

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

RESPOSTAS PERIÓDICAS EM SISTEMAS LINEARES E
FRACAMENTE NÃO LINEARES NÃO RESSONANTES E
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS ROTATIVOS
COM O USO DA BASE DINÂMICA

por

Antonio Carlos Lyrio Bidel

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Junho de 2003.

**RESPOSTAS PERIÓDICAS EM SISTEMAS LINEARES E
FRACAMENTE NÃO LINEARES NÃO RESSONANTES E
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS ROTATIVOS
COM O USO DA BASE DINÂMICA**

por

Antonio Carlos Lyrio Bidel

Mestre em Matemática Aplicada

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeysen

Aprovada por:

Prof. Dr. Germán Ramón Canahualpa Suazo - UFPEL

Prof. Dr. José Manoel Balthazar - UNESP/RC

Prof. Dr. Alberto Tamagna - PROMEC/UFRGS

Prof. Phd. Jun Sergio Ono Fonseca

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 20 de Junho de 2003.

À Carla e a Rafaela

AGRADECIMENTOS

Ao final desta importante etapa de vida faz-se necessário o meu reconhecimento, em forma de agradecimento, àqueles que de uma forma ou outra contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela oportunidade, aos docentes pelas contribuições e aos funcionários pela presteza.

Ao Departamento de Matemática da UFSM, pela liberação durante a realização deste trabalho.

À CAPES pela bolsa de estudos.

Ao prof. Phd. Julio C. R. Claeysen, pela amizade, incentivo e acima de tudo por sua competente orientação. Também pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos amores de minha vida Carla e Rafaela. Particularmente a minha amada esposa Carla. Pelo amor, companheirismo, paciência e compreensão dedicados durante esse tempo. Por ter me dado o maior presente, a maior alegria de minha vida, a nossa amada filha Rafaela.

A Dona Beta, minha sogra. Pela compreensão, pelo apoio e pelo carinho dedicado à mim, a Carla e a Rafaela.

Aos colegas do PROMEC e da PPGMAP pela ótima convivência e pelas frutíferas discussões acadêmicas, o meu muito obrigado a todos indistintamente. Particularmente aos colegas Sânzara e Cristiano pela ajuda.

Aos queridos pais Milton e Ady. A vocês que com amor deram-me a vida, com carinho guiaram meus passos e com firmeza forjaram meu caráter. Durante a maior parte destes 4 anos estiveram ao meu lado, torcendo e incentivando. Partiram praticamente juntos deixando, além de muita saudade, a certeza de que devemos lutar pelos nossos sonhos. Infelizmente não posso agradecer-lhes pessoalmente mas tenho certeza que este muito obrigado os encontrará na eternidade - obrigado amados e queridos pais.

Finalmente à Deus pelo refúgio e pela força nas horas difíceis.

RESUMO

Este trabalho visa realizar o estudo do comportamento dinâmico de um eixo rotor flexível, modelado segundo a teoria de Euler-Bernoulli e caracterizar as respostas periódicas de sistemas LTI (sistemas lineares invariantes no tempo) e sistemas fracamente não lineares de ordem arbitrária. Para tanto, é utilizada a base dinâmica gerada pela resposta impulso ou solução fundamental.

O comportamento dinâmico de um eixo rotor flexível foi discutido em termos da função de Green espacial e calculada de maneira não-modal. Foi realizado um estudo do problema de autovalor para o caso de um eixo rotor biapoado. As frequências são obtidas e os modos escritos em termos da base dinâmica e da velocidade de rotação.

As respostas periódicas de sistemas LTI, utilizadas nas aproximações com sistemas fracamente não lineares, são obtidas, independentemente da ordem do sistema, como um operador integral onde o núcleo é a função de Green T -periódica. Esta função é caracterizada em termos das propriedades de continuidade, periodicidade e salto da função de Green T -periódica, e da base dinâmica.

Simulações foram realizadas para sistemas concentrados, matriciais e escalares, com o objetivo de mostrar a validade da metodologia desenvolvida com as propriedades da função de Green T -periódica. Foi abordado um modelo não-linear para uma centrífuga utilizada na indústria textil [Starzinski, 1977].

ABSTRACT

TITLE: “PERIODIC RESPONSES IN NON-CRITICAL LINEAR AND WEAKLY NON-LINEAR AND DYNAMIC BEHAVIOUR OF ROTATIVE SYSTEMS WITH THE USE OF THE DYNAMICAL BASIS”

This work seeks to study of the dynamic behavior of an axis flexible rotor, modeled according to the theory of Euler-Bernoulli and to characterize the periodic responses of systems LTI and weakly non-linear systems of order arbitrary. It is employed the dynamical basis generated by the impulse response or fundamental solution.

The dynamic behavior of an axis flexible rotor was discussed in terms of the spatial Green function and calculated in a non-modal way. It was considered the eigenvalue problem for the case of an an supported rotor axis. The frequencies were obtained and the modes written in terms of dynamical basis and the rotation speed.

The periodic responses of LTI systems, used in the approximations with weakly non-linear systems, they are obtained, independently of the order of the system, as an integral operator where the kernel is a T -periodic Green function. This function is characterized in terms of the continuity properties, periodicity and jump of the function of Green T -periodic, and of the dynamical basis.

Numerical simulations were done concentrated systems, matrix and scalar ones, with the objective of showing the validity of the methodology developed thorough the properties of the T -periodic Green functions. A non-linear model was considered for a centrifuge used in the textile industry.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	EIXOS ROTORES FLEXÍVEIS	7
2.1	Eixos Rotores Flexíveis Uniformes	8
2.2	Cálculo Não-Modal da Função de Green	18
2.2.1	O Caso Biapoiado	21
2.2.2	Caso Fixo-Apoiado	23
2.3	Velocidades Críticas: Problema de autovalor	24
2.3.1	Resposta ao Desbalanço	31
2.4	Simulações	33
3	OSCILAÇÕES EM SISTEMAS LINEARES NÃO RESSONANTES DE PRIMEIRA ORDEM	40
3.1	Caracterização da Função de Green T -Periódica em Sistemas de 1ª Ordem	40
3.1.1	Condição Inicial da Solução Periódica	45
3.2	Simulações	46
4	A FUNÇÃO DE GREEN T- PERIÓDICA EM SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM	56
4.1	Base Dinâmica	57
4.2	Obtenção da Função de Green T - Periódica	60

4.2.1	Caso Amortecido	60
4.2.2	Amortecimento do tipo Rayleigh	65
4.2.3	Caso Geral	69
4.3	Simulações	73
5	A RESPOSTA PERIÓDICA EM SISTEMAS DE ORDEM N	88
5.1	Caso Escalar de Ordem N	88
5.1.1	Simulações	91
5.2	Sistema Matricial de Ordem N	94
5.3	Condições Iniciais da Solução Periódica	97
6	O PROBLEMA DA CENTRÍFUGA	99
6.1	Equação do Movimento	100
6.2	O Método de Poincaré	103
6.3	Simulações	105
7	CONCLUSÕES	117
APÊNDICE A	INVERSIBILIDADE DE $I - E^{TA}$	132
APÊNDICE B	GRÁFICOS DAS COMPONENTES DA MATRIZ DE GREEN T-PERIÓDICA	133

LISTA DE SÍMBOLOS

A	área da seção transversal
\mathbf{A}, \mathbf{A}_i	contantes matriciais de ordem n
\mathbf{A}_{ik}	elementos da matriz de contorno
\mathbb{B}	matriz de contorno
\mathbf{B}_{ik}	elementos da matriz de contorno
\mathbf{B}_i	incógnita matricial
\mathbf{b}_i	coeficientes matriciais
b_i	escalares
\mathbf{C}, \mathcal{C}	coeficiente de amortecimento
\mathbf{C}_1	incógnita matricial
c_ω, c_β	coeficientes de amortecimento
\mathbf{D}	matriz de amortecimento viscoso
\mathbf{D}_1	incógnita matricial
e	excentricidade
E	módulo de elasticidade de Young
EI	rigidez flexural
$\mathbf{f}(t), \mathbf{F}(t, z)$	vetor de forças externas
$f_x(t, z), f_y(t, z)$	componenetes do vetor forças externas
$\tilde{F}(s, z)$	transformada de Laplace de $\mathbf{F}(t, z)$
$\mathcal{F}(t), \mathcal{F}_i(t)$	forças externas
$\mathbf{G}, \mathcal{G}, \mathbb{G}$	coeficiente giroscópico
$\mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \epsilon)$	vetor das não linearidade
$\mathbf{h}(t)$	operador resposta impulso
$\mathbf{h}(t)$	resposta impulso ou solução fundamental
$\mathbf{h}(z)$	resposta impulso estacionária
$\dot{\mathbf{h}}(t)$	derivada temporal do operador resposta impulso
$\mathbf{h}'(z)$	derivada espacial de $\mathbf{h}(z)$

$\mathbf{h}(t, z, \xi)$	função de Green temporal
$\mathbf{h}_i(t)$	componentes da base dinâmica matricial normalizada
$\mathbf{h}_i(z)$	componentes da base dinâmica espacial
\mathbf{h}_k	resposta impulso discreta
$\mathbf{H}(i\omega)$	resposta em frequência
i	unidade complexa
$\mathbf{h}_i(z)$	componentes da base dinâmica espacial
$\mathbf{H}(i\omega)$	resposta em frequência
i	unidade complexa
\mathbf{I}	matriz identidade
I_{xx}, I_{yy}	momentos de inércia
$\mathbf{J}_i^u, \mathbf{J}_i^v$	formas bilineares dependentes de condições de contorno não homogêneas
$K, \mathcal{K}, \mathbb{K}$	coeficiente de rigidez
\mathbb{L}	operador diferencial funcional
L	comprimento do eixo
m	massa
$\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mathbb{M}$	matriz de massa
\mathbf{N}	matriz circulatória
0	matriz nula
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$	incógnitas matriciais
$\mathbf{P}_d, \mathbf{Q}_d, \mathbf{R}_d, \mathbf{S}_d$	incógnitas matriciais do problema desacoplado
p, q, r	variações dos ângulos de Euler
\mathbf{Q}	carga externa
$\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$	condições iniciais
\mathbf{q}^i	correções de ordem i
T	período
t	tempo
$\mathbf{U}(t, z)$	vetor deslocamento
$\tilde{\mathbf{U}}(s, z)$	transformada de Laplace de $\mathbf{U}(t, z)$
$\tilde{u}(s, z)$	transformada de Laplace de $u(t, z)$

$\mathbf{U}_0(z)$	vetor deslocamento inicial
$\dot{\mathbf{U}}_0(z)$	vetor velocidade inicial
$v(t, z)$	deslocamento transversal na direção y
v	vetor velocidade
$\tilde{v}(s, z)$	transformada de Laplace de $v(t, z)$
ω	freqüência
Y_c, Z_c	deslocamentos do centro geométrico
$W(z)$	wronskiano
α	ângulo de ataque
α_1, β_1	ângulos de résal
β	ângulo de deslizamento lateral
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	possíveis rotações de um rotor
β_Y, β_Z	ângulos entre o eixo X e as projeções do eixo X sobre os planos XZ e XY
ϵ	parâmetro dependente da amplitude de vibração
θ	ângulo de inclinação longitudinal
φ	ângulo de giro
ψ	ângulo de rolamento longitudinal
$\kappa_{\omega\omega}, \kappa_{\omega\beta}, \kappa_{\beta\beta}$	coeficientes de rigidez
κ_0, κ_1	momentos de inércia de massa do rotor
Φ, Ψ	matrizes modais
ρ	densidade volumétrica
ξ	razão de amortecimento matricial
Ω	velocidade de rotação
$\mathbf{\Omega}$	matriz espectral
$\mathbf{\Gamma}(t)$	função de Green T -periódica
$\mathbf{\Gamma}^k(t)$	derivada k -ésima de $\mathbf{\Gamma}(t)$
$\mathbf{\Gamma}_{ij}(t)$	componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$
$\chi(t)$	vetor de estado
χ_0, χ_1, χ_2	coeficientes das forças dissipativas externas

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Sistema rotativo	7
Figura 2.2	Eixo rotor flexível	8
Figura 2.3	Deslocamento para $\omega=100Hz$ de um eixo biapoiado	37
Figura 2.4	Deslocamento para $\omega=100Hz$ de um eixo fixo-apoiado	38
Figura 3.1	Forças atuantes na aeronave	46
Figura 3.2	- Gráficos das curvas $Re(\mathcal{X}) \times Im(\mathcal{X})$ para t de 0 a $4T$	52
Figura 3.3	- Gráficos da amplitude e da fase para $v(t)$	52
Figura 4.1	Possíveis rotações do rotor alinhado com o eixo flexível e com velocidade de rotação ω	74
Figura 6.1	máquina centrífuga	99

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros físicos do eixo rotor	30
Tabela 2.2	Quadrado das frequências do eixo biapoiado	30
Tabela 2.3	Valores dos parâmetros físicos	34
Tabela 3.1	- Componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$	49
Tabela 3.2	- Componentes da diagonal de $\mathbf{\Gamma}(t)$	50
Tabela 3.3	- Gráficos comparativos das partes reais de $\mathcal{X}(t)$	53
Tabela 3.4	- Gráficos comparativos das partes imaginárias de $\mathcal{X}(t)$	54
Tabela 4.1	Valores dos parâmetros físicos para o rotor	76
Tabela 4.2	- Componentes da 1ª linha de $\mathbf{\Gamma}(t)$	77
Tabela 4.3	- Componentes da 2ª linha de $\mathbf{\Gamma}(t)$	78
Tabela 4.4	- Componentes da 3ª linha de $\mathbf{\Gamma}(t)$	79
Tabela 4.5	- Componentes da 4ª linha de $\mathbf{\Gamma}(t)$	80
Tabela 4.6	- Componentes da diagonal de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	81
Tabela 4.7	- Componentes fora da diagonal de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	82
Tabela 4.8	- Componentes fora da diagonal de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	83
Tabela 4.9	- Componentes fora da diagonal de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	84
Tabela 4.10	- Gráficos comparativos da parte real de $\mathbf{q}(t)$	85
Tabela 4.11	- Gráficos comparativos das partes imaginárias de $\mathbf{q}(t)$	86
Tabela 5.1	- Gráficos de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e suas derivadas	92

Tabela 5.2	- Gráficos das partes real e imaginária de $q(t)$	93
Tabela 6.1	- Valores dos parâmetros físicos para a centrífuga	105
Tabela 6.2	- Componentes da parte real de $\mathbf{h}(t)$	106
Tabela 6.3	- Componentes da parte imaginária de $\mathbf{h}(t)$	107
Tabela 6.4	- Componentes da parte real de $\mathbf{\Gamma}(t)$	108
Tabela 6.5	- Componentes da parte imaginária de $\mathbf{\Gamma}(t)$	109
Tabela 6.6	- Componentes da parte real de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	110
Tabela 6.7	- Componentes da parte imaginária de $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$	111
Tabela 6.8	- Comparação entre as partes reais das componentes das respostas obtidas com a desenvolvida e a resposta em frequência	113
Tabela 6.9	- Comparação entre as partes imaginárias das componentes das respostas obtidas com a resposta em frequência	113
Tabela 6.10	- Comparação entre as partes reais das componentes das correções de 1ª ordem obtidas com (6.16) e (6.20)	114
Tabela 6.11	- Comparação entre as partes imaginárias das componentes das correções de 1ª ordem obtidas com (6.16) e (6.20)	114
Tabela 6.12	- Comparação entre as partes reais das componentes das correções de 2ª ordem obtidas com (6.17) e (6.21)	115
Tabela 6.13	- Comparação entre as partes imaginárias das componentes das correções de 2ª ordem obtidas com (6.17) e (6.21)	115
Tabela 6.14	- Comparação entre as partes reais das componentes da resposta perturbada, dada por (6.18), com $\mathbf{q}^{(0)}$	116
Tabela 6.15	- Comparação entre as partes imaginárias das componentes da resposta perturbada, dada por (6.18), com $\mathbf{q}^{(0)}$	116

Tabela B.1	- Componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$	133
Tabela B.2	- Componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$	134
Tabela B.3	- Componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$	135
Tabela B.4	- Componentes de $\mathbf{\Gamma}(t)$	136

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é caracterizar a resposta periódica de sistemas LTI (sistemas lineares invariantes no tempo) e sistemas fracamente não lineares de ordem arbitrária bem como o estudo do comportamento dinâmico de um eixo rotor flexível modelado segundo a teoria de Euler-Bernoulli com condições de contorno genéricas e desacopladas. Para tanto, é utilizada a base dinâmica ge-rada pela resposta impulso ou solução fundamental [Claeyssen, 1990], [Claeyssen e Tsukasan ,1999], [Claeyssen, Gallicchio e Tamagna, 2001], [Claeyssen, Canahualpa e Jung, 1995], [Claeyssen, Moraes e Copetti, 2002].

O estudo da resposta forçada em sistemas dinâmicos, concentrados e distribuídos, é um assunto de permanente interesse na engenharia e na matemática aplicada. Por exemplo na análise e desenho de sistemas mecânicos tais como automóveis, aeronaves dentre outros, é muito importante conhecer a resposta destes sistemas em condições de carregamento dinâmico. Por outro lado, considerando que todo corpo vibra naturalmente em torno de uma posição de equilíbrio, é essencial o estudo das vibrações. Neste sentido existe uma vasta literatura sobre tema [Meirovitch, 1980, 1967, 1997], [Ginsberg, 2001].

Muitas vezes o carregamento dinâmico é introduzido pelo próprio sistema. Esta situação é comumente encontrada na análise dinâmica de sistemas rotativos sendo ocasionada pelo desbalanço residual do sistema, fato este comprovado experimentalmente [Starzinski, 1977].

Sistemas rotativos tem ampla aplicação na área industrial tais como, motores de combustão interna, turbo geradores, compressores centrífugos e recíprocos com a finalidade de transmitir potência, turbinas a gás e a vapor, fresadeiras, máquinas de moagem e máquinas retificadoras. Do ponto de vista prático pode-se citar as turbinas, presentes em aeronaves supersônicas com o objetivo de propulsão ou nas hidrelétricas com a finalidade de gerar energia elétrica. Tais sistemas são compostos por um conjunto de componentes mecânicos, concentrados e distribuídos tais como eixos rotativos flexíveis, discos rígidos, suportes (mancais) e engrenagens. Mais geralmente, o termo rotor é usado para designar os componentes rotativos em turbomáquinas [Vance, 1987].

A questão central, e de grande interesse prático no estudo de sistemas rotativos, é o seu comportamento dinâmico. Neste sentido algumas questões devem ser analisadas com a finalidade de manter o bom funcionamento do equipamento rotativo e, detectando-se problemas, propor modificações no projeto inicial do equipamento. Tais questões são enumeradas a seguir [Toresan, 2001], [Vance, 1987].

- Determinar as frequências naturais e os modos de vibração associados.
- Determinar as velocidades críticas e as frequências de instabilidade dinâmica do sistema.
- Determinar amplitudes das vibrações síncronas causadas pelo desbalanço do sistema rotor.
- Otimização do sistema para atingir a performance desejada.

Com a finalidade de estudar o comportamento dinâmico de sistemas rotativos, muitas pesquisas têm sido desenvolvidas utilizando tanto técnicas analíticas como numérico-experimentais. No estudo da vibração de eixos flexíveis, vários métodos numéricos tem sido usados tais como, Rayleigh-Ritz [Lalanne, 1990], método direto de rigidez [Eherich, 1992] método dos modos assumidos [Lee, 1995], método de Galerkin [Yim, 1986], [Yun, 1993], método dos elementos finitos [Nelson, 1976], [Kang, 1992] e método das matrizes de transferência [Kramer, 1993]. Recentemente [Toresan, 2001] propôs uma metodologia numérico-experimental visando a análise de eixos rotativos de transmissão utilizando o método das matrizes de transferência.

Paralelamente aos métodos numéricos, técnicas analíticas tem sido desenvolvidas. O método clássico dos valores de contorno é utilizado no estudo das frequências naturais de uma viga de Timoshenko em rotação [Huang, 1967], [Zu, 1992] e no estudo das velocidades críticas de eixos rotativos flexíveis [Huang, 1967], [Eshleman, 1969]. Utilizando a análise modal generalizada e, baseado na formulação de espaço de estado, [Lee, 1988] propõe uma solução analítica para a resposta transiente de eixos rotativos flexíveis considerando vários tipos de carregamento. Além disso, utilizando o método dos deslocamentos generalizados

estimou as autosoluções de uma viga seccionada (steeped) em rotação. Utilizando o método das matrizes de transferência com elementos distribuídos [Lee, 1991] para uma viga rotativa de Timoshenko contendo vários discos rígidos e finos. Utilizando também o método das matrizes de transferência, [Kang, 1997] faz um estudo sobre a instabilidade de um sistema rotor-suporte assimétricos, isto é, eixo e suporte não-axisimétrico.

Utilizando o método das funções de transferência distribuídas (**DTFS**), conceito introduzido por [Butkovskiy, 1983], [Fang, 1998] com a finalidade de analisar dinamicamente sistemas rotativos, obtém uma solução analítica para o sistema. A idéia é decompor o sistema rotativo em certo número de componentes concentradas e distribuídas conectadas por nós. A resposta de cada componente é obtida através da função de transferência e em termos dos deslocamentos nodais. Após, estes componentes são conectados impondo-se compatibilidade de deslocamentos e fazendo-se balanço de forças nos nós, obtendo-se uma equação global de equilíbrio dinâmico. A partir desta, obtém a resposta do sistema rotativo ao desbalanço bem como as velocidades críticas.

Em [Lee, 1996] é feito um estudo sobre a estabilidade dinâmica de vigas uniformes com a seção transversal não simétrica para diferentes condições de contorno. O modelo de Euler-Bernoulli é considerado e as velocidades críticas são obtidas. Ainda são estudados os efeitos do raio de aspecto sobre a estabilidade da viga para diferentes condições de contorno.

[Parker, 1998] a partir da equação de um sistema giroscópico distribuído faz um estudo, utilizando uma técnica de perturbação, sobre a estabilidade do sistema nas vizinhança das velocidades, crítica e zero. São apresentados exemplos de uma viga tensionada em movimento axial, uma mola tensionada também em movimento axial e um corpo rígido em rotação. Como resultado apresentado, a solução é exata para os dois primeiros exemplos estudados.

Em [Tan, 1995] é apresentado um método sistemático para a análise de eixos com descontinuidade geométrica para diferentes condições de contorno. Os modelos de Rayleigh a Timoshenko são considerados na análise. Efeitos dos parâmetros de forma do eixo sobre a resposta são examinadas e discutidas. Mostra-se que, para diferentes condições

de contorno, os modos precessionais, retrógrados e avançados tem diferentes formas para um eixo simplesmente apoiado e que as diferenças entre estes modos acentuam-se com o aumento da velocidade de rotação do eixo.

Em [Hong, 1997] é apresentado um método para a resposta desbalanceada de sistemas rotor-suporte de vários comprimentos. Um esquema melhorado sintetiza a subestrutura é introduzido melhorando o cálculo e tornando possível o cálculo da resposta desbalanceada do sistema pelo acoplamento das resposta desbalanceada das subestruturas. Tal método não causa erros e reduz drasticamente o tempo computacional (tempo de máquina).

[Castilho, 1998] estudou os problemas dinâmicos causados pelo aumento da velocidade de rotação em um conjunto turbina-compressor. Baseado no método dos elementos finitos obteve uma equação discretizada com a finalidade de determinar as velocidades críticas em torção do conjunto, as instabilidades e a resposta desbalanceada em flexão.

Para sistemas de primeira ordem, segundo [Godunov, 1997], [Daleckii e Krein, 1974], [Hale, 1969] a resposta periódica devido à uma carga periódica de mesmo período é dada por uma transformada integral com núcleo sendo a função de Green periódica. Isto é considerado para sistemas conservativos de segunda ordem por [Starzinski, 1977]. Neste trabalho, a função de Green para respostas periódicas será caracterizada, para sistemas de ordem arbitrária, utilizando-se propriedades da função de Green tais como periodicidade e continuidade e com o uso de uma base matricial adequada de soluções do problema. Como consequência disto a resposta periódica será perfeitamente caracterizada em termos desta base matricial de soluções.

No capítulo 2 é considerado um eixo rotor flexível modelado segundo a teoria de Euler-Bernoulli com condições de contorno genéricas desacopladas. O conjunto de equações que governam os deslocamentos transversais do eixo são acopladas resultando num sistema de equações de 2ª ordem onde as matrizes massa, giroscópica e rigidez são formadas por operadores diferenciais lineares espaciais. O método operacional é utilizado e, considerando a comutatividade dos operadores envolvidos, o sistema é desacoplado em dois problemas de contorno espaciais. Utilizando uma adequada mudança de variável, obtém-se uma fórmula fechada para a resposta em frequência em termos da função de Green espacial. É feito um

estudo sobre as velocidades críticas e a resposta ao desbalanço para os casos biapoiado e fixo apoiado.

Considerando que muitas vezes a redução ao espaço de estado é utilizada nas aplicações, no capítulo 3 obtém-se a caracterização da resposta periódica para sistemas matriciais de 1ª ordem concentrados em termos de uma solução fundamental normalizada. A função de Green é obtida com o uso de suas propriedades, quais sejam, periodicidade e continuidade e de propriedades de semi-grupo [Claeyssen e Schuchmann, 1997], [Claeyssen et al., 1997]. Ao final do capítulo são apresentados os resultados das simulações referentes ao comportamento dinâmico de aeronaves rígidas sob a ação de forças oscilatórias [Moraes 2002]. São mostrados os gráficos das componentes da função de Green periódica e das componentes da resposta periódica sob a ação de cargas oscilatórias sendo que estes últimos comparados com a resposta em frequência.

No capítulo 4 é obtida a caracterização da resposta periódica para sistemas matriciais concentrados de 2ª ordem, de forma direta, usando a mesma metodologia aplicada à sistemas de 1ª ordem. São estudados dois casos particulares: O caso conservativo, devido a sua importância no estudo do comportamento dinâmico de estruturas e o caso de sistemas com amortecimento do tipo Rayleigh, que apesar de ser uma conveniente simplificação matemática tem grande importância teórica no estudo de sistemas amortecidos. Para o caso conservativo, na obtenção da função de Green periódica são utilizadas, além de suas propriedades, propriedades de semi-grupo. Para sistemas com amortecimento do tipo Rayleigh utiliza-se a propriedade dos modos normais para obtenção de uma forma desacoplada para a função de Green periódica. São apresentados os resultados das simulações referentes à um eixo rotor flexível colocado sobre suportes rígidos. Para tal considera-se o modelo de Stodolla-Green.

No capítulo 5 as idéias apresentadas nos capítulos anteriores são generalizadas para sistemas LTI, escalares e matriciais, de ordem N . São apresentados os resultados das simulações para um sistema escalar de ordem 6.

No capítulo 6 apresenta-se o modelo de uma máquina centrífuga bastante utilizada na indústria têxtil sendo que as equações matriciais que regem o seu movimento são

fracamente não lineares [Starzinski, 1977]. Considera-se aqui que as partes, linear e não linear, da carga são periódicas de mesmo período. O método de Poincaré é aplicado e as correções de ordem 0, 1 e 2 obtidas com a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores sendo comparadas graficamente com resposta em frequência. São apresentados os gráficos das componentes, da função de Green periódica e da expansão resultante do método de Poincaré, para alguns valores do parâmetro ϵ .

Por fim, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões pertinentes e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 EIXOS ROTORES FLEXÍVEIS

Muitos sistemas mecânicos encontrados na prática tais como turbinas, máquinas de laminação e polimento, turbo geradores, motores de combustão interna, retificadoras e fresadeiras, são compostos por um conjunto de componentes mecânicos, como por exemplo, eixos rotativos flexíveis, discos rígidos, mancais e engrenagens. A figura (2.1) mostra esquematicamente um sistema rotativo [Fang, 1998].

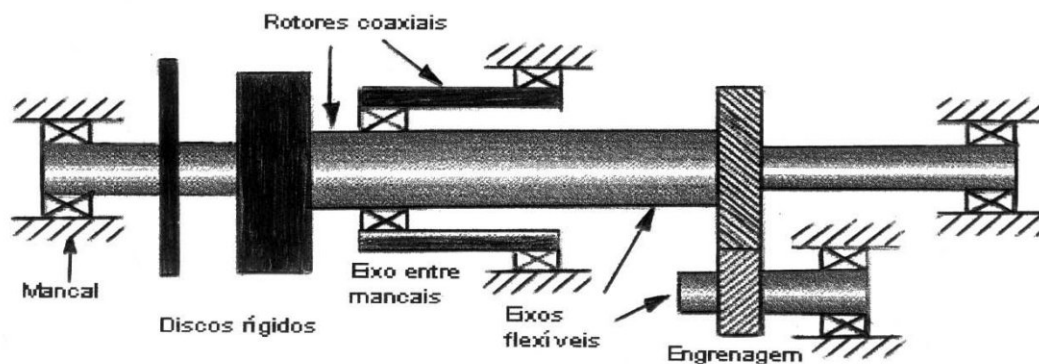


Figura 2.1 Sistema rotativo

Muitos pesquisadores têm estudado o comportamento dinâmico destes sistemas. A idéia é decompor o sistema em um número de componentes, concentrados e distribuídos, conectadas por nós. A resposta de cada componente é obtida através da, função de transferência distribuída para o caso de sistemas distribuídos e da matriz de transferência para o caso de sistemas concentrados, em termos dos deslocamentos nodais. Após, estes componentes são conectados impondo-se compatibilidade de deslocamentos e fazendo um balanço de forças nos nós, obtendo uma equação global de equilíbrio dinâmico. A partir desta, são obtidas as frequências naturais, velocidades críticas e resposta síncrona ao desbalanço.[Fang, 1994].

Neste capítulo obtém-se uma expressão analítica para a resposta em frequência de um eixo rotor flexível uniforme de forma direta posto que é de interesse conhecer a resposta do sistema rotativo nas frequências excitadas pela força devido ao seu desbalanço.

O eixo é modelado segundo a teoria de **Euler-Bernoulli**, isto é, uma seção transversal plana, perpendicular a linha média do eixo, permanece plana e perpendicular a esta após a deformação. Isto significa basicamente que os efeitos do cisalhamento e da inércia rotacional são desprezados. Tais efeitos são considerados no modelo de Timoshenko [Inman, 1994].

2.1 Eixos Rotores Flexíveis Uniformes

Considere-se o eixo rotativo flexível uniforme mostrado na figura (2.2) [Fang, 1998].

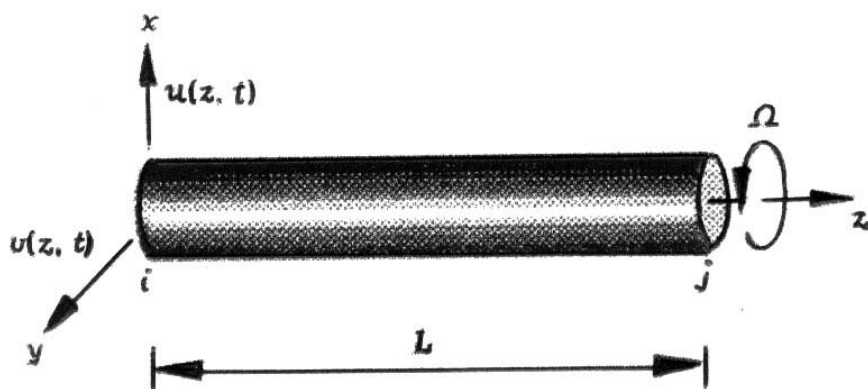


Figura 2.2 Eixo rotor flexível

Salienta-se que um eixo rotor é dito flexível quando sua frequência fundamental, quando em vibração transversal, for menor que a sua velocidade de rotação [Vance, 1987], [Ginsberg, 2001].

Considera-se que o eixo é isotrópico, ou seja, suas propriedades mecânicas são iguais nas direções principais, regime elástico e deslocamentos infinitesimais. Fazendo-se o balanço de forças nas direções x e y , os deslocamentos transversais $u(t, z)$ e $v(t, z)$, descritos no sistema de coordenadas fixo **OXYZ**, são governados pelas equações diferenciais parciais,

[Fang, 1998]

$$EI \frac{\partial^4 u(t, z)}{\partial z^4} - 2\rho I \Omega \frac{\partial^3 v(t, z)}{\partial z^2 \partial t} - \rho I \frac{\partial^4 u(t, z)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial t^2} = f_x(t, z) \quad (2.1)$$

$$EI \frac{\partial^4 v(t, z)}{\partial z^4} + 2\rho I \Omega \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial z^2 \partial t} - \rho I \frac{\partial^4 v(t, z)}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial t^2} = f_y(t, z) \quad 0 \leq z \leq L \quad (2.2)$$

sujeita as condições de contorno genéricas desacopladas

$$\mathbf{B}_i(u) = \sum_{k=0}^3 \alpha_{ik} u^{(k)}(t, 0) + \sum_{k=0}^3 \beta_{ik} u^{(k)}(t, L) = \mathbf{g}_i(t) \quad i = 0 : 4 \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{B}_i(v) = \sum_{k=0}^3 \sigma_{ik} v^{(k)}(t, 0) + \sum_{k=0}^3 \rho_{ik} v^{(k)}(t, L) = \mathbf{r}_i(t) \quad i = 0 : 4 \quad (2.4)$$

onde

- ρ - densidade volumétrica - (kg/m^3)
- A - área da seção transversal - (m^2)
- I - momento de inércia de área - (m^4)
- Ω - a velocidade de rotação do eixo - (rd/s)
- $f_x(t, z)$ e $f_y(t, z)$ - forças externas - (N)
- E - módulo de Young - (N/m^2)
- L - comprimento do eixo - (m)

O termo central nas equações (2.1) e (2.2) representam, respectivamente, os efeitos giroscópico e centrípeto. O último termo representa as forças inerciais envolvidas no problema .

As forças cortantes e os momentos fletores são dados por

$$F_x(t, z) = -\rho I \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial z \partial t^2} - 2\rho I \Omega \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z \partial t} + EI \frac{\partial^3 u(t, z)}{\partial z^3} \quad (2.5)$$

$$F_y(t, z) = -\rho I \frac{\partial^3 v(t, z)}{\partial z \partial t^2} + 2\rho I \Omega \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z \partial t} + EI \frac{\partial^3 v(t, z)}{\partial z^3} \quad (2.6)$$

$$M_x(t, z) = EI \frac{\partial^2 v(t, z)}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

$$M_y(t, z) = -EI \frac{\partial^2 u(t, z)}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

Os termos centrais que aparecem no segundo membro das equações (2.5) e (2.6) representam a contribuição do efeito giroscópico.

Uma forma de encarar o problema definido pelas equações (2.1), (2.2), (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) é aplicar a transformada de Laplace à estas equações e fazer uma redução ao espaço de estado, onde o vetor de estado tem como componentes os deslocamentos u e v , os giros $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial v}{\partial z}$, os momentos fletores $EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ e $EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ e as forças cortantes ou de cisalhamento $\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$ e $\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}$, nas direções x e y . A partir daí tem-se um sistema de 1ª ordem, conhecido na literatura existente como equação de estado, que pode ser estudado através da teoria de semigrupos e operadores lineares ou com o uso do conceito de função de transferência distribuída, introduzido por [Butkovisk, 1983]. Obtém-se desta forma uma relação entre força e deslocamento, e discretizando o eixo, os deslocamentos e forças internas podem ser determinadas conhecendo-se os deslocamentos nodais. Utilizando, compatibilidade de deslocamentos e balanço de forças nos nós, obtém-se uma equação de equilíbrio global [Fang, 1998].

Diferentemente deste enfoque, nesta seção trata-se o problema definido por (2.1) e (2.2), de forma direta, sem a redução ao espaço de estado. Neste sentido as equações (2.1) e (2.2) podem ser reescritas matricialmente como

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{G}\dot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{K}\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{f}(t, z) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{U}(0, z) = \mathbf{U}_0(z) \text{ e } \dot{\mathbf{U}}(0, z) = \dot{\mathbf{U}}_0(z)$$

sujeita as condições de contorno genéricas

$$\mathbf{B}_i \mathbf{U} = \sum_{k=0}^3 (\mathbf{A}_{ik} \mathbf{U}^{(k)}(t, 0) + \mathbf{B}_{ik} \mathbf{U}^{(k)}(t, L)) = \mathbf{z}_i(t) \quad i = 1 : 4 \quad (2.10)$$

com \mathbf{A}_{ik} e \mathbf{B}_{ik} matrizes diagonais e onde as matrizes massa, giroscópica e rigidez são dadas por

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \rho A - \rho I \frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & \rho A - \rho I \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} 0 & -2\rho I \Omega \frac{d^2}{dz^2} \\ 2\rho I \Omega \frac{d^2}{dz^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} EI \frac{d^4}{dz^4} & 0 \\ 0 & EI \frac{d^4}{dz^4} \end{bmatrix}$$

Observe-se que os elementos das matrizes \mathbb{M} , \mathbb{G} e \mathbb{K} são operadores diferenciais espaciais atuando sobre funções que satisfazem certas condições contorno. Definindo-se o produto interno

$$\langle \mathbb{U}, \mathbb{V} \rangle = \int_0^L \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} dz = \int_0^L \mathbb{U}^T \mathbb{V} dz$$

mostra-se, utilizando integração por partes, que \mathbb{M} é um operador simétrico e positivo sobre funções \mathbb{U} e \mathbb{V} que satisfazem condições de contorno biapoiada e fixa apoiada, isto é

$$\langle \mathbb{U}, \mathbb{M}\mathbb{V} \rangle = \int_0^L \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho A - \rho I \frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & \rho A - \rho I \frac{d^2}{dz^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} dz = \int_0^L (\mathbb{M}\mathbb{U})^T \mathbb{V} dz = \langle \mathbb{M}\mathbb{U}, \mathbb{V} \rangle$$

e

$$\langle \mathbb{M}\mathbb{U}, \mathbb{U} \rangle = \rho A \|\mathbb{U}\|^2 + \rho I \|\mathbb{U}'\|^2 > 0$$

Analogamente mostra-se que \mathbb{K} é um operador simétrico e positivo. Por outro, o operador \mathbb{G} é antisimétrico, ou seja,

$$\langle \mathbb{U}, \mathbb{G}\mathbb{V} \rangle = \int_0^L \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2\rho I \Omega \frac{d^2}{dz^2} \\ 2\rho I \Omega \frac{d^2}{dz^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} dz = \int_0^L \left(-2\rho I \Omega u_1 v_2'' + 2\rho I \Omega u_2 v_1'' \right) dz$$

donde segue, utilizando integração por partes e as condições de contorno, que

$$\langle \mathbf{U}, \mathbb{G}\mathbf{V} \rangle = \int_0^L \left(-2\rho I\Omega u_1'' v_2 + 2\rho I\Omega u_2'' v_1 \right) dz = \int_0^L \begin{pmatrix} 2\rho I u_2'' & -2\rho I u_1'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} dz$$

Reescevendo-se a igualdade acima vem que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbb{G}\mathbf{V} \rangle &= \int_0^L \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho I\Omega u_2'' \\ -2\rho I\Omega u_1'' \end{pmatrix} dz = \\ &= \int_0^L \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2\rho I\Omega \frac{d^2}{dz^2} \\ -2\rho I\Omega \frac{d^2}{dz^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dz = \langle \mathbf{V}, -\mathbb{G}\mathbf{U} \rangle \end{aligned}$$

Os vetores, deslocamento e força externa são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{U}(t, z) = \begin{bmatrix} u(t, z) \\ v(t, z) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x(t, z) \\ f_y(t, z) \end{bmatrix}$$

A solução de (2.9), em termos do operador resposta impulso $\mathbf{h}(t)$, é dada por

$$\mathbf{U}(t, z) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{U}_0(z) + \mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{U}}_0(z) + \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (2.11)$$

onde $\mathbf{h}_0(t)$ e $\mathbf{h}_1(t)$ são definidos como

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbb{M} + \mathbf{h}(t)\mathbb{G} \quad (2.12)$$

e

$$\mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)\mathbb{M} \quad (2.13)$$

O operador resposta impulso $\mathbf{h}(t)$ atua sobre funções espaciais $\Phi = \Phi(z)$ da seguinte forma

$$\mathbf{h}(t)\Phi = \int_0^L \mathbf{h}(t, z, \xi)\Phi(\xi)d\xi \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{h}(t, z, \xi)$ é dita **função de Green temporal**. Daí segue que o operador $\dot{\mathbf{h}}(t)$ é definido como

$$\dot{\mathbf{h}}(t)\Phi = \int_0^L \dot{\mathbf{h}}(t, z, \xi)\Phi(\xi)d\xi \quad (2.15)$$

Além disso

$$\mathbf{U}_0(z) = \begin{bmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{U}}_0(z) = \begin{bmatrix} \dot{u}_0(z) \\ \dot{v}_0(z) \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{U}_0(z) = \mathbf{U}_0(0, z)$ e $\dot{\mathbf{U}}_0(z) = \dot{\mathbf{U}}_0(0, z)$ são as condições iniciais do problema e $\mathbf{F}(t)(z) = \mathbf{F}(t, z)$.

Aplicando-se a transformada de Laplace à (2.1) e (2.2) obtém-se

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{u}(s, z)}{\partial z^4} - 2\rho I \Omega s \frac{\partial^3 \tilde{v}(s, z)}{\partial z^2} - \rho I s^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}(s, z)}{\partial z^2} + \rho A s^2 \tilde{u}(s, z) = \tilde{q}_x(s, z) \quad (2.16)$$

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{v}(s, z)}{\partial z^4} - 2\rho I \Omega s \frac{\partial^2 \tilde{u}(s, z)}{\partial z^2} - \rho I s^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}(s, z)}{\partial z^2} + \rho A s^2 \tilde{v}(s, z) = \tilde{q}_y(s, z)$$

com $\tilde{q}_x(s, z)$ e $\tilde{q}_y(s, z)$ definidos por

$$\tilde{q}_x(s, z) = \tilde{f}_x(s, z) + \rho A s u_0(z) - \rho I s \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} - 2\rho I \Omega \frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} + \rho A \dot{u}_0(z) - \rho I \frac{d^2 \dot{u}_0(z)}{dz^2} \quad (2.17)$$

e

$$\tilde{q}_y(s, z) = \tilde{f}_y(s, z) + \rho A s v_0(z) - \rho I s \frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} + 2\rho I \Omega \frac{d^2 u_0(z)}{dz^2} + \rho A \dot{v}_0(z) - \rho I \frac{d^2 \dot{v}_0(z)}{dz^2} \quad (2.18)$$

ou escritas matricialmente como

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{G}s + \mathbf{K}] \tilde{\mathbf{U}}(s, z) = \tilde{\mathbf{F}}(s, z) + [\mathbf{M}s + \mathbf{G}] \mathbf{U}_0(z) + \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}_0(z) \quad (2.19)$$

sujeita as condições de contorno

$$\mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{U}} = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (2.20)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{U}}(z, s) = \begin{bmatrix} \tilde{u}(s, z) \\ \tilde{v}(s, z) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{F}}(s, z) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x(s, z) \\ \tilde{f}_y(s, z) \end{bmatrix}$$

são os vetores, deslocamento do eixo composto pelas transformadas de Laplace dos seus deslocamentos transversais e força composta pelas transformadas de Laplace das forças externas aplicadas ao eixo, respectivamente, e

$$\mathbb{M}s^2 + \mathbb{G}s + \mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

com os operadores espaciais \mathbf{L} e \mathbf{M} definidos por

$$\mathbf{L} = \rho A s^2 - \rho I s^2 \frac{d^2}{dz^2} + EI \frac{d^4}{dz^4} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{M} = -2\rho I \Omega s \frac{d^2}{dz^2} \quad (2.23)$$

Multiplicando ambos os membros de (2.19) pela matriz

$$Adj(\mathbb{M}s^2 + \mathbb{G}s + \mathbb{K}) = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

, dita matriz adjugada ou adjunta clássica, e utilizando o fato de que os operadores \mathbf{L} e \mathbf{M} comutam, obtém-se os seguintes problemas de contorno desacoplados

$$(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2) \tilde{u}(s, z) = \mathbf{L} \tilde{q}_x(s, z) - \mathbf{M} \tilde{q}_y(s, z) = Q_x(s, z) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}_i(s)$$

e

$$(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2) \tilde{v}(s, z) = \mathbf{M} \tilde{q}_x(s, z) + \mathbf{L} \tilde{q}_y(s, z) = Q_y(s, z) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{R}}_i(s)$$

onde $\tilde{q}_x(s, z)$ e $\tilde{q}_y(s, z)$ são definidos por (2.17) e (2.18).

A metodologia utilizada na resolução de (2.24) e (2.25) é a mesma. Sendo assim será mostrada somente para (2.24).

Observe-se que o operador espacial $\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2$ pode ser fatorado da seguinte forma

$$(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2) = (\mathbf{L} + i\mathbf{M})(\mathbf{L} - i\mathbf{M}) \quad (2.26)$$

e assim, o problema (2.24) pode ser reescrito como

$$(\mathbf{L} + i\mathbf{M})(\mathbf{L} - i\mathbf{M})\tilde{u}(s, z) = Q_x(s, z) \quad (2.27)$$

Introduzindo a mudança de variável

$$(\mathbf{L} - i\mathbf{M})\tilde{u}(s, z) = \tilde{u}_1(s, z) \quad (2.28)$$

obtem-se que

$$(\mathbf{L} + i\mathbf{M})\tilde{u}_1(s, z) = Q_x(s, z) \quad (2.29)$$

Considerando os operadores \mathbf{L} e \mathbf{M} , definidos por (2.22) e (2.23), respectivamente, a equação (2.29) pode ser reescrita como

$$\frac{d^4\tilde{u}_1(s, z)}{dz^4} + p^2\frac{d^2\tilde{u}_1(s, z)}{dz^2} - q^4\tilde{u}_1(s, z) = \frac{Q_x(s, z)}{EI} \quad (2.30)$$

onde

$$p^2 = -\frac{\rho I s^2}{EI} - i\frac{2\rho I \Omega s}{EI} \quad (2.31)$$

e

$$q^4 = \frac{\rho A s^2}{EI} \quad (2.32)$$

e sujeita a condições de contorno apropriadas a serem obtidas das equações transformadas (2.16) e das condições de contorno genéricas transformadas dadas em (2.20). Resolvendo-se o problema de contorno espacial (2.30) e utilizando-se (2.28) obtém-se o seguinte problema de contorno

$$\frac{d^4\tilde{u}(s, z)}{dz^4} + p^2\frac{d^2\tilde{u}(s, z)}{dz^2} - q^4\tilde{u}(s, z) = \frac{\tilde{u}_1(s, z)}{EI} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{B}_i\tilde{u} = \tilde{\mathbf{G}}(s)$$

onde

$$\bar{p}^2 = -\frac{\rho I s^2}{EI} + i\frac{2\rho I \Omega s}{EI}$$

e q^4 definido como antes (veja-se (2.32)).

Note-se que (2.30) e (2.33) representam, no domínio frequência, equações de **Euler-Bernoulli** sujeitas a um carregamento axial. Em [Costa, 2001] e [Sodder, 2000] é obtida a função de Green para este caso considerando variadas condições de contorno .

As soluções de (2.30) e (2.33) são dadas, respectivamente, por

$$\tilde{u}_1(s, z) = \frac{1}{EI} \int_0^L \mathbf{G}_i(s, z, \xi) Q_x(s, \xi) d\xi + \mathbf{J}_1^u \quad (2.34)$$

$$\tilde{u}(s, z) = \frac{1}{EI} \int_0^L \mathbf{G}_{-i}(s, z, \eta) \tilde{u}_1(s, \eta) d\eta + \mathbf{J}_2^u \quad (2.35)$$

onde \mathbf{G}_i e \mathbf{G}_{-i} são as funções de **Green** espaciais dos problemas (2.29) e (2.28), respectivamente, e \mathbf{J}_1^u \mathbf{J}_2^u incluem os termos não homogêneos das condições de contorno no intervalo $[0, L]$. Estas condições serão, em princípio de natureza não homogênea, e denotadas por

$$\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{U}}_i = \mathbf{P}_i(s) \quad (2.36)$$

Substituindo-se (2.34) em (2.35) resulta que

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s, z) &= \frac{1}{(EI)^2} \int_0^L \int_0^L \mathbf{G}_{-i}(s, z, \eta) \mathbf{G}_i(s, z, \xi) Q_x(s, \xi) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L \mathbf{G}_{-i}(s, z, \eta) \mathbf{J}_1^u d\eta + \mathbf{J}_2^u \end{aligned} \quad (2.37)$$

Pode-se mostrar que

$$\mathbf{G}_{-i} = \overline{\mathbf{G}}_i$$

e neste caso tem-se que

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s, z) &= \frac{1}{(EI)^2} \int_0^L \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(s, z, \eta) \mathbf{G}_i(s, z, \xi) Q_x(s, \xi) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(s, z, \eta) \mathbf{J}_1^u d\eta + \mathbf{J}_2^u\end{aligned}\tag{2.38}$$

e a resposta em frequência na direção x será dada por

$$\begin{aligned}\tilde{u}(i\omega, z) &= \frac{1}{(EI)^2} \int_0^L \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(i\omega, z, \eta) \mathbf{G}_i(i\omega, z, \xi) Q_x(i\omega, \xi) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(i\omega, z, \eta) \mathbf{J}_1^u d\eta + \mathbf{J}_2^u\end{aligned}\tag{2.39}$$

Na seção 2.4 serão feitas simulações para a integral que aparece em (2.39) considerando os casos biapoiado e fixo apoiado e forças do tipo: constante, pulsos, triangular e quadrangular e seno. Tal integral representa o deslocamento do eixo na direção x .

Seguindo um raciocínio análogo ao aplicado na obtenção de $\tilde{u}(s, z)$, obtém-se $\tilde{v}(s, z)$ dado por

$$\begin{aligned}\tilde{v}(s, z) &= \frac{1}{(EI)^2} \int_0^L \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(s, z, \eta) \mathbf{G}_i(s, z, \xi) Q_y(s, \xi) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(s, z, \eta) \mathbf{J}_1^v d\eta + \mathbf{J}_2^v\end{aligned}\tag{2.40}$$

e daí, tem-se que e a resposta em frequência na direção y , será dada por

$$\begin{aligned}\tilde{v}(i\omega, z) &= \frac{1}{(EI)^2} \int_0^L \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(i\omega, z, \eta) \mathbf{G}_i(i\omega, z, \xi) Q_y(i\omega, \xi) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L \overline{\mathbf{G}}_i(i\omega, z, \eta) \mathbf{J}_1^v d\eta + \mathbf{J}_2^v\end{aligned}\tag{2.41}$$

onde \mathbf{J}_1^v \mathbf{J}_2^v incluem os termos não homogêneos das condições de contorno no intervalo $[0, L]$.

2.2 Cálculo Não-Modal da Função de Green

Considere-se o problema de contorno definido pela equação

$$\frac{d^4 U(z)}{dz^4} + p^2 \frac{d^2 U(z)}{dz^2} - q^4 U(z) = F(z) \quad (2.42)$$

sujeita as condições de contorno homogêneas gerais

$$\mathbf{B}_i(U) = \sum_{k=0}^3 [\alpha_{ik} U^{(k)}(0) + \beta_{ik} U^{(k)}(L)] = 0 \quad i = 0 : 3 \quad (2.43)$$

onde as constantes complexas p^2 e q^4 são dadas por

$$p^2 = -\frac{\rho I s^2}{EI} - i \frac{2\rho I \Omega s}{EI} \quad (2.44)$$

e

$$q^4 = \frac{\rho A s^2}{EI} \quad (2.45)$$

Este problema pode ser escrito na forma

$$\mathbb{L}U(z) = F(z) \quad (2.46)$$

onde o operador espacial \mathbb{L} atua sobre funções que satisfazem as condições de contorno (2.43) e é definido como

$$\mathbb{L} = \frac{d^4}{dz^4} + p^2 \frac{d^2}{dz^2} - q^4$$

A solução de (2.46) sujeita as condições de contorno (2.43) é dada pelo operador integral

$$U(z) = \int_0^L G(z, \xi) F(\xi) d\xi \quad (2.47)$$

onde $G(z, \xi)$ é a função de Green espacial e expressa por

$$G(z, \xi) = \frac{H(z, \xi)}{\Delta}, \quad (2.48)$$

com

$$H(z, \xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(z) & h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) & g(z, \xi) \\ B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) & B_1(g) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) & B_2(g) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) & B_3(g) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) & B_4(g) \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) \end{bmatrix} e \quad (2.50)$$

$$g(z, \xi) = \frac{\text{sign}(z - \xi)}{2W(\xi)} \det \begin{bmatrix} h_0(z) & h_1(z) & h_2(z) & h_3(z) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

para o Wronskiano definido por

$$W(\xi) = \det \begin{bmatrix} \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \ddot{h}_0(\xi) & \ddot{h}_1(\xi) & \ddot{h}_2(\xi) & \ddot{h}_3(\xi) \\ \dot{h}_0(\xi) & \dot{h}_1(\xi) & \dot{h}_2(\xi) & \dot{h}_3(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Os elementos da base dinâmica normalizada, obtidos através da relação

$$h_j(z) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^i(z) a_{j+1+i} \quad \text{para } j = 0 : N - 1, \quad (2.53)$$

onde a_k são os coeficientes da equação (2.42), são dados por

$$\begin{aligned} h_0(z) &= p^2 \dot{h}(z) + \ddot{h}(z) \\ h_1(z) &= p^2 h(z) + \ddot{h}(z) \\ h_2(z) &= \dot{h}(z) \\ h_3(z) &= h(z) \end{aligned} \tag{2.54}$$

onde $h(z)$ satisfaz o problema de valor inicial com condições iniciais impulsivas

$$\frac{dh^4(z)}{dz^4} + p^2 \frac{dh^2(z)}{dz^2} - q^4 h(z) = 0 \tag{2.55}$$

$$h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = 0, \quad \ddot{h}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\ddot{h}}(0) = 1$$

ou seja, $h(z)$ é dada por

$$h(z) = \frac{\delta \sinh(\varepsilon z) - \varepsilon \sin(\delta z)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)} \tag{2.56}$$

Os parâmetros ε e δ surgem a partir do cálculo das raízes do polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^4 + p^2 \lambda^2 - q^4 \tag{2.57}$$

associado ao sistema e cujas raízes fornecem os autovalores λ dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\delta \quad \text{e} \quad \lambda_{3,4} = \pm \varepsilon, \tag{2.58}$$

onde os parâmetros δ e ε , dados por

$$\delta = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} + \frac{p^2}{2}} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} - \frac{p^2}{2}}. \tag{2.59}$$

são complexos pois, p e q são complexos e definidos por (2.31) e (2.32).

O caso de parâmetros δ e ε reais é discutido em [Soder, 2000], [Giaretta, 2001].

Utilizando as relações (2.54), tem-se que os elementos da base dinâmica normalizada $\{h_0(z), h_1(z), h_2(z), h_3(z)\}$ são dados por

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{\delta \sinh(\varepsilon z) - \varepsilon \sin(\delta z)}{\delta \varepsilon (\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
\dot{h}(z) &= \frac{\cosh(\varepsilon z) - \cos(\delta z)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
\ddot{h}(z) &= \frac{\varepsilon \sinh(\varepsilon z) + \delta \sin(\delta z)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\
\dddot{h}(z) &= \frac{\varepsilon^2 \cosh(\varepsilon z) + \delta^2 \cos(\delta z)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

A partir da fórmula (2.48) obtêm-se diferentes expressões para a função de Green espacial, pois a mesma esta condicionada as condições de contorno do problema. Para maiores detalhes, veja-se as referências [Naimark, 1967; Butkovskiy, 1983 ; Miller, 1963]. Para ilustrar este fato são apresentados a seguir as funções de Green para os casos de um eixo, biapoiado e fixo-apoiado. Aqui tais funções são calculadas de maneira não modal [Giaretta, 2001], [Costa, 2001].

2.2.1 O Caso Biapoiado

Para o problema de contorno

$$\frac{d^4 U(z)}{dz^4} + p^2 \frac{d^2 U(z)}{dz^2} - q^4 U(z) = F(z) \tag{2.61}$$

sujeito as condições de contorno de um eixo biapoiado, ou seja,

$$\begin{aligned}
U(0) = U(L) = 0 \\
\frac{d^2 U(0)}{dz^2} = \frac{d^2 U(L)}{dz^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.62}$$

a função de Green $\mathbf{G}(z, \xi)$, associada a este é dada por

$$\mathbf{G}(z, \xi) = \begin{cases} G_1(z, \xi), & 0 \leq z \leq \xi \\ G_2(z, \xi), & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.63)$$

onde

$$G_1(z, \xi) = -\frac{\sinh(\epsilon z) \sinh(\epsilon(L - \xi))}{(\delta^2 + \epsilon^2)\epsilon \sinh(\epsilon L)} + \frac{\sin(\delta z) \sin(\delta(L - \xi))}{(\delta^2 + \epsilon^2)\delta \sin(\delta L)} \quad (2.64)$$

e

$$G_2(z, \xi) = -\frac{\sinh(\epsilon(L - z)) \sinh(\epsilon \xi)}{(\delta^2 + \epsilon^2)\epsilon \sinh(\epsilon L)} + \frac{\sin(\delta \xi) \sin(\delta(L - z))}{(\delta^2 + \epsilon^2)\delta \sin(\delta L)} \quad (2.65)$$

Por outro lado considerando-se o problema de contorno

$$\frac{d^4 U(z)}{dz^4} + \bar{p}^2 \frac{d^2 U(z)}{dz^2} - q^4 U(z) = F(z) \quad (2.66)$$

onde \bar{p}^2 denota o complexo conjugado de p^2 e sujeito as condições de contorno (2.62) tem-se que a função de Green relacionado com este é dada por

$$\bar{\mathbf{G}}(z, \xi) = \begin{cases} \bar{G}_1(s, z, \xi), & 0 \leq z \leq \xi \\ \bar{G}_2(s, z, \xi), & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.67)$$

onde

$$\bar{G}_1(z, \xi) = -\frac{\sinh(\bar{\epsilon} z) \sinh(\bar{\epsilon}(L - \xi))}{(\bar{\delta}^2 + \bar{\epsilon}^2)\bar{\epsilon} \sinh(\bar{\epsilon} L)} + \frac{\sin(\bar{\delta} z) \sin(\bar{\delta}(L - \xi))}{(\bar{\delta}^2 + \bar{\epsilon}^2)\bar{\delta} \sin(\bar{\delta} L)} \quad (2.68)$$

e

$$\bar{G}_2(z, \xi) = -\frac{\sinh(\bar{\epsilon}(L - z)) \sinh(\bar{\epsilon} \xi)}{(\bar{\delta}^2 + \bar{\epsilon}^2)\bar{\epsilon} \sinh(\bar{\epsilon} L)} + \frac{\sin(\bar{\delta} \xi) \sin(\bar{\delta}(L - z))}{(\bar{\delta}^2 + \bar{\epsilon}^2)\bar{\delta} \sin(\bar{\delta} L)} \quad (2.69)$$

Observe-se que as funções de Green $\mathbf{G}(z, \xi)$ e $\bar{\mathbf{G}}(z, \xi)$ estão associadas aos operadores $\mathbf{L} + i\mathbf{M}$ e $\mathbf{L} - i\mathbf{M}$, respectivamente.

2.2.2 Caso Fixo-Apoiado

Considera-se agora o caso de um eixo fixo apoiado, ou seja, os problemas de contorno

$$\frac{d^4U(z)}{dz^4} + p^2 \frac{d^2U(z)}{dz^2} - q^4U(z) = F(z)$$

e

$$\frac{d^4U(z)}{dz^4} + \bar{p}^2 \frac{d^2U(z)}{dz^2} - q^4U(z) = F(z) \quad (2.70)$$

sujeitos as condições de contorno

$$\begin{aligned} U(0) = 0 & \quad , \quad \dot{U}(0) = 0 \\ U(L) = 0 & \quad , \quad \dot{U}(L) = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

a função de Green espacial $\mathbf{G}(z, \xi)$ associada ao operador $\mathbf{L} + i\mathbf{M}$ é

$$\mathbf{G}(z, \xi) = \begin{cases} G_1(z, \xi), & 0 \leq z \leq \xi \\ G_2(z, \xi), & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.72)$$

onde

$$\begin{aligned} G_1(z, \xi) = & -\frac{\varepsilon^2 \sin(\delta(-L + \xi)) \sin(\delta z) \cosh(\varepsilon L) + \sin(\delta(z - L)) \sinh(\varepsilon(L - \xi))}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\ & + \frac{\sinh(\varepsilon(-L + \xi)) \cosh(\varepsilon z) \sin(\delta L) + \sin(\delta(-L + \xi)) \cos(\delta z) \sinh(\varepsilon L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\ & - \frac{\sinh(\varepsilon(z - L)) \sin(\delta(L - \xi))\delta\varepsilon + \delta^2 \sinh(\varepsilon(-L + \xi)) \sinh(\varepsilon z) \cos(\delta L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.73)$$

e

$$\begin{aligned} G_2(z, \xi) = & -\frac{\varepsilon^2 \sin(\delta(z - L)) \sin(\delta\xi) \cosh(\varepsilon L) + \sinh(\varepsilon(z - L)) \sin(\delta(L - \xi))}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\ & + \frac{\sinh(\varepsilon(z - L)) \cosh(\varepsilon\xi) \sin(\delta L) + \sin(\delta(z - L)) \cos(\delta\xi) \sinh(\varepsilon L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} + \\ & - \frac{\sin(\delta(z - L)) \sinh(\varepsilon(L - \xi))\delta\varepsilon + \delta^2 \sinh(\varepsilon(z - L)) \sinh(\varepsilon\xi) \cos(\delta L)}{((\varepsilon \cosh(\varepsilon L) \sin(\delta L) - \delta \cos(\delta L) \sinh(\varepsilon L))(\delta^2 + \varepsilon^2)\delta\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.74)$$

e a função de Green espacial $\overline{\mathbf{G}}(z, \xi)$ associada ao operador $\mathbf{L} - i\mathbf{M}$ é

$$\overline{\mathbf{G}}(z, \xi) = \begin{cases} \overline{G}_1(z, \xi), & 0 \leq z \leq \xi \\ \overline{G}_2(z, \xi), & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.75)$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(z, \xi) = & -\frac{\overline{\varepsilon}^2 \sin(\overline{\delta}(-L + \xi)) \sin(\overline{\delta}z) \cosh(\overline{\varepsilon}L) + \sin(\overline{\delta}(z - L)) \sinh(\overline{\varepsilon}(L - \xi))}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} + \\ & + \frac{\sinh(\overline{\varepsilon}(-L + \xi)) \cosh(\overline{\varepsilon}z) \sin(\overline{\delta}L) + \sin(\overline{\delta}(-L + \xi)) \cos(\overline{\delta}z) \sinh(\overline{\varepsilon}L)}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} + \\ & - \frac{\sinh(\overline{\varepsilon}(z - L)) \sin(\overline{\delta}(L - \xi))\overline{\delta}\overline{\varepsilon} + \overline{\delta}^2 \sinh(\overline{\varepsilon}(-L + \xi)) \sinh(\overline{\varepsilon}z) \cos(\overline{\delta}L)}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} \end{aligned} \quad (2.76)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{G}_2(z, \xi) = & -\frac{\overline{\varepsilon}^2 \sin(\overline{\delta}(z - L)) \sin(\overline{\delta}\xi) \cosh(\overline{\varepsilon}L) + \sinh(\overline{\varepsilon}(z - L)) \sin(\overline{\delta}(L - \xi))}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} + \\ & + \frac{\sinh(\overline{\varepsilon}(z - L)) \cosh(\overline{\varepsilon}\xi) \sin(\overline{\delta}L) + \sin(\overline{\delta}(z - L)) \cos(\overline{\delta}\xi) \sinh(\overline{\varepsilon}L)}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} + \\ & - \frac{\sin(\overline{\delta}(z - L)) \sinh(\overline{\varepsilon}(L - \xi))\overline{\delta}\overline{\varepsilon} + \overline{\delta}^2 \sinh(\overline{\varepsilon}(z - L)) \sinh(\overline{\varepsilon}\xi) \cos(\overline{\delta}L)}{((\overline{\varepsilon} \cosh(\overline{\varepsilon}L) \sin(\overline{\delta}L) - \overline{\delta} \cos(\overline{\delta}L) \sinh(\overline{\varepsilon}L))(\overline{\delta}^2 + \overline{\varepsilon}^2)\overline{\delta}\overline{\varepsilon})} \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.3 Velocidades Críticas: Problema de autovalor

Quando uma das freqüências naturais do sistema é excitada pelo desbalanço do rotor, a velocidade do eixo que coincide com tal freqüência é dita **velocidade crítica** [Vance, 1987], [Childs, 1993]. Isto significa que a força devido ao desbalanço, que é periódica, esta em ressonância com o sistema. Neste sentido o conhecimento destas velocidades é de fundamental importância na determinação do intervalo de velocidades de operação de equipamentos rotativos.

Considerando, por exemplo, um eixo rotor colocado sobre suportes, o tipo de suporte ¹tem grande influência sobre a dinâmica do sistema, ou seja, freqüências naturais, velocidades críticas, resposta ao desbalanço e intervalo de velocidades em que os equipa-

¹Os suportes mais comumente usados em equipamentos rotativos são: rolamentos, mancais, mancais lubrificados. Para maiores detalhes veja-se [Vance, 1987], [Childs, 1993].

mentos rotativos podem operar. Um estudo analítico- experimental sobre esta influência considerando-se vários tipos de suportes é feito em [Vance, 1987] e [Childs, 1993].

A seguir é feito um estudo sobre o problema de autovalor relacionado a (2.9).

Considere-se a resposta livre do sistema

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{G}\dot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{K}\mathbf{U}(t, z) &= 0 \\ \mathbf{U}(0, z) = \mathbf{U}_0(z) \text{ e } \dot{\mathbf{U}}(0, z) &= \dot{\mathbf{U}}_0(z) \end{aligned} \quad (2.78)$$

com condições de contorno gerais dadas por (2.10) porém homogêneas.

Supondo soluções do tipo $\mathbf{U}(t, z) = e^{i\omega t}\Phi(z)$ para (2.78) obtem-se o seguinte problema de autovalor

$$\mathcal{M}\Phi^{iv}(z) + \mathcal{G}(\omega)\Phi''(z) + \mathcal{K}(\omega)\Phi(z) = 0 \quad (2.79)$$

onde as matrizes \mathcal{M} , $\mathcal{G}(\omega)$ e $\mathcal{K}(\omega)$ são dadas por

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad \mathcal{G}(\omega) = \begin{bmatrix} \rho I \omega^2 & -2\rho I \Omega \omega i \\ 2\rho I \Omega \omega i & \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \quad \mathcal{K}(\omega) = \begin{bmatrix} \rho A \omega^2 & 0 \\ 0 & \rho A \omega^2 \end{bmatrix}$$

e o vetor $\Phi(z)$, dado por

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} \Phi_x(z) \\ \Phi_y(z) \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições de contorno genéricas homogêneas abaixo

$$\mathbf{B}_i \Phi = \sum_{k=0}^3 \left(\mathbf{A}_{ik} \Phi^{(k)}(0) + \mathbf{B}_{ik}^{(k)} \Phi^{(k)}(L) \right) = 0 \quad i = 1 : 4 \quad (2.80)$$

As condições (2.80) podem ser escritas matricialmente como

$$\mathbb{B} \Theta = 0 \quad (2.81)$$

com o vetor Θ , de ordem $2n \times 1$ onde n é a ordem da derivada espacial, dado por

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Phi(0) \\ \Phi'(0) \\ \Phi(0)'' \\ \Phi(0)''' \\ \Phi(L) \\ \Phi(L)' \\ \Phi(L)'' \\ \Phi(L)''' \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{A}_{20} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{B}_{20} & \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{A}_{30} & \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{30} & \mathbf{B}_{31} & \mathbf{B}_{32} & \mathbf{B}_{33} \\ \mathbf{A}_{40} & \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{B}_{40} & \mathbf{B}_{41} & \mathbf{B}_{42} & \mathbf{B}_{43} \end{bmatrix}$$

onde as matrizes \mathbf{A}_{ik} e \mathbf{B}_{ik} de ordem 2×2 dependem das condições de contorno.

A solução do problema de contorno matricial

$$\mathcal{M}\Phi^{iv}(z) + \mathcal{G}(\omega)\Phi''(z) + \mathcal{K}(\omega)\Phi(z) = 0 \quad (2.82)$$

$$\mathbb{B}\Theta = 0$$

é dada por

$$\Phi(z) = \Psi_1(z)\mathbf{C}_1 + \Psi_2(z)\mathbf{C}_2 + \Psi_3(z)\mathbf{C}_3 + \Psi_4(z)\mathbf{C}_4 \quad (2.83)$$

ou matricialmente

$$\Phi(z) = \Psi\mathbf{C} \quad (2.84)$$

onde

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{bmatrix}$$

é uma base matricial de soluções para o problema de contorno descrito por (2.82) acima e o vetor coluna

$$\mathcal{C} = \left[\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_1 \right]^T$$

são constantes. Neste caso a matriz Ψ toma a forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1(0) & \Psi_2(0) & \Psi_3(0) & \Psi_4(0) \\ \Psi_1'(0) & \Psi_2'(0) & \Psi_3'(0) & \Psi_4'(0) \\ \Psi_1''(0) & \Psi_2''(0) & \Psi_3''(0) & \Psi_4''(0) \\ \Psi_1'''(0) & \Psi_2'''(0) & \Psi_3'''(0) & \Psi_4'''(0) \\ \Psi_1(L) & \Psi_2(L) & \Psi_3(L) & \Psi_4(L) \\ \Psi_1'(L) & \Psi_2'(L) & \Psi_3'(L) & \Psi_4'(L) \\ \Psi_1''(L) & \Psi_2''(L) & \Psi_3''(L) & \Psi_4''(L) \\ \Psi_1'''(L) & \Psi_2'''(L) & \Psi_3'''(L) & \Psi_4'''(L) \end{bmatrix}$$

Tem-se então o sistema de equações lineares

$$\mathbb{B} \Psi \mathcal{C} = 0 \tag{2.85}$$

que admite soluções não nulas se, e somente se,

$$\Delta = \det(\mathbb{B} \Psi) = 0$$

onde Δ é o polinômio característico e suas raízes os autovalores.

A grande questão é fazer com que a matriz Ψ seja a mais esparsa possível, ou seja, tenha o maior número de zeros possível. A esparsividade desta matriz está intimamente ligada a escolha da base matricial de soluções para (2.82).

Escolhendo-se

$$\Psi_1(z) = \mathbf{h}_0(z), \quad \Psi_2(z) = \mathbf{h}_1(z), \quad \Psi_3(z) = \mathbf{h}_2(z) \quad \text{e} \quad \Psi_4(z) = \mathbf{h}_3(z) \tag{2.86}$$

a matriz Ψ , de ordem $8n \times 8n$, toma a forma

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{h}_0(L) & \mathbf{h}_1(L) & \mathbf{h}_2(L) & \mathbf{h}_3(L) \\ \mathbf{h}'_0(L) & \mathbf{h}'_1(L) & \mathbf{h}'_2(L) & \mathbf{h}'_3(L) \\ \mathbf{h}''_0(L) & \mathbf{h}''_1(L) & \mathbf{h}''_2(L) & \mathbf{h}''_3(L) \\ \mathbf{h}'''_0(L) & \mathbf{h}'''_1(L) & \mathbf{h}'''_2(L) & \mathbf{h}'''_3(L) \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{h}_0(z)$, $\mathbf{h}_1(z)$, $\mathbf{h}_2(z)$ e $\mathbf{h}_3(z)$ são os elementos da base dinâmica normalizada matricial, isto é, satisfazem o problema matricial de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathbf{h}_i^{iv}(z) + \mathcal{G}\mathbf{h}_i''(z) + \mathcal{K}\mathbf{h}_i(z) &= 0 \\ \mathbf{h}_i(0) = 0, \quad \mathbf{h}'_i(0) = 0, \quad \mathbf{h}''_i(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{h}'''_i(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.87)$$

para $i = 1, 2$ e 3 .

Os elementos da base dinâmica matricial, $\mathbf{h}(z)$, $\mathbf{h}'(z)$, $\mathbf{h}''(z)$ e $\mathbf{h}'''(z)$ relacionam-se com os elementos da base dinâmica normalizada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(z) & \mathbf{h}_1(z) & \mathbf{h}_2(z) & \mathbf{h}_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(z) & \mathbf{h}'(z) & \mathbf{h}''(z) & \mathbf{h}'''(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{G} & 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{G} & 0 & \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M} & 0 & 0 \\ \mathcal{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0(z) &= \mathbf{h}'(z)\mathcal{G} + \mathbf{h}'''(z)\mathcal{M} \\ \mathbf{h}_1(z) &= \mathbf{h}(z)\mathcal{G} + \mathbf{h}''(z)\mathcal{M} \\ \mathbf{h}_2(z) &= \mathbf{h}'(z)\mathcal{M} \\ \mathbf{h}_3(z) &= \mathbf{h}(z)\mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Considere-se agora o caso de um eixo biapoado, ou seja

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\Phi^{iv}(z) + \mathcal{G}(\omega)\Phi''(z) + \mathcal{K}(\omega)\Phi(z) &= 0 \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) &= 0 \\ \Phi(L) = 0, \quad \Phi''(L) &= 0\end{aligned}\tag{2.90}$$

Para este caso, as matrizes quadradas de ordem 2 \mathbf{A}_{ik} e \mathbf{B}_{ik} são dadas por

$$\begin{aligned}i = 1 \quad \mathbf{A}_{10} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_{10} &= 0 & \mathbf{A}_{1k} = \mathbf{B}_{1k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3 \\ i = 2 \quad \mathbf{A}_{22} = \mathbf{I} & & \mathbf{A}_{2k} = 0, \quad k \neq 2 \text{ e } \mathbf{B}_{2k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3 \\ i = 3 \quad \mathbf{A}_{3k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3 & \quad \mathbf{B}_{30} = \mathbf{I} \text{ e } \mathbf{B}_{3k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3 \\ i = 4 \quad \mathbf{A}_{4k} = 0, \quad k = 1, \dots, 3 & \quad \mathbf{B}_{42} = \mathbf{I} \text{ e } \mathbf{B}_{4k} = 0 \quad k \neq 2\end{aligned}$$

e daí decorre que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$\mathbf{B}\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{h}_0(L) & \mathbf{h}_1(L) & \mathbf{h}_2(L) & \mathbf{h}_3(L) \\ \mathbf{h}_0(L)'' & \mathbf{h}_1(L)'' & \mathbf{h}_2(L)'' & \mathbf{h}_3(L)'' \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{h}_0(L)$, $\mathbf{h}_1(L)$, $\mathbf{h}_2(L)$ e $\mathbf{h}_3(L)$ são blocos 2×2

Resolvendo o sistema linear $\mathbf{B}\Psi\mathbf{C} = 0$, obtem-se imediatamente que $\mathbf{C}_1 = 0$ e $\mathbf{C}_3 = 0$ ficando este reduzido à

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(L) & \mathbf{h}_3(L) \\ \mathbf{h}_1''(L) & \mathbf{h}_3''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.91}$$

Observe-se que o sistema $\mathbf{B}\Psi\mathcal{C}$, inicialmente de ordem $4n$, foi reduzido a um sistema de ordem $2n$ (veja-se (2.91)). Esta é uma das vantagens obtidas com a utilização da base dinâmica normalizada. Sob o ponto de vista computacional tem-se a redução do esforço computacional, do tempo de máquina e, conseqüentemente, dos custos.

Os autovalores são as soluções da equação característica

$$\det(\mathbf{h}_1(L)\mathbf{h}_3''(L) - \mathbf{h}_1''(L)\mathbf{h}_3(L)) = 0 \quad (2.92)$$

Considerando os seguintes valores para os parâmetros físicos do eixo rotor bi-apoiado [Fang, 1998]

grandeza	L	E	I	ρ
valor (unidade)	1 m	$2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$7.854 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$	7800 Kg/m^3
grandeza	A	Ω		
valor (unidade)	$3.142 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	500 rd/s		

Tabela 2.1 Parâmetros físicos do eixo rotor

obtém-se, de forma aproximada ², os quadrados das freqüências (rad/s) para o caso de um eixo biapoiado e mostrados na tabela (2.2) abaixo

$-4151436.8 + 4151749.9i$	$4151436.8 - 4151749.9i$
$-4151436.8 - 4151749.9i$	$4151436.8 + 4151749.9i$
$-16854.4 + 7849.1i$	$16854.4 - 7849.1i$
$-16854.4 - 7849.1i$	$16854.4 + 7849.1i$
$-17854.4 + 7849.1i$	$17854.4 - 7849.1i$
$-17854.4 - 7849.1i$	$17854.4 + 7849.1i$

Tabela 2.2 Quadrado das freqüências do eixo biapoiado

²Os autovalores foram obtidos expandindo $\mathbf{h}_1(z)$ e $\mathbf{h}_3(z)$ e suas derivadas em série de Taylor truncando-as no n -ésimo termo. Os valores de $\mathbf{h}_k(z)$ (resposta impulso discreta) são obtidos de forma recursiva. Para maiores detalhes veja-se [Copetti, 2002].

Resolvendo-se o sistema (2.91) para C_2 , os modos são da forma

$$\Phi(z) = \mathbf{h}_1(z)\sigma(\omega) + \mathbf{h}_3(z) \quad (2.93)$$

onde $\sigma(\omega)$ satisfaz

$$\mathbf{h}_1''(\omega, L)\sigma(\omega) = -\mathbf{h}_3''(\omega, L) \quad (2.94)$$

2.3.1 Resposta ao Desbalanço

Como visto na seção anterior, as velocidades críticas ocorrem quando a carga oscilatória, devido ao desbalanço do eixo rotor, excita uma das frequências naturais de vibração do sistema. Nestes casos os modos de vibração são amplificados.

A resposta de eixos rotores ao desbalanço tem sido exaustivamente estudada por muitos pesquisadores pois afetam severamente o desempenho do equipamento rotativo podendo leva-lo a sérios danos [Fang, 1998], [Lee, 1996], [Tang,1995], [Hong, 1997].

Quando um eixo, colocado sobre suportes, gira com uma determinada velocidade Ω , devido ao efeito giroscópico e ao seu desbalanço, este executa uma órbita (rotação) em torno do seu eixo de simetria. Este movimento de rotação, dita resposta ao desbalanço, pode ser síncrona, quando está no mesmo sentido da velocidade do eixo, ou retrógrada, quando está em sentido contrário. As primeiras são as mais problemáticas pois causam instabilidades dinâmicas.³

Considere-se então o problema matricial de valor inicial definido por

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{G}\dot{\mathbf{U}}(t, z) + \mathbb{K}\mathbf{U}(t, z) = \rho e\omega^2 e^{i\omega t} \mathbf{V}(z) \quad (2.95)$$

$$\mathbf{U}(0, z) = \mathbf{U}_0(z) \text{ e } \dot{\mathbf{U}}(0, z) = \dot{\mathbf{U}}_0(z)$$

³Matematicamente, as instabilidades dinâmicas são caracterizadas por autovalores do sistema complexos com parte real positiva. As vibrações síncronas podem ser subsíncronas ou ainda supersíncronas. Para maiores detalhes veja-se [Vance, 1987], [Childs, 1993].

munido de condições de contorno homogêneas onde e é a excentricidade do eixo e ω é a frequência da carga oscilatória devido ao desbalanço. Aqui $\mathbf{V}(z)$ é uma função representando a distribuição do desbalanço do eixo rotor ao longo de seu comprimento z . Pelo método dos coeficientes a determinar $\mathbf{U}(t, z)$ será da forma

$$\mathbf{U}(t, z) = e^{i\omega t} \mathbf{W}(z) \quad (2.96)$$

onde $\mathbf{W}(z)$ satisfaz o problema matricial de contorno

$$\mathcal{M} \mathbf{W}^{iv}(z) + \mathcal{G}(\omega) \mathbf{W}''(z) + \mathcal{K}(\omega) \mathbf{W}(z) = \rho e \omega^2 \mathbf{V}(z) \quad (2.97)$$

$$\mathbb{B} \mathbf{W} = 0$$

e as matrizes \mathcal{M} , $\mathcal{G}(\omega)$ e $\mathcal{K}(\omega)$ são as mesmas definidas na seção anterior (veja-se sec 2.3.1).

Em termos de operadores tem-se que

$$\mathbb{L}(\omega) \mathbf{W}(z) = \mathbf{Q}(z) \quad (2.98)$$

$$\mathbb{B} \mathbf{W} = 0$$

onde $\mathbf{Q}(z) = \rho e \Omega^2 \mathbf{V}(z)$ e \mathbb{L} é o operador diferencial espacial definido por

$$\mathbb{L} = \mathcal{M} \frac{d^4}{dz^4} + \mathcal{G}(\omega) \frac{d^2}{dz^2} + \mathcal{K}(\omega)$$

A solução para o problema de contorno (2.98) é dada por

$$\mathbf{W}(z) = \int_0^L \mathbf{G}(\omega, z, \xi) \mathbf{Q}(\xi) d\xi \quad (2.99)$$

onde $\mathbf{G}(z, \xi)$ é dita função de Green espacial para o problema de contorno (2.98). Salienta-se que $\mathbf{G}(z, \xi)$ satisfaz as condições de contorno homogêneas, isto é

$$\mathbb{B} \mathbf{G} = 0$$

e pode ser calculada com o uso de (2.48).

Assim a resposta ao desbalanço $\mathbf{U}(t, z)$ é

$$\mathbf{U}(t, z) = \rho e \omega^2 \mathbb{H}(i\omega, z) \mathbf{V}(z) \quad (2.100)$$

onde $\mathbb{H}(i\omega, z)$ é dado por

$$\mathbb{H}(i\omega, z) = \int_0^L \mathbf{G}(z, \eta) \mathbf{V}(\xi) d\xi d\eta \quad (2.101)$$

Tendo então as frequências naturais de vibração, relacionadas com o problema de autovalor já discutido na seção anterior (veja-se sec. 2.3) e a resposta ao desbalanço pode-se fazer uma estimativa do intervalo das velocidades de operação do equipamento rotativo.

Na próxima seção serão apresentados os resultados das simulações referentes a integral dada por (2.37), que representa o deslocamento do eixo na direção x .

2.4 Simulações

Nesta seção são apresentados os resultados das simulações referentes a integral dupla que aparece em (2.37) para eixos rotores, biapoiado e fixo-apoiado. Tal integral representa o deslocamento na direção x . Consideram-se forçantes $\mathbf{Q}_x(z)$ do tipo:

- constantes

$$\mathbf{Q}_x(z) = 10$$

- seccionalmente contínuas

$$\mathbf{Q}_x(z) = \begin{cases} -2 & ; \quad 0 < z < 1/2 \\ 2 & ; \quad 1/2 < z < 1 \end{cases}$$

- pulso triangular

$$\mathbf{Q}_x(z) = \begin{cases} z & ; \quad 0 < z < 1/2 \\ 1 - z & ; \quad 1/2 < z < 1 \end{cases}$$

– pulso retangular

$$\mathbf{Q}_x(z) = \begin{cases} 0 & ; 0 < z < 1/4 \\ 10 & ; 1/4 < z < 3/4 \\ 0 & ; 3/4 < z < 1 \end{cases}$$

• senóide

$$\mathbf{Q}_x(z) = \sin(2z)$$

usualmente encontrados em teoria de sinais e controle [Oppenheim e Schafer , 1998].

Para tal consideram-se os seguintes valores para os parâmetros físicos [Fang, 1998]:

grandeza	L	E	I	ρ
valor (unidade)	1 m	$2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$	$4.23 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$	7800 Kg/m^3
grandeza	A	Ω	ω	
valor (unidade)	$7.2975 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$	1500 rd/s	100 Hz	

Tabela 2.3 Valores dos parâmetros físicos

Para um eixo biapoiado, com base nos valores dos parâmetros físicos dados na tabela (2.3) e no que foi exposto na seção anterior, as funções de Green espaciais $\mathbf{G}(z, \xi)$ e $\overline{\mathbf{G}}(z, \xi)$ relacionadas, respectivamente, com os operadores $\mathbf{L} + i\mathbf{M}$ e $\mathbf{L} - i\mathbf{M}$ são dadas explicitamente por

$$\mathbf{G}(z, \xi) = \begin{cases} \begin{aligned} & -0.1195 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + \\ & +0.1294 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) + \\ & +0.1198 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + \\ & +0.0454 \sin(1.6086z) \sin(1.6086\xi) \end{aligned} & , \quad 0 \leq z \leq \xi \\ \begin{aligned} & -0.1195 \sinh(1.6124\xi) \cosh(1.6124z) + \\ & +0.1294 \sinh(1.6124\xi) \sinh(1.6124z) + \\ & +0.1198 \sin(1.6086\xi) \cos(1.6086z) + \\ & +0.0454 \sin(1.6086\xi) \sin(1.6086z) \end{aligned} & , \quad \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.102)$$

e

$$\overline{\mathbf{G}}(z, \xi) = \begin{cases} \begin{aligned} & -0.1195 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + \\ & +0.1294 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) + \\ & +0.1198 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + \\ & 0.0045 \sin(1.6086z) \sin(1.6086\xi) \end{aligned} , & 0 \leq z \leq \xi \\ \begin{aligned} & -0.1195 \sinh(1.6124\xi) \cosh(1.6124z) + \\ & +0.1294 \sinh(1.6124\xi) \sinh(1.6124z) + \\ & +.1198 \sin(1.6086\xi) \cos(1.6086z) + \\ & +0.0045 \sin(1.6086\xi) \sin(1.6086z) \end{aligned} , & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.103)$$

Para eixo fixo apoiado tem-se que

$$\mathbf{G}(z, \xi) = \begin{cases} \begin{aligned} & 0.1157 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + 0.0438 \sin(1.6086z) \sin(1.60867\xi) + \\ & +0.0155 \sin(1.6086z) \cosh(1.61242\xi) - 0.0168 \sin(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\ & +0.0411 \cos(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0445 \cos(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) - \\ & -0.0411 \cosh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + 0.0445 \cosh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) - \\ & -0.0411 \cos(1.6086z) \cos(1.6086\xi) - 0.0015 \cos(1.6086z) \sin(1.6086\xi) - \\ & -0.1155 \sinh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) - 0.0043 \sinh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\ & +0.1066 \cosh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) + 0.0040 \cosh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) - \\ & -0.0040 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + 0.0043 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) \end{aligned} , & 0 \leq z \leq \xi \\ \begin{aligned} & 0.0043 \sin(1.6086z) \sin(1.6086\xi) + 0.1157 \cos(1.6086z) \sin(1.6086\xi) - \\ & -0.0445 \sinh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) - 0.0016 \sinh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\ & +0.0411 \cosh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) + 0.0015 \cosh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\ & +0.0445 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0411 \cosh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) - \\ & -0.0015 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) - 0.0411 \cos(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + \\ & +0.0040 \sin(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0043 \sin(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\ & +0.1066 \cos(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.1155 \cos(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\ & +0.0043 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) - 0.0040 \cosh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) \end{aligned} , & \xi < z \leq L \end{cases} \quad (2.104)$$

$$\overline{\mathbf{G}}(z, \xi) = \left\{ \begin{array}{l}
0.1157 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + 0.0043 \sin(1.6086z) \sin(1.6086\xi) + \\
+ 0.0015 \sin(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0016 \sin(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\
+ 0.0411 \cos(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0445 \cos(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) - \\
- 0.0411 \cosh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + 0.0445 \cosh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) - \\
- 0.411 \cos(1.6086z) \cos(1.6086\xi) - 0.0015 \cos(1.6086z) \sin(1.6086\xi) - \\
- 0.1155 \sinh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) - 0.0043 \sinh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\
+ 0.1066 \cosh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) + 0.0040 \cosh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) - \\
- 0.0040 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) + 0.0043 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) \\
0.0043 \sin(1.6086z) \sin(1.6086\xi) + 0.1157 \cos(1.6086z) \sin(1.6086\xi) - \\
- 0.0445 \sinh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) - 0.0016 \sinh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\
+ 0.0411 \cosh(1.6124z) \cos(1.6086\xi) + 0.0015 \cosh(1.6124z) \sin(1.6086\xi) + \\
+ 0.0445 \sinh(1.6124z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0411 \cosh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) - \\
- 0.0015 \sin(1.6086z) \cos(1.6086\xi) - 0.0411 \cos(1.6086z) \cos(1.6086\xi) + \\
+ 0.0040 \sin(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.0043 \sin(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\
+ 0.1066 \cos(1.6086z) \cosh(1.6124\xi) - 0.1155 \cos(1.6086z) \sinh(1.6124\xi) + \\
+ 0.0043 \sinh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi) - 0.0040 \cosh(1.6124z) \sinh(1.6124\xi)
\end{array} \right. , \quad \begin{array}{l}
0 \leq z \leq \xi \\
\xi < z \leq L
\end{array}
\quad (2.105)$$

As figuras (2.3) e (2.4) a seguir mostram os deslocamentos obtidos com (2.39) para uma frequência de $\omega=100Hz$ considerando-se os casos, biapoiado e fixo-apoiado, e forçantes $\mathbf{Q}_x(z)$ descritos na pág.32 deste capítulo.

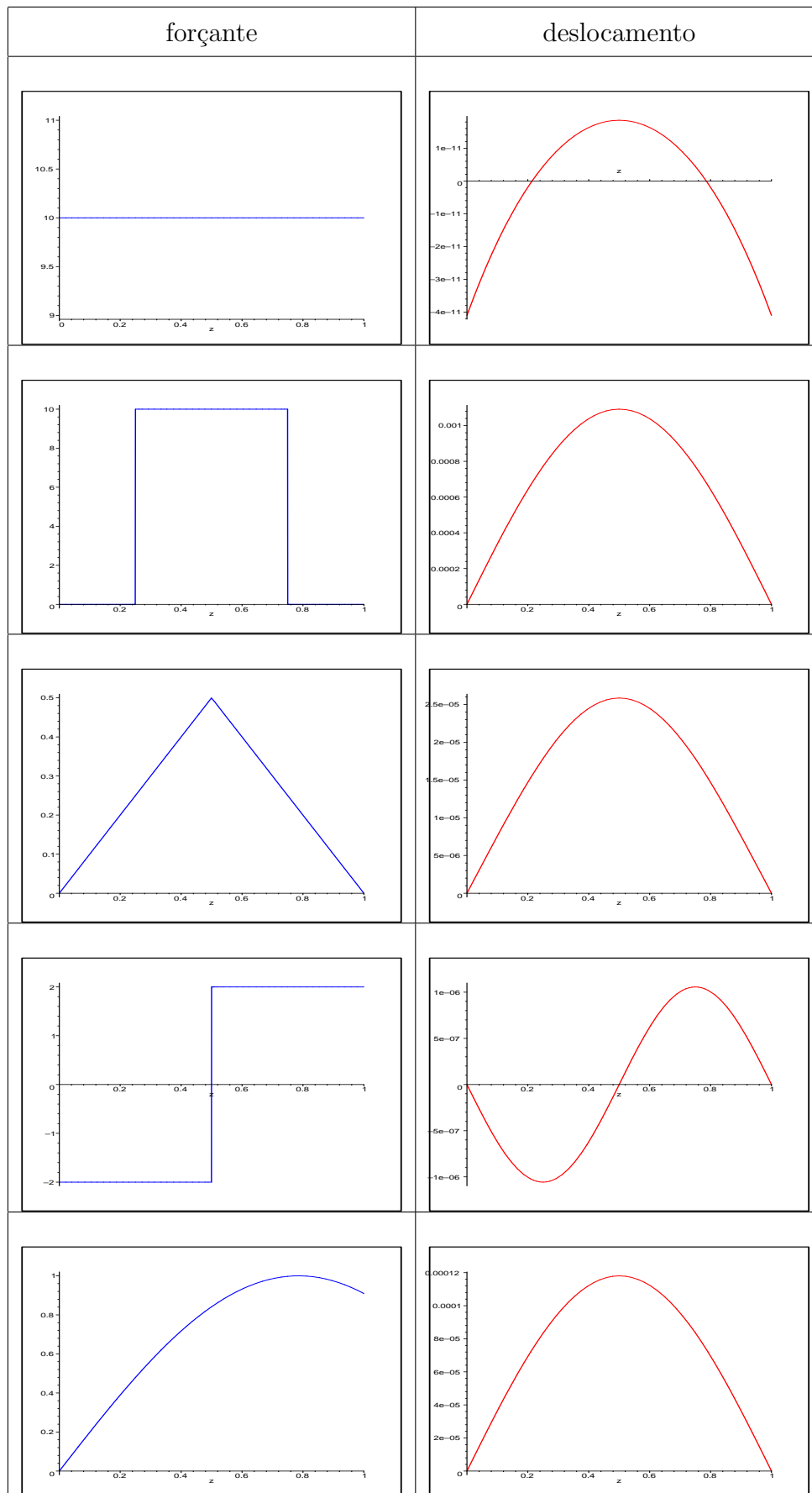


Figura 2.3 Deslocamento para $\omega=100Hz$ de um eixo biapoiado

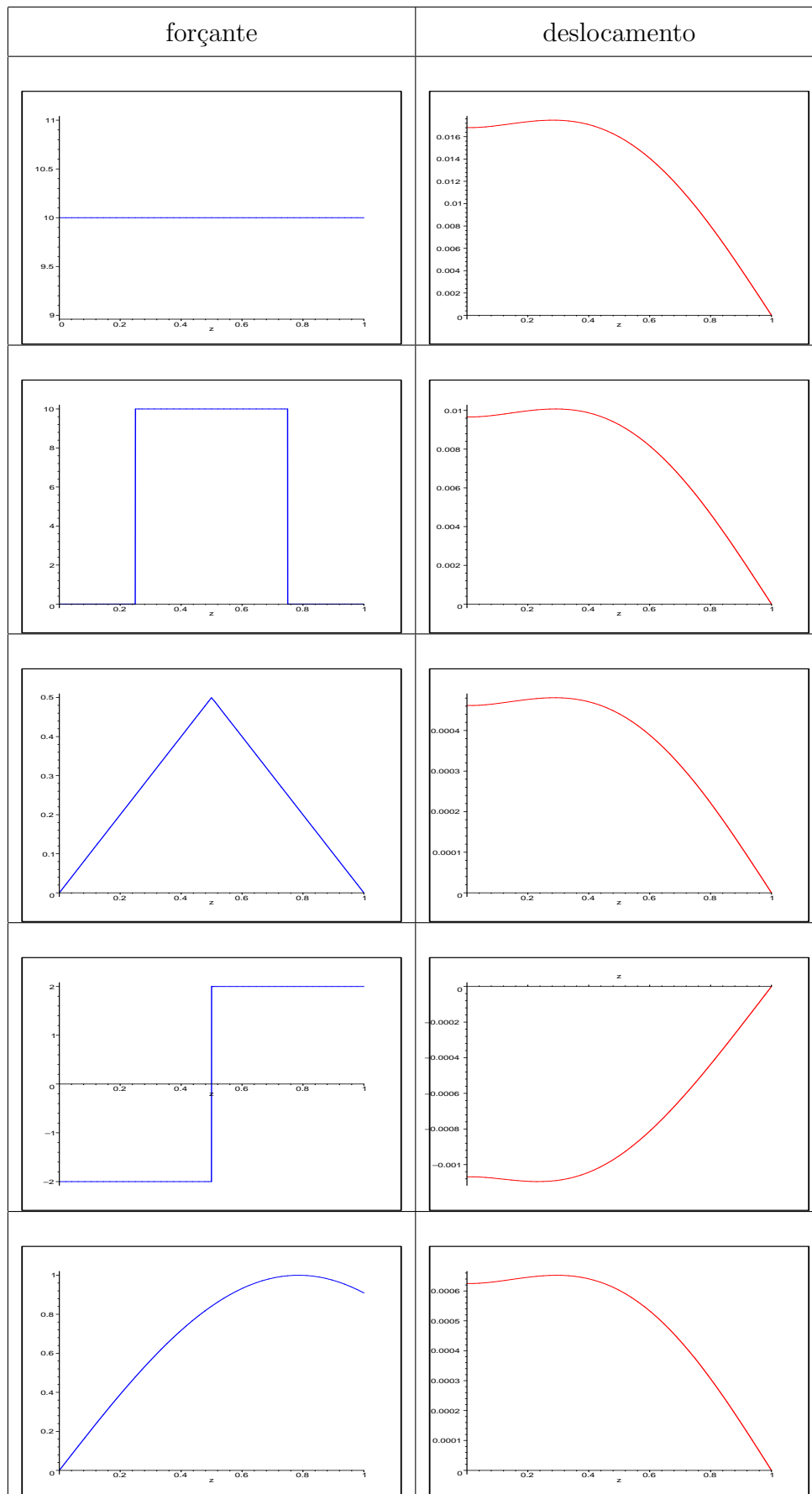


Figura 2.4 Deslocamento para $\omega=100Hz$ de um eixo fixo-apoiado

Na figura (2.3), tem-se deslocamentos representativos para forçantes do tipo, pulso quadrangular e oscilatório do tipo seno, no caso biapoiado. Para o caso fixo apoiado, veja-se tabela (2.4), todos representam deslocamentos exceto para o forçante tipo onda quadrada.

3 OSCILAÇÕES EM SISTEMAS LINEARES NÃO RESSONANTES DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo obtém-se a resposta periódica para sistemas lineares de 1ª ordem não ressonantes em termos da **Função de Green T -periódica** sendo que esta é caracterizada em termos da base dinâmica normalizada obtida de uma solução fundamental [Claeyssen, 1990].

O estudo para sistemas de 1ª ordem deve-se ao fato de que, em muitos problemas encontrados na área de engenharia, utiliza-se a redução ao espaço de estado. Será considerado neste trabalho o caso em que todos os autovalores são distintos entre si e da frequência da excitação externa (caso não ressonante).

3.1 Caracterização da Função de Green T -Periódica em Sistemas de 1ª Ordem

Considere-se o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

- $\mathbf{q}(t)$ é um vetor $n \times 1$
- \mathbf{M} e \mathbf{A} são matrizes $n \times n$
- $\mathbf{f}(t)$ é um vetor $n \times 1$ de funções contínuas por partes e tal que $\mathbf{f}(t+T) = \mathbf{f}(t)$ com período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ onde ω é a frequência de $\mathbf{f}(t)$.

Procuram-se soluções $\mathbf{q}(t)$ de (3.1) tais que

$$\mathbf{q}(t+T) = \mathbf{q}(t) \tag{3.2}$$

isto é, soluções T - periódicas. Na literatura esta solução é definida como sendo [Gudonov, 1997], [Starzinski, 1977], [Daleckii, 1974],

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t-s)\mathbf{f}(s)ds = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{f}(t-s)ds \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{\Gamma}(t)$ é dita **Função de Green T -periódica**.

A função de Green T -periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ é caracterizada pelas seguintes propriedades:

- satisfaz a equação homogênea, isto é,

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}(t) = 0 \quad (3.4)$$

- periodicidade, isto é,

$$\mathbf{\Gamma}(T^-) = \mathbf{\Gamma}(0^-) \quad (3.5)$$

- condição de salto de $\mathbf{\Gamma}(t)$ em $t = 0$, isto é,

$$\mathbf{M} [\mathbf{\Gamma}(0^+) - \mathbf{\Gamma}(0^-)] = \mathbf{I} \quad (3.6)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n

Suponha-se que $\mathbf{\Gamma}(t)$ seja definida como segue

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t)\mathbf{C} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t)\mathbf{D} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

onde, \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes $n \times n$ constantes a serem determinadas utilizando-se as propriedades (3.4), (3.5) e (3.6) e $\mathbf{h}_1(t)$ é a solução dinâmica normalizada do problema (3.1).

Tal solução satisfaz o problema de valor inicial com condições iniciais impulsivas

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{A}\mathbf{h}_1(t) &= \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{A} \\ \mathbf{h}_1(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ou seja, $\mathbf{h}_1(t)$ é uma solução a direita e a esquerda de (3.1) . Logicamente $\{\mathbf{h}_1(t)\}$ é uma base para o conjunto das soluções de (3.1), dita **base dinâmica normalizada** . Esta relaciona-se com $\{\mathbf{h}(t)\}$, dita **base dinâmica**, por [Moraes, 2002]

$$\mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{M} \quad (3.9)$$

onde

$$\mathbf{h}(t) = e^{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}t}\mathbf{M}^{-1} \quad (3.10)$$

satisfaz o problema

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{h}(t) &= \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{A} \\ \mathbf{M}\mathbf{h}(0) &= \mathbf{h}(0)\mathbf{M} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim das relações (3.9) e (3.10) decorre que

$$\mathbf{h}_1(t) = e^{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}t} \quad (3.12)$$

Além disso, de (3.10) e (3.12), decorre que $\mathbf{h}_1(t)$ satisfaz a seguinte propriedade de semi-grupo

$$\mathbf{h}_1(t+s) = \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\mathbf{h}(s)\mathbf{M} = \mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_1(s) = \mathbf{h}_1(s)\mathbf{h}_1(t) \quad (3.13)$$

De (3.5) e (3.7) segue que

$$\mathbf{h}_1(T)\mathbf{C} = \mathbf{D} \quad (3.14)$$

Por outro lado, de (3.6) decorre que

$$\mathbf{C} - \mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1} \quad (3.15)$$

e daí, utilizando (3.14) e (3.15), vem que

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad (3.16)$$

onde $[\mathbf{I} - \mathbf{h}(\Gamma)]$ é uma matriz inversível (veja-se o apêndice A) pois, considera-se neste trabalho o caso não ressonante. Nestas condições, (3.7) pode ser reescrita como

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t) \mathbf{h}_1(T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

ou, utilizando a propriedade de semigrupo (3.13) [Claeyssen, 1990], [Claeyssen; Schuchman, 1998]

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t+T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Assim

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \mathbf{f}(s) ds = \int_0^T \Gamma(t) \mathbf{f}(t-s) ds \quad (3.19)$$

vem a ser a solução T - periódica pois, considerando

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}_1(t-s) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(s) ds + \int_t^T \mathbf{h}_1(t-s) \mathbf{h}_1(T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(s) ds \quad (3.20)$$

e derivando (3.20) com o auxílio da regra de Leibniz obtém-se [Gudonov, 1997]

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t) + \int_0^T \dot{\Gamma}(t-s) \mathbf{f}(s) ds \quad (3.21)$$

onde

$$\dot{\Gamma}(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{h}}_1(t) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; 0 \leq t \leq T \\ \dot{\mathbf{h}}_1(t+T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Substituindo-se (3.20) e (3.22) em (3.1), obtém-se que

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{A} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_0^T [\mathbf{M} \dot{\Gamma}(t-s) + \mathbf{A} \Gamma(t-s)] \mathbf{f}(s) ds = \mathbf{f}(t) \quad (3.23)$$

pois $\Gamma(t)$ satisfaz a equação diferencial matricial homogênea definida por (3.4). Sendo assim, $\mathbf{q}(t)$ definida por (3.20) satisfaz a equação diferencial (3.1). Além disso, de (3.20) e da propriedade (3.13) decorre que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= \int_0^T \mathbf{h}_1(-s)\mathbf{h}_1(T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s)ds = \\ &= \int_0^T \mathbf{h}_1(T-s) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s)ds = \mathbf{q}(T) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por outro lado a função de Green T -periódica é única. De fato: considere $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$ duas funções de Green T -periódicas satisfazendo as propriedades (3.4), (3.5) e (3.6) e definidas por

$$\Gamma_1(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t)\mathbf{C}_1 & ; & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}(t)_1\mathbf{D}_1 & ; & -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Gamma_2(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t)\mathbf{C}_2 & ; & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t)\mathbf{D}_2 & ; & -T < t < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Usando a propriedade (3.5) para $\Gamma_1(t)$ e $\Gamma_2(t)$ obtém-se que

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad (3.27)$$

donde segue que

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) \quad (3.28)$$

ou seja, a função de Green T -periódica é única.

Observe-se que de (3.19) e (3.17), obtém-se uma perfeita caracterização da resposta Γ - periódica em termos da base dinâmica normalizada obtida a partir da solução fundamental, ou resposta impulso, do problema (3.1). Salienta-se que tal solução é única pois, o espectro da matriz \mathbf{A} , usualmente denotado por $\sigma(\mathbf{A})$, não contém a frequência ω da excitação externa, fato este que garante a inversibilidade de $[\mathbf{I} - \mathbf{h}(\mathbf{T})]$. Para maiores detalhes veja-se [Daleckii, 1974], pág. 86.

Na próxima seção é apresentada uma breve discussão sobre as condições iniciais da solução T -periódica, definida através da relação (3.19) onde $\mathbf{\Gamma}(t)$ é definida por (3.17), e sua relação com a resposta em frequência de um sistema de 1ª ordem (3.1).

3.1.1 Condição Inicial da Solução Periódica

A solução de (3.1), obtida utilizando-se variação de parâmetros e dada em termos da solução dinâmica normalizada, é

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{h}_1(t)\mathbf{M}^{-1}q_0 + \int_0^t \mathbf{h}_1(t-s)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s)ds \quad (3.29)$$

onde $\mathbf{h}_1(t)$ satisfaz o problema

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{A}\mathbf{h}_1(t) &= \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{A} \\ \mathbf{h}_1(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Observe-se que

- Utilizando a fórmula de variação de parâmetros (3.29), tem-se que $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T)$ se, e somente se

$$q_0 = \mathbf{M} \int_0^T \mathbf{h}_1(T-s) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(s)ds \quad (3.31)$$

- Para a entrada harmônica simples

$$\mathbf{f}(t) = e^{i\omega t}\mathbf{V} \quad (3.32)$$

onde \mathbf{V} é um vetor constante $n \times 1$ e ω a frequência de entrada, tem-se a solução periódica correspondente obtida pelo método dos coeficientes indeterminados

$$\mathbf{q}(t) = e^{i\omega t}\mathbf{H}(i\omega)\mathbf{V} \quad \text{com} \quad \mathbf{H}(i\omega) = (i\omega\mathbf{M} + \mathbf{A})^{-1} \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{H}(i\omega)$ é a resposta em frequência do sistema (3.1).

Então a condição $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T)$ implica na relação

$$\mathbf{H}(i\omega)\mathbf{V} = \left(\int_0^T [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{h}(T-s)e^{i\omega s} ds \right) \mathbf{V} \quad (3.34)$$

Observe-se que $\mathbf{q}(t)$ definida por (3.20) satisfaz a condição inicial do problema (3.1), portanto satisfaz o problema de valor inicial (3.1).

Na próxima seção, são apresentados os resultados das simulações para o comportamento dinâmico de um modelo de aeronaves rígidas. Considera-se para tal a formulação desenvolvida nesta seção.

3.2 Simulações

Nesta seção apresentam-se os resultados gráficos das simulações referentes ao comportamento dinâmico de aeronaves rígidas sob ação de forças oscilatórias. Tal comportamento pode ser modelado considerando-se a aeronave como um corpo rígido que sofre ação de forças do tipo gravitacional, aerodinâmica e de propulsão, como mostra a figura (3.1) à seguir. Para maiores detalhes veja-se [Lyshevski, 2001], [Moraes, 2002].

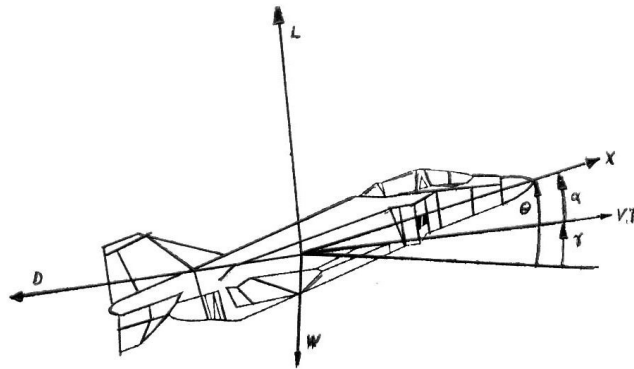


Figura 3.1 Forças atuantes na aeronave

Considere-se então o modelo de espaço de estado

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = \mathbf{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{F}(t) \quad (3.35)$$

com o vetor de estado $\mathcal{X}(t)$ definido por

$$\mathcal{X}(t) = \left[v \quad \alpha \quad q \quad \theta \quad \beta \quad p \quad r \quad \varphi \quad \psi \right]^T \quad (3.36)$$

onde

- v vetor velocidade - $[m/s]$
- α ângulo de ataque. Corresponde ao ângulo formado entre o vetor velocidade do avião e o eixo x de orientação do seu corpo - $[rad]$
- β ângulo de deslizamento lateral - $[rad]$
- θ ângulo de inclinação longitudinal, formado entre o horizonte e o eixo x do avião - $[rad]$
- φ ângulo de giro em torno do eixo paralelo ao eixo normal do avião - $[rad]$
- ψ ângulo de rolamento longitudinal - $[rad]$
- p , q e r respectivas variações dos ângulos θ , φ e ψ , conhecidos na literatura como ângulos de Euler - $[rad/s]$

A matriz \mathbf{A} e a carga oscilatória $\mathcal{F}(t)$, consideradas nas simulações são

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2.516 & 8.4 & -0.9 & -9.6 & -1.5 & -0.27 & -0.086 & 0 & 0 \\ -0.003 & -3.7 & 1 & 0 & 0.08 & 0.062 & 0.009 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 3.9 & -3.35 & 0 & 0.017 & 0.0038 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.003 & 0.15 & 0.02 & 0.97 & -3.06 & 0.13 & -0.91 & 0 & 0 \\ 0.00001 & 0.71 & 0.03 & 0.01 & -48 & -6.0 & 0.22 & 0 & 0 \\ 0.00001 & -0.94 & 0.06 & 0.005 & 9.2 & -0.028 & -3.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2.5 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

e

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_1(t) + \mathcal{F}_2(t) + \mathcal{F}_3(t) \quad (3.38)$$

onde

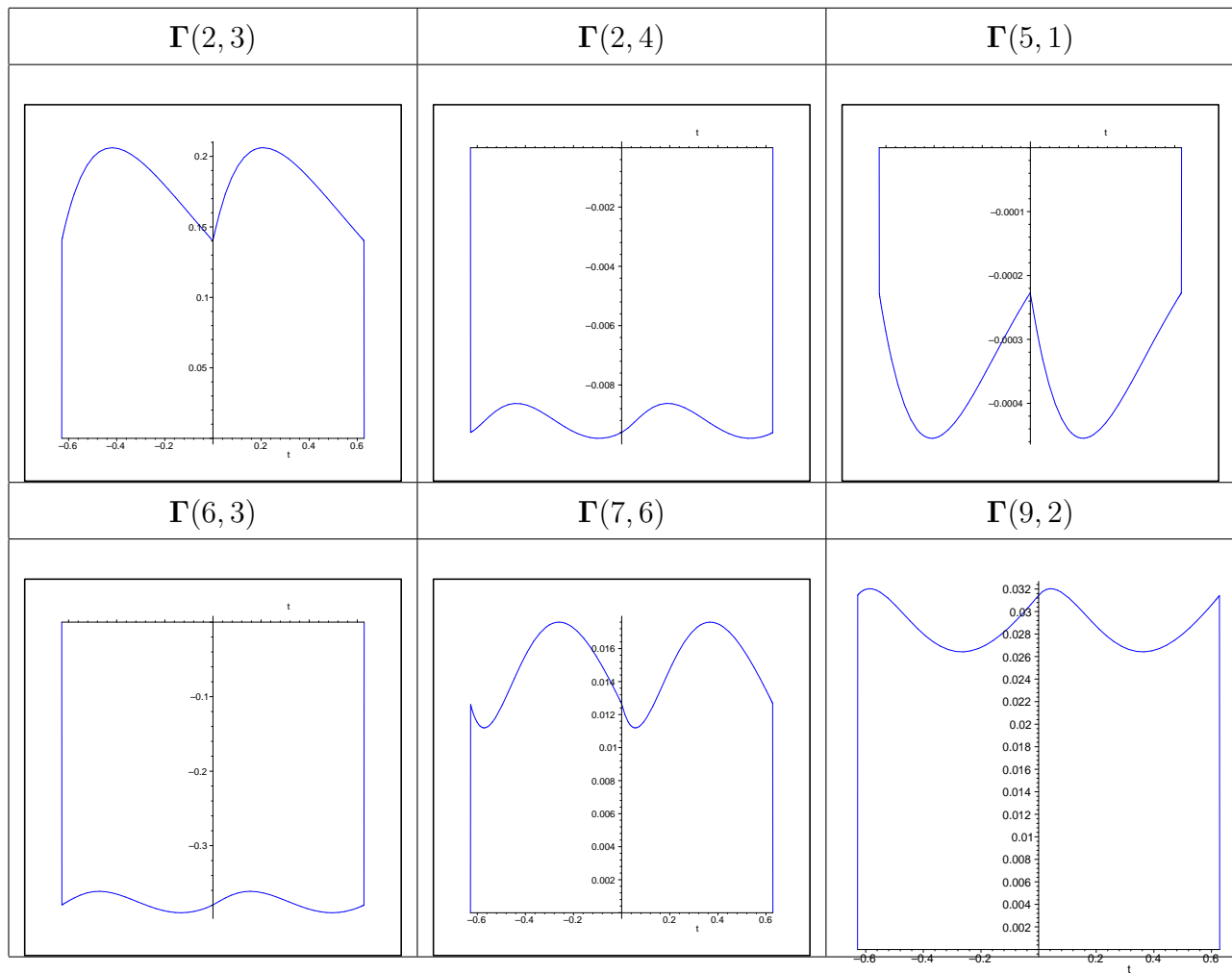
$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1(t) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ e^{10it} \ e^{10it} \ e^{10it} \ e^{10it} \right]^T \\
 \mathcal{F}_2(t) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.5e^{30it} \ 1.5e^{30it} \ 1.5e^{30it} \ 1.5e^{30it} \right]^T \\
 \mathcal{F}_3(t) &= \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3.5e^{-40it} \ 3.5e^{-40it} \ 3.5e^{-40it} \ 3.5e^{-40it} \right]^T
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para efeitos computacionais considerou-se conveniente deslocar o espectro da matriz \mathbf{A} .

São apresentados na tabela (3.1) a seguir os gráficos de algumas componentes da função de Green T -periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ obtida utilizando-se

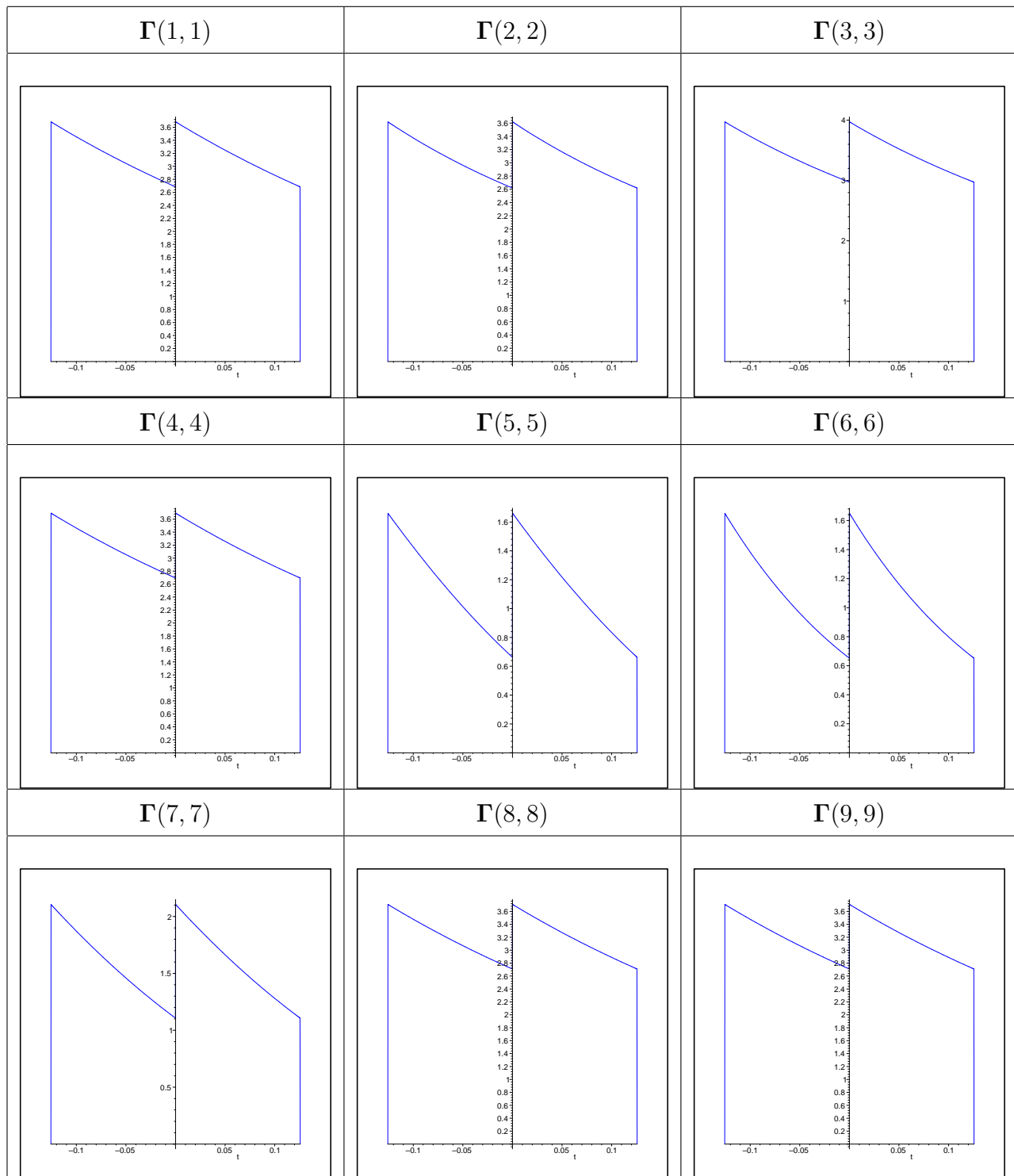
$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; \ 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t+T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; \ -T < t < 0 \end{cases}$$

Os gráficos das demais componentes são apresentados no anexo B.

Tabela 3.1 - Componentes de $\Gamma(t)$

Observa-se, da tabela (3.1), a periodicidade das componentes da matriz de Green.

Na tabela (3.2) a seguir são apresentados os gráficos das componentes $\Gamma_{i,i}(t)$ da diagonal da matriz de Green T -periódica.

Tabela 3.2 - Componentes da diagonal de $\Gamma(t)$

Observa-se da tabela (3.2) que a condição de salto

$$\mathbf{M} [\Gamma(0^+) - \Gamma(0^-)] = \mathbf{I} \quad (3.40)$$

com $\mathbf{M} = \mathbf{I}$, é satisfeita para os elementos da diagonal da matriz de Green T -periódica.

Nas tabelas (3.3) e (3.4) são apresentados os gráficos comparativos entre as partes real e imaginária da resposta T -periódica obtida utilizando-se

$$\mathcal{X}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t-s) \mathcal{F}(s) ds$$

onde

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_1(t) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_1(t+T) [\mathbf{I} - \mathbf{h}_1(T)]^{-1} \mathbf{M}^{-1} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases}$$

designada pela linha verde contínua e $\mathcal{X}(t)$ obtida utilizando-se

$$\mathcal{X}(t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}(i\omega_i) \mathcal{F}_i(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{H}(i\omega) = (i\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3.41)$$

designada pela linha pontilhada azul com $\mathcal{F}_i(t)$ definidas por (3.39).

A resposta $\mathcal{X}(t)$ possui componentes complexas devido ao fato de $\mathcal{F}(t)$ ser oscilatória complexa, podendo ser escrita na forma polar

$$\mathcal{X}_j(t) = \rho_j(t) e^{i\theta_j(t)}, \quad j = 1 : 9$$

onde

$$\rho_j(t) = \sqrt{\text{Re}(\mathcal{X}_j(t))^2 + \text{Im}(\mathcal{X}_j(t))^2}$$

e

$$\theta_j = \arctan \left(\frac{\text{Im}(\mathcal{X}_j(t))}{\text{Re}(\mathcal{X}_j(t))} \right)$$

Devido a periodicidade de $\mathcal{X}(t)$ as componentes são curvas fechadas no plano. Além disso, as amplitudes $\rho_j(t)$ e as fases $\theta_j(t)$, são T -periódicas como mostra a figura a seguir.

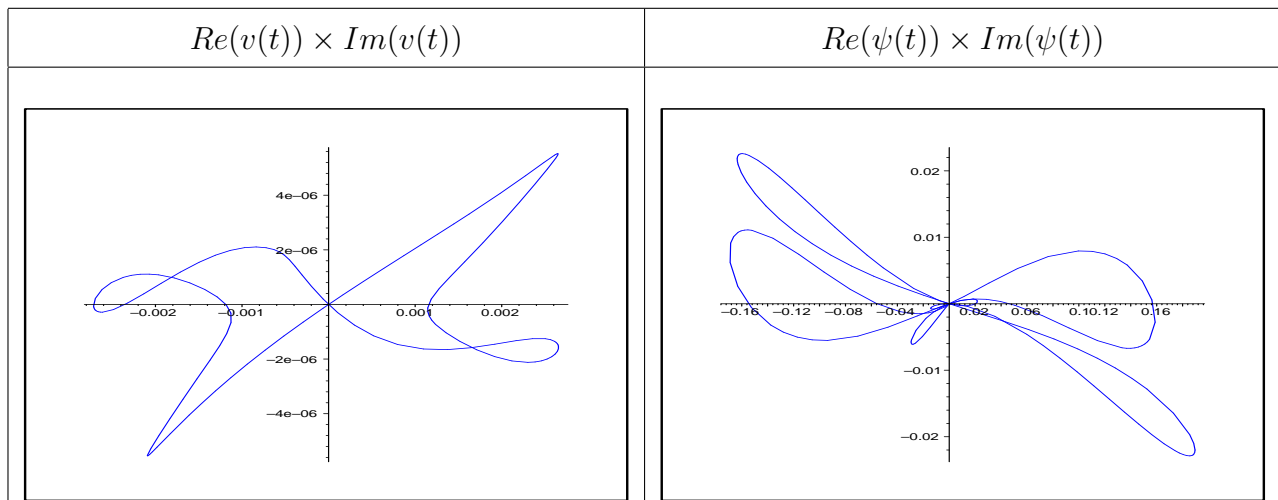


Figura 3.2 - Gráficos das curvas $Re(\mathcal{X}) \times Im(\mathcal{X})$ para t de 0 a $4T$

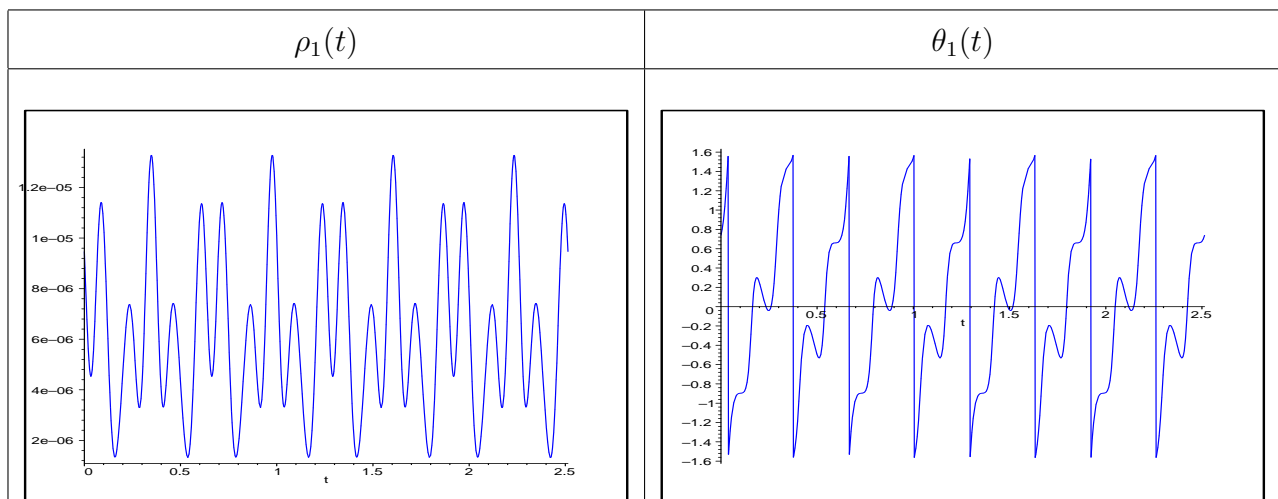
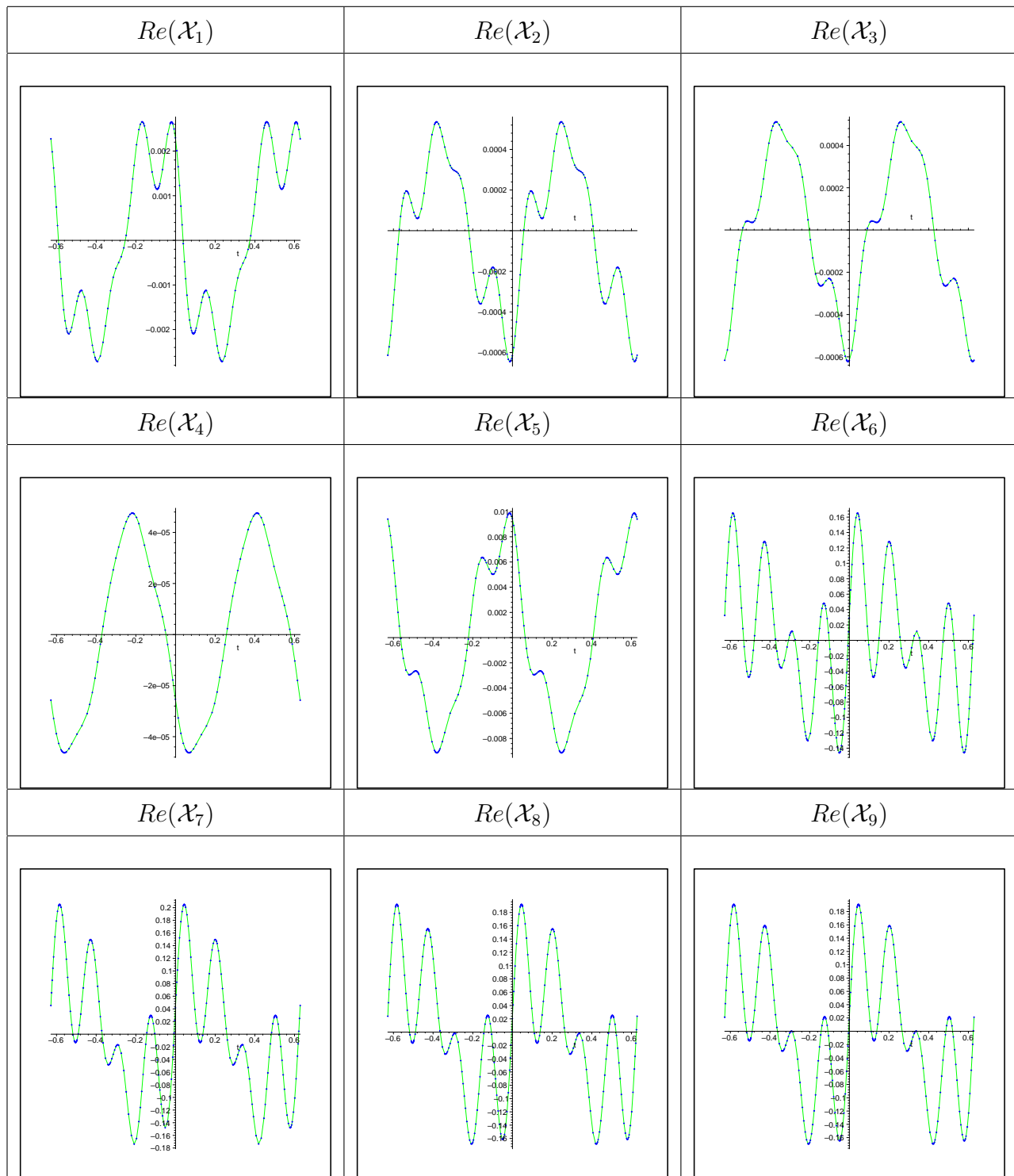


Figura 3.3 - Gráficos da amplitude e da fase para $v(t)$

Em [Newland, 1989], é discutido a forma polar de autovalores complexos.

Tabela 3.3 - Gráficos comparativos das partes reais de $\mathcal{X}(t)$

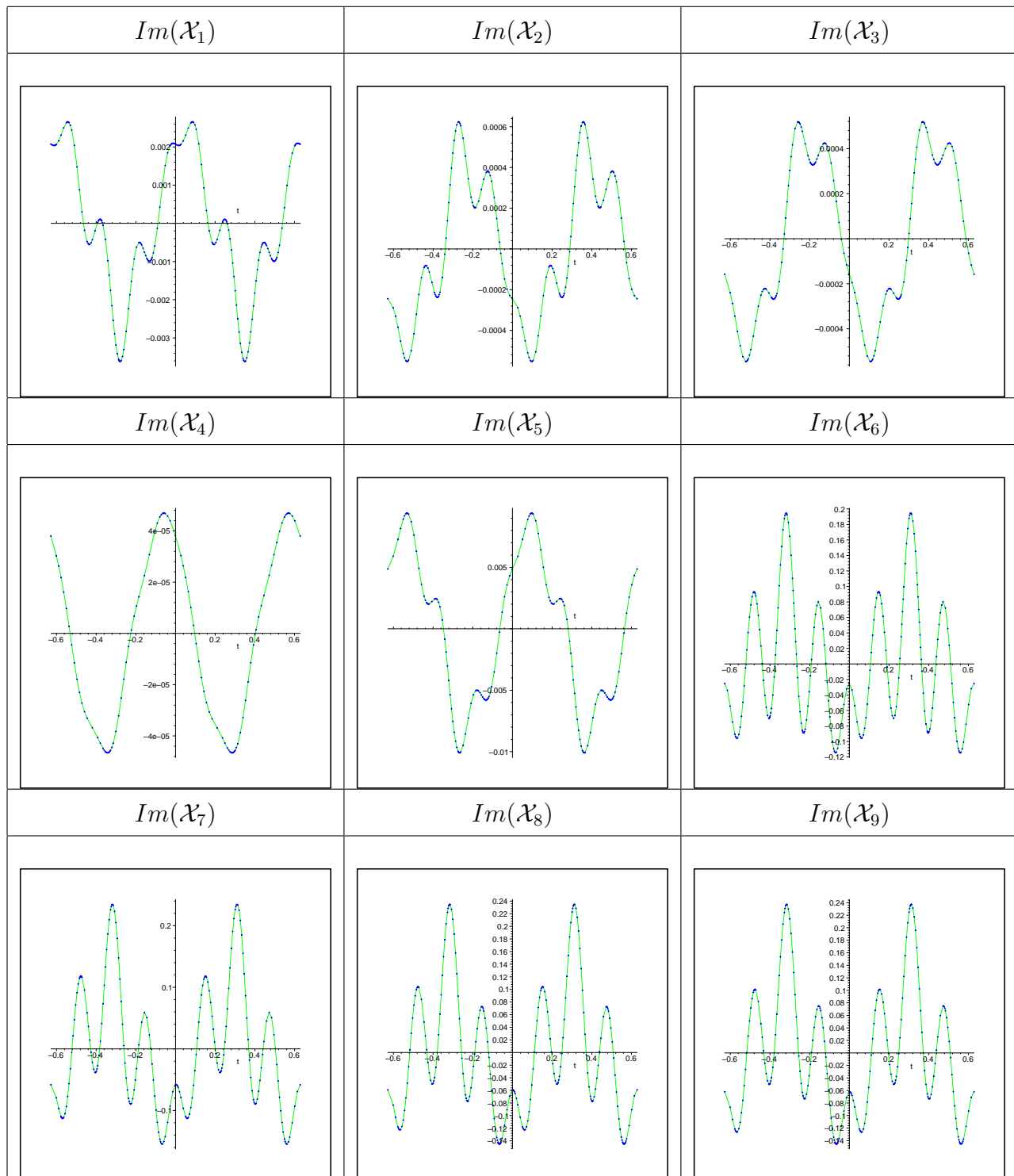


Tabela 3.4 - Gráficos comparativos das partes imaginárias de $\mathcal{X}(t)$

Observa-se das tabelas (3.4) e (3.3) que as respostas T -periódicas obtidas utilizando, a formulação desenvolvida na seção anterior, veja-se (3.17) e (3.3), e o descrito por (3.41) coincidem. Isto significa que a função de Green T -periódica $\Gamma(t)$, para um sistema

matricial de 1ª ordem, pode ser perfeitamente caracterizada em termos da base dinâmica normalizada $\mathbf{h}_1(t)$ considerando-se suas propriedades, veja-se (3.4), (3.5) e (3.6). Como consequência imediata deste fato tem-se que a resposta T -periódica $\mathcal{X}(t)$ também está perfeitamente caracterizada em termos da base dinâmica posto que

$$\mathcal{X}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t-s)\mathcal{F}(s)ds$$

Seguindo um raciocínio análogo, no próximo capítulo a função de Green T -periódica é obtida para sistemas matriciais de 2ª ordem não ressonantes em termos da base dinâmica matricial normalizada. Sob esta ótica, são estudados dois casos particulares, quais sejam:

- O caso conservativo
- Caso amortecido com amortecimento do tipo Rayleigh

Salienta-se que esta é uma das contribuições deste trabalho.

4 A FUNÇÃO DE GREEN T - PERIÓDICA EM SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

Considere-se o sistema matricial de 2^a ordem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde

- \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes quadradas de ordem n ditas matrizes, massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.
- $\mathbf{q}(t)$ um vetor $n \times 1$ de coordenadas generalizadas
- $\mathbf{f}(t)$ um vetor $n \times 1$ contínuo por partes e periódico, ou seja, $\mathbf{f}(t + T) = \mathbf{f}(t)$ com $T = \frac{2\pi}{\omega}$ onde ω é a frequência da excitação externa

Nesta seção propõe-se obter a solução T - periódica como sendo

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t - s)\mathbf{f}(s)ds \quad (4.2)$$

onde, da mesma maneira que para sistema lineares de 1^a ordem, $\mathbf{\Gamma}(t)$ é dita **Função de Green T - periódica**. Será estabelecido, a seguir, que a função $\mathbf{\Gamma}(t)$ que permite obter a caracterização (4.2) cumpre as seguintes propriedades

- $\mathbf{\Gamma}(t)$ satisfaz a equação diferencial matricial de 2^a ordem homogênea

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{\Gamma}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{\Gamma}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{\Gamma}(t) = 0 \quad (4.3)$$

- $\mathbf{\Gamma}(t)$ e $\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)$ são periódicas de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, isto é

$$\mathbf{\Gamma}(T^-) = \mathbf{\Gamma}(0^-) \quad (4.4)$$

e

$$\dot{\Gamma}(T^-) = \dot{\Gamma}(0^-) \quad (4.5)$$

- $\Gamma(t)$ é contínua para todo t , em particular, é contínua em $t = 0$, ou seja,

$$\Gamma(0^+) = \Gamma(0^-) \quad (4.6)$$

- condição de salto na derivada 1^a, isto é

$$\mathbf{M} \left[\dot{\Gamma}(0^+) - \dot{\Gamma}(0^-) \right] = \mathbf{I} \quad (4.7)$$

onde \mathbf{I} é a identidade de ordem n e \mathbf{M} é a matriz massa

Utilizando as propriedades descritas acima obtem-se $\Gamma(t)$.

4.1 Base Dinâmica

A função de Green periodica será determinada como o uso de uma base matricial adequada de soluções de (4.1), aqui denotada por $\{\phi_1(t), \phi_2(t)\}$. Para tal suponha-se que $\Gamma(t)$ seja definida como segue

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \phi_1(t)\mathbf{P} + \phi_2(t)\mathbf{Q} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \phi_1(t)\mathbf{R} + \phi_2(t)\mathbf{S} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

onde as matrizes constantes \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{S} devem ser determinadas utilizando-se as propriedades (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7).

Serão consideradas duas bases matriciais geradas por uma solução fundamental $\mathbf{h}(t)$ para o conjunto de soluções de (4.1). A primeira $\{\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{h}}(t)\}$, dita **base dinâmica**,

onde $\mathbf{h}(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) &= 0 \\ \mathbf{h}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.9}$$

ou

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}(t)\mathbf{K} &= 0 \\ \mathbf{h}(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}(0)\mathbf{M} &= \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.10}$$

ou seja, $\mathbf{h}(t)$ é uma solução a direita e a esquerda para o problema de valor inicial com condições impulsivas descrito acima.

A segunda $\{\mathbf{h}_0(t), \mathbf{h}_1(t)\}$, dita **base dinâmica normalizada**, onde $\mathbf{h}_0(t)$ e $\mathbf{h}_1(t)$ satisfazem, respectivamente, os seguintes problemas de valor inicial [Claeyssen,1999]

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_0(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}_0(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}_0(t) &= \ddot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}_0(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_0(0) = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_0(0) &= 0\end{aligned}\tag{4.11}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}_1(t) &= \ddot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_1(0) &= \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.12}$$

A base dinâmica e a base dinâmica normalizada estão relacionadas por [Moraes, 2002]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(t) & \mathbf{h}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) & \dot{\mathbf{h}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix}\tag{4.13}$$

donde segue que

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{C} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\tag{4.14}$$

Deve-se salientar que a solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$ pode ser obtida aplicando-se o método operacional ao problema (4.1). Recentemente [Copetti, 2002] obteve uma expressão analítica para a matriz resposta impulso, utilizando a análise modal adjunta e considerando sistema matriciais de 2^a ordem não desacopláveis, concentrados e distribuídos.

Para o problema matricial adjunto, isto é

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}^* \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{N}^* \mathbf{q}(t) = 0$$

onde $\mathbf{D} = \mathbf{G} + \mathbf{C}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{K} + \mathbf{H}$, tem-se que

$$\mathbf{h}_*(t) = \mathbf{h}^*(t)$$

com $\mathbf{h}(t)$ solução dinâmica do problema direto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{N}\mathbf{q}(t) = 0$$

e $\mathbf{h}^*(t)$ a solução dinâmica do problema adjunto. Para matrizes \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{N} simétricas a solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$ é simétrica.

A solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$ satisfaz as seguintes propriedades de semi-grupo [Claeysen, 1999]

$$\mathbf{h}(t + s) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}(s) + \mathbf{h}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(s) \quad (4.15)$$

e

$$\dot{\mathbf{h}}(t + s) = \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{h}(s) + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(s) \quad (4.16)$$

onde, $\mathbf{h}_0(t)$ é definida por (4.14) e $\dot{\mathbf{h}}_0(t)$ é obtida por simples derivação desta.

Das propriedades (4.15) e (4.16) obtem-se as seguintes propriedades de semi-grupo para $\mathbf{h}_1(t)$

$$\mathbf{h}_1(t + s) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}_1(s) + \mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_1(s) \quad (4.17)$$

e

$$\dot{\mathbf{h}}_1(t + s) = \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{h}_1(s) + \dot{\mathbf{h}}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_1(s) \quad (4.18)$$

4.2 Obtenção da Função de Green T - Periódica

Nesta seção obtém-se a função de Green T - periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ para um sistema de 2^a ordem sob a ação de uma força periódica em termos da base dinâmica normalizada. Inicialmente, a função de Green $\mathbf{\Gamma}(t)$ será obtida para dois casos particulares, quais sejam, o caso conservativo e o caso de amortecimento do tipo Rayleigh. O procedimento adotado, como se pode ver no decorrer desta seção, é geral, isto é, é válido para qualquer sistema matricial de 2^a ordem não ressonante. Usar-se-a, a partir desse momento, a base dinâmica normalizada, isto é, $\mathbf{\Gamma}(t)$ será definida como

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_0(t)\mathbf{P} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{Q} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_0(t)\mathbf{R} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{S} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

4.2.1 Caso Amortecido

Considere-se a equação diferencial matricial de 2^a ordem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde

- $\mathbf{M}^T = \mathbf{M} > 0$, $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ são matrizes quadradas de ordem n
- $\mathbf{q}(t)$ um vetor $n \times 1$ de coordenadas generalizadas
- \mathbf{f} um vetor $n \times 1$ de funções contínuas e periódicas de período $\frac{2\pi}{\omega}$ onde ω é a frequência da excitação externa.

Tal sistema de equações descreve aproximadamente o movimento de um conjunto de massas conectadas por molas e sob ação de uma força oscilatória aplicada em uma

das massas. Este modelo simplificado serve para simular o comportamento dinâmico de estruturas ou da suspensão de um carro [Meirovitch, 1967], [Inman, 1994], [Ginsberg, 2001]. Neste caso, da relação entre a base dinâmica e a base dinâmica normalizada (veja-se (4.13)), decorre que

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} = \dot{\mathbf{h}}_1(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{M} \quad (4.21)$$

onde $\mathbf{h}(t)$, $\mathbf{h}_0(t)$ e $\mathbf{h}_1(t)$ satisfazem, respectivamente, os seguintes problemas matriciais de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) &= 0 = \ddot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}(0) &= 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0) = \dot{\mathbf{h}}(0)\mathbf{M} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_0(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}_0(t) &= 0 = \ddot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}_0(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_0(0) &= \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_0(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}_1(t) &= 0 = \ddot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_1(0) &= 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_1(0) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde a solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$, $\mathbf{h}_0(t)$ e $\mathbf{h}_1(t)$ são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{h}(t) = \sin(\sqrt{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} t) \left(\sqrt{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{M}^{-1} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{h}_0(t) = \cos(\sqrt{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} t) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{h}_1(t) = \sin(\sqrt{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} t) \left(\sqrt{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}} \right)^{-1} \quad (4.27)$$

Das propriedades de semi grupo (4.15), (4.16) e das relações (4.21), decorrem as seguintes propriedades de semigrupo para o caso conservativo

$$\mathbf{h}_1(t+s) = \mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_0(s) + \mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_0(s) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{h}_1(t-s) = \mathbf{h}_1(t)\mathbf{h}_0(s) - \mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_0(s) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{h}_0(t+s) = \dot{\mathbf{h}}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_1(s) + \mathbf{h}_1(s)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{h}_1(t) \quad (4.30)$$

$$\mathbf{h}_0(t-s) = \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}_0(s) + \mathbf{h}_1(s)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{h}_1(t) \quad (4.31)$$

Como estabelecido anteriormente, $\Gamma(t)$ será definida como

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_0(t)\mathbf{P} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{Q} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_0(t)\mathbf{R} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{S} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Usando-se a condição de periodicidade de $\Gamma(t)$ e $\dot{\Gamma}(t)$ (veja-se (4.4) e (4.5)) decorre o seguinte sistema de equações lineares $2n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0(T) & \mathbf{h}_1(T) \\ \dot{\mathbf{h}}_0(T) & \dot{\mathbf{h}}_1(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

e, da condição de salto sobre $\dot{\Gamma}(t)$, definida em (4.7) e da continuidade de $\Gamma(t)$ (4.6), segue que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S} + \mathbf{M}^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (4.34)$$

resultando, daí o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \\ \dot{\mathbf{h}}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

ou, considerando que $\dot{\mathbf{h}}_1(t) = \mathbf{h}_0(t)$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{h}_0(T)\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Multiplicando ambos os membros de (4.36) pela adjugada da matriz dos coeficientes, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & \mathbf{h}_1(T) \\ \dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & \mathbf{h}_1(T) \\ \dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{h}_0(T)\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

donde segue, utilizando-se as relações de comutatividade ¹

$$\mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_1(t) = \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{h}_1(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_0(t)\dot{\mathbf{h}}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{h}_0(t)$$

que

$$\left[(\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^2 - \mathbf{h}_1(T)\dot{\mathbf{h}}_0(T) \right] \mathbf{R} = \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \quad (4.38)$$

e

$$\left[(\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^2 - \dot{\mathbf{h}}_0(T)\mathbf{h}_1(T) \right] \mathbf{S} = \left[\dot{\mathbf{h}}_0(T)\mathbf{h}_1(T) + (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))\mathbf{h}_0(T) \right] \mathbf{M}^{-1} \quad (4.39)$$

Nestas condições as constantes matriciais \mathbf{T} e \mathbf{W} serão dadas por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^2 \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \quad (4.40)$$

e

$$\mathbf{S} = -\frac{\mathbf{M}^{-1}}{2} \quad (4.41)$$

Considerando-se que $\mathbf{Q} = \mathbf{S} + \mathbf{M}^{-1}$ resulta que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{M}^{-1}}{2} \quad (4.42)$$

e utilizando-se (4.32), (4.40) e (4.41), a função de Green T -periódica pode ser reescrita como

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}_1(T)\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{h}_1(t)\frac{\mathbf{M}^{-1}}{2} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_0(t)\mathbf{h}_1(T)\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{M}^{-1} + \mathbf{h}_1(t)\frac{\mathbf{M}^{-1}}{2} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

¹Para funções analíticas, isto é, que podem ser expandidas em série de potências, como é o caso de $\mathbf{h}(t)$ para um sistema conservativo (veja-se equação (4.25)), é válida a seguinte relação $\mathbf{A}f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A})\mathbf{A}$. Para maiores detalhes veja-se [Claeyssen, 1989]

Aplicando-se as propriedades de semigrupo definidas pelas relações (4.28), (4.29), (4.30) e (4.31), $\mathbf{\Gamma}(t)$ toma a forma

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{h}_0(t - T/2) \mathbf{h}_1(T/2) \mathbf{M}^{-1} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{h}_1(T/2) \mathbf{h}_0(t + T/2) \mathbf{M}^{-1} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Observe-se que a condição de periodicidade $\mathbf{\Gamma}(T^-) = \mathbf{\Gamma}(0^-)$ implica diretamente que $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}(0)$, ou seja, a resposta do sistema (4.45), definida por (4.2), é periódica.

Por outro lado, $\mathbf{q}(t)$ dada por (4.2) onde $\mathbf{\Gamma}(t)$ é definida por (4.44), satisfaz a equação diferencial matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(0) = q_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) &= \dot{q}_0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

De fato, considerando-se

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \int_0^t \mathbf{h}_0(t - s - T/2) (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{h}_1(T/2) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(s) ds + \\ &+ \int_t^T \mathbf{h}_0(t + T/2 - s) (\mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T))^{-1} \mathbf{h}_1(T/2) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(s) ds \end{aligned} \quad (4.46)$$

Aplicando-se a regra de Leibniz à (4.46) obtém-se

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \int_0^T \dot{\mathbf{\Gamma}}(t - s) \mathbf{f}(s) ds \quad (4.47)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t) + \int_0^T \ddot{\mathbf{\Gamma}}(t - s) \mathbf{f}(s) ds \quad (4.48)$$

Substituindo-se (4.46) e (4.48) em (4.45), obtém-se que

$$\mathbf{f}(t) + \int_0^T \left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{\Gamma}}(t - s) \mathbf{f}(s) ds + \mathbf{K}\mathbf{\Gamma}(t - s) \right] = \mathbf{f}(t) \quad (4.49)$$

pois a função de Green T -periódica satisfaz a equação diferencial homogênea

$$\mathbf{M}\ddot{\Gamma}(t) + \mathbf{K}\Gamma(t) = 0$$

Com isso, obteve-se uma caracterização da função de Green T -periódica em termos da base dinâmica normalizada e, conseqüentemente, a resposta T -periódica $\mathbf{q}(t)$ para o caso conservativo (4.45). Em [Starzinski, 1977], a resposta T -periódica $\mathbf{q}(t)$, após a utilização de algumas identidades trigonométricas matriciais ² e as propriedades de semigrupo definidas pelas relações (4.15) e (4.16), é dada em termos da solução dinâmica por

$$\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\dot{\mathbf{h}}(T/2)}{\mathbf{h}(T/2)} \mathbf{f}(s) ds \quad (4.50)$$

onde $\frac{\dot{\mathbf{h}}(T/2)}{\mathbf{h}(T/2)}$ é conhecido na literatura como **Núcleo de Dirichlet**. Para maiores detalhes veja-se [Gudonov, 1997].

4.2.2 Amortecimento do tipo Rayleigh

Considere o sistema descrito pela equação (4.51) abaixo e obtido utilizando-se as equações de Lagrange

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.51)$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$$

com $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ onde α e β são constantes de proporcionalidade e, $\mathbf{M}^T = \mathbf{M} > 0$ e $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ são matrizes de ordem n .

²As identidades trigonométricas matriciais referidas acima são as seguintes: $\mathbf{I} - \cos(aT) = 2 \sin^2(\frac{aT}{2})$ e $\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos(\frac{A+B}{2}) \sin(\frac{A-B}{2})$

Segundo [Gallicchio, 1999], embora se possa atribuir alguma interpretação física a sistemas com atrito do tipo Rayleigh, tal hipótese é uma conveniente simplificação matemática.

A solução dinâmica $\mathbf{h}(t)$ de (4.51) satisfaz os problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) &= 0 \\ \mathbf{h}(0) &= 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{M}\dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.52)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}(t)\mathbf{K} &= 0 \\ \mathbf{h}(0) &= 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}(0)\mathbf{M} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pelo teorema dos modos normais, existe uma matriz não singular Ψ , dita matriz modal, tal que

$$\Psi^T \mathbf{M} \Psi = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \Psi^T \mathbf{K} \Psi = \Omega^2 \quad (4.54)$$

onde Ω^2 é uma matriz diagonal de ordem n formada pelos autovalores de (4.51), conhecida na literatura como matriz espectral [Caughey e O'Kelley, 1965], [Inmann, 1995], [Gallicchio, 1999], [Copetti, 2002].

Nestas condições, aplicando-se a mudança de variável $\mathbf{q}(t) = \Psi \mathbf{z}(t)$ ao sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (4.55)$$

obtéem-se o sistema homogêneo desacoplado

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}(t) + \Omega^2 \mathbf{z}(t) = 0 \quad (4.56)$$

onde $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{I} + \beta \Omega^2$.

A solução de (4.56), dada em termos de sua base dinâmica normalizada $\{h_0(t), \dot{h}_1(t)\}$

é

$$\mathbf{z}(t) = h_0(t)\mathbf{z}(0) + h_1(t)\dot{\mathbf{z}}(0) \quad (4.57)$$

onde $h_0(t)$ e $h_1(t)$ satisfazem, respectivamente, os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{aligned}\ddot{h}_0(t) + \mathcal{C}\dot{h}_0(t) + \Omega^2 h_0(t) &= \ddot{h}_0(t) + \dot{h}_0(t)\mathcal{C} + h_0(t)\Omega^2 \\ h_0(0) &= \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \dot{h}_0(0)\mathbf{M} = 0\end{aligned}\tag{4.58}$$

e

$$\begin{aligned}\ddot{h}_1(t) + \mathcal{C}\dot{h}_1(t) + \Omega^2 h_1(t) &= \ddot{h}_1(t) + \dot{h}_1(t)\mathcal{C} + h_1(t)\Omega^2 \\ h_1(0) &= 0 \quad \text{e} \quad \dot{h}_1(0) = \mathbf{I}\end{aligned}\tag{4.59}$$

Considerando $\mathbf{h}(t) = \Psi \mathbf{z}(t)$ obtém-se que $\mathbf{z}(0) = \Psi^{-1}\mathbf{h}(0) = 0$ e $\dot{\mathbf{z}}(0) = \Psi^{-1}\dot{\mathbf{h}}(0) = \Psi^{-1}\mathbf{M}^{-1} = \Psi^T$ pois $\mathbf{M}^{-1} = \Psi\Psi^T$. Destas relações obtém-se a seguinte relação entre a solução dinâmica do sistema acoplado (4.55) e do sistema desacoplado (4.56)

$$\mathbf{h}(t) = \Psi h(t)\Psi^T\tag{4.60}$$

com $h(t)$ dada por

$$h(t) = e^{-\xi\Omega t} \frac{\sin \Omega_d t}{\Omega_d}\tag{4.61}$$

onde $2\xi\Omega = \alpha\mathbf{I} + \beta\Omega^2$ e $\Omega_d = \Omega\sqrt{\mathbf{I} - \xi}$, sendo ξ uma matriz diagonal, cuja diagonal é composta pelas razões modais de amortecimento ξ_k e, Ω_d a matriz diagonal das frequências amortecidas [Copetti, 2002].

As bases, dinâmica $\{h(t), \dot{h}(t)\}$ e dinâmica normalizada $\{h_0(t), \dot{h}_1(t)\}$, para o problema desacoplado (4.56), relacionam-se por

$$h_1(t) = h(t) \quad \text{e} \quad h_0(t) = \dot{h}(t) + h(t)\mathcal{C}\tag{4.62}$$

De (4.14), (4.62) e (4.60) decorrem as seguintes relações entre as bases dinâmicas normalizadas dos sistemas, acoplado (4.55) e desacoplado (4.56)

$$\mathbf{h}_0(t) = \Psi h_0(t)\Psi^{-1}\tag{4.63}$$

e

$$\mathbf{h}_1(t) = \Psi h_1(t)\Psi^{-1}\tag{4.64}$$

Deve ser observado que, para o sistema desacoplado, $h_0(t)$ e $\dot{h}_0(t)$, $h_1(t)$ e $\dot{h}_1(t)$, comutam pois são matrizes diagonais, isto é

$$\begin{aligned} h_0(t)\dot{h}_0(t) &= \dot{h}_0(t)h_0(t) \\ h_1(t)\dot{h}_1(t) &= \dot{h}_1(t)h_1(t) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Das relações (4.65) e de (4.60) decorrem diretamente as relações de comutatividade

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_0(t)\dot{\mathbf{h}}_0(t) &= \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{h}_0(t) \\ \mathbf{h}_1(t)\dot{\mathbf{h}}_1(t) &= \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{h}_1(t) \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nestas condições, utilizando (4.63), (4.64) e os fatos, $\Psi\Psi^{-1} = \mathbf{I}$ e $\Psi^{-1}\mathbf{M}^{-1} = \Psi^T$, o sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \\ \dot{\mathbf{h}}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

pode ser reescrito na forma

$$\Phi\mathcal{A}\Phi^{-1}\mathcal{X} = \Phi\mathcal{B}\Phi^T \quad (4.68)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Psi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - h_0(T) & -h_1(T) \\ -\dot{h}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{h}_1(T) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} h_1(T) & 0 \\ 0 & \dot{h}_1(T) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

A solução do sistema (4.68) será dada por

$$\mathcal{X} = \Psi\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\Psi^T \quad (4.71)$$

onde \mathcal{X} é a solução do sistema (4.67), relacionado com o sistema desacoplado e $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ é a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - h_0(T) & -h_1(T) \\ -\dot{h}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{h}_1(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_d \\ \mathbf{S}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(T) \\ \dot{h}_1(T) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

relacionado com o sistema desacoplado. Tal sistema é obtido supondo-se que a função de Green periódica $\mathbf{\Gamma}_d(t)$ do sistema desacoplado (4.56) é da forma

$$\mathbf{\Gamma}_d(t) = \begin{cases} h_0(t)\mathbf{P}_d + h_1(t)\mathbf{Q}_d & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ h_0(t)\mathbf{R}_d + h_1(t)\mathbf{S}_d & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

e considerando convenientemente as propriedades (4.3), (4.4), (4.4) e (4.7).

Resolvendo (4.72) e considerando convenientemente propriedades de semigrupo (4.15), (4.16) $\mathbf{\Gamma}_d(t)$ toma a forma

$$\mathbf{\Gamma}_d(t) = \begin{cases} h(t+T)\mathbb{K}_1(T) - h(t) [\mathbb{K}_2(T) + \mathbf{I}] & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ h(t+T)\mathbb{K}_1(T) - h(t)\mathbb{K}_2(T) & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.74)$$

onde

$$\mathbb{K}_2(T) = e^{e^{-\xi\Omega T}} (e^{-2\xi\Omega T} - 2e^{-\xi\Omega T} \cos \Omega_d T + \mathbf{I})^{-1} \quad (4.75)$$

$$\mathbb{K}_2(T) = (e^{-2\xi\Omega T} - 2e^{-\xi\Omega T} \cos \Omega_d T + \mathbf{I})^{-1} \quad (4.76)$$

Daí e de (4.60) decorre que

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Gamma}_d(t) \mathbf{\Psi} \quad (4.77)$$

4.2.3 Caso Geral

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{N}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{q}(0) &= \mathbf{q}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

onde

- $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \mathbf{G}$ e $\mathbf{N} = \mathbf{K} + \mathbf{H}$
- $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$ e $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ são matrizes quadradas de ordem n ditas matrizes, massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.
- $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$, $\mathbf{H}^T = -\mathbf{H}$ são matrizes quadradas de ordem n , conhecidas na literatura como, matriz giroscópica e matriz circulatoria [Inmann, 1995], [Ginsberg, 2001].
- $\mathbf{q}(t)$ um vetor $n \times 1$ de coordenadas generalizadas. No estudo do comportamento dinâmico de sistemas rotativos consideram-se como coordenadas generalizadas os deslocamentos e os giros [Toresan, 2001].
- $\mathbf{f}(t)$ um vetor $n \times 1$ contínuo por partes e periódico, ou seja, $\mathbf{f}(t + T) = \mathbf{f}(t)$ com $T = \frac{2\pi}{\omega}$ onde ω é a frequência da excitação externa

O sistema (4.78), conhecido na literatura como sistema giroscópico amortecido, aparece em muitas situações práticas. Por exemplo, quando discretiza-se um eixo rotor flexível colocado sobre suportes usando o Princípio de Hamilton e o método de Galerkin para discretizar a parte espacial [Meirovich, 1985].

Suponha-se que a função de Green T -periódica seja definida por (4.32), isto é

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_0(t)\mathbf{P} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{Q} & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_0(t)\mathbf{R} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{S} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

onde $\mathbf{h}_0(T)$ e $\mathbf{h}_1(T)$ são os componentes da base dinâmica normalizada e satisfazem, respectivamente, os seguintes problemas matriciais de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_0(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{h}}_0(t) + \mathbf{N}\mathbf{h}_0(t) &= \ddot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}_0(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}_0(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_0(0) &= \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_0(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{h}}_1(t) + \mathbf{N}\mathbf{h}_1(t) &= \ddot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{h}}_1(t)\mathbf{C} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{K} \\ \mathbf{h}_1(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{h}}_1(0) &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Os elementos da base dinâmica normalizada relacionam-se com os elementos da base dinâmica $\mathbf{h}(t)$ e $\dot{\mathbf{h}}(t)$ por

$$\mathbf{h}_0(t) = \dot{\mathbf{h}}(t)\mathbf{M} + \mathbf{h}(t)\mathbf{D} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)\mathbf{M} \quad (4.82)$$

Das propriedades da função de Green $\mathbf{\Gamma}(T)$, veja-se (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), resulta o seguinte sistema de equações lineares de ordem $2n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \\ \dot{\mathbf{h}}_1(T)\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Observe-se que a matriz dos coeficientes do sistema (4.83) é exatamente a exponencial matricial $\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}}$, onde \mathbb{A} é a matriz companheira de (4.78), isto é [Claeysen,1999]

$$\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T) \end{bmatrix}$$

onde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix}$$

O sistema (4.83) tem solução única pois considera-se neste trabalho o caso não ressonante, ou seja, $\omega \notin \sigma(\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}})$, implicando que $\det(\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}}) \neq 0$. Uma prova deste fato é apresentada no apêndice A.

A questão então passa a ser como inverter a matriz $\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}}$. Para tal suponha que

$$\mathbf{I} - e^{\mathbf{\Gamma}\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) \\
 \beta &= -\mathbf{h}_1(T) \\
 \gamma &= -\dot{\mathbf{h}}_0(T) \\
 \delta &= \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T)
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

e que $\dot{\mathbf{h}}_0(T)$ seja inversível. Definindo $(\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}})^{-1}$ como

$$(\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$$

segue da definição de inversa que os coeficientes matriciais \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 e \mathbf{D}_1 satisfazem o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\alpha + \mathbf{C}_1\beta = \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_1\alpha + \mathbf{D}_1\beta = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1\gamma + \mathbf{C}_1\delta = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1\gamma + \mathbf{D}_1\delta = \mathbf{I} \end{cases} \tag{4.86}$$

cuja solução é dada por

$$\mathbf{A}_1 = -\gamma^{-1}\delta\mathbf{C}_1 \tag{4.87}$$

$$\mathbf{B}_1 = \gamma^{-1} - \gamma^{-1}\delta\mathbf{D}_1 \tag{4.88}$$

$$\mathbf{C}_1 = (\beta - \alpha\gamma^{-1}\delta)^{-1} \tag{4.89}$$

$$\mathbf{D}_1 = -\mathbf{C}_1\alpha\gamma^{-1} \tag{4.90}$$

Pode ser verificado que para os valores de \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C}_1 e \mathbf{D}_1 obtidos acima, veja-se(4.87), (4.88), (4.89) e (4.90), a matriz $(\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}})^{-1}$ é a inversa de $\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}}$. Por outro lado, pode-se garantir que a matriz \mathbf{C}_1 é inversível utilizando o método de Gauss generalizado [Gudnov, 1980].

Assim a solução do sistema (4.83) será

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1(T) + \mathbf{B}_1\dot{\mathbf{h}}_1(T) \right] \mathbf{M}^{-1} \tag{4.91}$$

e

$$\mathbf{S} = \left[\mathbf{C}_1 \mathbf{h}_1(T) + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{h}}_1(T) \right] \mathbf{M}^{-1} \quad (4.92)$$

e a função de Green T -periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ pode ser reescrita como

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \mathbf{h}_0(t)\mathbf{R} + \mathbf{h}_1(t) (\mathbf{S} + \mathbf{M}^{-1}) & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{h}_0(t)\mathbf{R} + \mathbf{h}_1(t)\mathbf{S} & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (4.93)$$

Desta forma, a função de Green T -periódica está perfeitamente caracterizada em termos da base dinâmica normalizada e, conseqüentemente, a resposta T -periódica será dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \quad (4.94)$$

A verificação de que $\mathbf{q}(t)$ satisfaz a equação diferencial matricial (4.78) segue o mesmo raciocínio aplicado nas seções anteriores e não será repetido aqui.

4.3 Simulações

Nesta seção apresentam-se os resultados das simulações numéricas referentes a resposta de um rotor colocado sobre suportes rígidos devido a seu desbalanço.

Considera-se para tal o modelo de **Stodolla-Green**³. mostrado esquematicamente na figura (4.1.a) abaixo. Na figura (4.1.b) são mostradas as possíveis rotações para este modelo.

³No estudo da dinâmica de equipamentos rotativos tais como, giroscópicos utilizados na orientação de aeronaves e turbinas para geração de potência, os modelos mais usados na simulação de fenômenos vibratórios que acontecem nestes são: O modelo de Jeffcott e o modelo de Stodolla-Green. O primeiro mais utilizado na simulação dos efeitos da resposta ao desbalanço e o segundo, além destes efeitos, simula o efeitos giroscópicos. Para maiores detalhes veja-se [Ginsberg, 2001], [Vance, 1987] e [Childs, 1997]

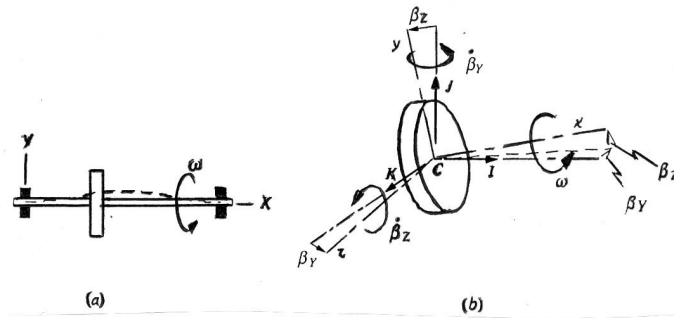


Figura 4.1 Possíveis rotações do rotor alinhado com o eixo flexível e com velocidade de rotação ω

Utilizando-se as equações de Lagrange e algum método para discretizar a parte espacial que pode ser por exemplo Galerkin ou elementos finitos, obtém-se a seguinte equação matricial discretizada para o movimento do rotor

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.95)$$

onde

- $\mathbf{q}(t) = [Y_c \ Z_c \ \beta_Y \ \beta_Z]^T$ com
 - Y_c e Z_c deslocamentos do centro geométrico C nas direções Y e Z com relação ao referencial fixo XYZ
 - β_Y é o ângulo entre o eixo X e a projeção do eixo x sobre o plano XZ
 - β_Z é o ângulo entre o eixo X e a projeção do eixo x sobre o plano XY
- \mathbf{M} é a matriz massa e definida por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{yy} \end{bmatrix}$$

onde m é a massa do rotor e I_{yy} é o momento de inércia de massa em torno do eixo que tem a origem G perpendicular ao eixo x

- \mathbf{G} é a matriz giroscópica definida por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I_{xx}\omega \\ 0 & 0 & -2I_{xx}\omega & 0 \end{bmatrix}$$

onde I_{xx} é o momento de inércia de massa do rotor em torno do eixo que tem a origem G paralelo ao eixo x e ω a velocidade de rotação do rotor

- \mathbf{C} é a matriz de amortecimento definida por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix}$$

onde c_ω e c_β são os coeficientes de amortecimento

- a matriz rigidez \mathbf{K} é definida como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{\omega\omega} & 0 & 0 & k_{\omega\beta} \\ 0 & k_{\omega\omega} & -k_{\omega\beta} & 0 \\ 0 & -k_{\omega\beta} & k_{\beta\beta} & 0 \\ k_{\omega\beta} & 0 & 0 & k_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

onde $k_{\omega\omega}$, $k_{\omega\beta}$ e $k_{\beta\beta}$ são os coeficientes de rigidez

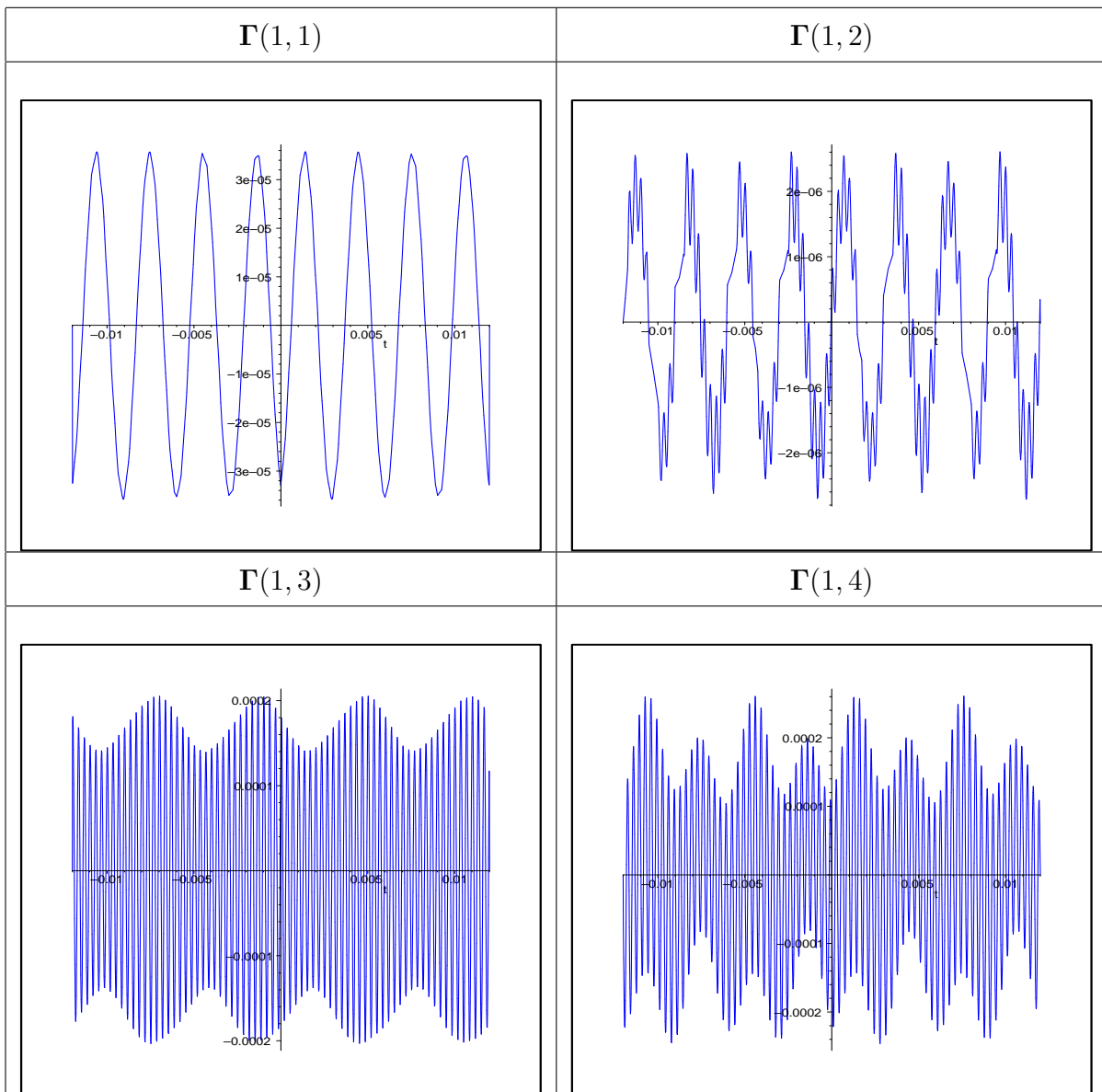
- $\mathbf{f}(t) = m\epsilon\omega^2 \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ é a força centrípeta devido ao desbalanço do rotor onde m é a massa do rotor, e é a excentricidade e ω é a velocidade de rotação do rotor

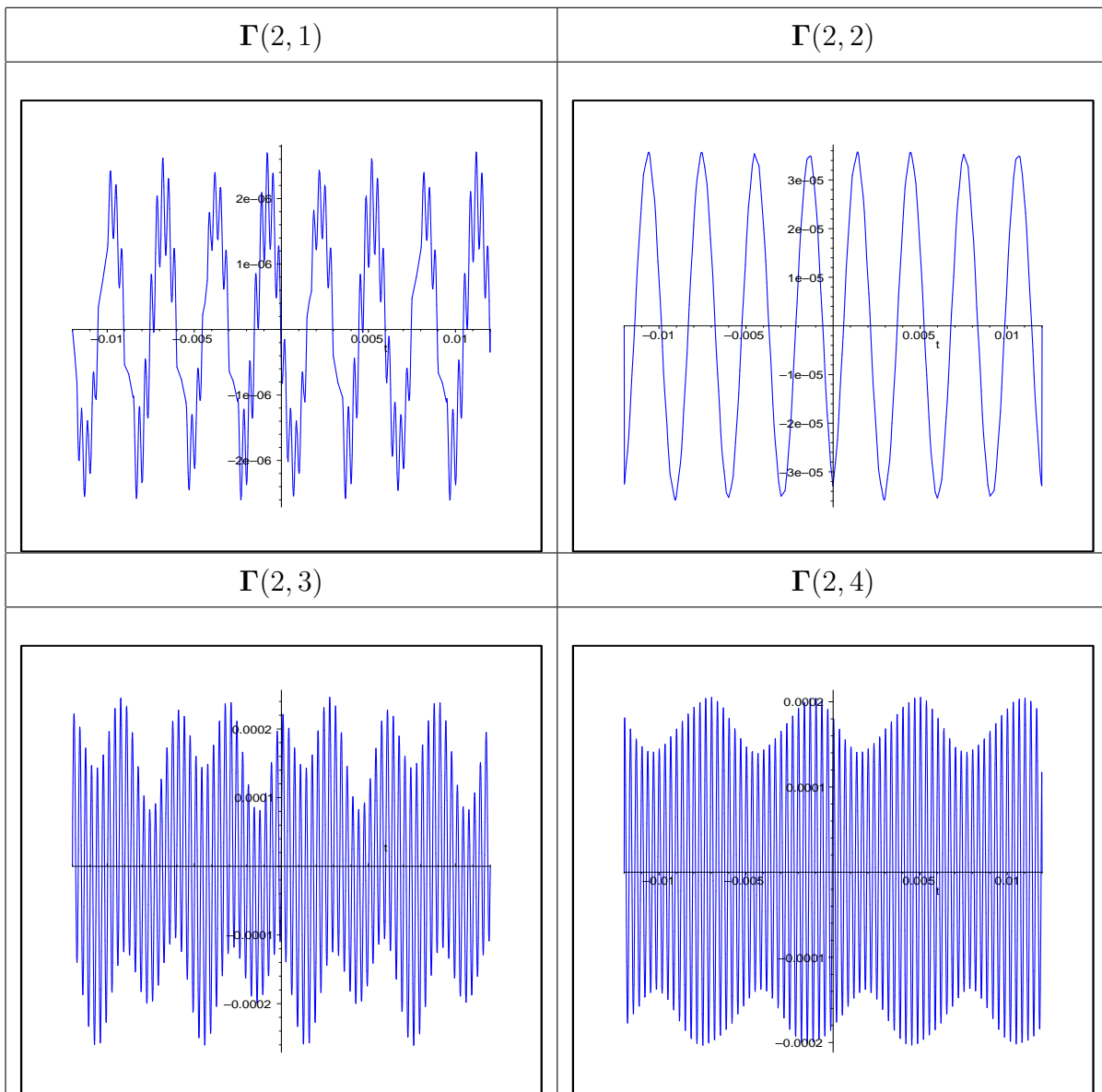
Consideram-se os seguintes valores para os parâmetros físicos do problema [Ginsberg, 2001].

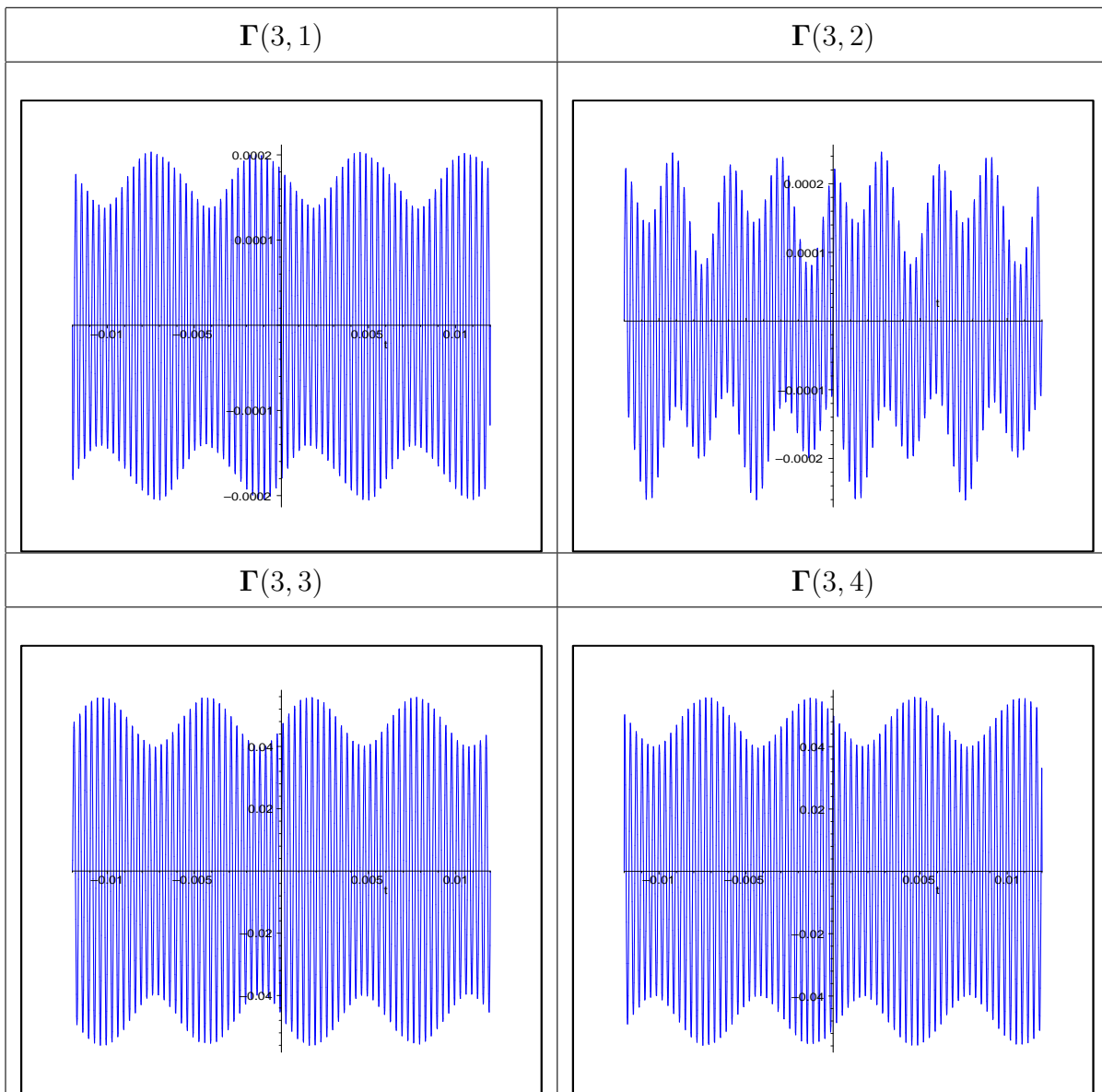
e (m)	m (kg)	ω (rad/s)	$k_{\omega\omega}$ (N/m)	$k_{\omega\beta}$ (N/m)
0.001	20	523.5	$0.125 \cdot 10^9$	$0.25 \cdot 10^8$
$k_{\beta\beta}$ (N/m)	c_{ω} (Ns/m)	c_{β} (Ns/m)	I_{xx} (Kg.m ²)	I_{yy} – Kg.m ²
$0.15 \cdot 10^8$	10.47	8.48	0.045	0.045

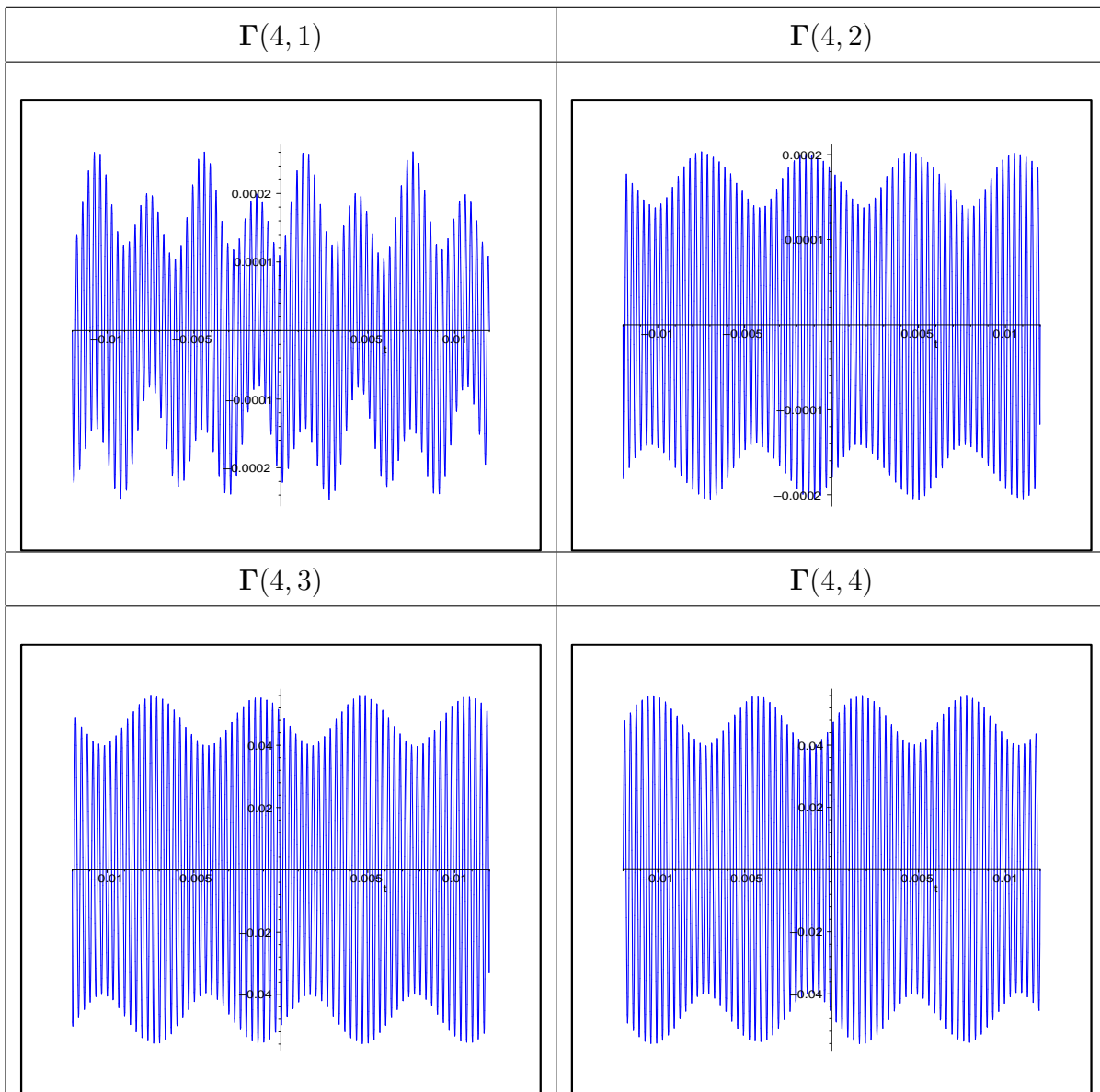
Tabela 4.1 Valores dos parâmetros físicos para o rotor

Nas tabelas (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) a seguir mostram-se os gráficos das componentes da matriz de Green $\mathbf{\Gamma}(t)$

Tabela 4.2 - Componentes da 1ª linha de $\Gamma(t)$

Tabela 4.3 - Componentes da 2ª linha de $\Gamma(t)$

Tabela 4.4 - Componentes da 3^a linha de $\Gamma(t)$

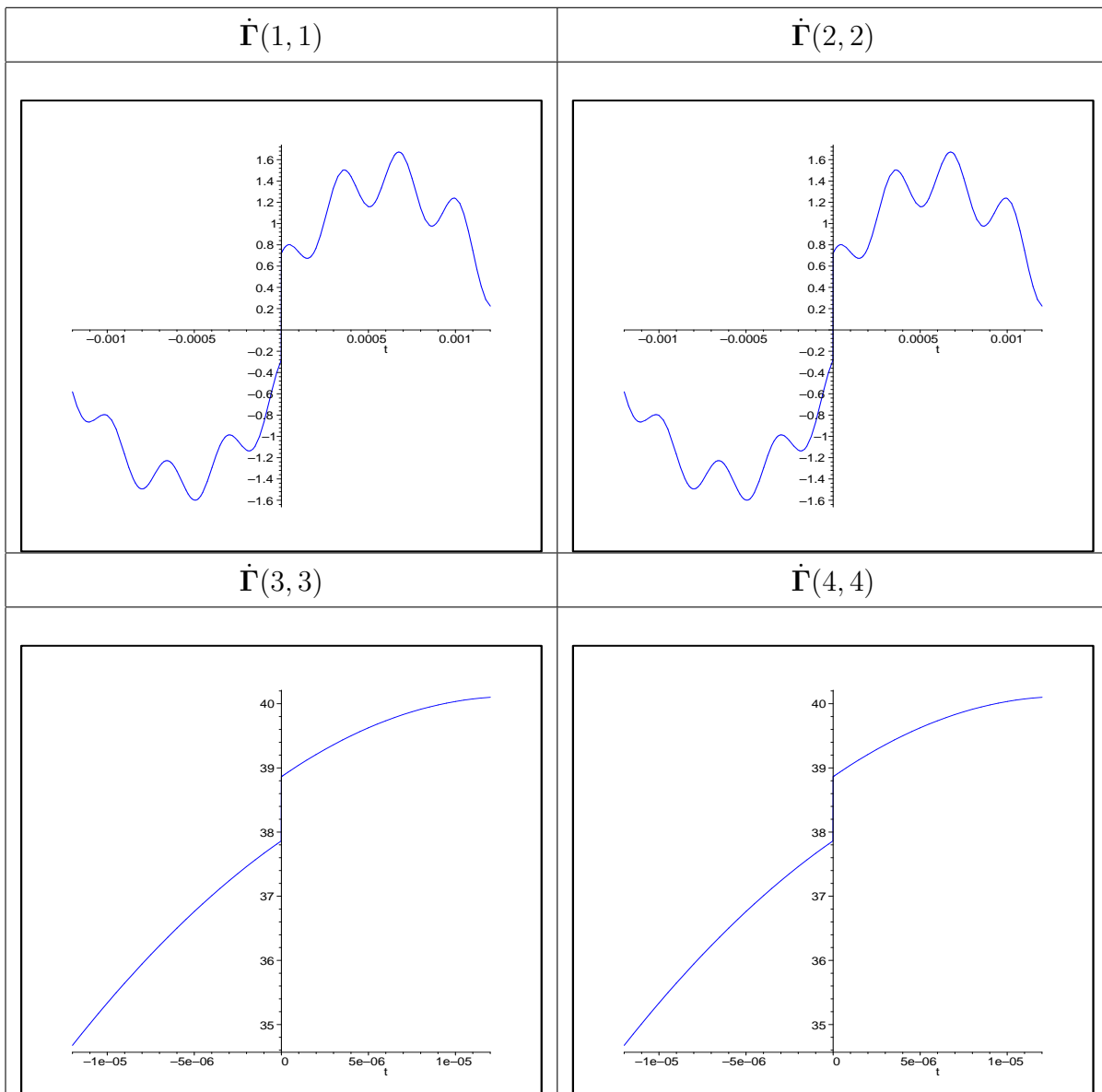
Tabela 4.5 - Componentes da 4ª linha de $\Gamma(t)$

Das tabelas (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5) observa-se a periodicidade e a continuidade das componentes da função de Green $\Gamma(t)$.

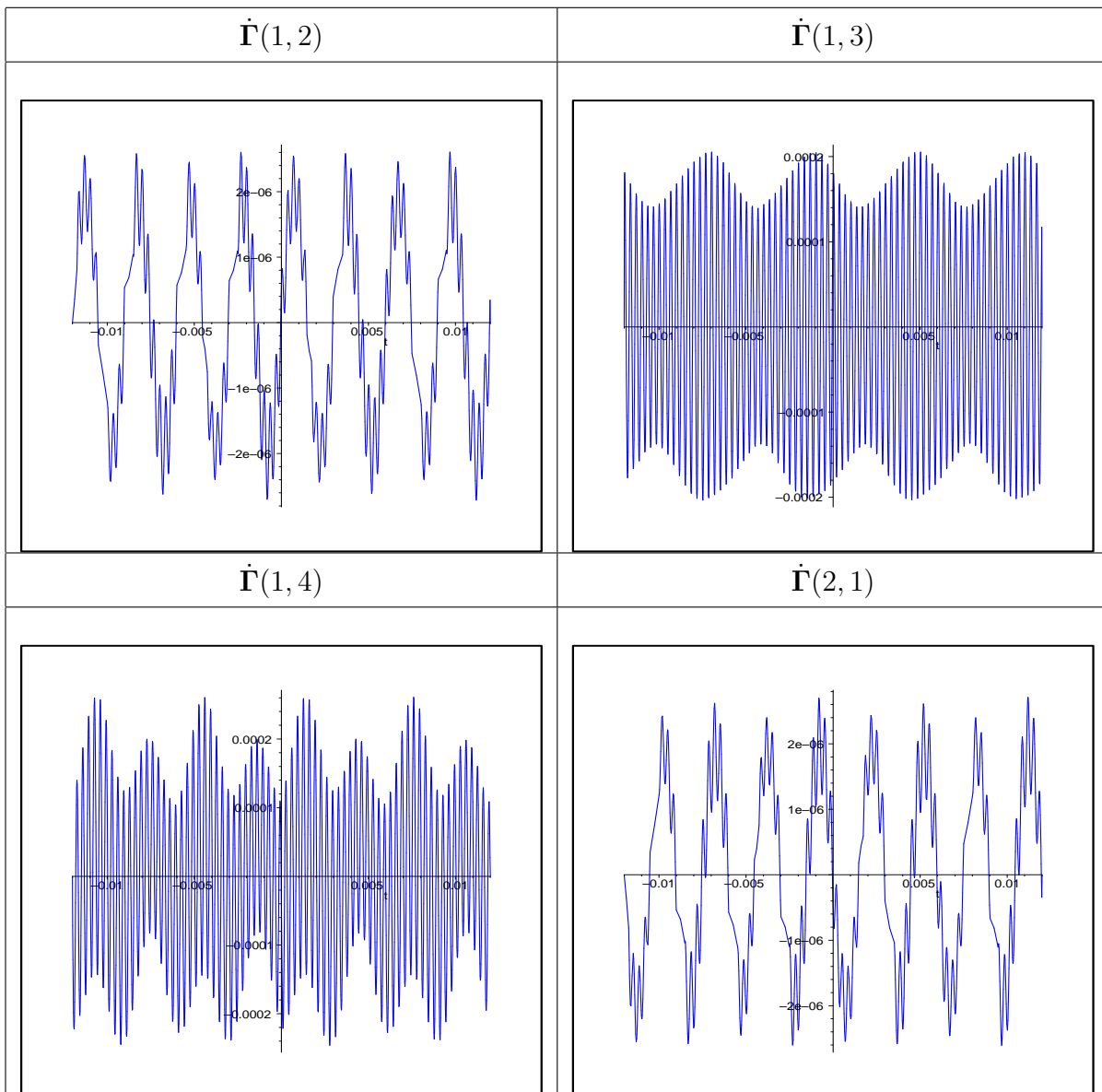
Na tabela (4.7) a seguir apresentam-se os gráficos das componentes da diagonal da derivada $\dot{\Gamma}(t)$ da função de Green. A partir destes pode ser observado que a condição de salto

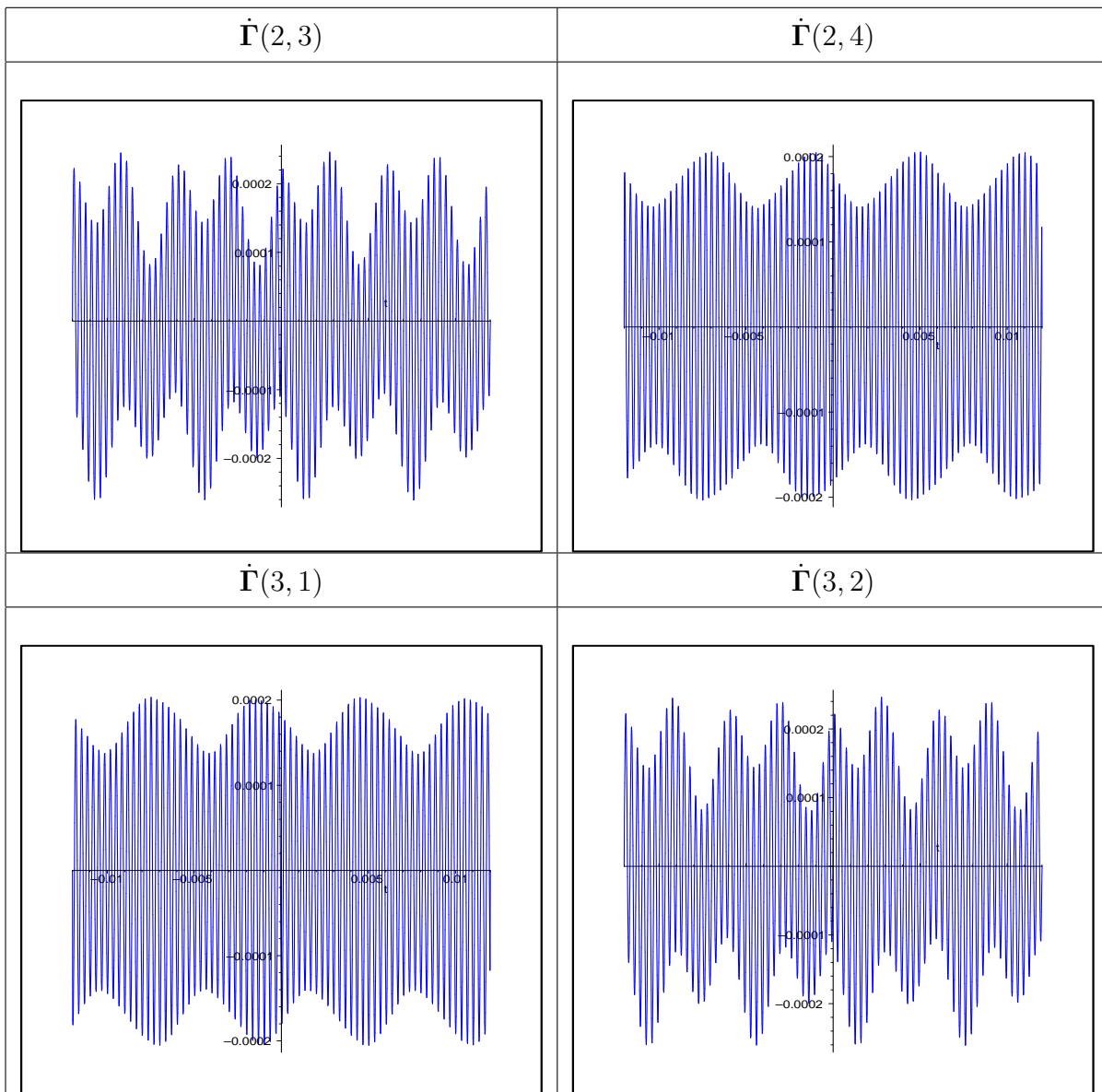
$$\mathbf{M} \left[\dot{\Gamma}(0^+) - \dot{\Gamma}(0^-) \right] = \mathbf{I}$$

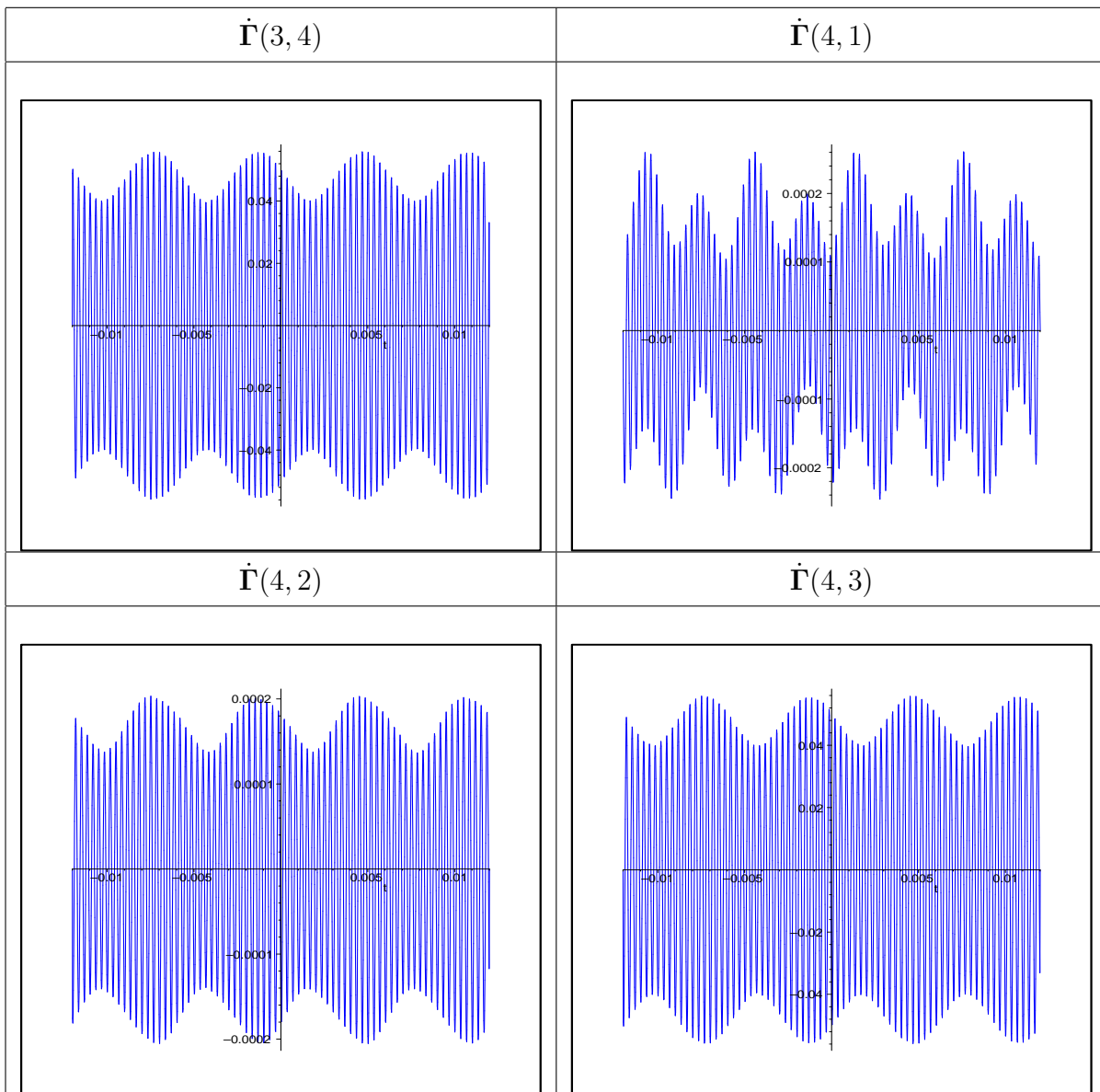
é satisfeita para os elementos da diagonal de $\dot{\Gamma}(t)$.

Tabela 4.6 - Componentes da diagonal de $\dot{\Gamma}(t)$

As tabelas (4.7), (4.8) e (4.9) a seguir apresentam os gráficos das componentes de $\dot{\Gamma}(t)$ que estão fora da diagonal principal. Pode-se observar a continuidade destas componentes.

Tabela 4.7 - Componentes fora da diagonal de $\dot{\Gamma}(t)$

Tabela 4.8 - Componentes fora da diagonal de $\dot{\Gamma}(t)$

Tabela 4.9 - Componentes fora da diagonal de $\dot{\Gamma}(t)$

Os gráficos comparativos entre as respostas $\mathbf{q}(t)$, devido ao desbalanço $\mathbf{f}(t) = m\omega^2 [\cos \omega t \ \sin \omega t \ 0 \ 0]^T$ obtidas por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \mathbf{\Gamma}(t-s)\mathbf{f}(s)ds$$

onde $\mathbf{\Gamma}(t)$ é definida por (4.93) (linha verde contínua) e

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{f}(t) \quad \text{onde} \quad \mathbf{H}(i\omega) = [(i\omega^2)\mathbf{M} + i\omega(\mathbf{G} + \mathbf{C}) + \mathbf{K}]^{-1}$$

(linha pontilhada azul), são mostrados a seguir.

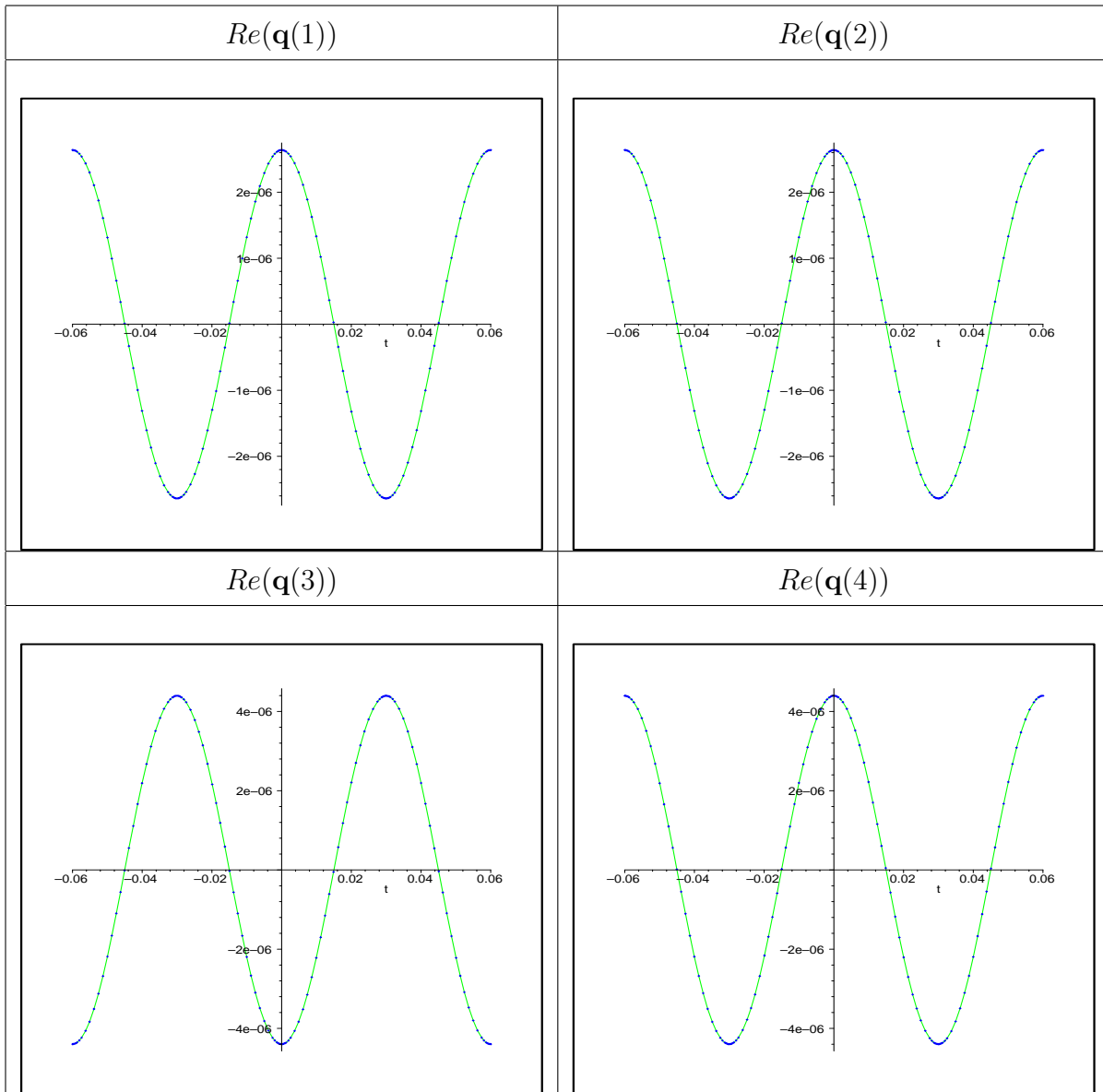


Tabela 4.10 - Gráficos comparativos da parte real de $\mathbf{q}(t)$

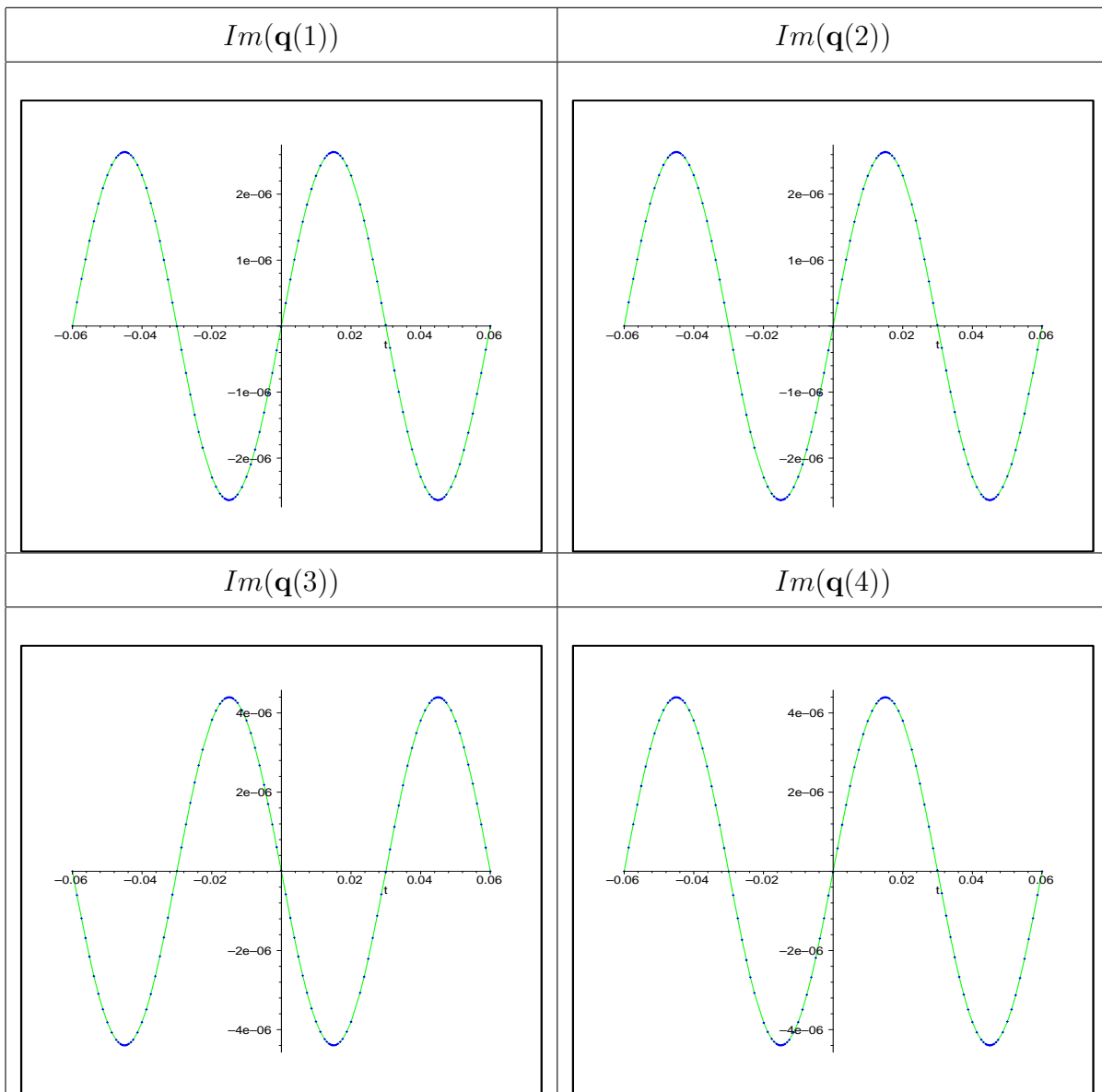


Tabela 4.11 - Gráficos comparativos das partes imaginárias de $\mathbf{q}(t)$

Das tabelas (4.10) e (4.11) observa-se que:

- a resposta $\mathbf{q}(t)$ é T -periódica pois as partes real e imaginárias são T -periódicas
- as partes, real e imaginária, da resposta coincidem pelas duas formulações utilizadas

Da mesma forma que para sistemas de 1ª ordem, obteve-se uma caracterização para a função de Green T -periódica em termos da base dinâmica normalizada ma-

tricial observando-se suas propriedades. Isso possibilita caracterizar também a resposta T -periódica $\mathbf{q}(t)$ em termos da base dinâmica normalizada matricial.

À seguir esta idéia é generalizada para sistema escalares e matriciais de ordem N .

5 A RESPOSTA PERIÓDICA EM SISTEMAS DE ORDEM N

Neste capítulo serão considerados sistemas de ordem N , escalares e matriciais. A função de Green T - periódica é obtida, de forma direta, considerando-se propriedades de, periodicidade e continuidade, tanto de $\Gamma(t)$ como de suas derivadas até orden $N - 2$, e a propriedade do salto na derivada de ordem $N - 1$. Esta metodologia é aplicada para um sistema escalar de ordem N e, após, generalizada para sistema matriciais de ordem N .

5.1 Caso Escalar de Ordem N

Considere o sistema

$$\sum_{j=0}^N b_j \frac{d^{(j)} \mathbf{q}(t)}{dt^j} = \mathbf{f}(t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{q}(0) = q_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{q}_0, \quad \dots, \quad \mathbf{q}^{(N-1)}(0) = q_0^{(N-1)}$$

onde, $\mathbf{f}(t)$ é uma função periódica de período $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ e b_j escalares.

Do método operacional, resulta que a resposta do sistema (5.1), em termos da resposta impulso, é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-s) \mathbf{f}(s) ds + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) q_0^{(j)} \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{h}(t)$ satisfaz o problema de valor inicial com condições iniciais impulsivas

$$\sum_{j=0}^N b_j \frac{d^{(j)} \mathbf{h}(t)}{dt^j} = 0 \quad (5.3)$$

$$\mathbf{h}^{(j)}(0) = 0; \quad j = 1, \dots, N-2 \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_N \mathbf{h}^{(N-1)}(0) = 1$$

A base dinâmica normalizada $\{\mathbf{h}_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$ relaciona-se com a base dinâmica $\{\mathbf{h}^{(j)}(t)\}_{j=0}^{N-1}$ por [Moraes, 2002]

$$\mathbf{h}_j(t) = \sum_{i=j+1}^N \mathbf{h}^{(i-j-1)}(t) b_i \quad ; \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{h}_j(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$\sum_{k=0}^N b_k \frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(t)}{dt^k} = 0 = \sum_{k=0}^N \frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(t)}{dt^k} b_k \quad (5.5)$$

$$\frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(0)}{dt^k} = \begin{cases} 0 & ; \text{ se } k \neq j \\ 1 & ; \text{ se } k = j \end{cases}$$

para $k = 1, \dots, N$ e $j = 0, \dots, N-1$.

Suponha-se que a função de Green T -periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ seja definida como

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) A_j & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) B_j & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

onde A_j e B_j são escalares a serem determinados utilizando-se as seguintes propriedades da função de Green T -periódica, $\mathbf{\Gamma}(t)$

- periodicidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N-1$, isto é,

$$\mathbf{\Gamma}^{(j)}(\mathbf{\Gamma}^-) = \mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^-), \quad j = 0 \dots, N-2 \quad (5.7)$$

- continuidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N-2$ em $t=0$, isto é

$$\mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^+) = \mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^-), \quad j = 0 \dots, N-2 \quad (5.8)$$

- condição de salto na derivada de ordem $N - 1$

$$b_N [\mathbf{\Gamma}^{(N-1)}(0^+) - \mathbf{\Gamma}^{(N-1)}(0^-)] = 1 \quad (5.9)$$

Da periodicidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N - 2$, veja-se (5.7), segue que

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j^{(l)}(\Gamma) A_j = B_l, \quad l = 0, \dots, N - 1 \quad (5.10)$$

Da continuidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N - 2$ (5.8) resulta que

$$A_j = B_j \quad j = 0, \dots, N - 2 \quad (5.11)$$

e da condição de salto imposta sobre $\mathbf{\Gamma}^{N-1}(t)$ (5.9) obtém-se que

$$A_{N-1} = B_{N-1} + b_N^{-1} \quad (5.12)$$

É importante salientar o que na obtenção das relações (5.10), (5.11) e (5.9) usa-se fortemente as propriedades da base dinâmica normalizada (veja-se (5.3) e (5.24)).

Nestas condições, usando-se (5.10), (5.11) e (5.12), vê-se que os coeficientes B_j ; $j = 0, \dots, N - 1$ satisfazem o seguinte sistema de equações $N \times N$

$$\begin{bmatrix} 1 - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) & \dots & -\mathbf{h}_{N-1}(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0(T) & 1 - \dot{\mathbf{h}}_1(T) & \dots & -\dot{\mathbf{h}}_{N-1}(T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{h}_0^{(N-1)}(T) & -\mathbf{h}_1^{(N-1)}(T) & \dots & 1 - \mathbf{h}_{N-1}^{(N-1)}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{N-1}(T)b_N^{-1} \\ \dot{\mathbf{h}}^{N-1}(T)b_N^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{N-1}^{(N-1)}(T)b_N^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Observa-se, da mesma forma que para sistemas de 2^a ordem, que a matriz dos coeficientes do sistema (5.13) é exatamente $\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}}$. Supondo que $\omega \notin \sigma(\mathbf{I} - e^{\Gamma\mathbb{A}})$, isto é,

seja inversível, tem-se que

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-2} \mathbf{h}_j(t) B_j + (B_{N-1} + b_{N-1}^{-1}) \mathbf{h}_{N-1}(t) & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) B_j & ; \quad -T \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

e daí a única solução de (5.1) T - periódica é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \mathbf{f}(s) ds \quad (5.15)$$

Assim obteve-se uma caracterização da função de Green T -periódica $\Gamma(t)$ em termos da base dinâmica normalizada , e conseqüentemente a resposta T -periódica $\mathbf{q}(t)$, para sistemas escalares de ordem n .

Com o objetivo de ilustrar a metodologia desenvolvida nesta seção e mostrar sua validade, apresentam-se a seguir os resultados das simulações para um sistema escalar de ordem 6.

5.1.1 Simulações

Considere-se o seguinte sistema acadêmico

$$\frac{d^4 q}{dt^4}(t) + 25 \frac{d^3 q}{dt^3}(t) + 281 \frac{d^2 q}{dt^2}(t) + 1639 \frac{dq}{dt}(t) + 4096q(t) = f(t) \quad (5.16)$$

Para o sistema (5.16) acima, a resposta impulso (solução dinâmica ou solução fundamental) do sistema é dada por

$$h(t) = 0.00204e^{-7.2568t} \cos(2.1341t) + 0.01034e^{-7.25679t} \sin(2.1341t) - 0.00204e^{-5.24320t} \cos(6.6406t) - 0.00271e^{-5.24320t} \sin(6.6406t) \quad (5.17)$$

De (5.17) e (5.4) segue que os elementos da base dinâmica normalizada $h_j(t)$ são

$$\begin{aligned} h_0(t) &= 1639h(t) + 281\dot{h}(t) + 25\ddot{h}(t) + \dddot{h}(t) \\ h_1(t) &= 281h(t) + 25\dot{h}(t) + \ddot{h}(t) \\ h_2(t) &= 25h(t) + \dot{h}(t) \\ h_3(t) &= h(t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $h_j(t)$ satisfaz (5.24) para $j = 1 \dots, 3$.

Na tabela (5.1) a seguir são apresentados os gráficos de $\Gamma(t)$ e suas derivadas até ordem 3.

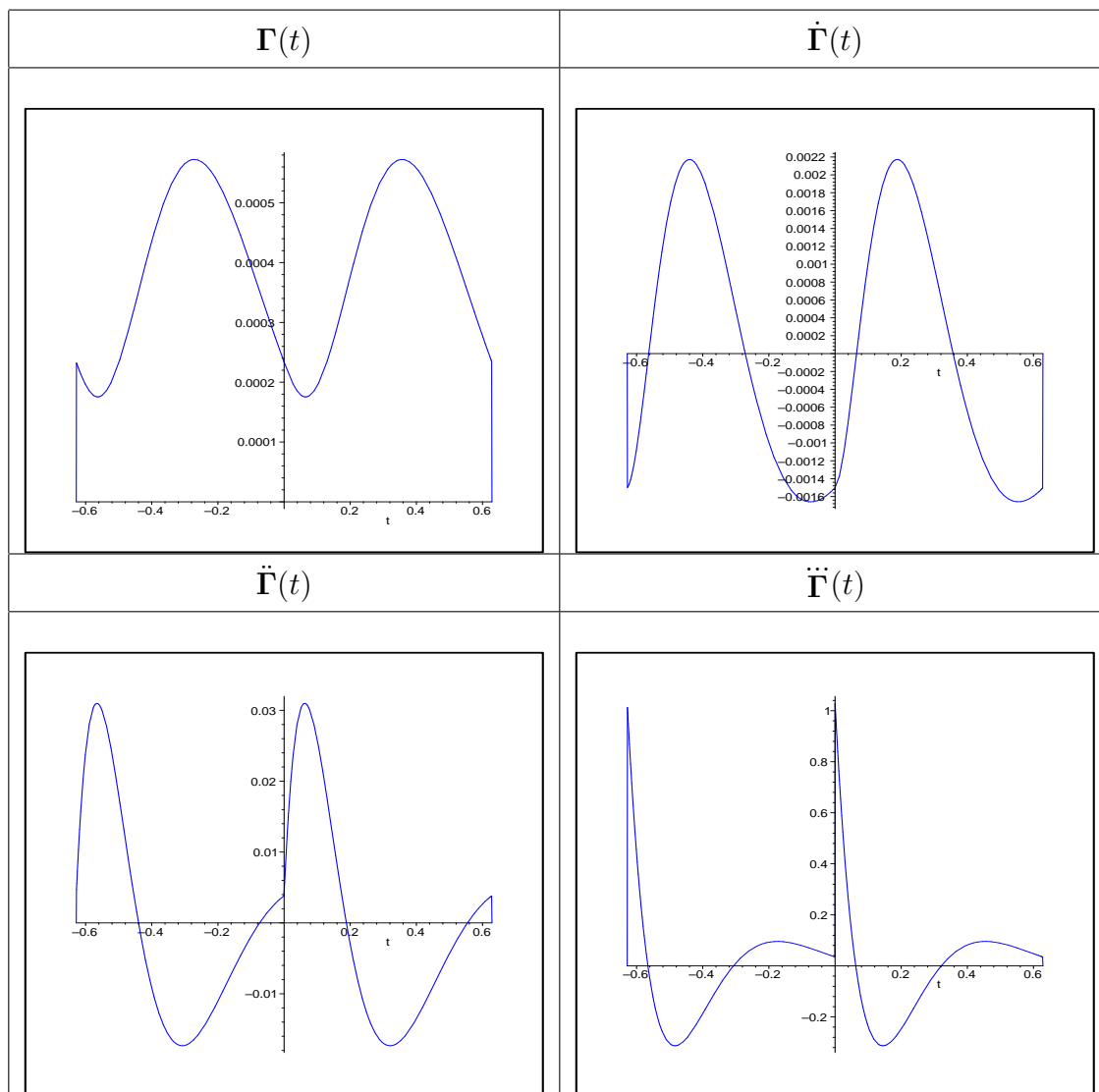


Tabela 5.1 - Gráficos de $\Gamma(t)$ e suas derivadas

Observa-se da tabela (5.1) a periodicidade da função de Green $\Gamma(t)$ e de suas derivadas até ordem 3 bem como a sua continuidade e de suas derivadas até ordem 2. A derivada de ordem 3, $\Gamma^{(3)}(t)$, apresenta uma descontinuidade do tipo salto, com magnitude unitária em $t = 0$.

Na simulação da resposta T -periódica $q(t)$ considera-se $f(t) = e^{10it} + 20e^{20it} + 3e^{40it}$ sendo esta obtida utilizando-se:

- $q(t) = \int_0^T \Gamma(t-s)\mathbf{f}(s)ds$ onde $\Gamma(t)$ é definida por (5.14) e designada pela linha contínua verde
- $q(t) = \mathbf{H}(i\omega)f(t)$ onde a resposta em frequência é

$$\mathbf{H}(i\omega) = [(i\omega)^4 + 25(i\omega)^3 + 281(i\omega)^2 + 1639(i\omega) + 4096]^{-1}$$

e designada pela linha pontilhada em azul

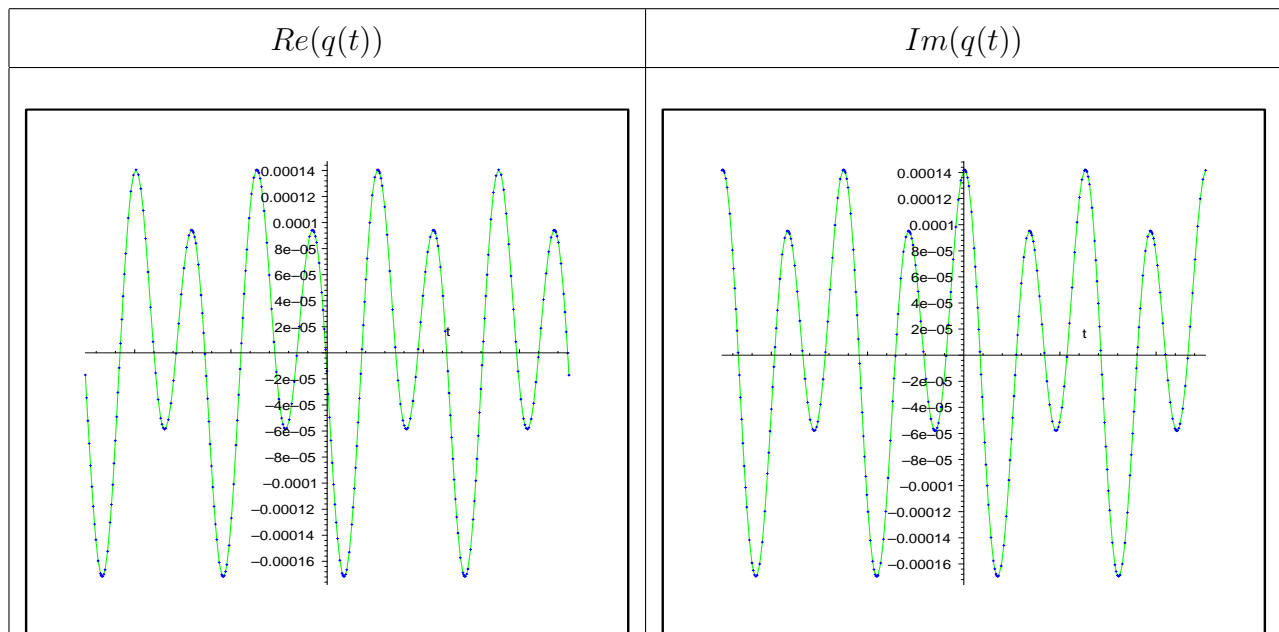


Tabela 5.2 - Gráficos das partes real e imaginária de $q(t)$

Observa-se da tabela (5.2) acima o caráter periódico da resposta $q(t)$. Vê-se também que as respostas obtidas pelas duas formulações são coincidentes.

Na próxima seção obtém-se a função de Green periódica para sistema matriciais de ordem N .

5.2 Sistema Matricial de Ordem N

Considere o sistema matricial de ordem N descrito por

$$\sum_{j=0}^N \mathbf{b}_j \frac{d^{(j)} \mathbf{q}(t)}{dt^j} = \mathbf{f}(t) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{q}(0) = q_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{q}_0, \dots, \quad \mathbf{q}^{(N-1)}(0) = q_0^{(N-1)}$$

onde

- \mathbf{b}_j $j = 0, \dots, N$ são matrizes constantes de ordem n
- $\mathbf{f}(t)$ é um vetor $n \times 1$ periódico de período $\Gamma = \frac{2\pi}{\omega}$, onde ω é a frequência de entrada
- $\mathbf{q}(t)$ é um vetor de ordem n de coordenadas generalizadas

Do método operacional, resulta que a resposta do sistema (5.19), em termos da resposta impulso matricial, é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-s) \mathbf{f}(s) ds + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) q_0^{(j)} \quad (5.20)$$

onde, $\mathbf{h}(t)$ satisfaz o problema matricial de valor inicial com condições iniciais impulsivas

$$\sum_{j=0}^N \mathbf{b}_j \frac{d^{(j)} \mathbf{h}(t)}{dt^j} = 0 \quad (5.21)$$

$$\mathbf{h}^{(j)}(0) = \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, N-2 \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_N \mathbf{h}^{(N-1)}(0) = \mathbf{I}$$

e os elementos \mathbf{h}_j da base dinâmica normalizada $\{\mathbf{h}_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$, são definidos como

$$\mathbf{h}_j(t) = \sum_{i=j+1}^N \mathbf{h}^{(i-j-1)}(t) \mathbf{b}_i \quad ; \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (5.22)$$

Estes relacionam-se com os elementos da base dinâmica $\{\mathbf{h}^{(j)}(t)\}_{j=0}^{N-1}$ por

$$\mathbf{h}_j(t) = \sum_{i=j+1}^N \mathbf{h}^{(i-j-1)}(t) \mathbf{b}_i \quad ; \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (5.23)$$

onde estes $\mathbf{h}_j(t)$ satisfazem os problemas matriciais de valor inicial

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \mathbf{b}_k \frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(t)}{dt^k} = 0 &= \sum_{k=0}^N \frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(t)}{dt^k} \mathbf{b}_k \\ \frac{d^{(k)} \mathbf{h}_j(0)}{dt^k} &= \begin{cases} 0 & ; \text{ se } k \neq j \\ \mathbf{I} & ; \text{ se } k = j \end{cases} \end{aligned} \quad (5.24)$$

para $k = 1, \dots, N$ e $j = 0, \dots, N-1$.

Suponha-se que a função de Green T -periódica $\mathbf{\Gamma}(t)$ seja definida como

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) \mathbf{A}_j & ; \quad 0 < t < T \\ \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) \mathbf{B}_j & ; \quad -T < t < 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

onde \mathbf{A}_j e \mathbf{B}_j são matrizes constantes $n \times n$ a serem determinadas utilizando-se as seguintes propriedades da função $\mathbf{\Gamma}(T)$:

- periodicidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N-1$, isto é,

$$\mathbf{\Gamma}^{(j)}(\Gamma^-) = \mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^-), \quad j = 0, \dots, N-2 \quad (5.26)$$

- continuidade de $\mathbf{\Gamma}(t)$ e de suas derivadas até ordem $N-2$ em $t=0$, isto é

$$\mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^+) = \mathbf{\Gamma}^{(j)}(0^-), \quad j = 0, \dots, N-2 \quad (5.27)$$

- condição de salto na derivada de ordem $N-1$

$$\mathbf{b}_N [\mathbf{\Gamma}^{(N-1)}(0^+) - \mathbf{\Gamma}^{(N-1)}(0^-)] = \mathbf{I} \quad (5.28)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n

Considerando a periodicidade de $\Gamma(t)$ e de suas derivadas até ordem $N - 1$ (5.26) segue que

$$\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j^{(l)}(\Gamma) \mathbf{A}_j = \mathbf{B}_l, \quad l = 0, \dots, N - 1 \quad (5.29)$$

Da continuidade de $\Gamma(t)$ e de suas derivadas até ordem $N - 2$ (5.27) resulta que

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{B}_j; \quad j = 0, \dots, N - 2 \quad (5.30)$$

Da condição de salto (5.28) imposta sobre $\Gamma^{N-1}(t)$ vem que

$$\mathbf{A}_{N-1} = \mathbf{B}_{N-1} + \mathbf{b}_N^{-1} \quad (5.31)$$

Nestas condições, usando-se (5.29), (5.30) e (5.31) ve-se que os coeficientes \mathbf{B}_j ; $j = 0, \dots, N - 1$ satisfazem o seguinte sistema de equações $nN \times nN$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{h}_0(T) & -\mathbf{h}_1(T) & \dots & -\mathbf{h}_{N-1}(T) \\ -\dot{\mathbf{h}}_0() & \mathbf{I} - \dot{\mathbf{h}}_1(T) & \dots & -\dot{\mathbf{h}}_{N-1}(T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{h}_0^{(N-1)}(T) & -\mathbf{h}_1^{(N-1)}(T) & \dots & \mathbf{I} - \mathbf{h}_{N-1}^{(N-1)}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{N-1}(T) \mathbf{b}_N^{-1} \\ \dot{\mathbf{h}}^{N-1}(T) \mathbf{b}_N^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{N-1}^{(N-1)}(T) \mathbf{b}_N^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Observa-se que a matriz dos coeficientes do sistema (5.32) é exatamente $\mathbf{I} - e^{\Gamma \mathbb{A}}$.

Supondo que $\omega \notin \sigma(\mathbf{I} - e^{\Gamma \mathbb{A}})$, isto é, seja inversível, tem-se que

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-2} \mathbf{h}_j(t) \mathbf{B}_j + (\mathbf{B}_{N-1} + \mathbf{b}_N^{-1}) \mathbf{h}_{N-1}(t) & ; \quad 0 \leq t \leq T \\ \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{h}_j(t) \mathbf{B}_j & ; \quad -T \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

e daí a única solução de (5.19) T - periódica é dada por

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \mathbf{f}(s) ds \quad (5.34)$$

onde os coeficientes matriciais \mathbf{B}_j , $j = 1, \dots, N - 1$, definidos em (5.33) satisfazem o sistema (5.32).

5.3 Condições Iniciais da Solução Periódica

Para o problema descrito por (5.19) a solução T - periódica é dada por (5.34) onde \mathbf{h}_j é definido em (5.22).

Supondo-se que $\mathbf{f}(t) = e^{i\omega t}\mathbf{V}$, pelo método dos coeficientes a determinar, tem-se que $\mathbf{q}(t) = e^{i\omega t}\mathbf{U}$ onde \mathbf{V} e \mathbf{U} são vetores constantes $n \times 1$. Substituindo-se $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{q}(t)$ em (5.19), vem que

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{V}e^{i\omega t} \quad (5.35)$$

onde

$$\mathbf{H}(i\omega) = \left(\sum_{j=0}^N (i\omega)^j \mathbf{b}_j \right)^{-1} \quad (5.36)$$

é a resposta em frequência do sistema (5.19). De (5.35) decorre que

$$\mathbf{q}(0) = q_0 = \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{V} \quad (5.37)$$

Derivando k vezes (5.37) e substituindo-se em (5.20) vem que

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-s)e^{i\omega s} ds + \sum_{k=0}^{N-1} (i\omega)^k \mathbf{h}_k(t) \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{V} \quad (5.38)$$

onde \mathbf{h}_k é dado por (5.22).

Por outro lado

$$q_0 = \int_0^\Gamma \Gamma(-s)e^{i\omega s} \mathbf{V} ds \quad (5.39)$$

donde vem, por simples diferenciação de (5.34), que

$$q_0^{(k)} = \int_0^\Gamma \Gamma^{(k)}(-s)e^{i\omega s} \mathbf{V} ds \quad (5.40)$$

Substituindo-se (5.40) em (5.20) obtém-se

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-s)e^{i\omega s} ds + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{h}_k(t) \int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}^{(k)}(-s)e^{i\omega s} \mathbf{V} ds \quad (5.41)$$

Por outro lado, substituindo-se (5.34) em (5.19) e integrando por partes, obtém-se que

$$\left(\int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}(t-s)e^{i\omega s} ds \right) \mathbf{V} = \mathbf{H}(i\omega)e^{i\omega t} \mathbf{V} \quad (5.42)$$

donde, para $t = 0$, tem-se que

$$\left(\int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}(-s)e^{i\omega s} ds \right) \mathbf{V} = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{V} \quad (5.43)$$

Observe-se então que a resposta em frequência será dada por

$$\int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}(-s)e^{i\omega s} ds = \mathbf{H}(i\omega) \quad (5.44)$$

ou mais geralmente

$$\int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}^{(k)}(-s)e^{i\omega s} ds = (i\omega)^k \mathbf{H}(i\omega) \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.45)$$

ou seja,

$$\mathbf{H}(i\omega) = \frac{1}{(i\omega)^k} \int_0^\Gamma \mathbf{\Gamma}^{(k)}(-s)e^{i\omega s} ds \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (5.46)$$

Obteve-se aqui uma fórmula fechada para o cálculo da resposta em frequência em termos da função de Green T -periódica, de suas derivadas e de uma força oscilatória. Esta independe da ordem do sistema. Para excitações gerais veja-se [Claeyssen, 1999] e [Claeyssen, Garibotti, Tsukasan, Costa, 2003].

6 O PROBLEMA DA CENTRÍFUGA

Máquinas centrífugas são largamente utilizadas na indústria têxtil, mais especificamente, na produção de fios sintéticos. A figura abaixo mostra esquematicamente uma dessas máquinas [Starzinski, 1977].

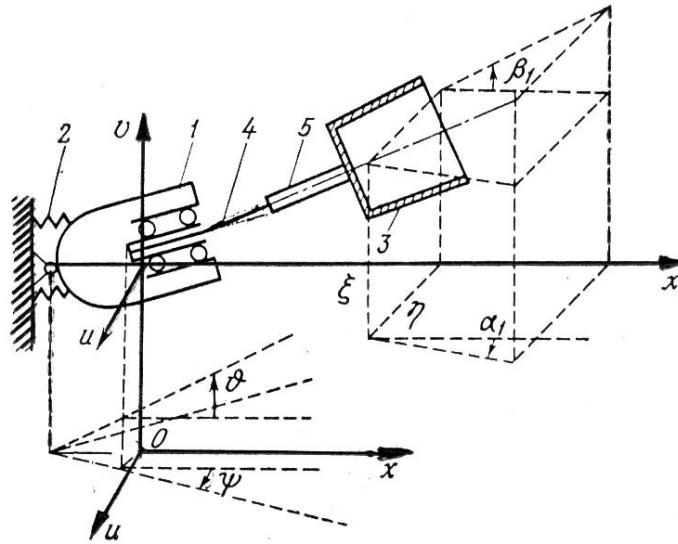


Figura 6.1 máquina centrífuga

A centrífuga é uma combinação de um eixo acionado eletricamente e um recipiente misturador colocado na extremidade de um eixo vertical em balanço. Segundo [Starzinski, 1977], dados experimentais sobre o funcionamento destas máquinas, demonstram que as vibrações forçadas devido ao desbalanço do eixo rotor correspondem exatamente as soluções periódicas.

Neste capítulo será feita a apresentação da equação matricial que rege o movimento da centrífuga. Tal equação é fracamente não linear e a obtenção da solução periódica é obtida utilizando-se o método de Poincaré, método este, originário da teoria de pequenas perturbações em mecânica celeste. Existe uma vasta literatura sobre métodos perturbativos com a finalidade de estudar problemas oscilatórios com linearidades fracas, dentre os quais pode-se citar, expansão direta, média (averaging), renormalização, múltiplas escalas, dentre outros [Bogoliubov, 1961], [Nayfeh, 1973], [Nayfeh, 1981], [Kevorkian, 1985] e [Murdock, 1991].

Além disso, apresentam-se os resultados das simulações da resposta ao des-balanço do eixo rotor da centrífuga, obtidos com o uso da função $\Gamma(t)$ definida por (4.93) e estes comparados com resultados analíticos existentes na bibliografia, mais especificamente em [Starzinski, 1977].

6.1 Equação do Movimento

Suponha-se que o eixo rotor é flexível, isto é, a frequência fundamental das vibrações transversais é menor que sua velocidade de rotação.

Considere-se o sistema fracamente não linear descrito pela equação

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) + \epsilon \mathbf{g}(t, q, \dot{q}, \epsilon) \quad (6.1)$$

onde

- \mathbf{M} , \mathbf{G} e \mathbf{K} são matrizes reais, constantes $n \times n$ e tais que

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T, \quad \mathbf{G} = -\mathbf{G}^T \text{ e } \mathbf{K} = \mathbf{K}^T$$

- $\mathbf{f}(t)$ é um vetor $n \times 1$ com componentes contínuas por partes, integráveis de período $\Gamma = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\mathbf{g}(t, q, \dot{q}, \epsilon)$ é um vetor $n \times 1$ formado por funções analíticas na variável ϵ , para $\epsilon = 0$, sendo que Γ é periódica em t e tendo quantas derivadas forem necessárias com relação a \mathbf{q} e $\dot{\mathbf{q}}$
- ϵ uma parâmetro pequeno, $\epsilon \ll 1$, geralmente relacionado com a amplitude de vibração do sistema [Moura, 2001]

Salienta-se que para $\epsilon = 0$, tem-se o sistema

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (6.2)$$

dito problema não perturbado, ou seja, o problema (6.1) é obtido do problema (6.2) por uma pequena perturbação.

Para o sistema em questão as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{K} e os vetores $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ estão definidos como segue [Starzinski, 1977]

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i \omega k_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ -c_{13} & c_{23} & c_{33}^0 + f \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} m e \omega^2 e^{i \omega t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

onde g_1 , g_2 e g_3 são definidos como segue

$$g_1 = m [\dot{u}_1 + i e^{i \omega t}] (\chi_0 + \chi_1 |\dot{u}_1|^2) + h c_{11} (\dot{u}_1 - i \omega u_1) - h c_{12} (\dot{u}_2 - i \omega u_2) - h c_{13} (\dot{u}_3 - i \omega u_3) \quad (6.3)$$

$$g_2 = \left(\frac{1}{2} i \omega k_0 + c_{21} u_1 - c_{22} u_2 - c_{23} u_3 \right) |\dot{u}_2|^2 - (i \omega k_0 - 2k_1 \dot{u}_1) Re(\bar{u}_2 \dot{u}_2) + h c_{21} (\dot{u}_2 - i \omega u_2) - h c_{22} (\dot{u}_2 - i \omega u_2) - h c_{13} (\dot{u}_3 - i \omega u_3) \quad (6.4)$$

$$g_3 = h c_{31} (\dot{u}_2 - i \omega u_2) - h c_{31} (\dot{u}_1 - i \omega u_1) - h c_{32} (\dot{u}_2 - i \omega u_2) - h c_{33}^0 (\dot{u}_3 - i \omega u_3) - A \chi_2 \dot{u}_3 \quad (6.5)$$

Os parâmetros físicos do problema são

- m - massa do rotor - (Kg)
- ω - velocidade de rotação do eixo rotor - (rad/s)
- e - excentricidade linear, neste problema considerado pequeno em relação aos demais termos da equação diferencial - (m)
- k_0 - momento de inércia de massa polar do rotor ($kg.m^2$)

- k_1 - momento de inércia de massa equatorial do rotor ($kg.m^2$)
- χ_0, χ_1 e χ_2 coeficientes das forças dissipativas externas - (N.s/Kg.m)
- h - coeficiente de atrito interno para o material do eixo (N.s/m)
- $c_{kj} = c_{jk}$ e c_{33}^0 parâmetros de projeto do sistema mecânico
- f - rigidez do absorvedor (2) relativo ao deslocamento angular do mancal do eixo (1)

As componentes do vetor $\mathbf{q}(t)$, u_1 , u_2 e u_3 são definidas como segue

$$u_1 = \eta + i \xi \quad u_2 = \alpha_1 + i \beta_1 \quad u_3 = \psi + i \varphi \quad (6.6)$$

onde

- η e ξ coordenadas do centróide do elemento rígido do rotor (5) e do recipiente misturador (3)
- α_1 e β_1 ângulos de Rézal caracterizando a direção tangente do eixo vertical elástico em balanço (4) no ponto onde a porção rígida do rotor é montada
- ψ e φ ângulos de desvio entre o mancal do eixo flexível com o eixo fixo x

Por outro lado, supondo que $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + i \mathbf{f}_2$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}_R + i \mathbf{g}_{Im}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{q}_1 + i \mathbf{q}_2$, obtém-se

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_1(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_1(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{f}_1(t) + \epsilon \mathbf{g}_1(t, q, \dot{q}, \epsilon) \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_2(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_2(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{f}_2(t) + \epsilon \mathbf{g}_2(t, q, \dot{q}, \epsilon) \end{cases} \quad (6.7)$$

ou seja, tanto a parte real como a imaginária satisfazem (6.1), onde

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \eta \\ \alpha_1 \\ \psi \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_1 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} m \omega^2 e \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} m \omega^2 e \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

e

$$\mathbf{g}_R = \text{Re}(\mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad \mathbf{g}_{Im} = \text{Im}(\mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \quad (6.10)$$

Esta formulação alternativa faz com que os coeficientes matriciais envolvidos dupliquem o seu tamanho aumentando a complexidade computacional e, conseqüentemente, o tempo de máquina acarretando um maior custo computacional.

Na próxima seção, será aplicado o método de Poincaré ao sistema (6.1) para obter sua resposta periódica. Usar-se-a o que foi desenvolvido no capítulo anterior, ou seja, a resposta periódica será escrita em termos da função de Green Γ -periódica obtida no capítulo precedente.

6.2 O Método de Poincaré

O método de Poincaré, assim como os demais métodos perturbativos já citados neste trabalho, procura expansões da forma

$$\mathbf{q}(t, \epsilon) = \mathbf{q}^{(0)}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \mathbf{q}^{(i)}(t) \quad (6.11)$$

onde

- $\mathbf{q}^{(i)}(t)$ é dita perturbação de ordem i , ou de i^a ordem, ou ainda correção de ordem i
- $\mathbf{q}(t, \epsilon)$ é a resposta perturbada
- $\mathbf{q}^{(0)}$ a resposta não perturbada, ou seja, satisfaz a equação (6.1) para $\epsilon = 0$
- ϵ um parâmetro pequeno, ou seja, $\epsilon \ll 1$, geralmente relacionado com a amplitude de vibração do sistema.

O número de correções a serem calculadas depende da natureza do problema estudado. Na prática são necessárias apenas as correções de baixa ordem.

A idéia é procurar expansões do tipo (6.11), que sejam analíticas e uniformes numa vizinhança da posição de equilíbrio. Uniforme significa que as correções obedeçam a seguinte relação de ordem

$$O(\mathbf{q}^{(0)}(t)) > O(\mathbf{q}^{(1)}(t)) > \dots$$

ou seja, as correções calculadas não devem crescer tanto, a medida que t aumenta, de modo a ficar com ordem idêntica ou maior a ordem de $\mathbf{q}^{(0)}(t)$. Neste caso, a expansão (6.11) é válida teoricamente para todo t .

A não uniformidade da expansão (6.11) deve-se, em grande parte, ao aparecimento de termos seculares¹. Estes fazem com que a expansão deixe de ser válida para todo t e passe a ser válida para tempos da ordem de ϵ^{-1} . Neste caso, a eliminação dos termos seculares é fundamental para a uniformidade da expansão (6.11).

Expandindo o 2º membro de (6.1) em série de Taylor em torno da posição de equilíbrio $(\mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}, 0)$, substituindo (6.11) em (6.1) e igualando os termos de mesma ordem, isto é, mesma potência de ϵ , obtém-se

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{(0)}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}^{(0)}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}^{(0)}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (6.12)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{(1)}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}^{(1)}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}^{(1)}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{q}^{(0)}, \dot{\mathbf{q}}^{(0)}, 0) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{(2)}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}^{(2)}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}^{(2)}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{(0)} \mathbf{q}^{(1)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{(0)} \dot{\mathbf{q}}^{(1)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)} \quad (6.14)$$

onde $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{(0)}$ e $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)}$ são, respectivamente, as matrizes Jacobiana e Hesseana do vetor $\mathbf{g}(t)$ calculadas na posição de equilíbrio $(\mathbf{q}(0), \dot{\mathbf{q}}(0), 0)$.

¹Matematicamente, estes termos são caracterizados como produtos do tipo $\epsilon t^n \sin(\omega t)$ ou $\epsilon t^n \cos(\omega t)$. Em aplicações na área de astronomia, mais especificamente no movimento de planetas, o parâmetro ϵ é tomado pequeno e o efeito destes termos só pode ser sentido após longos períodos, da ordem de um século. Para maiores detalhes veja-se [Kervokian, 1981], [Nayfeh, 1973], [Nayfeh, 1981].

A solução Γ -periódica de (6.12) e as correções de 1ª e 2ª ordem são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{q}^{(0)}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \mathbf{f}(s) ds \quad (6.15)$$

$$\mathbf{q}^{(1)}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \mathbf{g}(s, \mathbf{q}^{(0)}(s), \dot{\mathbf{q}}^{(0)}(s), 0) ds \quad (6.16)$$

$$\mathbf{q}^{(2)}(t) = \int_0^T \Gamma(t-s) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{(0)} \mathbf{q}^{(1)}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)} \dot{\mathbf{q}}^{(1)}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)} \right] ds \quad (6.17)$$

onde a função de Green Γ -periódica é dada por (4.93). Então a resposta do sistema perturbado (6.1) é dada por

$$\mathbf{q}(t, \epsilon) = \mathbf{q}^{(0)}(t) + \epsilon \mathbf{q}^{(1)}(t) + \epsilon^2 \mathbf{q}^{(2)}(t) \quad (6.18)$$

onde $\mathbf{q}^{(0)}(t)$, $\mathbf{q}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{q}^{(2)}(t)$ são dadas, respectivamente, por (6.15), (6.16) e (6.17). Para a convergência do método de Poincaré veja-se [Hale, 1969], Teor. 2.1, sec. IV., pág. 139-156.

Na próxima seção serão apresentados os resultados das simulações utilizando-se a formulação desenvolvida e descrita nas seções anteriores (veja-se seção 4.2.3).

6.3 Simulações

Considerando-se o problema descrito por (6.1), a solução Γ -periódica do problema não perturbado descrito por (6.2) e as correções para a obtenção da solução Γ -periódica do problema perturbado são dadas por (6.15), (6.16) e (6.17).

Os valores dos parâmetros físicos considerados nas simulações numéricas estão mostrados na tabela (6.1).

grandeza	m	ω	e	A	ξ_0	ξ_1	ξ_2	h	c_{11}
valores	10	300	0.0001	0.004	0.2	0.3	0.4	1	700
grandeza	c_{12}	c_{13}	c_{22}	c_{23}	c_{33}	c_{33}^0	f	k_0	k_1
valores	10000	30000	75000	20000	60000	50000	50000	0.04	0.002

Tabela 6.1 - Valores dos parâmetros físicos para a centrífuga

A seguir, nas tabelas (6.2) e (6.3), são apresentados os gráficos das partes, real e imaginária, das componentes da matriz resposta impulso $\mathbf{h}(t)$.

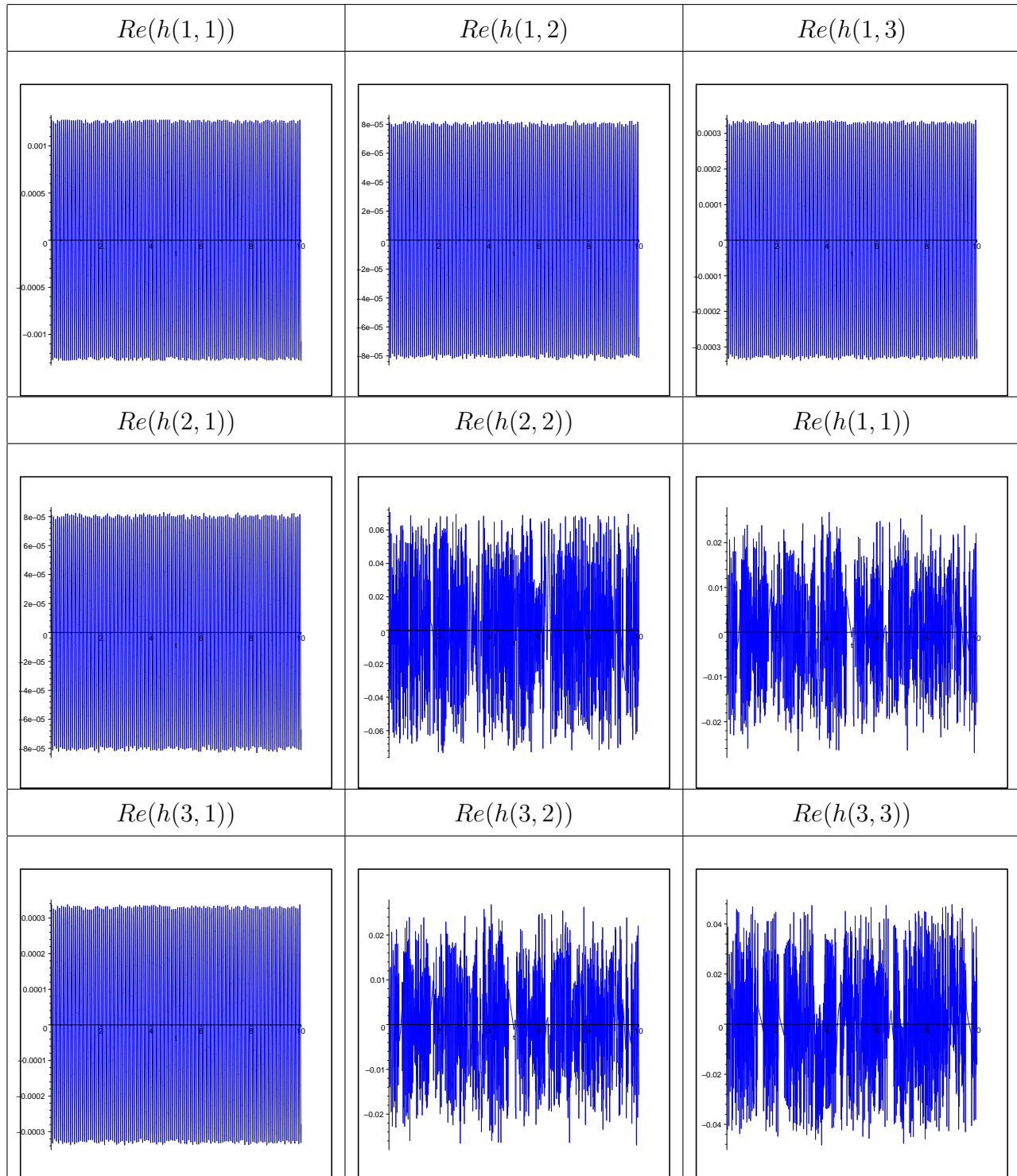
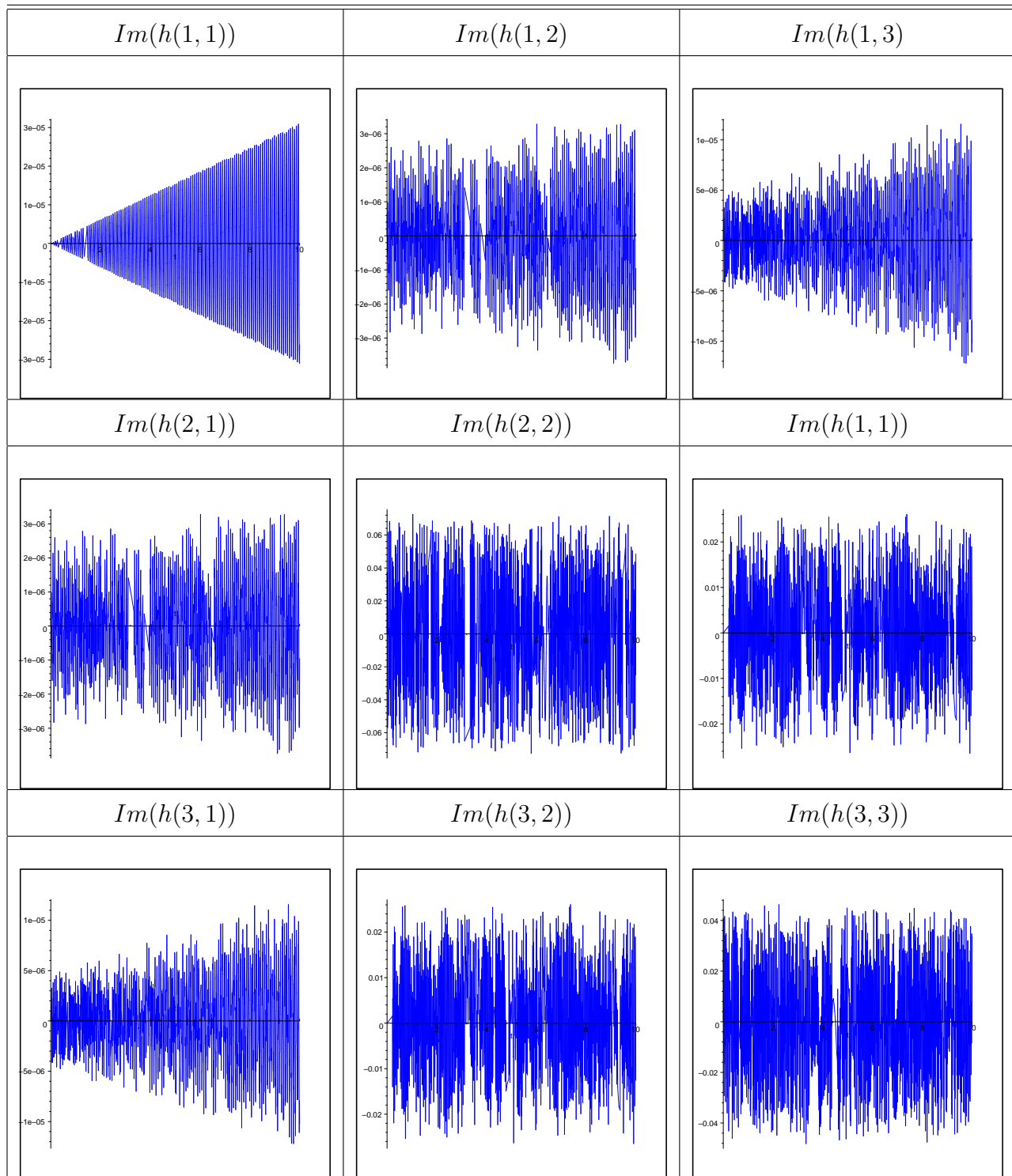
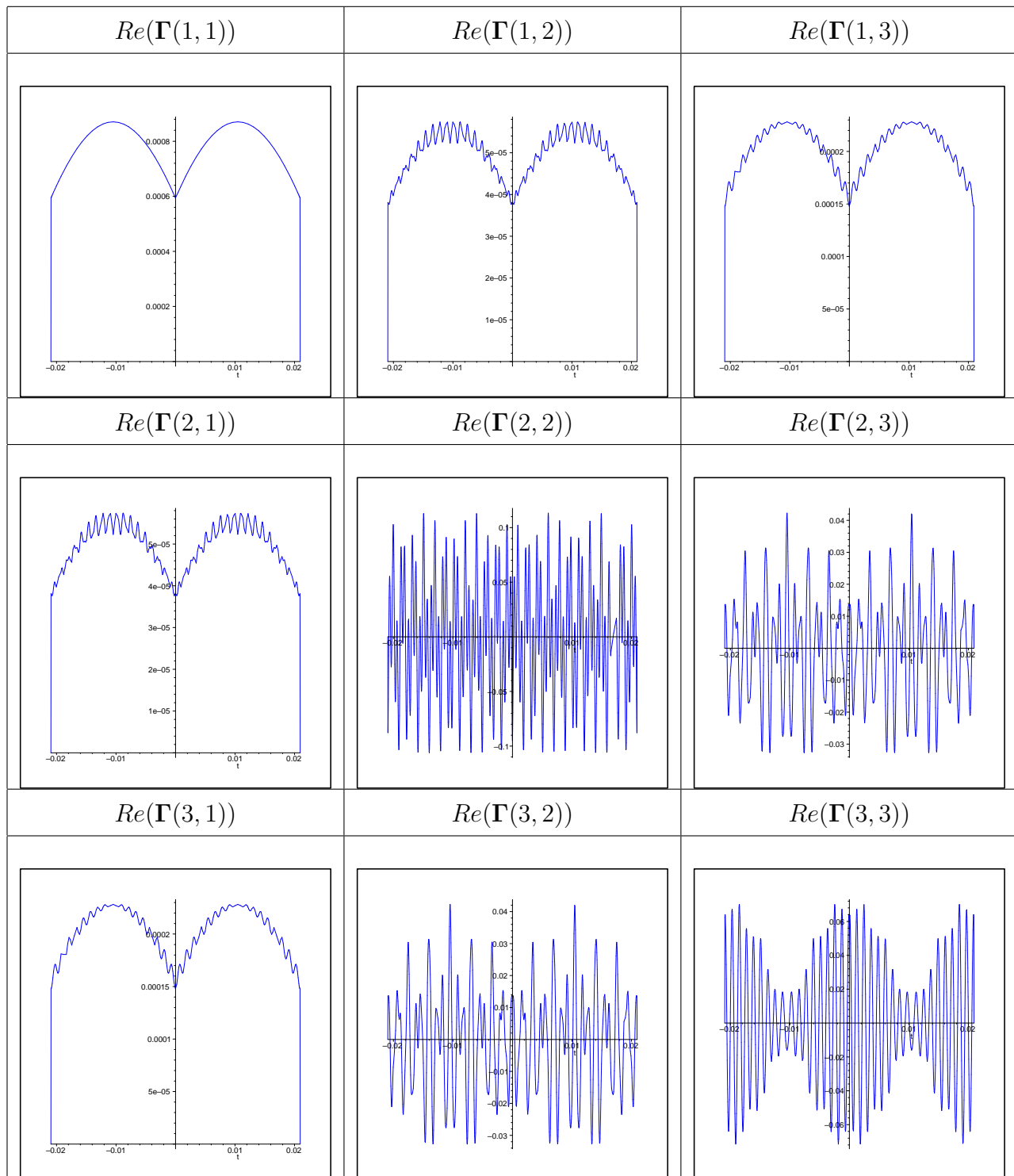


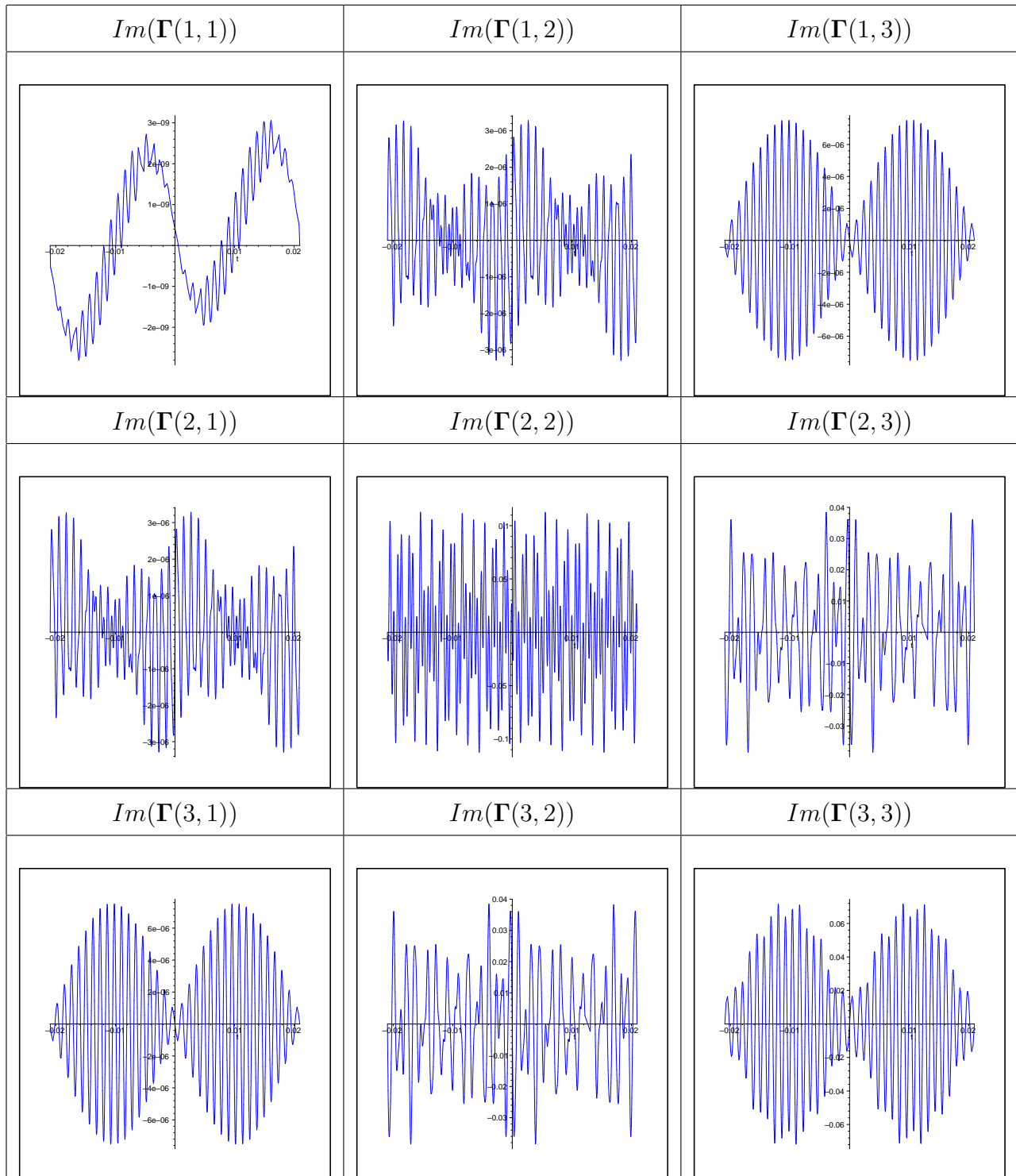
Tabela 6.2 - Componentes da parte real de $\mathbf{h}(t)$

Tabela 6.3 - Componentes da parte imaginária de $\mathbf{h}(t)$

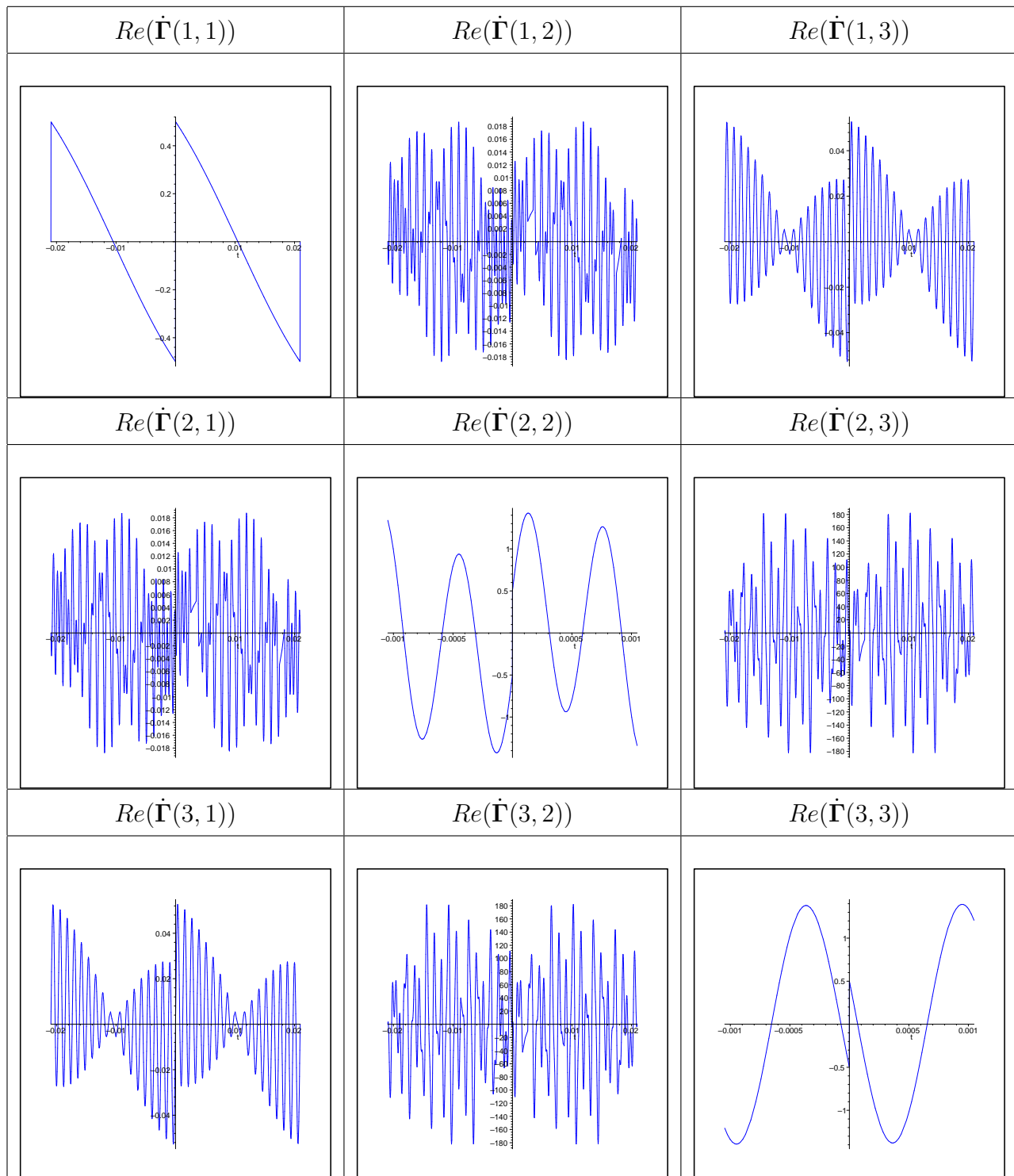
A seguir são mostrados os gráficos da parte real da função de Green T -periódica obtida utilizando (4.93). Observa-se a continuidade e a periodicidade de $Re(\mathbf{\Gamma}(t))$.

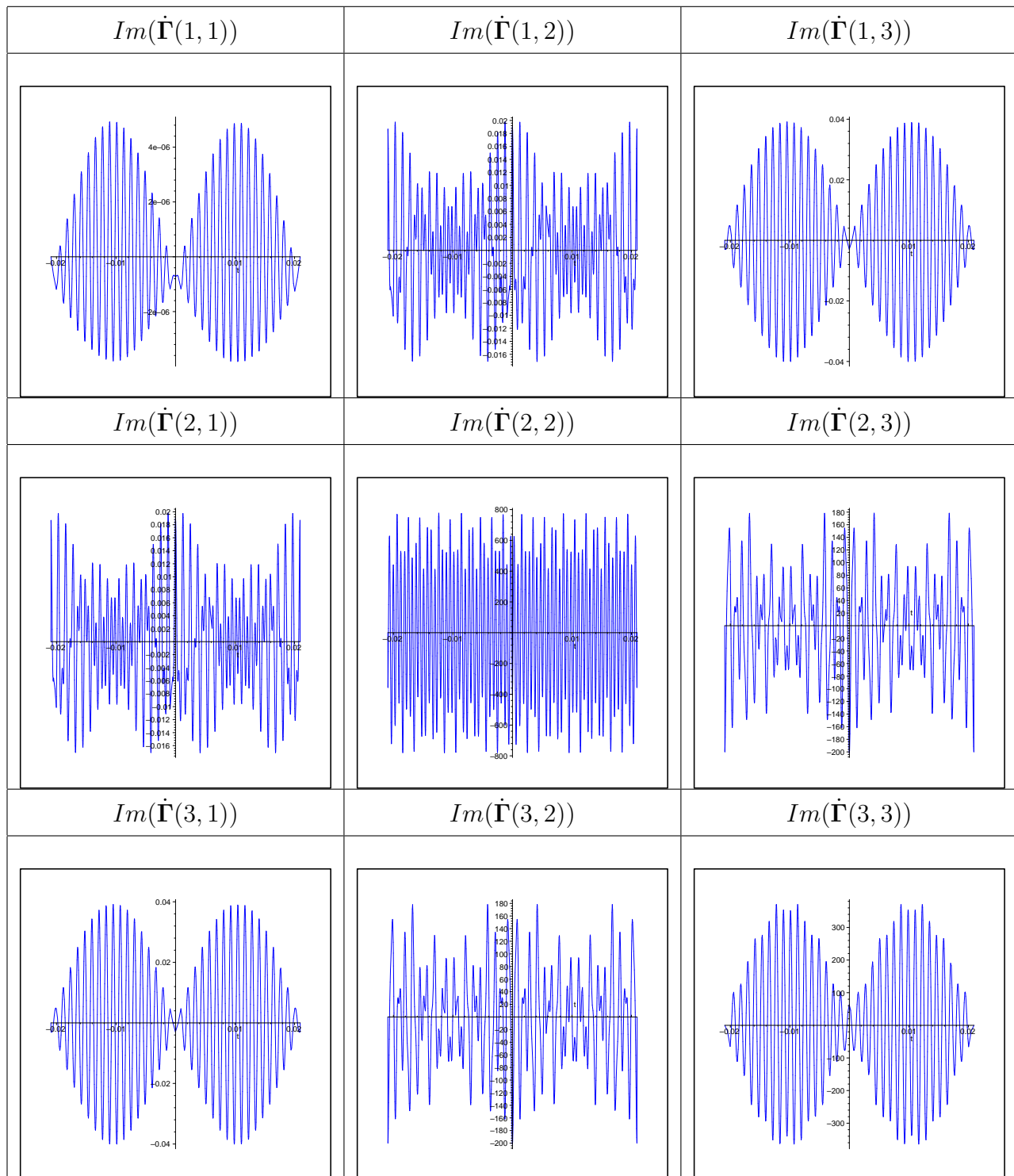
Tabela 6.4 - Componentes da parte real de $\Gamma(t)$

Os gráficos a seguir mostram a parte imaginária da função $\Gamma(t)$. Nestes também verifica-se a continuidade e a periodicidade de $Im(\Gamma(t))$.

Tabela 6.5 - Componentes da parte imaginária de $\Gamma(t)$

A seguir apresentam-se os gráficos das componentes das partes real e imaginária de $\dot{\Gamma}(t)$.

Tabela 6.6 - Componentes da parte real de $\dot{\Gamma}(t)$

Tabela 6.7 - Componentes da parte imaginária de $\dot{\Gamma}(t)$

Observa-se na diagonal da tabela (6.6) que o salto ocorre justamente na parte real de $\dot{\Gamma}(t)$ e satisfaz a propriedade (4.7), fato este facilmente verificável analiticamente

pois

$$\mathbf{M} \left[\dot{\Gamma}(0^+) - \dot{\Gamma}(0^-) \right] = \mathbf{I}$$

onde \mathbf{I} é a identidade de ordem n . Mas

$$\dot{\Gamma}(t) = Re(\dot{\Gamma}(t)) + iIm(\dot{\Gamma}(t))$$

donde segue, por igualdade de números complexos, que

$$\mathbf{M} \left[Re(\dot{\Gamma}(0^+)) - Re(\dot{\Gamma}(0^-)) \right] = \mathbf{I}$$

A continuidade de $\Gamma(t)$ em $t = 0$ implica na continuidade de $Re(\Gamma(t))$ e $Im(\Gamma(t))$ neste ponto, como pode ser visualizado nos gráficos apresentados nas tabelas (6.4) e (6.5). Analiticamente tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \Gamma(t)$$

ou seja

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Re(\Gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} Re(\Gamma(t))$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} Im(\Gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^-} Im(\Gamma(t))$$

A seguir compara-se a de resposta do sistema (6.12) de duas maneiras: utilizando (6.15) (linha continua verde) e a resposta em frequência (pontilhado azul), ou seja,

$$\mathbf{q}^{(0)}(t) = \mathbf{H}(i\omega) \mathbf{V} e^{i\omega t} \quad (6.19)$$

onde

$$\mathbf{H}(i\omega) = \left[(i\omega)^2 \mathbf{M} + (i\omega) \mathbf{G} + \mathbf{K} \right]^{-1}$$

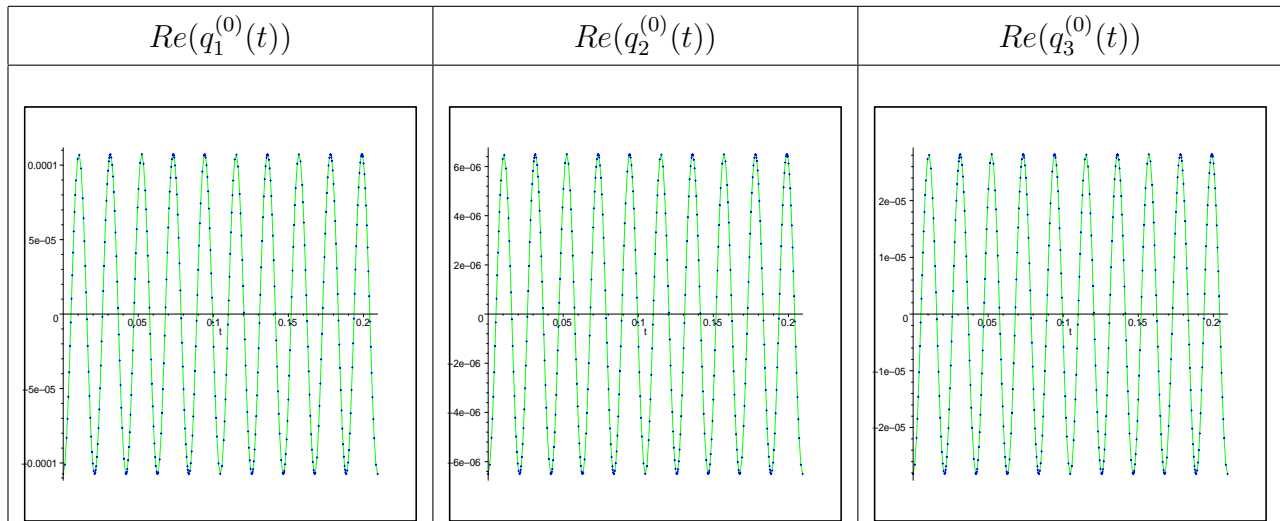


Tabela 6.8 - Comparação entre as partes reais das componentes das respostas obtidas com a desenvolvida e a resposta em frequência

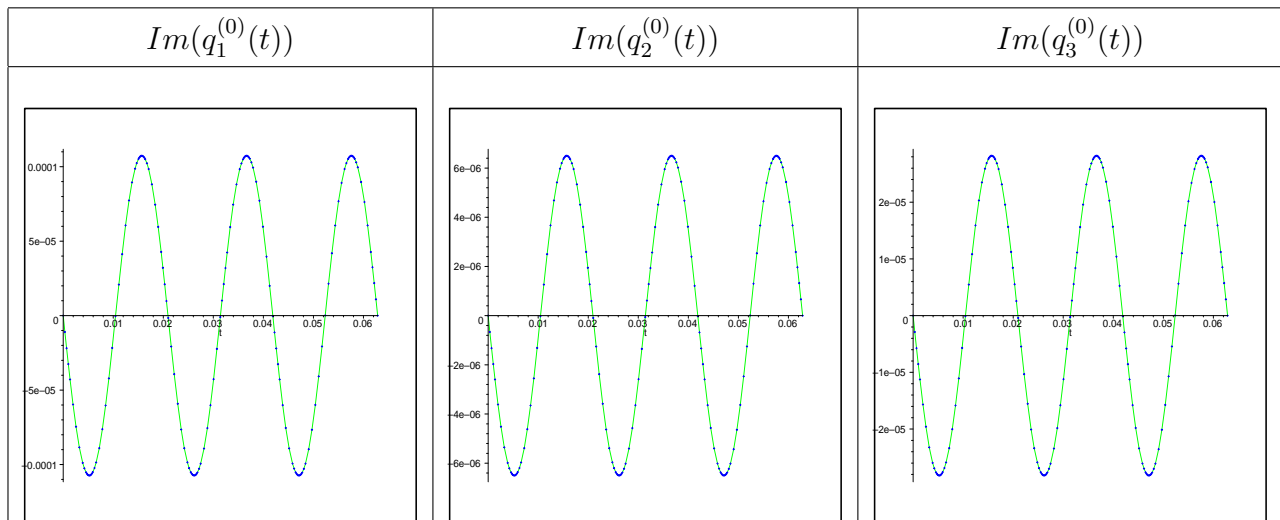


Tabela 6.9 - Comparação entre as partes imaginárias das componentes das respostas obtidas com a resposta em frequência

Considerando (6.16) obtém-se a correção de 1ª ordem para o problema descrito por (6.1). A seguir são mostrados os gráficos comparativos entre a resposta em frequência, isto é

$$\mathbf{q}^{(1)}(t) = \mathbf{H}(i\omega)\mathbf{g}(t, \mathbf{q}^{(0)}(t), \dot{\mathbf{q}}^{(0)}(t), 0) \quad (6.20)$$

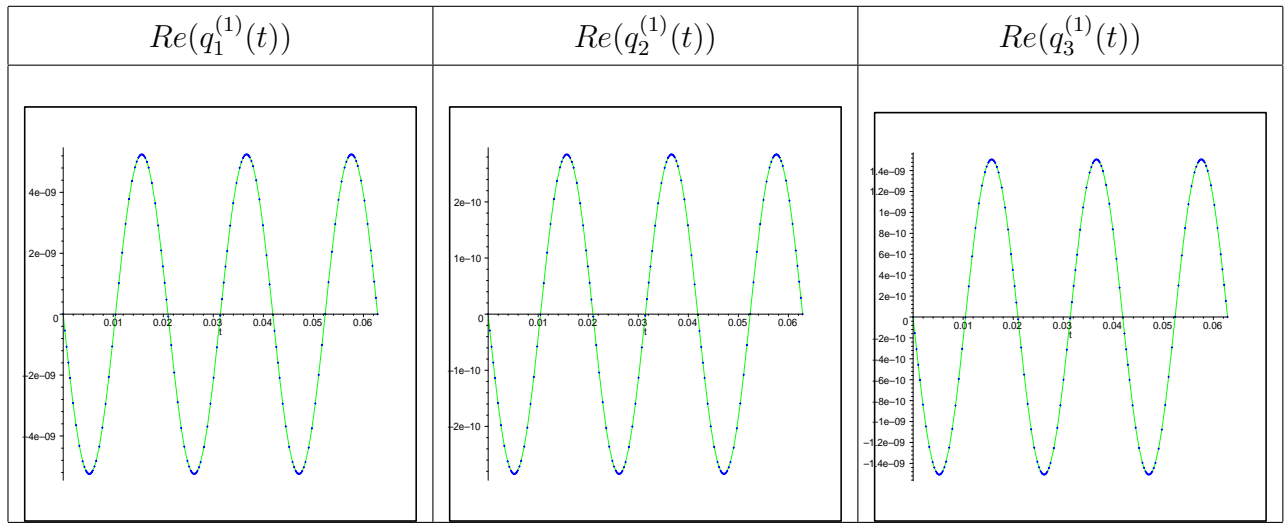


Tabela 6.10 - Comparação entre as partes reais das componentes das correções de 1ª ordem obtidas com (6.16) e (6.20)

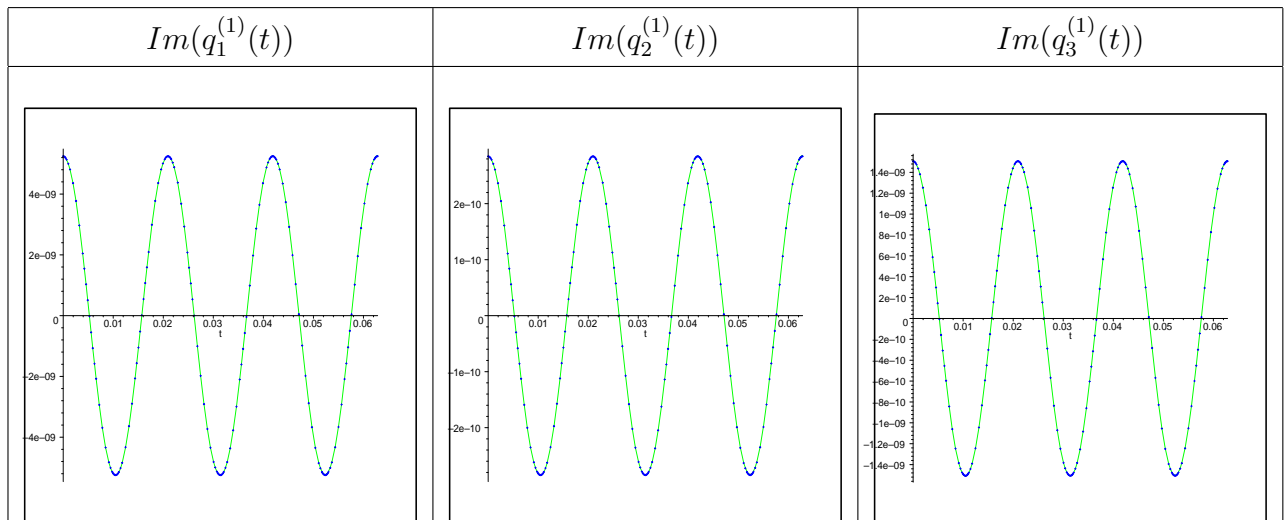


Tabela 6.11 - Comparação entre as partes imaginárias das componentes das correções de 1ª ordem obtidas com (6.16) e (6.20)

Nos gráficos a seguir, as partes real e imaginária, da correção de 2ª ordem, dada por (6.17), serão comparadas com as partes real e imaginária de

$$\mathbf{q}^{(2)}(t) = \mathbf{H}(i\omega) \left[\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{(0)} \mathbf{q}^{(1)}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)} \dot{\mathbf{q}}^{(1)}(s) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \epsilon} \right)_{(0)} \right] \quad (6.21)$$

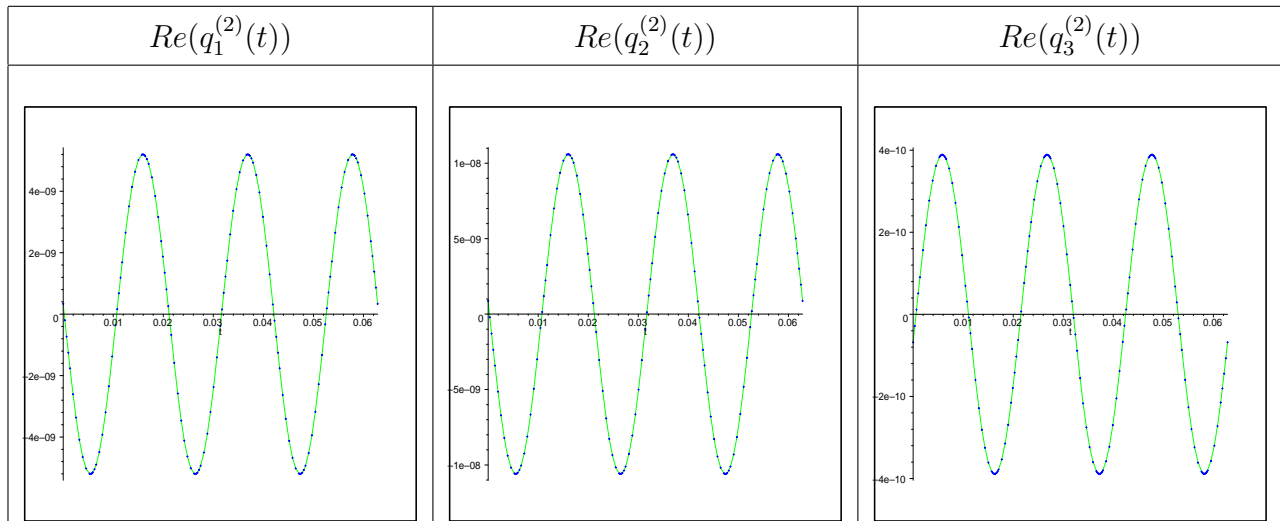


Tabela 6.12 - Comparação entre as partes reais das componentes das correções de 2ª ordem obtidas com (6.17) e (6.21)

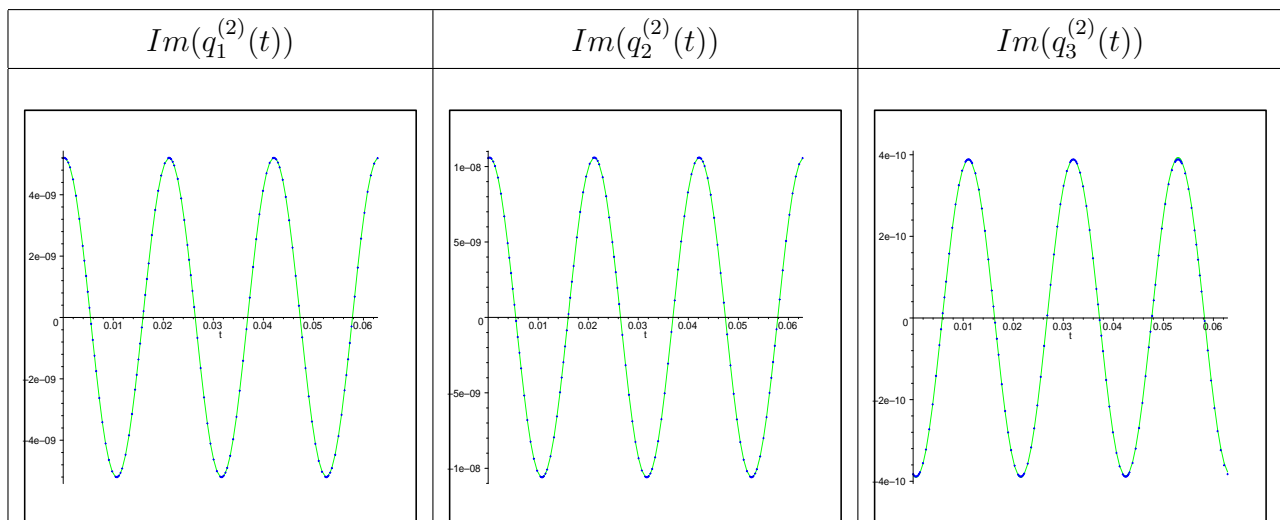


Tabela 6.13 - Comparação entre as partes imaginárias das componentes das correções de 2ª ordem obtidas com (6.17) e (6.21)

A seguir apresentam-se os gráficos das partes, real e imaginária, das componentes da solução T -periódica de (6.1) considerando-se (6.18) para diferentes valores do parâmetro ϵ . A comparação é feita com $\mathbf{q}^{(0)}$. Considera-se o vermelho para $\mathbf{q}^{(0)}$, o preto para $\epsilon = 10$ e o verde para $\epsilon = 0.1$. O valor $\epsilon = 10$ foi considerado com a finalidade de mostrar o afastamento do problema não perturbado devido ao efeito da não linearidade.

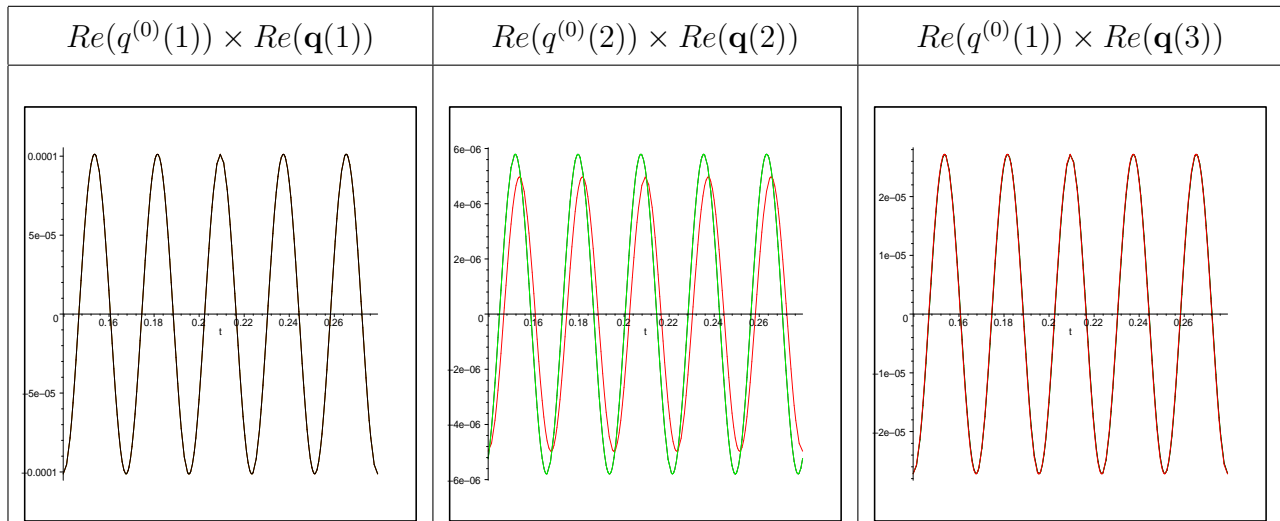


Tabela 6.14 - Comparação entre as partes reais das componentes da resposta perturbada, dada por (6.18), com $\mathbf{q}^{(0)}$

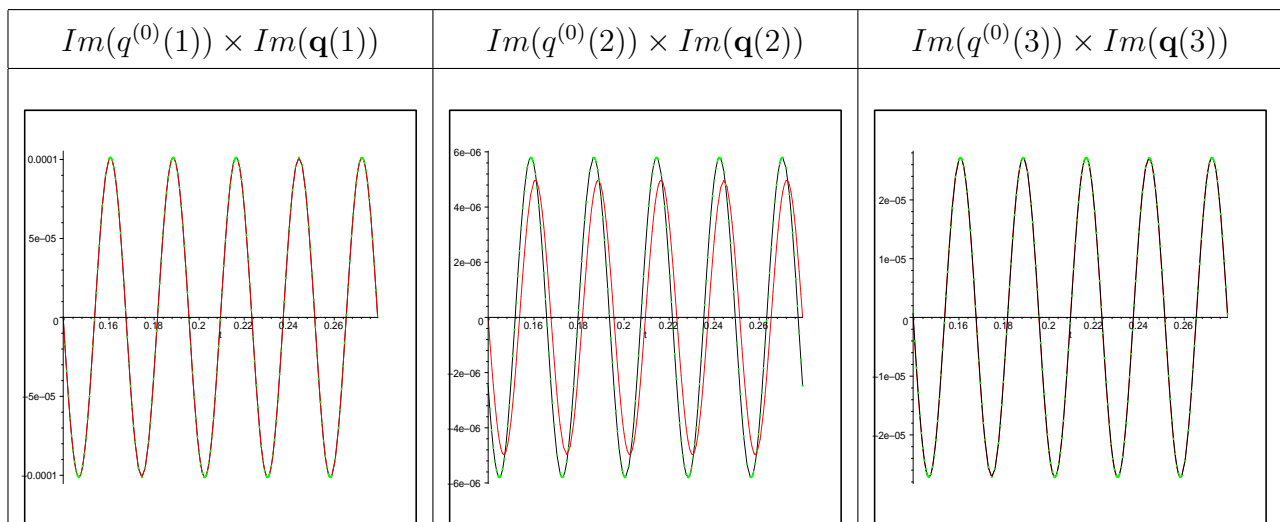


Tabela 6.15 - Comparação entre as partes imaginárias das componentes da resposta perturbada, dada por (6.18), com $\mathbf{q}^{(0)}$

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho obteve-se uma caracterização para resposta periódica de sistemas LTI (sistemas lineares) e sistemas fracamente não lineares de ordem arbitrária com o uso da base dinâmica normalizada obtida a partir da resposta impulso. Uma das vantagens na utilização da base dinâmica normalizada se deve ao fato de ser bem condicionada. Outra vantagem é que tal caracterização foi obtida no próprio espaço físico do problema, ou seja, sem a redução ao espaço de estado. Convém salientar que a redução ao espaço de estado obscurece propriedades do sistema tais como a simetria ou a positividade, entre outras, dificultando sua análise.

No estudo do comportamento dinâmico do eixo rotor flexível, obteve-se uma fórmula fechada para a resposta em frequência. No cálculo das velocidades críticas, associado ao problema de autovalor, o uso da base dinâmica normalizada possibilitou uma redução na ordem do determinante a ser calculado para a obtenção das frequências naturais nos dois casos particulares estudados, ou seja, biapoiado e fixo-apoiado. Com esta redução diminuem-se, o esforço computacional e o tempo de máquina.

A resposta periódica para os sistemas aqui considerados é caracterizada como um operador integral cujo núcleo é uma função de Green periódica, sendo arbitrária a ordem do sistema. Por outro lado, para o cálculo da função de Green periódica, escrita como uma combinação linear dos elementos da base dinâmica normalizada, utilizou-se suas propriedades de periodicidade e continuidade, bem como as propriedades da base dinâmica normalizada. O sistema obtido para o cálculo dos coeficientes da combinação linear adquire uma forma padrão com o uso de tais propriedades onde a matriz dos coeficientes depende unicamente do valor dos elementos da base dinâmica normalizada calculadas no período T . Sob este ponto de vista, a metodologia desenvolvida é abrangente e compacta, podendo ser aplicada à problemas fracamente não lineares.

Observou-se, em todas as simulações numéricas realizadas, uma boa concordância entre as resposta periódica obtida através do operador integral com a resposta em frequência.

Além disso, as funções de Green T - periódicas obtidas, satisfazem as propriedades de periodicidade e continuidade.

Para o problema fracamente não linear da centrífuga foi utilizado o método de perturbação de Poincaré numa versão matricial. Com a metodologia desenvolvida no capítulo 3 foram obtidas as correções de ordem 1 e 2 e comparadas com a resposta em frequência utilizado por [Starzinski, 1977]. Com base nas simulações apresentadas, observa-se a concordância entre as respostas periódicas obtidas das duas maneiras. Obteve-se também a resposta periódica para o sistema fracamente não linear sendo que a convergência da expansão obtida com aplicação do método de Poincaré é garantida em [Hale, 1969], Teor. 2.1, Sec IV.2, pg., 159-156. A expansão foi obtida e os gráficos de suas componentes mostrados para diferentes valores do parâmetro ϵ .

Como possibilidades de continuidade do trabalho tem-se:

- Com relação ao estudo do comportamento dinâmico de sistemas rotativos pretende-se considerar condições de contorno acopladas.
- No estudo de respostas periódicas para sistemas pretende-se abordar o caso ressonante.
- Extensão, para sistemas distribuídos, da metodologia utilizada na caracterização de respostas periódicas de sistema concentrados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, M.L., 1980. “Non-Linear Dynamics of Flexible Multi-Bearing Rotors”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 71(1), pp. 129-144.

Adams, M.L., Padovan, J., 1981. “Insights Into Linearized Rotor Dynamics”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 76(1), pp. 129-142.

Adams, M.L., 1987, “Insights Into Linearized Rotor Dynamics, Part 2”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 112(1), pp. 97-110.

Bauer, H.F., 1980. “Vibration of Rotating Uniform Beam, Part I: Orientation in the Axis of Rotation”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 72(2), pp. 177-189.

Bidel, A.C.L., 1995. **Estabilidade de Sistemas Giroscópicos Conservativos Lineares**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Bogoliubov, M.N., Mitropolsky, Y.A., 1961. **Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations**, Hindudtan Publishing Corporations, India.

Bouazara, M., Richard, M.J., 2001. ”An Optimization Method Designed to Improve 3-D Vehicle Comfort and Road Holding Capability Through the Use of Active and Semi-Active Suspensions”, **European Journal Mechanics A/Solids**, vol. 20, pp. 509-520.

Butkovsky, A.G., 1982. **Green’s Functions and Transfer Functions Handbook**, John Wiley & Sons, New York.

Butkovisk, A. G 1983. **Structural Theory of Distributed Systems**”, John Wiley & Sons, New York.

Castilho, A., Jaquet-Richardet, G., Lalane, M., 1988. “ Dynamics Problems the Speed of rotation Increase of a Turbine-Blower Assembly” **Journal of Sound and Vibration**, vol. 215(1), pp. 47-62.

Canahualpa, G.R., 1995. **A Solução Dinâmica em Sistemas Mecânicos Amortecidos**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Canahualpa, G.R., Claeysen, J.C., 1995. **Equação Diferencial Matricial de Segunda Ordem: Enfoque da Solução Dinâmica**, Caderno de Matemática e Estatística, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Canahualpa, G.R., Gallicchio, E., Claeysen, J.R., 1997. “A Matriz de Transição de Sistemas de Segunda Ordem para Métodos Modais Projetivos”, **XX CNMAC**, Gramado, RS, Brasil.

Carslaw, H.S., Jaeger, J. C., 1949. **Operational Methods in Applied Mathematics**, Oxford Press.

Caughey, T.K., 1960. “ Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems”, **ASME Journal of Applied Mechanics**. vol. 27, pp. 269-271.

Caughey, T.K., O’Kelley, M.E., 1965. “ Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems”, **ASME Journal of Applied Mechanics**., Vol. 32, pp. 583-588.

Chen, J., Bogy, D.B., 1992. “Effects of Load Parameters on the Natural Frequencies and Stability of a Flexible Spinning Disk with a Stationary Load System”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 59, pp. 230-S235.

Childs, D., 1993. **Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling and Analysis**, John Wiley & Sons, New York.

Claeysen, J.C.R , 1982. **Equações Diferenciais Matriciais** Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre.

Claeysen, J.C.R., 1988. “Introdução as Funções Matriciais”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, 2^a ed., vol. 9, pp. 59-76.

Claeysen, J.C.R., 1990. "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 140(1), pp. 73-84.

Claeysen, J.C.R., Tsuhazan, T., 1997. "Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations", **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. XLVIII, N^o 1.

Claeysen, J.C.R., Gallicchio, E., Vilhena, M.T., 1990. "Inversion of Higher Matrix Difference and Differential Equations through their Dynamical Solutions", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 149(2), pp. 369-376.

Claeysen, J.C.R., 1995. "Time and Frequency Response, **ICIAM 95**, Hamburgo.

Claeysen, J.C.R., 1999. "The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems", **Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences**, Ed. J. Balthazar, T. Gonçalves, J. Claeysen, vol 2, pp. 522-135.

Claeysen, J.C.R., Schuchman, V., 1998 "On the Minimal Extension of C_0 -Semigroups for Second-Order Damped Equations", **Journal of Math. Analysis and Applications**, vol. 211, pp. 203-922.

Claeysen, J.C.R., Canahualpa, G., Jung, C., 1995. "A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations", **Applied Numerical Mathematics**, vol.39.

Claeysen, J.C.R., 1990. "An Extension of the Cayley-Hamilton Theorem for Characteristic Polynomials of Higher-Order Matrix Pencils", Rel. Tecn, LNCC.

Claeysen, J.C.R., Gallicchio, E., Tamagna, A., 2001 **A Resposta Impulso Matricial em Sistemas Vibratórios**, Ed. UFRGS, Porto Alegre.

Claeysen, J. C. R., Soder, R. A., 2003. "A Dynamical Basis for Computing the Modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 259, n.04, pp. 986 - 990.

Copetti, R. D., 2002. **Análise Modal Adjunta em Problemas Concentrados e Distribuídos**, Tese de Doutorado, UFRGS/PROMECA, Porto Alegre.

Coddington, E.A., 1955. **Theory of Ordinary Differential Equations**, McGraw-Hill, New York.

Costa, S.N.J., 2001. **Problemas de Contorno de Ordem Superior e Cálculo da Função de Green**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Cowper, G.R., 1966. “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 33, pp. 335-340.

Cronin, D.L., 1990. “Eigenvalue and Eigenvector Determination for Nonclassically Damped Dynamic Systems” **Computers & Structures**, vol. 36, N^o. 1, pp. 133-138.

Daleckiĭ, J.L., Krein, M.G., 1974. , **Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Demidovich, B.P., 1973. **Computational Mathematics**, Ed. MIR, Moscow.

Dimentberg, F.M., 1961. **Flexural vibrations of Rotating Shafts**, London:Butterworths.

Duncan, W.J., Frazer, R.A., Collar, A.R., 1957. **Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations**, Cambridge University.

Ehrich, F.F., 1992. **Handbook of Rotor Dynamics**, MacGraw-Hill, New York.

Eshleman, R.L, Eubanks, R.A., 1969. “On the Critical Speeds of a Continuous Rotor”, **ASME Journal of Engineering of Industry**, vol. 91 , pp. 1180-1188.

Fang, H., Yang, B., 1998. “Modelling, Synthesis and Dynamic Analysis of Complex Rotor Systems”, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 211(4), pp. 571-592 .

Faddeeva, V.N., 1959. **Computational Methods of Linear Algebra**, Dover Publications, Inc., New York.

Ferreira, I., Claeysen, J.C.R., Canahualpa, G., 2002. “Convolution with Weighting, Impulse, Transient and Permanent Responses”, **SIAM Meeting in Control, Signals and Linear Algebra**.

Fosk, K. A., 1958. “Coordinates which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems”, **Journal of Applied Mechanics**. vol. 55, pp. 361-364.

Gallicchio, E., 1999. **Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e a Matriz de Transferência**, Tese de Doutorado, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre.

Ginsberg, J. H., 2001. **Mechanical and Structural Vibrations**, John Wiley & Sons, New York.

Giaretta, M.K., 2001. **Vibrações Forçadas com força Axial num Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMap, Porto Alegre.

Glasgow, D.A., Nelson, H.D., 1980. “Stability Analysis of Rotor-Bearing System Using Component Mode Synthesis”, **ASME Journal Machine Design**, vol. 102, pp. 185-193.

Gmür, T.C., Rodrigues, J.D., 1991. “Shaft Finite Elements for Rotor Dynamics Systems”, **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 113(4), pp. 482-493.

Goldstein, H., 1984. **Classical Mechanics**. 2d. ed., Reading, Addison-Wesley, Mass..

Golub, G.H., Van Loan, C.F., 1996. **Matrix Computations**. 3rd. ed., John Hopkins University Press, Baltimore.

Gudonov, S.K., 1997. **Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Hale, J.K., 1969. **Ordinary Differential Equations**, John Wiley e Sons, New York.

Huang, T. C., 1961. "The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Nomal Mode Equation of Uniform Beams with Simple End Conditions", **ASME Journal of Applied Mechanics**, Vol. 28 , pp. 579-584.

Huang, T. C., Huang, F. C. C., 1967. " On Precession and Critical Speeds of Two Bearing Machines with Overhung Weight", **ASME Journal of Engineering of Industry**, Vol. 89 , pp. 713-718.

Hong, S.-W., Park, J. -H., 1997, "An Efficient Method fpr the Unbalance Response Analysis of Rotor-Bearing Systems", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 200(4), pp. 491-504.

Inman, D. J., 1989. **Vibration with Control, Measurement, and Stability**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Inman, D., 1994. **Engineering Vibration.**,Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Jennings, A.C., 1980. **Matrix Computations for Engineers and Scientists**, John Wiley & Sons.

Jung, C. R.,1995. **A Solução Dinâmica em Tratamento de Dados** , Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Kailath,T., 1980. **Linear System**, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, New Jersey.

Kang, Y., Sheen, G.-J., Wang, S.-M., 1997. "Development and Modification of a Unified Balancing Method for Unsymmetrical Rotor-Bearing Systems", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 199(3), pp. 349-368.

Kang,Y., Lee, Y. -G., Chen, S. -C., 1997. " Instability Analysis of Unsymmetrical Rotor-Bearing Systems using the Transfer Matrix Method", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 199(3), pp.381-400.

Kang, Y., Shih, Y. P., Lee, A. C., 1992. "Investigation on the Steady-State Response of Asymmetric Rotors", **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 1449, pp. 194-208.

Kahn, P.B., 1990. **Mathematical Methods for Scientists and Engineers Linear and Nonlinear Systems**, John Wiley & Sons, New York.

Kevorkian, J., Cole, J.D., 1981. **Perturbation Methods in Applied Mathematics**, Springer-Verlag, New York.

Korevaar, J., 1968. **Mathematical Methods**, Academic Press, Vol.1, New York.

Krämer, E., 1993. **Dynamics of Rotors and Foundations**, Berlin:Springer.

Kuipers, L., Timman, R., 1969. **Handbook of Mathematics**, Pergamon Press.

Lalanne, M.S., Ferraris, G., 1990. **Rotordynamics Prediction in Engineering**, New York:Wiley.

Lee, A.-C., Kang, Y., Shih, Y.P., 1991. "A modified Transfer Matrix Method for Linear Rotor-Bearing Systems", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 58, pp. 776-783.

Lee, C.W., 1993. **Vibration Analysis of Rotors**, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Lee, C.W., 1995. "Dynamics Response of a Rotating Timoshenko Shaft to Axial Forces and Moving Loads", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 181(4), pp. 169-177.

Lee, H.P., 1996. "Dynamic Stability of Spinning Beams of Unsymmetrical Cross-Section with Distinct end Conditions", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 189(2), pp. 161-171.

Lee, C. W., Katz, R., Ulsoy, A. G., Scott, R. A., 1988. "Modal Analysis of a Distributed Parameter Rotating Shaft", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 122, pp. 119-130.

Liu, J.K., Than, L.G., Au, T.F.K., 2001. "A Universal Matrix Perturbation Technique for Reanalysis for Gyroscopic Systems with Internal and External Damping", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 240(4), pp. 779-787.

Liu, J.K., Chan, H.C., 1999. "A Universal Matrix Perturbation Technique for Structural Dynamic Modification Using Singular Value Decomposition", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 228(2), pp. 256-274.

Liu, J.K., 2000. "A Universal Perturbation Technique Reanalysis of Non-Self-Adjoint Systems", **AIAA Journal**, vol.38, N?6 , pp. 1035-10039.

Lyshevski, S. E., 2001. **Control Systems Theory**, Birkhäuser, Boston.

Macfarlane, A., J., G., 1979. **Frequency Response Methods in Control Systems**, IEEE Press, New York.

Malone, D. P., Cronin, D. L., Randolph, T. W., 1997. "Eigenvalue and Eigenvector Determination for Damped Gyroscopic Systems", **Transactions of the ASME**, vol. 64, SEPTEMBER.

Meirovich, L., 1975. **Elements of Vibration Analysis**, Mc Graw - Hill, Inc..

Meirovitch, L.W., Ryland, II., 1979. "Response of Slightly Damped Gyroscopic Systems", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 67(1), pp. 1-19.

Meirovitch, L.W., Ryland, G., 1985. "A Perturbation Technique for Gyroscopic Systems with Small Internal and External Damping", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 100(3), pp. 393-408.

Meirovitch, L., 1967. **Analytical Methods in Vibrations**, The Macmillan Company, New York.

Meirovitch, L., 1980. **Computational Methods in Structural Dynamics**, Leiden: Sijthoff, See pp. 29-49.

Meirovitch, L., 1997. **Principles and Techniques of Vibrations**, Upper Saddle River, NJ:Prentice Hall, New Jersey.

Miller, K.S., 1963. **Linear Differential Equations in the Real Domain**, W.W Norton & Company, New York.

Moler, C., Van Loan, C., 1978. "Nineteen Dubious Ways of Computing the Exponential of a Matrix", *SIAM Review*.

Moraes, I. F., 2002. **Uma Metodologia Unificada no Domínio Tempo Para Sistemas Discretos, Concentrados e Distribuídos**, Tese de Doutorado, UFRGS/PROMECC, Porto Alegre.

Morelato, T., 2000. **Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não Clássicas**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/PPGMAP, Porto Alegre.

Moschen, I., 1999. **Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Moura, E.M., 2001. **Uma contribuição ao Estudo de Sistemas Dinâmicos Giroscópicos Não-Lineares**, Dissertação de Mestrado, UNICAMP/PPEM, Campinas.

Murdoc, J.A., 1991. **Perturbations Theory and Methods**, John Wiley e Sons, New York.

Nascimento, J.A.O., 1997. **Análise Dinâmica Linear de Estruturas por Métodos de Superposição de Vetores no Sistema GAELI**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGEC, Porto Alegre.

Nashif, A.D., Jones, D.I., 1985. **Vibration Damping**, Wiley, New York.

Nelson, H.D., Macvaugh, J.M., 1976. "Stability Analysis of Rotor- Bearing System Using Finite Elements", **ASME Journal of Engineering for Industry**, vol. 98, pp. 593-600.

Nayfeh, A. H., 1981. **Introduction to Perturbation Technique**, John Wiley & Sons, New York.

Nayfeh, A. H., 1982. **Applied Nonlinear Dynamics-Analytical, Computational and Experimental Methods**, John Wiley & Sons, New York.

Newland, D.E., 1989. **Mechanical Vibration Analysis and Computation**, Longman Scientific & Technical, London.

Oppenheim, A.V., Schaffer, R.W., 1998. **Discrete-Time Signal Processing**, Prentice-Hall, New York.

Palacios, J. L., 1997. **Estudo de Técnicas de Controle e Aplicação a Estruturas Flexíveis**, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre.

Parker, R. G., 1998. "On the Eigenvalues and Critical Speed Stability Of Gyroscopic Continua", **Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 65, pp. 134-140.

Phillips, C.L., Parr, J.M., 1995. **Signals, Systems and Transforms**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Rao, J.S., 1991. **Rotor Dynamics**, New York:Wiley.

Reismann, H., Pawlik, P. S., 1974. **Elastokinetics, An Introduction to the Dynamics of Elastic Systems**, West Publishing, Minnesota.

Ritger, P.D., Rose, N.J., 1968. **Differential Equations with Applications**, McGraw-Hill, New York.

Sestieri, A., 1987. **Dispensa di Corso di Meccanica delle Vibrazione**, Università de Roma.

Shen, I.Y., Ku, R.C., 1992. "A Non-Classical Vibration Analysis of a Multiple Rotating Disk and Spindle Assembly", **ASME Journal of Applied Mechanics**..

Shen, I.Y., 1997. "Closed-Form Forced Response of a Damped, Rotating, Multiple Disks/Spindle System", **ASME Journal of Applied Mechanics**., vol. 64, pp. 343-352.

Sivan, D., Ram, Y., 1997. "Optimal Construction of a Mass-Spring System with Prescribed Modal and Spectral Data", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 201(3), pp. 335-352.

Soder, R.A.L, 2000. **Modos Flexurais sob a Influência de uma Força Axial** , Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAp, Porto Alegre.

Someya, Y., 1989.**Journal-Bearing Databook**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.

Starzhinkii, V. M., 1977. **Applied Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations**, Mir Publishers Moscow, Moscou.

Tan, C.A., Kuang, W., 1995. " Vibration of Rotating Discontinuous Shaft by the Distributed Transfer Function Method", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 183(3), pp. 451-474.

Timoshenko, S.P., Weaver. W.Jr., 1974. **Vibration Problems in Engineering**, John Wiley, New York.

Toresan, W., 2001.**Uma Metodologia para Estudo da Dinâmica de Eixos Rotativos de Transmissão com Aplicações em Semi-Eixos Homocinéticos e Eixos Cardan de Dupla Seção**, Tese de Doutorado, UFRGS/PROMECA, Porto Alegre.

Udwadia, F.E., 1993. "Further Results on the Iterative Solution of Nonclassically Damped Linear Dynamic Systems", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 60, No. 1, pp. 235-239.

Udwadia, F.E., Kumar, R., 1994. "Convergence of Iterative Methods for Nonclassically Damped Dynamic Systems", **Applied Mathematics and Computation**, vol. 61, No. 1, pp. 61-97.

Udwadia, F.E., Kumar, R., 1994. "New Iterative Schemes for Nonclassically Damped Dynamic Systems", **Int. J. of Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, vol. 23, No. 2, pp. 137-152.

Vance, J.M., 1987. **Rotordynamics of Turbomachinery**, John Wiley & Sons, New York.

Yang, B., 1992. "Transfer Function of Constrained/Combined One-Dimensional Continuous Dynamic Systems", **Journal of Sound Vibration**, vol. 156(3), pp. 425-443.

Yang, B., Fang, H., 1994. "A Transfer-Function Formulation for Nonuniformly Distributed Parameter Systems", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 116, pp. 426-432.

Yang, B., Tan, C. A., 1992. "Transfer Functions of One-Dimensional Distributed Parameter Systems", **Journal of Applied Mechanics**, vol. 59, pp. 1009-10014.

Yim, K.B., Noah, S.T, Vance, J.M., 1986. "Effect of Tangential Torque on the Dynamics of Flexible Rotors", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 53(4), pp. 711-718.

Yun, J.S., Lee, C.W., 1993. "Dynamics Analysis of Flexible Rotors subject to Torque and Force", **ASME-DE.**, vol. 60, pp. 331-338.

Yu, H., Adams, M.L., 1989. "The Linear Model for Rotor-Dynamic Properties of Journal Bearings and Seals Combined Radial and Misalignment Motions", **Journal of Sound Vibration**, vol. 131(3), pp. 367-378.

Zu, J.W., Melanson, J., 1998. "Natural Frequencies and Normal Modes for Externally Damped Spinning Timoshenko Beams with General Boundary Conditions", **Transactions of the ASME**, vol. 65, pp. 770-772.

Zu, J.-W., Han, J.P., 1992. "Natural Frequencies and Normal Modes of Spinning Timoshenko Beams with General Boundary Conditions", **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 59 , pp. 197-204.

Wang, W., Kirkhope, W., 1994. "New Eigensolutions and Modal Analysis for Gyroscopic/Rotor Systems, Part 2: Perturbations Analysis For Damped Systems", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 1750(2), pp. 171-183.

Wilkinson, J.H., 1965. **The Algebraic Eigenvalue Problem**, Clarendon Press, Oxford.

Wolf, J.,1988. **Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Woodhouse, J., 1998. " Linear Damping Models for Structural Vibration", **Journal of Sound and Vibration**, vol. 215(3), pp. 547-569.

APÊNDICE A INVERSIBILIDADE DE $\mathbf{I} - E^{T\mathbf{A}}$

Considere-se o sistema descrito por (3.1) com $\mathbf{f}(t)$ um vetor tal que $\mathbf{f}(t+T) = \mathbf{f}(t)$ onde $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ω a frequência.

Mostra-se neste anexo a inversibilidade da matriz $\mathbf{I} - \mathbf{h}(t)$, onde para (3.1), $\mathbf{h}(t)$ é dada por

$$\mathbf{h}(t) = e^{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}t}\mathbf{M}^{-1}$$

Para tal suponha-se que $\det(\mathbf{I} - e^{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}T}\mathbf{M}^{-1}) = 0$.

Daí segue existe $\mathbf{v} \neq 0$ talque $(\mathbf{I} - e^{t\mathbf{A}})\mathbf{v} = 0 \iff e^{t\mathbf{A}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$
ou seja, $\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathbf{I} - e^{t\mathbf{A}}$

Por outro lado, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \iff \\ T\mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda T\mathbf{v} \iff \\ \frac{(T\mathbf{A})^k}{k}\mathbf{v} &= \frac{(\lambda T)^k}{k}\mathbf{v} \iff \\ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T\mathbf{A})^k}{k}\right)\mathbf{v} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k}\right)\mathbf{v} \iff \\ e^{T\mathbf{A}}\mathbf{v} &= e^{\lambda T}\mathbf{v} \iff \\ e^{\lambda T} &= 1 \iff \\ \lambda &= \frac{2k\pi}{T}i \quad k = \pm 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \tag{A.1}$$

ou seja, $\mathbf{I} - e^{t\mathbf{A}}$ é inversível para $\lambda \neq k\omega i$ que é justamente o caso não ressonante.

APÊNDICE B GRÁFICOS DAS COMPONENTES DA MATRIZ DE GREEN T -PERIÓDICA

Neste anexo são apresentados os gráficos das componentes da matriz de Green T -periódica $\Gamma(t)$ obtidas nas simulações numéricas da seção 1.1.2.

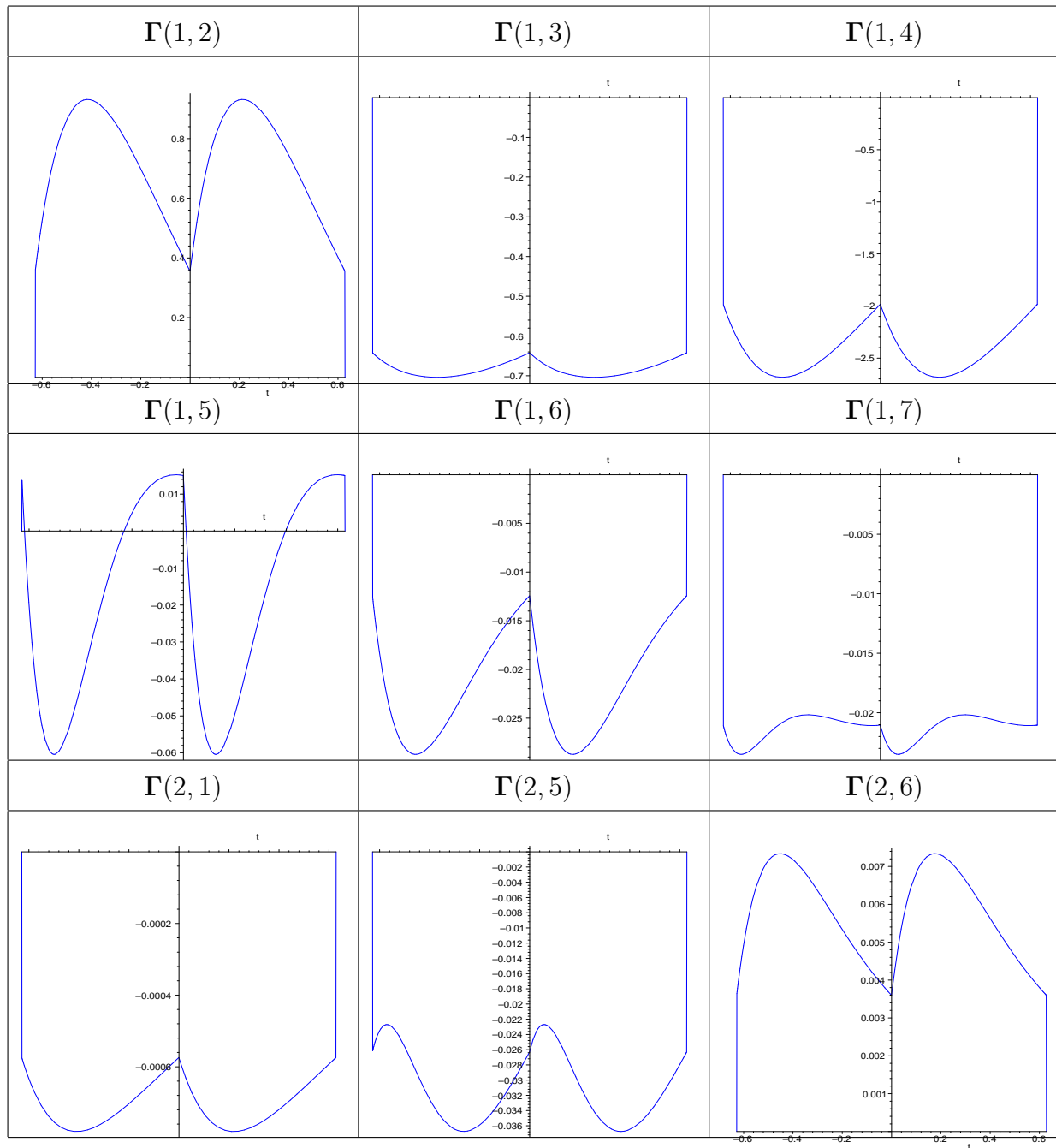
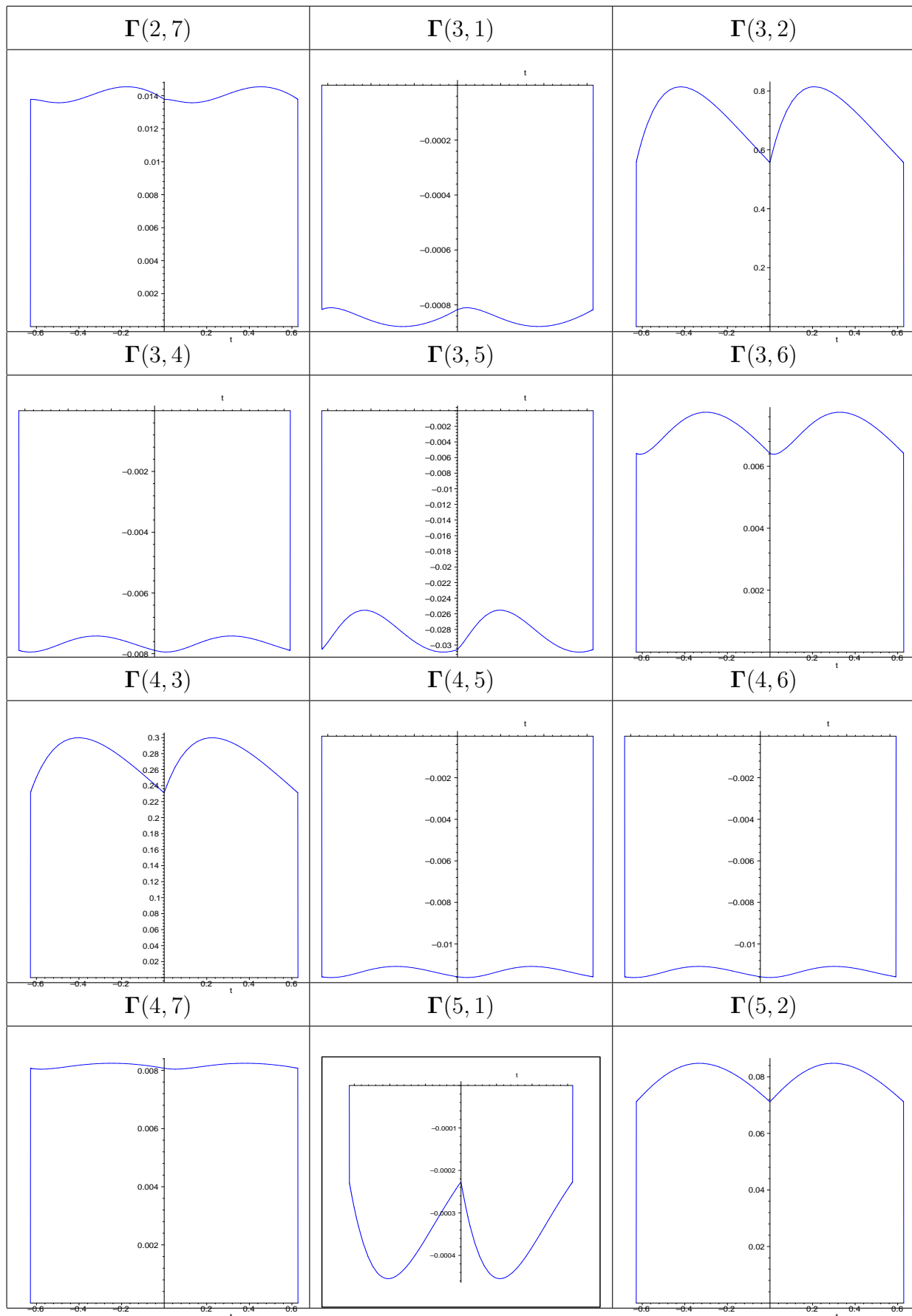
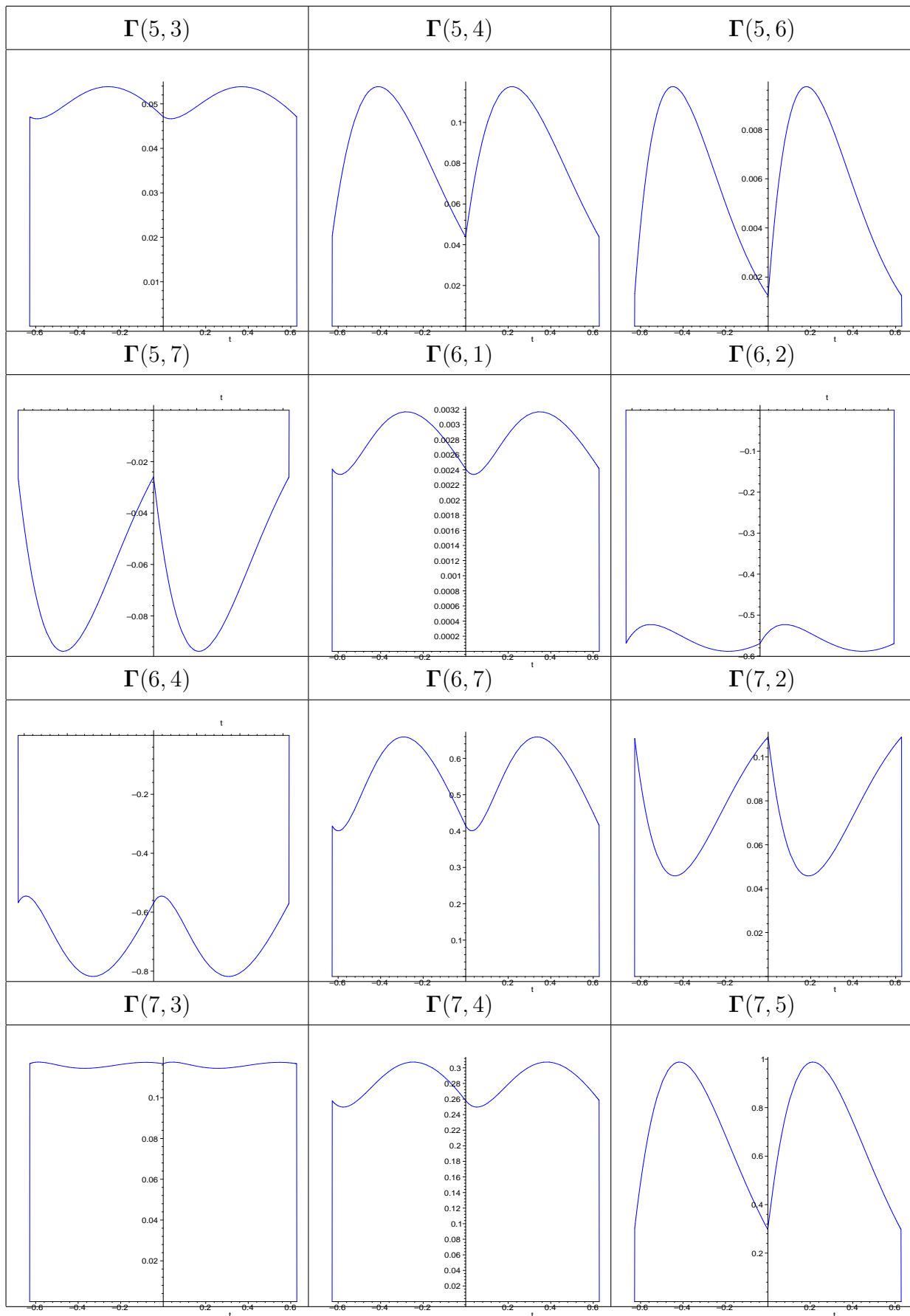
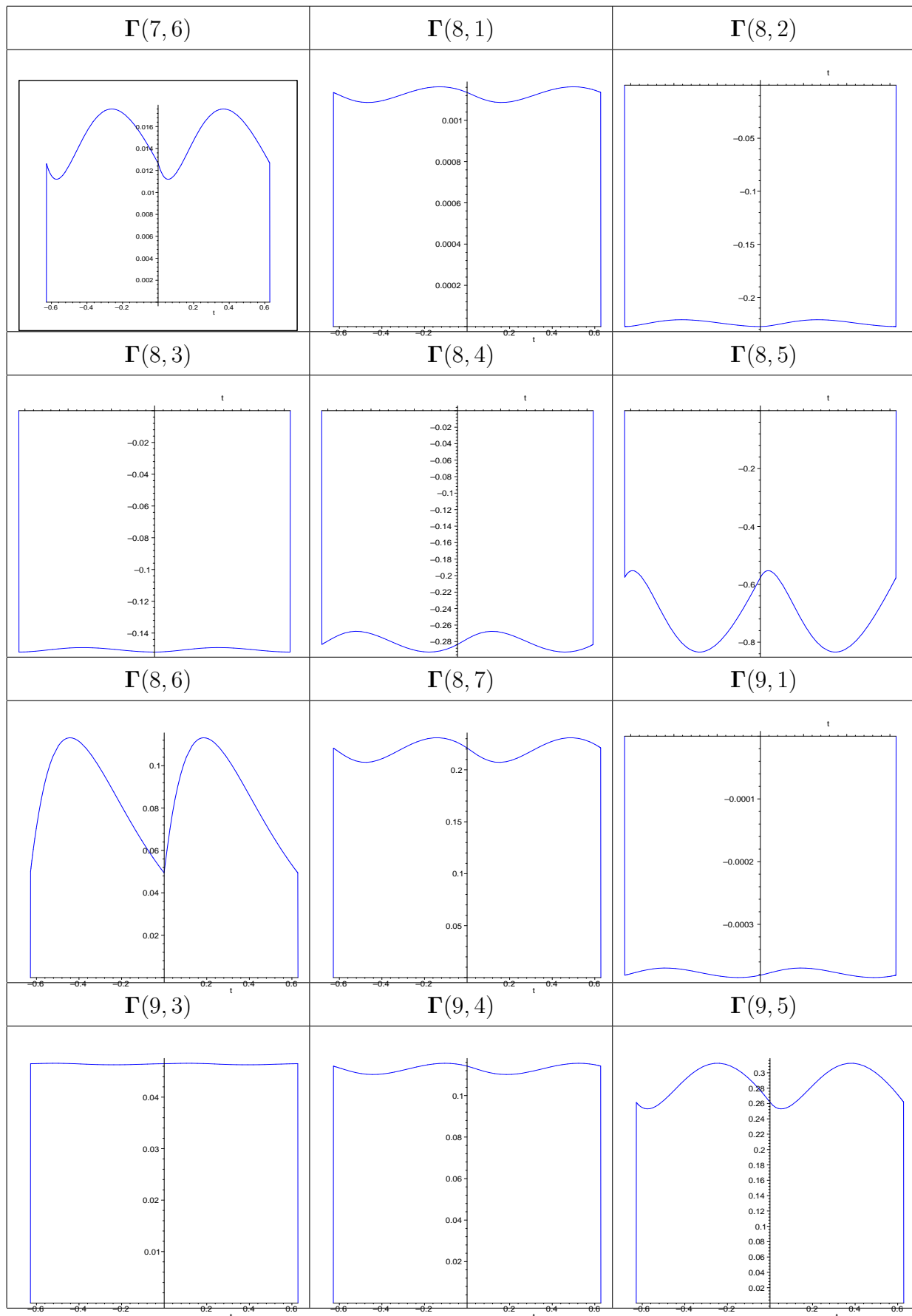


Tabela B.1 - Componentes de $\Gamma(t)$

Tabela B.2 - Componentes de $\Gamma(t)$

Tabela B.3 - Componentes de $\Gamma(t)$

Tabela B.4 - Componentes de $\Gamma(t)$