluindo este termo. Na teoria, este corte é feito via ordenamento normal dos operadores de criação e destruição na expressão do hamiltoniano - ou seja, colocando operadores destruição à frente de operadores criação.

<sup>§</sup>A auto-energia do elétron é também divergente no infravermelho.

provoca o afastamento mútuo entre elétrons e pósitrons respectivos de seus pares  $e_*^+ e_*^-$ : os elétrons virtuais são repelidos pela carga negativa original, à medida que os pósitrons são atraídos. Por causa dessa assimetria, o elétron original fica envolto por uma nuvem de pósitrons virtuais que blinda parte de sua carga, resultando em uma carga efetiva que é menor do que a carga original.

Ao invés de pensarmos em uma blindagem de carga, podemos considerar que o campo elétrico do elétron envolto gera uma assimetria no meio dielétrico que são os fótons ( $e_*^+ e_*^-$ ) de sua nuvem, que por sua vez gerará um campo elétrico em sentido contrário ao do elétron, que então contrabalança parte do campo elétrico do elétron  $e_0$  envolto; resultando no mesmo efeito que a descrição anterior, para um observador externo.

Note, no entanto, que o que foi discutido acima são puramente comportamentos físicos conhecidos que podem explicar os termos perturbativos relacionados ao operador  $S$  (operador que governa a interação entre as partículas de dado processo. Sua expressão é uma série, por isso, termos perturbativos) e que explicam a redefinição de parâmetros como massa e carga relacionados ao esquema de renormalização.

O grande problema é que ambos os efeitos, quando calculados na teoria de campos, dão origem a resultados que divergem quando se leva em conta a contribuição devida às partículas com momenta arbitrariamente altos <sup>¶</sup> (De acordo com a relação de de Broglie  $\lambda = h/p$ :  $p$  altos implicam em  $\lambda$  baixos que estão relacionados à *catástrofe ultravioleta*)

O problema com a auto-energia do elétron foi detectado por Oppenheimer (1930, [5]) e analisado por Weisskopf (em 1934 e 1939, [6] e [7]). O problema com a polarização do vácuo também foi identificado por Oppenheimer (1930, [8]) e analisado por Dirac (1933-1934, [9] e [10]), Furry e Oppenheimer (1934, [11]), Heisenberg (1934, [12]) e Weisskopf (1936, [13]). As divergências da QED levavam a previsões absurdas para resultados experimentais, como espaçamento das linhas espectrais e as seções de choque de espalhamento <sup>¶¶</sup> Esse tipo de divergência leva a resultados infinitos para as seções de choque, o que invalidava previsões referentes ao problema de espalhamento..

Nos anos 30 e 40, diversas técnicas foram desenvolvidas para eliminar ou pelo menos contornar as divergências da teoria. Todas as técnicas possuíam a característica de serem métodos *ad-hoc* e ainda não estavam inclusas numa abordagem sistemática. Além disso, elas envolviam certas operações com quantidades infinitas que eram difíceis de justificar rigorosamente em termos matemáticos. Por isso, a atitude que prevalecia nos anos 40 entre os físicos era basicamente a de continuar usando a teoria quântica de campos, na falta de uma abordagem melhor, porém de maneira cautelosa.

A solução para o problema foi encontrada nas técnicas de renormalização. O conceito de renormalização baseia-se na idéia de que a massa efetiva de um elétron, por exemplo, deve ser entendida como formada por dois componentes: uma massa *limpa/nua* (sem contar fótons virtuais), que se pressupõe ser

<sup>¶</sup>O que quer se dizer com momenta arbitrariamente altos é que consideramos integrais do tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$ .

<sup>¶¶</sup>Temos de observar que ao calcularmos seções de choque de espalhamento, aparece outro tipo de divergência denominada *catástrofe infravermelha*, ligada a fótons com momenta baixos (ou comprimento de onda alto).

infinita, e também uma *auto-massa* (que resulta ao levarmos em conta os fótons virtuais), que pode ser calculada na teoria e que nos dá um valor infinito. A idéia é que uma quantidade infinita “cancela” a outra, de forma que a massa observada experimentalmente seja uma massa *efetiva* finita. A renormalização é portanto um processo de eliminação de divergências absorvendo-as em novas definições de parâmetros físicos, nesse caso, a massa. O processo da renormalização aplica-se também na redefinição de outros parâmetro: a carga.

Evidentemente, a subtração de uma quantidade infinita de outra quantidade infinita não parece ser uma operação matematicamente bem definida. Na verdade, a redefinição dos parâmetros é obtida por um processo de corte nas integrais divergentes \*\*, inclusão das mesmas na redefinição do parâmetro a considerar, e subsequente passagem ao limite. No entanto, restava o problema de como executar esse corte e ao mesmo tempo preservar a invariância de calibre da teoria.

A noção de renormalização já havia sido sugerida por Weisskopf (em 1936, [13]) e por Kramers (1938, [14]), porém não atraiu grande interesse no início. Os físicos percebiam que, para um tratamento sistemático da questão, alguns conceitos eram necessários:

1. Era preciso encontrar uma maneira de classificar os tipos de infinitos que apareciam nos cálculos, uma vez que, para a técnica de renormalização ser aplicada, os infinitos precisam aparecer de uma maneira específica, ou seja, na redefinição de parâmetros já existentes.
2. Também era indispensável descobrir como executar o procedimento de renormalização de modo que não se destruísse a invariância de calibre.
3. E havia a escassez de dados experimentais, capazes de permitir uma discriminação fina entre as várias técnicas de eliminação de infinitos.

Quando ressaltamos os sucessos empíricos da teoria quântica de campos, não podemos deixar de falar de dois resultados de extrema concordância com o experimento, são eles:

#### ★ **Momento magnético anômalo do elétron**

Pela teoria de Dirac, podemos calcular o fator giromagnético (fator de proporcionalidade entre o vetor spin  $\vec{S}$  do elétron e seu momento magnético  $\vec{\mu}$  desconsiderando movimento orbital  $\vec{L}$ :  $\vec{\mu} = g_e(e/2m)\vec{S}$ ) relacionado ao elétron como sendo  $g = 2$ . Correções a partir de teoria de perturbação da eletrodinâmica quântica nos dão para o momento magnético *anômalo* do elétron ( $a_e \equiv (g_e - 2)/2$ ) como sendo igual a  $a_e = (g_e - 2)/2 = \alpha/2\pi = 0,00116$  (1948, Julian Schwinger) - em concordância com as primeiras medições feitas por Kusch e Foley (1947, 1948) que obtiveram  $a_e = 0,00119 \pm 0,00005$  - mas consideraram-se apenas diagramas uma potência maior em  $\alpha$

---

\*\*Este processo de corte pode ser efetuado, por exemplo, pelos métodos de corte (*cutoff*) ou regularização dimensional. A característica marcante dos dois métodos é a parametrização das integrais divergentes, ou seja, o infinito passa a ser controlável por um parâmetro como  $\Lambda$  e  $\eta$ , respectivamente.

do que os de nível de árvore. Para um resultado mais preciso na teoria, teve-se que considerar diagramas de ordem mais alta até  $\alpha^3$  em  $a_e$  onde 72 diagramas aparecem, resultando em  $10^9 a_e = 1159652,4 \pm 0,4$  concordando com experimento de 1978 feito por Van Dyck que obteve  $10^9 a_e = 1159652,41 \pm 0,20$ .

Os resultados expressos nesta seção, tanto teóricos quanto experimentais, estão no artigo [15].

### ★ **Lamb shift**

Lamb e Retherford realizaram uma medida do deslocamento hiperfino dos níveis de energia do átomo de hidrogênio (1947, [16]). De acordo com a teoria de Dirac do elétron, de 1928, as energias dos dois primeiros estados excitados do hidrogênio ( $2^2S_{1/2}$  e  $2^2P_{1/2}$ ) deveriam ser iguais, porém Lamb e Retherford mostraram que eles diferiam por cerca de 1000 MHz, um efeito que ficaria conhecido como deslocamento Lamb ou *Lamb shift*. Logo após os resultados serem expostos, ainda em 1947, Hans Bethe [17] formulou uma explicação para o Lamb shift em termos da auto-interação do elétron, usou a renormalização da massa para eliminar as divergências, e encontrou um valor próximo ao observado (1040 MHz). Porém, assim como os outros cálculos de renormalização feitos na QED de até então, este cálculo de Bethe não utilizava um formalismo baseado na QED, mas sim teoria de perturbação da MQNR. Considerando-se cálculos relativísticos e levando em conta correções radiativas a mais que a segunda ordem além de suposições, por exemplo, sobre tamanho e massa finitos do núcleo, obteve-se o valor de  $\Delta E = 1057,864 \pm 0,014$  MHz (Mohr, 1975, [18]) e compara-se com medições como  $\Delta E = 1057,862 \pm 0,020$  MHz feitas por Andrews e Newton (1976, [19]).

Julian Schwinger ([20], [21], [22]) e Richard Feynman ([23], [24], [25], [26]) deram entre 1947 e 1949 os toques finais numa eletrodinâmica quântica sob método sistemático, que era ao mesmo tempo renormalizável e covariante relativisticamente. Sin-Itiro Tomonaga já havia desenvolvido no Japão uma teoria deste tipo em 1943, [27] e [28], publicada em inglês somente em 1946. Em seguida, Freeman Dyson (1949, [29] e [30]) demonstrou que os formalismos de Feynman, Schwinger e Tomonaga eram equivalentes, e conseguiu classificar os tipos de divergências da QED, provando que elas eram precisamente do tipo que poderia ser removido através da renormalização.

Nos anos seguintes, a QED provocou um grande entusiasmo entre os físicos, e os cálculos foram sendo efetuados com aproximação cada vez mais alta. Atualmente, os cálculos mais detalhados utilizando esta teoria conseguem atingir uma precisão de até dez casas decimais. Assim, a QED fez nascer a esperança de que as outras interações da natureza pudessem ser descritas por meio de TQC's renormalizáveis como a QED.

No entanto, enquanto havia o progresso neste projeto, percebeu-se que isso dificilmente seria conseguido em relação à força fraca e força forte. No caso da interação fraca, as divergências que surgiam eram de um tipo que não se conseguia eliminar por meio das técnicas de renormalização existentes até

então. No caso da interação forte, era impossível aplicar a teoria de perturbação, modo pelo qual cálculos eram efetuados na QED, devido ao valor elevado da constante de acoplamento  $\alpha_S$  a baixas energias. Essas entre outras dificuldades levaram o programa da teoria quântica de campos a um impasse na década de 50, acarretando em um grande abandono do projeto por grande parte da comunidade científica. Esta situação prevaleceria até a década de 60.

## 2.2 Renormalização às teorias de calibre pós-QED

Em meio ao descrédito em que havia caído a teoria quântica de campos, foi criada a idéia que, anos depois, permitiria o seu renascimento. Trata-se da *teoria de calibre não-abeliana*, proposta por C. N. Yang e R. L. Mills em 1954, [31], e independentemente, por Ronald Shaw em 1955, [32] e por Ryoyu Utiyama em 1956, [33]. Essa teoria viria a desempenhar um papel crucial em todo o desenvolvimento posterior do programa da teoria quântica de campos. E aqui tem início o segundo episódio no qual a renormalização viria a desempenhar um papel fundamental.

O termo *teoria de calibre* refere-se a um tipo particular de invariância ou simetria que determinadas teorias possuem <sup>††</sup>. A invariância de calibre (ou de calibre), no caso clássico de Maxwell, consiste em poder somar ao potencial  $A^\mu$  o gradiente de uma função arbitrária  $f(x)$ , e ainda assim manter inalteradas as previsões experimentais da teoria. No caso dos campos quânticos, a invariância de calibre consiste em se poder manter a invariância das previsões experimentais quando se efetua, além da adição do gradiente, também uma rotação arbitrária na fase do campo  $\psi \rightarrow e^{i\phi} \psi$ , a fim de que tenhamos a mesma forma de Lagrangiano após essas duas transformações.

A teoria de Yang-Mills se refere ao *spin isotópico*, que é uma quantidade conservada na interação forte, e é atribuído a nêutrons e prótons, ou mais profundamente, quarks  $u$  e  $d$ . A hipótese feita por eles foi de que o spin isotópico obedeceria a uma *simetria de calibre local não-abeliana* <sup>‡‡</sup>, expressa pelo grupo SU(2). Uma simetria é dita *global* quando as equações são transformadas da mesma maneira em todos os pontos do espaço-tempo, e *local* quando a transformação pode ser diferente em diferentes pontos. O fato de que a simetria de spin isotópico utilizada por Yang e Mills é do tipo local significa, em

<sup>††</sup>O conceito de invariância de calibre já havia sido sugerido por Weyl em 1918, fora do contexto da TQC, em seu livro "Gravitation and electricity" @

<sup>‡‡</sup>Uma propriedade fundamental da invariância de calibre é que ela explica a existência dos campos de interação entre as partículas materiais. A relação que existe entre a invariância de calibre e a existência de campos mediando as interações pode ser descrita da seguinte maneira: para descrever partículas relativísticas livres - por exemplo, elétrons de spin 1/2 - escreve-se um lagrangiano em termos de operadores que correspondem a campos de matéria (no caso do elétron, é o lagrangiano que rege a equação de Dirac, onde nele aparecem os, agora em TQC, operadores  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  ). Para obter a invariância do lagrangiano sob transformações de fase locais dos campos de matéria (por exemplo,  $\psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi$  ), é preciso introduzir as derivadas espaço-temporais covariantes no lugar das derivadas de espaço-tempo ordinárias. Ocorre que as derivadas covariantes incluem campos que são interpretadas como potenciais de calibre, e portanto automaticamente acoplam campos de calibre aos campos de matéria. Portanto, pode-se dizer que o vínculo de o lagrangiano ser invariante frente a transformações locais de fase introduz os campos de interação. Assim, por exemplo, em QED, a exigência de invariância de calibre implica na existência de um campo cujos quanta são os fótons.

termos físicos, a possibilidade de transformar prótons em nêutrons, e vice-versa, de maneira independente para cada partícula, isto é, transformações não precisam ser executadas do mesmo jeito em todos os pontos do espaço-tempo; além disso, por Yang-Mills não ser abeliana, o resultado de uma sequência de transformações depende da ordem em que elas são efetuadas.

Uma vez imposta a invariância de calibre, Yang e Mills determinaram qual seria o campo correspondente, executaram o processo de quantização e obtiveram quanta com spin unitário e spin isotópico unitário, e carga que poderia ser nula, positiva ou negativa. Entretanto, duas questões acerca da teoria tiveram que ser deixadas em aberto pelos autores, devido a dificuldades técnicas: o problema da massa dos quanta do campo e a questão da renormalizabilidade. Por causa das dificuldades encontradas, a teoria de calibre não-abeliana não parecia ser aplicável à interação forte.

Havia a possibilidade de que a interação fraca fosse descrita por meio de uma teoria do tipo Yang-Mills. Foram propostas duas teorias de calibre unificando o eletromagnetismo e a interação fraca, por Sheldon Glashow (1961, [34]) e por Abdus Salam e John Ward (1964, [35]), utilizando o grupo de simetria  $SU(2) \times U(1)$ . Nessas teorias, o lagrangiano da interação previa a existência de quatro bósons: o fóton e três bósons vetoriais fracos (um com carga positiva, outro negativa e mais outro neutro). Porém havia o problema da diferença de massa, que é nula para o fóton, mas deveria ser não-nula para as outras três partículas. As massas das partículas precisavam ser inseridas *manualmente* na teoria. Além disso, restava a questão de como se poderia ter bósons massivos sem destruir a invariância de calibre.

A idéia crucial que ainda faltava para solucionar esses problemas era a quebra espontânea de simetria. Na quebra espontânea de simetria, a noção fundamental envolvida é de uma simetria que está presente no lagrangiano de forma exata mas que não se manifesta explicitamente, ou seja, temos de executar manobras com o lagrangiano para obtermos esta simetria. Em 1961 [36], Jeffrey Goldstone propôs um mecanismo para obter a quebra espontânea de simetria na teoria quântica de campos. Porém, Steven Weinberg, Salam e o próprio Goldstone mostraram, em 1962 [37], que em muitas teorias, a quebra espontânea de simetria teria que ser acompanhada pelo surgimento de partículas de spin unitário e massa nula, os chamados *bósons de Goldstone*. Isso constituía um problema, uma vez que tais partículas de massa nula não foram observadas, nem poderiam desempenhar um papel em interações de curto alcance.

Peter Higgs completou o mecanismo entre 1964 e 1966 - [38], [39] e [40] - valendo-se da invariância de calibre para mostrar como as partículas podem ganhar massa via quebra espontânea de simetria sem o aparecimento de partículas de massa nula. Por meio do mecanismo que leva o seu nome (Mecanismo de Higgs), desaparecem os bósons de Goldstone, os quanta de campo adquirem massa, e aparece também uma partícula massiva que foi chamada então de *bóson de Higgs*. O mecanismo de Higgs também funciona para teorias baseadas no grupo não-abeliano  $SU(2) \times U(1)$ , o que abriu o caminho para uma

---

Colocava-se o seguinte dilema: para que a simetria básica da teoria fosse preservada, os quanta do campo deveriam ter massa nula; por outro lado, sabe-se que a interação forte é de curto alcance, o que implica quanta com massa grande. O dilema se tornava cada vez mais acentuado uma vez que Yang e Mills concluíram que a renormalizabilidade da teoria dependia de maneira essencial do fato de as partículas terem massa nula.

teoria de calibre unificada das interações eletromagnética e fraca. Essa teoria seria formulada independentemente por Weinberg, em 1967 [41], e por Salam, em 1968 [42]. Eles partiram, respectivamente, das teorias de Glashow (1961) e de Salam e Ward (1964), e usaram o mecanismo de Higgs para explicar as massas das partículas, em vez de introduzi-las manualmente. A teoria eletrofraca de Weinberg-Salam não despertou interesse nos primeiros anos após sua formulação, uma vez que a teoria quântica de campos ainda atravessava uma fase de reclusão na época. Além disso, não se tinha certeza quanto à sua renormalizabilidade.

Em 1971, Gerard 'tHooft ([43] e [44]) conseguiu demonstrar que as teorias de calibre massivas com quebra espontânea de simetria são renormalizáveis. Esta era a peça que faltava no quebra-cabeças teórico. A partir de 1971, observa-se um grande crescimento no número anual de citações dos trabalhos de Weinberg e Salam. A partir daí, assumiu grande importância a questão dos testes experimentais da teoria eletrofraca unificada. E seguiram-se corroborações experimentais espetaculares, como a detecção das correntes neutras [45] e a descoberta dos bósons fracos  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$  ([46] e [47]). A peça que ainda falta para completar o quadro, experimentalmente falando, é a detecção do bóson de Higgs.

Nos anos 70 e 80, a TQC reassumiu o primeiro plano na física teórica, inclusive em relação à interação forte, com o desenvolvimento da cromodinâmica quântica (QCD), baseada então no grupo  $SU(3)$ . Houve também grande interesse em buscar uma teoria capaz de unificar todas as três teorias - eletromagnética, fraca e forte - por meio de um único grupo relacionado à invariância de calibre, como o  $SU(4)$  ou o  $SU(5)$ . Essas teorias não foram bem-sucedidas. Também, não se conseguiu implementar a gravitação dentro do âmbito das teorias de calibre renormalizáveis. A teoria mais frutífera dessa era na física de partículas e TQC é o chamado *Modelo Padrão*, constituído pela teoria eletrofraca juntamente com a QCD, dentro da estrutura de grupo  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ .

## 2.3 Polêmica sobre a renormalização

A renormalização claramente desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da teoria quântica de campos. Dois momentos especiais nesse processo foram:

1. Final dos anos 40, na teoria de Feynman-Schwinger-Tomonaga-Dyson, em que a renormalização permitiu superar as dificuldades da QED e corroborou resultados empíricos.
2. Início dos anos 70, com a demonstração de 'tHooft, a renormalização possibilitou o renascimento das teorias de calibre e unificação das teorias fraca e eletromagnética, além da possibilidade da QCD.

No período entre estes dois acontecimentos, a renormalização foi sendo gradativamente promovida a critério tanto de construção da teoria como de escolha teórica ao invés de somente um método ad-hoc. A



partir da demonstração de 'tHooft, a renormalização se tornou parte essencial da metodologia da física de partículas e de campos. Agora, quando um novo modelo é proposto, a condição de renormalizabilidade do mesmo condiciona fortemente a aceitação ou rejeição dele.

A importância da renormalização é confirmada tanto por pessoas de grande destaque em TQC, quanto por historiadores especializados no assunto da renormalização. Um dos protagonistas em teoria quântica de campos, Weinberg, relata, [48]:

“Coloquei grande ênfase na condição de renormalizabilidade[...] Muitos físicos discordariam desta ênfase, e de fato, pode-se vir a descobrir que todas as teorias quânticas de campos, renormalizáveis ou não, são igualmente satisfatórias. No entanto, sempre me pareceu que o requisito da renormalizabilidade coloca exatamente o tipo de restrição de que precisamos em uma teoria física fundamental. Existem muito poucas teorias quânticas de campos renormalizáveis[...] Precisamos muito de um princípio-guia como a renormalizabilidade para nos ajudar a selecionar, em meio à infinita variedade de teorias quânticas de campos concebíveis, a teoria que se aplica ao mundo real.”

Enquanto isso, Silvan Schweber, um renomado historiador da física contemporânea, fala, [49]:

“A renormalizabilidade pode[...] ser considerada como um princípio regulador, guiando a construção e a seleção de teorias dentro do quadro geral da teoria quântica de campos[...] É um fato histórico que os desenvolvimentos subsequentes da teoria quântica de campos, para além do âmbito da eletrodinâmica quântica, foram efetuados empregando o princípio da renormalizabilidade como guia[...] Não seria um grande exagero afirmar que os avanços mais substanciais conseguidos na teoria quântica de campos nas últimas quatro décadas foram guiados e condicionados pelo princípio de renormalizabilidade”

Porém, a aceitação da renormalização pela comunidade científica sempre esteve cercada por dúvidas, e nunca esteve livre de polêmicas. Isso se deve à percepção por parte de muitos físicos, de que a renormalização constituiria um procedimento inconsistente do ponto de vista matemático e lógico. As operações para renormalização - como redefinição de parâmetros como massa e carga, subtração de infinitos gerando quantidade finita, métodos como a regularização dimensional - parecem duvidosas do ponto de vista lógico.

Pode-se argumentar que a inconsistência de que se acusa a renormalização possui raízes físicas. Um dos pressupostos básicos da teoria quântica de campos é que o campo possui caráter local, ou seja, as equações que governam a evolução de um campo num ponto do espaço-tempo dependem somente do comportamento do campo e de suas derivadas naquele ponto, pois a equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}^r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} = 0 \quad .$$

Esse pressuposto de localidade implica uma noção de interações e excitações pontuais dos campos. Isso, por sua vez, implica que nos cálculos, é preciso levar em conta os quanta virtuais com momentos arbitrariamente altos. Porém, como já falamos, a inclusão desses limites leva ao aparecimento de quantidades infinitas. Assim, as divergências ultravioletas estariam ligadas de certa forma à localidade imposta aos campos. Ora, de acordo com o raciocínio exposto, podemos de certa forma dizer que o uso da técnica de renormalização tem o efeito de impor um intervalo de alcance ao modelo local de campo; sendo assim, o intervalo de alcance nos deixa com integrais agora definidas não sobre momenta arbitrariamente altos, mas momenta altos somente.

Existe, portanto uma tensão conceitual entre uma concepção estritamente pontual de interação e uma outra concepção, característica das teorias renormalizadas, onde a interação não é perfeitamente pontual. Nesse caso, o aparecimento de infinitos poderia ser uma indicação clara das limitações intrínsecas ao ponto de vista local de interação. Ou seja, o uso da renormalização poderia estar sendo feito, sem restrições sobre sua origem e conceitos sobre ele implicitamente impostos, e mesmo assim obtendo-se resultados totalmente compatíveis com a experiência, como comenta [50]. Precisariam os físicos realmente substituir esta teoria até então frutífera sob renormalização, mas com dificuldades conceituais por outra teoria que remediasse esses problemas? À primeira vista, não deveríamos nos preocupar com reformulações da QED, pois como dissemos, ela gera frutos, e não são poucos, mas temos que pensar num âmbito mais geral: será que essa reformulação nos elevará a um patamar que nos possibilite alcançar vãos mais altos?

Temos que levar em conta relatos de físicos que participaram ativamente da produção da teoria quântica de campos. Feynman, que utilizava regularmente a renormalização para contornar *erros* na teoria, dizia que a renormalização não era inteiramente satisfatória. Fazia questão da não inclusão dele a respeito da aceitação da renormalização apesar de usá-la como instrumento de trabalho. Ao descrever, em sua conferência Nobel de 1965, o desenvolvimento conceitual da teoria, ele fala, [51]:

“Acredito que não haja uma eletrodinâmica quântica realmente satisfatória[...] Penso - embora não tenha certeza disso - que a teoria da renormalização é simplesmente uma maneira de varrer as dificuldades com as divergências para debaixo do tapete.”

Também há Dirac (protagonista no desenvolvimento da MQNR, MQR e da TQC), que era crítico profundo e constante da renormalização, argumenta que ela constitui, por si só, um indício de que algo está muito errado com a teoria. Dirac escreveu, [52]:

---

Princípio da incerteza: quanto mais estreito for o intervalo de variação da posição, mais largo o intervalo de variação para o momentum.

“Precisamos aceitar o fato de que existe algo fundamentalmente errado com a nossa teoria da interação do campo eletromagnético com os elétrons. Por *fundamentalmente errado* quero dizer que a mecânica está errada, ou a força de interação está errada. O que está errado com a teoria é tão sério quanto aquilo que estava errado com a teoria das órbitas de Bohr[...] São necessárias algumas novas equações relativísticas, e novos tipos de interação devem ser postos em jogo. Quando essas novas equações e novas interações forem imaginadas, os problemas que hoje nos confundem serão automaticamente solucionados, e não mais teremos que lançar mão de processos ilógicos como a renormalização de infinitos. Esta é um completo contra-senso e eu sempre me opus a ela. Trata-se apenas de uma regra prática que produz resultados. A despeito dos seus êxitos, é preciso estar preparado para abandoná-la completamente, e encarar todos os êxitos alcançados usando a eletrodinâmica quântica na forma usual - com os infinitos removidos por processos artificiais - como sendo meros acidentes, nos casos em que fornecem as respostas certas, do mesmo modo que os êxitos da teoria de Bohr foram considerados meramente acidentais mesmo que corretos.”

Existia e ainda hoje existe, entre uma parte considerável da comunidade científica, uma forte sensação de que a renormalização é um indício de que falta algum conceito fundamental na base da teoria quântica de campos. No entanto, devido ao sucesso extraordinário das teorias renormalizáveis, ao mesmo tempo parece impossível escapar ao domínio da renormalização.

Nos capítulos que seguem, estudaremos questões técnicas onde o papel da renormalização está presente. A saber, analisaremos a obtenção da "constante" de estrutura fina na QED e a utilização das técnicas de regularização na sua obtenção. Antes, introduzimos os diagramas de Feynman.

### 3 *Regras e diagramas de Feynman em teorias quânticas de campos: QED*

Para avançarmos aos próximos capítulos, que incluem como assunto básico a teoria de perturbação, precisamos discutir um pouco sobre como são construídos os diagramas de Feynman - especificamente na QED - e como são interpretados. Após estes serem entendidos, eles podem ser usados como alicerce fundamental para o nosso trabalho, ao invés de utilizarmos toda a série perturbativa, como veremos, para a descrição de um evento.

#### 3.1 Operador S

Obtido a densidade Lagrangiana completa envolvendo as partículas pertinentes ao problema, devemos efetuar a equação de Euler-Lagrange para obtermos equações de movimento, mas o problema está em que temos três campos na QED ( $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e  $A^\mu$ ) e como consequência temos três equações diferenciais não-lineares parciais acopladas que são geradas a partir da equação de Euler-Lagrange, e não podem ser resolvidas simultaneamente para obtermos soluções de campo interagente. Então, para modelarmos a interação entre campos, um esquema de perturbação foi desenvolvido: o Operador S .

Apenas mostraremos a expressão que o define e comentaremos suas propriedades, verificando depois as consequências que levam aos diagramas de Feynman. O operador S é definido como:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \} \quad . \quad (3.1)$$

Os  $x_i$ 's são coordenadas espaço-temporais relacionadas ao respectivo hamiltoniano interagente  $\mathcal{H}_I$ , portanto as integrais são em 4 dimensões e vão de  $-\infty$  a  $+\infty$ . O operador de ordem temporal  $T$  está relacionado com a ordem cronológica em que aplicamos os  $\mathcal{H}_I$ 's - esta propriedade de ordenamento temporal vem da solução em série de Dyson para o operador S.  $\mathcal{H}_I$  é o hamiltoniano interagente e é dado por  $[-e\bar{\psi}\not{A}\psi = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi]$ .  $\psi$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  são espinores de Dirac - soluções da equação de Dirac.  $A^\mu$  é a solução para o campo eletromagnético das equações de Maxwell em 4 dimensões. Os três são introduzidos a seguir:

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi^+ + \psi^- = \sum_{s=1}^2 \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\vec{p}}}} (c_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx} + d_s^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}) \quad , \\
\bar{\psi} &= \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^- = \sum_{s=1}^2 \sum_{\vec{p}} \sqrt{\frac{m}{VE_{\vec{p}}}} (d_s(\vec{p})\bar{v}_s(\vec{p})e^{-ipx} + c_s^\dagger(\vec{p})\bar{u}_s(\vec{p})e^{ipx}) \quad , \\
A^\mu &= A^{\mu+} + A^{\mu-} = \sum_{r=0}^3 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}} \left( \varepsilon_r^\mu(\vec{k})a_r(\vec{k})e^{-ikx} + \varepsilon_r^\mu(\vec{k})a_r^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right) \quad ,
\end{aligned}$$

onde os três estão expandidos no conjunto completo de soluções para partícula livre da equação de Dirac e das equações de Maxwell, respectivamente.  $s$  denota estado de spin de férmion/antiférmion e  $r$  denota direção de polarização do fóton. O operador  $\psi^+$  destrói partícula,  $\psi^-$  cria anti-partícula.  $\bar{\psi}^+$  destrói anti-partícula,  $\bar{\psi}^-$  cria partícula.  $A^{\mu+}$  destrói partícula,  $A^{\mu-}$  cria partícula.

O operador  $S$  tem a propriedade fundamental: Dado um autoestado de energia  $|i\rangle$  inicial, a probabilidade de acharmos o autoestado de energia  $|f\rangle$  ao final da interação é  $|S_{fi}|^2$ , onde  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$  e  $\sum_f |S_{fi}|^2 = 1$ .

## 3.2 Diagramas de Feynman

Até este ponto, temos as expressões completas, e consideraremos agora a teoria de perturbação e a interpretação dos termos da série perturbativa em diagramas de Feynman. Expandindo a soma até  $n = 2$ , temos

$$S \cong 1 + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \mathcal{H}_I(x_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 d^4x_2 T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \} \quad . \quad (3.2)$$

Há um teorema deduzido por Wick que define: Ao invés de considerarmos a ordem temporal, dos hamiltonianos interagentes, dada pelo operador  $T$ , podemos decompor os termos ordenados temporalmente em termos ordenados normalmente, ou seja, em termos em que operadores destroem aparecem antes dos operadores criação, destruindo a visão de que um hamiltoniano age antes do outro, no sentido de ordem temporal.

Neste contexto, aparecem as contrações entre campos, termos que depois serão associados aos propagadores (intermediadores) da interação. Ao raciocinar através de diagramas de Feynman, os propagadores são as linhas internas ao diagrama, pois representa a junção de dois hamiltonianos interagentes (vértices) através da contração de dois campos (veja a Fig. 3.1).

Observe também que o hamiltoniano interagente contém a carga elétrica da partícula em primeira potência, o que leva a interpretação que um hamiltoniano interagente  $\mathcal{H}_I$  representa somente um vértice de interação: interação entre o campo eletromagnético  $A^\mu$  e um campo de spin 1/2 destruindo partículas/antipartículas no vértice e outro campo de spin 1/2 criando partículas/antipartículas no mesmo. Como

a carga elétrica  $e$  é uma quantidade pequena, podemos interromper a teoria de perturbação até uma ordem satisfatória de aproximação.

Com o que foi falado acima, podemos interpretar propagadores como linhas internas e partículas como linhas externas a um certo diagrama de Feynman. Desta forma um tipo de diagrama de primeira ordem ( $\mathcal{H}_I^1$ ) está ilustrado na Fig. 3.2(a), dois de segunda ordem em (b) e (c) e logo depois um de quarta ordem em (d), a ordem que nos interessa no capítulo 2 \*.

Desta forma, podemos enunciar as regras de Feynman †: regras para construção da expressão que representa a amplitude no espaço de momentum  $k$ . Aqui estamos no espaço de configuração; indo para o espaço de momentum, o valor  $\langle f|S|i\rangle$  se reflete em uma delta de Dirac que assegura conservação de momentum sobre o processo inteiro  $\times$  um termo que contém apenas características de  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e de  $A^\mu$ , ou seja, termos como  $u(\vec{p})$  ou  $\bar{v}(\vec{p})$  e  $\epsilon_r^\mu$ . Estas regras são utilizadas na construção de amplitudes que por sua vez são necessárias para, por exemplo, determinar seções de choque e tempo de decaimento.

Vejamos um breve exemplo de interpretação do operador  $S$  como diagramas de Feynman. Como expandido na eq. (3.2), tomemos o segundo termo:

$$S^{(1)} = ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x T(\bar{\psi} A \psi)_x \quad ,$$

que em ordem normal fica:

$$S^{(1)} = ie \int_{-\infty}^{\infty} d^4x N(\bar{\psi} A \psi)_x \quad .$$

A partir deste termo surgem 8 termos, pois cada operador contém duas partes, sendo que cada uma destrói ou cria partícula. Calcularemos somente um e o analisaremos em termos de diagramas de Feynman. Tome por exemplo:

$$S_1^{(1)} = ie \int d^4x \bar{\psi}^-(x) \gamma^\alpha A_\alpha^-(x) \psi^+(x) \quad .$$

Para calcularmos probabilidades temos que efetuar o sanduíche entre dois estados de interesse. Porém, somente teremos dois estados com os quais a probabilidade será não-nula:  $|e^- \vec{p} s\rangle$  e  $\langle e^- \vec{p}' s'; \gamma \vec{k}' r|$ , pois  $\psi^+(x)|e^- \vec{p} s\rangle \propto |0\rangle$  e  $\bar{\psi}^-|0\rangle \propto \sum_s \sum_{\vec{p}} |e^- \vec{p} s\rangle$ , e também  $A_\alpha^-(x) \sum_s \sum_{\vec{p}} |e^- \vec{p} s\rangle \propto \sum_r \sum_s \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{k}} |e^- \vec{p} s; \gamma \vec{k} r\rangle$ . Para não carregarmos a notação, não levaremos as somas no meio dos cálculos, mas devemos sempre lembrá-los. Ao final, calcularemos o seguinte valor esperado:

\*Para uma discussão mais detalhada sobre matriz  $S$  e diagramas de Feynman, veja por exemplo [53]

†As listo apenas a fim de introdução à montagem de amplitudes, conhecimento necessário para o capítulo a seguir.

$$\begin{aligned}
\langle f|S_1^{(1)}|i\rangle &= \langle e^- \vec{p}'; \gamma \vec{k}' | ie \int d^4x \bar{\psi}^-(x) \gamma^\alpha A_\alpha^-(x) \psi^+(x) | e^- \vec{p}r \rangle \\
&= ie \int d^4x \left[ \left( \frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}(\vec{p}') e^{ip'x} \right] \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{1/2} \epsilon_\alpha(\vec{k}') e^{ik'x} \right] \\
&\quad \times \left[ \left( \frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} u(\vec{p}) e^{ipx} \right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Temos que  $\int d^4x \exp[ix(p' + k' - p)] = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p)$ , onde agora consideramos o volume da caixa  $V$ , na qual a solução é obtida, vai a infinito, mas ainda denotando-o por  $V$ . Então, temos

$$\langle f|S_1^{(1)}|i\rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p) \left( \frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\vec{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\vec{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M} \quad ,$$

onde

$$\mathcal{M} = ie \bar{u}(\vec{p}') \not{\epsilon}(\vec{k}' = \vec{p} - \vec{p}') u(\vec{p}) \quad .$$

O gráfico que representa este processo está ilustrado na Fig. 3.1.  $\mathcal{M}$  é chamado de amplitude de Feynman para o processo representado por esta última figura. A delta de Dirac assegura a conservação de momenergia para este processo.

Temos de notar, no entanto, que para este processo e para os outros 7 processos obtidos de  $S^{(1)}$ , não temos a manifestação de processos reais pois  $p^2 = p'^2 = m^2$  e  $k'^2 = 0$  (valem somente para partículas aos extremos do diagrama, que estavam livres inicialmente) no nosso caso. Este foi só um exemplo para a ilustração da relação entre os diagramas de Feynman e o operador  $S$ ; para processos de mais alta ordem, olhe por exemplo [53].

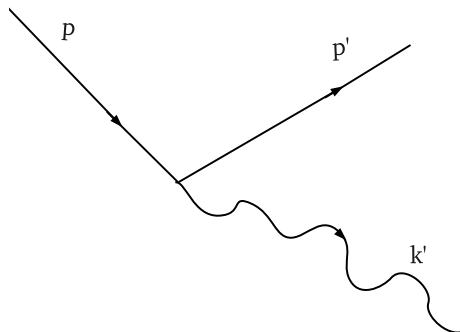


Figura 3.1: Vértice básico da QED.

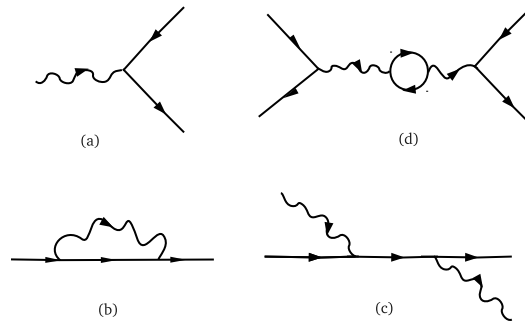


Figura 3.2: (a) vértice básico da QED (b) termo de segunda ordem (auto-energia de férmion) (c) um dos diagramas para espalhamento Compton: segunda ordem (d) termo de quarta ordem (espalhamento Bhabha)

Na tabela abaixo, resumimos as regras de Feynman básicas para a QED. Em QCD, trabalharemos em detalhe, posteriormente.

1) Para cada vértice, escreva um fator $ie\gamma^\alpha$ .
2) Para cada linha interna de fóton, indicado por seu momentum $k$ , escreva um fator $iD_{F\alpha\beta}(k) = i\frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$ .
3) Para cada linha interna de férmion, indicado por seu momentum $p$ , escreva um fator $iS_F(p) = i\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}$ .
4) Para linhas externas, escreva: (a) elétron inicial - $u_r(\vec{p})$ ; (b) elétron final - $\bar{u}_r(\vec{p})$ (c) pósitron inicial - $\bar{v}_r(\vec{p})$ ; (d) pósitron final - $v_r(\vec{p})$ (e) fóton inicial - $\epsilon_{r\alpha}(\vec{k})$ ; (f) fóton final - $\epsilon_{r\alpha}^\dagger(\vec{k})$
5) Para cada loop de férmion fechado, tome o traço e multiplique por um fator $(-1)$ .
6) Os quadrimomenta associados com as três linhas encontrando-se em cada vértice satisfazem a conservação de momenergia. Para cada quadrimomentum $q$ que não está fixo pela conservação de momenergia, tome a integração $(2\pi)^{-4} \int d^4q$ . Ocorre em loops.
7) Antissimetriação: Coloque um fator de $(-1)$ entre diagramas que se diferenciam pela intertroca de dois elétrons (ou pósitrons) iniciais (ou finais), ou pela intertroca de um elétron inicial com um pósitron final (e vice-versa).

Tabela 3.1: Regras de Feynman para a montagem de amplitudes no espaço de momentum.

O item 6) irá gerar as divergências que aparecem na QED.

Neste capítulo, procuramos introduzir o leitor que não tenha estudado teoria quântica de campos ao assunto, mesmo que muito basicamente. Os conceitos aqui referidos serão utilizados nos próximos capítulos como base da teoria. No próximo capítulo, aplicamos uma técnica de renormalização na QED.



## 4 *Obtenção do acoplamento running da QED*

Neste capítulo, utilizaremos o esquema de renormalização *na casca* ("on-shell scheme") para contornarmos os infinitos e por consequência obter o acoplamento running da QED.

A partir da expansão da matriz S e do teorema de Wick para o hamiltoniano interagente da QED,  $\mathcal{H}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ , podemos calcular processos em todas as ordens de aproximação. Ao efetuarmos cálculos de primeira ordem ("leading order") a partir de diagramas de Feynman da respectiva ordem, tudo ocorre sem correções na teoria: os cálculos dão resultados finitos. Então, a princípio, esperamos que a partir de diagramas de ordem mais alta, obtenhamos correções aos cálculos efetuados a partir de diagramas de ordem mais baixa. Entretanto, encontram-se integrais divergentes a partir de certos cálculos de ordem superior.

Nas seções a seguir, mostraremos como superar estas dificuldades matemática e fisicamente. Isto envolve três passos:

1. Primeiramente, toma-se a *regularização* da teoria: modifica-se a teoria de modo que possamos efetuar a *separação* na parte *finita* e bem definida em todas as ordens da teoria de perturbação, e na parte *divergente* que depois devem ser combinados;
2. Segundo, temos de reconhecer que os léptons e fótons **não-interagentes**, a partir dos quais a teoria de perturbação inicia, não são as mesmas entidades que as partículas **físicas** que interagem. A interação realiza a **modificação** de certas propriedades que definem as partículas, como a massa e a carga do elétron, e então as previsões devem ser expressas em termos das propriedades das partículas físicas, e não em função das propriedades das partículas não-interagentes. Este segundo passo, chamado **renormalização**, consiste em relacionar as propriedades das partículas físicas àquelas das partículas não-interagentes/nuas.
3. O terceiro passo consiste em voltar da teoria regularizada de volta para a QED. Os infinitos originais agora aparecem nas relações entre partículas nuas (sem redefinição de parâmetros) e partículas físicas (com redefinição de parâmetros). Estas relações, como as partículas nuas, são totalmente inobserváveis. Por outro lado, as previsões observáveis da teoria, expressas em termos das cargas

e massas mensuráveis das partículas, permanecem finitas à medida que a QED é restaurada. Ao fim, em termos dos parâmetros físicos como carga e massa, as correções radiativas são finitas.

O programa de renormalização que destacamos pode ser tomado através de todas as ordens da teoria de perturbação, tal que as correções radiativas podem ser calculadas a uma precisão muito alta. A concordância extraordinária entre estas previsões com experimentos também muito precisos - como o Lamb shift e o momento magnético anômalo dos léptons - constitui um dos grandes sucessos da física.

Consideraremos exclusivamente cálculos de correções radiativas na mais baixa ordem da teoria de perturbação, ou seja uma ordem de grandeza maior em  $\alpha$  do que os diagramas de ordem dominante. Os detalhes mais técnicos, de como localizar os infinitos nas integrais divergentes, são deixados para quando falarmos da **Regularização**.

## 4.1 Correções radiativas de segunda ordem da QED

As correções radiativas para qualquer processo na QED são obtidas, assim como os elementos de matriz de ordem mais baixa (ordem dominante), da expansão da matriz S. Os diagramas de Feynman representando as correções radiativas para um dado processo contêm vértices adicionais, comparados com os diagramas descrevendo o processo em mais baixa ordem da teoria de perturbação. Se nos restringirmos a diagramas de Feynman que contêm dois vértices extras, isto corresponde a calcular as correções radiativas na mais baixa ordem da teoria de perturbação. Portanto, estas correções são de segunda ordem na carga elétrica, isto é, primeira ordem na constante de estrutura fina  $\alpha = e^2/4\pi$ , em relação ao elemento de matriz de ordem mais baixa.

Para a introdução das idéias básicas envolvidas nos cálculos das correções radiativas de segunda ordem, iremos considerar o espalhamento elástico de elétrons por um campo estático externo  $A_e^\mu(\vec{x})$ . A matriz S para este processo é dada por :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_1} \dots N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_n} \} \quad . \quad (4.1)$$

Portanto, a teoria de perturbação em mais baixa ordem descreve o processo pelo diagrama de Feynman da Fig. 4.1 e é dado pela amplitude

$$\mathcal{M}^{(0)} = ie_0 \bar{u}(\vec{p}') A_e(\vec{p}' - \vec{p}) u(\vec{p}) \quad . \quad (4.2)$$

Daqui por diante a carga do elétron nu será denotada por  $(-e_0)$ . Similarmente, iremos denotar a massa do mesmo por  $m_0$ . As correções radiativas à amplitude seguem da expansão da matriz S, eq. (4.1). Iremos assumir que o campo externo é fraco, tal que somente precisamos reter os termos lineares em

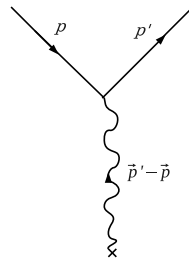


Figura 4.1: Contribuição de ordem dominante ao espalhamento elástico de um elétron por uma fonte de campo externa.

$A_e^\mu(\vec{x})$  nesta expansão. Podemos então escrever

$$S \cong 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie)^n}{(n-1)!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ N[\bar{\psi}(A_e)\psi]_{x_1} N[\bar{\psi}(A)\psi]_{x_2} \dots N[\bar{\psi}(A)\psi]_{x_n} \} \quad (4.3)$$

A amplitude dominante  $\mathcal{M}^{(0)}$  provém do termo referente a  $n = 1$  na equação (4.3).

O termo para  $n = 2$  é linear no campo de radiação quantizado  $A^\mu(x)$ . Então, ele necessariamente envolve emissão ou absorção de um fóton e descreve processos como o bremsstrahlung. Termos provindos de  $n = 2$ , portanto, não são considerados como amplitudes de correção à amplitude  $\mathcal{M}^{(0)}$ , pois esses termos não levam em conta o espalhamento elástico de elétrons e sim inelástico, com emissão ou absorção de um fóton real.

As correções radiativas de segunda ordem seguem do termo  $n = 3$ . As quatro contribuições a essa correção de segunda ordem são mostradas na Fig. (4.2). Cada uma dessas pode ser considerada como uma modificação do diagrama de mais baixa ordem (4.1), correspondendo a cada uma das substituições mostradas na Fig. (4.2). Veja agora, como temos na segunda potência o campo  $A^\mu(x)$ , podemos ter contrações - conforme o teorema de Wick - entre os campos  $A^\mu$ , gerando propagadores de fótons virtuais, conforme podemos ver na Fig. (4.2). Para  $n = 2$ , temos somente propagadores de férmions.

Os diagramas com *loop* 4.3(a) e (b) representam partes de auto-energia de um elétron e de um fóton, respectivamente, devidas à interação do campo elétron-pósitron com o campo do fóton. O loop de auto-energia do elétron no diagrama 4.3(a) representa o processo de mais baixa ordem que transforma um elétron nu em um elétron real físico. De modo parecido, o diagrama em loop 4.3(b) representa a auto-energia do fóton em segunda ordem somente. A interação férmion-fóton aqui se manifesta na criação

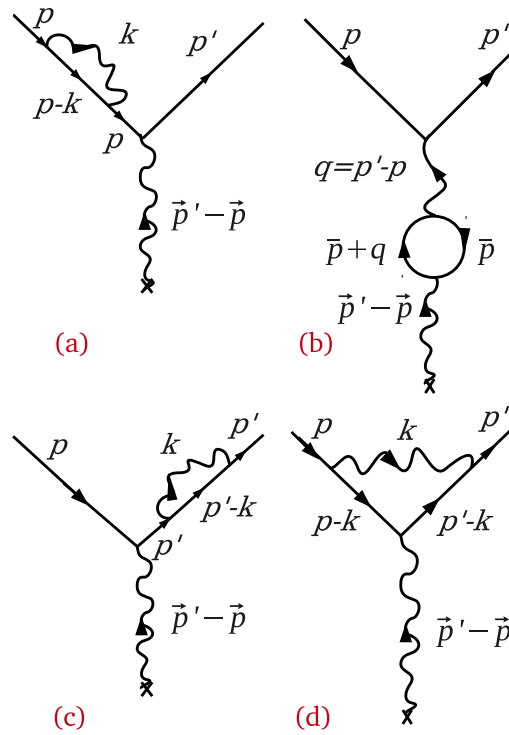


Figura 4.2: As quatro contribuições de segunda ordem às correções radiativas para o espalhamento eletrônico.

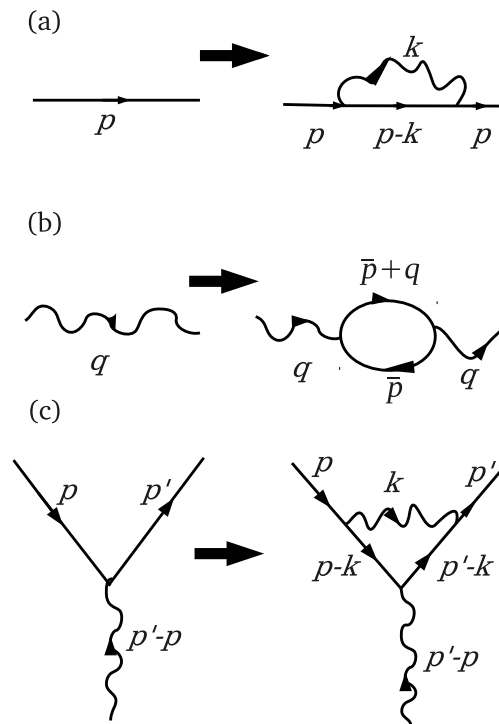


Figura 4.3: (a) correção: auto-energia de férmion  $ie_0^2\Sigma(p)$ ; (b) correção: auto-energia do fóton  $ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(q)$ ; (c) correção: vértice modificado  $e_0^2\Lambda^\mu(p', p)$

e aniquilação de um par elétron-pósitron virtual, e o diagrama 4.3(b) é referido como um diagrama de polarização do vácuo. Finalmente, a substituição mostrada na Fig. 4.3(c) representa a mais baixa modificação do vértice básico, isto é, da interação férmion-fóton  $N[\bar{\psi}A\psi]$ , devido à emissão e reabsorção de um fóton virtual durante o processo de interação.

As amplitudes de Feynman para os diagramas 4.2(a) - 4.2(d) seguem das regras de Feynman e são dadas por

$$\mathcal{M}_a^{(2)} = ie_0\bar{u}(\vec{p}')A_e(\vec{p}' - \vec{p})iS_F(p)ie_0^2\Sigma(p)u(\vec{p}) \quad , \quad (4.4)$$

$$\mathcal{M}_b^{(2)} = ie_0\bar{u}(\vec{p}')ie_0^2\Sigma(p')iS_F(p')A_e(\vec{p}' - \vec{p})u(\vec{p}) \quad , \quad (4.5)$$

$$\mathcal{M}_c^{(2)} = ie_0\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\lambda u(\vec{p})iD_{F\lambda\mu}(q)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(q)A_{e\nu}(\vec{p}' - \vec{p}) \quad , \quad (4.6)$$

$$\mathcal{M}_d^{(2)} = ie_0\bar{u}(\vec{p}')e_0^2\Lambda^\mu(p', p)u(\vec{p})A_{e\mu}(\vec{p}' - \vec{p}) \quad , \quad (4.7)$$

onde

$$ie_0^2\Sigma(p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_{F\alpha\beta}(k)\gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta \quad (4.8)$$

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(q) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1)Tr \left( \int d^4\bar{p} \bar{\gamma}^\mu iS_F(\bar{p} + q)\gamma^\nu iS_F(\bar{p}) \right) \quad , \quad (4.9)$$

e

$$e_0^2\Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha iS_F(p'-k)\gamma^\mu iS_F(p-k)\gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k) \quad . \quad (4.10)$$

Vemos que para calcularmos as correções radiativas de segunda ordem ao espalhamento de elétrons, devemos resolver as três integrais de loop (4.8)-(4.10). Infelizmente, ao substituirmos as expressões explícitas para os propagadores do fóton e do elétron, as três integrais se revelam divergentes para valores altos de momenta integrados\*. A partir de argumentos dimensionais, vê-se que para  $k \rightarrow \infty$ , as integrais 4.8 e 4.10 parecem ser de ordem  $k$  e  $\ln k$  respectivamente enquanto que a integral (4.9) parece ser da ordem  $\bar{p}^2$  conforme  $\bar{p} \rightarrow \infty$ . Nas próximas subseções, iremos mostrar como os conceitos de renormalização de massa e de carga possibilitam extrair as correções radiativas finitas de ordem  $\alpha$ , expressas em termos da carga observada ( $-e$ ) e da massa observada  $m$  do elétron real físico, e não em termos dos

\*As integrais 4.8 e 4.10 também levam a divergências infra-vermelhas ( $k \rightarrow 0$ ).

parâmetros não-observáveis ( $-e_0$ ) e  $m_0$  do elétron nu. A grande importância desta análise vem do fato de que, ao calcularmos as correções radiativas de mais baixa ordem a qualquer processo, estas mesmas três integrais divergentes ocorrem, e mais nenhuma outra. Conseqüentemente, uma vez que conseguirmos lidar com estas três integrais, os cálculos de correções radiativas de segunda ordem a qualquer processo não apresentarão nenhuma surpresa.

## 4.2 Auto-energia do fóton

Iremos considerar primeiramente a contribuição da auto-energia do fóton, Fig. 4.3(b), no propagador do fóton. Por exemplo, no espalhamento Møller ( $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ ), o diagrama de mais baixa ordem 4.4(a) é acompanhado pelo diagrama de Feynman 4.4(b) como uma das contribuições para a correção radiativa de segunda ordem. Nas amplitudes de Feynman, ir do diagrama 4.4(a) para o 4.4(b) significa realizarmos a substituição

$$iD_{F\alpha\beta}(k) \longrightarrow iD_{F\alpha\mu}(k)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)iD_{F\nu\beta}(k) \quad , \quad (4.11)$$

onde  $ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)$  é agora, substituindo explicitamente os propagadores na expressão 4.9,

$$ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\epsilon][p^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (4.12)$$

Esta integral é divergente para  $p$  grande.

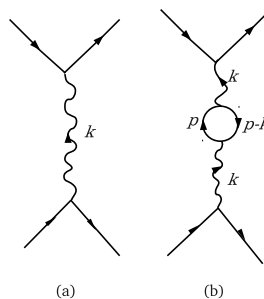


Figura 4.4: Espalhamento Møller: (b) é a correção por auto-energia do fóton ao diagrama de ordem dominante (a).

Para lidarmos com esta integral, devemos regularizá-la, ou seja, devemos modificá-la de forma que se torne uma integral finita bem definida. Por exemplo, isto poderia ser alcançado multiplicando o

integrando 4.12 pelo fator de convergência

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left( \frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2 . \quad (4.13)$$

Onde  $\Lambda$  é um parâmetro de corte (parâmetro *cutoff*). Para altos valores, mas finitos, de  $\Lambda$ , a integral agora se comporta como  $\int d^4p/p^6$  para  $p$  grande, e é bem definida e convergente. Para  $\Lambda \rightarrow \infty$ , o fator  $f(p^2, \Lambda^2)$  tende a 1, e a teoria original é restaurada. Pode-se pensar sobre tais fatores de convergência como artifícios matemáticos, introduzidos para superar uma característica marcante da QED, ou então como uma modificação genuína da QED a energias muito altas, isto é, a distâncias muito pequenas, que devem aparecer em experimentos a energias suficientemente altas. Mesmo seguindo esse segundo ponto de vista, a imposição desses fatores de convergência incomoda por os implantarmos de forma *ad-hoc*, e não surgem de forma natural no escopo da teoria.

O fator de convergência da eq. (4.13) foi introduzido para ilustrar a idéia de regularização de um modo simples. Entretanto, este fator não nos fornece um procedimento satisfatório de regularização para a QED porque ele não garante massa de repouso nula para o fóton físico, nem a invariância de calibre da teoria. É mais natural e recomendável que empreguemos um procedimento de regularização que garanta massa de repouso nula para o fóton e invariância de calibre para todos os valores do parâmetro  $\Lambda$  de cutoff e para todas as ordens da teoria de perturbação. Diferentes formalismos de regularização que satisfazem estes dois requisitos existem. No limite em que a teoria original é restaurada, a forma detalhada do procedimento de regularização não deverá afetar nenhum resultado físico.

Depois dessas seções introdutórias ao formalismo de renormalização, veremos como estas restrições podem ser alcançadas. Neste capítulo iremos assumir que a teoria foi regularizada de modo a garanti-las, de forma que todas as expressões estão bem definidas, finitas e invariantes sob calibre.

Para adentrarmos aos efeitos da correção radiativa da Fig. 4.4(b), iremos considerá-la juntamente com o diagrama de mais baixa ordem, Fig. 4.4(a), do qual ela se origina. Tomar estes dois diagramas juntos corresponde à substituição mostrada na Fig. 4.5, ou melhor, a modificação do propagador

$$iD_{F\alpha\beta}(k) \longrightarrow iD_{F\alpha\beta}(k) + iD_{F\alpha\mu}(k)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)iD_{F\nu\beta}(k) \quad , \quad (4.14)$$

ou mais explicitamente,

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2 + i\epsilon} ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k) \frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2 + i\epsilon} . \quad (4.15)$$

Podemos simplificar esta expressão. Segue que o tensor de segunda ordem mais geral que pode ser formado usando somente o quadri-vetor  $k^\mu$  está explicitado abaixo, ou seja,  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  pode ser desmem-

brado sem perda de generalidade na forma

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad . \quad (4.16)$$

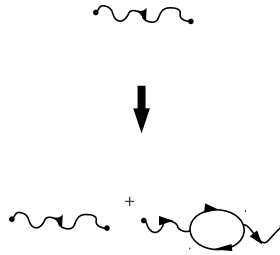


Figura 4.5: Propagador do fóton modificado.

Se substituirmos 4.16 em 4.15, segue que termos proporcionais ao momentum  $k$  dão contribuições nulas<sup>†</sup>. Então, podemos omitir o termo  $k^\mu k^\nu B(k^2)$  da eq. (4.16).

Agora, se substituirmos 4.16 sem o segundo termo na eq. (4.15), resulta em

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \left[ 1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad . \quad (4.17)$$

A expressão do lado direito nos dá o propagador do fóton modificado incluindo os efeitos da auto-energia do fóton em segunda ordem. Reescrevemos a equação acima como

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \quad . \quad (4.18)$$

Da eq. 4.17 para a eq. 4.18, há uma aproximação. Supomos o termo  $e_0^2 A(k^2) \ll 1$  e efetuamos a expansão

$$(1 + x)^{-1} \stackrel{x \ll 1}{\approx} 1 - x \quad .$$

<sup>†</sup>Para vermos isso, tome por exemplo o primeiro vértice da Fig. 4.4(b), a contribuição dele dada à amplitude é proporcional a  $\bar{u}(p_1)\gamma^\alpha u(p_3)$  - onde  $p_1$  e  $p_3$  são os momenta do primeiro elétron, primeiramente entrando, e depois saindo do vértice, de forma que  $k^\mu = (p_1 - p_3)^\mu$  - e vendo que a contração em sequência dos índices  $\alpha$  e  $\mu$  a partir de  $\gamma^\alpha g_{\alpha\mu} k^\mu = \not{k}$  nos deixa com  $\bar{u}(p_1)(\not{p}_1 - \not{p}_3)u(p_3) = 0$ , pois, da equação de Dirac  $(\not{p} - m)u(p) = 0$  e  $\bar{u}(p)(\not{p} - m) = 0$



O lado esquerdo de 4.18 representa o propagador do fóton em mais baixa ordem da teoria de perturbação, isto é, o propagador do fóton não-interagente. Este propagador possui um pólo em  $k^2 = 0$ , correspondendo ao fóton nu ter massa de repouso nula. <sup>‡</sup> O lado direito de 4.18 representa o propagador do fóton incluindo a correção de auto-energia de segunda ordem, ou seja, é o propagador de um fóton real físico (considerando-se  $O(e_0^2)$ ). Se, como discutido antes, a massa de repouso do fóton real também desaparecer, então o propagador do fóton real deve também ter seu pólo em  $k^2 = 0$ . Para fazer esta massa de repouso desaparecer, algumas restrições devem ser impostas em 4.18, como

$$A(0) \equiv A(k^2 = 0) = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Se expandirmos  $A(k^2)$  em série de Taylor, ele pode ser escrito como

$$A(k^2) = A'(0)k^2 + \Pi_c(k^2)k^2 \quad , \quad (4.20)$$

onde

$$A'(0) \equiv \left[ \frac{dA(k^2)}{dk^2} \right]_{k^2=0} \quad ,$$

e  $\Pi_c(k^2)$  se anula linearmente com  $k^2$  em  $k^2 = 0$  (verificaremos isso em **Métodos de Regularização na QED**), ou seja, a expansão de Taylor só vai até a ordem em que deixa  $\Pi_c(k^2)$  linear em  $k^2$  - o restante da expansão é nulo. Substituindo 4.20 em 4.17 e multiplicando por  $e_0^2$ , obtemos

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2) \quad . \quad (4.21)$$

Ao formular as regras de Feynman, associamos a carga  $e_0$  com cada vértice. Ao escrever a eq. (4.21), nós incorporamos nela os dois fatores  $e_0$  que ocorrem nos vértices aos extremos de um propagador fotônico, pois o lado esquerdo leva dois destes fatores. O lado direito está transformado, simplesmente.

Devemos agora interpretar 4.21. O primeiro termo no lado direito é justamente o termo do lado esquerdo multiplicado pela constante  $[1 - e_0^2 A'(0)]$ . É como se a magnitude das duas cargas interagentes através do propagador do fóton não fosse  $e_0$ , mas  $e$ , dada por

$$e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] \quad . \quad (4.22)$$

Nesta equação, introduzimos o conceito de *renormalização de carga*. A eq. (4.22) define a carga eletrônica renormalizada ( $-e$ ), ou seja, a carga do elétron físico e interagente, em contraste com a carga

---

<sup>‡</sup>O propagador de uma partícula de massa de repouso  $m$  possui um pólo para o quadri-momentum  $p$  tal que  $p^2 = m^2$ . Por exemplo, para bósons de spin 0 com massa  $\mu$  e férmions de spin 1/2 com massa  $m$ , temos os propagadores  $i/(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)$  e  $i(\not{p} + m)/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$ , respectivamente.

eletrônica ( $-e_0$ ) correspondente ao elétron nu e não-interagente. Consideramos a auto-energia do fóton em segunda ordem somente. Há, é claro, correções de ordem mais alta e iremos escrever 4.22 mais completamente como

$$e \equiv Z_3^{1/2} e_0 = e_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + O(e_0^4) \right] \quad . \quad (4.23)$$

A constante  $Z_3$  relacionando a carga nua  $e_0$  e a carga física  $e$  é chamada de constante de renormalização. O lado direito de 4.23 nos dá a expressão explícita para esta constante até segunda ordem em  $e_0$ .

É claro que a carga ( $-e$ ) do elétron físico que é observável, e não a carga ( $-e_0$ ) que foi introduzida como a constante de acoplamento entre os campos livres. Portanto, todas as quantidades observáveis, como seções de choque, devem ser expressas em termos da carga real  $e$ , não em termos da carga nua  $e_0$ . Da eq. (4.23), temos  $e_0 = e[1 + O(e^2)]$

de forma que a eq. (4.21) pode ser escrita como

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e_0^2 \longrightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e^2 + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} e^4 \Pi_c(k^2) + O(e^6) \quad . \quad (4.24)$$

A eq. (4.24) é nosso resultado final. Isto dá ao propagador do fóton ( $\times e^2$ ) expresso em termos da carga real  $e$  e preciso a termos de ordem  $e^4$ . O primeiro termo no lado direito é o propagador de fóton original, mas multiplicado pelo quadrado da carga renormalizada  $e$ , em vez da carga nua  $e_0$ . O segundo termo, da ordem  $\alpha (\equiv e^2/4\pi)$  relativamente ao primeiro termo, levará a uma correção radiativa observável desta ordem em qualquer processo envolvendo o propagador fotônico  $iD_F^{\mu\nu}(k)$  na ordem mais baixa da teoria de perturbação.

Vale lembrar que mesmo para teoria finitas bem comportadas, a renormalização é necessária para que possamos expressar previsões teóricas para seções de choque, etc., em termos da quantidades observáveis como a carga das partículas reais  $e$ , em vez de expressar essas previsões em termos de quantidades inobserváveis como a carga  $e_0$ .

Devemos agora considerar o que acontece conforme tomamos este limite. Depois consideraremos o procedimento de regularização em detalhe. Agora, somente exporemos os resultados. Antes de prosseguirmos ao limite que retoma a teoria original, todas as quantidades estão bem definidas e finitas. Conforme o limite é tomado, a integral regularizada  $\Pi_c(k^2)$  tende a um limite bem definido finito que é independente da forma detalhada do procedimento de regularização. Entretanto, conforme o limite é tomado, divergências reaparecem, agora na relação entre  $e$  e  $e_0$  na eq. (4.23)<sup>§</sup>. Mas essa é uma relação entre a carga observável  $e$  de uma partícula física real e a carga nua  $e_0$  de uma partícula não-interagente, que é uma construção teórica e completamente inobservável. Então 4.23 não é verificável por exper-

<sup>§</sup> $A'(0)$  e a constante de renormalização  $Z_3$  se tornam infinitos.

imentação, e é somente nestas equações não testáveis em que as divergências tomam parte. Olhando retrospectivamente para o nosso resultado final para o propagador modificado do fóton, eq. (4.24), vemos que no limite de QED, ele só envolve a carga elementar  $e$  e o limite bem definido finito da integral em loop  $\Pi_c(k^2)$ . Então, o propagador modificado, e as amplitudes de Feynman e as previsões teóricas às quais ele dá forma, são bem definidas e finitas, mesmo no limite de QED da teoria regularizada. Uma expressão explícita para a integral de loop  $\Pi_c(k^2)$  será deduzida posteriormente, após explicitadas as correções devidas ao vértice de interação, ao propagador de férmion e às linhas externas. Esta integral será deduzida ao expormos os métodos para separarmos partes finitas e infinitas de integrais inicialmente divergentes. Vale ressaltar aqui que não precisamos ir tão longe para fazermos essa separação; pela manipulação apropriada da eq. (4.12)<sup>¶</sup>, podemos escrever  $A(k^2)$  como

$$A(k^2) = k^2 \frac{e^2}{12\pi^2} \left\{ \int_{m^2}^{\infty} \frac{dx}{x} - 6 \int_0^1 z(1-z) \ln \left( 1 - \frac{k^2}{m^2 c^2} z(1-z) \right) dz \right\} ,$$

identificamos claramente a parte logaritmicamente divergente no primeiro termo como sendo  $A'(0)$ . E o segundo termo é a nossa integral finita  $\Pi_c(k^2)$  e já estaria resolvido o problema quanto à correção de auto-energia do fóton em segunda ordem da teoria de perturbação.

Mas nem sempre podemos manipular a equação da mesma forma com o qual realizamos com esta última. Um método sistemático de regularização (*regularização dimensional*) será efetuado quando tratarmos da regularização da teoria, e lá este termo divergente reconhecido como parte de  $A'(0)$  será dado, digamos assim, por uma aproximação deste logaritmo, que também diverge. Assim, com o termo divergente aproximado ou não,  $A'(0)$  diverge, e por outro lado temos o termo finito fornecendo o mesmo resultado via regularização dimensional ou por remanejamento adequado da integral divergente. Isto nos dá uma confirmação do método da regularização dimensional que usaremos posteriormente a essas seções iniciais.

### 4.3 Auto-energia do elétron

Agora, consideraremos a correção de auto-energia de férmion em um propagador fermiônico, mostrada na Fig. 4.3(a) e dada pela eq. (4.8). Depois de simplificações por meio de identidades de contração<sup>||</sup>, esta equação pode ser escrita como

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} . \quad (4.25)$$

Esta integral de loop é divergente no regime ultravioleta ( $k \rightarrow \infty$ ). Seu tratamento é muito pare-

<sup>¶</sup>Este cálculo está iniciado no Apêndice E do livro [54]

<sup>||</sup>  $\begin{cases} \gamma_\lambda \gamma^\lambda = 4 & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha & \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda = 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta) \\ \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = 4g^{\alpha\beta} \end{cases}$

cido àquele da auto-energia do fóton na última seção, de forma que apenas mostraremos os resultados principais sobre a auto-energia do elétron.

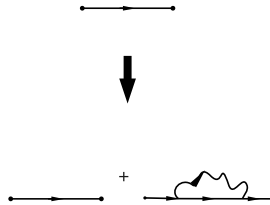


Figura 4.6: Propagador do férmion modificado

Para identificar o pólo do propagador modificado em  $\not{p} = m$ , reescrevemos  $\Sigma(p)$  em potências de  $(\not{p} - m)$ , na forma

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p) \quad , \quad (4.26)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes e  $\Sigma(p)$  se anula linearmente com  $(\not{p} - m)$  em  $\not{p} = m$ . Tem-se  $A = \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ , e também temos que introduzir

$$m = m_0 + \delta m \quad , \quad (4.27)$$

para o propagador modificado ter um pólo em  $\not{p} = m$ , onde

$$\delta m = -e_0^2 A \quad . \quad (4.28)$$

Definimos uma carga renormalizada  $e$  pela relação

$$e^2 \equiv Z_2 e_0^2 = e_0^2 (1 - e_0^2 B) + O(e_0^6) \quad , \quad (4.29)$$

E o propagador de ordem dominante juntamente com a correção de segunda ordem fica, portanto,

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{ie^2}{\not{p} - m + i\varepsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^6) \quad . \quad (4.30)$$

Acha-se que as constantes  $A$ ,  $B$  e  $Z_2$  são logaritmicamente divergentes no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , enquanto

que o termo de correção  $\Sigma_c(p)$  permanece bem definido e finito neste limite. Como antes:  $A$ ,  $B$  e  $Z_2$  ocorrem somente em relações invisíveis à detecção, conectando partículas físicas e nuas.

## 4.4 Renormalização de linhas externas

Nas últimas duas seções, consideramos as contribuições de auto-energia nos propagadores do fóton e do férmion. Quando consideramos correções radiativas, estas contribuições devem também ser feitas nas linhas externas. O seu único efeito agora é uma renormalização de carga, mas elas não levam a quaisquer correções radiativas finitas. Tem-se

$$u(\vec{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} u(\vec{p}) \quad , \quad \bar{u}(\vec{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{u}(\vec{p}) \quad , \quad (4.31)$$

$$v(\vec{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} v(\vec{p}) \quad , \quad \bar{v}(\vec{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{v}(\vec{p}) \quad , \quad (4.32)$$

$$\varepsilon^\mu(\vec{k}) \rightarrow Z_3^{1/2} \varepsilon^\mu(\vec{k}) \quad , \quad (4.33)$$

onde as constantes de renormalização  $Z_2$  e  $Z_3$  estão definidas nas equações (4.29) e (4.23), respectivamente. A última equação se mantém válida para todas as ordens.

Quando consideramos os propagadores de fóton e de férmion modificados nas últimas duas seções, interpretamos os parâmetros  $Z_3$  e  $Z_2$  como constantes de renormalização das cargas atuando nos vértices aos extremos dos propagadores de fóton e de férmion, respectivamente:  $e_0 \rightarrow e = Z_3^{1/2} e_0$  e  $e_0 \rightarrow e = Z_2^{1/2} e_0$ . Podemos igualmente interpretar as renormalizações de função de onda 4.31 - 4.33 como renormalizações de carga. Para este fim, associamos os fatores  $Z_3^{1/2}$  e  $Z_2^{1/2}$  nas equações (4.31) - (4.33) com as cargas atuando nos vértices aos quais as linhas externas estão acopladas. As relações para renormalização de carga através de  $Z_2$  e  $Z_3$  são agora válidas geralmente para cada linha interna e externa relacionada ao vértice.

## 4.5 Modificação de vértice

Finalmente, consideramos a modificação de vértice em segunda ordem. Isto corresponde a trabalharmos com a adição do termo

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha \quad (4.34)$$

ao diagrama de ordem dominante. A quantidade  $\Lambda^\mu(p', p)$  é tanto divergente no ultravioleta quanto no infravermelho. Analogamente às auto-energias do fóton e do elétron, pode-se separar  $\Lambda^\mu(p', p)$  em

duas partes,

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad . \quad (4.35)$$

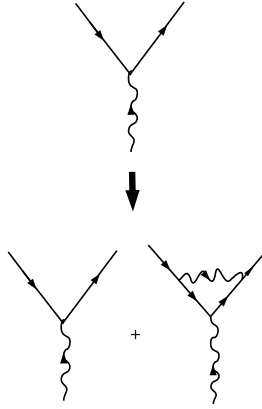


Figura 4.7: Modificação de vértice.

Define-se uma constante de renormalização de carga  $Z_1$  por

$$e \equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + e_0^2 L) + O(e_0^5) \quad , \quad (4.36)$$

onde  $O(e_0^5)$  aparece para indicar que há contribuições de ordem mais alta à renormalização de carga, que resultam de todas as modificações de vértice, enquanto somente consideramos a correção mais baixa, a de segunda ordem. Temos que a correção de segunda ordem mais o termo de ordem dominante resultam em:

$$ie_0\gamma^\mu \longrightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie [\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5) \quad , \quad (4.37)$$

onde,  $O(e^5)$  indica a existência de correções em mais alta ordem ao vértice, segundo a carga  $e$  agora.

A equação (4.37) é o nosso resultado final para a modificação do vértice básico de interação. No limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , no qual a QED é restaurada,  $L$  e  $Z_1$  divergem, mas isso só afeta a relação não detectável 4.36. De outro lado,  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  tende a um limite finito e bem definido que é independente do procedimento de regularização e que contribui para a correção radiativa de segunda ordem de um processo.

## 4.6 Renormalização de carga revisitada

Agora combinaremos a renormalização de carga resultando da modificação de vértice com as renormalizações de carga providas da auto-energia do fóton e do elétron. Já que cada vértice possui uma

linha de fóton e duas linhas de férmion acopladas, segue destas equações que o efeito resultante é a substituição da carga nua  $e_0$  em cada vértice, ou seja, em todo lugar na teoria pela carga renormalizada

$$e = e_0 Z_3^{1/2} \frac{Z_2}{Z_1} . \quad (4.38)$$

Este resultado foi derivado em teoria de perturbação de segunda ordem somente, mas pode-se mostrar que ele se mantém em todas as ordens da teoria de parturbação.

O último resultado permite uma simplificação muito importante. Isto é devido ao fato que a contribuição da auto-energia do férmion  $\Sigma(p)$  e a contribuição de vértice  $\Lambda^\mu(p', p)$  estão conectados pela identidade de Ward \*\* que é dada por

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p) . \quad (4.39)$$

A equação (4.39) é um resultado de segunda ordem. Entretanto, a identidade de Ward pode ser generalizada e se mantém em todas as ordens da teoria de perturbação, permitindo a obtenção de modificações de vértice de ordem mais alta pela diferenciação de contribuições de auto-energia fermiônica. Isto simplifica bastante o cálculo de correções radiativas de ordem mais alta. A identidade de Ward também implica uma relação entre as constantes de renormalização de carga  $Z_1$  e  $Z_2$ . Não mostraremos aqui este cálculo, mas pode-se consultar [53]. Esta relação pode ser expressa:

$$Z_2 = Z_1 . \quad (4.40)$$

Embora a equação (4.40) seja deduzida em teoria de perturbação de segunda ordem, é uma relação exata valendo em todas as ordens da teoria de perturbação. Como consequência da igualdade 4.40, a equação (4.38) se reduz a:

$$e = e_0 Z_3^{1/2} . \quad (4.41)$$

Então a renormalização de carga não depende dos efeitos de auto-energia do férmion ou modificações de vértice, mas se origina somente dos efeitos de auto-energia do fóton - ou polarização do vácuo.

---

\*\*A identidade de Ward é facilmente verificável pela derivação da auto-energia do elétron em relação a alguma componente do quadrimomentum, resultando no vértice em que nenhuma transferência de momentum ocorre.

### 4.6.1 Constante de acoplamento eletromagnético

Terminada toda a base conceitual da qual precisávamos para entendermos os processos de correção da QED, ou pelo menos até segunda ordem na teoria de perturbação, agora analisamos a "constante" de acoplamento  $\alpha$  eletromagnética de um modo mais definitivo, ou seja, já associando o valor finito de  $\Pi_c(k^2)$  ao propagador do fóton. Apenas com a correção  $\Pi_c(k^2)$  ao propagador do fóton, já podemos definir  $\alpha_{EM}(k^2)$ .

Da modificação ao propagador do fóton, desprezando termos da ordem  $e^4$ , tínhamos

$$\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \longrightarrow \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} [1 - e^2 \Pi_c(k^2)] \quad . \quad (4.42)$$

Simplemente multiplicando por  $e^2$  nos dois lados da equação acima que corresponderiam a dois vértices de interação na mais baixa ordem ( $ig_e \gamma^\mu = ie \gamma^\mu$ , vértice renormalizado) de por exemplo dois elétrons, Fig. 4.4, e já substituindo o resultado anterior de  $\Pi_c(k^2)$ , obtemos

$$e^2 \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \longrightarrow e^2 \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ 1 - \left( -\frac{e^2}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right] \right) \right\} \quad . \quad (4.43)$$

Esta expressão pode ser interpretada do seguinte modo: *do lado esquerdo, há o propagador renormalizado, mas considerando-se apenas diagramas a nível de árvore ("leading-order"), e do lado direito há a expressão que nos diz a forma do propagador renormalizado considerando-se, além dos diagramas leading-order, diagramas de segunda ordem na teoria de perturbação.* Aparece dentro do lado direito uma função dependente de  $k^2$  ( $\Pi_c(k^2)$ ), de maneira que podemos definir uma nova constante de acoplamento, agora  $e(k^2)$  dependente do momentum transferido  $k$  na interação entre os dois elétrons iniciais.

Logo, podemos definir:

$$e^2(k^2) = e^2(0) \left( 1 + \frac{e^2(0)}{12\pi^2} f\left(\frac{-k^2}{m^2}\right) \right) \quad , \quad (4.44)$$

pela absorção da função  $f(-k^2/m^2)^{\dagger\dagger}$ :

$$f(x) \cong \begin{cases} x/5, & x \ll 1 \\ \ln x, & x \gg 1 \end{cases} \quad ,$$

$e(0)$  é dado pelo valor usual de carga elétrica, ou seja, sem correções relativísticas, já que a variação de  $e(k^2)$  é muito pequena em velocidades do cotidiano.

---

<sup>††</sup>Onde, agora  $\Pi_c(k^2)$  é definida como

$$e^2 \Pi_c(k^2) = -e^2 \frac{1}{12\pi^2} f(-k^2/m^2) \quad f(-k^2/m^2) = 6 \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right]$$



Convertendo para  $\alpha$ , temos

$$\alpha(k^2) = \alpha(0) \left( 1 + \frac{\alpha(0)}{3\pi} f\left(\frac{-k^2}{m^2}\right) \right) , \quad (4.45)$$

onde novamente,  $\alpha(0)$  segue o valor usado geralmente, ou seja,  $\alpha(0) \simeq \frac{1}{137}$ .

Então, agora determinamos a dependência de  $\alpha(k^2)$  e de  $e(k^2)$  no momentum  $k$  transferido na interação entre duas partículas de spin semi-inteiro carregadas por carga  $e(0)$  quando estão totalmente afastadas. Momentum mais alto significa maior proximidade, então outro jeito de dizer é que a carga efetiva  $e(k^2)$  de cada partícula depende de quão longe elas estão entre si. Isto é uma consequência da polarização do vácuo, que blinda a carga.

Surge então uma questão interessante: como Millikan, Rutherford, ou até mesmo Coulomb nunca notaram este efeito? Se a carga elétrica não é uma constante, por que ninguém notou? A resposta é que a variação é extremamente sutil, em situações não-relativísticas, como comentamos anteriormente. Até mesmo em uma colisão frontal entre dois elétrons a velocidades  $\frac{c}{10}$ , o termo de correção é de cerca de  $6 \times 10^{-6}$  em relação a  $e(0)$ . Para maioria dos fins, portanto,  $\alpha = \alpha(0) = \frac{1}{137}$  é suficientemente bom.

Note a grande utilidade de introduzirmos  $\alpha(k^2)$  ou  $e(k^2)$  na teoria. Para cada interação, por exemplo de dois elétrons, agora basta adicionarmos um fator de  $ig_e(k^2)\gamma^\mu = i\sqrt{4\pi\alpha(k^2)}\gamma^\mu = ie(k^2)\gamma^\mu$  para cada dois vértices com propagador internamente aos dois, em vez de calcularmos diferentes diagramas de todas as ordens para cada processo.

Falaremos um pouco mais sobre  $\alpha(k^2)$  quando deduzirmos a sua dependência em  $k$  a partir de outros métodos usados para a obtenção de  $\alpha_s(k^2)$ , no contexto da teoria da interação forte: QCD, portanto.

## 4.7 Aspectos finais

Completamos agora nossa análise das modificações de segunda ordem das linhas de férmion e de fóton e de vértices, e podemos resumir nossos resultados como segue. Se atribuímos as massas físicas ( $m_e, m_\mu, \dots$ ) aos léptons e substituímos a carga nua  $e_0$  pela carga física  $e = e_0 Z_3^{1/2}$ , então as únicas modificações devidas às correções de vértice e de auto-energia em segunda ordem, em QED, são as modificações de propagador

$$\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} [1 - e^2 \Pi_c(k^2)] + O(e^4) , \quad (4.46)$$

$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \longrightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^4) , \quad (4.47)$$

e a modificação de vértice

$$ie_0\gamma^\mu \longrightarrow ie \left[ \gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p) \right] + O(e^5) \quad . \quad (4.48)$$

Como dito antes, no limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  no qual a QED é restaurada, as funções regularizadas  $\Pi_c$ ,  $\Sigma_c$  e  $\Lambda_c^\mu$  tendem a limites finitos bem definidos tal que as modificações (4.46)-(4.48) levam a correções radiativas de ordem  $\alpha$ . Ao invés de interpretarmos a regularização como um dispositivo matemático para lidar com as divergências da teoria, podemos manter o parâmetro de corte  $\Lambda$  finito e interpretar a teoria regularizada como uma modificação genuína da QED.

Devemos então questionar quais são os limites impostos ao valor de  $\Lambda$  e à validade da QED, por experimento. Os limites mais restritivos são obtidos dos processos de pares de léptons  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$ . Esses processos sondam o comportamento do propagador do fóton para  $k^2 = (2E)^2$ , onde  $E$  é a energia do elétron no sistema do centro de massa. Se o propagador modificado do fóton, com  $\Lambda$  mantido finito, é usado, então a concordância com dados experimentais para energia de elétron da ordem de 15 GeV é só obtida se  $\Lambda \geq 150$  GeV, correspondendo a distâncias da ordem  $\Lambda^{-1} \leq 2 \times 10^{-3}$  fm. Concluímos que, nas energias atualmente acessíveis, as previsões observáveis da QED são insensíveis às modificações da teoria para distâncias muito menores que  $10^{-3}$  fm.

Em contraste às funções regularizadas  $\Pi_c$ ,  $\Sigma_c$  e  $\Lambda_c^\mu$ , acha-se que  $\delta m$  diverge como  $\ln \Lambda$  conforme  $\Lambda \rightarrow \infty$ , e de fato todas as quantidades divergentes da QED divergem logaritmicamente. Em nosso tratamento perturbativo, os termos divergentes de ordem dominante são de ordem  $\alpha$ , tal que diferenças apreciáveis entre quantidades físicas e nuas ocorrem somente para valores de  $\Lambda$  que são enormemente grandes. Por exemplo, vemos que para uma correção significativa da massa do elétron  $\delta m$  ocorrer (como veremos em **Métodos de Regularização**), ou seja,  $\delta m = O(m)$ , exigimos

$$\delta m = \frac{3m\alpha_0}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} \sim m \quad \implies \quad \frac{\delta m}{m} = \frac{3\alpha_0}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} \sim 1 \quad ,$$

Com  $e = e_0$ , em mais baixa ordem, invertendo a equação para  $\Lambda$ , temos

$$\Lambda = O(me^{2\pi/3\alpha}) \simeq 10^{121} \text{ GeV} \quad .$$

Por outro lado, para  $\Lambda \ll 10^{121}$  GeV, obtem-se  $\delta m \ll m$ , tal que parece razoável tratar a correção de massa  $\delta m$  em teoria de perturbação.

Neste capítulo, expusemos os cálculos que levam à redefinição dos parâmetros carga e massa das partículas, ainda que não evidenciamos a regularização propriamente dita das integrais divergentes. No capítulo seguinte, iremos expor como são feitos estes últimos cálculos de regularização.

## 5 *Métodos de Regularização*

Vimos que cálculos de correções radiativas para a QED levam a integrais de loop divergentes. Estas divergências são removidas pela regularização, ou seja, as integrais respectivas são modificadas adequadamente. Depois da regularização, aquelas integrais que dão correções físicas permanecem finitas quando a teoria original é restaurada. Há vários métodos diferentes de regularização, e as integrais regularizadas dependem do método empregado. Entretanto, no limite ao qual a teoria original é retomada, as previsões físicas se tornam independentes do método de regularização utilizado.

Historicamente, o procedimento mais antigo é o método de corte (*cut-off method*), que usamos para efetuar certas correções iniciais às integrais divergentes. Ele tem a vantagem de relacionar as divergências ao comportamento a pequenas distâncias e conseqüentemente altas energias da teoria. Ilustraremos brevemente este método para calcularmos o deslocamento de massa do elétron  $\delta m$ . O método cutoff é difícil de aplicar a todos os casos, exceto nos mais simples. Em particular, usar este método torna difícil garantir invariância de calibre e a validade da identidade de Ward a todas as ordens da teoria de perturbação. Para garantir a validade delas, devemos adotar um procedimento de cutoff robusto e mais complexo: o método de Pauli-Villars\*.

Subseqüentemente, um método alternativo, conhecido como regularização dimensional, foi desenvolvido. Embora menos fácil de interpretar que o método cutoff, é mais fácil de aplicar, e ele tem a grande vantagem de que garante automaticamente a invariância de calibre e também a validade da identidade de Ward, a todas as ordens da teoria de perturbação. Regularização dimensional é essencial para a QED e, até mais para teorias de calibre não-abelianas, como a cromodinâmica quântica (QCD) e a teoria unificada de Weinberg-Salam das interações fraca e eletromagnética. A regularização dimensional automaticamente respeita a invariância de calibre a todas as ordens da teoria de perturbação, e para teorias de calibre não-abelianas, este procedimento foi quase que exclusivamente utilizado.

Neste capítulo, o método da regularização dimensional será usado para calcular a correção devida

---

\*Subtraímos da integral divergente  $\Pi_{\mu\nu}(q) = \int d^4k f_{\mu\nu}(q, k, m^2)$  uma função que tem o mesmo comportamento assintótico, para que a integral resultante caia rapidamente o suficiente com  $k$  crescente. Ou seja, um conjunto de  $N$  massas (grandes) auxiliares  $M_i$  e constantes  $C_i$  é introduzido e a integral divergente é repostada por  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q) = \int d^4k (f_{\mu\nu}(q, k, m^2) + \sum_{i=1}^N C_i f_{\mu\nu}(q, k, M_i^2))$ . As constantes  $C_i$  e  $M_i$  são então determinadas de forma que  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(q)$  seja uma integral convergente, mas ainda dependente destes parâmetros. Ao fim dos cálculos, o limite  $M_i \rightarrow \infty$  deve ser tomado para que eliminemos as funções  $f_{\mu\nu}(q, k, M_i^2)$  inicialmente impostas. Este método é relativamente trabalhoso e não trabalharemos com o mesmo. Para mais detalhes, veja [55].

à polarização do vácuo. Nosso desenvolvimento estará novamente restrito à teoria de perturbação de ordem mais baixa, ou seja, as integrais de loop único, mas os mesmos métodos podem ser estendidos a ordens maiores. A seguir, introduziremos alguns métodos e técnicas para efetuarmos a regularização dimensional assim como alguns resultados já conhecidos de antemão, que são as integrais padrão.

## 5.1 Pré-requisitos matemáticos

### 5.1.1 Integrais padrão

Primeiro, listamos as integrais padrão que frequentemente encontram-se nos cálculos de integrais de loop. Elas estão listadas a seguir:

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (5.1)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0 \quad n \geq 3, \quad (5.2)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}} \quad n \geq 4, \quad (5.3)$$

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}} \quad n \geq 3, \quad (5.4)$$

$$\int d^4 p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}} \quad n \geq 3, \quad (5.5)$$

$$\int d^4 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2pq + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{[2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}]}{(t - q^2)^{n-2}} \quad n \geq 4. \quad (5.6)$$

Nas expressões do lado direito das equações acima, colocamos  $\varepsilon = 0$  que é geralmente permitido, pois a integração já foi feita. O termo em  $\varepsilon$  vem de considerarmos a integração em  $k^0$  no eixo real somente. A equação (5.2) é óbvia por argumentos de simetria. As eqs. (5.4) e (5.5) seguem das eqs. (5.1) e (5.2) respectivamente trocando as variáveis de  $k$  e  $s$  para  $p = k - q$  e  $t = q^2 + s$ , respectivamente. Diferenciando 5.5 em relação a  $q$  leva à equação (5.6), e tomando  $q = 0$  em eq. (5.6) nos dá a eq. (5.3). Outras integrais envolvendo tensores mais complicados no numerador do integrando são obtidas das fórmulas acima por diferenciação e troca de variáveis.

### 5.1.2 Parametrização de Feynman

As integrais das eqs. (5.1) - (5.6) contêm um fator quadrático, elevado à potência  $n$ , nos denominadores, enquanto que geralmente lida-se com integrais contendo um produto de vários fatores quadráticos diferentes no denominador. Estas integrais mais gerais são reduzidas à forma desejada por meio de uma técnica devida a Feynman que iremos detalhar a seguir.

Para um produto de dois fatores  $a$  e  $b$ , começa-se pela identidade

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} \quad (5.7)$$

Definindo o *parâmetro de Feynman*  $z$  por  $[t = b + (a-b)z]$ , a equação (5.7) pode ser escrita como

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} \quad (5.8)$$

Vemos que introduzindo o parâmetro de Feynman  $z$ , conseguimos expressar  $1/ab$  em termos de um único fator elevado na segunda potência. Embora a integral da eq. (5.8) possa parecer uma complicação ao problema inicial, a parametrização de Feynman nos permite calcular todas as integrais de um modo sistemático.

O método acima pode ser estendido. Para três fatores, temos

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \quad (5.9)$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)z]^3} \quad (5.10)$$

A equação (5.9) pode ser generalizada para um número arbitrário de fatores, sendo o resultado

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 a_1 a_2 \dots a_n} &= \Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \dots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \times \\ &\times \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \dots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} \quad (5.11) \end{aligned}$$

obtido por indução.

Os resultados úteis são obtidos por diferenciação em relação a um ou mais parâmetros. Por exemplo, diferenciando a equação (5.8) com respeito a  $a$  nos deixa com

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3} \quad (5.12)$$

este termo  $1/a^2 b$  é análogo ao integrando que consiste em um propagador de fóton e dois fermiônicos, como no vértice modificado. Finalmente, notamos que o propagador do fóton modificado  $1/(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) - 1/(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)$  pode ser escrito de outra forma

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} = - \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\epsilon)^2} \quad (5.13)$$

onde usamos a identidade da eq. (5.7).

## 5.2 Regularização com método *cutoff*: deslocamento de massa do elétron $\delta m$

Como um exemplo do método *cutoff* de regularização, iremos calcular o deslocamento de massa do elétron  $\delta m$ , devido à sua auto-energia, em teoria de perturbação de segunda ordem<sup>†</sup>.

Das equações  $A = \Sigma(p)|_{p=m}$ , (4.28) e (4.8),  $\delta m$  é dado por

$$\delta m = i\bar{u}(\vec{p}) \left\{ \frac{-e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \left[ \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \right] \right\} u(\vec{p}) \quad , \quad (5.14)$$

onde substituímos o propagador do fóton pela modificação  $[1/(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) - 1/(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)]$  para evitar quaisquer dificuldades que possam surgir de divergências infravermelhas e ultravioletas. Note que o sanduíche entre spinores  $\bar{u}(\vec{p})$  e  $u(\vec{p})$  serve para tomarmos o valor  $p = m$  na integral  $\Sigma(p)$  como achamos ao tratarmos da auto-energia do elétron<sup>‡</sup>. A eq. (5.14) é simplificada usando-se as identidades de contração expostas anteriormente e colocando-se  $\not{p}u(\vec{p}) = mu(\vec{p})$  e  $p^2 = m^2$ . Se também substituirmos a equação (5.13), obtemos

$$\delta m = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\vec{p}) \left[ \int d^4k \frac{2(\not{k} + m)}{k^2 - 2pk + i\epsilon} \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\epsilon)^2} \right] u(\vec{p}) \quad , \quad (5.15)$$

e aplicando a equação (5.12), obtemos

$$\delta m = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\vec{p}) \left[ \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dz \int d^4k \frac{4(\not{k} + m)z}{[k^2 - 2pk(1-z) - tz + i\epsilon]^3} \right] u(\vec{p}) \quad . \quad (5.16)$$

A integral com respeito a  $k$  na última equação é obtida das equações (5.4) e (5.5), levando a

$$\delta m = \frac{me^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \frac{2z - z^2}{tz + m^2(1-z)^2} = \frac{m\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz (2-z) \ln \frac{\Lambda^2 z + m^2(1-z)^2}{\lambda^2 z + m^2(1-z)^2} \quad . \quad (5.17)$$

Esta expressão permanece finita no regime infravermelho no limite  $\lambda \rightarrow 0$ , e podemos portanto tomar  $\lambda = 0$  na última equação. Conforme  $\Lambda \rightarrow \infty$ , a integral diverge logaritmicamente com o termo de

<sup>†</sup>*Leading Order* (termos de ordem dominante) leva em conta duas vezes o acoplamento:  $e^2$ ;  $N_{ext}LO$  (termos seguintes à ordem dominante) leva três vezes o acoplamento:  $e^3$ ;  $2^a$  ordem ( $N_{ext}N_{ext}LO$ ) conta quatro vezes o acoplamento:  $e^4$ , duas ordens em  $e$  a mais que LO.

<sup>‡</sup> $\delta m = ie_0^2 A$ , onde  $A = \Sigma(p)|_{p=m}$ . O sanduíche serve para satisfazer esta exigência vinda de  $A$ .

maior ordem dado por

$$\delta m = \frac{m\alpha}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \int_0^1 dz(2-z) + O(1) = \frac{3m\alpha}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} + O(1) \quad .$$

E este é o resultado, apenas indicado anteriormente, e sobre o qual discutimos o processo de cutoff. O termo  $O(1)$  pode parecer, a princípio não condizente com o termo de logaritmo da equação (5.17) pois temos o limite da integral para  $z = 1$  não bem definido, mas uma simples análise confirma a subsequente equação (5.18).

## 5.3 Regularização dimensional

### 5.3.1 Introdução

As integrais de loop divergentes da teoria quântica de campos são quadridimensionais no espaço de energia-momentum. A regularização dimensional consiste em modificar a dimensionalidade destas integrais tal que elas se desmembrem em partes finita e parte divergente. Em primeiro lugar, generalizaremos de um espaço 4-dimensional para um  $D$ -dimensional, onde  $D$  é um inteiro positivo. O tensor métrico  $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$  deste espaço é definido por

$$\begin{aligned} g^{00} = -g^{ii} = 1 & \quad i = 1, 2, \dots, D-1 \\ g^{\alpha\beta} = 0 & \quad \alpha \neq \beta \quad . \end{aligned} \tag{5.18}$$

De forma similar, um 4-vetor  $k^\alpha$  é reposto por um vetor com  $D$  componentes.

$$k^\alpha \equiv (k^0, k^1, \dots, k^{D-1}) \quad , \tag{5.19}$$

$$k^2 = k_\alpha k^\alpha = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (k^i)^2 \quad . \tag{5.20}$$

Integrais de loop agora se tornam integrais em  $D$  dimensões com o elemento de volume  $d^D k = dk^0 dk^1 \dots dk^{D-1}$ . Por exemplo, a eq. (5.1) é generalizada para

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}} \quad , \tag{5.21}$$

para valores inteiros de  $n > D/2$ . Para  $n = D/2$ , o lado esquerdo da equação acima é logaritmicamente

divergente, e o lado direito é também singular devido ao pólo de  $\Gamma(z)$  em  $z = 0$ . Entretanto, para valores não inteiros de  $D$ , o lado direito é bem definido e finito. Podemos portanto usá-la para definir a generalização da integral no lado esquerdo para  $D$  dimensões para valores não-inteiros de  $D$ . Iremos tomar  $D = 4 - \eta$  onde  $\eta$  é um parâmetro pequeno positivo. Restaurar o espaço 4-dimensional usual corresponde a tomar o limite  $\eta \rightarrow 0$ .

Antes de entrarmos na QED, ilustraremos estas idéias por um exemplo simples e não-realístico. Suponha que estejamos lidando com a integral de loop divergente

$$\Pi(s) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(k^2 + s + i\epsilon)^2} . \quad (5.22)$$

Na regularização dimensional, a regularização de  $\Pi(s)$  é alcançada usando-se a equação (5.21) para estender a definição de  $\Pi(s)$  a  $D = 4 - \eta$  dimensões

$$\Pi(s) = \mu^{-\eta} \Pi_\eta(s) , \quad (5.23)$$

onde introduzimos fatores  $\mu^{\pm\eta}$  associados. Veja que:

$$\Pi_\eta(s) = \frac{\mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}} \int \frac{d^{4-\eta}k}{(k^2 + s + i\epsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(4\pi)^{-\eta/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\eta)}{\Gamma(2)} \left(\frac{s}{\mu}\right)^{-\eta/2} . \quad (5.24)$$

Para  $\eta \rightarrow 0$ , tem-se

$$s^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln s + \dots , \quad (5.25)$$

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots , \quad (5.26)$$

onde  $\gamma = 0,5772\dots$  é a constante de Euler. Portanto, obtém-se

$$\Pi_\eta(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) , \quad (5.27)$$

com

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \{\Pi_\eta(s) - \Pi_\eta(s_0)\} = -\frac{i}{16\pi^2} \ln(s/s_0) . \quad (5.28)$$

Isto é um aspecto característico da regularização dimensional. Ao generalizarmos integrais de loop para  $D = 4 - \eta$ , devemos sempre introduzir fatores associados  $\mu^\eta$  para consistência. Eles são compensados pelos fatores  $\mu^{-\eta}$ , como na eq. (5.23), que são geralmente absorvidos na redefinição das constantes



de acoplamento associadas<sup>§</sup>. Por exemplo, na QED, cada integral de loop está associada com o fator  $e_0^2$ , que é substituído pelo acoplamento  $\tilde{e}_0^2 = \mu^{-\eta} e_0^2$ .

### 5.3.2 Extrapolação do caso de $D$ inteiro para o caso de $D$ não-inteiro

Para aplicarmos a regularização dimensional à QED, devemos: *i*) ter outras integrais  $D$ -dimensionais, além da equação (5.21) e *ii*) generalizar expressões envolvendo as matrizes  $\gamma$  de Dirac, que também aparecem nos cálculos. As integrais relevantes são deduzidas da eq. (5.21) da mesma maneira que as integrais (5.2) - (5.6) seguem da eq. (5.1). As únicas integrais que precisaremos, além da eq. (5.21), são

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = 0 \quad , \quad (5.29)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-D/2-1}} \quad , \quad (5.30)$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 + s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(n - D/2 - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-D/2-1}} \quad , \quad (5.31)$$

onde a eq. (5.31) vem da eq. (5.30), já que  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D$ .

Novamente, como referido anteriormente, estas equações generalizadas são primeiramente deduzidas para valores inteiros de  $D$ . Para valores não-inteiros, as integrais são definidas pelas expressões do lado direito destas equações. Iremos escrever  $D = 4 - \eta$  e tomaremos o limite  $\eta \rightarrow 0$ , ou seja,  $D \rightarrow 4$ . Poderíamos pensar: mas qual é o significado de  $g^{\mu\nu}$  quando  $D$  não é inteiro nas expressões acima? A resposta é que a singularidade destas expressões está nos fatores  $\Gamma(n - D/2 - 1)$  no limite  $\eta \rightarrow 0$ , enquanto  $g^{\mu\nu}$  não é singular no mesmo limite. Portanto, somente o valor de  $g^{\mu\nu}$  para  $D = 4$  importa nos resultados finais, e somente este valor será requisitado.

Devemos ver agora como lidar com expressões envolvendo matrizes  $\gamma$ . Em primeiro lugar, consideramos valores inteiros de  $D$  e introduzimos um conjunto de matrizes  $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$  que satisfazem as relações de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (5.32)$$

A partir destas, derivam-se relações de contração e de traço analogamente às equações de traço e de contração usuais. Se as matrizes  $\gamma$  são matrizes  $f(D) \times f(D)$ <sup>¶</sup>, e  $I$  é a matriz identidade  $f(D) \times f(D)$ , obtemos as identidades de contração e de traço

<sup>§</sup>Não é o caso da QED redefinir a sua constante de acoplamento ( $e_0$ ) absorvendo estes fatores de  $\mu^\eta$ . Entretanto, é o caso da QCD, que precisa fazer uso do *grupo de renormalização*, em que  $\mu$  toma parte, para a redefinição de parâmetros como a constante de acoplamento forte  $g_s$ .

<sup>¶</sup>Temos, portanto,  $f(D = 4) = 4$

$$\begin{aligned}
\gamma_\lambda \gamma^\lambda &= DI \\
\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda &= -(D-2)\gamma^\alpha \\
\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda &= (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} \quad ,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= f(D)g^{\alpha\beta} \\
\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= f(D) \left[ g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right] \\
\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde na última relação,  $(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu)$  contém um número ímpar de matrizes  $\gamma$ .

Agora, tomaremos estas relações ao caso de  $D = 4 - \eta$  dimensões, mesmo que o significado e existência de matrizes  $\gamma$  em um número de dimensões não-inteiro não seja muito claro. No limite  $D \rightarrow 4$ , as relações usuais são retomadas.

## 5.4 Polarização do vácuo: auto-energia do fóton

Iremos agora usar regularização dimensional para deduzir a expressão da polarização do vácuo. Tomaremos como ponto de partida a eq. (4.12) para o loop de auto-energia do fóton que, depois da regularização dimensional, é dado por:

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu} = -\frac{\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon][p^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad , \tag{5.35}$$

onde  $\mu$  é a escala de massa introduzida anteriormente.

$$N^{\mu\nu} \equiv \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)] \quad . \tag{5.36}$$

Resolvendo o cálculo do traço, seguindo as equações (5.34), obtemos

$$N^{\mu\nu}(p, k) = f(D) \{ (p^\mu + q^\mu) p^\nu + (p^\nu + k^\nu) p^\mu + [m^2 - p(p+k)] g^{\mu\nu} \} \quad . \tag{5.37}$$

Após a parametrização de Feynman, uso da eq. (5.8) e troca de variável  $q^\mu \equiv p^\mu + k^\mu z$ , podemos escrever a eq. (5.35) como

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu} = -\frac{\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(q-kz, k)}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} , \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(q-kz, k) &= f(D) [2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] \\ &+ [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] + \dots \end{aligned} \quad (5.39)$$

onde os próximos termos são lineares em  $q$  que foram omitidos, já que estes anulam-se sob integração, por resultarem em integrandos ímpares para intervalos pares. Combinando as últimas duas equações, obtemos

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = -\frac{\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} f(D) \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z) , \quad (5.40)$$

onde usando as eqs. (5.21) e (5.29) - (5.31), temos

$$I_1^{\mu\nu}(k, z) = \int d^D q \frac{2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} = \frac{-ig^{\mu\nu} \pi^{D/2} \Gamma(1-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} (1-D/2) , \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu}(k, z) &= [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} = -I_1^{\mu\nu}(k, z) , \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu}(k, z) &= [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\epsilon]^2} \\ &= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Substituindo as últimas três expressões na eq. (5.40), temos agora:

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{e}_0^2 \Pi(k^2) , \quad (5.44)$$

$$\Pi(k^2) = \frac{2\mu^{4-D} f(D) \Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} . \quad (5.45)$$

Segue da eq. (5.44) que a condição de calibre  $\parallel k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$  se mantém válida para qualquer quadrivetor  $k$ . Usando regularização dimensional, invariância de calibre é automaticamente satisfeita.

Finalmente, colocamos  $D = 4 - \eta$  e tomamos o limite  $\eta \rightarrow 0$ . Escrevendo  $f(4 - \eta) = 4 - \eta f'(4) + \dots$ , e usando as eqs. (5.25) e (5.26), obtemos da equação (5.45) no limite  $\eta \rightarrow 0$

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left( \frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} + \ln 4\pi \right) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right] .$$

Comparando a eq. (5.44) e as eqs. (4.16) e (4.20), obtemos

$$\Pi(k^2) = A'(0) + \Pi_c(k^2) , \quad (5.46)$$

e tínhamos que  $\Pi_c(0) = 0$ , obtendo portanto

$$e^2 \Pi_c(k^2) = e^2 [\Pi(k^2) - \Pi(0)] = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right] ,$$

no limite  $\eta \rightarrow 0$ . Notamos que este resultado, e todas as outras quantidades mensuráveis, é independente de  $f'(4)$  cujo valor é arbitrário. Podemos definir, portanto,  $f'(4) = 0$ .

No presente capítulo, procuramos detalhar e exemplificar como são feitos os cálculos para a extração da parte física (não divergente) a partir das integrais divergentes. No próximo capítulo, faremos praticamente a mesma análise, que fizemos para QED, para obtermos o acoplamento da QCD a partir de correções de segunda ordem no acoplamento. No entanto, será necessário introduzirmos alguns métodos novos para o total entendimento do acoplamento forte.

---

$\parallel$ Da regularização dimensional, vemos portanto que, automaticamente a condição de calibre  $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$  é satisfeita para qualquer quadrivetor  $k$ . A condição  $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$  pode ser deduzida a partir de um análise simples da condição de calibre  $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$  sobre os cálculos de amplitudes.

## 6 *Obtenção do acoplamento running da QCD*

### 6.1 Esquema de Renormalização

Na discussão de renormalização quando tratamos de processos radiativos de segunda ordem na QED, adotamos um método, chamado de *esquema sobre a casca (on-shell scheme)*, que usa as propriedades estáticas de um elétron livre como os parâmetros básicos da teoria, ou seja, carga  $e$  e massa  $m$ ; isto não é muito conveniente para a QCD, já que quarks são confinados e as propriedades dos “quarks livres” não podem ser medidas.

Há, entretanto, outros esquemas de renormalização que levam a resultados físicos idênticos. O mais popular de tais esquemas é o *esquema de subtração mínima modificado*, denotado por  $\overline{MS}$ . Este introduz uma escala de massa arbitrária à teoria, e a liberdade de variar essa escala de massa sem mudar as previsões físicas leva à equação do grupo de renormalização. Esta equação pode ser manipulada de modo a deduzir o comportamento da teoria a altos momenta, correspondendo a interações de curto alcance, levando à liberdade assintótica na QCD.

Introduziremos o esquema de renormalização  $\overline{MS}$  e as equações do grupo de renormalização no contexto da QED. Depois iremos aplicar os mesmos métodos para a QCD, para entendermos o surgimento da liberdade assintótica, artifício importante ao efetuarmos cálculos realísticos em QCD, como seções de choque e taxas de decaimento.

#### 6.1.1 Propagador do fóton

Trabalharemos com o esquema  $\overline{MS}$ , ao considerar o propagador do fóton no espaço de momentum em teoria de perturbação de segunda ordem ( $e^4$ ). Como vimos anteriormente, ele é dado por

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]}, \quad (6.1)$$

que, por invariância de Lorentz, fica

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad . \quad (6.2)$$

Quando isto é levado em conta, como ilustrado na Fig. (4.5), o propagador do fóton se torna

$$G^{\alpha\beta}(k) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \quad , \quad (6.3)$$

onde o termo em  $B(k^2)$  desaparece por razões ligadas aos vértices, como foi discutido anteriormente.

Agora, nos foquemos no esquema da regularização dimensional. As equações acima são independentes dos esquemas de renormalização e regularização. O esquema  $\overline{MS}$  é definido no contexto da regularização dimensional, onde a eq. (6.1) é generalizada para  $D(= 4 - \eta)$  dimensões. A auto-energia do fóton, eq. (6.1), foi resolvida quando tratamos de regularização dimensional, e o resultado para  $A(k^2)$  é obtido combinando-se as eqs. (4.16) e (5.44). Explicitamente, temos

$$e_0^2 A(k^2) = \tilde{e}_0^2 \frac{k^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \tilde{e}_0^2 k^2 \Pi_r(k^2) \quad , \quad (6.4)$$

onde

$$\Pi_r(k^2) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right] \quad , \quad (6.5)$$

mais termos, que se anulam quando  $\eta \rightarrow 0$ , foram desprezados.

Dentro do contexto da regularização dimensional, diferentes esquemas de renormalização correspondem a diferentes maneiras de separarmos a equação (6.4) em partes finita e divergente, antes de absorver a parte divergente dentro dos parâmetros físicos redefinidos, ou renormalizados. No esquema  $\overline{MS}$ , estas constantes divergentes são sempre escolhidas a serem proporcionais ao fator  $\left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right]$ , ou seja, elas incluem o termo de pólo juntamente com os fatores associados finitos:  $\gamma$  e  $\ln 4\pi$ .

Como ilustrado para o caso do propagador do elétron, o esquema  $\overline{MS}$  é caracterizado por absorver uma constante divergente, proporcional ao fator  $\left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right]$  dentro dos parâmetros físicos redefinidos. Neste caso, definimos a carga parcialmente renormalizada

$$e_r \equiv Z_3^{1/2} \tilde{e}_0 \quad , \quad (6.6)$$

onde a constante de renormalização é

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \quad , \quad (6.7)$$

em segunda ordem, ou mais convenientemente

$$Z_3 = 1 - \frac{e_r^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(e_r^4) \quad , \quad (6.8)$$

já que  $\tilde{e}_0 = e_r + O(e_r^3)$ . A equação (6.4) se torna

$$e_0^2 A(k^2) = k^2 [1 - Z_3 + \tilde{e}_0^2 \Pi_r(k^2)] \quad ,$$

e substituindo isto na equação (6.3), resulta em

$$G^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-iZ_3 g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_r^2 k^2 \Pi_r(k^2)} + O(e_r^4) \quad , \quad (6.9)$$

para o propagador nu. Finalmente, o fator  $Z_3$  no propagador acima é absorvido na renormalização parcial de carga, eq. (6.6), das cargas nuas nos dois vértices extremos, resultando em

$$G_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_r^2 \Pi_r(k^2)} + O(e_r^4) \quad , \quad (6.10)$$

como nosso resultado final para o propagador do fóton renormalizado.

$$G_r^{\alpha\beta}(k^2) \equiv Z_3^{-1} G^{\alpha\beta}(k^2) \quad . \quad (6.11)$$

Como o propagador do elétron, o propagador do fóton renormalizado é finito e dependente de  $\mu$  no limite  $\eta \rightarrow 0$ , onde a teoria original é restaurada.

## 6.1.2 O propagador do elétron

Para obtermos os outros resultados parciais para a carga elétrica, precisamos considerar as contribuições à renormalização de carga vindas das correções radiativas para o propagador do elétron e para o vértice. Não faremos os cálculos explícitos como na subseção anterior, apenas exporemos os resultados, o leitor com interesse, veja [53]. Em segunda ordem, a correção radiativa ao propagador do elétron surge do termo de auto-energia do elétron

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\varepsilon} \quad , \quad (6.12)$$

onde  $m_0$  e  $e_0$  são massa e carga nuas, respectivamente. O termo de auto-energia divergente  $ie_0^2 \Sigma(p)$  surge da correção em loop da Fig. (4.6) e é dado por

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \quad . \quad (6.13)$$

Definem-se as constantes:

$$Z_2 = 1 - \tilde{e}_0^2 \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \quad m_r = Z_2 \left( m_0 + \tilde{e}_0^2 \frac{m_0}{4\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \right) , \quad (6.14)$$

e

$$e_r \equiv \tilde{e}_0 Z_2^{1/2} . \quad (6.15)$$

A constante de renormalização  $Z_2$  no propagador não-interagente é então absorvida dentro da renormalização parcial, eq. (6.15), das cargas nos dois vértices extremos ao propagador, resultando para o *propagador renormalizado* definido por:

$$G_r(p) \equiv Z_2^{-1} G(p) . \quad (6.16)$$

O sinal de identidade das eqs. (6.15) e (6.16) é usado para indicar que estas definições valem para todas as ordens da teoria da perturbação, enquanto o valor de  $Z_2$  é modificado quando termos de mais alta ordem são adicionados.

### 6.1.3 Renormalização de carga

A terceira contribuição à renormalização de carga vem em segunda ordem da modificação de vértice da Fig. (4.7), resultando no fator de vértice

$$i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0 [\gamma^\mu + e_0^2 \Lambda^\mu(p', p)] , \quad (6.17)$$

onde  $\Lambda^\mu(p', p)$  é dado pela integral divergente:

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha . \quad (6.18)$$

Definimos as constantes:

$$Z_1 = 1 - \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] , \quad (6.19)$$

$$e_r \equiv \frac{\tilde{e}_0}{Z_1} . \quad (6.20)$$



Obtemos, ao final

$$i\Gamma^\mu(p', p) = ie_r\mu^{\eta/2}[\gamma^\mu + \tilde{e}_0^2\Lambda_r^\mu(p', p)] + O(\tilde{e}_0^5) \quad . \quad (6.21)$$

Finalmente, combinamos a renormalização de carga, eq. (6.20) com as renormalizações das eqs. (6.15) e (6.6) surgindo das auto-energias do elétron e do fóton, respectivamente. Ao fazermos isso, devemos lembrar que na nossa discussão dos propagadores, absorvemos fatores de  $Z_2^{1/2}$  e  $Z_3^{1/2}$  dentro de cada vértice a partir de cada linha de férmion e de fóton externos. Já que há duas linhas fermiônicas e uma linha de fóton em cada vértice\*, isto dá origem ao vértice renormalizado

$$\Gamma_r^\mu(p', p) \equiv Z_2 Z_3^{1/2} \Gamma^\mu(p', p) \quad , \quad (6.22)$$

e substituindo a eqs. (6.21) e (6.20), resulta

$$i\Gamma_r^\mu(p', p) = ie_r\mu^{\eta/2}[\gamma^\mu + e_r^2\Lambda_r^\mu(p', p)] + O(e_r^5) \quad , \quad (6.23)$$

onde  $e_r$  é agora a carga totalmente renormalizada, definida por

$$e_r \equiv \frac{\tilde{e}_0 Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = e_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \quad , \quad (6.24)$$

e usando a identidade de Ward  $Z_1 = Z_2$ , temos

$$e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2} \quad , \quad (6.25)$$

onde  $Z_3$  é dado pela eq. (6.8).

A carga renormalizada  $e_r$  definida acima é, como a massa renormalizada  $m_r$ , finita e dependente de  $\mu$ . Por causa desta dependência,  $m_r = m_r(\mu)$  e  $e_r = e_r(\mu)$  são referidos como *carga running* e *massa running*. Para uma certa escolha de escala de massa  $\mu$ , eles são os parâmetros básicos da teoria. Entretanto, todas as quantidades físicas mensuráveis são independentes de  $\mu$  e esta invariância sob a escolha da escala de massa leva às equações do grupo de renormalização, das quais pode-se mostrar que, conforme a escala de massa  $\mu$  fica maior,  $e_r(\mu)$  mede o poder da interação a distâncias menores. Isto

---

\*Não fizemos renormalização sobre linhas externas de férmion, mas pelo cálculo efetuado quando falamos do esquema na casca da QED, vimos que essas linhas externas eram renormalizadas com o fator de  $Z_2^{1/2}$  enquanto o propagador respectivo era renormalizado com  $Z_2$ . Podemos raciocinar que o propagador de férmion possui dois campos  $\psi$  (contraídos) enquanto que a linha externa tem somente um campo  $\psi$ , então podemos inferir que linhas externas são renormalizadas com metade da efetividade em que são renormalizados os propagadores. Então temos  $Z_2^{1/2}$  para linha externa de férmion renormalizada.

será visto depois. Note aqui, entretanto, que as eqs. (6.8) e (6.25) implicam em

$$\mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \frac{e_r^3}{24\pi^2} + O(e_r^5) \quad , \quad (6.26)$$

onde tomamos o limite  $\eta \rightarrow 0$ . A partir disto, vê-se que  $e_r(\mu)$  aumenta em consequência do aumento de  $\mu$ , embora este efeito seja bem pequeno na QED. Na QCD, o efeito é maior, e também a intensidade de acoplamento decresce conforme  $\mu$  aumenta, levando à liberdade assintótica.

Agora, nos voltaremos às equações do grupo de renormalização para criarmos a conexão entre a intensidade da interação a baixas distâncias e o comportamento da constante de acoplamento running a valores altos da escala de massa  $\mu$ .

## 6.2 O grupo de renormalização

Nesta seção, primeiro iremos deduzir as equações do grupo de renormalização, e então usá-las nas seções seguintes para deduzir o comportamento da teoria para grandes transferências de momentum (distâncias pequenas).

### 6.2.1 As equações do grupo de renormalização

As equações do grupo de renormalização são formuladas em termos das funções de vértice próprio  $\Gamma^{fb}(p_1, p_2, \dots, p_{b+f})$ , onde  $f$  e  $b$  são o número de férmions e de fótons externos, respectivamente, e  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, b+f$ ) são os quadrimomenta associados, sujeitos à conservação de quadrimomentum

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{b+f} = 0 \quad .$$

A função de vértice próprio é a soma de todos os *diagramas irreduzíveis* que contribuem para uma dada função de vértice, onde *irreduzível* significa que não podemos dividir o dado diagrama em dois somente cortando uma linha. Vértices próprios são convenientes para discussões gerais, pois não levam em conta contribuições repetidas, por exemplo, duas auto-energias do elétron em sequência; podem ser divididas formando dois diagramas: não nos trazem nada de novo.

Os vértices de dois pontos

$$\Gamma^{20}(p) = e_0^2 \Sigma(p) \quad \Gamma^{02}(k) = e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) \quad (6.27)$$

são definidos em termos das auto-energias do elétron e do fóton,  $e_0^2 \Sigma(p)$  e  $e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k)$ . Como na eq. (6.27), frequentemente omitimos os índices de Lorentz quando nos referimos a funções de vértice, tal

que o vértice de três pontos da equação (6.17), por exemplo, é definido por

$$i\Gamma^{21}(p', p) = i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)] \quad . \quad (6.28)$$

As funções de vértice não-interagentes, como na eq. (6.28) e nas eqs. (6.13) e (6.1), são dependentes dos parâmetros não-interagentes  $m_0$  e  $e_0$ , e não são bem definidas no limite  $\eta \rightarrow 0$ . Entretanto, ao renormalizarmos, fatores de  $Z_2^{1/2}$  e  $Z_3^{1/2}$  são absorvidos dos propagadores de férmion e de fóton, e as funções de vértice renormalizado são expressas em termos da massa e carga renormalizadas dependentes de  $\mu$ ,  $m_r$  e  $e_r$ . Temos, então

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = Z_2^{f/2} Z_3^{b/2} \Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0) \quad , \quad (6.29)$$

onde a função de vértice renormalizado  $\Gamma_r^{fb}$  permanece finita e dependente de  $\mu$  no limite  $\eta \rightarrow 0$ . Uma equação diferencial determinando esta dependência em  $\mu$  é obtida substituindo

$$\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0) = Z_2^{-f/2} Z_3^{-b/2} \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu)$$

na equação que garante a invariância em  $\mu$  desta quantidade:

$$\mu \frac{d\Gamma^{fb}}{d\mu}(p_i, m_0, e_0) = 0 \quad ,$$

resultando em:

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - f\gamma_2 - b\gamma_3 + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r} \right] \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \quad , \quad (6.30)$$

onde

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} \quad , \quad (6.31)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_2) \quad , \quad (6.32)$$

$$\gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\ln Z_3) \quad , \quad (6.33)$$

$$m_r \gamma_m \equiv \mu \frac{\partial m_r}{\partial \mu} \quad . \quad (6.34)$$

A equação (6.30) é chamada de equação de 'tHooft-Weinberg e é a equação de grupo de renormalização apropriada para o esquema de mínima subtração usado aqui. Antes de explorá-la, entretanto, precisamos combiná-la com uma equação diferencial deduzida de propriedades de escalamento dos vé-

tices, como veremos na próxima subseção. As propriedades de escalamento nos dirão o que é afinal essa escala  $\mu$  arbitrária.

## 6.2.2 Transformações de escala

Para deduzirmos o comportamento da teoria a altos momenta, consideraremos a função de vértice  $\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu)$ , onde introduzimos o parâmetro de escala adimensional  $t$ . Uma equação diferencial para esta quantidade é obtida combinando-se a equação do grupo de renormalização, eq. (6.30), com outra equação obtida ao considerarmos uma transformação de escala

$$p_i, t^{-1}m_r, t^{-1}\mu \rightarrow tp_i, m_r, \mu \quad . \quad (6.35)$$

Sob tal transformação, os vértices próprios devem se transformar como

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) \quad , \quad (6.36)$$

onde  $d$  é a dimensão natural do vértice<sup>†</sup>, já que todos os argumentos dimensionados são escalados pelo mesmo fator  $t$ . Diferenciando ambos os lados em relação a  $t$ , e usando a identidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) = - \left( m_r \frac{\partial}{\partial m_r} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) \quad ,$$

juntamente com a eq. (6.36), acha-se que  $\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu)$  satisfaz

$$\left( t \frac{\partial}{\partial t} + m_r \frac{\partial}{\partial m_r} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - d \right) \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \quad . \quad (6.37)$$

Ao comparar-se as eqs. (6.37) e (6.30), o termo em  $\partial \Gamma_r / \partial \mu$  pode ser eliminado, resultando em

$$\left[ t \frac{\partial}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - m_r (\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m_r} + f\gamma_2 + b\gamma_3 - d \right] \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \quad . \quad (6.38)$$

A última equação é a equação diferencial desejada que governa a dependência dos vértices sob uma transformação de escala nos momenta.

Agora resolveremos a equação acima para uma particular escolha da escala de renormalização  $\mu =$

<sup>†</sup>A dimensão natural do vértice é a dimensão em unidades naturais do acoplamento entre os três campos  $\psi, \bar{\psi}$  e  $A^\mu$  e é dada por  $d = 4 - (3/2)f - b$  ( $f$  conta número de férmions externos e  $b$  o número de bósons externos). Para ilustrar, a energia tem dimensão natural  $d = 1$ , pois  $[E] = [M]^1$ . Não será explicado mais que isso, pois envolve um outro tratamento chamado função de Green.

$\mu_0$ , ou seja

$$\left[ t \frac{\partial}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - m_r(\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m_r} + f\gamma_2 + b\gamma_3 - d \right] \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = 0 \quad . \quad (6.39)$$

Esta equação implica que, para uma escala de renormalização fixa, uma pequena mudança em  $t$  pode ser compensada por pequenas mudanças em  $m_r$  e  $e_r$ . Portanto, procuramos por uma solução da forma

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = \Lambda(t) \Gamma_r^{fb}(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0) \quad , \quad (6.40)$$

onde  $\Lambda(t)$ ,  $\tilde{m}(t)$  e  $\tilde{e}(t)$  são funções a determinar, sujeitas às condições de contorno

$$\Lambda(1) = 1, \quad \tilde{m}(1) = m_r(\mu_0), \quad \tilde{e}(1) = e_r(\mu_0) \quad . \quad (6.41)$$

Diferenciando a equação (6.40) com relação a  $t$ , resulta

$$t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = \left( t \frac{d\Lambda}{dt} + t\Lambda \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} + t\Lambda \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{e}} \right) \Gamma_r^{fb}(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0) \quad ,$$

da qual, usando eq. (6.40), obtemos

$$t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = \left( \frac{t}{\Lambda} \frac{d\Lambda}{dt} + t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{m}} + t \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{e}} \right) \Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) \quad , \quad (6.42)$$

onde  $m_r$  e  $e_r$  têm seus valores em  $\mu_0$ , ou seja

$$m_r \equiv m_r(\mu_0) = \tilde{m}(1) \quad e_r \equiv e_r(\mu_0) = \tilde{e}(1) \quad .$$

Ao compararmos a eq. (6.42) com a eq. (6.39), vemos que elas são iguais se, e somente se

$$t \frac{\partial \tilde{m}}{\partial t} = m_r(\gamma_m - 1) \quad , \quad (6.43)$$

$$t \frac{\partial \tilde{e}}{\partial t} = \beta \quad , \quad (6.44)$$

$$\frac{t}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} = d - f\gamma_2 - b\gamma_3 \quad . \quad (6.45)$$

Quando comparamos as eqs. (6.43) e (6.44) com as eqs. (6.31) e (6.34), vemos que as primeiras são satisfeitas, sujeitas às condições de contorno, eqs. (6.41), se

$$\tilde{m}(t) = t^{-1} m_r(\mu = t\mu_0) \quad \tilde{e}(t) = e_r(\mu = t\mu_0) \quad . \quad (6.46)$$

Então a eq. (6.45) pode ser finalmente integrada, dando

$$\Lambda(t) = t^d \exp\left(-\int_1^t \frac{(f\gamma_2 + b\gamma_3)dt}{t}\right) . \quad (6.47)$$

Substituindo as duas últimas linhas de expressões na eq. (6.40), dando

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = t^d \exp\left(-\int_1^t \frac{(f\gamma_2 + b\gamma_3)dt}{t}\right) \Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r(t\mu_0), e_r(t\mu_0), \mu_0) . \quad (6.48)$$

como solução da dependência da escala de momentum dos vértices em termos da massa running  $\tilde{m}(t) = t^{-1}m_r(t\mu_0)$  e a constante de acoplamento running  $e_r(t\mu_0)$ .

Com esse desenvolvimento, obtemos  $\mu = t\mu_0$ . Esta expressão nos diz qual o escalamento da escala de massa  $\mu$  conforme varia-se o parâmetro adimensional  $t$  dentro da teoria. Este parâmetro estava inicialmente colocado dentro do momentum de cada partícula pertencente ao vértice, então podemos interpretar  $\mu$  como sendo uma escala de momentum, ou equivalentemente energia. Veremos a seguir como isto é desenvolvido.

### 6.2.3 Carga running

Nas últimas duas subseções, evitamos usar expressões explícitas para as constantes  $Z$  de renormalização, e os resultados foram expressos numa forma que vale para todas as ordens da teoria de perturbação. Agora nos focamos a correções de mais baixa ordem para investigarmos o comportamento da carga running para grandes escalas de massa  $\mu = t\mu_0$ , que por consequência controla o comportamento da função de vértice a altos momenta  $tp_i$ . Para efetuarmos o sugerido, resolvemos a eq. (6.31), e usando a equação já deduzida anteriormente, eq. (6.26), para obter

$$\beta = \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \beta_0 e_r^3 + O(e_r^5) , \quad (6.49)$$

no limite  $\eta \rightarrow 0$ , onde  $\beta_0 = \frac{1}{24\pi^2}$ . A equação (6.49) pode ser resolvida, resultando em

$$e_r^2(\mu) = \frac{e_r^2(\mu_0)}{1 - 2\beta_0 e_r^2(\mu_0) \ln(\mu/\mu_0)} = \frac{e_r^2(\mu_0)}{1 - \beta_0 e_r^2(\mu_0) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} , \quad (6.50)$$

em segunda ordem. Na QED, o acoplamento running  $e_r(\mu)$  aumenta conforme  $\mu$  aumenta porque  $\beta_0 > 0$ , embora  $t = \mu/\mu_0$  tenha que ser muito grande para o efeito ser apreciável.

Este resultado já foi derivado anteriormente sem aproximações quanto ao regime de escalas - no caso acima, a escala  $\mu$  nos dita grandes transferências de momentum, já que a equação (6.26) é aproximada para grandes  $\mu = t\mu_0$  pois só leva em conta termos da ordem  $O(e_r^3)$  - e sem os conceitos do grupo de

renormalização:

$$e^2(k^2) = e^2(0) \left( 1 + \frac{e^2(0)}{12\pi^2} f\left(\frac{-k^2}{m^2}\right) \right) , \quad (6.51)$$

onde  $f(-k^2/m^2)$  :

$$f(x) \cong \begin{cases} x/5, & x \ll 1 \\ \ln x, & x \gg 1 \end{cases} .$$

Mas podemos ver o quão robusto e eficaz é esse caminho de obtenção da constante de acoplamento na QED, pois vemos que se aproximarmos a eq. (6.51) para grandes momenta  $k$ , recairemos na eq. (6.50). Podemos, a partir desta confirmação para  $e(k^2) \Rightarrow e(\mu)$ , confiar que esta abordagem nos levará a uma constante de acoplamento forte,  $\alpha_S$ .

Este resultado pode ser qualitativamente entendido por analogia com o que é observado quando uma carga elétrica  $Q$  é imersa em um meio dielétrico, como já foi dito anteriormente. Temos que observar, entretanto, que a distâncias entre cargas que são da ordem do tamanho das moléculas, esta blindagem se torna menos efetiva, tal que a carga efetiva  $Q_{eff}$  aumenta conforme as cargas se aproximam cada vez mais. Na QED, há um efeito parecido, mesmo no vácuo, associado com pares elétron-pósitron produzidos por flutuações quânticas.

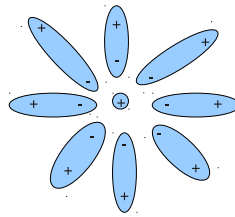


Figura 6.1: Ilustração da blindagem de carga da carga nua/não-interagente.

Por exemplo, no espalhamento Møller ( $e^-e^-$ ), as cargas elétricas podem ser consideradas como parcialmente blindadas por pares elétron-pósitron virtuais, Fig. (4.4(b)). É este efeito que é descrito quantitativamente pela última equação. O mesmo efeito de polarização do vácuo pode ser encarado de modo diferente ao considerarmos um termo a mais no potencial de Coulomb de interação entre duas cargas. Este resultado também parametriza o aumento no poder da interação a altas transferências de momentum, ou distâncias pequenas, e é essencial, por exemplo, ao tentarmos entender o Lamb shift.

Flutuações quânticas também existem na QCD, e como na QED, elas também levam a uma variação na intensidade da interação com a distância. Especificamente, se considerarmos o espalhamento quark-quark, há três diagramas de mais baixa ordem relacionados às correções devidas à polarização do vácuo, com troca de um glúon, conforme Fig. (6.2).

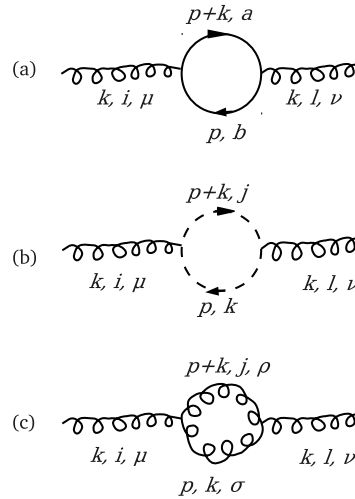


Figura 6.2: As três correções, em segunda ordem, ao propagador de glúon. Loops fantasma (a), de quark (b) e de glúon (c).

O primeiro e segundo deles é um análogo à Fig. (4.4(b)) e conseqüentemente leva à correção por blindagem. Se esta fosse a única contribuição, a interação ficaria mais forte a menores distâncias, como na QED. Entretanto, há também o terceiro diagrama, envolvendo um par glúon-glúon produzido na auto-interação do glúon. Este segundo diagrama não tem similar na QED, e a natureza de sua contribuição não é óbvia a princípio. De fato, ele leva a um efeito de antiblindagem, ou seja, a interação fica mais fraca a menores distâncias. E este efeito acaba por ser maior que o efeito devido aos primeiros diagramas, e o resultado combinado dos três diagramas acaba por nos ditar que a interação fica mais fraca conforme a distância fica menor, ou a transferência de momentum fica maior. Este é o fenômeno da *liberdade assintótica*, e possibilita o uso de teoria de perturbação a essas ordens de distâncias e conseqüentes momenta.

### 6.3 A constante de acoplamento forte

Nesta seção obteremos a equação

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}, \quad (6.52)$$



onde usaremos  $g_0$  e  $g_r$  para denotar os acoplamentos não-interagente e renormalizado. As quantidades  $Z_3$ ,  $Z_2$  e  $Z_1$  são constantes de renormalização associadas com os propagadores do quark e do glúon e o vértice quark-glúon, respectivamente.  $\mu$  é a escala de renormalização.

Obteremos valores explícitos para as constantes de renormalização, e as usaremos para determinar a dependência de escala da constante de acoplamento  $g_r$ . Discutiremos inicialmente os fatores de cor que aparecem em todos cálculos perturbativos da QCD.

### 6.3.1 Fatores de cor

Os fatores de vértice da Fig. (A.2) envolvem a constante de estrutura  $f_{ijk}$  e as matrizes de cor  $3 \times 3$

$$T^i = \frac{\lambda_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (6.53)$$

e será necessário resolver combinações destas quantidades, chamadas de *fatores de cor*, ao calcularmos diagramas de Feynman. As constantes de estrutura  $f_{ijk}$  são totalmente antissimétricas

$$f_{ijk} = f_{jki} = f_{kij} = -f_{jik} = -f_{kji} = -f_{ikj} \quad (6.54)$$

e pode-se verificar que  $[f_{ijk}f_{ljk} = 3\delta_{il}]$ . As matrizes  $T^i$  satisfazem a propriedade

$$[T^i, T^j] = if_{ijk}T^k \quad (6.55)$$

Há outras propriedades como

$$Tr T^i = \frac{1}{2} Tr \lambda_i = 0 \quad (6.56)$$

$$Tr(T^i T^j) = \frac{1}{4} Tr(\lambda_i \lambda_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (6.57)$$

$$T^i T^i = \frac{1}{4} \lambda_i \lambda_i = \frac{4}{3} \quad (6.58)$$

onde os índices  $i$  estão somados. Outras identidades podem ser deduzidas destas relações básicas. Por exemplo,

$$if_{ijk}T^j T^k = -\frac{3}{2}T^i \quad , \quad T^j T^i T^j = -\frac{1}{6}T^i \quad (6.59)$$

### 6.3.2 Diagramas nulos

Para calcularmos as constantes de renormalização  $Z_2$  e  $Z_3$  na eq. (6.52), precisamos calcular os diagramas de auto-energia de glúon e de quark, respectivamente. Estes diagramas incluem as figuras contendo loops como os mostrados na Fig. (6.3), que se anulam como uma consequência direta das regras de Feynman do apêndice A.

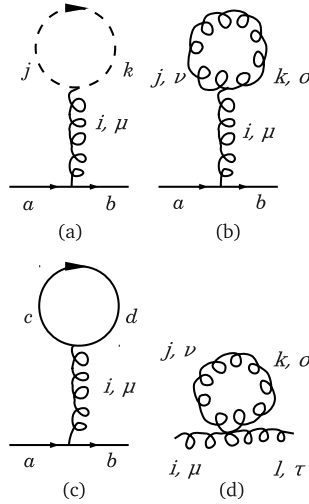


Figura 6.3: Diagramas que não contribuem à inserção de correções radiativas de segunda ordem aos diagramas de ordem dominante.

Para as Figs. (6.3(a,b)), esta anulação segue dos fatores de cor associados com os loops, que em ambos casos são

$$[f_{ijk}\delta_{jk} = f_{ijj} = 0]$$

, onde  $f_{ijk}$  vem dos fatores de vértice da Fig. (A.2) e  $\delta_{jk}$  dos propagadores da Fig. (A.1).

O fator de cor correspondente ao loop de quark (Fig. (6.3(c))) é, usando o resultado da eq. (6.56),

$$[(T^i)_{dc}\delta_{cd} = \text{Tr}(T^i) = 0]$$

Os fatores de cor e de Lorentz associados com o loop da Fig. (6.3(d)) são

$$[F_{ijkl}V_{\mu\nu\sigma\tau}g^{\mu\nu}\delta_{jk} = 0]$$

como é confirmado usando a eq. (A.11).

### 6.3.3 Renormalização da constante de acoplamento

Nesta seção, deduziremos a eq. (6.52) e a forma explícita das constantes de renormalização  $Z_2$ ,  $Z_3$  e  $Z_1$  considerando a renormalização dos propagadores de quark e de glúon e o vértice quark-glúon. Trabalharemos somente com correções de segunda ordem.

### A auto-energia do quark

A renormalização do propagador do quark a segunda ordem é parecida com a do propagador do elétron, onde o único diagrama de auto-energia do quark que não se anula é mostrado na Fig. (6.4).

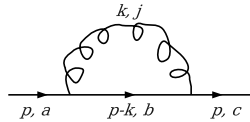


Figura 6.4: Correção à linha de quark dada pelo loop de glúon, em segunda ordem da teoria de perturbação.

Usando as regras de Feynman do apêndice A, a auto-energia resultante é dada por

$$ig_0^2 \Sigma_{ac}(p) = (ig_0)^2 C_{ac} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p-k) \gamma^\beta \quad , \quad (6.60)$$

onde o fator de cor é dado por

$$C_{ac} = T_{ab}^i T_{bc}^i = \frac{4}{3} \delta_{ac} \quad , \quad (6.61)$$

usando a eq. (6.58). Ao colocarmos  $a = c$ , que é a conservação de cor, a auto-energia do quark é idêntica à auto-energia do elétron, eq. (4.8), exceto pela substituição  $[e_0^2 \rightarrow 4g_0^2/3]$ . Conseqüentemente, a discussão do propagador do elétron pode ser adaptada ao caso do propagador do quark para qualquer sabor (se mantivermos  $a = c$ ) usando esta última substituição. O propagador não-interagente e renormalizado são relacionados pela eq. (6.16):

$$G_r(p) \equiv Z_2^{-1} G(p) \quad , \quad (6.62)$$

onde a constante de renormalização e a constante de acoplamento parcialmente renormalizada são dadas, por (eqs. (6.14) e (6.15))

$$Z_2 = 1 - \frac{\tilde{g}_0^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \quad , \quad (6.63)$$

e

$$g_r \equiv \tilde{g}_0 Z_2^{1/2} \quad , \quad (6.64)$$

respectivamente. Por conveniência posterior, escrevemos:

$$Z_2 = 1 - \frac{g_r^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(g_r^4) \quad . \quad (6.65)$$

Também temos que:

$$\tilde{g}_0 = g_0 \mu^{-\eta/2} \quad , \quad (6.66)$$

similarmente à QED.

### A auto-energia do glúon

A renormalização do propagador do glúon segue de maneira similar ao propagador do fóton, e resulta da substituição da Fig. (6.2(a)). Difere da QED no sentido em que há agora três diagramas de auto-energia não-nulos ao nível de um loop, como mostrado na Fig. (6.2(b)). A solução destes diagramas, usando as regras de Feynman para a QCD, é fácil de visualizar, mas complexa de obter. Para detalhes destes cálculos, veja [53]. Aqui, somente colocamos os resultados, que são as contribuições dos diagramas do loop do quark, do loop fantasma e do loop de glúon, e são dadas por

$$ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(a) = \delta_{ij} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\tilde{g}_0^2}{24\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad (6.67)$$

$$ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(b) = \delta_{ij} \left( k^\mu k^\nu + \frac{1}{2} k^2 g^{\mu\nu} \right) \frac{i\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad (6.68)$$

$$ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(c) = \delta_{ij} \left( 11k^\mu k^\nu - \frac{19}{2} k^2 g^{\mu\nu} \right) \frac{-i\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad (6.69)$$

respectivamente, onde os (...) representam termos não singulares, que não são requeridos no que segue.

Ao juntarmos as contribuições acima, devemos nos lembrar que há seis diferentes sabores de quark ( $u, d, s, c, t, b$ ) que podem contribuir ao loop de quark (Fig. (6.2(a))). Assumindo  $n_f$  sabores, onde  $n_f = 6$  no Modelo Padrão, obtemos

$$ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(k) = n_f \times \left[ ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(a) \right] + \left[ ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(b) \right] + \left[ ig_0^2 \Pi_{ij}^{\mu\nu}(c) \right] = i\delta_{ij} g_0^2 \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) \quad , \quad (6.70)$$

como nosso resultado final para a auto-energia do glúon <sup>‡</sup>, onde

$$g_0^2 \tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} \left( \frac{2n_f}{3} - 5 \right) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad (6.71)$$

Comparemos com o resultado correspondente

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad (6.72)$$

obtido para a auto-energia do fóton na QED.

Então, usaremos este resultado para renormalizarmos o propagador do glúon. Então, temos

$$\begin{aligned} G_{ij}^{\mu\nu}(k) &= iD_F^{\mu\nu}(k) \delta_{ij} + iD_F^{\mu\alpha}(k) \delta_{ii} g_0^2 \Pi_{\alpha\beta,lm}(k) iD_F^{\beta\nu}(k) \delta_{mj} \\ &= \left[ iD_F^{\mu\nu}(k) + iD_F^{\mu\alpha}(k) i g_0^2 \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k) iD_F^{\beta\nu}(k) \right] \delta_{ij} \quad , \end{aligned} \quad (6.73)$$

para o propagador do glúon em segunda ordem. Para  $i = j$  - campos de glúon iguais aos extremos dos loops - este é idêntico ao propagador do fóton (eq. (4.14)), exceto que a auto-energia do glúon (eq. (6.71)) difere da auto-energia do fóton (eq. (6.72)) pela substituição

$$\frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \longrightarrow \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} \left( \frac{2n_f}{3} - 5 \right) \quad . \quad (6.74)$$

Consequentemente, a análise é idêntica àquela dada para o propagador do fóton, e os resultados das eqs. (6.6), (6.9), (6.10) e (6.11) podem ser tomados diretamente, com esta pequena mudança. Então, obtém-se

$$g_r \equiv \tilde{g}_0 Z_3^{1/2} \quad , \quad (6.75)$$

para a constante de acoplamento parcialmente renormalizada, onde a constante de renormalização é dada por

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2} (2n_f - 5) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \quad (6.76)$$

---

<sup>‡</sup>Devemos ressaltar neste momento de introdução do parâmetro  $n_f$ , que  $n_f$  só será igual a seis (6) quando estivermos lidando com energias da ordem da massa do quark top  $t$ , quark mais massivo. Então,  $n_f$  não representa necessariamente uma constante para a QCD, mas temos de pensá-lo a cada experimento que façamos, pois ele representa o número de sabores de quark que podem vir a ocorrer virtualmente dentro do propagador do glúon e essa ocorrência é correlacionada com a ordem de energia do experimento.

ou

$$Z_3 = 1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2} (2n_f - 5) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(g_r^4) \quad (6.77)$$

em segunda ordem. O propagador renormalizado

$$G_{r,ij}^{\mu\nu}(k) = Z_3^{-1} G_{ij}^{\mu\nu}(k) \quad (6.78)$$

é dado por [veja a eq. (6.9)]

$$G_{r,ij}^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu} \delta_{ij}}{k^2 + i\epsilon + g_r^2 \Pi_r(k^2)} + O(g_r^4) \quad , \quad (6.79)$$

onde  $\Pi_r(k^2)$  permanece finito no limite  $\eta \rightarrow 0$ .

Ao compararmos a eq. (6.77) com a expressão correspondente (6.8) na QED, vemos que a contribuição em loop do quark para  $Z_3$  tem o mesmo sinal que a contribuição em loop do elétron na QED. Na QCD, as contribuições fantasma e gluônicas revertem este sinal.

### A correção de vértice quark-glúon

Quando correções radiativas de segunda ordem são incluídas, o vértice quark-glúon é dado por

$$i\Gamma^{i,\mu}(p', p) = ig_0 \left[ \gamma^\mu T^i + g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p) \right] \quad , \quad (6.80)$$

correspondendo à Fig. (6.5(a)).

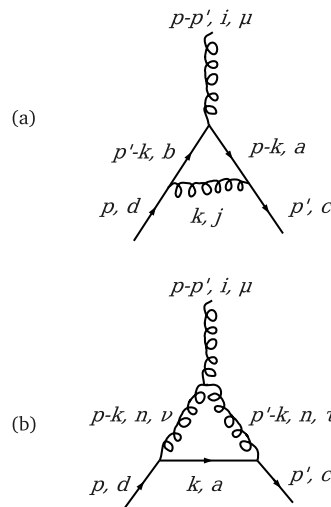


Figura 6.5: Correções de segunda ordem ao vértice básico da QCD.

Aqui, suprimimos índices de cor para quarks.  $T^i$  são as matrizes de cor  $3 \times 3$ , relacionadas à álgebra do grupo SU(3) relacionado à QCD, elas seriam as responsáveis pela troca de estado de cor, e a correção de vértice  $g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p)$  é dada pelos dois diagramas da Fig. (6.5(b)). O resultado destes diagramas será feito posteriormente, e nos dá

$$g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p) = -\gamma^\mu T^i \frac{\tilde{g}_0^2}{96\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad , \quad (6.81)$$

$$g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p) = \gamma^\mu T^i \frac{9\tilde{g}_0^2}{32\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad , \quad (6.82)$$

para as contribuições das Figs (6.5(a,b)) respectivamente, onde (...) indicam novamente termos finitos cuja forma não será necessária para o que discutiremos. Então

$$g_0^2 \Lambda^{i,\mu}(p', p) = \gamma^\mu T^i \frac{13\tilde{g}_0^2}{48\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + \dots \quad , \quad (6.83)$$

para a correção total de vértice em segunda ordem. Ao substituímos a última equação em eq. (6.80), e definindo

$$Z_1 = 1 - \frac{13\tilde{g}_0^2}{48\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] \quad , \quad (6.84)$$

em segunda ordem, obtemos

$$i\Gamma^{i,\mu}(p', p) = ig_r \mu^{\eta/2} [T^i \gamma^\mu + \tilde{g}_0^2 \Lambda_r^{i,\mu}(p', p)] \quad , \quad (6.85)$$

onde o acoplamento parcialmente renormalizado é

$$g_r \equiv \frac{\tilde{g}_0}{Z_1} \quad , \quad (6.86)$$

e  $\Lambda_r^{i,\mu}(p', p)$  é a parte finita da correção de vértice cuja forma não é necessária. Só por conveniência, explicitamos agora que

$$Z_1 = 1 - \frac{13g_r^2}{48\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(g_r^4) \quad . \quad (6.87)$$

Finalmente, devemos combinar a eq. (6.86) com as renormalizações parciais das eqs. (6.64) e (6.75). Como na QED, isto é feito absorvendo-se os fatores  $Z_2$  e  $Z_3^{1/2}$  dentro de cada vértice de cada linha de férmion e de bóson, respectivamente, para compensar aqueles removidos ao definirmos os propagadores

renormalizados das eqs. (6.62) e (6.78). Isto leva ao surgimento do vértice renormalizado

$$\Gamma_r^{i,\mu}(p', p) \equiv Z_2 Z_3^{1/2} \Gamma^{i,\mu}(p', p) \quad , \quad (6.88)$$

e substituindo as eqs. (6.85) e (6.86), temos então

$$i\Gamma_r^{i,\mu}(p', p) = ig_r \mu^{\eta/2} [T^i \gamma^\mu + g_r^2 \Lambda_r^{i,\mu}(p', p)] + O(g_r^5) \quad , \quad (6.89)$$

onde  $g_r$  é o acoplamento totalmente renormalizado, definido por

$$g_r = \tilde{g}_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \quad , \quad (6.90)$$

usando eq. (6.66). Notamos que neste caso,  $Z_1 \neq Z_2$ , e a última equação não se reduz a uma forma mais simples como na QED, eq. (6.25).

### 6.3.4 O acoplamento *running* na QCD

Usaremos a eq. (6.90) para determinarmos a dependência de escala da constante de acoplamento. O primeiro passo é substituir os valores explícitos para as constantes de renormalização dadas pelas eqs. (6.65), (6.77) e (6.87) na eq. (6.90)

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \left[ 1 + \frac{g_r^2}{32\pi^2} \left( 11 - \frac{2}{3} n_f \right) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(g_r^4) \right] \quad . \quad (6.91)$$

A dependência em  $\mu$  do acoplamento renormalizado é determinada resolvendo a equação

$$\mu \frac{\partial g_r}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0 g_r^3}{16\pi^2} \quad , \quad (6.92)$$

que segue da eq. (6.91) no limite  $\eta \rightarrow 0$ , onde  $[\beta_0 = 11 - (2/3)n_f]$ , e desprezamos termos da ordem  $g_r^5$ . Se  $n_f < 17$ ,  $\beta_0$  é positivo, tal que  $g_r$  decresce com o aumento de  $\mu$ . A forma deste decréscimo é geralmente expressa em termos do acoplamento  $[\alpha_S(\mu) \equiv g_r^2/4\pi]$  em analogia a  $\alpha_{EM} = e_r^2/4\pi$ .

A dependência em  $\mu$  de  $\alpha_S(\mu)$  pode ser expressa de dois jeitos diferentes. Da eq. (6.92) e  $\alpha_S(\mu) \equiv g_r^2/4\pi$ , obtemos

$$\mu \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_S^2 \quad , \quad (6.93)$$

que tem solução dada por:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad (6.94)$$



onde  $\Lambda$  é um *parâmetro de escala* que tem de ser determinado via experimento, e que caracteriza a escala  $\mu = \Lambda$  na qual  $\alpha_S$  se torna grande conforme  $\mu$  decresce. A eq. (6.93) também implica que

$$\alpha_S(\mu) = \frac{\alpha_S(\mu_0)}{1 + (\beta_0/2\pi)\alpha_S(\mu_0)\ln(\mu/\mu_0)} = \frac{\alpha_S(\mu_0)}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_S(\mu_0)\ln(\mu^2/\mu_0^2)} \quad , \quad (6.95)$$

onde  $\alpha_S(\mu_0)$  - o valor em uma escala  $\mu_0$  arbitrariamente escolhida - é agora um parâmetro a determinarmos experimentalmente. Na última forma, a escala de referência  $\mu_0$  é convencionalmente escolhida a ser a massa do bóson  $Z^0$ :  $\mu_0 \equiv m_Z = 91,29\text{GeV}$ . Para mais precisão, teríamos que incluir correções surgindo de termos de maior ordem em  $g_r$  na eq. (6.91).

Obtivemos depois de um certo esforço a forma funcional do acoplamento forte com a escala de energia do experimento. Falta ainda determinarmos  $\alpha_S(\mu_0)$  para a determinação da dependência completa de  $\alpha_S$  com  $\mu$ . Isso será feito no próximo capítulo onde exploraremos os experimentos que nos fornecerão a estatística necessária para a determinação de  $\alpha_S(\mu_0)$ .

## 7 *Comparação do acoplamento running da QCD com o experimento*

Terminada a parte teórica acerca da constante de acoplamento da interação forte  $\alpha_S$ , temos de verificar a validade da relação que a define (eq. (7.1) ou (7.2)) via experimento. Neste capítulo, abordaremos os processos pelos quais a mais recente (2009) média global de  $\alpha_S(\mu_0 = m_Z)$  foi realizada. Após a obtenção de  $\Lambda$ , ou equivalentemente  $\alpha_S(\mu_0)$ , a partir dos métodos mais modernos com correções de até 4-loops, teremos nossa expressão completa para o comportamento do acoplamento  $\alpha_S(\mu)$  com a escala de energia  $\mu$  e podemos então verificar os fenômenos da liberdade assintótica e confinamento.

Também iremos obter um parâmetro de escala  $\Lambda$  a partir de nosso acoplamento da eq. (7.1) usando a correção, de 1-loop, aos diagramas de ordem dominante. Para isto serão utilizados conjuntos de dados experimentais vindos de:

- Predições de forma de evento hadrônico a partir de aniquilação  $e^+e^-$ ,
- Estudos sobre estados de quarkonia ligados, usando QCD na rede,
- Decaimentos dos mésons  $Y(b\bar{b})$ , usando QCD perturbativa.

### 7.1 Motivação

A QCD não prevê por si só a normalização absoluta que define a dependência de  $\alpha_S$  com  $\mu$ . Entretanto, para transferências de momentum altas  $\mu$ , ou correspondentemente energias altas  $\mu$ , ela consegue prever a forma funcional da dependência de  $\alpha_S$  com  $\mu$ . Podemos ver a partir desta forma funcional que, um acoplamento grande a escalas baixas de energia - distâncias altas - leva ao **confinamento** de quarks e glúons dentro dos hádrons; ao mesmo tempo, um acoplamento pequeno a escalas altas de energia - distâncias pequenas - leva à **liberdade assintótica** de quarks e glúons, regime no qual eles são ditos estarem praticamente livres, pois  $\lim_{\mu \rightarrow \infty} [\alpha_S(\mu)] \rightarrow 0$ .

Para determinarmos a relação entre  $\alpha_S$  e  $\mu$ , temos de especificar a escala de referência  $\mu_0$ , que a princípio é arbitrária. A determinação de  $\alpha_S$  nesta escala  $\mu_0$  é feita via experimento.

## 7.2 Introdução teórica

Para entendermos porque a nossa direção é  $[\alpha(\mu_0) \rightarrow \alpha(\mu) \rightarrow \text{confirmação experimental}]$ , precisamos ter as relações entre estas quantidades em mãos. Mais especificamente:

$$\alpha_S(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad (7.1)$$

ou

$$\alpha_S(\mu) = \frac{\alpha_S(\mu_0)}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_S(\mu_0) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} \quad (7.2)$$

, que foi o que vimos nas seções passadas.

Temos de lembrar que estas equações valem somente no limite de altas energias, ou seja, para grandes  $\mu$ 's, e que são expressões aproximadas para  $\alpha_S$  no sentido de que só levam em conta correções da ordem de  $g^2$  (ou diagramas de 1-loop) aos diagramas de ordem dominante. Se fôssemos considerar correções além dessas, nosso parâmetro  $\beta_0$  teria de ser substituído por  $\beta$ , ou seja:

$$\mu \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_S^2 \quad \longrightarrow \quad \mu \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu} = -\frac{\beta(\alpha_S)}{2\pi} \quad , \quad (7.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_S(\mu)) &= \beta_0 \alpha_S^2 + \beta_1 \alpha_S^3 + \beta_2 \alpha_S^4 + \beta_3 \alpha_S^5 + O(\alpha_S^6) \\ \beta_0 &= \frac{33 - 2n_f}{3} \\ \beta_1 &= \frac{153 - 19n_f}{6\pi} \\ \beta_2 &= \frac{77139 - 15099n_f + 325n_f^2}{864\pi^2} \\ \beta_3 &\approx \frac{29243 - 6946,3n_f + 405,089n_f^2 + 1,49931n_f^3}{64\pi^3} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Se incluímos termos de  $\beta_1$  e de ordem maior, relações parecidas mas mais complexas apareceriam para  $\alpha_S(\mu)$ , como uma função de  $\alpha(\mu_0)$  e de  $\ln(\mu^2/\mu_0^2)$  ou uma função de  $\ln(\mu^2/\Lambda^2)$ , assim como aparecem nas eqs. (7.2) e (7.1), respectivamente.

Na aproximação até quarta ordem ( $\beta_3$ ) e usando o esquema de renormalização  $\overline{MS}$ , o acoplamento forte é dado por

$$\begin{aligned}
\alpha_S(\mu) &= \frac{4\pi}{\beta_0 L} - \frac{(4\pi)^2}{\beta_0^3 L^2} \beta_1 \ln L + \frac{(4\pi)^3}{\beta_0^3 L^3} \left\{ \frac{\beta_1^2}{\beta_0^2} (\ln^2 L - \ln L - 1) + \frac{\beta_2}{\beta_0} \right\} \\
&+ \frac{(4\pi)^4}{\beta_0^4 L^4} \left\{ \frac{\beta_1^3}{\beta_0^3} \left( -\ln^3 L + \frac{5}{2} \ln^2 L + 2 \ln L - \frac{1}{2} \right) - 3 \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_0^2} \ln L - \frac{\beta_3}{2\beta_0} \right\} ,
\end{aligned} \tag{7.5}$$

onde  $L = \ln(\mu^2/\Lambda^2)$ .

A primeira linha traz no primeiro termo a aproximação de 1-loop ( $\beta_0$ ), e no segundo termo a de 2-loops ( $\beta_1$  e  $\beta_0$ ). No terceiro termo, temos a aproximação de 3-loops ( $\beta_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_0$ ). Na segunda linha, temos as correções devidas às inserções de diagramas de 4-loops ( $\beta_3$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_0$ ).

A partir da última equação, pode-se chegar ao resultado que a expressão em  $\beta_0$  (primeiro termo) tem uma discrepância não desprezível em relação à fórmula completa de 4-loops, [56]. Já para expressões levando em conta 2- ou 3-loops, essa discrepância não é observada grandemente, nos dizendo então que a partir da correção em 2-loops, temos uma expressão para  $\alpha_S$  já bastante confiável para compararmos com experimento.

Devemos lembrar que as expressões para  $\alpha_S(\mu)$ , em qualquer ordem de grandeza, foram calculadas a partir de certos diagramas corretivos de respectiva ordem. Assim como fizemos para achar a eq. (7.1) e a eq. (7.2) a partir de correções de segunda ordem  $g^2$  ou  $\beta_0$ , a expressão (7.5) foi encontrada a partir de correções até ordem  $\beta_3$ . Tendo em mãos  $\alpha_S(\mu)$ , precisamos somente considerar linhas externas de quarks ao calcularmos diagramas de Feynman a partir da série perturbativa, ou seja, toda a informação sobre a série perturbativa está contida na expressão de  $\alpha_S(\mu)$ , pois inclui a escala  $\mu$  - energia ou transferência de momentum - proveniente da parte finita da regularização das integrais de loop divergentes, assim como expomos ao calcularmos explicitamente  $e(k^2)$  na QED.

Pode-se ver que as expressões (7.1) ou (7.2) e (7.5), no regime de altas energias, nos levam a achar uma constante de acoplamento  $\alpha_S(\mu) < 1$ . Isto possibilita o cálculo de expressões que tentem reproduzir resultados reais a partir de uma série em  $[\alpha_S(\mu)]^n$  onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Exemplos desses resultados reais são: seções de choque e distribuições de processos físicos considerando-se quarks e glúons nos estados inicial, intermediário e final.

No regime oposto, de baixas energias, onde  $\alpha_S(\mu) > 1$ , não podemos aplicar métodos perturbativos para reproduzirmos resultados experimentais, pois a ordem de  $\alpha_S$  implica no problema de não convergência das séries em  $\alpha_S(\mu)$  que expressam observáveis. Portanto, incertezas teóricas surgem do regime não-perturbativo pois há termos de mais alta ordem, que os de ordem dominante, na expansão perturbativa quando  $\alpha_S(\mu) > 1$ . Estas incertezas, na maioria dos casos, podem ser somente lidadas a partir de certos caminhos, por vezes lidando somente com teorias efetivas, que - com poucas exceções - dominam os erros de determinações experimentais de  $\alpha_S$ .

## 7.2.1 Métodos não-perturbativos

Métodos não-perturbativos foram desenvolvidos para quantificar processos sob interação forte em baixas escalas de energia  $\mu$  da ordem típica de  $\mu^2 < 1 \text{ GeV}^2$  (onde a teoria de perturbação não é mais válida), por exemplo, fragmentação de quarks e glúons em hádrons e a previsão das massas de mésons. Discutiremos alguns exemplos destas técnicas a seguir:

### Modelos de hadronização

São baseados em abordagens de Monte Carlo para descrever a transição de quarks e glúons para hádrons. Eles são baseados nos mecanismos inspirados na QCD como *fragmentação de cordas* ([57] e [58]), e são geralmente usados em modelos descrevendo estados finais completamente hadrônicos em colisões de partículas de alta energia. Os modelos de hadronização possuem um número de parâmetros livres que devem ser ajustados de modo a reproduzir os dados experimentais. Estes modelos são ferramentas essenciais, não somente para estudos detalhados na QCD de reações em colisões de alta energia, mas são também importantes para estimarmos a resolução de sistemas detetores de partículas.

### Correções de potência

São um método analítico para aproximar os efeitos de hadronização não-perturbativos por meio de métodos perturbativos, introduzindo um parâmetro universal e não-perturbativo

$$\alpha_0(\mu_I) = \frac{1}{\mu_I} \int_0^{\mu_I} dk \alpha_S(k) \quad ,$$

para parametrizar o comportamento desconhecido de observáveis abaixo de uma escala infravermelha - momenta baixos -  $\mu_I$  (veja, por exemplo, [59]). Correções de potência são vistas como uma abordagem alternativa para a descrição de efeitos de hadronização em distribuições de forma de evento hadrônico, ao invés da utilização de modelos de hadronização fenomenológicos como o descrito acima.

### Teoria de calibre na rede ("Lattice QCD")

É um dos métodos não-perturbativos mais desenvolvidos e é usado para calcular, por exemplo, massas de hádrons e elementos de matriz da QCD, [60]. Em QCD na rede, operadores de campo são aplicados em um espaço-tempo quadridimensional euclidiano ( $(\vec{r})^2 + t^2 = cte.$ ) discreto de hipercubos com aresta de comprimento  $a$ . Rede de tamanho finito e efeitos de espaçamento são estudados usando-se tamanhos crescentes de tamanho da rede e decrescentes espaçamento de rede  $a$ , com esperanças de eventualmente aproximar-se do limite do contínuo. Com o crescente poder de computação e métodos de Monte Carlo aprimorados, estes cálculos melhoraram significativamente ao longo do tempo e recentemente previram as massas de hádrons como o próton a precisões maiores que 2% [61], e também determinações de  $\alpha_S$  a partir de splittings de massa (diferença de massa entre um quarkonium excitado e um outro do mesmo tipo, só que num nível de energia mais baixo) de quarkonia com uma precisão melhor do que 1% [62].

## 7.3 Processos para obtenção de $\alpha_S(\mu_0)$

De 30 anos pra cá, determinações de  $\alpha_S$  continuam na linha de frente de estudos experimentais e testes da QCD. A precisão crescente das previsões e métodos da QCD, o melhor entendimento e parametrização de efeitos não-perturbativos, as maiores qualidade e estatística de dados e a disponibilidade de dados sobre um intervalo grande de energias e a partir de uma grande variedade de processos levaram a uma precisão maior e a um conhecimento aprofundado destes estudos.

Exporemos aqui os mais recentes resultados que estão por sua vez baseados em melhoradas previsões teóricas e/ou precisão experimental\* recentes.

### 7.3.1 Acoplamento $\alpha_S$ a partir de decaimento leptônico de $\tau$

A determinação de  $\alpha_S$  a partir do decaimento do lépton  $\tau$  é um dos campos mais estudados para medi-la. Usa-se a fração dada abaixo para determinar  $\alpha_S$ . As pequenas contribuições não-perturbativas a medições experimentais de um observável, o *branching fraction* hadrônico normalizado de decaimentos  $\tau$ :

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \text{hadrons} + \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau)}$$

fazem com que esta medição seja bastante precisa.

Desde 2006, vários autores (o mais recente sendo [63]) revisitaram a determinação de  $\alpha_S$  a partir de decaimentos  $\tau$ . Estes estudos são baseados em dados vindos do LEP (Large Electron Positron Collider) - [64] e [65] - e em parte do detector da colaboração BABAR, no SLAC (National Accelerator Laboratory) - [66]. Eles diferem no tratamento detalhado da expansão da QCD perturbativa de  $R_\tau$ . Em virtude desta diferença e para a inclusão dispersão aparente entre diferentes expansões perturbativas no erro total, o valor central é tomado com sendo a média entre os valores médios dos vários autores, e o erro é tomado como a diferença entre este valor central e o valor mais distante deste valor central. Fazendo isso, chega-se a

$$\alpha_S(M_\tau) = 0,330 \pm 0,014$$

onde o erro é dominado pela incerteza teórica sobre a expansão perturbativa. Extrapolando este valor para o valor calculado na massa de repouso de  $Z^0$ , 91,2 GeV, usando a solução de 4-loop para a função  $\beta$  (eq. (7.5)), temos

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1197 \pm 0,0016$$

Este valor será incluído à média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ , que será calculada posteriormente.

---

\*Lembrando que estes dados são de 2009, e estas medidas são em relação a dados de 2006, quando foi feita a última média global de  $\alpha_S(\mu_0 \equiv M_Z)$  antes de 2009.

### 7.3.2 Acoplamento $\alpha_S$ a partir de quarkonia pesados

Estados de quarkonia ( $q\bar{q}$ ) pesados consistindo de um quark e seu respectivo antiquark (charm ou bottom) são uma base para testes experimentais importante para a QCD. Massas, esplitamento de massas entre vários estados, e taxas de decaimento são observáveis que podem ser medidos de forma bem precisa, e que podem ser previstos tanto pela QCD perturbativa quanto pela QCD na rede.

#### (A1) $\alpha_S$ a partir de decaimentos radiativos de $\Upsilon$ ( $b\bar{b}$ )

Estados ligados de quark e antiquark, ambos bottom, são muito sensíveis ao valor de  $\alpha_S$  porque o decaimento hadrônico se dá via três glúons,  $\Upsilon \rightarrow ggg \rightarrow$  hádrons. O termo de mais baixa ordem da QCD para a largura de decaimento hadrônico de  $\Upsilon$  já contém  $\alpha_S$  à terceira potência. A situação é complicada devido a correções relativísticas e à função de onda desconhecida de  $\Upsilon$  na origem.

A função de onda na origem e as correções relativísticas se cancelam em grande parte se definirmos uma proporção do tipo

$$R_\gamma = \frac{\Gamma(\Upsilon \rightarrow \gamma gg)}{\Gamma(\Upsilon \rightarrow ggg)}$$

que é um observável típico para determinações precisas de  $\alpha_S$ .

Dados recentes do CLEO, [67] são usados para a determinação de  $\alpha_S$  a partir de decaimentos radiativos de  $\Upsilon(1S)$ . As previsões teóricas incluem termos até ordem de  $O(\alpha_S^3)$ . O valor obtido do estudo [68] é

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,119^{+0,006}_{-0,005}$$

Este resultado será incluído no cálculo da nova média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ .

#### (A2) $\alpha_S$ a partir de QCD na rede

Determinações de  $\alpha_S$  baseadas em cálculos de QCD na rede se tornaram crescentemente precisas no passado, incluindo quarks leves ( $u$ ,  $d$  e  $s$ ) na polarização do vácuo e incorporando espaçamento de rede mais estreito.

Em um estudo recente realizado pela colaboração HPQCD [62], os parâmetros da QCD - a constante de acoplamento nua  $g_0$  e as massas de quark nuas  $m_0^f$  - são consideradas para reproduzir a diferença de massa dos quarkonia  $\Upsilon' - \Upsilon$  (bottonium excitado - bottonium fundamental). Também, as massas dos quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  são ajustadas a darem os valores corretos das massas de vários mésons leves. Com estes parâmetros ajustados, não há outros parâmetros físicos livres, e a simulação é usada para nos dar previsões precisas da QCD. Valores não-perturbativos de várias quantidades pertencentes ao regime de curtas distâncias são computadas e comparadas aos cálculos perturbativos respectivos que são dados em teoria de perturbação em NNLO. A partir de um ajuste a 22 quantidades de curta distância, o valor de

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1183 \pm 0,0008$$

é encontrado. O erro total inclui o espaçamento finito da rede, o volume da rede finita, incertezas devidas a extrapolação e perturbação. Este resultado fará parte da nova média global da constante de acoplamento na escala de referência da massa do bóson  $Z^0$ .

### 7.3.3 $\alpha_S$ a partir de espalhamento profundamente inelástico

Atualmente, um grande número de resultados está disponível, vindos de reações sob alvo usando feixes de elétrons, múons ou nêutrons, no intervalo de energias  $\mu^2$  da ordem de  $\sim 100 \text{ GeV}^2$ . Com o surgimento do colisor elétron-próton HERA, o intervalo  $\mu^2$  foi estendido por duas ordens de magnitude.  $\alpha_S$  pode ser determinado a partir de momentos de funções de estrutura, de regras de soma da QCD e de produção e formas de evento de jatos hadrônicos. Previsões melhoradas da QCD, assim como novos estudos experimentais recentes, nos possibilitaram a obtenção de novos resultados vindos de um estudo combinado dos dados globais sobre funções de estrutura, e vindos de produção de jatos no HERA.

#### (B1) $\alpha_S$ a partir de dados globais sobre funções de estrutura de não-singlete

Previsões perturbativas de processos físicos em colisões lépton-nucleon e hádron-hádron dependem das densidades de quark e glúons dentro do núcleo. Assumindo fatorização entre processos de espalhamento duro e de curta distância, que podem ser calculados usando-se a QCD perturbativa, e processos de longo alcance (baixas energias) que não são acessíveis por métodos perturbativos, as seções de choque referentes a estes processos são parametrizadas por um conjunto de funções de estrutura  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que são também interpretadas como somas de densidades de párton (quark ou antiquark ou glúon) no núcleo. Enquanto a QCD perturbativa não consegue prever a forma funcional das densidades de párton e portanto das funções de estrutura, suas evoluções em energia são descritas pelas chamadas equações DGLAP.

Um estudo [69] dos dados globais disponíveis no espalhamento profundamente inelástico lépton-próton e lépton-deuteron resultou numa determinação das densidades dos quarks de valência e de  $\alpha_S$  em intervalos grandes de  $\mu^2$ . No caso de não-singlete (singlete de cor= $r\bar{r}$ ;  $g\bar{g}$ ;  $b\bar{b}$ ), onde efeitos de quarks pesados são desprezíveis, a análise é estendida para a QCD em ordem  $O(\alpha_S^3)$  na expansão perturbativa. A determinação de  $\alpha_S$  a este nível nos deixa com

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1142 \pm 0,0023$$

Este resultado será incluído na nova média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ .

#### (B2) $\alpha_S$ a partir da produção de jatos em processos de espalhamento profundamente inelástico

Medições de  $\alpha_S$  de produção de jatos em espalhamento lépton-nucleon profundamente inelástico no colisor HERA são um campo de pesquisa ativo. Taxas de produção de jatos são estudadas na faixa de energia  $\mu^2 \sim 10$  até  $15000 \text{ GeV}^2$ . Numa combinação recente [70] de medições precisas no HERA, valores de  $\alpha_S$  foram determinados a partir de fitagem de previsões da QCD em ordem NLO



aos dados de seções de choque para jatos em espalhamento profundamente inelástico de corrente neutra (espalhamento intermediado pelo bóson  $Z^0$ ) a altas escalas de energia  $\mu^2$ , [71], [72], [73].

O resultado final da combinação é

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1198 \pm 0,0032$$

Este resultado será levado em conta na obtenção da nova média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ .

### 7.3.4 $\alpha_S$ a partir de formas de evento hadrônico e de produção de jatos na aniquilação $e^+e^-$

Observáveis parametrizando formas de evento hadrônico e taxas de produção de jatos são observáveis típicos para estudos de sobre  $\alpha_S$  em aniquilação  $e^+e^-$ . O avanço nas técnicas teóricas foi utilizado para determinar  $\alpha_S$  a partir de dados de experimentos anteriores de aniquilação  $e^+e^-$ , dos colisores PETRA e LEP que operaram de 1979 a 1986 e de 1989 a 2000, respectivamente. A reanálise dos dados ALEPH a partir do LEP ([74], [75]), no sistema de referência do centro de massa (CM) de 91 GeV a 206 GeV, baseados em seis observáveis de forma de evento e produção de jatos, nos dá

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1224 \pm 0,0039$$

Este resultado é obtido usando-se predições da QCD em NNLO+NLLA (LA: na expansão de Taylor do acoplamento  $\alpha_S(\mu)$ ), estamos considerando apenas um delimitado número de termos logarítmicos que surgem na mesma. Então, esta aproximação, em logaritmos, se reflete em observáveis como, por exemplo, seções de choque. LA, portanto, significa a ordem de aproximação de modo similar a LO, com a diferença que neste último a aproximação era feita a partir do operador S.).

Resultados paralelos estão disponíveis de uma reanálise de dados do experimento JADE em PETRA [76], a partir de seis observáveis de forma de evento e produções de jatos a seis energias de CM no intervalo de energias 14 – 46 GeV,

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1172 \pm 0,0051$$

Este resultado é também obtido usando-se previsões da QCD em NNLO+NLLA.

Devido aos dois resultados serem baseados em dados a diferentes intervalos de energia de CM e de dois experimentos independentes, eles contribuem com informação independente e valiosa. Ambos os resultados NNLO+NLLA dos dados de ALEPH e de JADE vão ser utilizados para a determinação da nova média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ .

### 7.3.5 $\alpha_S$ a partir de dados de precisão eletrofracos

A determinação de  $\alpha_S$  a partir de observáveis, como a largura hadrônica do lépton  $\tau$ , ou a largura de decaimento hadrônico do bóson  $Z^0$ , é de grande importância porque eles estão livres de muitas fontes de

erros sistemáticos, experimentais e teóricos, erros dos quais distribuições diferenciais como formas de evento ou taxas de produção de jatos sofrem. A proporção entre as larguras de decaimento hadrônico e leptônico,

$R_Z = \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \text{hadrons})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^+ e^-)}$ , se torna um observável de extremo valor, e ajustes de  $\alpha_S$  e outras quantidades a partir de medições eletrofracas de precisão vindas de aniquilações  $e^+ e^-$  e outros processos nos livram de incertezas sistemáticas, como a hadronização.

Uma revisão recente do ajuste global a dados de precisão eletrofracos [77], nas correções atualizadas da QCD em ordem N3LO, na inclusão de limites atuais vindos de buscas diretas ao bóson de Higgs no LEP e no Tevatron, nos deixa com o valor:

$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1193_{-0,0027}^{+0,0028} \pm 0,0005$ , onde o primeiro erro é experimental e o segundo é teórico. Este resultado fará parte da nova média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ .

## 7.4 Média global de $\alpha_S(\mu_0)$

Os resultados discutidos nas seções anteriores estão resumidos na tabela 7.1. Não discutiremos o método numérico por trás do cálculo da média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ , simplesmente exporemos a média final sobre todos os resultados anteriores.

### 7.4.1 Determinação da média global

Experimento	$\mu$ [GeV]	$\alpha_S(\mu)$	$\alpha_S(M_{Z^0})$	$\{\alpha_S(M_{Z^0})\}_{\text{exclusiva}}$
Decaimentos $\tau$	1,78	$0,330 \pm 0,014$	$0,1197 \pm 0,0016$	$0,11818 \pm 0,00070$
EPI $\{F_2\}$	2 – 170	–	$0,1142 \pm 0,0023$	$0,11876 \pm 0,00123$
EPI $\{e^- p^+ \rightarrow \text{jatos}\}$	6 – 100	–	$0,1198 \pm 0,0032$	$0,11836 \pm 0,00069$
Estados $q\bar{q}$	7,5	$0,1923 \pm 0,0024$	$0,1183 \pm 0,0008$	$0,11862 \pm 0,00114$
Decaimentos $\Upsilon$	9,46	$0,184_{-0,014}^{+0,015}$	$0,119_{-0,005}^{+0,006}$	$0,11841 \pm 0,00070$
$e^+ e^-$ {jatos & formas}	14 – 44	–	$0,1172 \pm 0,0051$	$0,11844 \pm 0,00076$
$e^+ e^-$ {jatos & formas}	91 – 206	–	$0,1224 \pm 0,0039$	$0,11831 \pm 0,00091$
$e^+ e^-$ {dados eletrofracos}	91,2	$0,1193 \pm 0,0028$	$0,1193 \pm 0,0028$	$0,11837 \pm 0,00076$

Tabela 7.1: Resumo de todas as *medidas* de  $\alpha_S(M_{Z^0})$ , juntamente com *médias exclusivas* e *desvios padrão* entre a média exclusiva e a medida feita com o respectivo experimento, somente.

A média global de  $\alpha_S(M_{Z^0})$  é então definida, depois de calculada apropriadamente<sup>†</sup>, com o valor de

<sup>†</sup>Deve-se levar em conta, por exemplo, correlações entre os conjuntos de dados, tanto teóricas quanto experimentais.

$$\alpha_S(M_{Z^0}) = 0,1184 \pm 0,0007$$

O valor médio de  $\alpha_S(M_{Z^0})$  é dominado pelo resultado de  $\alpha_S$  com a menor incerteza, que no nosso caso, é o resultado vindo da QCD na rede. Para verificarmos este grau de domínio sobre a média e seu erro respectivo, e para testar a correlação de cada uma das medidas com as outras, calculam-se *médias exclusivas*, deixando uma das oito medidas de fora a cada vez. Estas médias estão apresentadas na tabela 7.1.

## 7.5 Parâmetro $\Lambda$ a partir da aproximação de 1-loop

Nesta seção, faremos um ajuste a alguns conjuntos de medidas referentes ao acoplamento forte. Este ajuste será feito a partir da forma funcional da eq. (7.1) deste acoplamento. Não usaremos a fórmula até a aproximação de 4-loops da eq. (7.5), pois queremos verificar se nossa relação é satisfatória quando comparamos os resultados  $\alpha_S(\mu_0)^{1l}$  e  $\alpha_S(\mu_0)^{4l}$ , a partir da eq. (7.1) e a partir de toda a última seção descrita anteriormente, respectivamente. Para não lidarmos com o aspecto do *matching scale*<sup>‡</sup>, captaremos dados apenas dentro da escala de energia que atinge o número de sabores  $n_f = 5$ , pois esse número compreende um intervalo de energia bastante grande - desde a massa do quark bottom 4,7 GeV até a do quark top 175 GeV.

Para isso, consideramos os dados nas três tabelas a seguir para a obtenção do parâmetro de escala  $\Lambda$  a partir de um ajuste a estes dados experimentais. Na tabela 7.2 estão expostos dados referentes à [76]. Estes dados foram retirados a partir de observáveis formas de evento hadrônico e de produção de jatos, na aniquilação  $e^+e^-$ .

Q[GeV]	14,0	22,0	34,6	35,0	38,3	43,8
$\alpha_S(Q)$	0,1690	0,1527	0,1420	0,1463	0,1428	0,1345
Erro total	0,0166	0,0119	0,0081	0,0087	0,0097	0,0073

Tabela 7.2: Dados obtidos no intervalo de energia 14 – 44 GeV a partir de aniquilação  $e^+e^-$ .

Na tabela 7.3, temos dados tirados de [75]. Assim como na tabela cima, estes dados foram retirados a partir de observáveis formas de evento hadrônico e de produção de jatos, na aniquilação  $e^+e^-$ .

Na tabela 7.5, temos apenas dois dados referentes a dois experimentos diferentes: o primeiro referente à [62] e o segundo à [68]. Os dois experimentos já foram explicados anteriormente: o primeiro a partir de estudos sobre estados ligados de  $\Upsilon$  utilizando QCD na rede e o segundo a partir de estudos sobre decaimentos  $\Upsilon$  utilizando QCD perturbativa (pQCD).

<sup>‡</sup>Determinadas escalas onde cresce ou decresce por uma unidade o número de sabores de quark que formarão loop dentro do propagador de glúon. Por causa deste efeito, que não é detectável em observáveis, nosso acoplamento deveria respeitar vínculos nestas escalas de energia.

Q[GeV]	91,2	133,0	161,0	172,0
$\alpha_S(Q)$	0,1221	0,1179	0,1201	0,1086
Erro total	0,0045	0,0049	0,0056	0,0062

Tabela 7.3: Dados obtidos no intervalo de energia 91 – 206 GeV a partir de aniquilação  $e^+e^-$ . Os dados acima de 172 GeV não são considerados pois, desse jeito, não temos que considerar *matching scale*. Desta forma, consideramos em nosso ajuste um acoplamento considerando  $n_f = 5$ .

Experimento	QCD na rede	pQCD
Q[GeV]	7,5	9,46
$\alpha_S(Q)$	0,1923	0,1840
Erro total	0,0024	$\begin{matrix} +0,015 \\ -0,014 \end{matrix}$

Tabela 7.4: Dado obtido a partir de cálculos com estados ligados quarkonium ( $q\bar{q}$ ), utilizando QCD na rede. Está exposto também o dado obtido a partir de cálculos de decaimento do quarkonium  $\Upsilon = b\bar{b}$ , utilizando QCD perturbativa (pQCD). Como trata-se de decaimento, a escala de energia é somente 7,5 GeV, massa da partícula.

Com estes dados, portanto, fomos capazes de determinar um  $\Lambda$  que ajustasse a eq. (7.1) aos pontos experimentais. Esse ajuste foi efetuado a partir do programa "gnuplot" para Linux a partir da plataforma Ubuntu 11.04 ; ele considera um ajuste seguindo o método dos mínimos quadrados e nos revela um valor médio de  $\Lambda$  juntamente com o desvio referente à diversidade de pontos considerados. O gráfico de ajuste está mostrado abaixo. Ele é dado por

$$\Lambda = 0,1117 \pm 0,0066 \quad , \quad (7.6)$$

e por consequência, pela eq. (7.1), obtemos

$$\alpha_S(\mu_0 = m_{Z^0}) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(m_{Z^0}^2/\Lambda^2)} \quad ,$$

que, para  $n_f = 5$ , resulta em

$$\alpha_S(m_{Z^0}) = 0,1222 \pm 0,0011 \quad . \quad (7.7)$$

Esta última incerteza é obtida a partir da relação de propagação do erro de  $\Lambda$ :

$$\delta\alpha_S = \delta\Lambda \left| \frac{\partial\alpha_S}{\partial\Lambda} \right|_{\Lambda=0,1117} \quad .$$

Nota-se que é um resultado distante do valor obtido a partir da aproximação de 4 loops  $\alpha_S^{(4l)}(m_{Z^0}) = 0,1142 \pm 0,0023$ . No entanto, considerando-se que temos apenas uma aproximação de 1 loop, o valor do acoplamento parece ser razoável. Note, porém, que segundo o artigo [56], somente a partir da aprox-

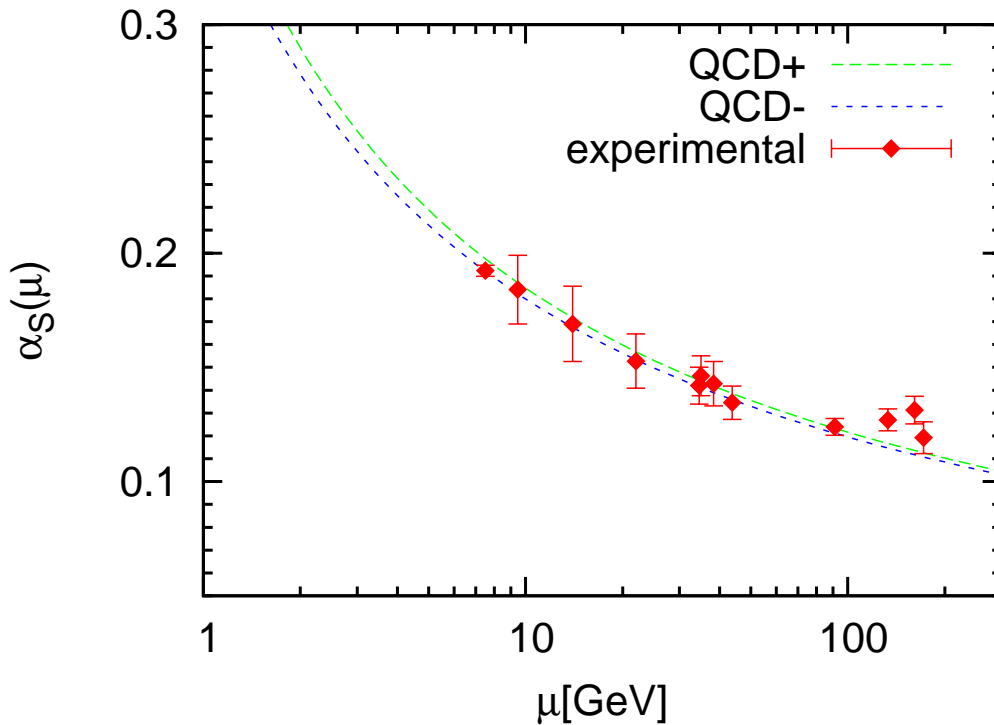


Figura 7.1: Gráfico dos dados experimentais juntamente com as bandas de incerteza denotadas por QCD+ e QCD- .

imação de 2-loops temos um acoplamento que não tem uma discrepância muito grande em relação às ordens maiores de aproximação (no caso de 2-loops, seriam as ordens de 3-loops e 4-loops).

Neste capítulo, exploramos os experimentos que nos fornecem até agora as medidas mais precisas para a obtenção do acoplamento  $\alpha_S$  na escala de referência  $\mu_0$ . Ao começo, introduzimos como foi feita a média global de  $\alpha_S(\mu_0)$  a partir de equações de ordem 4-loops para  $\alpha_S(\mu)$  (até termo de  $\beta_3$ ) e a partir de vários experimentos. Ao final, mostramos o ajuste que é feito ao considerarmos correções de 1-loop (termo de  $\beta_0$ ) a  $\alpha_S(\mu)$  e apenas quatro experimentos no intervalo de  $n_f = 5$  sabores.

## 8 *Conclusão*

O objetivo desta monografia é analisar a origem da dependência de escala de energia na constante de acoplamento da interação forte, dada teoricamente pela QCD. Iniciamos com algum detalhamento na QED, analisando a determinação de seu acoplamento, passando pelas técnicas de renormalização necessárias para a interpretação física dos processos envolvidos nesta TQC pioneira. O caráter não-Abeliano da QCD introduz termos adicionais no acoplamento, que foram estudados em certo detalhe nos capítulos finais.

Optamos por introduzir o tema da renormalização no primeiro capítulo, antes de realmente efetuarmos o processo de renormalização, propriamente dito, no capítulo subsequente. A linha do tempo histórica desde a construção das TQC's até a lapidação da renormalização dentro do escopo das mesmas está exposta. Assim, a familiarização com o assunto se tornaria peça importante do processo de entendimento deste polêmico tema que fez e ainda faz parte de discussões sobre a validade das teorias quânticas de campos.

Também vimos, dentro da exposição sobre a QED em *Obtenção do acoplamento running na QED*, que não haveria maneira de renormalizarmos a teoria via redefinição de parâmetros, como a massa e a carga de partículas, se não existissem métodos de regularização que possibilitam a interpretação das integrais que geram infinitos. Dentre os métodos de regularização citados, como o método de corte e a regularização de Pauli-Villars, o mais sistemático e, por isso, mais utilizado na história das TQC's foi a técnica da regularização dimensional.

E a parte mais importante do trabalho vem no último capítulo, que é a confirmação da previsão teórica do acoplamento da QCD a partir de dados experimentais vindos de aceleradores. Além disso, os fenômenos observacionais de confinamento e liberdade assintótica são evidenciados por causa da forma funcional do acoplamento em função da escala de energia do experimento. Ao fim, citamos a discrepância não negligenciável entre a média atual (2009) mais precisa do acoplamento forte a uma escala de referência  $\mu_0$  e o ajuste a partir da previsão teórica com correções de primeira ordem ao espalhamento de quarks, tema do capítulo *Obtenção do acoplamento running da QCD*.

## APÊNDICE A – Regras de Feynman para a QCD

Na série perturbativa da QCD, começa-se a perceber certas características das expressões nos termos da expansão, e podemos vincular tais expressões formadas por linhas externas (campos fantasma, de quark e de glúon), propagadores (também sendo dos três tipos citados) e também vértices correspondentes à interação entre estes campos. Ou seja, assim como na QED, podemos associar diagramas que ilustram estes termos na expansão perturbativa e formular regras a fim de que possamos de uma maneira prática calculá-los, portanto não teremos mais que apelar para a série perturbativa toda vez que quisermos calcular amplitudes relacionadas a processos reais. \* .

O lagrangiano total da QCD é dado por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_{i\mu}(x)) (\partial^\nu A_i^\mu(x)) \\ & + \bar{\psi}_a(x) [i\cancel{\partial} - m] \psi_a(x) \\ & + \partial_\mu \eta_i(x) \partial^\mu \tilde{\eta}_i(x) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -\frac{1}{2} g_S \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu (\lambda_j)_{ab} \psi_b(x) A_j^\mu(x) \\ & + g_S f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x) \\ & - \frac{1}{4} g_S^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) A_{l\mu}(x) A_{m\nu}(x) \\ & + g_S f_{ijk} (\partial_\mu \eta_i(x)) \tilde{\eta}_j(x) A_k^\mu(x) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

onde  $A_i^\mu$  denota a componente  $\mu$  do campo de glúon  $i$ ,  $\eta_i$  é o campo fantasma introduzido a fim de eliminar a polarização longitudinal dos glúons, que não tem massa. E  $\psi_a$  denota o campo relacionado ao quark de cor  $a$ , onde  $a$  pode ser  $r$ ,  $g$  ou  $b$ .

---

\*Este apêndice e seus resultados foram retirados de [53]

## A.0.1 Propagadores e vértices

Os propagadores dos três campos são montados a partir do lagrangiano livre  $\mathcal{L}_0$ , como na QED, resultando em:

*Glúon*

$$iD_{Fij}^{\mu\nu}(k) = i\delta_{ij}D_F^{\mu\nu}(k) = i\delta_{ij}\frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.4})$$

*Quark*

$$iS_{Fab}(p) = i\delta_{ab}S_F(p) = i\delta_{ab}\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (\text{A.5})$$

*Fantasma*

$$i\Delta_{Fij}(k) = i\delta_{ij}\Delta_F(k) = i\delta_{ij}\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad , \quad (\text{A.6})$$

onde os índices  $a, b$  denotam cores de quark (mais especificamente  $r, g, b$ ), e  $i, j$  denotam os oito campos de glúon  $A_i^\mu(x)$  juntamente com os seus oito campos fantasma  $\eta_i(x)$ . Eles estão ilustrados na Fig. A.1.

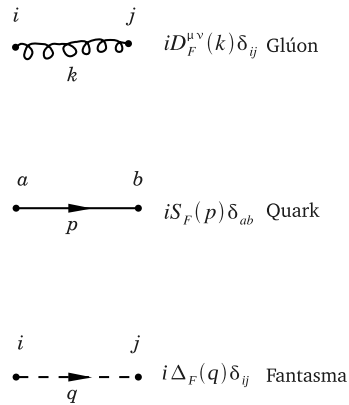


Figura A.1: Propagadores: glúon, ghost e quark

Agora consideremos os termos de vértice devidos à interação entre os três campos. Podemos ver a partir do lagrangiano interagente que pode haver interação quark-glúon, fantasma-glúon, tri-glúon e também tetra-glúon. Os termos de vértice relacionados aos mesmos são:



*Quark-glúon*

$$-ig_S \left( \frac{\lambda_i}{2} \right)_{cd} \gamma_\mu = -ig_S (T_i)_{cd} \gamma_\mu \quad , \quad (\text{A.7})$$

onde  $T_i \equiv \frac{\lambda_i}{2} = 1, 2, \dots, 8$  são as matrizes de cor - linearmente independentes entre si - da QCD, associadas à álgebra de Lie  $[T_i, T_j] = if_{ijk} T_k$  do grupo SU(3).  $f_{ijk}$  são as chamadas constantes de estrutura.

*Fantasma-glúon*

$$g_S f_{lmn} k_{2\mu} \quad (\text{A.8})$$

onde  $k_2$  é o momentum associado ao campo fantasma apontando na direção de entrada ao vértice.

*Tri-glúon*

$$g_S f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu} = g_S f_{lmn} [g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_\sigma + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_\nu + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_\tau] \quad (\text{A.9})$$

*Tetra-glúon*

$$-ig_S^2 F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} \quad , \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\begin{aligned} F_{lmno} V_{\lambda\mu\nu\sigma} &= f_{ilm} f_{ino} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) \\ &+ f_{imn} f_{ilo} (g_{\nu\lambda} g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma}) \\ &+ f_{iln} f_{imo} (g_{\lambda\mu} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu} g_{\lambda\sigma}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Os vértices correspondentes estão ilustrados na Fig. A.2.

Agora que já expomos os propagadores e termos de vértice, precisamos enunciar as regras de Feynman para a QCD.

## A.0.2 Regras de Feynman: QCD

1. Para cada vértice, escreva um fator correspondente - especificado pela Fig. (A.2).
2. Para cada linha de propagador, escreva um propagador correspondente - especificado pela Fig. (A.1).

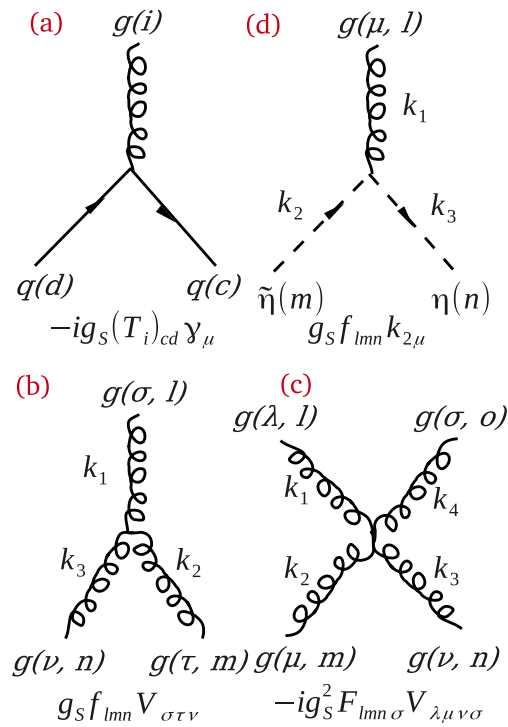


Figura A.2: Vértices: quark-glúon, fantasma-glúon, tri-glúon e tetra-glúon.

3. Para cada linha externa, escreva um dos fatores:

- (a) para cada quark inicial:  $u_{ar}(\vec{p})$
- (b) para cada quark final:  $\bar{u}_{ar}(\vec{p})$
- (c) para cada antiquark inicial:  $\bar{v}_{ar}(\vec{p})$
- (d) para cada antiquark final:  $v_{ar}(\vec{p})$
- (e) para cada glúon inicial:  $\epsilon_{ir\alpha}(\vec{k})$
- (f) para cada glúon final:  $\epsilon_{ir\alpha}^*(\vec{k})$

Aqui  $\vec{p}$  e  $\vec{k}$  denotam os trimomenta das partículas externas.  $r(= 1, 2)$  denota os estados de spin do quark ou antiquark, e também os estados de polarização do glúon. Somente glúons transversos são permitidos porque, na ausência de interações, o campo de glúon livre obedece exatamente as mesmas equações que o campo eletromagnético livre.  $a(= r, g, b)$  e  $i(= 1, 2, \dots, 8)$  especificam os estados de cor dos quarks e glúons.  $\alpha$  é o índice de Lorentz.

4. Para cada loop de quark fechado, devemos tomar o traço e multiplicar por um fator  $(-1)$ .

5. Os quadrimomenta associados com as linhas encontrando-se em cada vértice satisfazem conservação de energia-momentum. Para cada quadrimomentum  $q$ , que não é fixo por conservação de

energia-momentum, devemos tomar a integração  $(2\pi)^{-4} \int d^4q$ . Tal integração com respeito a uma variável de momentum interno  $q$  ocorre para cada loop fechado.

6. Para cada loop fantasma fechado, multiplique por um fator  $(-1)$ .
7. Para cada loop de glúon fechado, multiplique pelo apropriado **fator de simetria**  $S$ . Este fator de simetria está relacionado com as possibilidades de acoplamento dos campos de glúon  $A_i^\mu$  externos com os campos de glúon do lagrangiano interagente; como pode-se ver, à primeira vista, isto parece ser razoável pois há os termos de tri-glúon e tetra-glúon que poderiam ser contraídos de várias maneiras com os campos chegando ao vértice. Para a auto-energia, por exemplo, do glúon devida a um loop de glúon, devemos multiplicá-la por  $\frac{1}{2}$ .

## *Referências Bibliográficas*

- [1] M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, "On quantum mechanics II."em B. L. Van der Waerden *Sources of Quantum Mechanics*, Nova Iorque, Dover, 321 (1968).
- [2] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the emission and absorption of radiation."em *Proceedings of the Royal Society A* **114**, 243 (1927).
- [3] P. Jordan e E. Wigner, *Zeitschrift fur Physik* **47**, 631 (1928).
- [4] P. Jordan e W. Pauli, *Zeitschrift fur Physik* **47**, 151 (1928).
- [5] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 461 (1930).
- [6] V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **56**, 72 (1939).
- [7] V. Weisskopf, "The self-energy of the electron"em A. I. Miller *Early quantum electrodynamics: a source book*, Cambridge, Cambridge University Press, 157 (1994).
- [8] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 562 (1930).
- [9] P. A. M. Dirac, "The theory of the positron", em A. I. Miller *Early quantum electrodynamics: a source book*, Cambridge, Cambridge University Press, 136 (1944).
- [10] P. A. M. Dirac, "Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron."em A. I. Miller *Early quantum electrodynamics: a source book*, Cambridge, Cambridge University Press, 145 (1994).
- [11] W. Furry e J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245 (1934).
- [12] W. Heisenberg, "Remarks on the Dirac theory of the positron."em A. I. Miller *Early quantum electrodynamics: a source book*, Cambridge, Cambridge University Press, 169 (1964).
- [13] V. Weisskopf, "The electrodynamics of the vacuum based on the quantum theory of the electron"em A. I. Miller *Early quantum electrodynamics: a source book*, Cambridge, Cambridge University Press, 206 (1994).
- [14] H. Kramers, *Nuovo Cimento (Série antiga)* **15**, 108 (1938).
- [15] F. H. Combley, *Rep. Prog. Phys.* **42**, 1889 (1979).
- [16] W. E. Lamb e R. C. Retherford, *Phys. Rev.* **72**, 241 (1947).
- [17] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947).
- [18] P. J. Mohr, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1050 (1975).
- [19] D. A. Andrews e G. Newton, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1254 (1976).
- [20] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948).
- [21] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 651 (1949).
- [22] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **76**, 190 (1949).
- [23] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **74**, 939 (1948).
- [24] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **74**, 1430 (1948).
- [25] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 769 (1949).

- [26] R. P. Feynman, Phys. Rev **76**, 749 (1949).
- [27] S. Tomonaga, Progress of Theoretical Physics **1, 2**, 27 (1946).
- [28] S. Tomonaga, Phys. Rev. **74**, 224 (1948).
- [29] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).
- [30] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [31] C. N. Yang e R. L. Mills, "Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance" em L. O'Rai feartaigh *The dawning of gauge theory*, Princeton, Princeton University Press, 186 (1997).
- [32] R. Shaw, "Invariance under general isotopic spin transformations." em L. O'Rai feartaigh *The dawning of gauge theory*, Princeton, Princeton University Press, 200 (1997).
- [33] R. Utiyama, "Invariant theoretical interpretation of interaction" em L. O'Rai feartaigh *The dawning of gauge theory*, Princeton, Princeton University Press, 213 (1977).
- [34] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [35] A. Salam e J. C. Ward, Phys. Lett. **13**, 168 (1964).
- [36] J. Goldstone, Nuovo Cimento (Nova série) **19**, 154 (1961).
- [37] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [38] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [39] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [40] P. W. Higgs, Phys. Rev. **145, 4**, 1156 (1966).
- [41] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19, 21**, 1264 (1967).
- [42] A. Salam, "Weak and electromagnetic interactions" em *Selected papers of Abdus Salam (with commentary)*, Singapura, World Scientific, 244 (1994).
- [43] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971).
- [44] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B **35**, 167 (1971).
- [45] F. J. Hasert et al., Phys. Lett. B **46**, 138 (1973).
- [46] G. Arnison et al., Phys. Lett. B **122**, 103 (1983).
- [47] G. Arnison et al., Phys. Lett. B **126**, 398 (1983).
- [48] S. Weinberg, Daedalus **106, 2**, 17 (1977).
- [49] S. S. Schweber *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton, Princeton University Press, 1994.
- [50] T. Y. Cao *Conceptual developments of 20th century field theories*, Cambridge University Press, 1983.
- [51] R. P. Feynman, Science **153, 3737** 699 (1966).
- [52] P. A. M. Dirac, "The origin of quantum field theory.", em L. M. Brown e L. Hoddeson *The birth of particle physics*, Cambridge, Cambridge University Press, 39 (1983).
- [53] F. Mandl & G. Shaw *Quantum Field Theory*, 2nd ed., John Wiley and Sons Ltd., 2010.
- [54] J. J. Sakurai *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [55] W. Greiner & J. Reinhard *Quantum Electrodynamics*, 3rd ed. , Springer-Verlag, 2003.
- [56] S. Bethke, Eur. Phys. J. C **64**:689-703 (2009), arXiv:0908.1135v2 [hep-ph].

- [57] T. Sjostrand, *Comput. Phys. Commun.* **27**, 243 (1982).
- [58] T. Sjostrand, S. Mrenna, P. Skands, *Comput. Phys. Commun.* **178**, 852 (2008), arXiv:0710.3820 [hep-ph].
- [59] Yu.L. Dokshitzer, A. Lucenti, G. Marchesini, G. P. Salam, *J. High Energy Phys.* **05**, 003 (1998).
- [60] P. Weisz, *Nucl. Phys., B (Proc. Suppl.)* **47**, 71 (1996), hep-lat/9511017.
- [61] S. Durr et al., *Science* **322**, 1224 (2008), arXiv:0906.3599 [hep-lat].
- [62] C. T. H. Davies et al. (HPQCD Collaboration), *Phys. Rev. D* **78**, 114507 (2008), arXiv:0807.1687 [hep-lat].
- [63] S. Narison, *Phys. Lett. B* **673**, 30 (2009), arXiv:0901.3823 [hep-ph].
- [64] K. Ackerstaff et al. (OPAL Collaboration), *Eur. Phys. J. C.* **7**, 571 (1999), hep-ex/9808019 .
- [65] S. Schael et al. (ALEPH Collaboration), *Phys. Rep.* **421**, 191 (2005), arXiv:hep-ex/0506072v1 .
- [66] B. Aubert et al. (BABAR Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008), arXiv:0707.2981 [hep-ex].
- [67] D. Besson et al. (CLEO Collaboration), *Phys. Rev.* **74**, 012003 (2006), hep-ex/0512061 .
- [68] N. Brambilla et al. (CLEO Collaboration), *Phys. Rev. D* **75**, 074014 (2007), hep-ph/0702079 .
- [69] J. Blümlein, H. Böttcher, A. Guffanti, *Nucl. Phys. B* **774**, 182 (2007), hep-ph/0607200 .
- [70] C. Glasman, *J. Phys. Conf. Ser.* **110**, 022013 (2008), arXiv:0709.4426 .
- [71] S. Chekanov et al. (ZEUS Collaboration), *Phys. Lett. B* **649**, 12 (2007), hep-ex/0701039 .
- [72] A. Aktas et al. (H1 Collaboration), *Phys. Lett. B* **653**, 134 (2007), arXiv:0706.3722 [hep-ex].
- [73] F. D. Aaron et al. (H1 Collaboration), arXiv:0904.3870 [hep-ex].
- [74] G. Dissertori et al. *J. High Energy Phys.* **0802**, 040 (2008), arXiv:0712.0327 [hep-ph].
- [75] G. Dissertori, A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann, E. W. N. Glover, G. Heinrich, G. Luisoni, H. Stenzel, *J. High Energy Phys.* **0908**:036 (2009), arXiv:0906.3436v1 [hep-ph].
- [76] S. Bethke, S. Kluth, C. Pahl, J. Schieck and JADE collaboration, *Eur. Phys. J. C* **64**: 351-360 (2009), arXiv:0810.1389v2 [hep-ex].
- [77] H. Flücher et al., *Eur. Phys. J. C* **60**, 543 (2009), arXiv:0811.0009 [hep-ph].
- [78] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein *Quantum Chromodynamics*, 3rd ed., Springer-Verlag, 2007.
- [79] D. Griffiths *Introduction to Elementary Particles*, 2nd ed., Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004.
- [80] V. A. Bezerra, *Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: O caso da renormalização na teoria quântica do campo*, *Scientiae Studia* vol.1 (nº 2):151-181 (2003).
- [81] R. D. Klauber <http://www.quantumfieldtheory.info/>