

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Dinâmica estocástica de íons sujeitos a um conjunto
quase-monocromático de ondas do tipo híbrida inferior.** ‡

Lucio Minoru Tozawa

Tese realizada sob a orientação do Dr. Luiz Fernando Ziebell, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Ciências

Porto Alegre

Agosto 2003

‡Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

Aos meus pais e à Angela Lurico.

Agradecimentos

- Ao Dr. Luiz Fernando Ziebell pela orientação, e pela incansável paciência ao longo da elaboração deste trabalho.
- À Dra. Ruth de Souza Schneider pelos ensinamentos e pelo auxílio prestado nas revisões.
- Ao Dr. Yuichi Takase e ao pessoal do laboratório "**Takase - Ejiri Laboratory: High Temperature Plasma Group**" [1], pelos conhecimentos sobre física de plasma experimental em tokamak esférico.
- Aos professores que aprofundaram meus conhecimentos.
- A todos aqueles que, pelo apoio, pelo incentivo e pelas manifestações de amizade, contribuíram (ou não) para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a interação de íons com um conjunto quase-monocromático de ondas eletrostáticas de frequência na faixa das frequências híbridas inferiores, propagando-se perpendicularmente a um campo magnético uniforme. Consideramos que as fases das ondas são aleatoriamente distribuídas (ondas incoerentes), tratando o caso de ondas de fases coerentes (ondas coerentes) como um caso particular. Derivamos o Hamiltoniano adequado a esse sistema, e deduzimos as equações de movimento, cujas soluções são analisadas numericamente, mostrando a ocorrência de difusão estocástica no espaço de fase ângulo-ação, para amplitudes de onda suficientemente grandes. Também fazemos estimativas sobre a amplitude mínima (*threshold*) para o aparecimento de ilhas de primeira ordem no espaço de fase. Estimamos, também, o limiar para as ilhas de segunda ordem e de ordens maiores, bem como o limiar de estocasticidade.

A análise mostra que para o caso de várias ondas o comportamento estocástico ocorre antes do limiar de estocasticidade comparado com o caso de uma onda. No caso de ondas coerentes, observa-se que o limiar de estocasticidade diminui com o aumento do número de ondas que compõem o conjunto de ondas, proporcionalmente ao inverso da raiz quadrada deste número, portanto, tendendo a ser nulo no limite em que o número de ondas no pacote tende a infinito. No caso de ondas incoerentes, observa-se também uma diminuição do limiar de estocasticidade com o aumento do número de ondas, mas nesse caso, saturando com valor até um terço do valor do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda. Observa-se também que o limite superior da região de estocasticidade no espaço de fase aumenta com o aumento do número de ondas. No caso de ondas coerentes, esse aumento é proporcional à raiz cúbica do número de ondas que compõem o conjunto de ondas. No caso de ondas incoerentes o limite superior da região de estocasticidade têm um aumento de até o dobro em relação ao caso de uma onda.

A análise também mostra que o mecanismo da estocasticidade para o caso de várias ondas é diferente do mecanismo atuante no caso de uma onda. No caso de uma onda, a estocasticidade ocorre por superposição de ilhas de ordens maiores do que um, com o aumento da intensidade da onda. No caso de várias ondas, a presença de ondas de frequências próximas à frequência de ressonância causa pequenas perturbações na trajetória principal das partículas, causada pela onda central, espalhando-a pelo espaço de fase de forma mais eficiente que o mecanismo de estocasticidade para o caso de uma onda.

Abstract

In this work we study the interaction of ions by a quasi-monochromatic set of electrostatic waves with frequencies in the lower hybrid range, propagating perpendicularly to a uniform magnetic field. We consider that the phases of waves are randomly distributed (incoherent waves), treating the case of wave with coherent phases (coherent waves) as a particular case. We derive the appropriate Hamiltonian for this system, and deduce the equations of motion, whose solutions are numerically analyzed, showing the occurrence of stochastic diffusion in the action-angle phase space, for sufficiently great amplitudes of the waves. We also estimate the minimum amplitude (threshold) for appearing of first order islands in phase space. Thresholds for second order and higher order islands are also estimated, as well as the threshold for stochastic diffusion.

The analysis shows that for the case of several waves the stochastic behavior occurs before of stochastic threshold for the one wave case. In case of coherent waves, the stochastic threshold decreases with increase of the number of waves that compose the set of waves, proportionally to the inverse of the square root of this number, therefore tending to be null when the number of waves tends to infinity. In case of incoherent waves, we also obtained a decrease of the stochastic threshold with the increase of the number of waves, with the stochastic threshold saturating in a value about one-third of the value of the stochastic threshold for the one wave case. It is also observed that the upper limit of the stochastic region in phase space increases with increase of the number of waves. In case of coherent waves, this increase is proportional to the cubic root of the number of waves composing the set of waves. In case of incoherent waves the upper limit of stochastic region may increase to about the double of the value in the one wave case.

The analysis also shows that the mechanism for stochasticity in the case of several waves is different of the mechanism in the one wave case. In the one wave case, the stochasticity occurs because of superposition of higher order islands, with the increase of the wave intensity. In case of several waves, the presence of waves with frequencies close to the resonance frequency causes small perturbations in the main trajectory of particles, caused by the central wave, spreading the trajectories along phase space more efficiently than occurs due the stochastic mechanism in the one wave case.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 10 |
| 2 | Tratamento Hamiltoniano da dinâmica de íons sujeitos a ondas eletrostáticas propagando-se em campo magnético uniforme. | 16 |
| 2.1 | Introdução | 16 |
| 2.2 | O Hamiltoniano para o caso de íons sujeitos a uma onda eletrostática propagando-se perpendicularmente a um campo magnético uniforme. | 17 |
| 2.3 | O Hamiltoniano para o caso de íons sujeitos a um grupo de ondas eletrostáticas propagando-se perpendicularmente a um campo magnético uniforme. | 25 |
| 2.4 | Resultados numéricos. | 30 |
| 2.4.1 | O caso de uma onda | 32 |
| 2.4.2 | O caso de várias ondas com a mesma fase | 34 |
| 2.4.3 | O caso de várias ondas com fases aleatórias | 37 |
| 2.4.4 | Análise comparativa do caso de uma onda e do caso com várias ondas, coerentes e incoerentes | 42 |
| 2.4.5 | Um exemplo com diferentes condições iniciais | 50 |
| 2.5 | As ilhas de primeira ordem. | 56 |
| 2.5.1 | O caso de uma onda. | 61 |
| 2.5.2 | O caso de várias ondas. | 63 |
| 2.6 | Observações finais. | 73 |
| 3 | Teoria de perturbação para sistemas Hamiltonianos usando transformadas de Lie. | 76 |
| 3.1 | Introdução | 76 |
| 3.2 | Mecânica Hamiltoniana | 78 |
| 3.2.1 | Equações Hamiltonianas, parênteses de Poisson e transformações canônicas | 78 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.2.2 | A transformação de evolução temporal | 80 |
| 3.3 | Famílias contínuas de transformações canônicas | 83 |
| 3.3.1 | A função geratriz local | 83 |
| 3.3.2 | O novo Hamiltoniano | 84 |
| 3.4 | Teoria de perturbação de Deprit | 87 |
| 3.4.1 | Relações nas séries perturbativas de Deprit | 87 |
| 4 | Método de Deprit para o estudo da interação de onda-partícula. | 91 |
| 4.1 | Introdução | 91 |
| 4.2 | Revisão sobre as equações de movimento do sistema. | 91 |
| 4.3 | Estrutura de ressonâncias. | 93 |
| 4.3.1 | Ondas sub-harmônicas. | 94 |
| 4.3.2 | Onda central super-harmônica. | 102 |
| 5 | Análise do limiar de estocasticidade levando em conta as ilhas de ordem maior que um. | 105 |
| 5.1 | Introdução | 105 |
| 5.2 | Expansão em ordem zero do parâmetro Δ' | 107 |
| 5.2.1 | Ondas sub-harmônicas. | 107 |
| 5.2.2 | Onda central super-harmônica. | 109 |
| 5.3 | Expansão em primeira ordem do parâmetro Δ' | 111 |
| 5.3.1 | Ondas sub-harmônicas. | 113 |
| 5.3.2 | Onda central super-harmônica. | 116 |
| 5.4 | O limiar das ilhas de ordem maior que um. | 119 |
| 5.4.1 | O caso de uma onda. | 124 |
| 5.4.2 | O caso de várias ondas. | 126 |
| 5.5 | Sumário. | 131 |
| 6 | Conclusões. | 132 |
| A | Cálculo da média temporal para um pacote de ondas com frequências muito próximas. | 135 |
| A.1 | Introdução | 135 |
| A.2 | Cálculo do $\langle \cos(\zeta_{i,j}^{(\pm)})\tau \rangle$ | 136 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A.3 | Cálculo do $\langle \sin(\zeta_{i,j}^{(\pm)})\tau \rangle$ | 137 |
| A.4 | Cálculo do $\langle \cos(\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,n}) \rangle$ | 138 |
| B | As somatórias S_1 e S_2. | 139 |
| B.1 | Introdução | 139 |
| B.2 | O caso de ondas sub-harmônicas. | 139 |
| B.2.1 | S_1^{sub} | 139 |
| B.2.2 | S_2^{sub} | 141 |
| B.3 | O caso de onda central super-harmônica. | 144 |
| B.3.1 | S_1^{super} | 145 |
| B.3.2 | S_2^{super} | 145 |
| C | Expansões em primeira ordem no parâmetro Δ'. | 146 |
| C.1 | Introdução | 146 |
| C.2 | Expansão do $J_m(r_i)$ | 146 |
| C.3 | Expansão do $\Gamma_{m,n}^{i,i}$ | 147 |

Relação das Figuras

- 2.1 Representação das trajetórias das partículas em termos das coordenadas toroidais (R, ω_1, ω_2) , onde $R = (2I_1)^{1/2}$ é o raio de Larmor, ω_1 é o ângulo de Larmor e $\omega_2 = (\nu\tau)(\text{mod}2\pi)$ é a fase da onda [2]. As trajetórias dos íons são analisadas em uma seção Σ , conhecida como seção de Poincaré. 24
- 2.2 Valores iniciais de $\Delta\theta$ vs. índice de partícula i , para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. As condições iniciais para as partículas são atribuídas de modo que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, e I_2 avaliado sob a restrição de que todas as partículas têm o mesmo valor do Hamiltoniano (H). 31
- 2.3 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para três partículas, uma onda ($n_\omega = 1$), $\bar{\nu} = 30,0$; e (a) $\alpha = 2,2$; (b) $\alpha = 3,0$; (c) $\alpha = 3,8$; e (d) $\alpha = 4,6$ 33
- 2.4 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas, uma onda ($n_\omega = 1$), $\bar{\nu} = 30$, e (a) $\alpha = 2,2$; (b) $\alpha = 3,0$; (c) $\alpha = 3,8$; e (d) $\alpha = 4,6$ 34
- 2.5 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para três partículas e ondas coerentes, $\alpha = 2,0$; $\bar{\nu} = 30$, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7. 35
- 2.6 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas coerentes, $\alpha = 2,0$; $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7. 36
- 2.7 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas coerentes, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, $n_\omega = 5$, e (a) $\alpha = 0,25$, (b) $\alpha = 0,5$, (c) $\alpha = 1,0$, e (d) $\alpha = 2,0$ 38
- 2.8 $\sqrt{2I_2}$ como função de ω_2 (mod. 2π), para três partículas e ondas com fases aleatórias, $\alpha = 2,0$, $\bar{\nu} = 30$, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, and (d) 7. 39
- 2.9 $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas com fases aleatórias, $\alpha = 2,0$, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7. 40

- 2.10 $\sqrt{2I_2}$ como função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas com fases aleatórias, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, $n_\omega = 5$, e (a) $\alpha = 0,25$, (b) $\alpha = 0,5$, (c) $\alpha = 1,0$, e (d) $\alpha = 2,0$ 41
- 2.11 $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$, $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ (linha cheia), $4,0$ (linha quebrada), e $6,0$ (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. 42
- 2.12 $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas coerentes, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. 43
- 2.13 $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas com fases aleatórias, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. 44
- 2.14 Estágio inicial da evolução do $(\delta I_2)_t$ como uma função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$ e $\alpha = 6,0$ (linha cheia), e $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$, ondas coerentes (linha quebrada), e para $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$, ondas com fases aleatórias (linha pontilhada), supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$ 45
- 2.15 Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas coerentes, para $\alpha = 2,0$ e (a) $n_\omega = 1$, (b) $n_\omega = 5$, e (c) $n_\omega = 9$, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo. (d) $n_\omega = 1$, (e) $n_\omega = 5$, e (f) $n_\omega = 9$ 47
- 2.16 Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas com fases aleatórias, para $\alpha = 2,0$ e (a) $n_\omega = 1$, (b) $n_\omega = 5$, e (c) $n_\omega = 9$, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como uma função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo. (d) $n_\omega = 1$, (e) $n_\omega = 5$, e (f) $n_\omega = 9$ 49

| | | |
|------|---|----|
| 2.17 | Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três diferentes conjuntos de fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para a avaliação numérica das fases, supondo $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30, 0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo. | 51 |
| 2.18 | Evolução temporal de curto prazo da quantidade $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado no caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três diferentes conjuntos de fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para a avaliação numérica das fases, supondo $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30, 0$ | 52 |
| 2.19 | Valores iniciais de $\Delta\theta$ vs. índice de partícula i , para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\Delta = 1, 0 \times 10^{-2}$. As condições iniciais para as partículas são atribuídas aleatoriamente, tal que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, com I_2 calculado sob a restrição que todas as partículas devem ter o mesmo valor do Hamiltoniano (H). | 53 |
| 2.20 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$, $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30, 0$, e $\alpha = 2,0$ (linha cheia), 4,0 (linha quebrada), e 6,0 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais para as partículas são atribuídas aleatoriamente, tal que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, com I_2 calculado sob a restrição de que todas as partículas devem ter o mesmo valor do Hamiltoniano (H). | 54 |
| 2.21 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas coerentes, para $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30, 0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19. | 55 |
| 2.22 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas com fases aleatórias, para $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30, 0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19. | 56 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.23 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado para o caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três conjuntos de ondas com fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para avaliação numérica das fases. Supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. O painel (b) também mostra, abaixo das outras três, a curva obtida considerando as cinco ondas com a mesma fase ($\varphi = 0$). As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19. | 57 |
| 2.24 | Região de estocasticidade, para o caso de uma onda, como uma função de α e R para $\bar{\nu} = 30,0$. A região é limitada pelas eqs. (2.129), (2.130) e (2.131). | 63 |
| 2.25 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de uma onda, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 1,00$, (b) $\alpha = 2,42$, (c) $\alpha = 3,00$, e (d) $\alpha = 5,00$ | 67 |
| 2.26 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 3$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,61$, (b) $\alpha = 1,40$, (c) $\alpha = 1,83$, e (d) $\alpha = 3,05$ | 68 |
| 2.27 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 5$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,48$, (b) $\alpha = 1,12$, (c) $\alpha = 1,44$ e (d) $\alpha = 2,40$ | 69 |
| 2.28 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 7$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,42$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 1,26$ e (d) $\alpha = 2,09$ | 70 |
| 2.29 | $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 9$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,37$, (b) $\alpha = 0,87$, (c) $\alpha = 1,11$ e (d) $\alpha = 1,85$ | 71 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.30 | Gráfico dos valores de r_α para número de ondas no pacote (n_ω) variando entre 1 e 1001, para $R = \bar{\nu} = n = 30, 0$. Para cada valor n_ω , foram levados em conta 10000 conjuntos de fases aleatórias. (a) $r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes})$: Eqs. (2.133) e (2.134) considerando ondas coerentes (o que equivale a usar a Eq. (2.141)); (b) $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (A)})$: Eqs. (2.133) e (2.134) considerando ondas incoerentes (sem aproximação acerca de r_i); (c) $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (B)})$: Eqs. (2.133) e (2.138) considerando ondas incoerentes, usando a aproximação $r_i \simeq R$ (o que equivale a usar a Eq. (2.139)). | 72 |
| 5.1 | Região de estocasticidade, para o caso de uma onda e para o caso de várias ondas, como uma função de α e R , para $\bar{\nu} = 30, 0$. A região é limitada pelas eqs. (5.160), (5.161), (5.162) e (5.163). (a) $\alpha_{st}(n_\omega = 1)$; (b) $\alpha_{st}(n_\omega, \text{incoerentes})$ e $\alpha_{st}(n_\omega = 9, \text{coerentes})$; (c) $R_{inf}(n_\omega = 1)$, $R_{inf}(n_\omega, \text{coerentes})$ e $R_{inf}(n_\omega, \text{incoerentes})$; (d) $R_{sup}(n_\omega = 1)$ e (e) $R_{sup}(n_\omega, \text{incoerentes})$ e $R_{sup}(n_\omega = 9, \text{coerentes})$ | 130 |

Relação das Tabelas

| | | |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Relações entre as coordenadas e momenta dimensionais, não-dimensionais, originais e transformadas. | 22 |
| 2.2 | Valores de $f(\bar{\delta})$ encontrado na Ref. [2] pela determinação do limiar de estocasticidade para $29\frac{1}{2} < \bar{\nu} < 30\frac{1}{2}$ para $R \approx 47,5$ | 62 |
| 2.3 | Estimativa dos valores de r_α para número de ondas n_ω pequeno, para $R = \bar{\nu} = n = 30,0$. Consideramos para cada valor n_ω , 10000 conjuntos de fases aleatórias, e calculamos r_α usando a Eq. (2.133). A coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes})$ apresenta r_α para o caso de ondas coerentes, usando a Eq. (2.134) para calcular o denominador da Eq. (2.133). Na coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (A)})$ temos r_α para o caso de ondas incoerentes, também usando a Eq. (2.134). Finalmente, na coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (B)})$ temos o caso de ondas incoerentes, usando a forma aproximada dada pela Eq. (2.139). | 65 |
| 2.4 | Estimativa dos valores de α_{st} para ondas coerentes e incoerentes, para $R = \bar{\nu} = 30,0$ | 65 |
| 2.5 | Valores de α para ondas coerentes (c) e incoerentes (i), para $R = \bar{\nu} = 30,0$, utilizados na simulação. | 66 |
| 5.1 | Estimativa do limiar para ilhas de ordem p , $\alpha_{th}^{(p)}(n_\omega = 1)$, utilizando as Eqs. (5.147) e (5.148) e $f(\bar{\delta} \approx 0 \sim 1/4) \approx 1/4$ (da tabela 2.2). | 126 |
| 5.2 | Estimativa do limiar de estocasticidade para $\bar{\nu} = 30,0$ e $R_{medio} = 52,35$, utilizando a Eq. (5.155) para $R \gg \bar{\nu}$ e valores de r_α da tabela (2.2). | 128 |
| 5.3 | Estimativas dos valores do limite superior da estocasticidade R_{sup} , utilizando a Eq. (5.156) e os valores de r_α da tabela (2.2), com $\alpha = 2,0$ | 128 |

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica da interação onda-partícula é muito importante na astrofísica e na física de plasmas em geral, particularmente em situações envolvendo aceleração de íons e na pesquisa da fusão nuclear controlada. Por exemplo, na astrofísica, podemos destacar o fenômeno de aceleração dos íons devido a interação com ondas do tipo híbrida inferior (*lower hybrid* ou LH) transversais ao campo geomagnético da Terra, na camada externa da ionosfera. Recentemente esse tipo de mecanismo de aceleração dos íons [3], foi proposto como um mecanismo promissor de energização das partículas para sistemas de propulsão utilizando plasma ¹ ². Na área de pesquisa de fusão nuclear, temos proposições similares, como mecanismos para aceleração e energização de íons e para geração de correntes não indutivas [4], como meio de tentar controlar e/ou otimizar o confinamento do plasma.

Entre as abordagens utilizadas na pesquisa que visa a fusão nuclear controlada, encontramos aquelas que fazem uso do chamado *confinamento magnético*, em que campos magnéticos são utilizados para confinar o plasma, buscando atingir densidades e temperaturas suficientes para que ocorram reações nucleares que resultem em produção de mais energia que aquela utilizada para criar e manter o plasma. O *tokamak* é um destes esquemas de confinamento

¹CHOUEIRI, E. Y.; SPEKTOR, R.

Coherent ion acceleration using two electrostatic waves

In: 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference,
AIAA-2000-3759, Huntsville, AL, July 16-20, 2000.

²SPEKTOR, R.; CHOUEIRI, E. Y.

Ion acceleration by beating electrostatic waves: Domain of allowed acceleration

In: 27th International Electric Propulsion Conference,
IEPC-01-209, Pasadena, California, Oct. 14-19, 2001.

magnético, sendo possivelmente a configuração que mais avanços tem mostrado no sentido da meta desejada. Dependendo de sua *razão de aspecto* (razão entre o raio externo e o raio interno de um sistema toroidal) temos vários tipos de denominações para tokamaks. Por exemplo, para uma razão de aspecto pequena, que caracterizam um tokamak bastante compacto, temos os dispositivos conhecidos como tokamaks esféricos (*spherical tokamak*), que também têm se mostrado bastante promissores [1]. O tokamak é um sistema de configuração toroidal, em que uma corrente toroidal é indutivamente gerada no plasma. Por sua própria natureza, é um dispositivo pulsado, que opera por meio de descargas. Diferentes mecanismos têm sido propostos para estender o tempo de duração da descarga e melhorar o confinamento da energia no plasma, bem como para aumentar sua temperatura (injeção de partículas neutras, injeção de íons, injeção de ondas eletromagnéticas, etc...). Uma das possíveis alternativas para a geração de corrente não indutiva é a injeção de ondas na frequência híbrida inferior que, absorvidas pela população eletrônica, aumentam a velocidade dos elétrons de alta energia (elétrons rápidos) localizados na cauda da função de distribuição, sendo portanto menos suscetíveis a colisões e capazes de transportar corrente por tempo mais longo [4]. Essa absorção da onda ocorre através do amortecimento de Landau na direção paralela ao campo magnético ambiente, todas as vezes que a condição de ressonância onda-partícula é satisfeita. Esta condição é satisfeita para partículas cuja velocidade paralela à direção do campo magnético coincide com a componente paralela da velocidade de fase da onda.

Em vista da importância do tema, como visto nos exemplos citados anteriormente, muitos esforços têm sido feitos para a compreensão da dinâmica que envolve a interação de ondas ou pacotes de ondas com as partículas em um campo magnético. Smith e Kaufman [5] descobriram que é possível aumentar a energia dos íons localizados na cauda da função distribuição pela ação de uma onda de frequência igual a várias vezes a frequência de cíclotron, se a amplitude da onda é acima de um certo valor crítico. Fukuyama *et al* [6] estudaram o problema da interação de uma partícula com uma onda propagando-se perpendicularmente ao campo magnético, propondo que o aquecimento estocástico pode ser responsável pela formação da cauda na função distribuição dos íons associada com o aquecimento devido à ressonância híbrida inferior, como observado nos experimentos de fusão com tokamak. Para onda com frequência próxima da frequência de cíclotron iônica, foi mostrado que a energia dos íons pode ser aumentada até valores elevados quando a amplitude da onda é maior que um limiar de estocasticidade. Karney [7, 2, 8] estudou o efeito no aquecimento dos íons de uma onda com componentes super-harmônico ou

sub-harmônico da frequência da onda LH (onde a nomenclatura de super-harmônico é conhecida como *on-resonance*, quando são considerados múltiplos inteiros da frequência de cíclotron para a frequência da onda, e sub-harmônico ou *off-resonance* quando são considerados valores fracionários da frequência de cíclotron), encontrando que, quando uma onda puramente super-harmônica interage com o íon, aparece uma ilha de primeira ordem no espaço de fase ângulo-ação, para uma amplitude moderada de onda perturbativa. Com o aumento da intensidade da perturbação, ilhas de segunda ordem aparecem dentro de ilhas de primeira ordem. O movimento se torna estocástico se essas ilhas de segunda ordem se sobrepõem. Foi verificado, também, que uma onda sub-harmônica pode produzir ilhas de ordem mais alta que se sobrepõem e induzem estocasticidade, quando é ultrapassado um certo limiar da amplitude de onda perturbativa. Karney também fez uma estimativa aproximada do tamanho das ilhas que podem se sobrepor e conseqüentemente, um método para computar a fração do espaço de fase que é estocástico. Há, também, uma abordagem onde se estudou o efeito da modulação da frequência LH para melhoramento do aquecimento. Riyopoulos [9] investigou o efeito da modulação da frequência de cíclotron iônica devido a variação do campo magnético que ocorre nos tokamaks, e também a modulação imposta externamente na frequência de ondas LH, onde observou que uma pequena quantidade de modulação produz uma redução significativa do limiar da estocasticidade em relação ao caso de frequência constante, isto é, um aumento do aquecimento. Zaslaviskii *et al* [10, 11] também demonstraram que a trajetória de espaço de fase de partículas movendo-se em uma onda harmônica ou pacote de ondas transversais ao campo magnético pode exibir uma estrutura de rede estocástica conectando regiões de baixa e alta energia. A partícula cuja posição e velocidade iniciais encontram-se dentro do contorno da rede estocástica pode mover-se livremente através dessa rede e, em princípio, ser aquecida até alta energia. Além disso, a estrutura de rede exibe uma estrutura simétrica ou quase-simétrica [10, 11, 12].

Temos, também, resultados experimentais que reforçam os resultados teóricos. McChesney *et al* [13] observaram nos seus experimentos de geração de corrente utilizando ondas Alfvén, aquecimento estocástico de íons causado por ondas de grande amplitude. Na simulação de partícula ajustada ao modelo da configuração experimental, foram encontradas razões de aquecimento de íons que concordam com a razão de aquecimento observada experimentalmente. Em experimentos de geração de corrente utilizando ondas híbridas inferiores realizados no JET, de Andrade *et al* [14] também encontraram aquecimento estocástico de íons. Experimento similar

mais recente nesse sentido foi realizado por Testa *et al* [15], encontrando resultados que reforçam os resultados teóricos. Há, também, séries de trabalhos que estudaram a interação de múltiplas ondas discretas. Benkadda *et al* [16] estudaram a dinâmica das partículas carregadas em um plasma magnetizado, utilizando duas ondas monocromáticas, observando que para propagação oblíqua geral ocorrem efeitos sinérgicos que diminuem o limiar de estocasticidade. Ou seja, observou redução da amplitude do campo elétrico necessário para aplicações de aquecimento do plasma.

A partir da década de 90, observa-se o uso de uma nova abordagem para o estudo de sistemas físicos de interação onda-partícula em um campo magnético. Um sistema desse tipo pode ser descrito por meio de um Hamiltoniano, que muitas vezes leva a equações diferenciais que não são solúveis analiticamente. Consequentemente, podem resultar em integrações numéricas cada vez mais complexas, que consomem muitos recursos computacionais, e que na maioria das vezes não levam em conta a natureza Hamiltoniana das equações, ou seja, que não preservam a hierarquia de invariantes globais conhecidas que existem nesses sistemas. Esse é o caso de esquemas de integrações populares, incluindo a classe de algoritmos Runge-Kutta. Muitos estudos que utilizam método de perturbação clássico para resolução desse tipo de sistema físico, tanto na análise numérica e/ou análise qualitativa, não apresentam resultados satisfatórios quando consideramos uma evolução temporal longa, ou por não apresentarem detalhes de invariantes canônicas, ou por apresentarem resultados seculares. Para evitar esses tipos de problemas, começaram a ser utilizadas teorias de perturbação mais eficientes que utilizam a estrutura natural das transformações canônicas. Candy e Rozmus derivaram um algoritmo para integrar numericamente as equações derivadas das funções Hamiltonianas separáveis, conhecido como algoritmo de integração simplética (SIA) até quarta ordem, que preserva exatamente as invariantes integrais de Poincaré-Cartan com a topologia do fluxo da fase, tendo estudado vários sistemas de funções Hamiltoniano separáveis, inclusive de um oscilador harmônico perturbado por uma onda plana, que descreve a interação onda-partícula [17]. Em outro trabalho os mesmo autores aplicaram o método de Deprit para resolver o mesmo problema, obtendo curvas invariantes (o contorno em que o Hamiltoniano é invariante no espaço de fase) para perturbações sub-harmônicas [18]. Eles encontraram que para qualquer frequência de onda racional ($\nu = r/s$, onde r e s são números primos inteiros), a separação entre as cadeias de ilhas adjacentes diminui significativamente com o aumento de s . Em um trabalho mais amplo, Chia *et al* [19] também estudaram a dinâmica de partículas em um campo magnético perturbado por

múltiplas ondas eletrostáticas discretas separadas por valores inteiros da frequência de cíclotron propagando-se transversalmente ao campo magnético, tendo descoberto que, dependendo do número de ondas, da magnitude da perturbação e da frequência de perturbação, o movimento das partículas pode exibir ou um pequeno desvio do movimento de cíclotron simples ou um movimento estocástico sobre o espaço de fase. O último caso corresponde a aquecimento de partículas e transporte anômalo. Encontramos também alguns trabalhos interessantes abordando a interação de múltiplas ondas discretas utilizando os resultados do trabalho de Chia *et al* [19]. Em seu trabalho, Bénisti *et al* [20, 21] investigaram a interação de partículas com múltiplas ondas super-harmônicas propagando-se perpendicularmente ao campo magnético, e descreveram o fenômeno novo de aceleração coerente dos íons, que permite a energização dos íons cuja energia inicial corresponde à região da velocidade de fase que está abaixo do domínio caótico. Quando o espectro de onda contém no mínimo duas ondas super-harmônicas, verifica-se que a energização dos íons é realçada, mesmo quando o movimento dos íons não é coerente. A órbita de um íon permanece próxima das órbitas encontradas da análise de perturbação de primeira ordem, implicando que diferentemente do caso de uma onda, o íon pode alcançar altas energias apesar da pequena amplitude da onda. Essas características são propostas como um método promissor de energização para propulsão a plasma.

No presente trabalho, analisaremos a interação de um espectro de ondas de faixa de frequência estreita propagando-se perpendicularmente ao campo magnético onde estão imersas as partículas. Consideraremos que as frequências das múltiplas ondas são próximas umas das outras e consideraremos também que as fases das ondas são aleatórias, de modo a simular o efeito do espectro estreito de uma onda. Em uma experiência real, mesmo considerando teoricamente uma onda interagindo com as partículas, sempre há fenômenos que acabam alargando o espectro.

O fato é que experimentos têm mostrado a ocorrência de difusão estocástica de íons, sob ação de ondas do tipo híbrida inferior [14]. Análises teóricas mostraram que em muitos casos os parâmetros do experimento não satisfazem a condição de limiar de ocorrência de estocasticidade, se for considerada a presença de apenas uma onda, com frequência bem definida [22, 23]. Pode-se conjecturar que a presença de diversas ondas, com frequências próximas entre si, ou do caso limite de um espectro contínuo de ondas, deve contribuir para diminuição do limiar de estocasticidade, de modo que explique a difusão observada. Essa conjectura fornece a motivação do presente trabalho.

O trabalho será estruturado da seguinte forma: No capítulo 2 derivaremos o Hamiltoniano

e as equações do Hamiltoniano para um sistema onde ocorre a interação de um espectro de ondas de faixa de frequência estreita, formado por conjunto de ondas do tipo híbrida inferior de frequências próximas, propagando-se perpendicularmente ao campo magnético onde estão imersos as partículas, onde analisaremos as equações do Hamiltoniano por meio de simulações numéricas, e estimaremos o limiar para ilhas de primeira ordem no espaço de fase ângulo-ação. Para o estudo do comportamento estocástico do sistema descrito no capítulo 2, é necessário também analisar o limiar para as ilhas de segunda ordem e de ordens maiores no espaço de fase. Na estimativa das ilhas, calculamos a média temporal das equações do Hamiltoniano. No sistema considerado no capítulo 2 temos problema quando tentamos encontrar ilhas de ordem maior que um, pois o Hamiltoniano em questão não possui termos que não se anulem na média, em ordem mais baixa da intensidade de perturbação, para ilhas de ordem maior que um. Tal problema é resolvido utilizando-se teorias de perturbação para expandir o Hamiltoniano em série de potências de acordo com a intensidade da perturbação, de modo que termos com dependência angular sejam da segunda ordem do parâmetro da intensidade da perturbação. No capítulo 3 discutiremos a teoria de perturbação de Lie para sistemas Hamiltonianos e veremos o método de Deprit que é usado para expandir o Hamiltoniano em série de potências de acordo com a intensidade da perturbação. No capítulo 4 aplicaremos o método de Deprit para o Hamiltoniano obtido no capítulo 2 e obteremos a forma geral do novo Hamiltoniano até a segunda ordem da amplitude da sua perturbação. No capítulo 5 faremos uma análise dos resultados do capítulo 4 a fim de estimar as ilhas de segunda ordem e também do limiar de estocasticidade. Finalmente, no capítulo 6, resumiremos os resultados do trabalho, discutindo suas conclusões principais.

Capítulo 2

Tratamento Hamiltoniano da dinâmica de íons sujeitos a ondas eletrostáticas propagando-se em campo magnético uniforme.

2.1 Introdução

A possibilidade da difusão estocástica de íons por ondas do tipo híbrida inferior (LH) foi proposta e explicada há mais de duas décadas, tendo sido mostrado que o movimento de um íon em um campo magnético uniforme se torna estocástico na presença de uma onda eletrostática coerente propagando perpendicularmente ao campo magnético, se a amplitude da onda exceder um certo limiar [2, 8]. Quando o critério de estocasticidade é satisfeito, os íons difundem no espaço de velocidade e é possível derivar uma equação de difusão para descrever a evolução temporal da função distribuição dos íons. Tal mecanismo de difusão pode ter consequências importantes, como indicado em experiências recentes, que têm obtido evidência de interação entre ondas LH e íons energéticos em grandes tokamaks [14, 15].

Nesse capítulo, investigaremos a transição entre duas situações, ou seja, a transição entre a situação em que existe uma onda monocromática atuando no sistema e a situação em que existe um espectro contínuo de ondas, e consideramos o aparecimento da estocasticidade ao longo dessa transição [24]. A transição é acompanhada através da generalização da proposição dos trabalhos de Karney [7, 2] para o caso em que há um número finito de ondas presentes no sistema.

A estrutura desse capítulo será a seguinte: Na seção 2.2 revisaremos a situação de uma onda eletrostática utilizando o formalismo usado por Karney [2, 8]; a seguir, na seção 2.3, faremos a generalização da proposição da seção 2.1 para a situação de espectro de ondas com um número

finito de ondas; na seção 2.4 apresentaremos os resultados da transição de uma situação a outra, ilustrando o aparecimento da difusão estocástica em um sistema devido à presença de um conjunto de ondas LH, considerando o caso particular de ondas coerentes e o caso mais geral de ondas com fases aleatórias (ondas incoerentes); na seção 2.5 derivaremos as ilhas de primeira ordem e finalmente, na seção 2.6, resumiremos os resultados principais.

2.2 O Hamiltoniano para o caso de íons sujeitos a uma onda eletrostática propagando-se perpendicularmente a um campo magnético uniforme.

Seguiremos a nomenclatura de Karney para derivação do Hamiltoniano para o caso de uma onda. Temos um sistema onde um íon de massa m , carga q e velocidade \vec{v} , em um campo magnético uniforme \vec{B} , interage com uma onda eletrostática \vec{E} que se propaga em direção perpendicular ao campo magnético. Sem perda da generalidade, podemos orientar o campo magnético ao longo do eixo z do sistema de coordenadas cartesianas e o vetor da onda eletrostática ao longo do eixo y ,

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_0 \vec{e}_z, \\ \vec{E} &= E_0 \cos(ky - \omega t) \vec{e}_y.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Esses campos são dados pelos seus respectivos potenciais, e supondo o calibre de Coulomb temos:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla \times \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\nabla \phi, \\ \vec{A} &= -B_0 y \vec{e}_x, \\ \phi &= -\frac{E_0}{k} \sin(ky - \omega t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

com E_0 , ω e $k = 2\pi/\lambda$ denotando a amplitude, a frequência e o número de onda, respectivamente.

A energia potencial, U , do íon em tais campos é dependente da velocidade, e é dada por [25]

$$U = q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}.\tag{2.3}$$

O Lagrangiano, L , desse sistema pode ser escrito como

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} + q\dot{x}A_x - q\phi, \quad (2.4)$$

onde o ponto representa a derivada no tempo. O L pode ser usado para definir os momenta canônicos generalizados p_x e p_y

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (2.5)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}. \quad (2.6)$$

com $p_z(t=0) = 0$, que implica em $p_z(t) = 0$, visto que o íon não acelera ao longo do campo magnético. As duas últimas equações podem ser invertidas, originando

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (p_x - qA_x)/m, \\ \dot{y} &= p_y/m \end{aligned} \quad (2.7)$$

que podem ser interpretadas como derivadas no tempo das coordenadas conjugadas generalizadas necessárias para calcular o Hamiltoniano, h , do movimento

$$h = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.8)$$

onde a somatória é sobre o número de coordenadas generalizadas ($i = x, y$) q_i ($q_x \equiv x, q_y \equiv y$), e momenta generalizados p_i . Usando a Eq.(2.7) na equação acima, o Hamiltoniano resultante é:

$$h = \frac{1}{2m} [(p_x - qA_x)^2 + p_y^2] + q\phi \quad (2.9)$$

Notando que $A_x = -yB_0$ e usando ϕ como explicitamente expresso na Eq.(2.2), temos

$$h = \frac{1}{2m} [(p_x + qyB_0)^2 + p_y^2] - q\frac{E_0}{k} \sin(ky - \omega t). \quad (2.10)$$

Notamos que esse Hamiltoniano não depende da coordenada x , ou seja, $\partial h/\partial x = 0$, o que implica que $\dot{p}_x = -\partial h/\partial x = 0$, resultando que p_x é uma constante de movimento. O Hamiltoniano (2.10) é agora uma função explícita de uma coordenada generalizada, de dois momenta generalizados, e do tempo, isto é, $h = h(y, p_x, p_y, t)$.

Definimos agora parâmetros não dimensionais, normalizando a frequência da onda ω pela frequência de ciclotron ω_c ,

$$\nu \equiv \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \omega_c \equiv \frac{qB_0}{m}, \quad (2.11)$$

o tempo t pelo período de cíclotron t_c ,

$$\tau \equiv \frac{t}{t_c}, \quad t_c \equiv \frac{1}{\omega_c}, \quad (2.12)$$

as coordenadas generalizadas q_i pelo inverso do número de onda k ,

$$q'_i \equiv \frac{q_i}{1/k}, \quad k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.13)$$

os momenta generalizados p_i pelo momentum característico da onda de cíclotron p_ω ,

$$p'_i \equiv \frac{p_i}{p_\omega}, \quad p_\omega \equiv \frac{m\omega_c}{k}, \quad (2.14)$$

e o Hamiltoniano h pela energia característica da onda de cíclotron h_ω ,

$$h' \equiv \frac{h}{h_\omega}, \quad h_\omega \equiv \frac{m\omega_c^2}{k^2}. \quad (2.15)$$

Em termos desses parâmetros normalizados, o Hamiltoniano $h' = h'(y', p'_x, p'_y, \tau)$ é

$$h' = \frac{1}{2} [(p'_x + y')^2 + (p'_y)^2] - \alpha \sin(y' - \nu\tau) \quad (2.16)$$

onde o parâmetro não dimensional α é dado pela normalização da amplitude da onda E_0 pela amplitude característica da onda de frequência de cíclotron, e também pode ser expresso como a razão das velocidades características,

$$\alpha \equiv \frac{E_0}{m\omega_c^2/qk} \equiv \frac{E_0/B_0}{\omega_c/k}. \quad (2.17)$$

O estudo do Hamiltoniano pode ser simplificado se tratarmos a variável tempo como qualquer uma das coordenadas generalizadas ou momenta generalizados. Em outras palavras, buscamos uma transformação canônica

$$h' = h'(x', y', p'_x, p'_y) \rightarrow H = H(X, Y, P_x, P_y) \quad (2.18)$$

onde X e Y são as novas coordenadas generalizadas com P_x e P_y sendo seus momenta conjugados. A transformação canônica pode ser efetuada usando uma função geratriz de “segundo tipo” [25, 26], isto é, a que mistura as coordenadas antigas (x', y') com os novos momenta (P_x, P_y) , que é $F_2 = F_2(x', y', P_x, P_y)$. Se a seguinte função geratriz for escolhida

$$F_2 = (P_x - \nu\tau)x' + P_y(y' - \nu\tau + P_x), \quad (2.19)$$

as equações de transformação canônica são, respectivamente, (definindo $Q_x \equiv X, Q_y \equiv Y$)

$$p'_i = \frac{\partial F_2}{\partial q'_i}, \quad (2.20)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad (2.21)$$

$$K = h' + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} \quad (2.22)$$

que resultam em

$$\begin{aligned} X &= x' + P_y, \\ Y &= y' - \nu\tau + P_x, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} p'_x &= P_x - \nu\tau, \\ p'_y &= P_y, \end{aligned} \quad (2.24)$$

e

$$K = h' - \nu X. \quad (2.25)$$

resultando também as relações úteis

$$Y = y' + p'_x, \quad X = x' + p'_y,$$

e, lembrando que $p'_x = p_x/p_\omega = \text{cte}$,

$$p'_x = P_x - \nu\tau = \text{cte}.$$

Portanto, como tínhamos pretendido, a variável tempo é agora transformada em um momentum generalizado. O novo Hamiltoniano resultante da transformação canônica é

$$K = \frac{1}{2}(Y^2 + P_y^2) - \alpha \sin(Y - P_x) - \nu X. \quad (2.26)$$

Veremos agora uma outra transformação que irá expressar o Hamiltoniano em termos das variáveis ângulo-ação [26] que têm uma conexão mais natural com as dinâmicas representadas. Buscamos agora uma transformação canônica

$$K = K(X, Y, P_x, P_y) \rightarrow H = H(I_1, \omega_1, I_2, \omega_2) \quad (2.27)$$

onde $(I_1, \omega_1, I_2, \omega_2)$ são as variáveis ângulo-ação. Para efetuar essa transformação usaremos uma função geratriz de “primeiro tipo”, isto é, a que mistura as coordenadas antigas (X, Y) com as novas coordenadas (ω_1, ω_2) , genericamente representada por $F_1 = F_1(X, Y, \omega_1, \omega_2)$. Se escolhermos

$$F_1 = \frac{1}{2}Y^2 \cot(\omega_1) + X\omega_2 \quad (2.28)$$

as equações de transformação canônica são respectivamente

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \\ I_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial \omega_i} \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$H = K - \frac{\partial F_1}{\partial \tau}. \quad (2.30)$$

Nota-se que, como a função geratriz F_1 é independente do tempo, o novo Hamiltoniano continua sendo igual ao anterior, mas com as coordenadas e momenta antigos expressos em termos dos novos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}Y^2 \operatorname{cosec}^2(\omega_1) \rightarrow Y = (2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1), \\ I_2 &= -X \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$P_x = \omega_2,$$

$$P_y = Y \cot(\omega_1) \rightarrow P_y = (2I_1)^{1/2} \sin(\omega_1). \quad (2.32)$$

O Hamiltoniano, utilizando o formalismo adotado por Karney, é

$$H = I_1 + \nu I_2 - \alpha \sin \left[(2I_1)^{1/2} \sin(\omega_1) - \omega_2 \right]. \quad (2.33)$$

As equações do Hamiltoniano são facilmente obtidas:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i}, \\ \dot{\omega}_1 &= 1 - \sin(\omega_1) \frac{1}{R} \alpha \cos(R \sin(\omega_1) - \omega_2), \\ \dot{\omega}_2 &= \nu, \\ \dot{I}_1 &= \cos(\omega_1) R \alpha \cos(R \sin(\omega_1) - \omega_2), \\ \dot{I}_2 &= -\alpha \cos(R \sin(\omega_1) - \omega_2), \end{aligned}$$

onde $R \equiv (2I_1)^{1/2}$.

Na tabela 2.1 resumamos as relações entre todas as coordenadas e momenta dimensionais, não-dimensionais, originais e as transformadas.

Discutiremos agora o significado físico das variáveis ângulo-ação. Já tínhamos notado que $p'_x = \text{cte}$ é uma constante de movimento e portanto a coordenada Y difere de y' por uma

| Dimensional | Não-dimensional | Original | Transformado |
|-------------|------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| P_y | p'_y | $\frac{p_y k}{m\omega_c}$ | $(2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1)$ |
| P_x | $p'_x + \nu\tau$ | $\frac{p_x k}{m\omega_c} + \omega t$ | ω_2 |
| Y | $p'_x + y'$ | $\frac{p_x k}{m\omega_c} + yk$ | $(2I_1)^{1/2} \sin(\omega_1)$ |
| X | $p'_y + x'$ | $\frac{p_y k}{m\omega_c} + xk$ | $-I_2$ |

Tabela 2.1: Relações entre as coordenadas e momenta dimensionais, não-dimensionais, originais e transformadas.

constante p'_x . Notamos também que a equação de Hamiltoniano $\dot{\omega}_2 = \partial H/\partial I_2 = \nu$ é trivialmente integrada resultando em $\omega_2 = \nu\tau + \text{cte} = \nu\tau + p'_x$. Podemos escolher o valor da constante $p'_x = 0$ sem perda de generalidade, significando que estamos no sistema de referência no centro de guia do movimento de cíclotron e que o ângulo $\omega_2 = (\nu\tau)(\text{mod}2\pi)$ é a fase da onda.

Para encontrar o significado físico da ação I_1 , podemos ver das relações que aparecem na tabela 2.1:

$$P_y = p'_y = (2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1), \quad (2.34)$$

$$Y = y' = (2I_1)^{1/2} \sin(\omega_1), \quad (2.35)$$

que mostram que $\frac{1}{2}(p_y'^2 + y'^2) = I_1$ é a medida da energia dos íons.

As variáveis de posição normalizadas x' e y' são dadas, para $p'_x = 0$, a partir das relações da tabela 2.1:

$$y' = (2I_1)^{1/2} \sin(\omega_1), \quad (2.36)$$

$$x' = -I_2 - (2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1), \quad (2.37)$$

e a partir da relação de raio de Larmor normalizado

$$\rho \equiv (x'^2 + y'^2)^{1/2}, \quad (2.38)$$

podemos relacionar também a ação I_1 com o raio de Larmor normalizado. Se

$$R^2 \equiv (2I_1) = \rho^2 \quad (2.39)$$

temos

$$(2I_1) = x'^2 + y'^2 = I_2^2 - 2(2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1)I_2 + 2I_1, \quad (2.40)$$

resultando duas soluções para a ação I_2 : a solução trivial

$$I_2 = 0, \quad (2.41)$$

e a não trivial

$$I_2 = 2(2I_1)^{1/2} \cos(\omega_1). \quad (2.42)$$

A relação do ângulo ω_1 com as coordenadas e momenta P_y e Y é

$$\omega_1 = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{P_y} \right), \quad (2.43)$$

que representa o ângulo de Larmor.

Resumindo os resultados físicos, é útil considerar o estado do sistema como sendo dado por três variáveis: o raio de Larmor $R = (2I_1)^{1/2}$, o ângulo de Larmor ω_1 , e a fase da onda $\omega_2 = (\nu\tau) \pmod{2\pi}$. Visto que duas dessas variáveis são ângulos, e ω_2 é uma variável cíclica, de forma que só há sentido em descrevê-la dentro do intervalo de $[0, 2\pi]$, é conveniente visualizar as trajetórias das partículas em coordenadas toroidais. No limite em que o sistema não é perturbado por onda eletrostática ($\alpha = 0$), o íon espirala ao redor do campo magnético constante com um raio constante, o que significa que na superfície de um torus na coordenada toroidal, o íon espirala ao redor do raio menor do torus com raio constante, R , dando ν voltas no raio menor para cada volta no raio maior do torus. Nesse processo, o íon mapeará toda a superfície do torus se ν for irracional. As trajetórias dos íons são analisadas em uma seção de Poincaré Σ , definida por $\omega_1 = \pi$. Assim a trajetória do íon aparecerá como uma série de pontos em Σ como esquematizado na figura 2.1.

As trajetórias regulares (periódicas) dos íons aparecem na seção de Poincaré de forma bem definida como uma espécie de ilhas, e são classificadas em termos dos pontos fixos de ordem p , cuja definição será apresentada na seção 2.5. Para $\alpha = 0$ as ilhas são de ordem zero, e no espaço de fase (R, ω_2) aparecem como linhas retas horizontais em relação à coordenada ω_2 , isto é, os íons espiralam ao redor do campo magnético com raio de Larmor R constante. Para $\alpha \neq 0$, surgem ilhas de diversas ordem, as quais podem formar estruturas complexas do tipo correntes de ilhas ou cadeias de ilhas separadas por separatrizes que parecem redes no espaço de fase [2, 27]. Na medida que se aumenta a intensidade da onda (α aumenta), as ilhas vão se sobrepondo, formando uma região no espaço de fase onde o movimento dos íons é estocástico, região essa conhecida como *região de estocasticidade*. Acima de um certo limiar da intensidade da onda (limiar de estocasticidade), a região de estocasticidade é dominante no espaço de fase, e a absorção da onda pelos íons é mais efetiva.

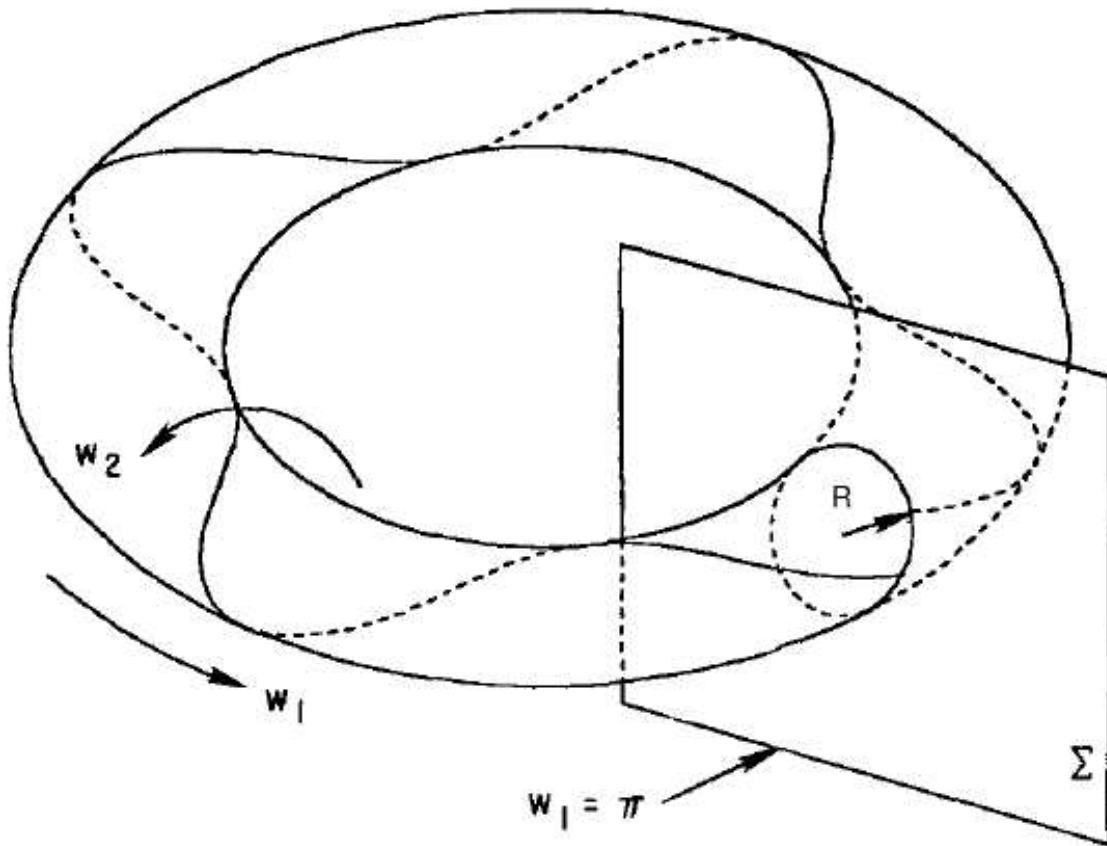


Figura 2.1: Representação das trajetórias das partículas em termos das coordenadas toroidais (R, ω_1, ω_2) , onde $R = (2I_1)^{1/2}$ é o raio de Larmor, ω_1 é o ângulo de Larmor e $\omega_2 = (\nu\tau) \pmod{2\pi}$ é a fase da onda [2]. As trajetórias dos íons são analisadas em uma seção Σ , conhecida como seção de Poincaré.

Escreveremos agora o Hamiltoniano em termos das diferentes componentes de Fourier. Vamos usar a função geratriz

$$\exp((R/2)(t - 1/t)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(R), \quad t \neq 0, \quad (2.44)$$

onde $J_m(R)$ é a função Bessel de ordem m e argumento R . Se substituirmos $t = \exp(i\omega_1)$, temos

$$\cos(R \sin(\omega_1)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R) \cos(m\omega_1), \quad (2.45)$$

e

$$\sin(R \sin(\omega_1)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R) \sin(m\omega_1), \quad (2.46)$$

portanto a função seno do Hamiltoniano Eq.(2.33) pode ser escrita como

$$\sin(R \sin(\omega_1) - \omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R) \sin(m\omega_1 - \omega_2), \quad (2.47)$$

resultando

$$H(I_1, \omega_1, I_2, \omega_2) = I_1 + \nu I_2 - \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R) \sin(m\omega_1 - \omega_2). \quad (2.48)$$

2.3 O Hamiltoniano para o caso de íons sujeitos a um grupo de ondas eletrostáticas propagando-se perpendicularmente a um campo magnético uniforme.

Consideraremos o seguinte sistema magnetizado:

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z, \quad \vec{E} = \sum_i E_i(\omega_i) \cos[k_i(\omega_i)y - \omega_i t - \varphi_i] \vec{e}_y. \quad (2.49)$$

Os ω_i 's que aparecem na somatória da expressão acima são as frequências angulares de cada onda individual do conjunto de n_ω ondas, os $E_i(\omega_i)$'s são as amplitudes de cada onda, e os φ_i 's são as suas fases.

Esses campos são dados pelos seus respectivos potenciais, supondo o calibre de Coulomb,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\phi, \\ \vec{A} &= -B_0 y \vec{e}_x, \quad \phi = -\sum_i \frac{E_i(\omega_i)}{k_i(\omega_i)} \sin(k_i(\omega_i)y - \omega_i t - \varphi_i), \end{aligned} \quad (2.50)$$

Seguindo os mesmos passos que levaram da Eq. (2.3) à Eq. (2.8), obtemos

$$h = \frac{1}{2m} [(p_x + qyB_0)^2 + p_y^2] - q \sum_i \frac{E_i(\omega_i)}{k_i(\omega_i)} \sin(k_i(\omega_i)y - \omega_i t - \varphi_i). \quad (2.51)$$

Supomos que n_ω seja um número ímpar, por simplicidade, e que as n_ω ondas sejam espaçadas igualmente em frequência. Denotando a amplitude, a frequência angular e a fase da onda central desse grupo de ondas por \bar{E} , $\bar{\omega}$ e $\bar{\varphi}$, supomos como condição inicial que a fase da onda central é zero ($\bar{\varphi} = 0$). Utilizamos as mesmas definições de parâmetros não-dimensionais dadas pelas Eqs. (2.12) a (2.15) e os parâmetros normalizados

$$\nu_i \equiv \frac{\omega_i}{\omega_c}, \quad (2.52)$$

$$r_{k_i} \equiv \frac{k_i}{\bar{k}}, \quad (2.53)$$

$$r_{E_i} \equiv \frac{E_i(\omega_i)}{E_0}, \quad (2.54)$$

$$\alpha \equiv \frac{E_0}{m\omega_c^2/q\bar{k}} \equiv \frac{E_0/B_0}{\omega_c/\bar{k}}, \quad (2.55)$$

onde $\bar{k} = k_i(\omega_i = \bar{\omega})$.

O E_0 representa o valor médio da amplitude do campo elétrico do pacote de ondas, obtido da seguinte condição de normalização

$$E_0 \equiv \left(2 \left\langle \left(\sum_i E_i \cos(\Theta_i) \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j E_j \cos(\Theta_j) \vec{e}_j \right) \right\rangle \right)^{1/2} \quad (2.56)$$

onde $\Theta_i \equiv (k_i y - \omega_i t - \varphi_i)$ e o símbolo $\langle \dots \rangle$ significa média temporal sobre um intervalo de tempo suficientemente longo de modo que a média seja feita em um múltiplo inteiro dos períodos de todas as ondas que aparecem no pacote de ondas.

A razão das amplitudes r_{E_i} , satisfaz portanto o seguinte vínculo

$$\sum_{i=1}^{n_\omega} r_{E_i}^2 \langle \cos^2(\Theta_i) \rangle + 2 \sum_{i=1}^{n_\omega-1} \sum_{j>i} r_{E_i} r_{E_j} \langle \cos(\Theta_i) \cos(\Theta_j) \rangle = \frac{1}{2}. \quad (2.57)$$

Depois de realizarmos a média temporal (apêndice A), obtemos $\langle \cos^2(\Theta_i) \rangle = 0.5$ e $\langle \cos(\Theta_i) \cos(\Theta_j) \rangle = 0.0$ e portanto a Eq. (2.57) fica reduzida à seguinte relação

$$\sum_i r_{E_i}^2 = 1. \quad (2.58)$$

Caso as n_ω ondas do pacote de ondas no espaço \vec{k} tenham a mesma amplitude ($r_{E_i} = r_E$ para qualquer índice i), obtemos

$$r_E = (n_\omega)^{-1/2}. \quad (2.59)$$

Como consequência dessas definições, o Hamiltoniano $h' = h'(y', p'_x, p'_y, \tau)$ é

$$h' = \frac{1}{2} \left[(p'_x + y')^2 + (p'_y)^2 \right] - \alpha \sum_i \frac{r_{E_i}}{r_{k_i}} \sin(r_{k_i} y' - \nu_i \tau - \varphi_i) \quad (2.60)$$

Consideramos também que o grupo de ondas forma um espectro estreito em frequência, no intervalo entre $\bar{\omega} - \delta\omega$ à $\bar{\omega} + \delta\omega$, onde $\bar{\omega}$ é a frequência central do espectro. Definindo

$$r_{\omega_i} = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}}, \quad (2.61)$$

teremos o pacote distribuído entre $r_{\omega_i} = 1 - \Delta$ e $r_{\omega_i} = 1 + \Delta$, onde $\Delta = \delta\omega/\bar{\omega}$, uma vez que supusemos que as ondas que formam o pacote são espaçadas igualmente na frequência. É útil definir um novo índice inteiro i , que varia entre $-n_i$ e n_i , onde $2n_i + 1 = n_\omega$, e escrever

$$r_{\omega_i} = 1 + i\Delta', \quad -n_i \leq i \leq n_i, \quad (2.62)$$

onde $\Delta' = \Delta/n_i$.

Se o pacote de onda no espaço \vec{k} é estreito, podemos supor também, por simplicidade, que ele não apresenta dispersão, ou seja, que as ondas constantes do pacote tenham todas a mesma velocidade de fase,

$$\frac{\omega}{k} \approx V, \quad (2.63)$$

onde V é uma constante. Como consequência,

$$r_{\omega_i} = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}} = \frac{Vk_i(\omega_i)}{Vk_i(\bar{\omega})} = \frac{k_i(\omega_i)}{k} = r_{k_i}, \quad (2.64)$$

e portanto

$$\nu_i = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}} \frac{\bar{\omega}}{\omega_c} = r_{\omega_i} \bar{\nu}, \quad (2.65)$$

onde

$$\bar{\nu} \equiv \frac{\bar{\omega}}{\omega_c}. \quad (2.66)$$

Utilizando as relações (2.64) em (2.65) e substituindo no Hamiltoniano (2.60), obtemos

$$h' = \frac{1}{2} [(p'_x + y')^2 + (p'_y)^2] - \alpha \sum_i \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sin(r_{\omega_i}(y' - \bar{\nu})\tau - \varphi_i) \quad (2.67)$$

Seguindo os mesmos procedimentos de transformações canônicas dados pelas Eqs. (2.18) a (2.37), aplicadas no caso de onda única, para o caso de um grupo de ondas, chegamos finalmente ao Hamiltoniano

$$H = I_1 + \bar{\nu}I_2 - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sin\{r_{\omega_i}[(2I)^{1/2} \sin(\omega_1) - \omega_2] - \varphi_i\}. \quad (2.68)$$

As equações do Hamiltoniano são obtidas das relações (2.40) e (2.41), resultando em

$$\dot{\omega}_1 = 1 - \sin(\omega_1) \frac{1}{R} \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(r_{\omega_i}\theta - \varphi_i), \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_2 &= \bar{\nu}, \\ \dot{I}_1 &= \cos(\omega_1) R \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(r_{\omega_i} \theta - \varphi_i), \\ \dot{I}_2 &= -\alpha \sum_i r_{E_i} \cos(r_{\omega_i} \theta - \varphi_i),\end{aligned}\tag{2.70}$$

onde

$$\theta \equiv (2I)^{1/2} \sin(\omega_1) - \omega_2.\tag{2.71}$$

Com o intuito de simplificar mais ainda a notação podemos definir um símbolo para o argumento das funções trigonométricas,

$$\Theta_i \equiv r_{\omega_i} \theta - \varphi_i.\tag{2.72}$$

Essa notação será utilizada posteriormente, no próximo capítulo.

Para análise do Hamiltoniano e das correspondentes equações de movimento, é conveniente fazer uma expansão utilizando a relação

$$\frac{1}{r_{\omega_i}} = (1 + i\Delta')^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-i\Delta')^k,\tag{2.73}$$

e utilizando a propriedade de soma de ângulos nas funções trigonométricas co-seno e seno,

$$H = I_1 + \bar{\nu} I_2 - \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} (-i\Delta')^j [\cos(i\Delta'\theta) \sin(\theta - \varphi_i) + \sin(i\Delta'\theta) \cos(\theta - \varphi_i)],\tag{2.74}$$

$$\dot{\omega}_1 = 1 - \alpha \frac{1}{R} \sin(\omega_1) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} [\cos(i\Delta'\theta) \cos(\theta - \varphi_i) - \sin(i\Delta'\theta) \sin(\theta - \varphi_i)],\tag{2.75}$$

$$\dot{\omega}_2 = \bar{\nu},$$

$$\dot{I}_1 = \alpha R \cos(\omega_1) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} [\cos(i\Delta'\theta) \cos(\theta - \varphi_i) - \sin(i\Delta'\theta) \sin(\theta - \varphi_i)],\tag{2.76}$$

$$\dot{I}_2 = -\alpha \sum_i r_{E_i} [\cos(i\Delta'\theta) \cos(\theta - \varphi_i) - \sin(i\Delta'\theta) \sin(\theta - \varphi_i)].$$

Essas equações, (2.74)-(2.76), são completamente equivalentes às Eqs. (2.68)-(2.70).

Um caso limite interessante pode ser obtido dessas relações (2.74)-(2.76), quando considerarmos a quantidade $(\Delta'\theta)$ muito pequena, o que ocorre para tempos iniciais no caso do espectro de ondas estreitas (lembrando que θ é uma função linear do tempo adimensional τ). Nesse caso, as funções trigonométricas podem ser expandidas, de acordo com as seguintes relações

$$\cos(i\Delta\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(i\Delta')^{2l}}{(2l)!} \theta^{2l},\tag{2.77}$$

$$\sin(i\Delta\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(i\Delta')^{2l+1}}{(2l+1)!} \theta^{2l+1}. \quad (2.78)$$

Usando essas expansões e desprezando termos de ordem maior do que $(\Delta'\theta)$, obtemos o Hamiltoniano e as equações de movimento aproximadas,

$$H = I_1 + \bar{\nu}I_2 - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \sin(\theta - \varphi_i), \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 1 - \alpha \frac{1}{R} \sin(\omega_1) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(\theta - \varphi_i), \\ \dot{\omega}_2 &= \bar{\nu}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \alpha R \cos(\omega_1) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(\theta - \varphi_i), \\ \dot{I}_2 &= -\alpha \sum_i r_{E_i} \cos(\theta - \varphi_i). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Para um caso particular em que todas as ondas do espectro tenham a mesma fase que a onda central ($\varphi_j = \bar{\varphi} = 0$), isto é, o espectro seja de ondas coerentes, o Hamiltoniano e as equações de movimento têm a seguinte forma

$$H = I_1 + \bar{\nu}I_2 - \alpha_{\text{eff}} \sin(\theta), \quad (2.82)$$

$$\dot{\omega}_1 = 1 - \alpha_{\text{eff}} \frac{1}{R} \sin(\omega_1) \cos(\theta), \quad (2.83)$$

$$\dot{I}_1 = \alpha_{\text{eff}} R \cos(\omega_1) \cos(\theta), \quad (2.84)$$

$$\dot{I}_2 = -\alpha_{\text{eff}} \cos(\theta).$$

onde temos o α efetivo

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i}. \quad (2.85)$$

As Eqs. (2.82)-(2.84), têm a mesma forma derivada para o caso de uma onda, conforme se vê pelas Eqs.(2.33) e (2.34). A única diferença é que, no caso de ondas coerentes, para $\Delta'\theta \ll 1$, temos uma equação com α_{eff} ao invés de simplesmente α . Particularmente, caso todas as ondas do espectro coerente tenham a mesma amplitude, obtemos

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha(n_\omega)^{1/2}. \quad (2.86)$$

Depois do estágio inicial, a evolução subsequente obedece às equações não expandidas, Eqs. (2.74)-(2.76), em vez das Eqs. (2.82)-(2.84). O comportamento do sistema no caso mais geral de espectro de ondas incoerentes (fases φ_j aleatórias), é mais complicado, sendo difícil fazer uma análise análoga àquela feita no caso de espectro de ondas coerentes. Resultados podem ser obtidos por meio de análise numérica, como aqueles apresentados nas seções seguintes, ou por meio de aproximações por teoria de perturbação, como apresentados no capítulo 3.

2.4 Resultados numéricos.

Para a solução numérica das equações de movimento, supomos um dado número de partículas (n_p), número de ondas (n_ω) e parâmetros α e \bar{v} . Supomos também um valor de Δ e a distribuição de razões de amplitudes de onda r_{E_i} .

Como procedimento inicial de carga dos dados para os cálculos numéricos, consideramos inicialmente o seguinte caso: Damos os valores para os parâmetros I_1^0 , a_0 , e para o Hamiltoniano inicial H , e atribuímos para as n_p partículas, valores de I_1 , ω_1 e ω_2 , regularmente espaçados:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^0 + \frac{1}{n_p}a_0, I_1^0 + \frac{2}{n_p}a_0, \dots, I_1^0 + a_0, \\ \omega_1 &= 2\pi\frac{1}{n_p}, 2\pi\frac{2}{n_p} \dots, 2\pi, \\ \omega_2 &= 2\pi\frac{1}{n_p}, 2\pi\frac{2}{n_p} \dots, 2\pi, \\ I_2 &= (H - I_1 + S)/\bar{v} \end{aligned} \tag{2.87}$$

onde

$$S \equiv \alpha \sum_i \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sin\{r_{\omega_i}[R \sin(\omega_1) - \omega_2] - \varphi_i\}.$$

Em outras palavras o procedimento inicial de carga dos dados supõe valores iniciais para I_1, ω_1, ω_2 , e avalia I_2 de tal forma que todas as partículas tenham o mesmo Hamiltoniano inicial (H), para o qual supomos arbitrariamente o valor $H = I_1^0 + \bar{v}I_1^0$, pois desprezamos as interações mútuas entre partículas. Conhecendo os valores iniciais de ω_1, ω_2, I_1 e I_2 , é possível avaliar o valor do produto $\Delta\theta$ para todas as partículas.

Quando supomos o valor inicial de I_1 para cada partícula, supomos simplesmente o valor inicial do momentum canônico perpendicular das partículas, visto que revertendo as transformações canônicas obtemos

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\bar{k}^2}{m^2 \omega_c^2} [(m\dot{y})^2 + (m\dot{x} - qA_x)^2] = \frac{1}{2} \frac{\bar{k}^2}{\omega_c^2} v_\perp^2,$$

onde $m\dot{x}$ e $m\dot{y}$ são os componentes x e y do momentum das partículas (não confundir com os momenta canônicos).

Na figura 2.2 mostramos os valores iniciais de $\Delta\theta$ para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$ e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. Vemos que a quantidade $\Delta\theta$ é menor que a unidade para todas as partículas, o que significa que as equações de movimento no estágio inicial da evolução temporal podem ser aproximadas pelas relações (2.82)-(2.85), no caso particular de ondas coerentes.

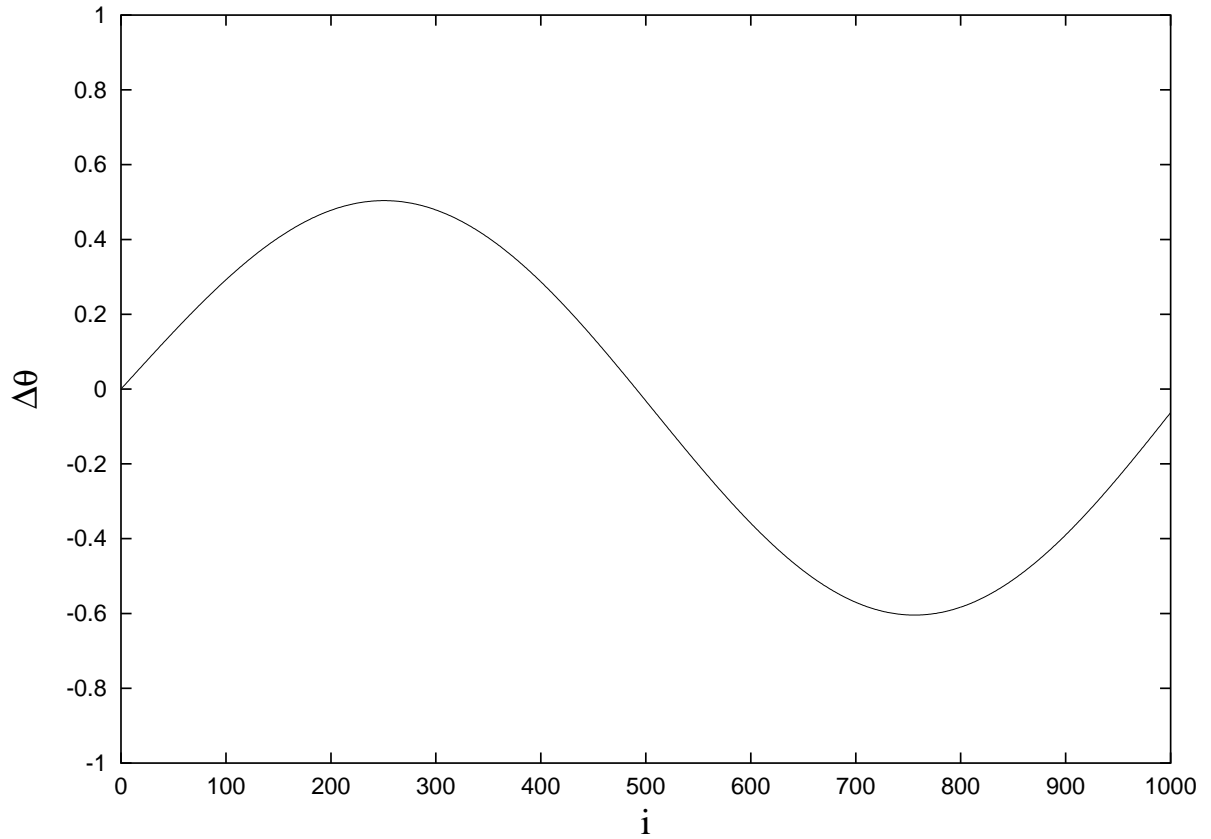


Figura 2.2: Valores iniciais de $\Delta\theta$ vs. índice de partícula i , para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. As condições iniciais para as partículas são atribuídas de modo que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, e I_2 avaliado sob a restrição de que todas as partículas têm o mesmo valor do Hamiltoniano (H).

Com essa escolha de parâmetros I_1^0 e a_0 , os valores dos momenta perpendiculares das partículas são distribuídos na região $50,0 < R < 57,4$, onde $R = (2I_1)^{1/2}$. Supondo, por exemplo, $\bar{\nu} = 30,0$ e intensidade de onda nula ($\alpha = 0$), a quantidade $(2I_2)^{1/2}$ satisfaz $49,7 < (2I_2)^{1/2} < 50,0$, tendo valores ligeiramente diferentes no caso de α finito. Essa região dos parâmetros é similar àquela utilizada em estudos anteriores do caso de uma onda [2, 8], que usamos para comparar com o presente caso de várias ondas e espectro estreito.

De acordo com os resultados originados do estudo do caso de uma onda e valores inteiros de $\bar{\nu}$, para pequena amplitude α da onda eletrostática o espaço de fase é dominado por grandes ilhas de primeira ordem. Para valores intermediários da amplitude da onda, começa a aparecer movimento estocástico perto da separatriz entre as ilhas. Para amplitudes grandes, o tamanho da região estocástica aumenta, e o limiar para estocasticidade é definido como a amplitude da onda para qual a fração do espaço de fase ocupado pelas ilhas é apreciavelmente diminuída em comparação com o tamanho da região estocástica [2]. Os limites da região estocástica são aproximadamente os seguintes [2]:

$$R_{min} \approx \bar{\nu} - \sqrt{\alpha}, \quad (2.88)$$

$$R_{max} \approx (4\alpha\bar{\nu})^{2/3}(2/\pi)^{1/3}. \quad (2.89)$$

Utilizando as Eqs. (2.88) e (2.89) para $\alpha = 2,0$, e $\nu = 30,0$ a estocasticidade deve então ocorrer na região entre $28,6 < R < 33,2$. Para $\alpha = 4,0$, na região entre $28,0 < R < 43,5$, e para $\alpha = 6,0$, na região entre $27,5 < R < 69,0$. Portanto, para nossa escolha dos parâmetros, no caso de uma onda esperamos uma pequena estocasticidade para $\alpha = 2,0$, visto que as partículas ocupam a região entre $50,0 < R < 57,4$, muito longe da região para que ocorra movimento estocástico. Para $\alpha = 4,0$ já deve ocorrer um apreciável quantidade de estocasticidade. Para amplitudes maiores, como no caso de $\alpha = 6,0$, com os parâmetros escolhidos a região ocupada pelas partículas fica totalmente imersa na região estocástica.

2.4.1 O caso de uma onda

Iniciaremos considerando o caso de uma onda, a situação considerada nas referências [2, 8].

Para ilustrar o efeito do aumento da intensidade da onda, apresentamos na Fig. 2.3 a quantidade $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2(\text{mod}2\pi)$, para caso de três partículas e uma onda, com $\alpha = 2,2; 3,0;$

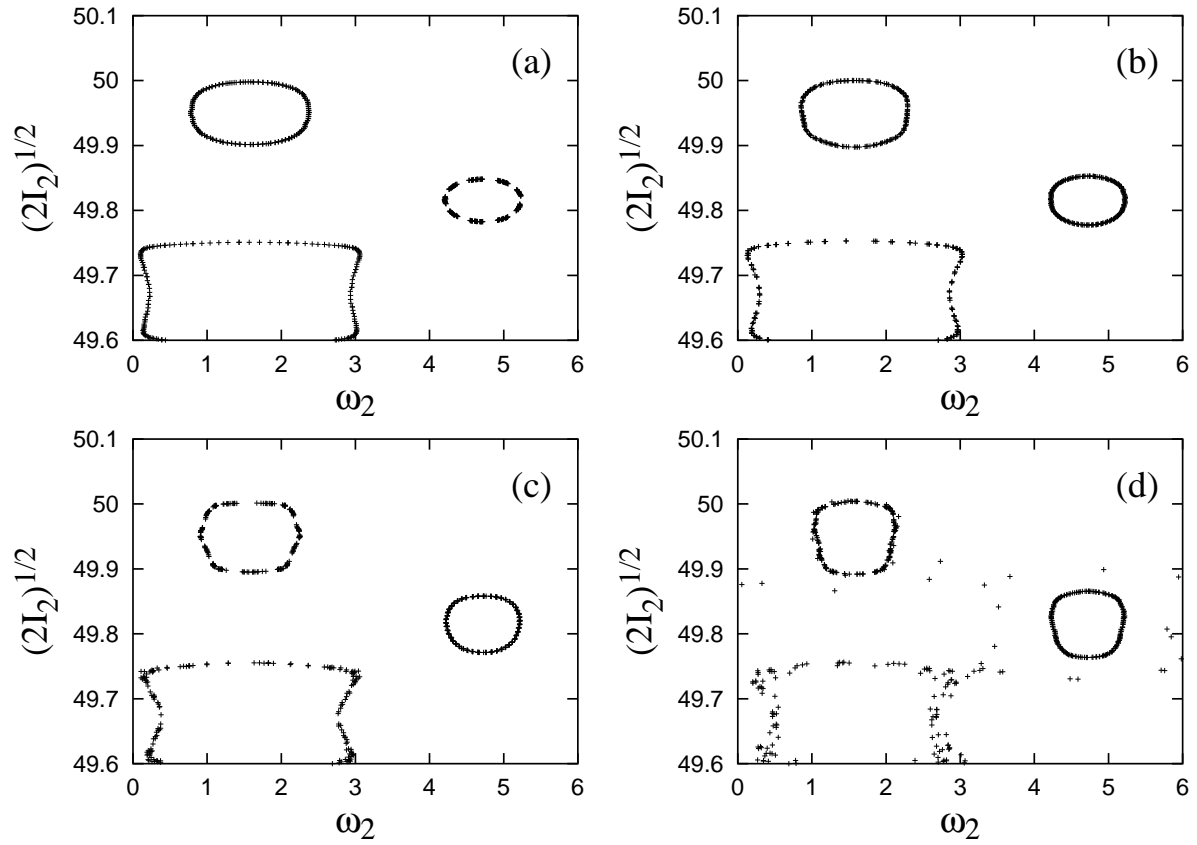


Figura 2.3: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para três partículas, uma onda ($n_\omega = 1$), $\bar{\nu} = 30, 0$; e (a) $\alpha = 2, 2$; (b) $\alpha = 3, 0$; (c) $\alpha = 3, 8$; e (d) $\alpha = 4, 6$.

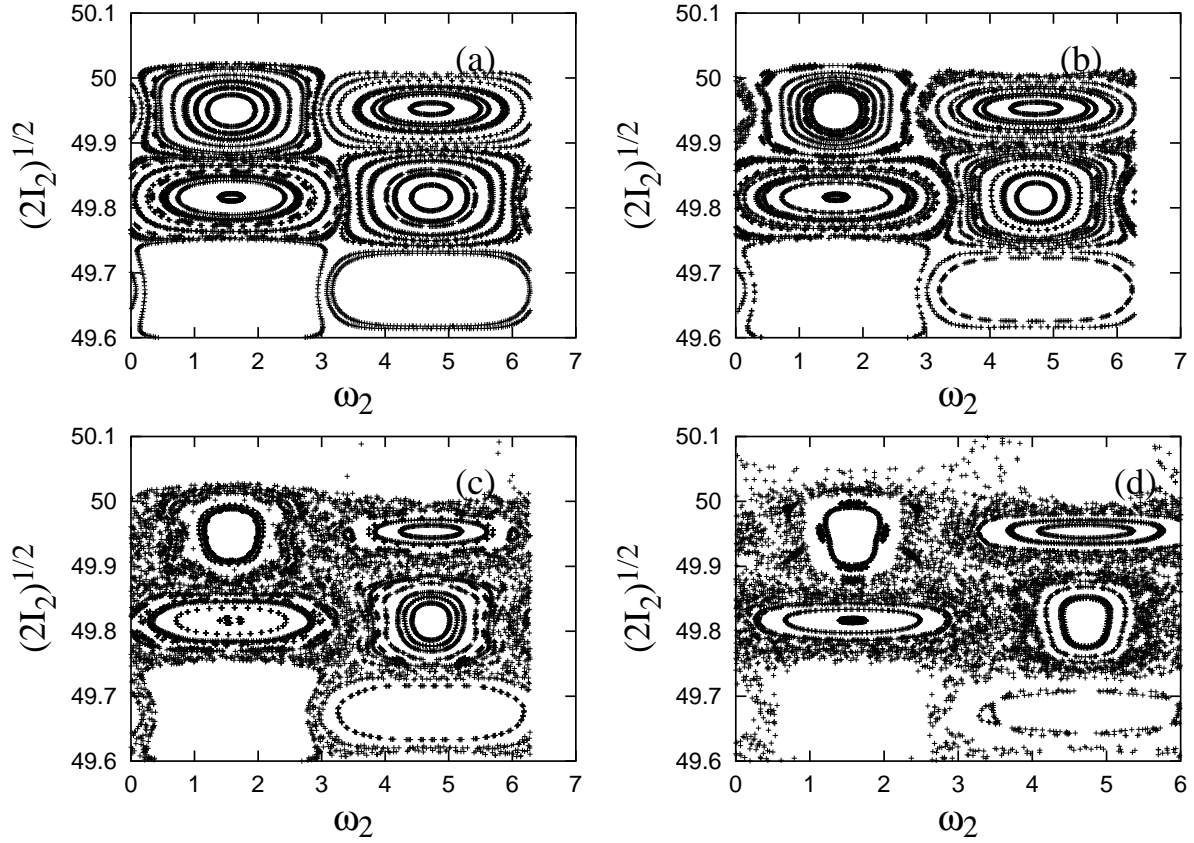


Figura 2.4: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas, uma onda ($n_\omega = 1$), $\bar{\nu} = 30$, e (a) $\alpha = 2,2$; (b) $\alpha = 3,0$; (c) $\alpha = 3,8$; e (d) $\alpha = 4,6$.

3,8; e 4,6; usando $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. A seqüência de painéis ilustra a modificação gradual das trajetórias causada pelo aumento da intensidade da onda. Na Fig. 2.4 apresentamos a mesma quantidade $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2(\text{mod}2\pi)$, para o caso de 50 partículas e $\alpha = 2,0$, usando os mesmos parâmetros e condições iniciais usadas para a Fig. 2.3. Vemos o aparecimento gradual da superposição (*overlap*) das órbitas das partículas, que correspondem à ocorrência de difusão estocástica no espaço de velocidade.

2.4.2 O caso de várias ondas com a mesma fase

Consideraremos agora a presença de mais de uma onda, com diferentes frequências, todas com a mesma fase da onda central ($\bar{\varphi} = 0$). Por simplicidade, supomos que todas as ondas tem a mesma amplitude tal que $r_E = (n_\omega)^{-1/2}$, e mesma energia $\langle E_0^2 \rangle$ do caso de uma onda. Essa simples limitação do caso mostra vários efeitos devido ao aumento do número de ondas,

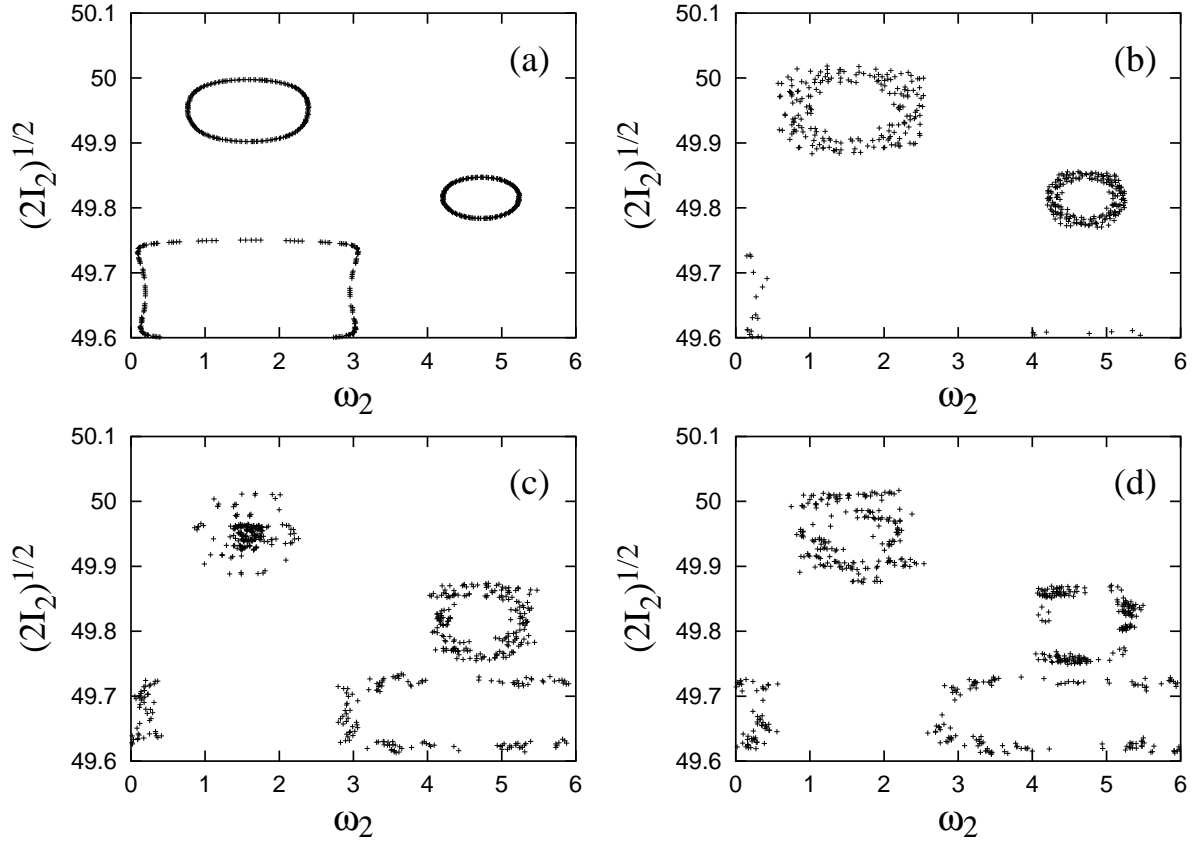


Figura 2.5: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de $\omega_2 \pmod{2\pi}$, para três partículas e ondas coerentes, $\alpha = 2,0$; $\bar{\nu} = 30$, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7.

a ser comparado com o caso mais geral de um conjunto de ondas incoerentes discutido no final da seção presente.

A Fig. 2.5 mostra o caso de $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2 \pmod{2\pi}$, considerando três partículas e $\alpha = 2,0$, para vários valores do número de ondas (1, 3, 5 e 7), usando $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$ e os mesmos parâmetros e condições iniciais utilizadas para a Fig. 2.3. Vemos que o aumento do número de ondas produz modificações nas trajetórias das partículas que são reminescentes das modificações causadas pelo aumento na intensidade da onda, como mostradas na Fig. 2.3.

O efeito do aumento no número de ondas coerentes em um sistema de grande número de partículas é mostrado na Fig. 2.6, onde apresentamos $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2 \pmod{2\pi}$ para caso de 50 partículas e $\alpha = 2,0$; para vários valores do número de ondas (1, 3, 5 e 7). Nessa figura, usamos também os mesmos parâmetros e condições iniciais utilizadas para obter a Fig. 2.5.

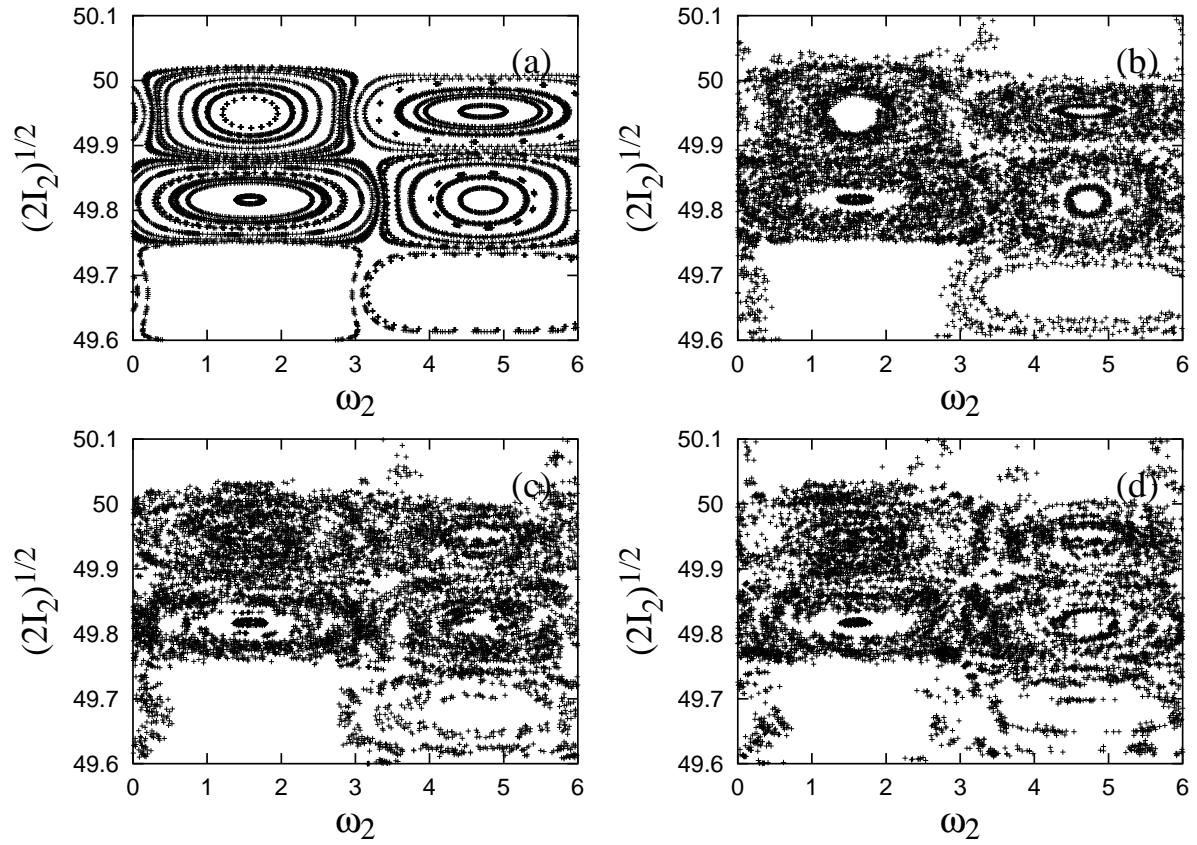


Figura 2.6: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas coerentes, $\alpha=2,0$; $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7.

Para obtermos mais informações sobre o comportamento do sistema, consideramos na Fig. 2.7 o caso em que cinco ondas são presentes no sistema, considerando vários valores da amplitude da onda ($\alpha = 0,25; 0,5; 1,0$ e $2,0$), e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. Como nas figuras prévias, a Fig. 2.7 representa $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2(\text{mod}2\pi)$. O procedimento de carga (estabelecimento das condições iniciais) e outros parâmetros são os mesmos das figuras prévias. Como esperado, a presença de mais que uma onda não é suficiente para garantir a ocorrência da difusão estocástica, mas o limiar da intensidade da onda para o começo da estocasticidade é reduzido em comparação com o caso de uma onda, em que ele ocorre para $\alpha \approx 2,2$. Visualmente, esse começo parece ocorrer entre o caso de $\alpha = 0,5$, onde as órbitas das partículas obtidas são similares ao que aparece no primeiro painel da Fig. 2.6 (caso de uma onda com $\alpha = 2,0$), e o caso de $\alpha = 1,0$. Isto está de acordo com a Eq. (2.86), que prediz $\alpha = \alpha_{1wave}/(n_\omega)^{1/2}$ (que no presente caso é $2,2/(5)^{1/2} \approx 0,98$).

2.4.3 O caso de várias ondas com fases aleatórias

Consideraremos agora a presença de mais que uma onda, com diferentes frequências e fases aleatórias, supondo a fase da onda central nula ($\bar{\varphi} = 0$). As fases aleatórias são obtidas a partir de um gerador de números aleatórios que inicia com uma semente numérica, e seus valores ficam restritos ao intervalo de 0 à 2π . Todos os resultados que serão apresentados, a menos que seja explicitamente dito o contrário, são gerados usando a mesma semente para o gerador de números aleatórios. Considerando as amplitudes no conjunto de ondas, supomos que são todas iguais, tal que $r_E = (n_\omega)^{-1/2}$.

A Fig. 2.8 mostra o caso de $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2(\text{mod}2\pi)$, considerando três partículas e $\alpha = 2,0$, para vários valores de número de ondas ($1, 3, 5$, e 7), usando $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$ e outros parâmetros como na 2.3. Exceto pelas fases aleatórias, as condições utilizadas são exatamente as mesmas usadas para gerar a Fig. 2.5. As modificações nas trajetórias das partículas são similares mas mais impressionantes que as causadas pelas ondas coerentes, vistas na Fig. 2.5.

O efeito do aumento no número de ondas incoerentes em sistemas com mais partículas é visto na Fig. 2.9, onde apresentamos $(2I_2)^{1/2}$ vs $\omega_2(\text{mod}2\pi)$ para o caso de 50 partículas e

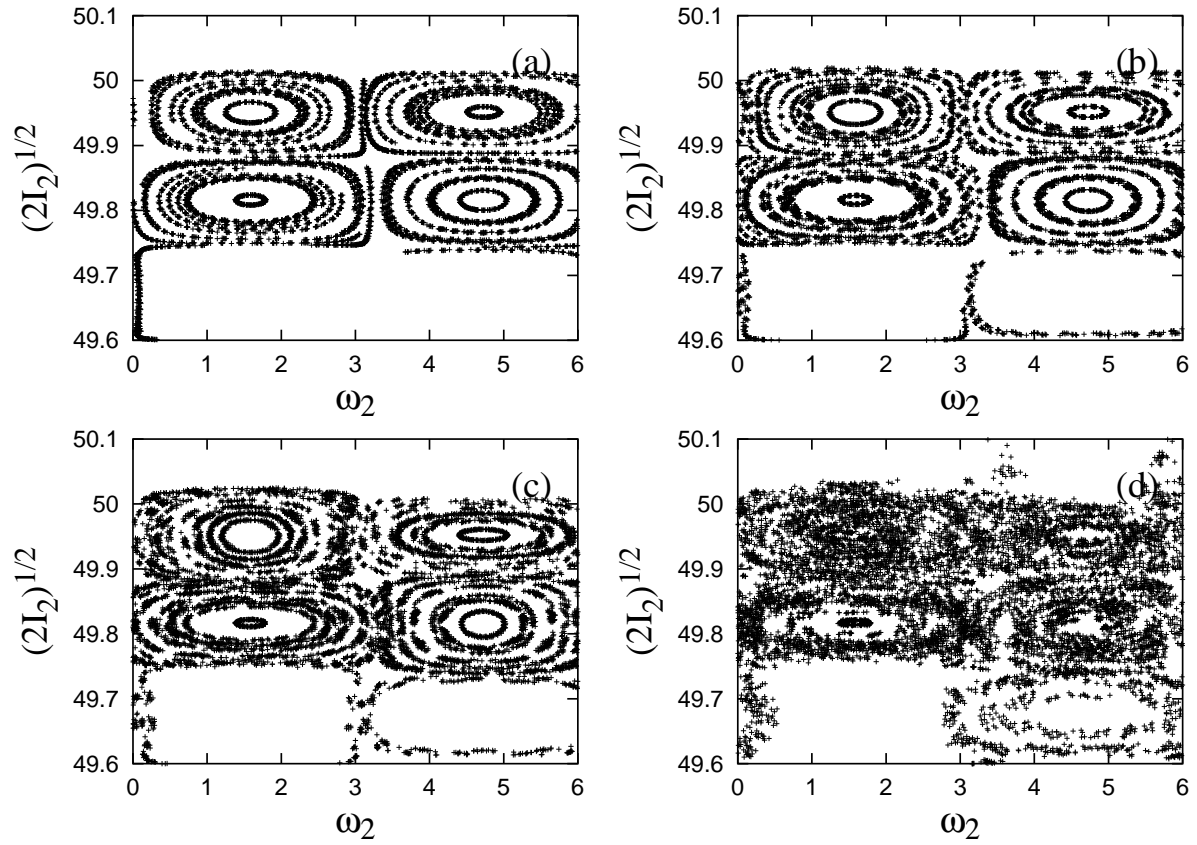


Figura 2.7: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas coerentes, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, $n_\omega = 5$, e (a) $\alpha = 0,25$, (b) $\alpha = 0,5$, (c) $\alpha = 1,0$, e (d) $\alpha = 2,0$.

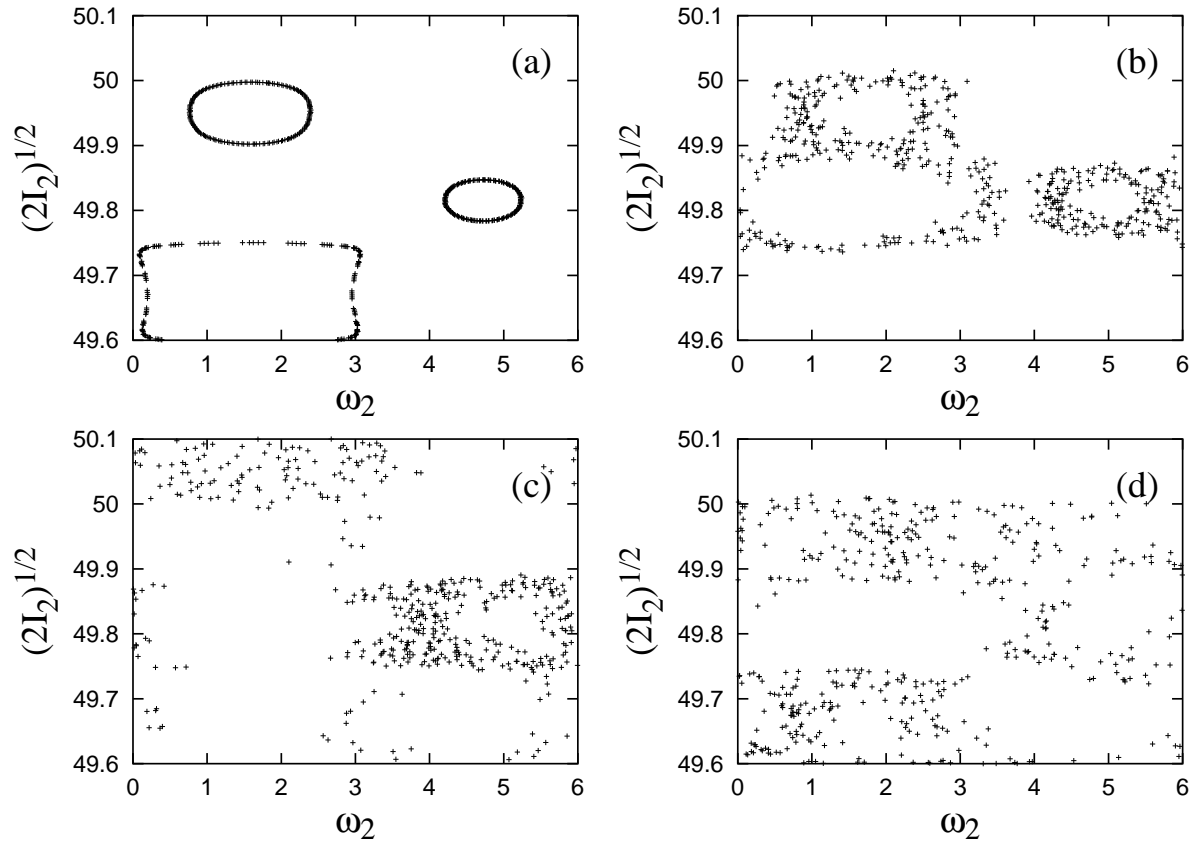


Figura 2.8: $\sqrt{2I_2}$ como função de ω_2 (mod. 2π), para três partículas e ondas com fases aleatórias, $\alpha = 2, 0$, $\bar{\nu} = 30$, $\Delta = 1, 0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, and (d) 7.

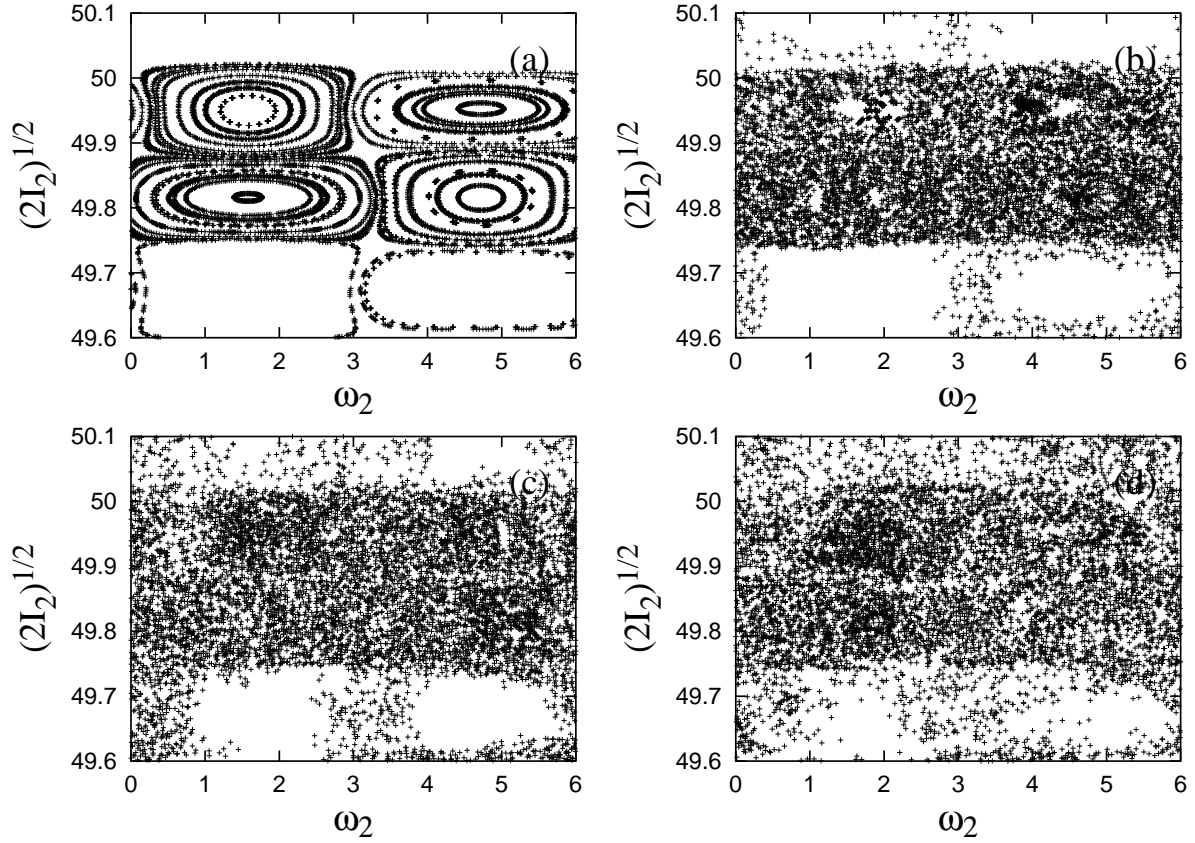


Figura 2.9: $\sqrt{2I_2}$ como uma função de ω_2 (mod. 2π), para 50 partículas e ondas com fases aleatórias, $\alpha = 2,0$, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e número de ondas (a) 1, (b) 3, (c) 5, e (d) 7.

$\alpha = 2,0$, para vários valores do número de ondas (1, 3, 5, e 7). Nessa figura, usamos os mesmos parâmetros usados para obter a Fig. 2.8. A Fig. 2.9 claramente mostra que a presença de ondas com fases aleatórias causa um completo espalhamento das orbitas das partículas que eram visíveis no caso de uma única onda, para o mesmo valor de α .

Como no caso das ondas coerentes, cujos resultados são mostrados na Fig. 2.7, na Fig. 2.10 mostramos $\sqrt{2I_2}$ como função de $\omega_2(\text{mod}2\pi)$ para o caso em que cinco ondas são presentes no sistema, considerando vários valores da amplitude da onda ($\alpha = 0,25; 0,5; 1,0$, e $2,0$), e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, e ondas com fases aleatórias. O procedimento de carga e outros parâmetros utilizados são os mesmos utilizados nas figuras prévias. Observamos visualmente que o grau de estocasticidade, para o mesmo número de interações, decresce gradualmente quando a energia da onda é reduzida, mas mesmo no caso de $\alpha = 0,25$ o grau da estocasticidade é maior que obtido no caso de uma onda e $\alpha = 2,0$, visto no primeiro painel da Fig. 2.6 e no primeiro

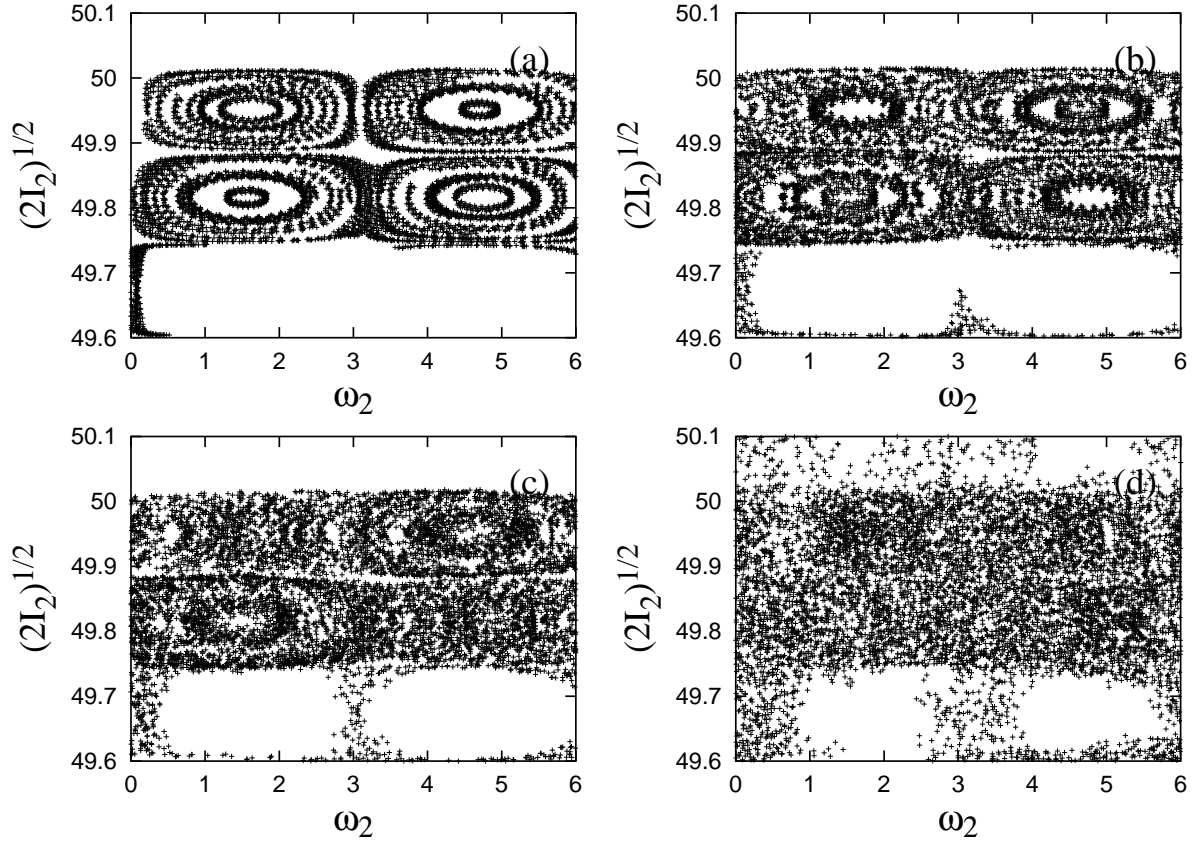


Figura 2.10: $\sqrt{2I_2}$ como função de $\omega_2 \pmod{2\pi}$, para 50 partículas e ondas com fases aleatórias, $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$, $n_\omega = 5$, e (a) $\alpha = 0,25$, (b) $\alpha = 0,5$, (c) $\alpha = 1,0$, e (d) $\alpha = 2,0$.

painel da Fig. 2.9. Entretanto, enquanto no caso de ondas coerentes usamos a Eq. (2.86) para relacionar a amplitude requerida para o início da estocasticidade com a amplitude requerida para produzir o efeito similar no caso de uma onda, não desenvolvemos uma abordagem teórica equivalente para o caso de ondas com fases aleatórias.

A Fig. 2.10(a) mostra também um grau mais alto de estocasticidade que a Fig. 2.7(a), sendo que a única diferença é que a Fig. 2.10(a) foi obtida supondo ondas com fases aleatórias, enquanto a Fig. 2.7(a) foi obtida supondo que todas as ondas têm a mesma fase ($\varphi = 0$). Na análise que aparece na próxima seção, iremos observar similarmente comportamento difusivo para tempos longos mais pronunciado no caso de ondas com fases aleatórias que no caso de ondas de mesma fase.

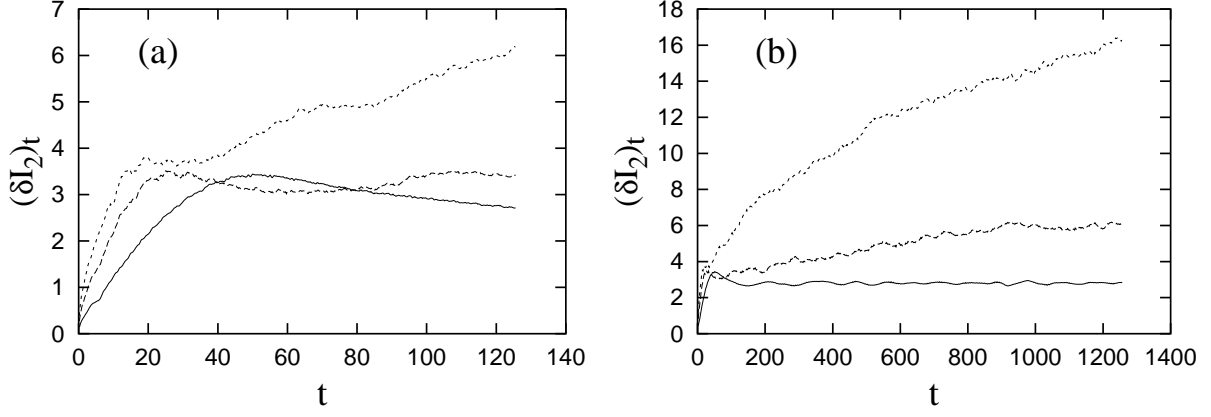


Figura 2.11: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$, $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ (linha cheia), $4,0$ (linha quebrada), e $6,0$ (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo.

2.4.4 Análise comparativa do caso de uma onda e do caso com várias ondas, coerentes e incoerentes

A presença do comportamento estocástico pode também ser investigada pelo comportamento temporal da seguinte quantidade:

$$(\delta I_j)_t = \left\{ \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} [I_j(t) - I_j(0)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (2.90)$$

onde $j = 1, 2$. No gráfico de $(\delta I_j)_t$ vs. t , a inclinação de $(\delta I_j)_t$, relativa ao eixo t é a medida do coeficiente de difusão no espaço de velocidade [28].

Na Fig. 2.11 mostramos $(\delta I_j)_t$ como uma função do tempo normalizado para o caso de uma onda ($n_\omega = 1$), $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$; $4,0$; e $6,0$. O painel (a) da Fig. 2.11 mostra a evolução até o tempo normalizado $t \approx 120$, e o painel (b) mostra a evolução estendida até $t \approx 1200$. Para essa figura, consideramos $n_p = 1000$, que resulta em estatística muito melhor do que obtida com $n_p = 50$. A figura mostra claramente o comportamento difusivo para longos tempos, medido pela inclinação da curva relativa ao eixo t , é ausente para o caso $\alpha = 2,0$, já é presente no caso $\alpha = 4,0$, e é mais pronunciado no caso $\alpha = 6,0$ [2, 8].

Na Fig. 2.12 mostramos $(\delta I_j)_t$ como função do tempo normalizado, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1, 5$, e 9 , considerando o caso de ondas coerentes. O painel (a) da Fig. 2.11 mostra a evolução até o tempo normalizado $t \approx 120$, e o painel (b)

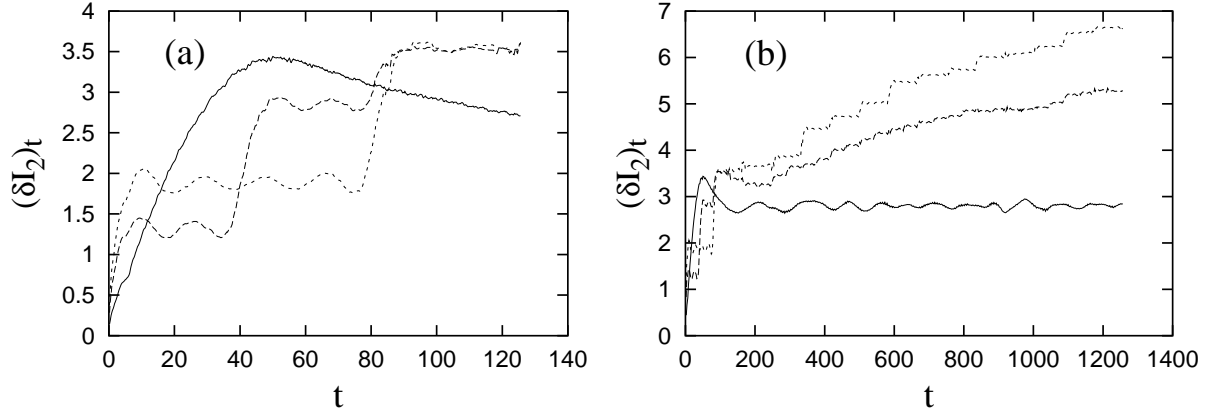


Figura 2.12: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas coerentes, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo.

mostra a evolução estendida até $t \approx 1200$. A Fig. 2.12 mostra também aparecimento da difusão no sistema, mas a curva que mostra o aumento de $(\delta I_2)_t$ com o tempo exibe menor inclinação média que no caso correspondente a uma onda com $\alpha = 2,0$, aparecendo na Fig. 2.11. É também evidente a alternância de regiões onde a curva descrevendo $(\delta I_2)_t$ aumenta com tempo e regiões onde é quase constante e paralela ao eixo horizontal. Essa seqüência de saltos não é evidente no caso de uma onda na Fig. 2.11.

Na Fig. 2.13 mostramos $(\delta I_j)_t$ como função do tempo normalizado para $I_1^0 = 1.25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ para $n_\omega = 1, 5$, e 9, para o caso de ondas com fases aleatórias. Como na Fig. 2.12, o painel (a) mostra a evolução até o tempo normalizado $t \approx 120$, e o painel (b) mostra a evolução estendida até $t \approx 1200$. Na Fig. 2.13, a evolução inicial de $(\delta I_2)_t$ apresenta pequena inclinação com respeito ao eixo t , comparando com o caso correspondente para ondas coerentes, que aparece na Fig. 2.12. Mas a evolução de longo prazo que aparece na Fig. 2.13(b) mostra difusão contínua, sem o aparecimento dos "saltos" que ocorrem na Fig. 2.12, no caso de ondas coerentes, resultando que a quantidade $(\delta I_2)_t$ atinge valores maiores no caso da Fig. 2.13(b) do que no caso que aparece na Fig. 2.12(b). Outra característica interessante que aparece na Fig. 2.13(b) é que os casos de $n_\omega = 5$ e $n_\omega = 9$ com fases aleatórias exibem características similares de longo prazo (no comportamento de $(\delta I_2)_t$), comportamento diferente do comportamento aparecendo na Fig. 2.12 para o caso de ondas coerentes.

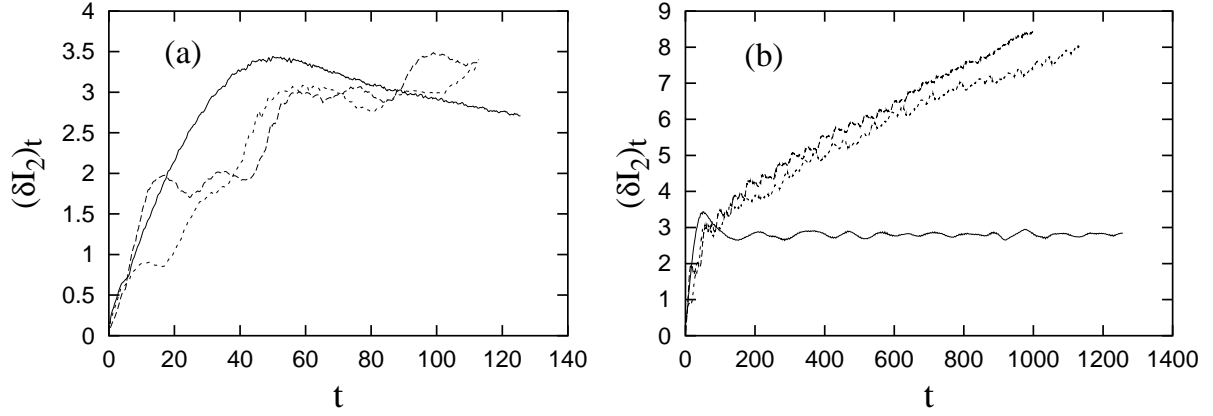


Figura 2.13: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas com fases aleatórias, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo.

O estágio bem inicial da evolução temporal é mostrado na Fig. 2.14, que mostra $(\delta I_2)_t$ vs. tempo normalizado t para os casos $n_\omega = 1$ e $\alpha = 6,0$, $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$ para ondas coerentes e $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$ para ondas com fases aleatórias, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$ e t até 20. De acordo com a Eq. (2.86), os dois casos devem ter características similares no início da difusão, uma predição que é corroborada pelos resultados mostrados na Fig. 2.14. Considerando os resultados no caso de ondas aleatórias, a inclinação inicial da curva para $(\delta I_2)_t$ é menor que nos casos do conjunto de ondas coerentes, embora observemos uma difusão mais contínua e significativa para evolução para tempos longos, de acordo com a comparação entre as Figs. 2.12 e 2.13.

Os resultados apresentados nas Figs. 2.11, 2.12 e 2.14 mostram que a difusão estocástica causada por várias ondas coerentes de fato inicia com o nível de onda predito pela Eq. (2.86), mas prossegue a uma taxa menor do que o caso correspondente com somente uma onda. Esses resultados podem ser esclarecidos pela consideração de várias características das equações do movimento. Iremos considerar, por exemplo, a média sobre todas as partículas da quarta equação do movimento, que aparece nas Eqs. (2.75) e (2.76),

$$\xi_2 \equiv \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} \dot{I}_2 = -\frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} \sum_i r_{E_i} \left[\cos(i\Delta'\theta) \cos(\theta - \varphi_i) - \sin(i\Delta'\theta) \sin(\theta - \varphi_i) \right], \quad (2.91)$$

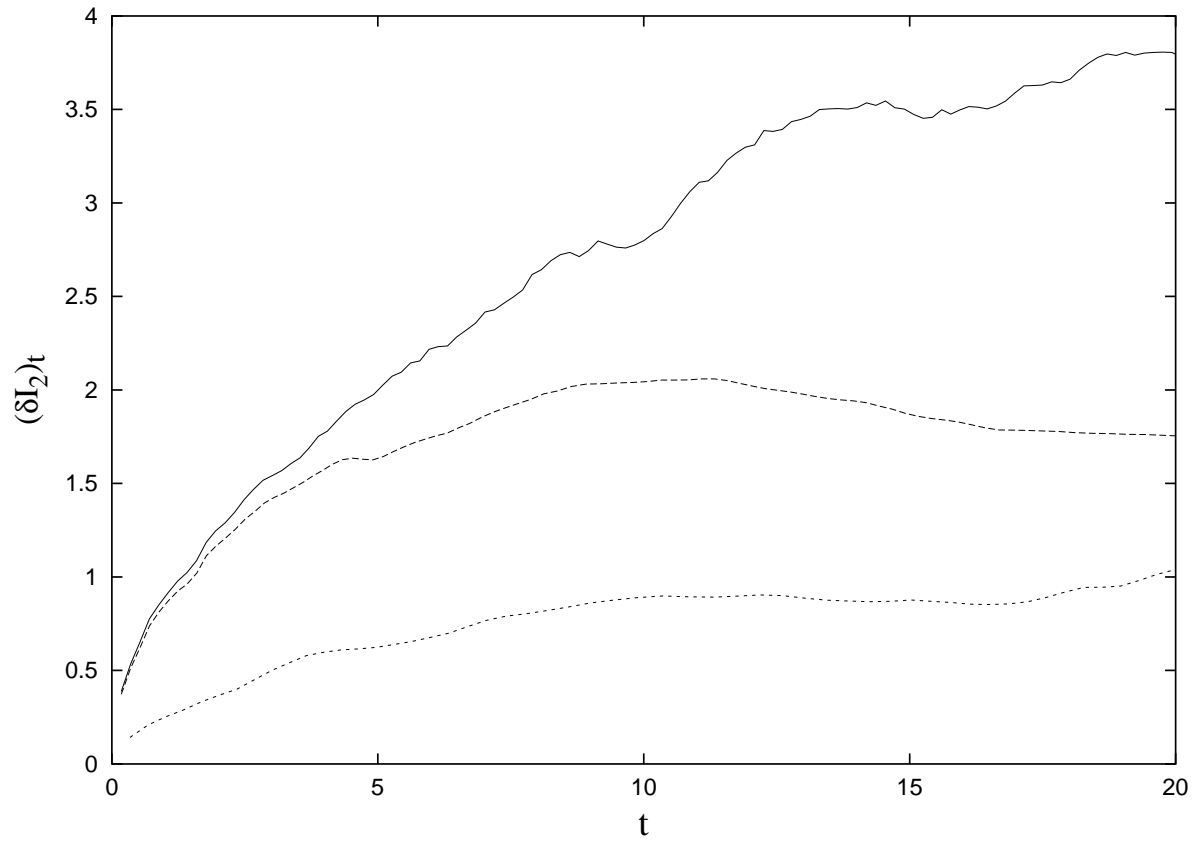


Figura 2.14: Estágio inicial da evolução do $(\delta I_2)_t$ como uma função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$ e $\alpha = 6,0$ (linha cheia), e $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$, ondas coerentes (linha quebrada), e para $n_\omega = 9$ e $\alpha = 2,0$, ondas com fases aleatórias (linha pontilhada), supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$.

que pode ser examinada como uma representação do comportamento do sistema. Na Fig. 2.15 mostramos o gráfico de ξ_2 vs. t para $\alpha = 2.0$ e $n_\omega = 1, 5, \text{ e } 9$, supondo ondas coerentes, $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{v} = 30, 0$. As curvas que aparecem nos três painéis à esquerda da Fig. 2.15 devem ser comparadas com as curvas que aparecem nos painéis do lado direito, onde mostramos uma quantidade auxiliar

$$(\xi_2)_{aux} \equiv -\frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{n_p} \alpha \left[\sum_i r_{E_i} \right] \cos(\theta), \quad (2.92)$$

que simplesmente é a média sobre todas as partículas da equação de movimento que deveria governar a evolução de I_2 se $\Delta\theta$ pudesse ser considerada uma quantidade muito pequena ao longo de todo o intervalo de tempo mostrado na figura. Nesse caso, a estocasticidade deve ocorrer como no caso de uma onda, com $\alpha_{eff} = \alpha \sum_i r_{e_i}$.

A comparação entre os correspondentes painéis esquerdo e direito da Fig. 2.15 mostra que a quantidade $(\xi_2)_{aux}$ é uma quantidade flutuante de magnitude significativa ao longo da evolução temporal, enquanto ξ_2 para ondas coerentes é uma quantidade flutuante que no caso de $n_\omega > 1$ (painéis (b) e (c)) exhibe ao longo do lapso de tempo considerado no cálculo uma magnitude média muito menor do que aquela de $(\xi_2)_{aux}$, com saltos periódicos (*bursts*) de amplitude. Essa modulação da evolução temporal da quantidade ξ_2 , que ocorre devido ao fator $\cos(i\Delta'\theta)$ aparecendo na equação de movimento, explica a pequena quantidade de difusão no espaço de velocidade, comparada com a difusão que deve ocorrer sem a presença da modulação, para os mesmos parâmetros.

Os máximos da quantidade ξ_2 , que aparecem periodicamente na Fig. 2.15, podem ser facilmente explicados. A periodicidade origina-se através do fator $\sum_i r_{E_i} \cos(i\Delta'\theta)$, que no caso de ondas com amplitudes iguais pode ser escrito como

$$\sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(i\Delta'\theta) = r_{E_0} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(i\Delta'\theta) = r_{E_0} \frac{\sin\left(\frac{n_\omega \Delta\theta}{n_\omega - 1}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{n_\omega - 1}\right)}.$$

Os máximos dessa quantidade para $n_\omega > 1$ são localizados em $|\theta| = (k\pi/\Delta)(n_\omega - 1)$, onde k é um inteiro positivo. Visto que a média de θ sobre todas as partículas é $\theta \approx -\bar{v}t$, os máximos ocorrem em $t \approx k\pi(n_\omega - 1)/(\bar{v}\Delta)$. Para nossos parâmetros, o primeiro máximo ocorre para $t \approx 40$ e $t \approx 80$, respectivamente, para $n_\omega = 5$ e 9 . Os máximos seguintes ocorrem nos múltiplos desses valores. Essas características são vistas na Fig. 2.15 e explicam a seqüência de saltos

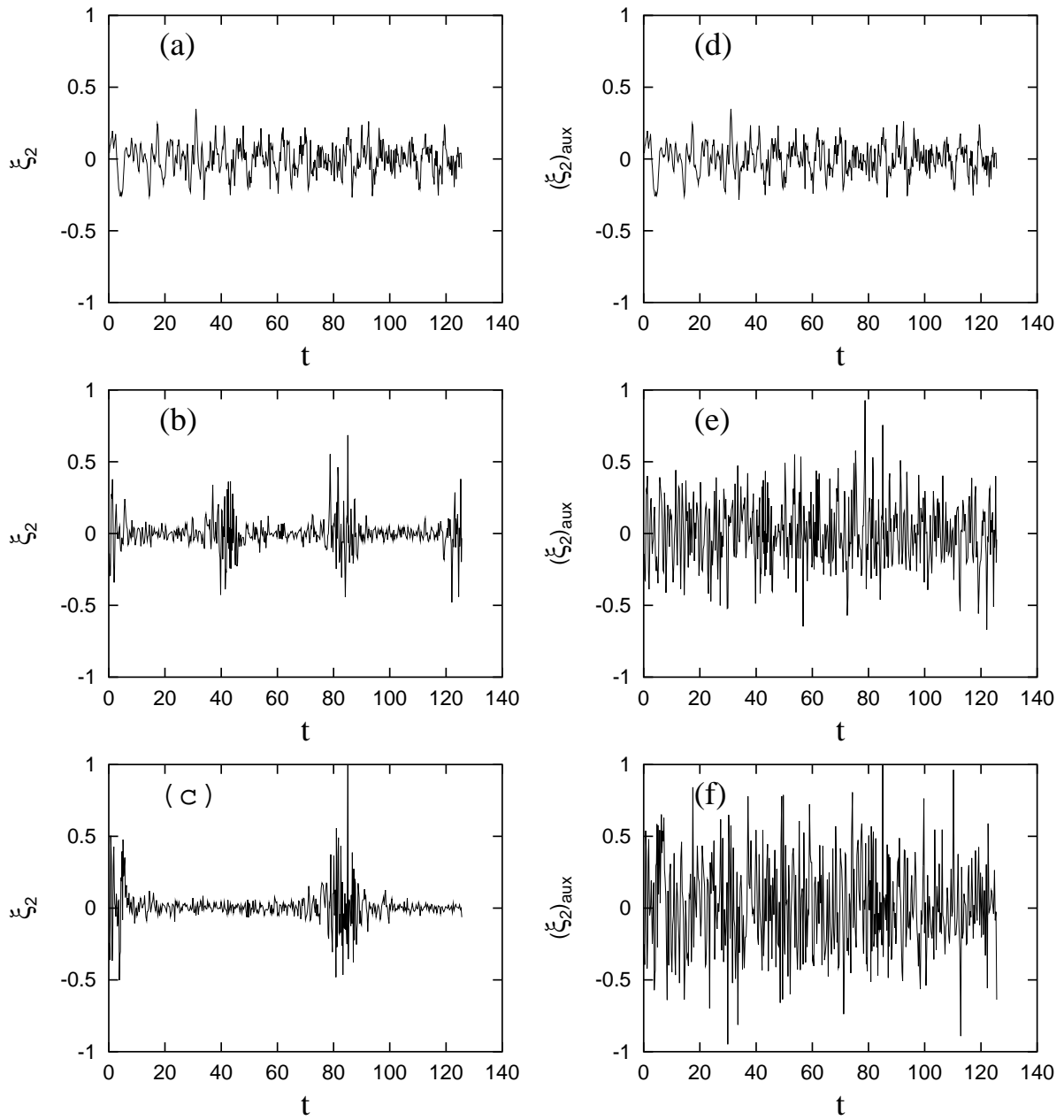


Figura 2.15: Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas coerentes, para $\alpha = 2,0$ e (a) $n_\omega = 1$, (b) $n_\omega = 5$, e (c) $n_\omega = 9$, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo. (d) $n_\omega = 1$, (e) $n_\omega = 5$, e (f) $n_\omega = 9$.

difusivos exibidos na Fig. 2.12. Uma consequência dessa característica de difusão por saltos periódicos é que, embora o limiar para o início da difusão estocástica diminua pela presença de um conjunto de ondas coerentes com frequências próximas, se comparado com o caso de uma onda, como predito pela Eq.(2.86), a difusão total é limitada pelo intervalo de tempo entre os episódios difusivos, que se torna grande com o aumento no número de ondas.

Na Fig. 2.16, por outro lado, traçamos ξ_2 vs. t para $\alpha = 2.0$ e $n_\omega = 1, 5, \text{ e } 9$, supondo ondas com fases aleatórias, $I_1^0 = 1, 25 \times 10^3$, $a_0 = 400$ e $\bar{\nu} = 30, 0$. Como no caso da Fig. 2.15, as curvas que aparecem nos três painéis à esquerda da Fig. 2.16 devem ser comparadas com as curvas que aparecem no lado direito, onde a quantidade auxiliar $(\xi_2)_{aux}$ é mostrada como função do tempo normalizado t .

A comparação entre os painéis do lado esquerdo e direito da Fig. 2.16 mostra que a quantidade $(\xi_2)_{aux}$ é uma quantidade flutuante cuja amplitude ao longo do evolução temporal depende da fase das ondas compondo o pacote de onda no espaço \vec{k} . Para a semente usada na geração das fases aleatórias, observamos que a amplitude de $(\xi_2)_{aux}$ no caso de $n_\omega = 5$ é menor que no caso de $n_\omega = 1$ ou 9 , enquanto ξ_2 é uma quantidade flutuante que não mostra o aparecimento regular de máximos e mínimos que vemos na Fig. 2.15, no caso de ondas coerentes. A ausência da modulação regular no caso de ondas com fases aleatórias explica a ausência dos saltos difusivos que ocorrem para ondas coerentes, e explica a difusão contínua e relativamente regular causada pelas ondas com fases aleatórias, vista na Fig. 2.13(b).

A influência das fases aleatórias no caso de um número finito de ondas é ilustrada na Fig. 2.17, que mostra as quantidades ξ_2 e $(\xi_2)_{aux}$ para caso de $n_\omega = 5$, com outros parâmetros como na Fig. 2.16, e três diferentes conjuntos de fases aleatórias, geradas com três diferentes sementes numéricas para o gerador de números aleatórios. O painel (a) da Fig. 2.17 corresponde ao caso do painel (b) da Fig. 2.16. O painel direito mostra diferentes amplitudes para a quantidade $(\xi_2)_{aux}$, que ilustra a dependência nas fases. O painel esquerdo exibe a diferença mas tem em comum o aparecimento irregular dos máximos e mínimos de amplitudes similares nos três casos mostrados. Como uma consequência, o comportamento difusivo causado pelas ondas é aproximadamente similar para os três casos, como mostrado na Fig. 2.18, que exibe a característica de $(\delta I_2)_t$ para tempos curtos, para três casos de diferentes conjuntos de fases aleatórias usadas para obter a Fig. 2.17. Apesar da óbvia diferença entre as três curvas

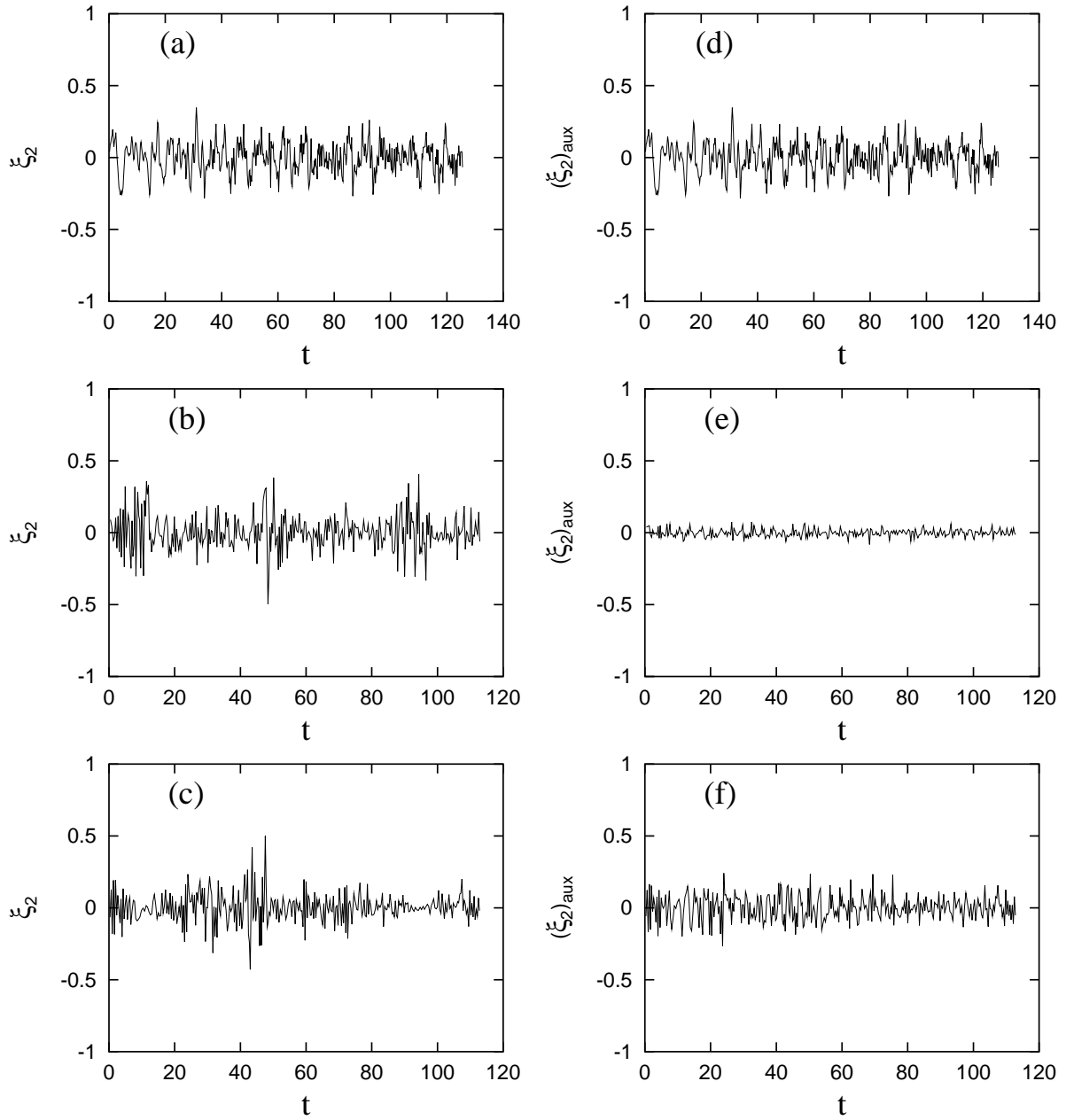


Figura 2.16: Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas com fases aleatórias, para $\alpha = 2,0$ e (a) $n_\omega = 1$, (b) $n_\omega = 5$, e (c) $n_\omega = 9$, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como uma função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo. (d) $n_\omega = 1$, (e) $n_\omega = 5$, e (f) $n_\omega = 9$.

obtidas, a inclinação relativa ao eixo t é aproximadamente a mesma nos três casos, indicando um comportamento difusivo médio similar. Uma investigação mais exaustiva requer um uso mais intensivo de cálculos numéricos, considerando um grande número de conjunto de fases aleatórias, mas acreditamos que tal estudo não conduziria a uma modificação significativa na tendência geral exposta na Fig. 2.18. É esperado que o comportamento médio obtido com diferentes conjuntos de fases aleatórias tenda a ser mais e mais similar com o aumento do número de ondas, tal que no limite de infinito número de ondas a difusão causada pelas ondas deve ser independente do conjunto particular de fases aleatórias utilizado nos cálculos.

2.4.5 Um exemplo com diferentes condições iniciais

A regularidade das condições iniciais utilizadas para as partículas para obter os resultados apresentados nas seções anteriores foi útil para gerar os mapas de Poicaré que aparecem nas Figs. 2.4(a), 2.6(a) e 2.9(a). Entretanto, é necessário investigar se resultados similares podem ser obtidos mesmo para diferentes condições iniciais ou se as condições iniciais tratadas até aqui foram peculiares. Portanto consideramos aqui outro exemplo, que supõe para as partículas valores de I_1 distribuídos aleatoriamente entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, e ω_1 e ω_2 distribuídas aleatoriamente entre 0 e 2π , com a quantidade I_2 sendo calculada de acordo com a Eq. (2.87), sujeita à condição que o valor do Hamiltoniano (H) é a mesmo para todas as partículas.

A aleatoriedade das condições iniciais nesse caso pode ser apreciada na Fig. 2.19, onde mostramos os valores iniciais de $\Delta\theta$ para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. Como na Fig 2.2 vemos que a quantidade $\Delta\theta$ ainda continua menor que a unidade para todas as partículas.

Na Fig. 2.20, apresentamos para essas condições iniciais a quantidade $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado para o caso de uma onda ($n_\omega = 1$), $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$ e $\alpha = 2,0, 4,0, \text{ e } 6,0$, considerando $n_p = 1000$. O painel (a) da Fig. 2.20 mostra a evolução até $t \approx 120$, e o painel (b) mostra a evolução estendida até $t \approx 1200$. Similarmente ao que obtivemos na Fig. 2.11 para o caso de um conjunto regular de condições iniciais, a Fig. 2.20

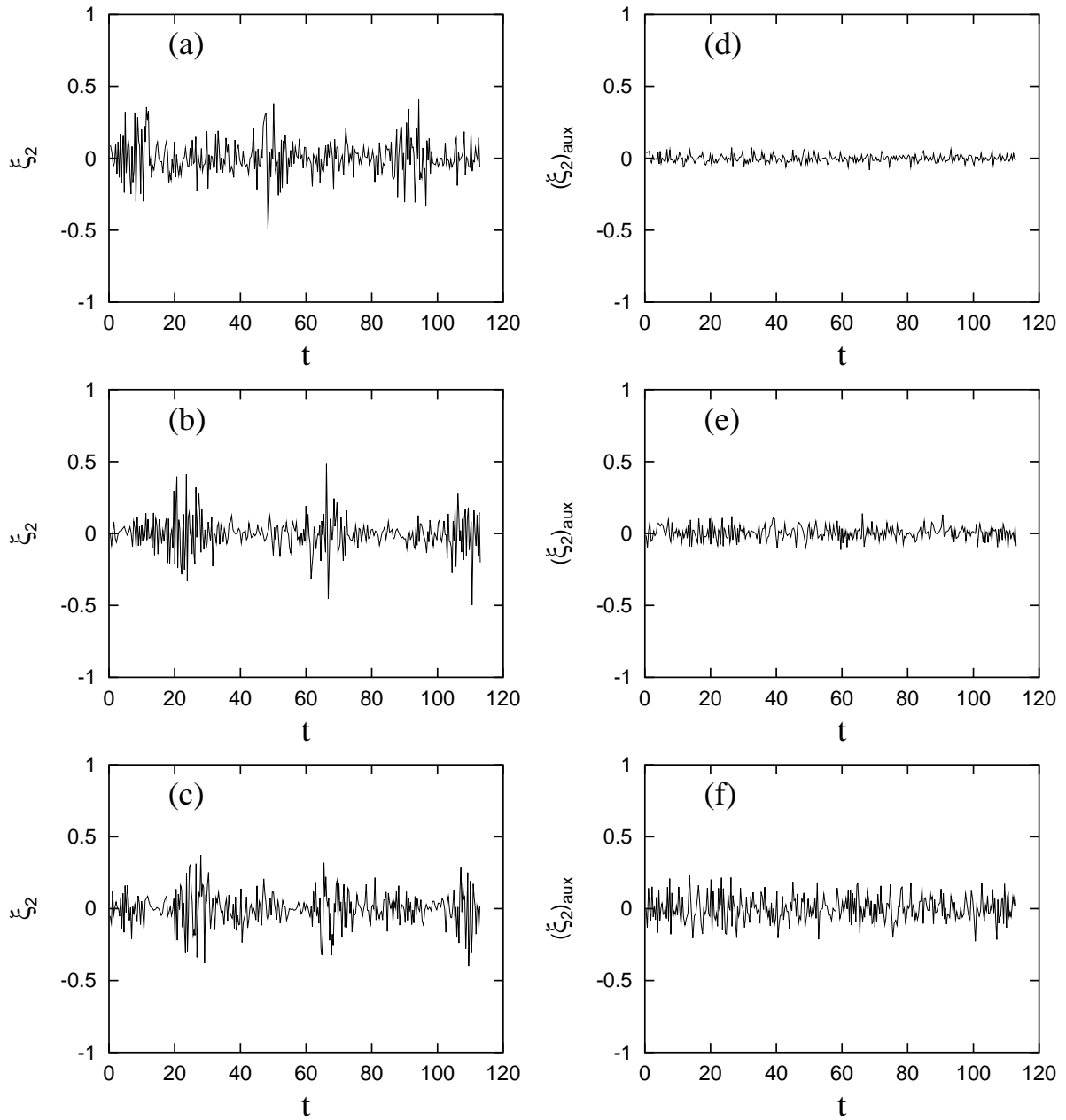


Figura 2.17: Painel esquerdo: A quantidade ξ_2 como função do tempo normalizado, no caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três diferentes conjuntos de fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para a avaliação numérica das fases, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Painel direito: A quantidade $[\xi_2]_{\text{aux}}$ como função do tempo normalizado, para os mesmos parâmetros usados no painel esquerdo.

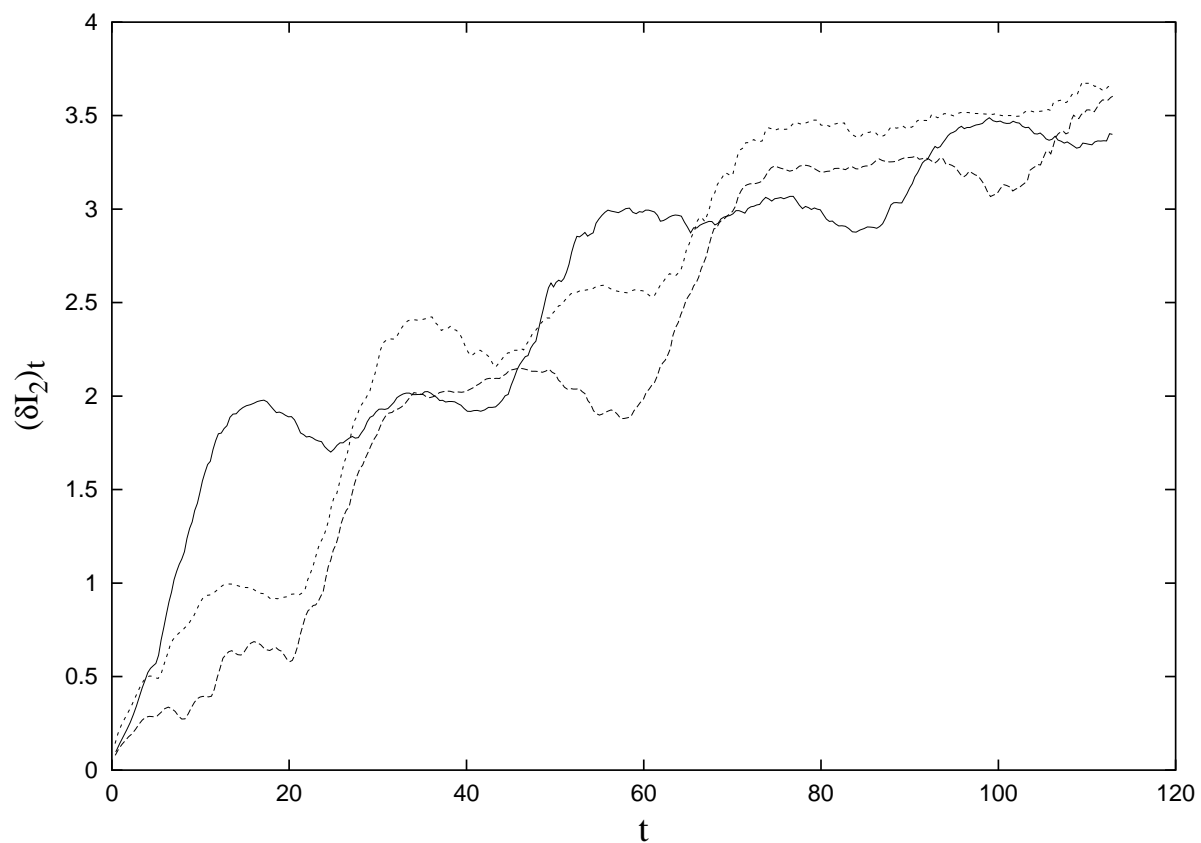


Figura 2.18: Evolução temporal de curto prazo da quantidade $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado no caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três diferentes conjuntos de fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para a avaliação numérica das fases, supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$.

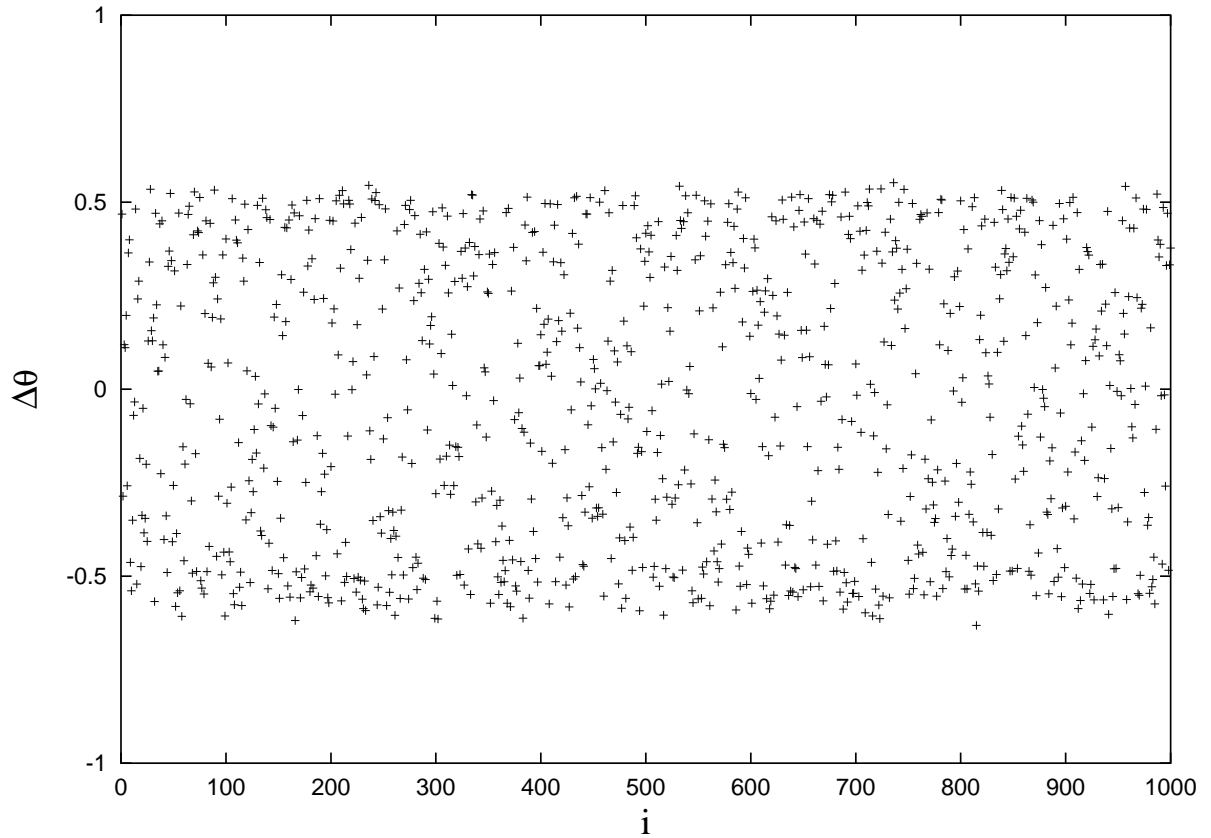


Figura 2.19: Valores iniciais de $\Delta\theta$ vs. índice de partícula i , para $n_p = 1000$ partículas, supondo $I_1 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. As condições iniciais para as partículas são atribuídas aleatoriamente, tal que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, com I_2 calculado sob a restrição que todas as partículas devem ter o mesmo valor do Hamiltoniano (H).

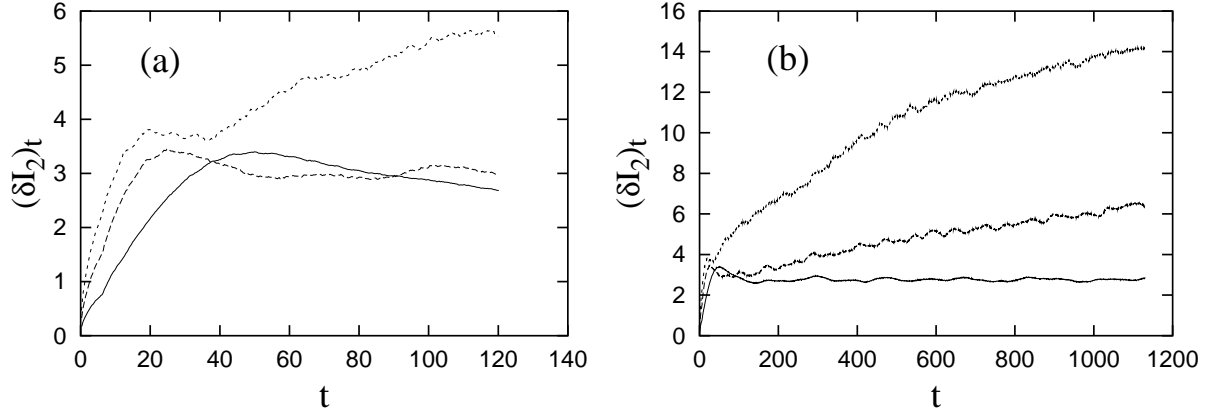


Figura 2.20: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para $n_\omega = 1$, $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ (linha cheia), $4,0$ (linha quebrada), e $6,0$ (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais para as partículas são atribuídas aleatoriamente, tal que ω_1 e ω_2 são entre 0 e 2π e I_1 entre I_1^0 e $I_1^0 + a_0$, com I_2 calculado sob a restrição de que todas as partículas devem ter o mesmo valor do Hamiltoniano (H).

mostra claramente que o comportamento difusivo de longo termo está ausente no caso de $\alpha = 2,0$, já é presente no caso de $\alpha = 4,0$, e é mais impressionante no caso de $\alpha = 6,0$.

Na Fig. 2.21 mostramos $(\delta I_2)_t$, como função do tempo normalizado para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ para $n_\omega = 1, 5$, e 9 , para o caso de ondas coerentes. O painel (a) mostra a evolução até $t \approx 120$, e o painel (b) mostra a evolução até $t \approx 1200$. A Fig. 2.21 mostra também o aparecimento progressivo da difusão no sistema, mas as curvas que mostram o crescimento de $(\delta I_2)_t$ com o tempo exibem uma inclinação média menor que no caso correspondente a uma onda e $\alpha = 2,0$, que aparece na Fig. 2.20. Também é evidente a alternância de regiões onde a curva descrevendo $(\delta I_2)_t$ aumenta com o tempo e regiões onde é aproximadamente constante e paralela ao eixo horizontal. Essa seqüência de saltos não é evidente no caso de uma onda na Fig. 2.20.

Na Fig. 2.22 mostramos $(\delta I_2)_t$, como função do tempo normalizado para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$ para $n_\omega = 1, 5$, e 9 , para o caso de ondas com fases aleatórias.

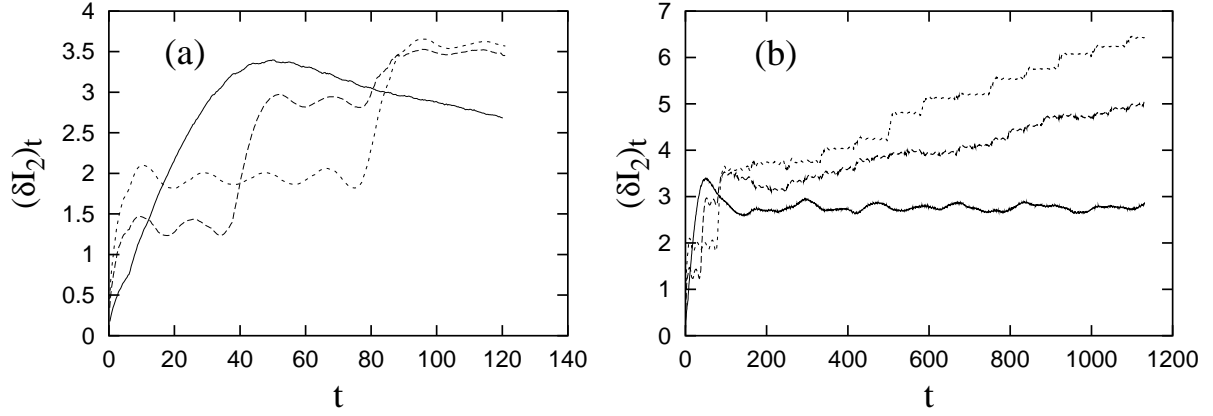


Figura 2.21: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas coerentes, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19.

O painel (a) mostra a evolução até $t \approx 120$, e o painel (b) mostra a evolução até $t \approx 1200$. Vemos que a evolução inicial de $(\delta I_2)_t$ mostra menor inclinação com respeito ao eixo t que o caso correspondente de uma onda que aparece na Fig. 2.21. Mas a evolução de longo prazo que aparece no painel (b) mostra uma difusão contínua, sem os saltos visíveis que aparecem na Fig. 2.21 para o caso de ondas coerentes, resultando que a quantidade $(\delta I_2)_t$ alcança valores maiores no caso da Fig. 2.22(b) que no caso que aparece na Fig. 2.21(b). Outra característica interessante que aparece na Fig. 2.22(b) é que os casos de $n_\omega = 5$ e $n_\omega = 9$ com fases aleatórias exibem um comportamento de longo prazo similar para $(\delta I_2)_t$, diferente do comportamento que aparece na Fig. 2.21 para o caso de ondas coerentes.

Os resultados que aparecem nas Figs. 2.20 - 2.22 são quantitativamente muito similares aos que aparecem nas Figs. 2.11 - 2.13 indicando que os resultados obtidos na seção 2.4.3 não são peculiaridades do conjunto particular de condições iniciais utilizadas nessa seção.

Finalmente a Fig. 2.23(a) mostra a evolução de curto prazo da quantidade $(\delta I_2)_t$, para três diferentes conjuntos de fases aleatórias, para $n_\omega = 5$, $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. Como na Fig. 2.18, observamos que, mesmo que as três curvas sejam diferentes entre si, o comportamento é qualitativamente o mesmo nos três casos. A Fig. 2.23(b) mostra a evolução para longo prazo, para os mesmos parâmetros. A inclinação da curva $(\delta I_2)_t$ é similar nos

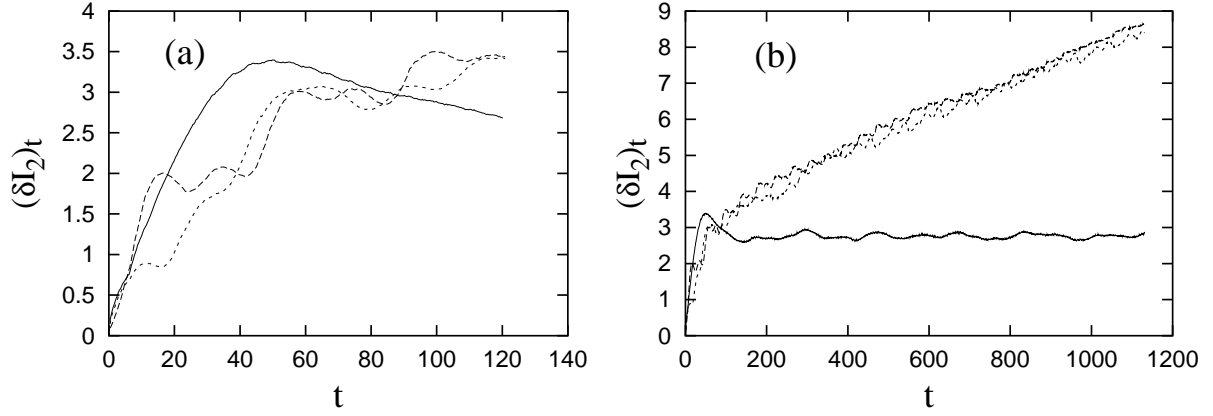


Figura 2.22: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para o caso de ondas com fases aleatórias, para $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, $\bar{\nu} = 30,0$, e $\alpha = 2,0$, para $n_\omega = 1$ (linha cheia), 5 (linha quebrada), e 9 (linha pontilhada). (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19.

três casos, indicando que elas podem ser representantes do comportamento médio a ser obtido se uma média de *ensemble* fosse feito considerando um grande número de conjuntos de fases iniciais. A Fig. 2.23(b) mostra também a curva obtida para o caso de cinco ondas com a mesma fase ($\varphi = 0$), que exibe uma inclinação menor, e portanto indica comportamento difusivo de longo prazo menos pronunciado.

2.5 As ilhas de primeira ordem.

Aqui se está interessado em determinar analiticamente o limiar de estocasticidade, ou pelo menos fazer uma estimativa a seu respeito. Neste intuito, pode-se começar encontrando as ilhas de ordem p . Para isto, precisa-se determinar, antes de mais nada, pontos fixos de p -ésima ordem. Estes podem ser encontrados fazendo estimativa da expressão [2]

$$\frac{\langle \dot{\omega}_2 \rangle}{\langle \dot{\omega}_1 \rangle} = \frac{q}{p}, \quad (2.93)$$

onde q e p são números inteiros e as médias sobre $\dot{\omega}_1$ e $\dot{\omega}_2$ são médias temporais tomadas sobre p órbitas de cíclotron (ou, equivalentemente, q períodos de onda). Quando $p = 1$, $q = n$ e quando $p = 2$, $q = 2n + 1$ [2]. No caso geral $q = p(n + 1) - 1$ para dado p .

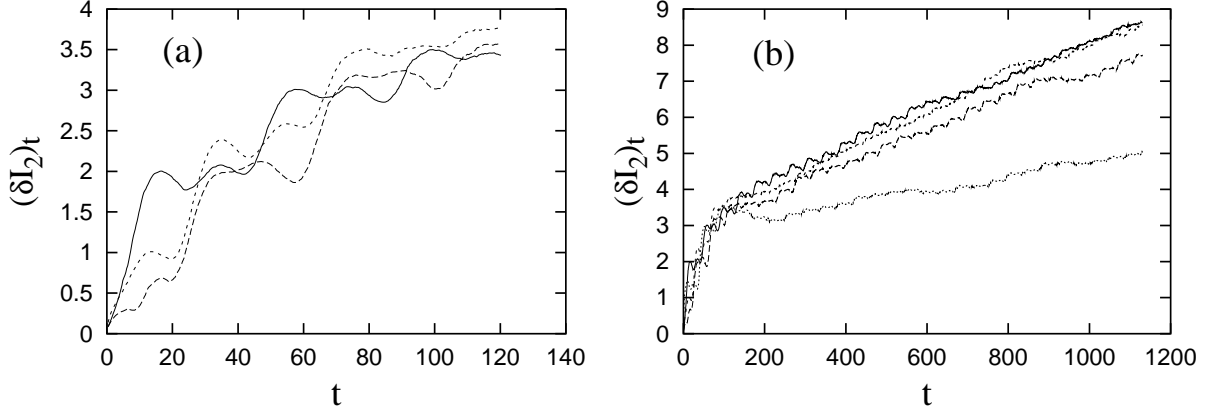


Figura 2.23: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado para o caso de ondas com fases aleatórias, para $n_\omega = 5$ e $\alpha = 2,0$, com três conjuntos de ondas com fases aleatórias, obtidas com diferentes sementes para avaliação numérica das fases. Supondo $I_1^0 = 1,25 \times 10^3$, $a_0 = 400$, e $\bar{\nu} = 30,0$. (a) evolução temporal de curto prazo; (b) evolução temporal de longo prazo. O painel (b) também mostra, abaixo das outras três, a curva obtida considerando as cinco ondas com a mesma fase ($\varphi = 0$). As condições iniciais das partículas são as mesmas atribuídas para obtenção da Fig. 2.19.

Como já visto, $\dot{\omega}_2 = \bar{\nu}$, de forma que $\langle \dot{\omega}_2 \rangle = \bar{\nu}$; isto leva a que

$$\frac{\bar{\nu}}{\langle \dot{\omega}_1 \rangle} = \frac{q}{p}. \quad (2.94)$$

Uma partícula que satisfizer a relação (2.94) completará exatamente q períodos de onda em p órbitas de cíclotron. Inicialmente vamos analisar as ilhas de primeira ordem. Neste caso, $p = 1$ e $q = n$ e portanto, a relação (2.94) assume a forma

$$\frac{\bar{\nu}}{\langle \dot{\omega}_1 \rangle} = n. \quad (2.95)$$

O valor de $\dot{\omega}_1$ é calculado a partir da expressão que aparece logo depois da (2.33).

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1}.$$

É conveniente expressar o segundo termo do Hamiltoniano (2.68) em termos de componentes de Fourier, utilizando o mesmo procedimento empregado no caso de uma onda. Usando as Eqs. (2.44), (2.45) e (2.46), temos

$$H = I_1 + \bar{\nu} I_2 - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i), \quad (2.96)$$

onde

$$r_{\omega_i} \equiv 1 + i\Delta'. \quad (2.97)$$

$$r_i \equiv r_{\omega_i}(2I_1)^{1/2}, \quad (2.98)$$

Consideraremos o caso em que $r_{E_i} = r_E = (n_\omega)^{-1/2}$, uma constante, conforme a Eq. (2.59), onde n_ω é o número de onda.

As equações do Hamiltoniano são respectivamente

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 1 - \alpha(n_\omega)^{-1/2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{1}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial I_1} J_m(r_i) \right) \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i), \\ \dot{\omega}_2 &= \bar{\nu}, \\ \dot{I}_1 &= \alpha(n_\omega)^{-1/2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{1}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) m \cos(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i), \\ \dot{I}_2 &= -\alpha(n_\omega)^{-1/2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Utilizando a relação (2.98), temos

$$\frac{\partial}{\partial I_1} J_m(r_i) = \left(\frac{\partial J_m(r_i)}{\partial r_i} \right) \left(\frac{\partial r_i}{\partial I_1} \right) = \frac{r_{\omega_i}}{R} J'_m(r_i), \quad (2.100)$$

onde

$$J'_m(r_i) \equiv \frac{\partial J_m(r_i)}{\partial r_i}. \quad (2.101)$$

Utilizando essas relações (2.100) e (2.101), temos

$$\langle \dot{\omega}_1 \rangle = 1 - \alpha(n_\omega)^{-1/2} \frac{1}{R} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J'_m(r_i) \langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i) \rangle. \quad (2.102)$$

Da expressão para \dot{I}_1 , eq. (2.99), nota-se que se pode considerar $I_1 \approx$ constante até ordem α , já que \dot{I}_1 é da ordem de α , em mais baixa ordem. Para se calcular $\langle \dot{\omega}_1 \rangle$ correto até a ordem α , vê-se que $I_1 \approx$ constante é uma aproximação consistente.

Quando consideramos a frequência da onda eletrostática do tipo híbrida inferior, estamos considerando $\bar{\nu} \gg 1$. Nesse regime, podemos aproximar o valor de $\bar{\nu}$ por um número inteiro n de valor próximo

$$\bar{\nu} \approx n, \quad \text{para } \bar{\nu} \gg 1. \quad (2.103)$$

Caso o valor de $\bar{\nu}$ não seja inteiro, a diferença entre $\bar{\nu}$ e n será chamada de δ ,

$$\bar{\delta} \equiv \bar{\nu} - n. \quad (2.104)$$

Da expressão para $\dot{\omega}_1$, eq. (2.99), nota-se que se

$$\dot{\omega}_1 = 1 + O(\alpha). \quad (2.105)$$

Podemos multiplicar por n essa relação (2.105), resultando em

$$n\dot{\omega}_1 = n + O(\alpha), \quad (2.106)$$

e utilizar a aproximação considerada na eq. (2.103) e a relação $\dot{\omega}_2 = \bar{\nu}$ da eq. (2.99) para obtermos a seguinte aproximação

$$n\dot{\omega}_1 = (n) + O(\alpha) \approx (\bar{\nu}) + O(\alpha) = (\dot{\omega}_2) + O(\alpha),$$

que resulta em

$$n\omega_1 = \omega_2 + \phi + O(\alpha), \quad (2.107)$$

onde ϕ é uma fase constante.

Multiplicando por r_{ω_i} da eq. (2.97) na eq. (2.107) obtemos

$$r_{\omega_i}n\omega_1 = r_{\omega_i}\omega_2 + r_{\omega_i}\phi + O(\alpha). \quad (2.108)$$

Estamos considerando $n \approx \bar{\nu} \gg 1$, e podemos aproximar $r_{\omega_i}n \approx n$

$$n\omega_1 \approx r_{\omega_i}\omega_2 + r_{\omega_i}\phi + O(\alpha), \quad (2.109)$$

e desta forma obtemos a relação

$$n\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 \approx r_{\omega_i}\phi \equiv \phi_i, \quad (2.110)$$

para α em mais baixa ordem.

Utilizando a relação (2.110) podemos estimar a média $\langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i} - \varphi_i) \rangle$ que aparece na eq. (2.102)

$$\langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 - \varphi_i) \rangle = \langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle \cos(\varphi_i) - \langle \cos(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle \sin(\varphi_i). \quad (2.111)$$

Desta forma, se $m = n$, $n\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2 = \phi_i$. Considerando todos os valores de m temos,

$$\langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle = \begin{cases} \sin(\phi_i) & \text{se } m = n, \\ 0 & \text{se } m \neq n, \end{cases} \quad (2.112)$$

$$\langle \cos(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle = \begin{cases} \cos(\phi_i) & \text{se } m = n, \\ 0 & \text{se } m \neq n. \end{cases} \quad (2.113)$$

Desta forma, pode-se escrever as médias em (2.111) como sendo

$$\langle \sin(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle = \delta_{m,n} \sin(\phi_i), \quad (2.114)$$

$$\langle \cos(m\omega_1 - r_{\omega_i}\omega_2) \rangle = \delta_{m,n} \cos(\phi_i), \quad (2.115)$$

onde $\delta_{m,n}$ é a função delta de Kronecker.

No cálculo de $\langle \dot{\omega}_1 \rangle$, a função delta de Kronecker eliminará todos os termos da soma sobre m , exceto o termo $m = n$. Isto significa que $\langle \dot{\omega}_1 \rangle$ pode ser escrito como

$$\langle \dot{\omega}_1 \rangle = 1 - \alpha(n_\omega)^{1/2} \frac{\Upsilon}{R}, \quad (2.116)$$

onde

$$\Upsilon \equiv \sum_{i=-n_i}^{n_i} J'_n(r_i) \frac{\sin(\psi_i)}{n_\omega}, \quad (2.117)$$

e

$$\psi_i \equiv \phi_i - \varphi_i.$$

Pode-se substituir o resultado (2.116) em (2.95) para encontrar os pontos fixos das ilhas de primeira ordem

$$\frac{\bar{\nu}}{1 - \alpha(n_\omega)^{1/2} \Upsilon/R} = n. \quad (2.118)$$

Podemos acompanhar como os pontos fixos das ilhas de primeira ordem variam de acordo com a variação da intensidade de perturbação da onda eletrostática, relacionada com o parâmetro α pela eq. (2.55), lembrando que por definição α é um valor positivo, $\alpha \geq 0$. Utilizando a eq. (2.118), podemos determinar essa relação

$$\alpha = \left| \frac{R\bar{\delta} (n_\omega)^{-1/2}}{n \Upsilon} \right|. \quad (2.119)$$

O limiar procurado é o menor valor de α , e conseqüentemente o menor valor de E_0 , Eq. (2.56), que satisfaz a condição de existência das ilhas de primeira ordem. Isto significa tomar os valores extremantes de $|\Upsilon|$, determinado por $\max(|\Upsilon|)$, desta forma o limiar para formação de ilhas de primeira ordem é determinado por

$$\alpha_{th}(n_\omega \text{ ondas}) = \left| \frac{R\bar{\delta}}{n} \right| \frac{(n_\omega)^{-1/2}}{\max(|\Upsilon|)}. \quad (2.120)$$

Analisaremos agora os casos de uma onda e de várias ondas, nas sub-seções a seguir.

2.5.1 O caso de uma onda.

Para o caso de uma onda ($n_\omega = 1$), temos $r_{\omega_0} = 1$, $r_0 = R$ e $\psi_0 = \phi$, grandezas que utilizadas na definição dada pela eq. (2.117) implicam em

$$|\Upsilon| = |J'_n(R) \sin(\phi)| \rightarrow \max(|\Upsilon|) = |J'_n(R)| \max(|\sin(\phi)|) = |J'_n(R)|. \quad (2.121)$$

Utilizando essa eq. (2.121) na eq. (2.120) obtemos o resultado obtido por Karney na Ref. [2],

$$\alpha_{th}(n_\omega = 1) = \left| \frac{R\bar{\delta}}{nJ'_n(R)} \right|. \quad (2.122)$$

Nessa subseção, apresentaremos os principais resultados obtido por Karney nas Refs. [7, 2] e analisaremos o limiar de estocasticidade para $R \approx \bar{\nu} \gg 1$. Discutindo sobre a estocasticidade, Karney encontrou que, quando uma onda puramente super-harmônica interage com os íons, aparece uma ilha de primeira ordem no espaço de fase ângulo-ação, para uma amplitude moderada de onda perturbativa. Com o aumento da intensidade da perturbação, ilhas de segunda ordem aparecem dentro de ilhas de primeira ordem. O movimento se torna estocástico se essas ilhas de segunda ordem se sobrepõem [26, 27]. Foi verificado também que uma onda sub-harmônica pode produzir ilhas de ordem mais alta que se sobrepõem e induzem estocasticidade, quando é ultrapassado um certo limiar da amplitude de onda perturbativa dado pela relação

$$\alpha_{st} \geq R[\bar{\nu}|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1} f(\bar{\delta}), \quad (2.123)$$

onde $H_n^{(1)}(R)$ é a função de Hankel de primeira espécie, e $f(\bar{\delta})$ é uma fração que foi estimada numericamente na Ref. [2] (tabela (2.2)), sendo verificado que ela varia de no máximo 20% em torno de um valor constante. Foi observado também que o limiar de estocasticidade é bastante insensível à variação do valor de $\bar{\delta}$, na faixa entre $-1/2$ e $1/2$.

Utilizando $f(\bar{\delta}) \approx 1/4$ na eq. (2.123), é obtido o seguinte limiar para a estocasticidade,

$$\alpha_{st} \geq \frac{1}{4} R[\bar{\nu}|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1}. \quad (2.124)$$

É particularmente interessante encontrar o limiar para estocasticidade para um dado valor de $\bar{\nu}$ a uma certa energia dos íons. A energia dos íons é medida pela ação I_1 , que é relacionada com o raio de Larmor normalizado R , conforme Eq. (2.39).

Para $R \approx \bar{\nu} \gg 1$, utilizando expansões da função de Henkel na eq. (2.124), se encontra [2],

$$\alpha_{st} \geq \frac{\bar{\nu}^{2/3}}{4}. \quad (2.125)$$

| $\bar{\delta}$ | $f(\bar{\delta})$ |
|----------------|-------------------|
| -0,38 | 0,26 |
| -0,03 | 0,24 |
| 0 | 0,26 |
| 0,11 | 0,23 |
| 0,23 | 0,25 |
| 0,28 | 0,23 |
| 0,42 | 0,19 |

Tabela 2.2: Valores de $f(\bar{\delta})$ encontrado na Ref. [2] pela determinação do limiar de estocasticidade para $29\frac{1}{2} < \bar{\nu} < 30\frac{1}{2}$ para $R \approx 47,5$.

Por outro lado, utilizando na eq. (2.122) valores aproximados das funções de Bessel para $R \approx \bar{\nu} \approx n \gg 1$ [29],

$$J_{\bar{\nu}}(\bar{\nu}) \approx (\bar{\nu})^{-1/3}, \quad (2.126)$$

$$J'_{\bar{\nu}}(\bar{\nu}) \approx (\bar{\nu})^{-2/3}, \quad (2.127)$$

e utilizando $|\bar{\delta}| \approx 1/4$, podemos ver que o limiar para ilha de primeira ordem fica dado por

$$\alpha_{th} \approx \frac{\bar{\nu}^{2/3}}{4}. \quad (2.128)$$

Isso significa que para valores $R \approx \bar{\nu} \approx n \gg 1$, o limiar de estocasticidade já acontece desde o nível de intensidade de perturbação do limiar da ilha de primeira ordem

$$\alpha_{st}(n_{\omega} = 1) \geq \alpha_{th}(n_{\omega} = 1) = \frac{\bar{\nu}^{2/3}}{4}, \quad (2.129)$$

e nesse caso as ilhas de ordem maior que um não influem muito para a determinação do limiar de estocasticidade.

Para $R < \bar{\nu}$, a partícula nunca entra em ressonância com a onda, e o limite inferior da região estocástica é dado aproximadamente por [2]

$$R_{inf} = \bar{\nu} - \alpha^{1/2}. \quad (2.130)$$

A estocasticidade para $R > \bar{\nu}$ acontece com a sobreposição de ilhas de segunda ordem e ilhas de ordens maiores, e ocorre quando é ultrapassada a amplitude definida na eq. (2.124). A estimativa de ilhas de ordem maior que um será conduzida no capítulo 5.

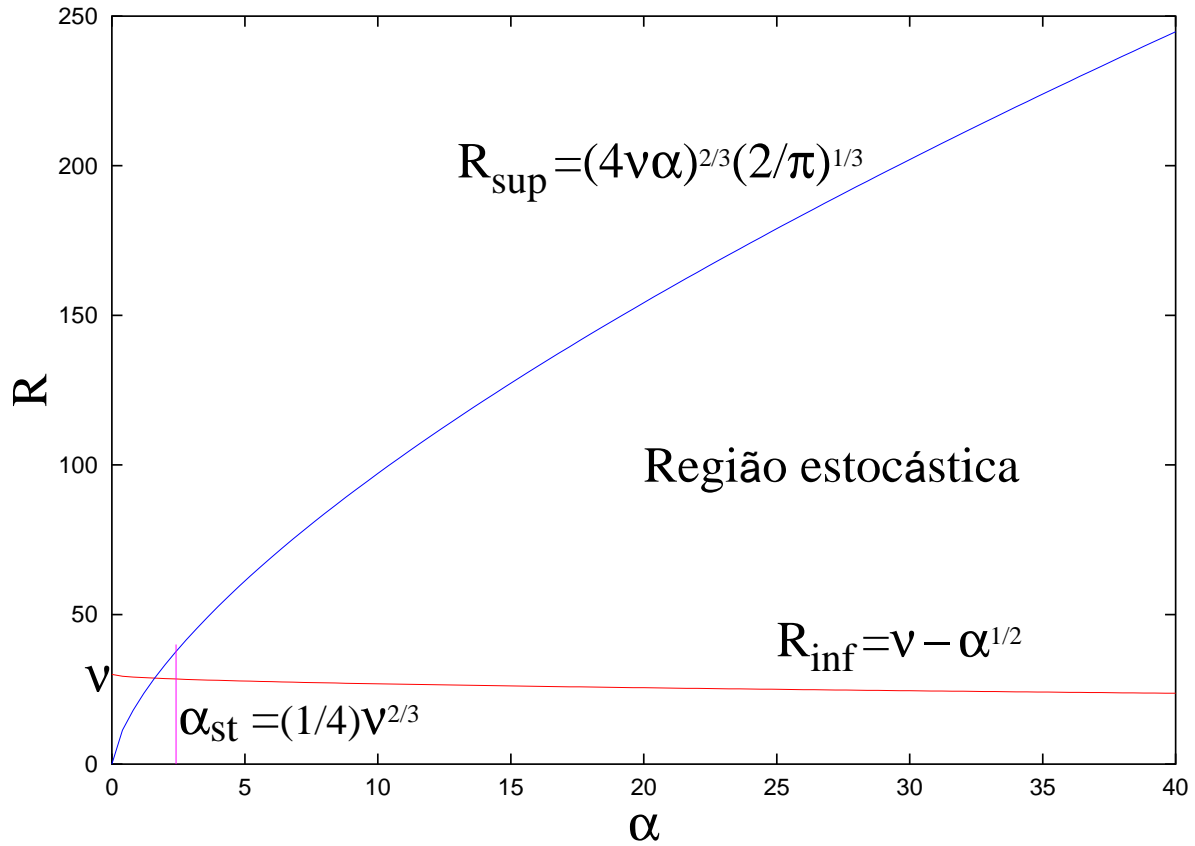


Figura 2.24: Região de estocasticidade, para o caso de uma onda, como uma função de α e R para $\bar{\nu} = 30, 0$. A região é limitada pelas eqs. (2.129), (2.130) e (2.131).

Para $R \gg \bar{\nu}$, temos o limite superior para a região estocástica, obtido a partir da expansão da eq. (2.124) para $R \gg \bar{\nu}$ [2],

$$R_{sup} = (4\bar{\nu}\alpha)^{2/3}(2/\pi)^{1/3}. \quad (2.131)$$

Na fig. (2.24) é apresentada a região onde acontece a estocasticidade, para o caso de uma onda, como uma função de α e R , para um valor de $\bar{\nu}$ fixo.

2.5.2 O caso de várias ondas.

Consideraremos agora, o caso de várias ondas. Vimos que para o caso de uma onda, a estocasticidade já acontece desde o nível de intensidade de perturbação do limiar da ilha de primeira ordem quando $R \approx \bar{\nu} \approx n \gg 1$. Faremos uma análise detalhada para esse caso, para determinar o comportamento do limiar de estocasticidade no caso de várias ondas.

É razoável supor que a estocasticidade para o caso de várias ondas, quando $R \approx \bar{\nu} \approx n \gg 1$, acontece a partir de

$$\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas}) \geq \alpha_{th}(n_\omega \text{ ondas}). \quad (2.132)$$

A fim de compararmos diretamente com o caso de uma onda, utilizando as eqs. (2.120) e (2.122), definiremos a seguinte razão

$$r_\alpha \equiv \frac{\alpha_{th}(n_\omega \text{ ondas})}{\alpha_{th}(n_\omega = 1)} = \frac{(n_\omega)^{-1/2}}{\max(|\Xi|)}, \quad (2.133)$$

onde

$$\max(|\Xi|) \equiv \max \left(\left| \frac{\Upsilon}{J'_n(R)} \right| \right) = \max \left(\left| \frac{1}{J'_n(R)} \sum_{i=-n_i}^{n_i} J'_n(r_i) \frac{\sin(\psi_i)}{n_\omega} \right| \right). \quad (2.134)$$

Utilizando a Eq. (2.133), podemos expressar a Eq. (2.132) da seguinte forma

$$\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas}) \geq r_\alpha \alpha_{th}(n_\omega = 1). \quad (2.135)$$

Podemos agora utilizar a seguinte aproximação,

$$r_i = r_\omega R \approx R. \quad (2.136)$$

Dessa maneira, temos

$$J'_n(r_i) \approx J'_n(R), \quad (2.137)$$

o que resulta em

$$\max(|\Xi|) \approx \max \left(\left| \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\sin(\psi_i)}{n_\omega} \right| \right). \quad (2.138)$$

Utilizando a eq. (2.138), obtemos o valor aproximado de r_α ,

$$r_\alpha \approx \frac{(n_\omega)^{-1/2}}{\max(|\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\sin(\psi_i)}{n_\omega}|)}. \quad (2.139)$$

Quando consideramos o caso de ondas coerentes (fases iguais), temos

$$\max \left(\left| \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\sin(\psi_i)}{n_\omega} \right| \right) = 1, \quad (2.140)$$

que resulta em

$$r_\alpha(n_\omega, \text{ coerentes}) = (n_\omega)^{-1/2}. \quad (2.141)$$

Para o caso de ondas incoerentes, estimamos o valor de r_α mediante simulações. Nesse caso, consideramos 10000 conjuntos de fases aleatórias para cada quantidade de ondas n_ω , para determinar numericamente o valor máximo de Ξ , de acordo com a Eq. (2.134), e assim

| n_ω | $r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes})$ | $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (A)})$ | $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (B)})$ |
|------------|--|--|--|
| 3 | 0,57735 | 0,60998 | 0,57790 |
| 5 | 0,44721 | 0,48017 | 0,46134 |
| 7 | 0,37796 | 0,41919 | 0,40636 |
| 9 | 0,33333 | 0,37023 | 0,35889 |

Tabela 2.3: Estimativa dos valores de r_α para número de ondas n_ω pequeno, para $R = \bar{\nu} = n = 30,0$. Consideramos para cada valor n_ω , 10000 conjuntos de fases aleatórias, e calculamos r_α usando a Eq. (2.133). A coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes})$ apresenta r_α para o caso de ondas coerentes, usando a Eq. (2.134) para calcular o denominador da Eq. (2.133). Na coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (A)})$ temos r_α para o caso de ondas incoerentes, também usando a Eq. (2.134). Finalmente, na coluna indicada por $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (B)})$ temos o caso de ondas incoerentes, usando a forma aproximada dada pela Eq. (2.139).

calcular o valor da Eq. (2.133), que é o caso geral. Calculamos também um valor aproximado, determinando numericamente a Eq. (2.138) para calcular o valor da Eq. (2.139). Para valor pequeno de n_ω , obtemos os valores apresentados na tabela (2.3).

Podemos ver que as aproximações utilizadas, Eq. (2.136) e Eq. (2.137), são adequadas. A vantagem de utilizar as aproximações é que podemos fazer simulações mais rápidas do que quando consideramos o cálculo exato dado pela Eq. (2.134), além de não depender mais do parâmetro R , que é relacionado com a energia dos íons.

Na tabela (2.4) apresentamos os valores de α_{st} para os quais começa a estocasticidade. Para o caso de uma onda o cálculo é feito usando a Eq. (2.129), e para o caso de várias ondas utilizamos os valores de r_α apresentados na tabela (2.3) para calcular a Eq. (2.135).

| n_ω | $\alpha_{st}(n_\omega, \text{coerentes})$ | $\alpha_{st}(n_\omega, \text{incoerentes})$ |
|------------|---|---|
| 1 | 2,42 | — |
| 3 | 1,40 | 1,40 |
| 5 | 1,08 | 1,12 |
| 7 | 0,91 | 1,00 |
| 9 | 0,80 | 0,87 |

Tabela 2.4: Estimativa dos valores de α_{st} para ondas coerentes e incoerentes, para $R = \bar{\nu} = 30,0$.

A estimativa dos valores de α_{st} para $R \approx \bar{\nu}$ pode ser averiguada analisando a quantidade $(\delta I_2)_t$ definida na eq. (2.90) em função do tempo normalizado. Para essa análise, consideramos $\bar{\nu} = 30,0$ e $n_p = 1000$ partículas, distribuídas na região $30,0 < R < 36,0$ ($I_1 = 4,50 \times 10^2$ e $a_0 = 198$) e $\Delta = 1,0 \times 10^{-2}$. Para cada valor de n_ω (número de ondas no pacote), consideramos quatro valores de $\alpha(n_\omega \text{ ondas})$, dados por $\alpha(n_\omega \text{ ondas}) \approx \alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas})/2$, $\alpha(n_\omega \text{ ondas}) \approx \alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas})$, $\alpha(n_\omega \text{ ondas}) > \alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas})$ e $\alpha(n_\omega \text{ ondas}) \approx 2\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas})$, onde os α_{st} são os valores apresentados na tabela (2.4). Esses valores de α , utilizados nas simulações, são apresentados na tabela (2.5).

| n_ω | $\alpha < \alpha_{st}/2$ | $\alpha = \alpha_{st}$ | $\alpha > \alpha_{st}$ | $\alpha > 2\alpha_{st}$ |
|------------|--------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1(c) | 1,00 | 2,42 | 3,00 | 5,00 |
| 3(i) | 0,61 | 1,40 | 1,83 | 3,05 |
| 5(i) | 0,48 | 1,12 | 1,44 | 2,40 |
| 7(i) | 0,42 | 1,00 | 1,26 | 2,09 |
| 9(i) | 0,37 | 0,87 | 1,11 | 1,85 |

Tabela 2.5: Valores de α para ondas coerentes (c) e incoerentes (i), para $R = \bar{\nu} = 30,0$, utilizados na simulação.

Os resultados para o caso $n_\omega = 1$ são apresentados na Fig. (2.25). Na Fig. (2.26) são mostrados os resultados obtidos para o caso de $n_\omega = 3$, ondas incoerentes. Na Fig. (2.27) temos os resultados obtidos com $n_\omega = 5$ ondas incoerentes, na Fig. (2.28) os resultados obtidos com $n_\omega = 7$ ondas incoerentes, e na Fig. (2.29) os resultados obtidos com $n_\omega = 9$ ondas incoerentes. Esse conjunto de figuras, de (2.25) a (2.29), mostra que são adequadas as estimativas dos valores de α_{st} apresentadas na tabela (2.4).

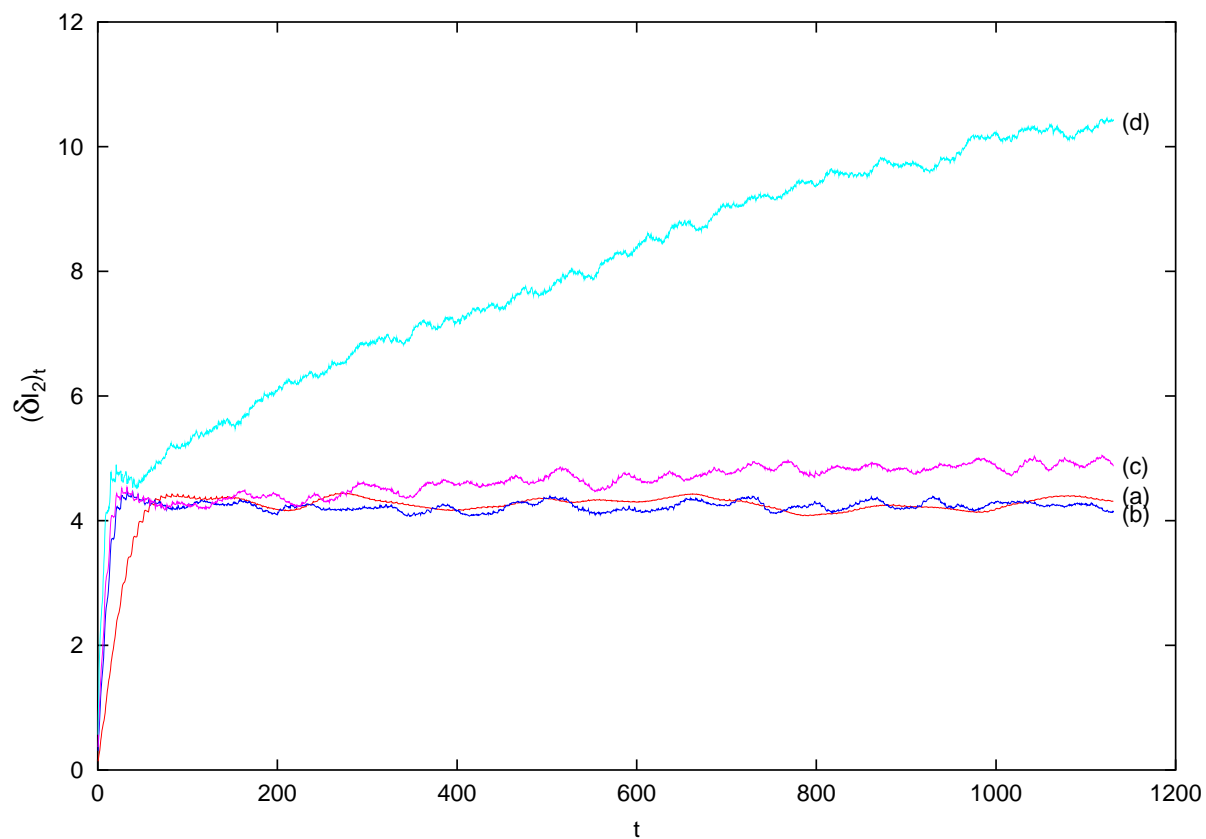


Figura 2.25: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de uma onda, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 1,00$, (b) $\alpha = 2,42$, (c) $\alpha = 3,00$, e (d) $\alpha = 5,00$.

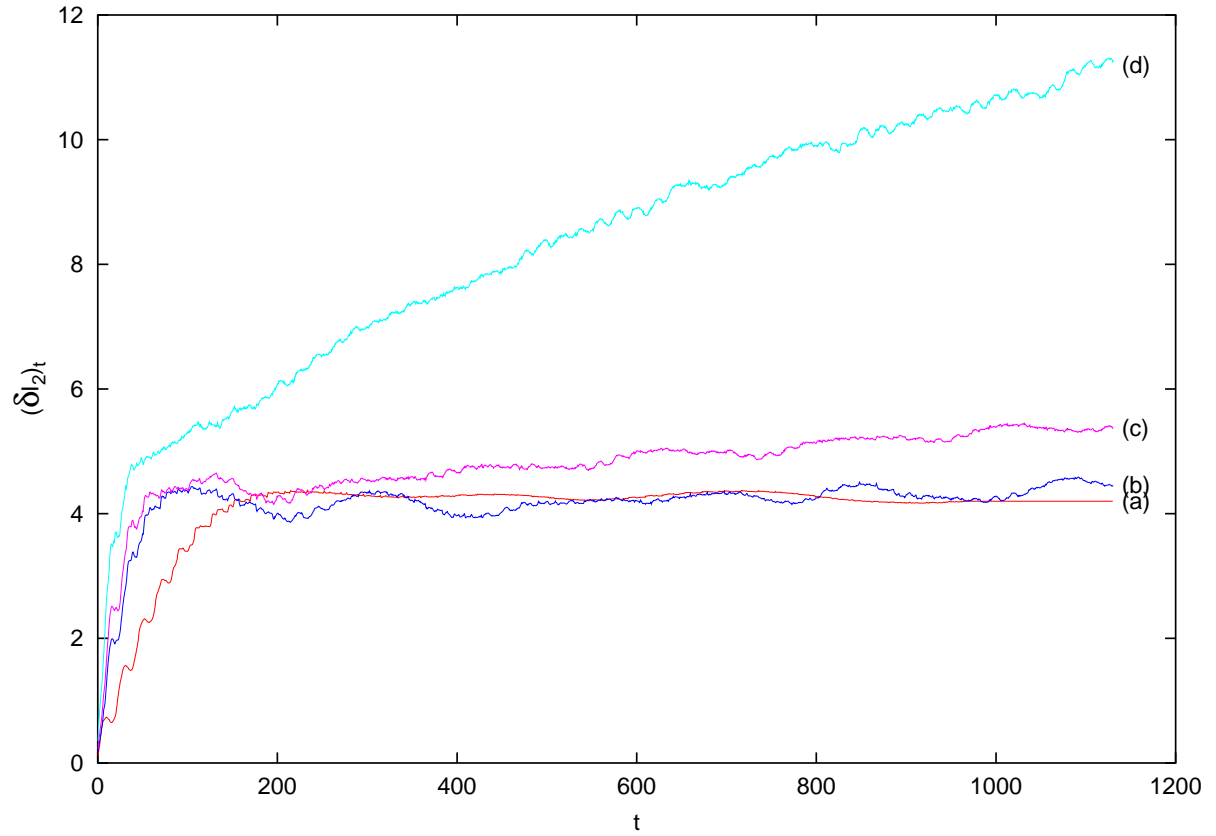


Figura 2.26: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 3$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,61$, (b) $\alpha = 1,40$, (c) $\alpha = 1,83$, e (d) $\alpha = 3,05$.

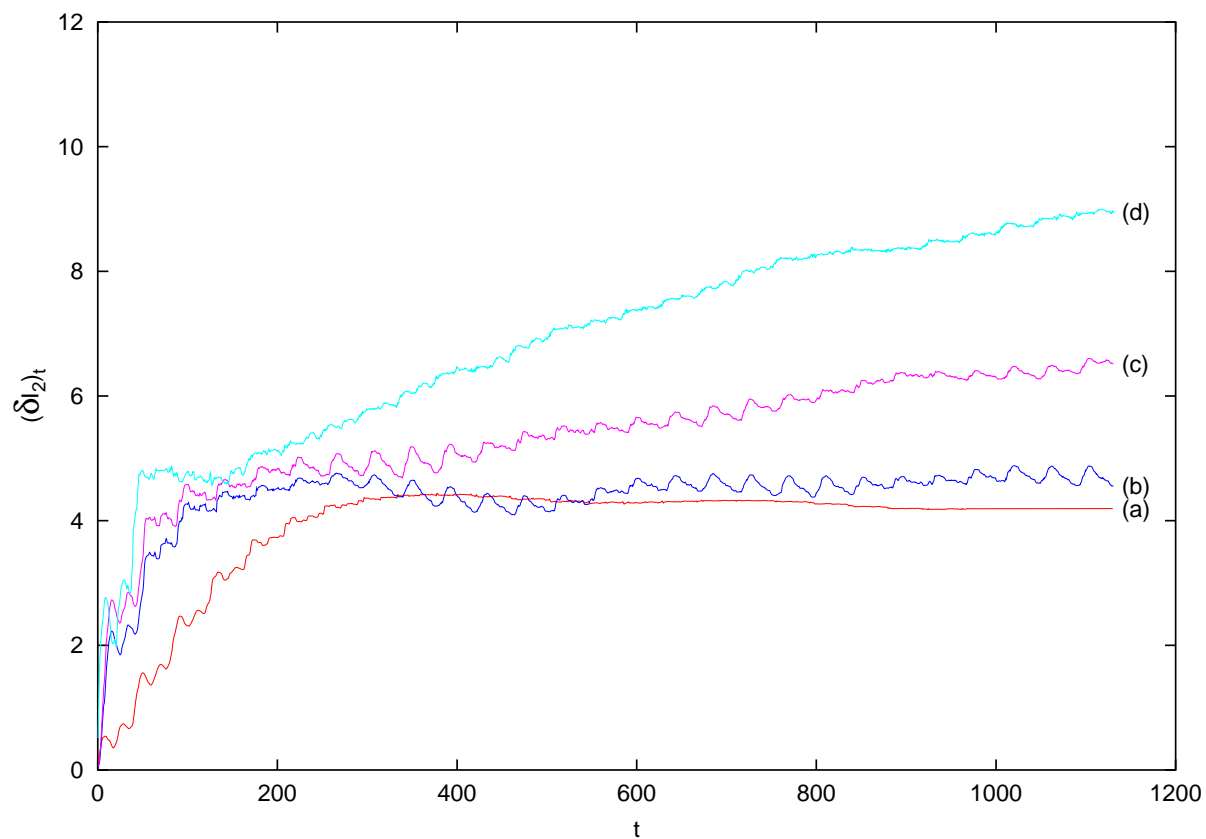


Figura 2.27: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 5$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,48$, (b) $\alpha = 1,12$, (c) $\alpha = 1,44$ e (d) $\alpha = 2,40$.

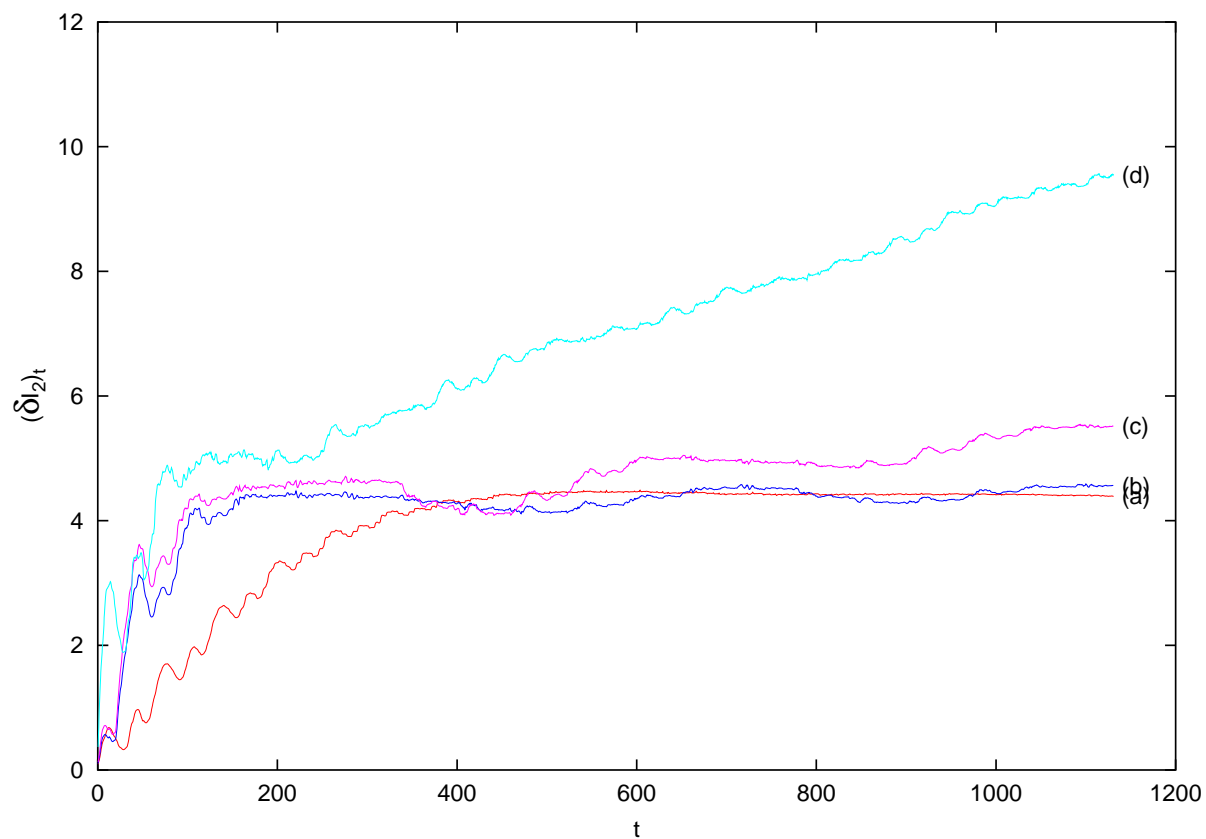


Figura 2.28: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 7$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,42$, (b) $\alpha = 1,00$, (c) $\alpha = 1,26$ e (d) $\alpha = 2,09$.

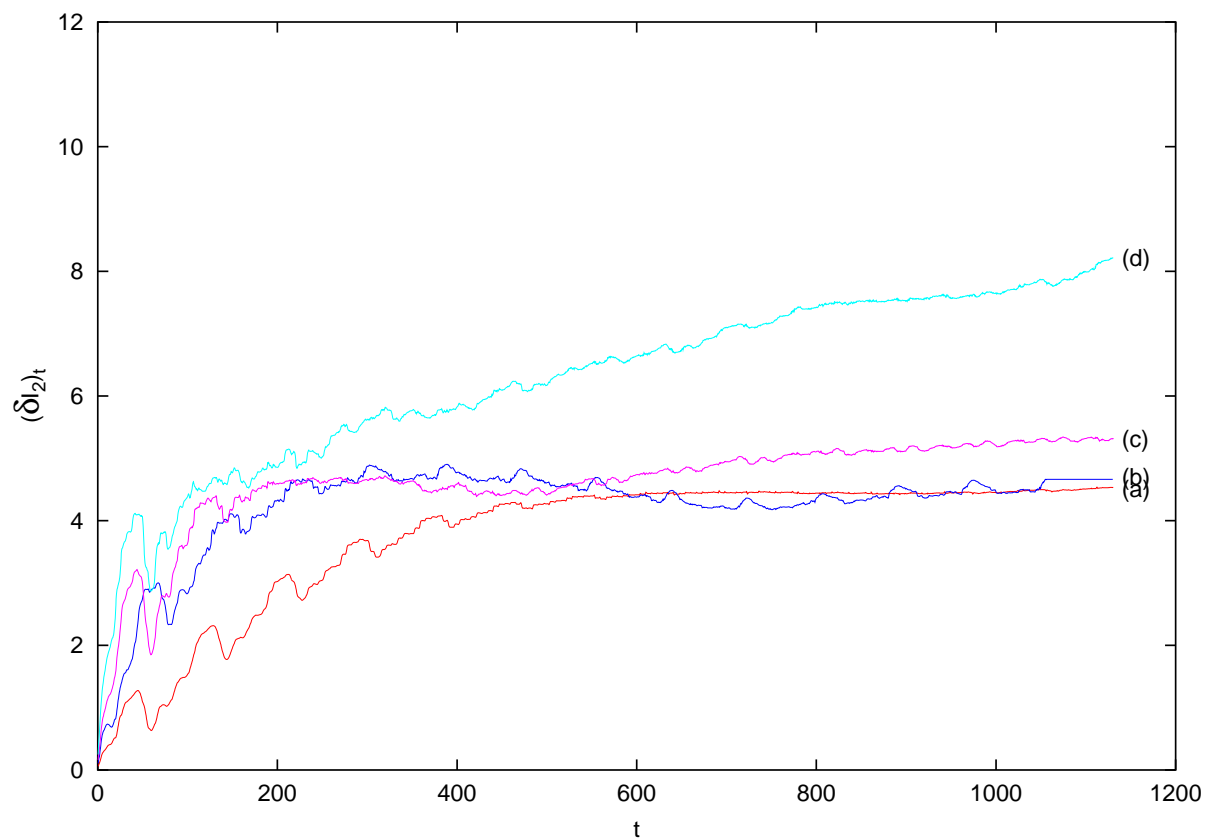


Figura 2.29: $(\delta I_2)_t$ como função do tempo normalizado, para caso de $n_\omega = 9$ ondas incoerentes, para $30,0 \leq R \leq 36$ ($I_1^0 = 4,5 \times 10^2$ e $a_0 = 198$), $n_p = 1000$, $\Delta = 10^{-2}$, $\bar{\nu} = 30,0$, e (a) $\alpha = 0,37$, (b) $\alpha = 0,87$, (c) $\alpha = 1,11$ e (d) $\alpha = 1,85$.

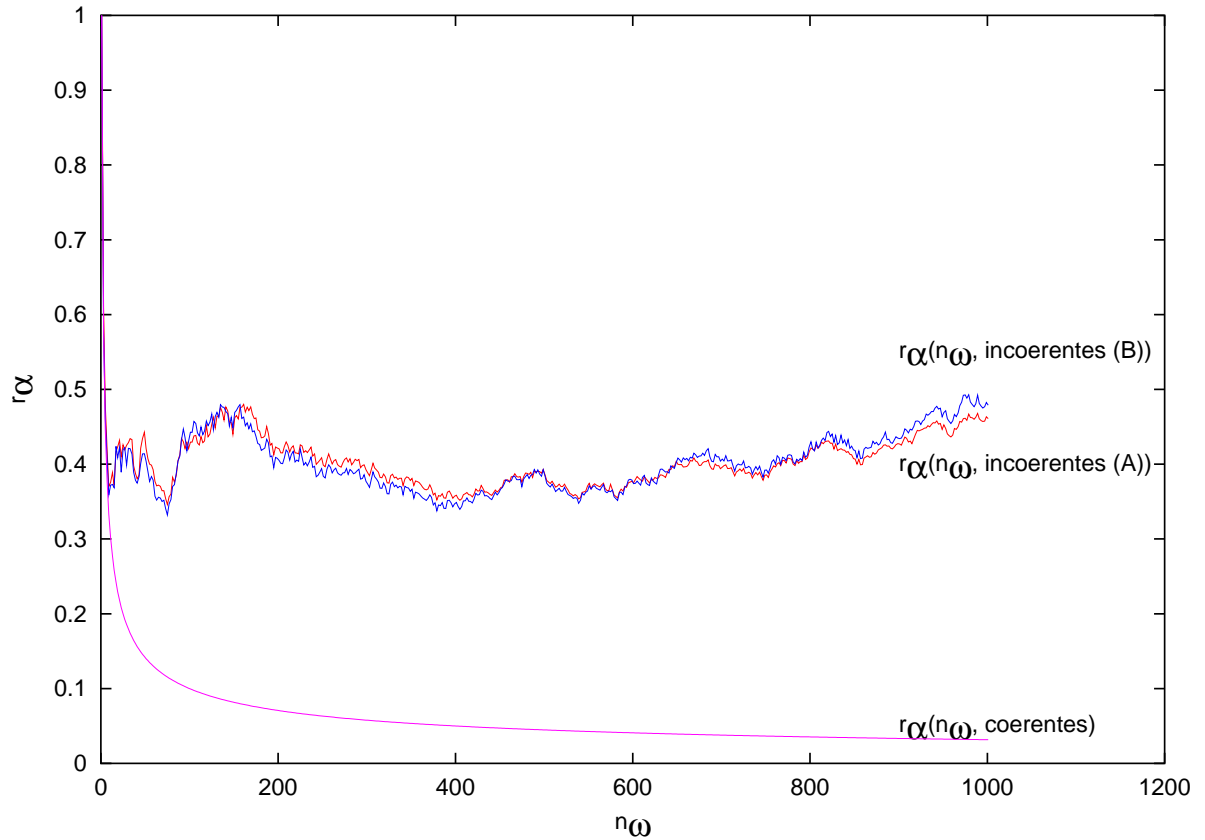


Figura 2.30: Gráfico dos valores de r_α para número de ondas no pacote (n_ω) variando entre 1 e 1001, para $R = \bar{\nu} = n = 30, 0$. Para cada valor n_ω , foram levados em conta 10000 conjuntos de fases aleatórias. (a) $r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes})$: Eqs. (2.133) e (2.134) considerando ondas coerentes (o que equivale a usar a Eq. (2.141)); (b) $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (A)})$: Eqs. (2.133) e (2.134) considerando ondas incoerentes (sem aproximação acerca de r_i); (c) $r_\alpha(n_\omega, \text{incoerentes (B)})$: Eqs. (2.133) e (2.138) considerando ondas incoerentes, usando a aproximação $r_i \simeq R$ (o que equivale a usar a Eq. (2.139)).

Para completar os resultados numéricos apresentados nesse capítulo, complementamos as estimativas de valores de r_α apresentadas na tabela (2.3), mostrando na Fig. (2.30) os valores de r_α obtidos para valores de n_ω variando de 1 a 1001. Assim como na tabela (2.3), os valores de r_α mostrados na Fig. (2.30) foram obtidos considerando o valor máximo de Ξ , entre os valores obtidos considerando 10000 conjuntos de fases aleatórias. Da Fig. (2.30) podemos ver que o valor de r_α para ondas coerentes varia com o número de ondas com $(n_\omega)^{-1/2}$, conforme previsto pela Eq. (2.141). No caso de ondas incoerentes, a Fig. (2.30) mostra que o valor de r_α é aproximadamente constante, dado por

$$\frac{1}{3} < r_\alpha(n_\omega, \text{ incoerente}) < \frac{1}{2}, \quad \text{para } n_\omega \gg 1. \quad (2.142)$$

Para estimar a estocasticidade para $R > \bar{\nu} \gg 1$ é necessário fazer estimativas acerca do valor limiar para formação de ilhas de ordens mais altas. Essa estimativa é feita no capítulo (5).

2.6 Observações finais.

Nesse capítulo generalizamos a discussão sobre a dinâmica estocástica de íons energéticos por ondas do tipo híbrida inferior, considerando casos onde um conjunto de ondas com frequências similares está presente no sistema. A tarefa foi realizada por generalização dos procedimentos utilizados nas Refs. [7, 2, 8], restringindo a análise para o caso de espectro suficientemente estreito, tal que se possa considerar que todas as ondas presentes no sistema têm a mesma velocidade de fase. A formulação utilizada leva em conta que cada onda pode ter fases aleatórias, com o caso de ondas coerentes como um caso particular.

A análise teórica do sistema mostrou que o estágio inicial da evolução temporal no caso de ondas coerentes é governado por um Hamiltoniano similar àquele que aparece nas Refs. [2, 8], mas com o limiar para comportamento estocástico no estágio inicial menor que o limiar correspondente obtido para o caso de apenas uma onda. No caso limite de espectro contínuo, com número infinito de ondas coerentes, nossa análise mostrou que o limiar tende a desaparecer e que o comportamento estocástico nos estágios iniciais deve ocorrer para qualquer valor da intensidade da onda.

Comparando o caso de apenas uma onda com o caso de número finito de ondas coerentes, para razão de difusão inicial similar, mostramos que no caso de múltiplas ondas a difusão ocorre em picos periódicos, o que reduz a eficiência do processo difusivo.

Considerando a situação mais geral em que as ondas têm fases aleatoriamente distribuídas, a difusão obtida para tempos mais longos se mostrou mais significativa do que no caso de ondas coerentes, para o mesmo número de ondas. Enquanto que no caso de ondas coerentes o comportamento difusivo ocorre em picos periódicos, o comportamento difusivo obtido para o caso de fases aleatórias ocorre continuamente ao longo da evolução temporal. Esse resultado é de particular interesse, visto que o caso de ondas com fases aleatórias é mais representativo do ponto de vista de investigação, com um conjunto finito de ondas, do efeito de largura finita do pacote de ondas, como os que se encontram em experimentos de interação onda-partícula em tokamaks. Uma representação mais próxima pode ser obtida pela aplicação de uma média de *ensemble* sobre o conjunto inicial de fases aleatórias, um procedimento que pode ser bastante custoso do ponto de vista de recursos numéricos, e aparentemente não parece ser necessário para obter as características gerais do comportamento difusivo que pode ser o resultado da interação onda-partícula. Uma alternativa a esse procedimento de média de *ensemble* pode ser o cálculo da evolução temporal da interação onda-partícula considerando ondas incoerentes com fases aleatoriamente escolhidas, que mudam também aleatoriamente ao longo do tempo, pois a região caótica têm propriedade ergódica. Cálculos feitos considerando alguns conjuntos de condições iniciais levaram a resultados qualitativamente muito similares aos resultados apresentados na presente tese, dando suporte às conclusões aqui apresentadas ¹.

Fizemos, também, uma estimativa analítica das posições das ilhas de primeira ordem, e do limiar para ilhas de primeira ordem e para a estocasticidade para o caso $R \approx \bar{\nu} \gg 1$. Observamos a redução do limiar de estocasticidade com o aumento em número de ondas para caso de ondas coerentes, proporcional à razão $(n_\omega)^{-1/2}$. Observamos também, para grande número de ondas incoerentes, uma redução de 1/3 à 1/2 do limiar de estocasticidade em relação com o limiar de estocasticidade para caso de uma onda.

Para uma análise mais completa, precisamos considerar o caso $R > \bar{\nu} \gg 1$, e nesse caso é importante encontrar o limiar para as ilhas de ordem maior que um. No sistema considerado nesse capítulo 2, temos problema quando tentamos encontrar ilhas de ordem maior que um, pois o Hamiltoniano em questão não possui termos que não se anulem na média, em ordem mais baixa da intensidade de perturbação, para ilhas de ordem maior que um. Tal problema é resolvido utilizando-se teorias de perturbação para expandir o Hamiltoniano em série de

¹TOZAWA, L. M.; ZIEBELL, L. F. Stochastic diffusion of ions due to incoherent lower hybrid waves. *Braz. J. Phys.*, São Paulo, aceito para publicação, 2003.

potências de acordo com a intensidade de perturbação, até segunda ordem do parâmetro da intensidade da perturbação. Cálculos nesse sentido serão apresentados nos capítulos 3 e 4, que permitirão encontrar o limiar para as ilhas de ordem maior do que um, no capítulo 5.

Capítulo 3

Teoria de perturbação para sistemas Hamiltonianos usando transformadas de Lie.

3.1 Introdução

Nos últimos quarenta anos houve um grande avanço no estudo da mecânica clássica que levou ao desenvolvimento da teoria de perturbação para o estudo de sistemas onde a teoria de perturbação clássica falhava, e também ao desenvolvimento de métodos mais eficientes para sistemas em que a teoria de perturbação clássica funcionava. Uma revisão bastante abrangente pode ser encontrada nos artigos de revisão de Cary [30] e de Chirikov [27].

Os métodos de perturbação seguem um padrão básico. Para analisar um sistema complicado, primeiro desprezamos efeitos até que o sistema seja simples o suficiente, para que possamos descrevê-lo exatamente. Então os efeitos desprezados são restaurados, e a diferença de movimento entre o sistema simples e o sistema mais complicado é calculada como uma série de perturbações dependendo da intensidade do efeito. Por exemplo, em um problema clássico do movimento da Terra no campo gravitacional do Sol e dos planetas, primeiro ignoramos os efeitos dos outros planetas e resolvemos o problema do movimento da Terra no campo gravitacional do Sol. Então o efeito dos campos gravitacionais fracos de outros planetas, como Júpiter ou Saturno, é calculado como uma série perturbativa.

Para a teoria da perturbação secular, a transformada utilizada é a diferença entre a transformada de evolução temporal do sistema simples e a do sistema perturbado. Como resultado, as coordenadas transformadas pelo sistema perturbado evoluem exatamente como feito pela coordenada original do sistema não perturbado. Esse método funciona bem para tempos curtos, mas em geral, os termos seculares, que não são limitados no tempo, causam a divergência da solução perturbada em relação à solução verdadeira, para tempos longos.

Essa falha primária da teoria de perturbação secular não está presente nos métodos de perturbação de Poincaré e Von Zeipel [31, 32]. Nesse último método procura-se uma transformação que descreve somente a parte oscilatória da diferença entre os conjuntos de duas variáveis. Por esse meio, o sistema perturbado é transformado para um sistema que é simples e solúvel, mas não idêntico ao sistema não perturbado.

A teoria de transformação usada no método de perturbação é a teoria de Hamilton-Jacobi [31, 25, 33]. Nessa teoria, a transformação canônica é especificada pela função geratriz global, $F(q, P, t, \epsilon)$, de variáveis mistas. O método de perturbação consiste de uma expansão a “força bruta” das equações de Hamilton-Jacobi, $K(Q, P, t) = h(q, p, t) + F(q, P, t)$, na variável diferença $q - Q = \epsilon q_1(Q, P, t) + \epsilon^2 q_2(Q, P, t) + \dots$. Esse método é rudimentar pois não utiliza a estrutura natural das transformações canônicas infinitesimais.

Métodos de perturbação mais eficientes utilizando a estrutura natural das transformações canônicas foram introduzidos somente nos últimos vinte anos. As transformações envolvidas foram agrupadas sob um nome genérico de transformadas de Lie. Garrido [34] formulou a transformação de desenvolvimento temporal e a teoria de perturbação secular como transformadas de Lie. Hori ¹introduziu a transformada de Lie como uma exponenciação do operador parênteses de Poisson. Deprit [35] aperfeiçoou a idéia de Hori pela redefinição da transformação de modo a obter uma teoria dependente do tempo mais natural, obtendo relações de recorrência para os termos na série de perturbação. O método de perturbação de Lie-Deprit é mais eficiente que o método de Poincaré-Von Zeipel, pois não há necessidade de ficar invertendo as séries para isolar as variáveis.

O desenvolvimento das transformadas de Lie serviu como guia para um novo ataque aos problemas antigos e para geração de novas idéias. Schmidt [36] e Cheng [37] usaram as transformadas de Lie para discutir problemas em mecânica celeste. McNamara [38] usou as transformadas de Lie para gerar invariâncias para altas ordens mesmo na presença de denominador ressonante. Cary e Kaufman [39, 40] e Johnston e Kaufman [41] mostraram que as transformadas de Lie levam a relacionamento não esperado entre a força ponderomotiva e a resposta linear de um plasma. Mynick [42] e Littlejohn [43] usaram as transformadas de Lie para analisar o movimento de centro de guia, para partículas carregadas sujeitas a um campo magnético. Candy e Rozmus [18] usaram as transformadas de Lie para examinar a estrutura de ressonâncias que ocorrem em um oscilador linear perturbado por uma onda plana. Chia *et al* [19] fizeram

¹HORI, G. *Pub. Astron. Soc. Jap.*, v. 18, p. 287, 1966.

um estudo similar ao de Candy e Rozmus, mas com a presença de múltiplas ondas planas. Benisti *et al* [20, 21] e Choueiri e Spektor ^{2 3} estudaram o fenômeno da aceleração coerente e o aperfeiçoamento da aceleração dos íons em plasma magnetizado perturbado por duas ondas eletrostáticas, utilizando as transformadas de Lie.

O objetivo desse capítulo, que está baseado no artigo de revisão de Cary [30], é revisar a teoria de perturbação usando transformadas de Lie. A seção 3.2 consiste de revisão sobre vários elementos básicos da mecânica clássica. A seção 3.3 apresenta uma discussão da teoria de transformação geral de Dewar. A seção 3.4 ilustra como o método de Deprit surge da teoria de transformação de Dewar (historicamente o desenvolvimento foi na ordem inversa).

3.2 Mecânica Hamiltoniana

3.2.1 Equações Hamiltonianas, parênteses de Poisson e transformações canônicas

Na mecânica Hamiltoniana, o estado de um sistema é determinado por um vetor \vec{z} de dimensão $2N$. Os componentes desse vetor são de dois tipos, coordenadas, $q_1, q_2, \dots, q_N = z_1, z_2, \dots, z_N$, e momenta, $p_1, p_2, \dots, p_N = z_{N+1}, z_{N+2}, \dots, z_{2N}$. A evolução desse estado é determinada por uma função simples, o Hamiltoniano $h(\vec{z}, t)$, de acordo com as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad (3.1)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial h}{\partial q_i}. \quad (3.2)$$

As equações de Hamilton e muito da teoria Hamiltoniana podem ser expressas engenhosamente em termos de parênteses de Poisson. O parêntese de Poisson é uma operação que a partir

²CHOUEIRI, E. Y.; SPEKTOR, R.

Coherent ion acceleration using two electrostatic waves

In: 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference,

AIAA-2000-3759, Huntsville, AL, July 16-20, 2000.

³SPEKTOR, R.; CHOUEIRI, E. Y.

Ion acceleration by beating electrostatic waves: Domain of allowed acceleration

In: 27th International Electric Propulsion Conference,

IEPC-01-209, Pasadena, California, Oct. 14-19, 2001.

de duas funções de \vec{z} constrói uma terceira função de \vec{z} , de acordo com a seguinte definição,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (3.3)$$

O parêntese de Poisson também pode ser reescrito da forma seguinte

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial f}{\partial z_i} \gamma_{ij} \frac{\partial g}{\partial z_j}, \quad (3.4)$$

onde os γ_{ij} são dados por

$$\gamma_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{para } j = i + N, \\ -1, & \text{para } i = j + N, \\ 0, & \text{em todos os outros casos.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Em termos de parênteses de Poisson as equações de Hamilton (3.1) (3.2) são

$$\dot{z}_i = \{z_i, h\}. \quad (3.6)$$

Uma propriedade dos parênteses de Poisson é que satisfazem a identidade de Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0, \quad (3.7)$$

essa propriedade garante que o espaço de funções seja uma algebra de Lie, mas tal discussão esta fora do objetivo da tese, mas pode ser encontrada na referencia [30].

Outro conceito que deve ser introduzido é o conceito de transformação canônica. Uma transformação geral é um conjunto de relações entre o novo conjunto de coordenadas, $\vec{Z}(\vec{z}, t)$, e o conjunto das antigas coordenadas, \vec{z} . Tal transformação é canônica se ela preservar os parênteses de Poisson, isto é, se

$$\{Z_i, Z_j\} = \{z_i, z_j\} \quad (3.8)$$

ou

$$\sum_{k,l} \frac{\partial Z_i}{\partial z_k} \gamma_{kl} \frac{\partial Z_j}{\partial z_l} = \gamma_{ij}. \quad (3.9)$$

Transformações canônicas são importantes porque preservam a natureza Hamiltoniana do sistema. Isto é, existe um novo Hamiltoniano K tal que

$$\dot{Z}_m = \{Z_m, K(\vec{Z}(\vec{z}, t), t)\}. \quad (3.10)$$

As equações acima são convenientemente expressas em termos da notação de Dewar [44] para operadores. Para parênteses de Poisson, introduzimos a notação $L(f)$ para denotar o operador parêntese de Poisson associado com f . Portanto,

$$\mathbb{L}(f)g \equiv \{f, g\}. \quad (3.11)$$

Com essa escolha, a identidade de Jacobi assume a forma

$$[L(f), L(g)] = L(\{f, g\}), \quad (3.12)$$

onde $[A, B]$ representa o comutador entre dois operadores A e B .

Similarmente, identificamos um operador transformação canônica T com uma transformação canônica $\vec{Z}(\vec{z}, t)$ de acordo com

$$(Tf)(\vec{z}, t) = f(\vec{Z}(\vec{z}, t)). \quad (3.13)$$

A ação desse operador é avaliar a função no ponto mapeado. Em particular, temos

$$(Tz_m)(\vec{z}, t) = Z_m(\vec{z}, t). \quad (3.14)$$

Para ilustrar o uso dessa notação operacional, consideramos a afirmação de que os parênteses de Poisson são preservados pela transformação canônica. Na notação usual essa afirmação é

$$\{f[\vec{Z}(\vec{z}, t), t], g[\vec{Z}(\vec{z}, t), t]\} = \{f, g\}|_{\vec{Z}(\vec{z}, t), t}, \quad (3.15)$$

onde a notação do lado direito significa o seguinte: primeiro determinamos o parêntese de Poisson das duas funções, depois usamos $\vec{Z}(\vec{z}, t)$ em lugar de \vec{z} . Nessa notação de operador, a eq. (3.15) fica dada por

$$TL(f)g = L(Tf)Tg. \quad (3.16)$$

De fato, como a eq. (3.16) é verdadeira para todo g , temos a relação entre operadores,

$$TL(f)T^{-1} = L(Tf). \quad (3.17)$$

3.2.2 A transformação de evolução temporal

O objetivo da mecânica Hamiltoniana é obter as trajetórias de um Hamiltoniano, isto é, a função vetorial $\vec{z}(t)$ que satisfaz as equações de Hamilton (3.6). O conhecimento dessas

trajetórias permite-nos definir um mapeamento $\vec{\zeta}(\vec{z}, t, t')$, que fornece a posição no tempo t , da partícula que estava em \vec{z} no tempo t' . Esse mapeamento é definido por

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = \sum_j \gamma_{ij} \frac{\partial h}{\partial z_j} \Big|_{\vec{\zeta}(\vec{z}, t, t'), t} \quad (3.18)$$

e

$$\zeta_i(\vec{z}, t, t') = z_i. \quad (3.19)$$

Esse mapeamento, que é canônico, é conhecido como mapeamento de evolução temporal. O operador transformação da evolução temporal, $S(t, t')$, é definido via

$$(S(t, t')f)(\vec{z}, t, t') = f(\vec{\zeta}(\vec{z}, t, t'), t). \quad (3.20)$$

O efeito do operador S é fazer evoluir os observáveis no tempo. Como um exemplo, suponhamos que tenhamos a energia potencial $V(\vec{z}, t)$ no tempo t , como função da posição da partícula no tempo t . Pela aplicação de S , obtemos uma nova função,

$$V'(\vec{z}, t, t') \equiv (S(t, t')V) = V(\vec{\zeta}(\vec{z}, t, t'), t),$$

que é a energia potencial no tempo t , de uma partícula que estava em \vec{z} no tempo t' .

A partir dessa definição, o mapa S é visto como tendo a propriedade de conectividade,

$$S(t, t') = S(t, t'')S(t'', t'). \quad (3.21)$$

Além disso, o inverso de S é dado por

$$S^{-1}(t, t') = S(t', t). \quad (3.22)$$

Como o mapeamento $\vec{\zeta}(\vec{z}, t)$ relaciona-se com h pela eq.(3.18), esperamos que a derivada temporal de S esteja relacionada com h . A derivada temporal de S é definida na maneira usual,

$$\frac{\partial S}{\partial t} g = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{S(t + \tau, t')g - S(t, t')g}{\tau}, \quad (3.23)$$

onde g é uma função arbitrária de \vec{z}, t e t' .

Por cálculo direto obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} S(t, t') = -S(t, t')L(h(t)), \quad (3.24)$$

e usando a relação $S(t, t')S(t', t) = I$, onde I é a identidade, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t'} S(t, t') = L(h(t')) S(t, t'). \quad (3.25)$$

No caso especial em que h é independente do tempo, muitos desses resultados ficam simplificados. Por exemplo, o operador de evolução temporal deve ser um invariante frente à translação temporal,

$$S(t, t') = S(t - t', 0).$$

Em tais casos omitiremos a segunda variável temporal. Além disso, $L(h)$ e S comutam nesse caso,

$$L(h)S(t) = S(t)L(h). \quad (3.26)$$

Para ver isso, usamos o fato que a transformação de evolução temporal preserva o Hamiltoniano, $S(t)h = h$, se h é independente do tempo. Isso implica em que $L(S(t)h) = L(h)$ que, junto com a eq. (3.17) implicam a eq. (3.26).

O conhecimento das trajetórias, ou equivalentemente, do operador de evolução temporal S , permite resolver imediatamente a equação de Liouville não homogênea,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, g\} = g, \quad (3.27)$$

que ocorre repetidas vezes na teoria de perturbação Hamiltoniana. Para encontrar sua solução, introduzimos uma nova função f' que satisfaz

$$f(t) \equiv S(t', t)f'(t, t'). \quad (3.28)$$

Combinando as eqs. (3.24-3.27), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial t} f'(t, t') = S^{-1}(t', t)g(t), \quad (3.29)$$

da qual uma integração simples fornece

$$f'(t, t') = \int_{t_0}^t dt_1 S^{-1}(t', t_1)g(t_1) + f'(t_0, t'). \quad (3.30)$$

Usando a definição (3.28), obtemos

$$f(t) = S(t', t) \int_{t_0}^{t'} dt_1 S^{-1}(t', t_1) g(t_1) + S(t', t) f'(t_0, t') = \int_{t_0}^t dt_1 S^{-1}(t, t_1) g(t_1) + S^{-1}(t, t_0) f(t_0). \quad (3.31)$$

Esse método de solução é conhecido como “encontrando f pela integração de g ao longo das trajetórias de h ”.

3.3 Famílias contínuas de transformações canônicas

Consideraremos agora um mapeamento canônico que depende de um parâmetro adicional θ . Isso é, o mapeamento $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ é canônico para todos os valores de t e para θ em algum domínio. Além disso, requeremos que $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ seja contínuo, e duas vezes diferenciável em todas as variáveis, simultaneamente. Chamamos esse conjunto de mapeamentos (todos os valores de θ) uma família contínua de transformações canônicas.

O Jacobiano da transformação $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ não se anula, pois a transformação é canônica. Assim, $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ é localmente inversível com inversa $\vec{Z}^{-1}(\vec{z}, t, \theta)$. Supomos que \vec{Z}^{-1} é bem definida em toda a região de interesse.

Nessa seção examinaremos as conseqüências da dependência paramétrica de $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$. Primeiro estabeleceremos o fato que o mapeamento pode ser especificado por uma função simples $w(\vec{z}, t, \theta)$, no lugar das $2N$ funções $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$. Na segunda subseção, derivamos a expressão para o sistema transformado para o caso onde w é uma série de potências em θ , o que foi feito primeiramente por Deprit [35]. Cronologicamente, Dewar [44] encontrou a expressão geral para o novo Hamiltoniano, quando w não é uma série de potências em θ depois de Deprit [35].

3.3.1 A função geratriz local

Uma propriedade importante das transformações canônicas é que elas podem ser especificadas por uma função única. Essa propriedade é bastante útil, pois significa que podemos trabalhar com uma única função ao invés de trabalhar com $2N$ funções $\vec{Z}(\vec{z}, t)$. Na teoria de Hamilton-Jacobi essa função é $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$, a função geratriz global. Para famílias contínuas de transformações canônicas, $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$, existe uma função $w(\vec{z}, t, \theta)$ que satisfaz [31]

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \theta} = \{Z_i, w(\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta)\} = \sum_j \gamma_{ij} \frac{\partial w}{\partial z_j} \Big|_{\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta}. \quad (3.32)$$

Se w tem propriedades apropriadas podemos especificar $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ como a única solução de (3.32) para dadas condições iniciais. Nesse trabalho requereremos sempre que o mapeamento se reduza à identidade quando $\theta = 0$:

$$\vec{Z}(\vec{z}, t, 0) = \vec{z}. \quad (3.33)$$

Notamos que a eq. (3.32) é análoga à eq. (3.18). Exatamente como o Hamiltoniano h gera o mapeamento de evolução temporal $\vec{\zeta}$ na variável t , a função w gera o mapeamento $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ na variável θ . Seguindo essa analogia, introduzimos a transformação canônica T obtida através do mapeamento Z , exatamente como S surge, a partir do mapeamento $\vec{\zeta}$. Da eq. (3.24) vemos que T deve satisfazer

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -TL(w). \quad (3.34)$$

Notamos também que T^{-1} deve satisfazer

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial \theta} = L(w)T^{-1}, \quad (3.35)$$

que é análoga à (3.25). Finalmente, qualquer função f satisfazendo

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} + \{f, w\} = g \quad (3.36)$$

pode ser resolvida usando

$$f(\theta) = T^{-1}(\theta) \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' T(\theta') g(\theta') + T^{-1}(\theta) T(\theta_0) f(\theta_0) \quad (3.37)$$

que é análoga à eq. (3.31).

3.3.2 O novo Hamiltoniano

A razão de introduzirmos a teoria de transformação é que esperamos que seja possível transformar o problema em consideração, para um novo sistema, onde o Hamiltoniano tenha uma forma mais simples. Depois de resolver as equações no sistema simples, podemos transformar de volta para obter as soluções no sistema original.

O novo Hamiltoniano K deve ter a propriedade de fornecer as equações de movimento para as variáveis transformadas $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$:

$$\dot{Z}_i = \{Z_i, K(\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta)\}. \quad (3.38)$$

Nessa equação, o ponto se refere à derivada temporal ao longo da trajetória usando o Hamiltoniano antigo $h(\vec{z}, t)$

$$\dot{Z}_i \equiv \frac{dZ_i}{dt} = \frac{\partial Z_i}{\partial t} + \{Z_i, h(\vec{z}, t)\}.$$

Introduzindo a função $H(\vec{z}, t, \theta) = h(\vec{Z}^{-1}(\vec{z}, t, \theta), t)$, podemos escrever a (3.38) na forma

$$\dot{Z}_i = \frac{\partial Z_i}{\partial t} + \{Z_i, H(\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta)\}. \quad (3.39)$$

Portanto precisamos encontrar somente uma função R tal que

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = \{Z_i, R(\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta)\}. \quad (3.40)$$

Então o novo Hamiltoniano K é dado por $K = H + R$.

O fato de R existir é evidente a partir das considerações seguintes. $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ é uma transformação canônica para todo t e θ . Uma vez que ela é canônica para todo θ , somos capazes de concluir que existe w satisfazendo a eq. (3.32). Igualmente, visto que $\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta)$ é canônica para todo t , concluímos que existe uma função R satisfazendo (3.40). Sabendo que R existe, podemos ficar mais seguros acerca de encontrá-la.

Para encontrar R , consideraremos as eqs. (3.32) e (3.40) escritas na forma de operadores,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -TL(w) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -TL(R). \quad (3.42)$$

Igualaremos agora as derivadas segundas de T calculadas a partir das duas equações anteriores,

$$\frac{\partial T}{\partial t} L(w) + TL\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{\partial T}{\partial \theta} L(R) + TL\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right). \quad (3.43)$$

Usando as relações (3.41) e (3.42) temos

$$L\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) + L(\{R, w\}) = L\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right). \quad (3.44)$$

Da equação acima deduzimos que

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} + \{R, w\} = \frac{\partial w}{\partial t} + g, \quad (3.45)$$

onde g é qualquer função independente de \vec{z} . Entretanto, podemos igualar a função g a zero, já que R tem relevância somente através das suas relações de parênteses de Poisson, como em (3.40). A adição de uma função independente de \vec{z} a R , não afeta nenhuma relação envolvendo os parênteses de Poisson. Temos então

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} + \{R, w\} = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.46)$$

Seguindo a discussão da última subseção, essa equação pode ser integrada usando (3.37). Usaremos $\theta_0 = 0$, já que T se reduz à identidade, implicando que $R(\theta_0 = 0)$ anula-se. Isso dá o seguinte resultado para R :

$$R(\theta) = T^{-1}(\theta) \int_0^\theta d\theta' T(\theta') \frac{\partial w}{\partial t}(\theta'). \quad (3.47)$$

Se usarmos agora $K = H + R$, obteremos o novo Hamiltoniano,

$$K(\theta) = T^{-1}(\theta)h + T^{-1}(\theta) \int_0^\theta d\theta' T(\theta') \frac{\partial w}{\partial t}(\theta'). \quad (3.48)$$

Esse resultado foi obtido por Dewar, na Ref. [44].

Para comparar a eq. (3.48) com equações mais familiares, consideraremos o caso em que a transformação é independente do tempo. Nesse caso $\partial w/\partial t = 0$, de modo que

$$K(\theta) = T^{-1}(\theta)h. \quad (3.49)$$

Usando a definição de T , isso pode ser reescrito como

$$K(\vec{Z}(\vec{z}, t, \theta), t, \theta) = h(\vec{z}, t, \theta), \quad (3.50)$$

que simplesmente diz que o novo Hamiltoniano, calculado na posição mapeada, é igual ao antigo Hamiltoniano calculado na posição antiga.

No caso em que a transformação é dependente do tempo, a função restante R deve ser igual a $\partial F/\partial t$, a derivada temporal da função geratriz das variáveis misturadas, que aparece na teoria de Hamilton-Jacobi. Usando esse fato, podemos derivar a relação entre w e F . A relação entre w e F foi primeiramente encontrada por Dewar [45].

3.4 Teoria de perturbação de Deprit

Nessa seção mostraremos como construir uma teoria de perturbação a partir da teoria de transformação geral da seção anterior. Historicamente o desenvolvimento ocorreu na ordem inversa. Deprit construiu representações em série de potências da transformação e posteriormente Dewar obteve uma representação geral de transformações não analíticas.

O pré-requisito da teoria de perturbação é que o Hamiltoniano consista de termos solúveis mais termos não solúveis, que são ordenados de acordo com um parâmetro pequeno. Igualamos esse parâmetro pequeno ao parâmetro θ da transformada de Lie, que será determinada. Expandimos, então, a transformada de Lie em potências do parâmetro θ , e usamos a expansão da eq. (3.48). Terminamos com uma equação para cada ordem, relacionando o novo Hamiltoniano com a transformação e o Hamiltoniano antigo.

A próxima etapa é escolher a transformação, assim escolhendo a forma do Hamiltoniano novo. Idealmente gostaríamos de escolher transformações que fazem com que K se anule em todas as ordens mais altas. Entretanto, essa escolha não é sempre a melhor, visto que pode levar a termos seculares ou a denominadores pequenos na transformação, tornando-se pouco útil para uma discussão de efeitos em tempos longos. O esquema adotado então, é descartar-se de tantos termos quanto possível. Os termos que variam lentamente, que dão origem a secularidades e denominadores pequenos, devem permanecer no novo Hamiltoniano. Esse método usualmente simplifica a análise em algum grau, uma vez que ao menos os termos variando rapidamente são descartados. Ocasionalmente esse método resolve o problema, quando os termos variando lentamente dependem somente dos momenta. Uma boa característica da teoria de perturbação de Deprit, é que podemos usar qualquer método para escolher a transformação. O critério essencial é escolher a transformação tal que o novo Hamiltoniano seja tão fácil de analisar quanto possível.

3.4.1 Relações nas séries perturbativas de Deprit

Essa teoria de perturbação baseia-se em expansões em série de potências da transformada de Lie. Supomos que o Hamiltoniano h é ordenado em um parâmetro que igualamos com o parâmetro da transformada de Lie. Inserimos, então, as expansões em série de potências na eq. (3.48) para obter a expressão para o termo de ordem n no novo Hamiltoniano.

O ponto de partida é supor que os objetos h , w , K e T podem, todos, ser expandidos em

série de potências. Para h , K e T temos

$$h(\vec{z}, t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n h_n(\vec{z}, t) \quad (3.51)$$

$$K(\vec{z}, t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n K_n(\vec{z}, t), \quad (3.52)$$

e

$$T(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n T_n(t). \quad (3.53)$$

Entretanto para w supomos uma forma um pouco diferente,

$$w(\vec{z}, t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n w_{n+1}(\vec{z}, t) \quad (3.54)$$

A razão para esta escolha é que w encontra-se em (3.48) juntamente com uma integral em $d\theta$ que efetivamente sobe a ordem de w por 1, em todas as equações.

Também supomos que a transformação é próxima da identidade. Isso é necessário para a teoria de perturbação funcionar e implica que $T_0 = \mathcal{I}$, onde \mathcal{I} é o operador identidade, colocando $\theta = 0$. Implica, também, $K_0 = h_0$, visto que em (3.48) a integral é no mínimo de ordem θ .

Primeiro encontramos a forma para o operador T em todas as ordens. Iniciamos com a relação

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -TL_w. \quad (3.55)$$

Para usar essa relação necessitamos saber a série para $L(w)$. Já que o mapa $g \rightarrow L(g)$ é linear, temos

$$L(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n L(w_{n+1}). \quad (3.56)$$

Abreviamos o operador $L(w_n)$ por L_n . Agora simplesmente pegamos as representações em série para $L(w)$ e T , e inserimos em (3.55). Como resultado calculamos a seguinte relação recursiva:

$$T_n = -\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_m L_{n-m}. \quad (3.57)$$

Pela iteração dessa relação chegamos a

$$T_n = \sum_{(m_1, \dots, m_r); (n > m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0)} \binom{-1}{n} \binom{-1}{m_1} \dots \binom{-1}{m_r} L_{m_r} \dots L_{m_2 - m_3} L_{m_1 - m_2} L_{n - m_1}. \quad (3.58)$$

A soma é sobre todos os conjuntos de inteiros (m_1, \dots, m_r) satisfazendo $n > m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0$.

Da expressão $\partial T^{-1}/\partial\theta = L_w T^{-1}$, podemos derivar uma relação similar para T^{-1} . O resultado é o seguinte

$$T_n^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} L_{n-m} T_m^{-1} \quad (3.59)$$

que resulta em

$$T_n^{-1} = \sum_{(m_1, \dots, m_r); (n > m_1 > m_2 > \dots > m_r > 0)} \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{m_1}\right) \dots \left(\frac{1}{m_r}\right) L_{n-m_1} L_{m_1-m_2} \dots L_{m_r}. \quad (3.60)$$

Para encontrar a expressão K , multiplicamos (3.48) à esquerda por T , e diferenciamos em relação a θ , para obter

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} K + T \frac{\partial K}{\partial\theta} = \frac{\partial h}{\partial\theta} + T \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.61)$$

Usando (3.41), e multiplicando à esquerda por T^{-1} , encontramos

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial\theta} - L(w)K - T^{-1} \frac{\partial h}{\partial\theta}. \quad (3.62)$$

Inserindo as expressões das séries para K , T e h , obtemos (em n -ésima ordem)

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = nK_n - \sum_{m=0}^{n-1} L_{n-m} K_m - \sum_{m=1}^n T_{n-m}^{-1} m h_m. \quad (3.63)$$

A expressão anterior pode ser escrita como

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + \{w_n, h_0\} = nK_n - n h_n - \sum_{m=1}^{n-1} (L_{n-m} K_m + m T_{n-m}^{-1} h_m). \quad (3.64)$$

Essa é a forma com que trabalhamos quando fazemos teoria de perturbação em n -ésima ordem. Depois de calcular até ordem $n - 1$, conhecemos todas as quantidades nas somas das equações anteriores. Também conhecemos h . Em seguida, escolhemos K_n como a média temporal não nula de h_n ao longo de uma trajetória. Finalmente encontramos w_n , pela integração do lado esquerdo da eq. (3.64) ao longo de uma trajetória. Nesse ponto todas as quantidades são conhecidas até a n -ésima ordem, e conhecemos o movimento até ordem n e podemos calcular a ordem $(n + 1)$.

Para futura referência, as fórmulas até quarta ordem das várias quantidades são:

$$\begin{aligned}
T_0 &= \mathcal{I} \\
T_1 &= -L_1 \\
T_2 &= -\frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1^2 \\
T_3 &= -\frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{6}L_2L_1 + \frac{1}{3}L_1L_2 - \frac{1}{6}L_1^3 \\
T_4 &= -\frac{1}{4}L_4 + \frac{1}{12}L_3L_1 + \frac{1}{8}L_2^2 + \frac{1}{4}L_1L_3 - \frac{1}{24}L_2L_1^2 - \frac{1}{12}L_1L_2L_1 - \frac{1}{8}L_1^2L_2 + \frac{1}{24}L_1^4 \quad (3.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_0^{-1} &= \mathcal{I} \\
T_1^{-1} &= L_1 \\
T_2^{-1} &= \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1^2 \\
T_3^{-1} &= \frac{1}{3}L_3 + \frac{1}{6}L_1L_2 + \frac{1}{3}L_2L_1 + \frac{1}{6}L_1^3 \\
T_4^{-1} &= \frac{1}{4}L_4 + \frac{1}{12}L_1L_3 + \frac{1}{8}L_2^2 + \frac{1}{4}L_3L_1 + \frac{1}{24}L_1^2L_2 + \frac{1}{12}L_1L_2L_1 + \frac{1}{8}L_2L_1^2 + \frac{1}{24}L_1^4 \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Notamos que $T_n^{-1} = T_n^\dagger$, onde o símbolo \dagger indica hermitiano conjugado. Para encontrar o hermitiano conjugado de um produto de operadores, revertemos a ordem do produto, e então tomamos o hermitiano conjugado de cada multiplicador,

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \quad (3.67)$$

Visto que $L_n^\dagger = -L_n$ (L_n é um operador anti-hermitiano), vemos que $T_n^{-1} = T_n^\dagger$ é verdadeiro em (3.66). Esse fato é demonstrado em geral, reparando que as equações diferenciais para T e T^{-1} são o hermitiano conjugado uma da outra.

As equações para K_n até quarta ordem são:

$$\begin{aligned}
K_0 &= h_0 \\
\frac{\partial w_1}{\partial t} + \{w_1, h_0\} &= K_1 - h_1 \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} + \{w_2, h_0\} &= 2(K_2 - h_2) - L_1(K_1 + h_1) \\
\frac{\partial w_3}{\partial t} + \{w_3, h_0\} &= 3(K_3 - h_3) - L_1(K_2 + 2h_2) - L_2(K_1 + \frac{1}{2}h_1) - \frac{1}{2}L_1^2h_1 \\
\frac{\partial w_4}{\partial t} + \{w_4, h_0\} &= 4(K_4 - h_4) - L_1(K_3 + 3h_3) - L_2(K_2 + h_2) - L_1^2h_2 - L_3(K_1 + \frac{1}{3}h_1) \\
&\quad - \frac{1}{6}(L_1L_2 + 2L_2L_1 + L_1^3)h_1. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Método de Deprit para o estudo da interação de onda-partícula.

4.1 Introdução

Nesse capítulo, a teoria de perturbação de Deprit, a qual faz uso de transformadas de Lie e sobre a qual foi feita uma revisão no capítulo 3, será utilizada para examinar a estrutura das ressonâncias que ocorrem na interação de íons com um grupo de ondas eletrostáticas propagando-se perpendicularmente à direção de um campo magnético uniforme, discutida no capítulo 2.

A estrutura desse capítulo será a seguinte: Na seção 4.2 revisaremos o Hamiltoniano e as correspondentes equações de movimento para o sistema físico em questão, adaptando a notação para tornar compatível a resultados teóricos bastante recentes. A seguir, na seção 4.3 aplicaremos o método de Deprit até a segunda ordem para analisar a estrutura das ressonâncias que ocorrem nesse sistema.

4.2 Revisão sobre as equações de movimento do sistema.

O Hamiltoniano e as correspondentes equações de movimento que descrevem a interação de íons com um grupo de ondas eletrostáticas propagando-se perpendicularmente um campo magnético uniforme são as equações (2.68)-(2.72), que em forma compacta podem ser escritas como:

$$H = I_1 + \bar{\nu}I_2 - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sin(\Theta_i), \quad (4.1)$$

$$\dot{\omega}_1 = 1 - \sin(\omega_1) \frac{1}{R} \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(\Theta_i), \quad (4.2)$$

$$\dot{\omega}_2 = \bar{\nu}, \quad (4.3)$$

$$\dot{I}_1 = \cos(\omega_1) R \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(\Theta_i), \quad (4.4)$$

$$\dot{I}_2 = -\alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_{E_i} \cos(\Theta_i), \quad (4.5)$$

onde

$$\Theta_i = r_{\omega_i} (R \sin(\omega_1) - \omega_2) - \varphi_i, \quad (4.6)$$

$$R \equiv (2I_1)^{1/2}. \quad (4.7)$$

No intuito de compararmos diretamente com os artigos recentes que tratam de sistema físico semelhante [18, 19, 20, 21], reescreveremos o Hamiltoniano e conseqüentemente as equações de movimento de forma mais adequada. Esse procedimento não altera a essência física do problema, visto que a alteração somente se dá na definição da função trigonométrica a ser utilizada para a representação do grupo de ondas eletrostáticas e do sistema de referência. Dessa forma, consideraremos que para a representação da oscilação da amplitude da onda eletrostática seja utilizada a função *seno*, em vez da função *coseno*, e consideraremos no sistema de referência do centro-guia do movimento de cíclotron dos íons. Nesse sistema de referência do centro-guia, é útil e intuitivo relacionar a ação I_1 com o raio de Larmor normalizado $R \equiv (2I_1)^{1/2} = \rho$, o que leva a fazer uma escolha de uma das soluções para I_2 . Nesse caso, por simplicidade escolheremos $I_2 = 0$ (eq.2.41). Dessa forma o Hamiltoniano para o caso de uma onda é dado por

$$H(I_1, \omega_1, \omega_2) = I_1 + \alpha \cos(R \sin(\omega_1) - \omega_2), \quad (4.8)$$

que em termos de diferentes termos de Fourier, e utilizando o fato que $\omega_2 = \nu\tau + \text{cte}$, conforme a Eq. (4.3), pode ser escrito na forma seguinte,

$$H(I, \omega, \tau) = I + \alpha \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(R) \cos(m\omega - \nu\tau), \quad (4.9)$$

onde os sub-índices foram omitidos. Para o caso mais geral de múltiplas ondas com fases aleatórias temos

$$H(I, \omega, \tau) = I + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m}, \quad (4.10)$$

onde

$$\Theta_{i,m} \equiv m\omega - \nu_i\tau - \varphi_i \quad (4.11)$$

$$r_i \equiv r_{\omega_i}R, \quad \nu_i \equiv r_{\omega_i}\bar{\nu}. \quad (4.12)$$

Dessa maneira, reduzimos o número de equações de movimento a serem resolvidas, nesse caso de quatro para duas, sem perder a generalização do problema. Podemos agora nos concentrar na análise do problema. Analisaremos nesse capítulo a estrutura de ressonâncias que ocorrem no caso de múltiplas ondas, principalmente em função de $\bar{\nu}$, a frequência central do grupo de ondas, normalizada pela frequência de ciclotron. Para denotar a ressonância explicitaremos pela expressão

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{\omega}}{\omega_c} = \frac{r}{s}, \quad (4.13)$$

onde r e s são números primos entre si, uma forma simplificada de representar se o valor de $\bar{\nu}$ é inteiro ou fracionário. Nesse caso, para representação de números inteiros, o número s no denominador será a unidade, e para representação de números fracionários, s será maior ou igual a 2.

4.3 Estrutura de ressonâncias.

Nessa seção analisaremos separadamente a estrutura de ressonâncias. As frequências normalizadas do grupo de ondas de frequências próximas são dadas por

$$\nu_i = r_{\omega_i}\bar{\nu} = r_{\omega_i}\frac{\bar{\omega}}{\omega_c} = r_{\omega_i}\frac{r}{s}, \quad (4.14)$$

onde a quantidade r_{ω_i} é dada pela expressão (2.62).

Na literatura referente ao caso de uma onda, $s = 1$ é conhecido como caso *super-harmônico* ou *on-resonance* e o caso de $s \geq 2$ é conhecido como *sub-harmônico* ou *off-resonance*. Para o caso de múltiplas ondas de frequências próximas precisamos fazer algumas considerações para utilizarmos nomenclatura similar. No caso de ondas sub-harmônicas, consideramos que os ν_i são números não inteiros, para todos os índices i ; no caso super-harmônico consideramos que a onda central do espectro $\bar{\nu}$ esteja em ressonância ($\nu_0 = \bar{\nu}$), para simplificar o problema, e que nenhuma das outras ondas do grupo esteja em ressonância.

Em termos da ordem da perturbação, com α como parâmetro pequeno, o Hamiltoniano é escrito da seguinte forma:

$$H = H_0 + \alpha H_1, \quad (4.15)$$

onde

$$H_0 = I, \quad (4.16)$$

$$H_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m}. \quad (4.17)$$

4.3.1 Ondas sub-harmônicas.

Consideramos que todas as ondas do espectro sejam sub-harmônicas, $\nu_i \neq$ inteiro para qualquer valor de i . Para isso é necessário que $s > 1$ e que a largura da onda não esteja em cima da ressonância. Calcularemos a perturbação até a segunda ordem.

Cálculo de primeira ordem

A equação para a perturbação em primeira ordem $n = 1$ da eq. (3.64) é

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \{w_1, H_0\} = \bar{H}_1 - H_1. \quad (4.18)$$

Substituindo a eq. (4.16) e (4.17) na eq. (4.18) e resolvendo o parêntese de Poisson, temos

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \frac{\partial w_1}{\partial \omega} = \bar{H}_1 - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m}, \quad (4.19)$$

onde \bar{H}_1 é a média temporal de H_1 , a ser determinada.

A escolha de valores para \bar{H}_n , para qualquer ordem n , é feita de modo a evitar as divergências e secularidades que podem aparecer na equação para a perturbação. Desse modo é necessário analisar se há ressonâncias ou se existem médias temporais não nulas na equação. Lembrando que $\Theta_{i,m} = m\omega - \nu_i\tau - \varphi_i$, e que a média temporal de H_1 na eq. (4.18) é nula, escolhemos

$$\bar{H}_1 = 0. \quad (4.20)$$

Essa escolha leva à seguinte solução para w_1

$$w_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m}. \quad (4.21)$$

Vemos aqui que a solução para w_1 não apresenta nenhuma divergência qualquer que seja o valor de m , pois $\nu_i \neq$ inteiro, e é portanto uma solução apropriada. De acordo com a Eq. (3.68), o novo Hamiltoniano de ordem zero é o mesmo Hamiltoniano de ordem zero original, com as novas variáveis. Com isso, e com nossa escolha de \bar{H}_1 , Eq.(4.20), o novo Hamiltoniano de primeira ordem é

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \alpha \bar{H}_1 = \bar{H}_0 = \bar{I}. \quad (4.22)$$

Podemos mostrar que o conjunto de novas variáveis pode ser obtido, aplicando o operador transformação expresso na Eq. (3.53), na variável antiga. Para a primeira ordem, temos

$$\bar{x} = (T_0 + \alpha T_1)x, \quad (4.23)$$

onde $T_0 = \mathcal{I}$ e $T_1 = -L_1 = -\{w_1, \}$, visto nas relações da Eq.(3.65). A nova ação até a primeira ordem é

$$\bar{I} = I - \alpha\{w_1, I\}, \quad (4.24)$$

e o novo ângulo até a primeira ordem é

$$\bar{\omega} = \omega - \alpha\{w_1, \omega\}, \quad (4.25)$$

onde

$$\{w_1, I\} = \frac{\partial w_1}{\partial \omega} = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m}, \quad (4.26)$$

$$\{w_1, \omega\} = -\frac{\partial w_1}{\partial I} = -\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial J_m(r_i)}{\partial I} \right) \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m}. \quad (4.27)$$

Cálculo de segunda ordem

Novamente usando a Eq. (3.64), a equação de segunda ordem ($n = 2$)

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \{w_2, H_0\} = 2(\bar{H}_2 - H_2) - L_1(\bar{H}_1 + H_1). \quad (4.28)$$

Usando $\bar{H}_1 = 0$, $H_2 = 0$ e $L_1 = \{w_1, \}$, e lembrando que $H_0 = I$, podemos re-escrever a equação anterior

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = 2\bar{H}_2 - L_1 H_1. \quad (4.29)$$

onde

$$L_1 H_1 = \{w_1, H_1\} \equiv \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \frac{\partial H_1}{\partial I} - \frac{\partial w_1}{\partial I} \frac{\partial H_1}{\partial \omega}, \quad (4.30)$$

e

$$\frac{\partial H_1}{\partial \omega} = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_j) \sin \Theta_{j,n}(-n), \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial I} = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial J_n(r_j)}{\partial I} \right] \cos \Theta_{j,n}. \quad (4.32)$$

Utilizando as respectivas derivadas parciais para w_1 dadas pelas equações (4.26) e (4.27), temos

$$L_1 H_1 =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial J_n(r_j)}{\partial I} \right] \cos \Theta_{j,n} \right) \\
& + \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial J_m(r_i)}{\partial I} \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_j) \sin \Theta_{j,n} \right). \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Utilizando as relações (A.7) - (A.12), obtemos

$$L_1 H_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m,n}^{i,j}, \quad (4.34)$$

onde

$$\Gamma_{m,n}^{i,j} = A_{i,j,m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) + A_{i,j,m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}), \quad (4.35)$$

e

$$A_{i,j,m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2(\nu_i - m)} \left(m J_m(r_i) \left[\frac{\partial J_n(r_j)}{\partial I} \right] \pm \left[\frac{\partial J_m(r_i)}{\partial I} \right] n J_n(r_j) \right), \quad (4.36)$$

onde

$$\theta_{m,n}^{(\pm)} \equiv (m \pm n),$$

$$\zeta_{i,j}^{(\pm)} \equiv (\nu_i \pm \nu_j),$$

$$C_{i,j}^{(\pm)} \equiv (\varphi_i \pm \varphi_j).$$

Podemos observar que os somatórios nas equações (4.33) são simétricos, e podemos trocar os índices dos somatórios do segundo termo da equação (4.33), $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$, $m \rightarrow n$ e $n \rightarrow m$, o que resulta na expressão para $A_{i,j,m,n}^{(\pm)}$,

$$A_{i,j,m,n}^{(\pm)} \equiv \pm \frac{m J_m(r_i) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right]}{2(\nu_i - m)(\nu_j - n)} \left[\zeta_{i,j}^{(\pm)} - \theta_{m,n}^{(\pm)} \right]. \quad (4.37)$$

Salientamos que essa última expressão, Eq.(4.37), somente é válida uma vez que os somatórios da equação (4.33) são simétricos. Se os somatórios não fossem simétricos deveríamos usar a expressão geral (4.36).

Para um caso particular, quando consideramos apenas uma onda ($i = j = 0$ e $\varphi_0 = 0$) obtemos expressão igual à equação (22) do artigo de J. Candy e Rozmus [18].

Podemos agora determinar \bar{H}_2 de acordo com o valor de s . Discutiremos diferentes casos.

Se não houvesse divergências ou secularidades poderíamos escolher uma solução trivial, $\bar{H}_2 = 0$. Nesse caso a equação de perturbação de Lie para segunda ordem, Eq. (4.29), se

reduziria a

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m,n}^{i,j}, \quad (4.38)$$

e a solução para w_2 seria

$$w_2 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{m,n}^{i,j}, \quad (4.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}^{i,j} \equiv & \left[\frac{A_{i,j,m,n}^{(+)}}{[\zeta_{i,j}^{(-)} - \theta_{m,n}^{(-)}]} \sin(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) \right] \\ & + \left[\frac{A_{i,j,m,n}^{(-)}}{[\zeta_{i,j}^{(+)} - \theta_{m,n}^{(+)}]} \sin(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Analisando a equação (4.40), podemos notar que para certos valores de (i, j, m, n) , o w_2 pode apresentar valores muito grandes que tendem a uma divergência. O primeiro termo da equação (4.40) tem na sua expressão

$$[\zeta_{i,j}^{(-)} - \theta_{m,n}^{(-)}]^{-1} = [(\nu_i - \nu_j) - (m - n)]^{-1} = [(i - j)\Delta' \bar{\nu} - (m - n)]^{-1}. \quad (4.41)$$

O segundo termo da equação (4.40) tem na sua expressão

$$[\zeta_{i,j}^{(+)} - \theta_{m,n}^{(+)}]^{-1} = [(\nu_i + \nu_j) - (m + n)]^{-1} = [(2 + (i + j)\Delta') \bar{\nu} - (m + n)]^{-1}. \quad (4.42)$$

Quando $s > 2$, se $m = n$, o segundo termo da equação (4.40) não apresenta divergências, pois $\bar{\nu}$ será sempre um valor fracionário e a diferença entre esta quantidade e o termo $(m + n)$ nunca será próxima de zero. Entretanto, o primeiro termo da equação (4.40) se torna muito grande, como podemos observar pela expressão (4.41). Portanto, a escolha $\bar{H}_2 = 0$ não é apropriada, e devemos escolher \bar{H}_2 tal que retire o termo em $m = n$ da expressão de w_2 , então propomos a seguinte forma,

$$\bar{H}_2(s > 2) = \frac{1}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m,m}^{i,j}, \quad (4.43)$$

e desta forma, de acordo com a Eq. (4.29), devemos resolver

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m} \Gamma_{m,n}^{i,j}. \quad (4.44)$$

A solução para w_2 é, portanto,

$$w_2(s > 2) = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m} \Omega_{m,n}^{i,j}. \quad (4.45)$$

Quando $s = 2$, o valor de $\bar{\nu}$ é $r/2$. Nesse caso além de considerar os termos em $m = n$, devemos considerar o efeito do termo $m + n = 2\bar{\nu}$, pois para esse valor dos índices o segundo termo da equação (4.40) se torna muito grande, como podemos observar pela expressão (4.42). Portanto para esse caso precisamos retirar da solução não só o termo com $n = m$ como também o termo com $m + n = 2\bar{\nu}$, e propomos

$$\bar{H}_2(s = 2) = \frac{1}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\Gamma_{m,m}^{i,j} + \Gamma_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right], \quad (4.46)$$

de modo que devemos resolver

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \Gamma_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.47)$$

A solução para w_2 nesse caso é

$$w_2(s = 2) = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \Omega_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.48)$$

O novo Hamiltoniano até a segunda ordem é dado por

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \alpha \bar{H}_1 + \alpha^2 \bar{H}_2. \quad (4.49)$$

Lembrando que $\bar{H}_0 = \bar{I}$ e $\bar{H}_1 = 0$, de acordo com Eqs. (4.20) e (4.22), o Hamiltoniano perturbado em termos das novas variáveis ação \bar{I} e ângulo $\bar{\omega}$ fica dado por

$$\bar{H}(s > 2) = \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,j} \right], \quad (4.50)$$

$$\bar{H}(s = 2) = \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,j} + \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right], \quad (4.51)$$

onde $\bar{\Gamma}_{m,n}^{i,j}$ é $\Gamma_{m,n}^{i,j}$ escrita em termos das novas variáveis ação \bar{I} e ângulo $\bar{\omega}$.

Para as novas variáveis até a segunda ordem

$$\bar{x} = (T_0 + \alpha T_1 + \alpha^2 T_2)x, \quad (4.52)$$

onde $T_0 = I$, $T_1 = -L_1 = -\{w_1, \}$ e $T_2 = -\frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_1^2$. Então a nova ação até a segunda ordem é

$$\bar{I} = I - \alpha \{w_1, I\} - \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\{w_2, I\} - \{w_1, \{w_1, I\}\} \right), \quad (4.53)$$

e o novo ângulo até a segunda ordem é

$$\bar{\omega} = \omega - \alpha \{w_1, \omega\} - \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\{w_2, \omega\} - \{w_1, \{w_1, \omega\}\} \right), \quad (4.54)$$

Cálculo do \bar{I}

O segundo termo da equação (4.53), $\{w_1, I\}$, já foi calculado e é dado pela equação (4.26). Aproveitando o resultado do segundo termo, calcularemos agora o quarto termo.

$$\{w_1, \{w_1, I\}\} = \left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right\} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right) - \left(\frac{\partial w_1}{\partial I} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right). \quad (4.55)$$

Precisamos dos seguintes resultados:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right) = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_j) \sin \Theta_{j,n} \frac{-n^2}{\nu_j - n}, \quad (4.56)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right) = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right] \cos \Theta_{j,n} \frac{n}{\nu_j - n}. \quad (4.57)$$

Aproveitamos também a equação (4.26), e obtemos

$$\begin{aligned} \{w_1, \{w_1, I\}\} = & \\ & \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right] \cos \Theta_{j,n} \frac{n}{\nu_j - n} \right) \\ & + \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r_j) \sin \Theta_{j,n} \frac{n^2}{\nu_j - n} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Utilizando agora as relações (A.7) - (A.12), obtemos

$$\{w_1, \{w_1, I\}\} = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_{m,n}^{i,j}, \quad (4.59)$$

onde

$$\Lambda_{m,n}^{i,j} \equiv C_{i,j,m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) + C_{i,j,m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}), \quad (4.60)$$

e

$$C_{i,j,m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{n}{(\nu_j - n)} A_{i,j,m,n}^{(\pm)}. \quad (4.61)$$

O terceiro termo da equação (4.53) é

$$\{w_2(s > 2), I\} = \frac{\partial}{\partial \omega} w_2(s > 2) = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m} \frac{\partial}{\partial \omega} \Omega_{m,n}^{i,j} \right], \quad (4.62)$$

$$\{w_2(s = 2), I\} = \frac{\partial}{\partial \omega} w_2(s = 2) = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m, n \neq 2\nu - m} \frac{\partial}{\partial \omega} \Omega_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.63)$$

Definimos

$$I_{m,n}^{i,j} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega} \Omega_{m,n}^{i,j} = B_{i,j,m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) + B_{i,j,m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}), \quad (4.64)$$

onde

$$B_{i,j,m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{\theta_{m,n}^{(\mp)}}{[\zeta_{i,j}^{(\mp)} - \theta_{m,n}^{(\mp)}]} A_{i,j,m,n}^{(\pm)}. \quad (4.65)$$

A nova ação até a segunda ordem é então dada pelas seguintes expressões. No caso de $s > 2$,

$$\begin{aligned} \bar{I}(s > 2) &= I - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m} [I_{m,n}^{i,j} - \Lambda_{m,n}^{i,j}] \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\Lambda_{m,m}^{i,j}], \end{aligned} \quad (4.66)$$

e para $s = 2$,

$$\begin{aligned} \bar{I}(s = 2) &= I - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m, n \neq 2\nu - m} [I_{m,n}^{i,j} - \Lambda_{m,n}^{i,j}] \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\Lambda_{m,m}^{i,j} + \Lambda_{m,2\nu-m}^{i,j}]. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Cálculo do $\bar{\omega}$

O segundo termo da equação (4.54), $\{w_1, \omega\}$, já foi calculado e é dado pela equação (4.27).

Aproveitando o resultado do segundo termo, calcularemos agora o quarto termo.

$$\{w_1, \{w_1, \omega\}\} = \left\{ w_1, -\frac{\partial w_1}{\partial I} \right\} = - \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial w_1}{\partial I} \right) - \left(\frac{\partial w_1}{\partial I} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial w_1}{\partial I} \right) \right]. \quad (4.68)$$

Utilizando os seguintes resultados

$$\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial w_1}{\partial I} \right) = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right] \cos \Theta_{j,n} \frac{n}{\nu_j - n}, \quad (4.69)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial I} \frac{\partial w_1}{\partial I} \right) = \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial I^2} J_n(r_j) \right] \sin \Theta_{j,n} \frac{1}{\nu_j - n}, \quad (4.70)$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\{w_1, \{w_1, \omega\}\} = \\ &- \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial I^2} J_n(r_j) \right] \sin \Theta_{j,n} \frac{1}{\nu_j - n} \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \right) \left(\sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_j}}{r_{\omega_j}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right] \cos \Theta_{j,n} \frac{n}{\nu_j - n} \right). \quad (4.71)$$

Utilizando propriedades trigonométricas de soma de ângulos, obtemos

$$\{w_1, \{w_1, \omega\}\} = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{m,n}^{i,j}, \quad (4.72)$$

onde

$$M_{m,n}^{i,j} \equiv D_{i,j,m,n} \left[\sin(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) + \sin(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}) \right], \quad (4.73)$$

e

$$D_{i,j,m,n} \equiv \frac{m}{2(\nu_i - m)(\nu_j - n)} \left[\left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_j) \right] - J_m(r_i) \left[\frac{\partial^2}{\partial I^2} J_n(r_j) \right] \right]. \quad (4.74)$$

O terceiro termo da equação (4.54) é

$$\{w_2(s > 2), \omega\} = -\frac{\partial}{\partial I} w_2(s > 2) = -\sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m} \frac{\partial}{\partial I} \Omega_{m,n}^{i,j} \right], \quad (4.75)$$

$$\{w_2(s = 2), \omega\} = -\frac{\partial}{\partial I} w_2(s = 2) = -\sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \frac{\partial}{\partial I} \Omega_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.76)$$

Definimos

$$K_{m,n}^{i,j} \equiv \frac{\partial}{\partial I} \Omega_{m,n}^{i,j} = E_{i,j,m,n}^{(+)} \sin(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - \zeta_{i,j}^{(-)} \tau - C_{i,j}^{(-)}) + E_{i,j,m,n}^{(-)} \sin(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - \zeta_{i,j}^{(+)} \tau - C_{i,j}^{(+)}), \quad (4.77)$$

onde

$$E_{i,j,m,n}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{[\theta_{i,j}^{(\mp)} - \theta_{m,n}^{(\mp)}]} \left[\frac{\partial}{\partial I} A_{i,j,m,n}^{(\pm)} \right]. \quad (4.78)$$

O novo ângulo até a segunda ordem é então, para $s > 2$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(s > 2) &= \omega + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m} \left[K_{m,n}^{i,j} + M_{m,n}^{i,j} \right] \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[M_{m,m}^{i,j} \right]. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Para $s = 2$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(s = 2) &= \omega + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \left[K_{m,n}^{i,j} + M_{m,n}^{i,j} \right] \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[M_{m,m}^{i,j} + M_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.3.2 Onda central super-harmônica.

Consideramos por simplicidade que o grupo de ondas seja constituído de uma onda central super-harmônica ($\nu_0 = \bar{\nu} = \text{inteiro}$), e que as outras ondas na proximidade dessa onda central sejam $\nu_i \neq \text{inteiro}$ para $i \neq 0$.

Cálculo de primeira ordem

No caso anterior de grupo de ondas totalmente sub-harmônicas (4.3.1), a solução para a equação (3.63) para ordem $n = 1$ é dada pela equação (4.21). Essa expressão, na presença de uma onda super-harmônica, apresenta divergência em $m = \bar{\nu}$, portanto devemos escolher \bar{H}_1 apropriado para evitar essa divergência. Nesse caso escolhemos

$$\bar{H}_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} J_{\bar{\nu}}(r_i) \cos \Theta_{i,\bar{\nu}}, \quad (4.81)$$

resultando na seguinte equação

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \frac{\partial w_1}{\partial \omega} = - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m}. \quad (4.82)$$

A solução para w_1 é dada por

$$w_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} J_m(r_i) \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m}. \quad (4.83)$$

O novo Hamiltoniano até a primeira ordem é então

$$\bar{H} = \bar{I} + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} J_{\bar{\nu}}(\bar{r}_i) \cos \bar{\Theta}_{i,\bar{\nu}},$$

onde \bar{r}_i e $\bar{\Theta}_{i,\bar{\nu}}$ significam que r_i e $\Theta_{i,\bar{\nu}}$ são escritos em termos das novas variáveis ação \bar{I} e ângulo $\bar{\omega}$.

Cálculo de segunda ordem

Faremos uso aqui da equação (4.28), usando $H_2 = 0$, resultando a seguinte equação

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = 2\bar{H}_2 - L_1(\bar{H}_1 + H_1). \quad (4.84)$$

Na subsecção anterior (4.3.1), na parte do cálculo da segunda ordem, obtivemos a expressão para $L_1 H_1$. Essa expressão é somente válida se todas as ondas são sub-harmônicas. Agora temos uma onda central que é super-harmônica, o que causa divergência para o termo $m = \bar{\nu}$.

Podemos aproveitar o mesmo cálculo da subseção anterior, evitando o termo $m = \bar{\nu}$. Portanto, para o caso presente, temos a expressão

$$L_1 H_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m,n}^{i,j}, \quad (4.85)$$

e para $L_1 \bar{H}_1$

$$L_1 \bar{H}_1 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \Gamma_{m,\bar{\nu}}^{i,j}. \quad (4.86)$$

Devemos lembrar que nesse caso a expressão para $A_{i,j,m,n}^{(\pm)}$ válida é a eq. (4.36). Nesse caso a equação de Lie para segunda ordem se reduz a

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = 2\bar{H}_2 - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Gamma_{m,\bar{\nu}}^{i,j} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.87)$$

Novamente, utilizando como primeira tentativa de encontrar \bar{H}_2 a solução trivial $\bar{H}_2 = 0$, obteríamos para solução de w_2

$$w_2 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Omega_{m,\bar{\nu}}^{i,j} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.88)$$

Analisamos a equação anterior utilizando as equações (4.40)-(4.42), vemos que o primeiro termo da equação (4.87) não contribui para divergências ou secularidades. Já no segundo termo, assim como no caso de ondas sub-harmônicas, os termos com $m = n$ e $m + n = 2\bar{\nu}$ contribuem para a divergência da solução, sendo necessário remover esses termos do w_2 por sua inclusão em \bar{H}_2 . Portanto para esse caso devemos escolher

$$\bar{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Gamma_{m,m}^{i,j} + \Gamma_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right], \quad (4.89)$$

e desta forma devemos resolver

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial w_2}{\partial \omega} = - \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Gamma_{m,\bar{\nu}}^{i,j} + \sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \Gamma_{m,n}^{i,j} \right] \quad (4.90)$$

A solução para w_2 é então

$$w_2 = \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Omega_{m,\bar{\nu}}^{i,j} + \sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \Omega_{m,n}^{i,j} \right]. \quad (4.91)$$

O Hamiltoniano perturbado até a segunda ordem é, portanto,

$$\bar{H} = \bar{I} + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} J_{\bar{\nu}}(\bar{r}_i) \cos \bar{\Theta}_{i,\bar{\nu}} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,j} + \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right]. \quad (4.92)$$

Cálculo do \bar{I}

De maneira análoga ao caso de ondas sub-harmônicas, temos

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= I - \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} J_m(r_i) \cos \Theta_{i,m} \frac{m}{\nu_i - m} \\
 &- \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \left[I_{m,n}^{i,j} - \Lambda_{m,n}^{i,j} \right] \\
 &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\Lambda_{m,m}^{i,j} + \Lambda_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right]. \tag{4.93}
 \end{aligned}$$

Cálculo do $\bar{\omega}$

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \omega + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_{E_i}}{r_{\omega_i}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \sin \Theta_{i,m} \frac{1}{\nu_i - m} \\
 &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \sum_{n \neq m, n \neq 2\bar{\nu}-m} \left[K_{m,n}^{i,j} + M_{m,n}^{i,j} \right] \\
 &+ \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \sum_{j=-n_j}^{n_j} \frac{r_{E_i} r_{E_j}}{r_{\omega_i} r_{\omega_j}} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left[M_{m,m}^{i,j} + M_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,j} \right]. \tag{4.94}
 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Análise do limiar de estocasticidade levando em conta as ilhas de ordem maior que um.

5.1 Introdução

No capítulo 2 generalizamos a discussão sobre a difusão estocástica de íons energéticos por ondas do tipo híbrida inferior, considerando casos onde um conjunto de ondas com frequências similares está presente no sistema. Foram feitas análises numéricas para o caso de ondas com fases coerentes e para o caso de ondas com fases aleatórias, e também uma análise teórica apropriada para tempos iniciais, para o caso de ondas com fases coerentes. No presente capítulo retomaremos a discussão do assunto, buscando encontrar ferramentas analíticas adequadas também para o caso de ondas com fases aleatórias. Visto que a situação do caso de ondas com fases aleatórias é mais representativa do ponto de vista da investigação - com um conjunto finito de ondas, busca-se representar o efeito de largura finita de um pacote de ondas, como os que se encontram em experimentos de interação onda-partícula em tokamaks - uma representação mais próxima pode ser obtida pela aplicação de uma média de *ensemble* sobre o conjunto inicial de fases aleatórias, um procedimento bastante custoso do ponto de vista de recursos numéricos. Em vez de analisar pela média de *ensemble*, suporemos uma interação onda-partícula considerando grande número de ondas e analisaremos a evolução temporal de longo prazo, de modo que a média temporal possa substituir a análise por média de ensemble.

No capítulo 2 também analisamos o *threshold* para formação de ilhas de primeira ordem. Aqui estaremos interessados em analisar as posições de ilhas de segunda ordem e de ordens maiores.

Para o estudo do comportamento estocástico do sistema descrito no capítulo 2, é necessário também analisar o *threshold* para as ilhas de segunda ordem e de ordens maiores no espaço

de fase. Na estimativa das ilhas, calculamos a média temporal das equações do Hamiltoniano. No sistema considerado no capítulo 2 temos problema quando tentamos encontrar ilhas de ordem maior que um, pois o Hamiltoniano em questão não possui termos que não se anulem na média, em ordem mais baixa da intensidade de perturbação, para ilhas de ordem maior que um. Tal problema é resolvido utilizando-se teorias de perturbação para expandir o Hamiltoniano em série de potências de acordo com a intensidade de perturbação, de modo que termos com dependência angular sejam da segunda ordem do parâmetro da intensidade da perturbação, α .

Para essa análise utilizaremos os resultados obtidos no capítulo 4. O novo Hamiltoniano é uma solução aproximada até a segunda ordem $\bar{H} = \bar{H}_0 + \alpha\bar{H}_1 + \alpha^2\bar{H}_2$. Conforme vimos no capítulo anterior, para o Hamiltoniano perturbado de segunda ordem, \bar{H}_2 , encontramos somatórias de termos $\bar{\Gamma}_{m,n}^{i,j}$ que são proporcionais a $\cos(\theta_{m,n}^{(\pm)}\bar{\omega} - \zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau - C_{i,j}^{(\pm)})$, onde aparece a dependência temporal. Na derivação da ilha de segunda ordem e ordens maiores, calculamos o valor $\langle \dot{\omega} \rangle$

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{I}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{I}} \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}} \right\rangle + \alpha^2 \left\langle \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{I}} \right\rangle. \quad (5.1)$$

Vemos do apêndice (A), equação (A.27), que a média temporal do terceiro termo da equação (5.1) é não nula somente quando $i = j$, portanto para uma evolução temporal de longo prazo os termos $i \neq j$ do novo Hamiltoniano podem ser considerados desprezíveis. Concentraremos nossa atenção somente nos termos $i = j$, e desprezaremos os termos $i \neq j$ do novo Hamiltoniano. Faremos também expansão em termos do parâmetro de distância entre uma onda e uma outra onda vizinha, Δ' , e analisaremos até a primeira ordem.

A estrutura desse capítulo é a seguinte: Analisaremos o novo Hamiltoniano para o sistema de interação onda-partícula, para o caso de ondas sub-harmônicas e para o caso de onda central super-harmônica, para ordem zero da expansão em Δ' ($O(\Delta') \approx 0$) na seção 5.2 e para primeira ordem da expansão em Δ' ($O(\Delta'^2) \approx 0$) na seção 5.3. Em ambos os casos, consideraremos grande número de ondas e evolução temporal de longo prazo. Na seção 5.4, calcularemos a posição das ilhas e o *threshold* de estocasticidade, para segunda ordem e para ordens superiores, utilizando os resultados das seções anteriores. Sumarizemos os principais resultados na seção 5.5.

5.2 Expansão em ordem zero do parâmetro Δ' .

Analisaremos a evolução temporal de longo prazo da interação onda-partícula, considerando um pacote de onda extremamente estreito com grande número de ondas de amplitudes iguais, $r_{E_i} = r_E$, utilizando os resultados obtidos no capítulo 4. Quando consideramos um grande número de ondas, o espaçamento Δ' entre uma onda e outra tende a ficar cada vez mais estreito, como mostra a relação

$$\Delta' \equiv \frac{\Delta}{n_i},$$

onde

$$n_i \equiv \frac{n_\omega - 1}{2}, \quad (5.2)$$

n_ω é o número de ondas considerado, como foi definido no capítulo 2. Δ é a largura do pacote de ondas considerado, e é por suposição um valor muito pequeno, $\Delta \ll 1$. Então quando consideramos um número muito grande de ondas, ou seja $n_\omega \gg 1 \rightarrow n_i \gg 1$, o Δ' será muito pequeno, e portanto desprezível em muitas situações. Nesse caso teremos, da equação 2.62 uma expansão em ordem zero do parâmetro Δ'

$$r_{\omega_i} \equiv 1 + i\Delta' \approx 1, \quad (5.3)$$

e então podemos considerar que

$$\bar{r}_i \equiv r_{\omega_i} \bar{R} \approx \bar{R}, \quad (5.4)$$

e

$$\nu_i \equiv r_{\omega_i} \bar{\nu} \approx \bar{\nu}. \quad (5.5)$$

Essa aproximação só é válida para pacote de onda extremamente estreito, caso contrário, devemos prosseguir os cálculos usando a forma geral do r_{ω_i} , o que será visto na seção 5.3.

5.2.1 Ondas sub-harmônicas.

Para evolução temporal de longo prazo consideraremos o Hamiltoniano perturbado para caso de ondas sub-harmônicas, dado pelas equações (4.50) e (4.51), somente os termos $i = j$.

$$\bar{H}(s > 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i}], \quad (5.6)$$

$$\bar{H}(s = 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} + \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i}]. \quad (5.7)$$

Analisaremos cada valor de $\bar{\Gamma}_{m,n}^{i,i}$. Utilizando as equações (4.35) e (4.37) obtemos para $m = n$

$$\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} = A_{i,i,m,m}^{(+)} \cos(0) + A_{i,i,m,m}^{(-)} \cos(2(m\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i)), \quad (5.8)$$

onde

$$A_{i,i,m,m}^{(+)} = \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}, \quad (5.9)$$

e

$$A_{i,i,m,m}^{(-)} = -\frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{2(\bar{\nu} - m)^2} [0 - 0] = 0. \quad (5.10)$$

Definindo

$$S_1^{sub}(\bar{R}) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}, \quad (5.11)$$

temos

$$\bar{H}(s > 2) = \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 S_1^{sub}(\bar{R}) = \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}), \quad (5.12)$$

onde utilizamos a relação (2.59).

Se $s = 2$, devemos calcular também o termo correspondente para $m + n = 2\bar{\nu}$,

$$\bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i} = A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} \cos(2(m - \bar{\nu})\bar{\omega}) + A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(-)} \cos(2(\bar{\nu}\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i)), \quad (5.13)$$

onde

$$A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} = \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right]}{2(\bar{\nu} - m)(\bar{\nu} - 2\bar{\nu} + m)} [2\bar{\nu} - 2\bar{\nu}] = 0, \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned} A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(-)} &= -\frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right]}{2(\bar{\nu} - m)(\bar{\nu} - 2\bar{\nu} + m)} [-2(m - \bar{\nu})] \\ &= \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Definindo

$$S_2^{sub}(\bar{R}) \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}, \quad (5.16)$$

temos

$$\bar{H}(s = 2) = \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{sub}(\bar{R}) + S_2^{sub}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - 2\varphi_i) \right]. \quad (5.17)$$

A fim de podermos comparar com os resultados para o caso de uma onda encontrados nos artigos de Chia *et al* [19] e Benisti *et al* [46], o que será feito na seção 5.4, usamos a função geratriz do tipo 2

$$F_2(\bar{\omega}, \tilde{I}, \tau) \equiv \tilde{I}(\bar{\omega} - \tau). \quad (5.18)$$

Obtemos as novas variáveis utilizando as equações 2.20 e 2.21

$$\bar{I} = \tilde{I}, \quad (5.19)$$

$$\tilde{\omega} = \bar{\omega} - \tau, \quad (5.20)$$

e o novo Hamiltoniano

$$\tilde{H} = \bar{H} - \bar{I}. \quad (5.21)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s > 2) &= \frac{\alpha^2}{2} [S_1^{sub}(\tilde{R})], \\ \tilde{H}(s = 2) &= \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{sub}(\tilde{R}) + S_2^{sub}(\tilde{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \cos(2\bar{\nu}\tilde{\omega} - 2\varphi_i) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.2.2 Onda central super-harmônica.

O Hamiltoniano perturbado para o caso de onda central super-harmônica para evolução temporal de longo prazo é dado pela equação (4.92) considerando somente os termos $i = j$

$$\bar{H} \approx \bar{I} + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \cos(\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - \varphi_i) + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \sum_{m \neq \bar{\nu}} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} + \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i}]. \quad (5.23)$$

Analisaremos cada valor de $\bar{\Gamma}_{m,n}^{i,i}$. Utilizando as equações (4.35) e (4.36) obtemos para $m = n$

$$\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} = A_{i,i,m,m}^{(+)} \cos(0) + A_{i,i,m,m}^{(-)} \cos(2(m\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i)), \quad (5.24)$$

onde

$$A_{i,i,m,m}^{(+)} = \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}, \quad (5.25)$$

e

$$A_{i,i,m,m}^{(-)} = \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)} - \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)} = 0. \quad (5.26)$$

Definindo

$$S_1^{super}(\bar{R}) \equiv \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{mJ_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - m)}, \quad (5.27)$$

temos

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} \bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} = S_1^{super}(\bar{R}). \quad (5.28)$$

Para $m + n = 2\bar{\nu}$

$$\bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i} = A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} \cos(2(m - \bar{\nu})\bar{\omega}) + A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(-)} \cos(2(\bar{\nu}\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i)), \quad (5.29)$$

onde

$$A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} = \frac{1}{2(\bar{\nu}-m)} \left(m J_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right] + (2\bar{\nu}-m) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_m(\bar{R}) \right] J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}), \right) \quad (5.30)$$

e

$$A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(-)} = \frac{1}{2(\bar{\nu}-m)} \left(m J_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right] - (2\bar{\nu}-m) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_m(\bar{R}) \right] J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}). \right) \quad (5.31)$$

Temos então

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i} = \left(\sum_{m \neq \bar{\nu}} A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} \cos(2(m-\bar{\nu})\bar{\omega}) \right) + \left(\sum_{m \neq \bar{\nu}} A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(-)} \right) \cos(2(\bar{\nu}\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i)). \quad (5.32)$$

O primeiro termo da equação (5.32) pode ser re-escrito usando uma nova notação

$$x = \bar{\nu} - m \rightarrow \begin{cases} m = \bar{\nu} - x \\ 2\bar{\nu} - m = \bar{\nu} + x \\ m - \bar{\nu} = -x \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq \bar{\nu}} A_{i,i,m,2\bar{\nu}-m}^{(+)} \cos(2(m-\bar{\nu})\bar{\omega}) &= \sum_{x \neq 0} A_{i,i,\bar{\nu}-x,\bar{\nu}+x}^{(+)} \cos(2x\bar{\omega}) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2x} \left((\bar{\nu}-x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] + (\bar{\nu}+x) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \right] J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right) \cos(2x\bar{\omega}) \\ &+ \sum_{x=-1}^{-\infty} \frac{1}{2x} \left((\bar{\nu}-x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] + (\bar{\nu}+x) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \right] J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right) \cos(2x\bar{\omega}) \end{aligned}$$

Substituindo $x \rightarrow -x$ no segundo termo da equação acima temos

$$\begin{aligned} &\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2x} \left((\bar{\nu}-x) J_{\bar{\nu}-x} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}+x} \right] + (\bar{\nu}+x) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}-x} \right] J_{\bar{\nu}+x} \right) \cos(2x\bar{\omega}) \\ &- \sum_{x=-1}^{-\infty} \frac{1}{2x} \left((\bar{\nu}+x) J_{\bar{\nu}+x} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}-x} \right] + (\bar{\nu}-x) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{\bar{\nu}+x} \right] J_{\bar{\nu}-x} \right) \cos(2x\bar{\omega}) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Podemos escrever o segundo termo da equação (5.32) usando as expressões seguintes:

$$S_2^{super}(\bar{R}) \equiv \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu}-m)}, \quad (5.35)$$

$$S_3^{super}(\bar{R}) \equiv \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{(2\bar{\nu}-m) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_m(\bar{R}) \right] J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{(\bar{\nu}-m)}. \quad (5.36)$$

Temos então

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i} = \frac{1}{2} [S_2^{super}(\bar{R}) - S_3^{super}(\bar{R})] \cos(2\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - 2\varphi_i). \quad (5.37)$$

Podemos notar que, utilizando a seguinte notação

$$z = 2\bar{\nu} - m \rightarrow \begin{cases} m = 2\bar{\nu} - z \\ \bar{\nu} - m = z - \bar{\nu} \end{cases} \quad (5.38)$$

na equação (5.36), obtemos

$$S_3^{super}(\bar{R}) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{(2\bar{\nu} - m) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_m(\bar{R}) \right] J_{2\bar{\nu} - m}(\bar{R})}{(\bar{\nu} - m)} = - \sum_{z \neq \bar{\nu}} \frac{z J_z(\bar{R}) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{I}} J_{2\bar{\nu} - z}(\bar{R}) \right]}{(\bar{\nu} - z)} = -S_2^{super}(\bar{R}). \quad (5.39)$$

Desse modo

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} \bar{\Gamma}_{m, 2\bar{\nu} - m}^{i, i} = S_2^{super}(\bar{R}) \cos(2\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - 2\varphi_i), \quad (5.40)$$

e o novo Hamiltoniano pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \bar{H} = \bar{I} + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \cos(\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - \varphi_i) \\ + \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{super}(\bar{R}) + S_2^{super}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \cos(2\bar{\nu}(\bar{\omega} - \tau) - 2\varphi_i) \right]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Usando a função geratriz do tipo 2, assim como em (5.18), obtemos

$$\tilde{H} = \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E J_{\bar{\nu}}(\tilde{R}) \cos(\bar{\nu}\tilde{\omega} - \varphi_i) + \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{super}(\tilde{R}) + S_2^{super}(\tilde{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} r_E^2 \cos(2\bar{\nu}\tilde{\omega} - 2\varphi_i) \right]. \quad (5.42)$$

5.3 Expansão em primeira ordem do parâmetro Δ' .

Na expansão em primeira ordem do parâmetro Δ' temos as seguintes aproximações (mais detalhes para algumas das aproximações podem ser vistos no apêndice C)

$$\frac{1}{(\nu_i - m)} \approx \frac{1}{(\bar{\nu} - m)} \left(1 - i\Delta' \frac{\bar{\nu}}{(\bar{\nu} - m)} \right), \quad (5.43)$$

$$\frac{1}{r_{\omega_i}} = \frac{1}{(1 + i\Delta')} \approx 1 - i\Delta', \quad (5.44)$$

$$\frac{1}{r_{\omega_i}^2} = \frac{1}{(1 + i\Delta')^2} \approx 1 - 2i\Delta', \quad (5.45)$$

$$J_m(r_i) \approx J_m(R) + i\Delta' R J'_m(R), \quad (5.46)$$

$$\Gamma_{m, n}^{i, i} \approx \Gamma_{m, n}^{(0)} + i\Delta' \Gamma_{m, n}^{(1)}, \quad (5.47)$$

onde

$$\Gamma_{m, n}^{(0)} \equiv a_{m, n}^{(+)} \cos(\theta_{m, n}^{(-)} \omega) + a_{m, n}^{(-)} \cos(\theta_{m, n}^{(+)} \omega - 2\nu_i \tau - 2\varphi_i), \quad (5.48)$$

$$\Gamma_{m,n}^{(1)} \equiv b_{m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)}\omega) + b_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i), \quad (5.49)$$

$$a_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv \frac{1}{2(\bar{\nu} - m)R} \left[mJ_m(R)J'_n(R) \pm nJ_n(R)J'_m(R) \right], \quad (5.50)$$

e

$$b_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv R \left[\frac{\partial}{\partial R} a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + \left[1 - \frac{m}{(\bar{\nu} - m)} \right] a_{m,n}^{(\pm)}(R), \quad (5.51)$$

lembrando que $\theta_{m,n}^{(\pm)} = (m \pm n)$, conforme definido no apêndice A.

O Hamiltoniano para ambos os casos, ondas sub-harmônicas e onda central super-harmônica, tem o seguinte formato para a aproximação em primeira ordem do parâmetro Δ' ,

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \alpha\bar{H}_1 + \alpha^2\bar{H}_2. \quad (5.52)$$

Devemos observar que o termo \bar{H}_2 têm uma forma geral que é proporcional a

$$\bar{H}_2 \sim \sum_i \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_m \Gamma_{m,n}^{i,i}, \quad (5.53)$$

onde o índice n representa tanto os casos em que $n = m$ como os casos em que $n = 2\bar{\nu} - m$, dependendo do que está sendo calculado. Utilizando as equações (5.45) e (5.47) temos

$$\bar{H}_2 \sim \sum_i r_E^2 \left(\sum_m \Gamma_{m,n}^{(0)} \right) + \Delta' \sum_i r_E^2 i \left(\sum_m \Gamma_{m,n}^{(1)} - 2 \sum_m \Gamma_{m,n}^{(0)} \right). \quad (5.54)$$

Vemos que o segundo termo da equação (5.54) tem uma somatória no índice i entre $-n_i < i < n_i$, com um índice i multiplicando somatórias no índice m das funções $\Gamma_{m,n}^{(0)}$ e $\Gamma_{m,n}^{(1)}$. Notamos que o primeiro termo dessas funções, que são definidas pelas equações (5.48) e (5.49), não têm dependência no índice i , de modo que a somatória desse primeiro termo em i é nulo. Desse modo temos

$$\begin{aligned} \bar{H}_2 \sim \sum_i r_E^2 \left(\sum_m a_{m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)}\omega) + \sum_m a_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right) \\ + \Delta' \sum_i r_E^2 i \left(\sum_m b_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) - 2 \sum_m a_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Definimos as seguintes equações

$$Z_1 \equiv \sum_m a_{m,n}^{(+)}(R) \cos(\theta_{m,n}^{(-)}\omega), \quad (5.56)$$

$$Z_2(i) \equiv \sum_m a_{m,n}^{(-)}(R) \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i), \quad (5.57)$$

$$Z_3(i) \equiv \sum_m b_{m,n}^{(-)}(R) \cos(\theta_{m,n}^{(+)}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i), \quad (5.58)$$

onde o parêntese (i) nas equações (5.57) e (5.58) indica a dependência no índice i . Desse modo o \bar{H}_2 fica

$$\bar{H}_2 \sim \left(Z_1 + r_E^2 \sum_i Z_2(i) \right) + \Delta' r_E^2 \sum_i i \left(Z_3(i) - 2Z_2(i) \right), \quad (5.59)$$

em cujo primeiro termo foi utilizada a relação

$$\sum_i r_E^2 \equiv 1.$$

5.3.1 Ondas sub-harmônicas.

Analisaremos aqui as equações (4.50) e (4.51). Da equação (4.50) considerando somente os termos $j = i$

$$\bar{H}(s > 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i}].$$

Utilizaremos agora as equações (5.56) - (5.59) para o caso $n = m$, para calcular o segundo termo da equação anterior. Nesse caso temos

$$Z_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,m}^{(+)}(\bar{R}) \cos(0\bar{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_m(\bar{R})}{(\bar{\nu} - m) \bar{R}} = S_1^{sub}(\bar{R}), \quad (5.60)$$

o termo $a_{m,m}^{(-)}$ é zero, então

$$Z_2(i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,m}^{(-)}(\bar{R}) \cos(2m\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0 = 0, \quad (5.61)$$

o termo $b_{m,n}^{(-)}$ é em função do termo $a_{m,m}^{(-)}$ que é nulo, portanto

$$Z_3(i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m,m}^{(-)}(\bar{R}) \cos(2m\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0 = 0. \quad (5.62)$$

Obtemos

$$\bar{H}(s > 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}), \quad (5.63)$$

que é a mesma expressão obtida para o caso de expansão de ordem zero (5.12).

Para $H(s = 2)$, temos a equação (4.51) considerando somente os termos $j = i$,

$$\bar{H}(s = 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} + \frac{\alpha^2}{2} \sum_i \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i}. \quad (5.64)$$

Expandiremos o Hamiltoniano em primeira ordem em Δ' . O segundo termo da equação (5.64) já foi calculado e é igual ao segundo termo da equação (5.63). O terceiro termo da equação (5.64), implica em encontrarmos o resultado da equação (5.59) calculando as equações (5.56)-(5.58) para o caso $n = 2\bar{\nu} - m$.

Calcularemos agora cada uma das equações (5.56)-(5.58). Utilizando a equação (5.56) temos

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(+)}(\bar{R}) \cos(2(m-\bar{\nu})\bar{\omega}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(\bar{R})J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{2(\bar{\nu}-m)\bar{R}} \cos(2(m-\bar{\nu})\bar{\omega}) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\bar{\nu}-m)J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})J'_m(\bar{R})}{2(\bar{\nu}-m)\bar{R}} \cos(2(m-\bar{\nu})\bar{\omega}). \end{aligned}$$

Utilizando a relação (5.33) temos

$$Z_1 = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2xR} (\bar{\nu}-x)J_{\bar{\nu}-x}(R)J'_{\bar{\nu}+x}(R) \cos(2x\bar{\omega}) + \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2xR} (\bar{\nu}+x)J_{\bar{\nu}+x}(R)J'_{\bar{\nu}-x}(R) \cos(2x\bar{\omega}). \quad (5.65)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação (5.64) temos

$$Z_1 = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2xR} (\bar{\nu}-x)J_{\bar{\nu}-x}(R)J'_{\bar{\nu}+x}(R) \cos(2x\bar{\omega}) - \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x'R} (\bar{\nu}-x')J_{\bar{\nu}-x'}(R)J'_{\bar{\nu}+x'}(R) \cos(2x'\bar{\omega}) = 0. \quad (5.66)$$

Para $Z_2(i)$, utilizando a equação (5.57) temos

$$Z_2(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}), \quad (5.67)$$

onde

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(\bar{R})J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{2(\bar{\nu}-m)\bar{R}} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(2\bar{\nu}-m)J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})J'_m(\bar{R})}{2(\bar{\nu}-m)\bar{R}}. \quad (5.68)$$

Utilizando a relação (5.33) podemos re-escrever a equação (5.68)

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} a_{\bar{\nu}-x,\bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{2x\bar{R}} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R})J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) - \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}+x)}{2x\bar{R}} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R})J'_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}). \quad (5.69)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação (5.69) temos

$$\begin{aligned} \sum_{x=-\infty}^{\infty} a_{\bar{\nu}-x,\bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x\bar{R}} (\bar{\nu}-x)J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R})J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) + \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x'\bar{R}} (\bar{\nu}-x')J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R})J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}) = \\ &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x\bar{R}} (\bar{\nu}-x)J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R})J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Re-escrevendo na relação antiga, anterior à relação (5.33) temos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(\bar{R})J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{(\bar{\nu}-m)\bar{R}} = S_2^{sub}(\bar{R}) \quad (5.71)$$

e então

$$Z_2(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) S_2^{sub}(\bar{R}). \quad (5.72)$$

Para $Z_3(i)$, utilizando a equação (5.58) temos

$$Z_3(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}), \quad (5.73)$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\bar{R} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{R}} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right] + \left[1 - \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} \right] a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) \\ &= \bar{R} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) \right] + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.74)$$

O primeiro e o segundo termos da equação (5.74) são resolvidos usando a equação (5.71).

O terceiro termo da equação (5.74), usando a relação (5.33) é

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} a_{\bar{\nu}-x,\bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) \\ &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}-x)}{2x} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] - \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}+x)}{2x} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação (5.75) temos

$$\begin{aligned} &\sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} a_{\bar{\nu}-x,\bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) \\ &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}-x)}{2x} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] - \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x'=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}+x')}{x'} \left[\frac{(\bar{\nu}-x')}{2x'} J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}) \right] \\ &= - \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x\bar{R}} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Re-escrevendo na relação antiga, anterior à relação (5.33) temos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{(\bar{\nu}-m)\bar{R}} = -S_2^{sub}(\bar{R}). \quad (5.77)$$

Temos então

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{sub}(\bar{R}) \right) + 2S_2^{sub}(\bar{R}), \quad (5.78)$$

e portanto

$$Z_3(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \left[\bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{sub}(\bar{R}) \right) + 2S_2^{sub}(\bar{R}) \right]. \quad (5.79)$$

O terceiro termo da equação (5.64), utilizando a equação (5.59) é

$$\sum_i \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i} \approx \left(Z_1 + r_E^2 \sum_i Z_2(i) \right) + \Delta' r_E^2 \sum_i i (Z_3(i) - 2Z_2(i))$$

$$= r_E^2 S_2^{sub}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) + \Delta' r_E^2 \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{sub}(\bar{R}) \right) \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i). \quad (5.80)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \bar{H}(s=2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{sub}(\bar{R}) + S_2^{sub}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right] \\ + \Delta' \frac{\alpha^2}{2} \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{sub}(\bar{R}) \right) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (5.81)$$

5.3.2 Onda central super-harmônica.

O Hamiltoniano perturbado para o caso de onda central super-harmônica, para evolução temporal de longo prazo, é dado pela equação (4.92) considerando somente os termos $i = j$

$$\bar{H} \approx \bar{I} + \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E}{r_{\omega_i}} J_{\bar{\nu}}(\bar{r}_i) \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m \neq \bar{\nu}} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i} + \bar{\Gamma}_{m,2\bar{\nu}-m}^{i,i}]. \quad (5.82)$$

Calcularemos a expansão em primeira ordem no parâmetro Δ' do segundo, terceiro e quarto termo dessa equação (5.82). O segundo termo da equação (5.82), utilizando as equações (5.44) e (5.46) é

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E}{r_{\omega_i}} J_{\bar{\nu}}(\bar{r}_i) \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \\ & \approx \alpha r_E \left[J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) + \Delta' [R J'_{\bar{\nu}}(\bar{R}) - J_{\bar{\nu}}(\bar{R})] \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \right]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

O terceiro termo da equação (5.82), utilizando as relações (5.52), (5.56 - 5.59) é

$$\frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m \neq \bar{\nu}} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i}] = \frac{\alpha^2}{2} r_E^2 \left[(Z_1 + r_E^2 \sum_i Z_2(i)) + \Delta' r_E^2 \sum_i i (Z_3(i) - 2Z_2(i)) \right], \quad (5.84)$$

As quantidades Z_1 , Z_2 e Z_3 podem ser obtidas de forma análoga ao que foi feito nas eqs. (5.60), (5.61) e (5.62). Ou seja, são dadas por

$$Z_1 = \sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m,m}^{(+)}(\bar{R}) \cos(0\bar{\omega}) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_m(\bar{R})}{(\bar{\nu} - m) \bar{R}} = S_1^{super}(\bar{R}), \quad (5.85)$$

o termo $a_{m,m}^{(-)}$ é zero, então

$$Z_2(i) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m,m}^{(-)}(\bar{R}) \cos(2m\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0 = 0, \quad (5.86)$$

o termo $b_{m,n}^{(-)}$ é em função do termo $a_{m,m}^{(-)}$ que é nulo, portanto

$$Z_3(i) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} b_{m,m}^{(-)}(\bar{R}) \cos(2m\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} 0 = 0. \quad (5.87)$$

Portanto, obtemos

$$\frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m \neq \bar{\nu}} [\bar{\Gamma}_{m,m}^{i,i}] \approx \frac{\alpha^2}{2} r_E^2 S_1^{super}(\bar{R}). \quad (5.88)$$

O quarto termo da equação (5.81) pode ser escrito de forma análoga à forma da equação (5.83), mas com expressões diferentes para as quantidades Z_1 , Z_2 e Z_3 ,

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(+)}(\bar{R}) \cos(2(m - \bar{\nu})\bar{\omega}) \\ &= \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{1}{2(\bar{\nu} - m)\bar{R}} \left[m J_m(\bar{R}) J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) + (2\bar{\nu} - m) J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) J'_m(\bar{R}) \right] \cos(2(m - \bar{\nu})\bar{\omega}). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Utilizando a relação (5.33) temos

$$Z_1 = \sum_{x \neq 0} \frac{1}{2x\bar{R}} \left[(\bar{\nu} - x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) + (\bar{\nu} + x) J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \right] \cos(2x\bar{\omega}) \quad (5.90)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação 5.90 temos

$$Z_1 = \sum_{x \neq 0} \frac{1}{2x\bar{R}} (\bar{\nu} - x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \cos(2x\bar{\omega}) - \sum_{x' \neq 0} \frac{1}{2x'\bar{R}} (\bar{\nu} - x') J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}) \cos(2x'\bar{\omega}) = 0 \quad (5.91)$$

Para $Z_2(i)$ temos

$$Z_2(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}), \quad (5.92)$$

onde

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m,2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{2(\bar{\nu} - m)\bar{R}} - \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{(2\bar{\nu} - m) J_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R}) J'_m(\bar{R})}{2(\bar{\nu} - m)\bar{R}}. \quad (5.93)$$

Utilizando a relação 5.33 podemos re-escrever a equação 5.93

$$\sum_{x \neq 0} a_{\bar{\nu}-x, \bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu} - x)}{2x\bar{R}} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) - \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu} + x)}{2x\bar{R}} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}). \quad (5.94)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação 5.94 temos

$$\begin{aligned} \sum_{x \neq 0} a_{\bar{\nu}-x, \bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{x \neq 0} \frac{1}{2x\bar{R}} (\bar{\nu} - x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) + \sum_{x' \neq 0} \frac{1}{2x'\bar{R}} (\bar{\nu} - x') J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}) = \\ &= \sum_{x \neq 0} \frac{1}{x\bar{R}} (\bar{\nu} - x) J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Re-escrevendo na relação antiga, anterior à relação 5.33 temos

$$\sum_{m \neq 0} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{(\bar{\nu}-m)\bar{R}} = S_2^{super}(\bar{R}) \quad (5.96)$$

e então

$$Z_2(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) S_2^{super}(\bar{R}). \quad (5.97)$$

Para $Z_3(i)$ temos

$$Z_3(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \sum_{m \neq \bar{\nu}} b_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}), \quad (5.98)$$

onde

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq \bar{\nu}} b_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{m \neq \bar{\nu}} \left(\bar{R} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{R}} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right] + \left[1 - \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} \right] a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) \\ &= \bar{R} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{R}} \left(\sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) \right] + \left(\sum_{m \neq \bar{\nu}} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) \right) - \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.99)$$

O primeiro e o segundo termos da equação (5.99) são resolvidos usando a equação (5.96).

Quanto ao terceiro termo da equação (5.99), é similar ao terceiro termo da equação (5.74).

Portanto, prosseguindo de forma similar ao que foi feito para obter a equação (5.77), usamos a relação (5.33) e obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) &= \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} a_{\bar{\nu}-x, \bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) \\ &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}-x)}{2x} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] - \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}+x)}{2x} J_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) \right]. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Substituindo $x \rightarrow -x'$ no segundo termo da equação (5.100) temos

$$\begin{aligned} &\sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} a_{\bar{\nu}-x, \bar{\nu}+x}^{(-)}(\bar{R}) \\ &= \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x)}{x} \left[\frac{(\bar{\nu}-x)}{2x} J_{\bar{\nu}-x}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x}(\bar{R}) \right] - \frac{1}{\bar{R}} \sum_{x' \neq 0} \frac{(\bar{\nu}+x')}{x'} \left[\frac{(\bar{\nu}-x')}{2x'} J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}) \right] \\ &= - \sum_{x' \neq 0} \frac{(\bar{\nu}-x')}{x' \bar{R}} J_{\bar{\nu}-x'}(\bar{R}) J'_{\bar{\nu}+x'}(\bar{R}). \end{aligned} \quad (5.101)$$

Re-escrevendo na relação antiga, anterior à relação (5.33) temos

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m}{(\bar{\nu}-m)} a_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = - \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(\bar{R}) J'_{2\bar{\nu}-m}(\bar{R})}{(\bar{\nu}-m)\bar{R}} = -S_2^{super}(\bar{R}). \quad (5.102)$$

Temos então

$$\sum_{m \neq \bar{\nu}} b_{m, 2\bar{\nu}-m}^{(-)}(\bar{R}) = \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{super}(\bar{R}) \right) + 2S_2^{super}(\bar{R}), \quad (5.103)$$

e portanto

$$Z_3(i) = \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \left[\bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{super}(\bar{R}) \right) + 2S_2^{super}(\bar{R}) \right]. \quad (5.104)$$

O quarto termo da equação (5.82) é então

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{2} \sum_i \frac{r_E^2}{r_{\omega_i}^2} \sum_{m \neq \bar{\nu}} \bar{\Gamma}_{m, 2\bar{\nu}-m}^{i,i} \approx \frac{\alpha^2}{2} \left[(Z_1 + r_E^2 \sum_i Z_2(i)) + \Delta' r_E^2 \sum_i i(Z_3(i) - 2Z_2(i)) \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{2} \left[r_E^2 S_2^{super}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) + \Delta' r_E^2 \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{super}(\bar{R}) \right) \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right]. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Finalmente, retornando à equação (5.82) e usando (5.83), (5.88) e (5.105),

$$\begin{aligned} \bar{H} &\approx \bar{I} + \alpha r_E \left[J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) + \Delta' [R J'_{\bar{\nu}}(\bar{R}) - J_{\bar{\nu}}(\bar{R})] \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \right] \\ &+ \frac{\alpha^2}{2} \left[S_1^{super}(\bar{R}) + S_2^{super}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right] \\ &+ \Delta' \frac{\alpha^2}{2} \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{super}(\bar{R}) \right) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (5.106)$$

5.4 O limiar das ilhas de ordem maior que um.

A partir do novo Hamiltoniano com dependência em α^2 , pode-se estimar o limiar para as ilhas de ordem maior que um ($p > 1$). Para isso, precisamos primeiro calcular a equação (5.1)

$$\langle \dot{\omega} \rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{I}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial \bar{I}} \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{I}} \right\rangle + \alpha^2 \left\langle \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{I}} \right\rangle. \quad (5.107)$$

Nas seções anteriores obtivemos os seguintes Hamiltonianos,

$$\begin{aligned}
O(\Delta') \sim 0 \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l}
\text{ondas sub-harmônicas:} \\
\bar{H}(s > 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}), \\
\bar{H}(s = 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}) + \frac{\alpha^2}{2} S_2^{sub}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\bar{\nu}\tau - 2\varphi_i), \\
\text{onda central super-harmônica:} \\
\bar{H}(s = 1) \approx \bar{I} + \alpha r_E J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \bar{\nu}\tau - \varphi_i) \\
+ \frac{\alpha^2}{2} S_1^{super}(\bar{R}) + \frac{\alpha^2}{2} S_2^{super}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\bar{\nu}\tau - 2\varphi_i),
\end{array} \right. \quad (5.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O(\Delta'^2) \sim 0 \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l}
\text{ondas sub-harmônicas:} \\
\bar{H}(s > 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}), \\
\bar{H}(s = 2) \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}) + \frac{\alpha^2}{2} S_2^{sub}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \\
+ \Delta' \frac{\alpha^2}{2} \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{sub}(\bar{R}) \right) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i), \\
\text{onda central super-harmônica:} \\
\bar{H}(s = 1) \approx \bar{I} + \alpha r_E J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \\
+ \frac{\alpha^2}{2} S_1^{super}(\bar{R}) + \frac{\alpha^2}{2} S_2^{super}(\bar{R}) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \\
+ \Delta' \left[\alpha r_E \left(\bar{R} J'_{\bar{\nu}}(\bar{R}) - J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \right) \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \right. \\
\left. + \frac{\alpha^2}{2} \bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_2^{super}(\bar{R}) \right) r_E^2 \sum_{i=-n_i}^{n_i} i \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \right].
\end{array} \right. \quad (5.109)
\end{aligned}$$

Observamos das equações (5.108) e (5.109) que cada termo \bar{H}_n do Hamiltoniano, onde $n = 0, 1, 2$, é uma função separável em função de \bar{R} e função de τ , de modo que podemos resolver a relação (5.107) da seguinte forma

$$\left\langle \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial \bar{I}} \right\rangle = \frac{1}{\bar{R}} \left\langle \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial \bar{R}} \right\rangle = \frac{1}{\bar{R}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{R}} \langle \bar{H}_n \rangle \right). \quad (5.110)$$

Resolveremos primeiro a média temporal e logo em seguida calcularemos a derivada parcial

em \bar{R} de cada termo \bar{H}_n do Hamiltoniano. Para calcular as médias que aparecem nas equações (5.108) e (5.109) podemos proceder da forma seguinte:

Utilizando a relação (A.27), temos

$$\langle \cos(2\bar{\nu}\bar{\omega} - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i) \rangle = 0. \quad (5.111)$$

Utilizando as relações (2.114) e (2.115), obtemos

$$\langle \cos(\bar{\nu}\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i) \rangle = \delta_{\bar{\nu},n} \cos(\psi_i), \quad (5.112)$$

onde

$$\psi_i = n\bar{\omega} - \nu_i\tau - \varphi_i. \quad (5.113)$$

Para $R \geq \bar{\nu} \gg 1$, a aproximação em ordem zero no parâmetro Δ' é suficiente. Consideraremos, como foi feito no capítulo 2, que $r_E = (n_\omega)^{-1/2}$.

A média do Hamiltoniano é então

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ondas sub-harmônicas:} \\ \langle \bar{H}(s \geq 2) \rangle \approx \bar{I} + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{sub}(\bar{R}), \\ \\ \text{onda central super-harmônica:} \\ \langle \bar{H}(s = 1) \rangle \approx \bar{I} + \alpha(n_\omega)^{1/2} J_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \left[\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\cos(\psi_i)}{n_\omega} \right] + \frac{\alpha^2}{2} S_1^{super}(\bar{R}). \end{array} \right. \quad (5.114)$$

Obtemos $\langle \dot{\omega} \rangle$ utilizando a relação (5.107)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ondas sub-harmônicas:} \\ \langle \dot{\omega}(s \geq 2) \rangle \approx 1 + \alpha^2 \frac{1}{2\bar{R}} \frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_1^{sub}(\bar{R}), \\ \\ \text{onda central super-harmônica:} \\ \langle \dot{\omega}(s = 1) \rangle \approx 1 + \alpha(n_\omega)^{1/2} \frac{1}{\bar{R}} J'_{\bar{\nu}}(\bar{R}) \left[\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\cos(\psi_i)}{n_\omega} \right] + \alpha^2 \frac{1}{2\bar{R}} \frac{\partial}{\partial \bar{R}} S_1^{super}(\bar{R}). \end{array} \right. \quad (5.115)$$

Podemos definir

$$F(R) \equiv \frac{1}{4} \sum_m \frac{m}{(m - \nu)} \frac{\partial^2 J_m^2(R)}{\partial I^2}. \quad (5.116)$$

Lembrando que a definição geral do S_1 é

$$S_1(R) \equiv \sum_m \frac{m}{(\bar{\nu} - m)} J_m(R) \frac{\partial J_m(R)}{\partial I}, \quad (5.117)$$

podemos relacionar $F(R)$ com $S_1(R)$, pois podemos obter da equação (5.116) o seguinte

$$\begin{aligned} F(R) &= \frac{1}{4} \sum_m \frac{m}{(m-\nu)} \frac{\partial^2 J_m^2(R)}{\partial I^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial I} \sum_m \frac{m}{(m-\nu)} 2J_m(R) \frac{\partial J_m(R)}{\partial I} \\ &= -\frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\sum_m \frac{m}{(\nu-m)} J_m(R) \frac{\partial J_m(R)}{\partial I} \right], \end{aligned}$$

e portanto

$$F(R) = -\frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R} S_1(R). \quad (5.118)$$

Definimos também

$$\beta(R, \bar{\nu}) \equiv \frac{1}{F(R)R} J'_{\bar{\nu}}(R). \quad (5.119)$$

Utilizando essas definições (5.118) e (5.119), podemos re-escrever as eqs. (5.115)

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{ondas sub-harmônicas:} \\ \langle \dot{\omega}(s \geq 2) \rangle \approx 1 - \alpha^2 F^{sub}(\bar{R}), \\ \\ \textbf{onda central super-harmônica:} \\ \langle \dot{\omega}(s = 1) \rangle \approx 1 - \alpha^2 F^{super}(\bar{R}) \left[1 - (n_\omega)^{1/2} \left[\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\cos(\psi_i)}{n_\omega} \right] \frac{\beta(\bar{R}, \bar{\nu})}{\alpha} \right]. \end{array} \right. \quad (5.120)$$

Para uma notação mais compacta, definimos

$$\mathcal{A} \equiv (n_\omega)^{1/2} \sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\cos(\psi_i)}{n_\omega} \frac{\beta(R, \bar{\nu})}{\alpha}, \quad (5.121)$$

e temos portanto para as eqs. (5.120)

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{onda central super-harmônica:} \\ \langle \dot{\omega}(s = 1) \rangle \approx 1 - \alpha^2 F^{super}(\bar{R}) [1 - \mathcal{A}], \\ \\ \textbf{ondas sub-harmônicas:} \\ \langle \dot{\omega}(s \geq 2) \rangle \approx 1 - \alpha^2 F^{sub}(\bar{R}). \end{array} \right. \quad (5.122)$$

Para encontrar o limiar (*threshold*) que satisfaz a condição de existência das ilhas de ordem $p > 1$, precisamos determinar os valores extremantes de $\langle \dot{\omega} \rangle$. Isto significa tomar o valor extremante de $|\mathcal{A}|$ para um dado conjunto de fases aleatórias, determinado pelo valor máximo de $|\mathcal{A}|$ desse conjunto. Para o caso de onda central super-harmônica, o valor máximo de $|\mathcal{A}|$ é determinado por

$$A' \equiv \max(|\mathcal{A}|) = \frac{1}{r_\alpha} \left| \frac{\beta(R, \bar{\nu})}{\alpha} \right|, \quad (5.123)$$

onde

$$r_\alpha \equiv \frac{(n_\omega)^{-1/2}}{\max(|\sum_{i=-n_i}^{n_i} \frac{\cos(\psi_i)}{n_\omega}|)}. \quad (5.124)$$

Essa relação, eq. (5.124), é essencialmente a mesma definida na eq. (2.139), só que com a função trigonométrica utilizada diferente. Essa diferença não muda os resultados obtidos dos valores de r_α no capítulo 2, pois é devida à forma como foi representada a onda eletrostática no capítulo 4.

Os pontos fixos das ilhas de ordem $p > 1$, utilizando a eq. (2.94), são respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{onda central super-harmônica:} \\ \frac{\bar{\nu}}{1-\alpha^2 F^{super}(R)[1-A']} = \frac{q}{p}, \\ \\ \text{ondas sub-harmônicas:} \\ \frac{\bar{\nu}}{1-\alpha^2 F^{sub}(R)} = \frac{q}{p}. \end{array} \right. \quad (5.125)$$

O limiar (*threshold*) procurado das ilhas de ordem $p > 1$ é então

$$\alpha^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{onda central super-harmônica:} \\ -\epsilon \frac{p}{q} \frac{1}{F^{super}(R)} [1-A']^{-1}, \\ \\ \text{ondas sub-harmônicas:} \\ -\epsilon \frac{p}{q} \frac{1}{F^{sub}(R)}, \end{array} \right. \quad (5.126)$$

onde

$$\epsilon \equiv \bar{\nu} - \frac{q}{p}. \quad (5.127)$$

Pela definição, o valor de α é positivo ($\alpha \geq 0$), portanto

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \text{onda central super-harmônica:} \\ \left| \epsilon \frac{p}{q} \frac{1}{F^{super}(R)} \right|^{1/2} |1-A'|^{-1/2}, \\ \\ \text{ondas sub-harmônicas:} \\ \left| \epsilon \frac{p}{q} \frac{1}{F^{sub}(R)} \right|^{1/2}. \end{array} \right. \quad (5.128)$$

Analisaremos agora o valor de A' definido na eq. (5.123). Pela definição, é um valor positivo ($A' \geq 0$) e inversamente proporcional a α , o que indica que para α grande, o A' é pequeno. Estamos aqui, procurando o valor de α para qual o sistema é estocástico, e portanto para valores de α grande, que implica em valores de A' pequeno. Faremos essa análise para o caso de uma onda na sub-seção (5.4.1) e para caso de várias ondas na sub-seção (5.4.2).

5.4.1 O caso de uma onda.

Para o caso de uma onda, temos $n_\omega = 1$ e $r_\alpha = 1$. Se supusermos que o sistema já esteja no regime estocástico ($\alpha \gg \alpha_{st}$), o valor de A' é pequeno, e nesse caso, podemos expandir para o caso de onda central super-harmônica, utilizando a seguinte aproximação

$$(1 - A')^{-1/2} \approx 1 + \frac{A'}{2}, \text{ para } A' \ll 1. \quad (5.129)$$

Analisaremos agora quando se satisfaz a condição

$$A' \ll 1. \quad (5.130)$$

Para $r_\alpha = 1$, utilizando a Eq. (5.123), a condição (eq. (5.130)) é satisfeita quando

$$\left| \frac{\beta(R, \bar{\nu})}{\alpha} \right| \ll 1 \rightarrow \alpha \gg |\beta(R, \bar{\nu})|. \quad (5.131)$$

Portanto a condição (eq. (5.130)) é satisfeita quando temos valores de α acima da estocasticidade α_{st} ,

$$\alpha(n_\omega = 1) \gg \alpha_{st}(n_\omega = 1), \quad (5.132)$$

onde

$$\alpha_{st}(n_\omega = 1) = |\beta(R, \bar{\nu})|. \quad (5.133)$$

Para valores de α acima da estocasticidade, podemos aproximar a eq. (5.128)

$$\alpha \approx \left| \epsilon \frac{p}{q} \frac{1}{F_{\bar{\nu}}(R)} \right|^{1/2}; \text{ para } \alpha \gg \alpha_{st}, \quad (5.134)$$

onde

$$F_{\bar{\nu}}(R) \approx \frac{(R^2 - \bar{\nu}^2)^{1/2} \bar{\nu}}{R^4 \sin(\pi \bar{\delta})} \sin \left\{ 2 \left[(R^2 - \bar{\nu}^2)^{1/2} + \bar{\nu} \sin^{-1} \left(\frac{\bar{\nu}}{R} \right) - \frac{n\pi}{2} \right] \right\},$$

$$\text{para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \right)^{1/3} \gg 1, \quad (5.135)$$

aproximação essa primeiramente utilizada por Karney [2], válida para ambos os casos de onda central super-harmônica e de ondas sub-harmônicas, para $R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \right)^{1/3} \gg 1$.

Para estimar o valor de α_{st} , dado pela eq. (5.133), usamos a eq. (5.119),

$$\alpha_{st}(n_\omega = 1) = |\beta(R, \bar{\nu})| = \left| \frac{J'_{\bar{\nu}}(R)}{R} \frac{1}{F_{\bar{\nu}}(R)} \right|. \quad (5.136)$$

Como desejamos uma estimativa, tomamos apenas as amplitudes de $J'_{\bar{\nu}}(R)$ e de $F_{\bar{\nu}}(R)$, que são quantidades oscilantes. Usando a forma aproximada dada pela Eq. (5.135), bem como uma expressão aproximada para a derivada da função de Bessel,

$$J'_{\bar{\nu}}(R) \approx - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(R^2 - \bar{\nu}^2)^{1/4}}{R} \sin \left[(R^2 - \bar{\nu}^2)^{1/2} - \bar{\nu} \cos^{-1} \left(\frac{\bar{\nu}}{R} \right) - \frac{\pi}{4} \right], \text{ para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \right)^{1/3} \gg 1, \quad (5.137)$$

obtemos,

$$|\beta(R, \bar{\nu})| \approx \left| \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(R^2 - \bar{\nu}^2)^{-1/4} R^2 \sin(\pi \bar{\delta})}{\bar{\nu}} \right|. \quad (5.138)$$

Podemos agora utilizar uma expressão para a função de Hankel de primeira espécie $|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|$ para expressar o fator de amplitude de $J'_{\bar{\nu}}(R)$ que aparece na eq. (5.138),

$$|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)| = [(J'_{\bar{\nu}}(R))^2 + (Y'_{\bar{\nu}}(R))^2]^{1/2} \rightarrow \text{fator amplitude de } |J'_{\bar{\nu}}(R)|, \quad (5.139)$$

onde

$$|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)| \approx \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{(R^2 - \bar{\nu}^2)^{1/4}}{R}, \text{ para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \right)^{1/3} \gg 1, \quad (5.140)$$

obtendo

$$|\beta(R, \bar{\nu})| \approx \frac{Rf(\bar{\delta})}{\bar{\nu}|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|}, \quad (5.141)$$

onde

$$f(\bar{\delta}) \equiv \left(\frac{2}{\pi} \right) |\sin(\pi \bar{\delta})|. \quad (5.142)$$

A função $f(\bar{\delta})$ é uma fração que foi estimada numericamente na Ref. [2] (tabela (2.2)), como já foi mencionado no capítulo 2 da presente tese. Foi verificado que essa quantidade varia de no máximo 20% em torno de um valor constante, sendo observado também que o limiar de estocasticidade é bastante insensível à variação do valor de $\bar{\delta}$, na faixa entre $-1/2$ e $1/2$ [2].

O limiar de estocasticidade é então

$$\alpha_{st}(n_\omega = 1) = R[\bar{\nu}|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1} f(\bar{\delta}). \quad (5.143)$$

Utilizando $f(\bar{\delta}) \approx 1/4$, conforme determinado por Karney [2], o limiar de estocasticidade é

$$\alpha_{st}(n_\omega = 1) = \frac{1}{4} R[\bar{\nu}|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1}, \text{ para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2} \right)^{1/3} \gg 1, \quad (5.144)$$

Esse resultado já foi apresentado na eq. (2.124).

Analisaremos agora a Eq. (5.134), a fim de determinar o limiar para as ilhas de ordem $p > 1$. Para isso utilizaremos a expressão da função de Hankel para expressar o fator de amplitude de $|F_{\bar{\nu}}(R)|^{-1/2}$, presente na Eq. (5.134), da maneira análoga àquela feita nas Eqs. (5.139) e (5.140). Dessa forma, utilizando a Eq. (5.141), temos,

$$|F_{\bar{\nu}}(R)|^{-1/2} = \left(\frac{\bar{\nu}}{f(\bar{\delta})} \right)^{1/2} |\beta(R, \bar{\nu})|. \quad (5.145)$$

Utilizando a Eq. (5.145) na Eq. (5.134) obtemos

$$\alpha_{th}^{(p)}(n_\omega = 1) = \left(\frac{\epsilon p \bar{\nu}}{q} \frac{1}{f(\bar{\delta})} \right)^{1/2} |\beta(R, \bar{\nu})| = \left(\frac{\epsilon p \bar{\nu}}{q} \frac{1}{f(\bar{\delta})} \right)^{1/2} \alpha_{st}(n_\omega = 1). \quad (5.146)$$

Utilizando $\bar{\nu} \gg 1 \rightarrow \bar{\nu} \approx n$, $q = (p(n+1) - 1)$ períodos de onda em p órbitas de cíclotron e $f(\bar{\delta}) \approx 1/4$ (conforme Ref. [2]) na Eq. (5.146), o limiar para ilhas de ordem $p > 1$ é

$$\alpha_{th}^{(p)}(n_\omega = 1) = 2 \left(\frac{p-1}{p} \right)^{1/2} \alpha_{st}(n_\omega = 1), \text{ para } p > 1. \quad (5.147)$$

O limiar para ilhas de primeira ordem já foi visto na Eq. (2.122). Utilizando a Eq. (5.139) para expressar o fator de amplitude de $|J'_{\bar{\nu}}(R)|$ em termos de uma função de Hankel, podemos re-escrever a Eq. (2.122) em termos de $\alpha_{st}(n_\omega = 1)$ (Eq. (5.143)), e obtemos

$$\alpha_{th}^{(1)}(n_\omega = 1) = \frac{|\bar{\delta}|}{f(\bar{\delta})} \alpha_{st}(n_\omega = 1). \quad (5.148)$$

Na tabela (5.1) apresentamos a estimativa do limiar para ilhas de ordem p utilizando as Eqs. (5.147) e (5.148) e $f(|\bar{\delta}| \approx 0 \sim 1/4) \approx 1/4$ (da tabela 2.2),

| p | $\alpha_{th}^{(p)}(n_\omega = 1)$ |
|-----|--|
| 1 | $0 \sim 0,93 \times \alpha_{st}(n_\omega = 1)$ |
| 2 | $1,41 \times \alpha_{st}(n_\omega = 1)$ |
| 3 | $1,63 \times \alpha_{st}(n_\omega = 1)$ |

Tabela 5.1: Estimativa do limiar para ilhas de ordem p , $\alpha_{th}^{(p)}(n_\omega = 1)$, utilizando as Eqs. (5.147) e (5.148) e $f(|\bar{\delta}| \approx 0 \sim 1/4) \approx 1/4$ (da tabela 2.2).

5.4.2 O caso de várias ondas.

Para o caso de várias ondas, supomos que o valor de α seja suficiente para que haja estocasticidade para o caso de uma onda, ou seja

$$\alpha(n_\omega \text{ ondas}) \geq \alpha_{st}(n_\omega = 1). \quad (5.149)$$

A condição para que $A' \ll 1$, Eq. (5.130), para caso de várias ondas é satisfeita quando

$$r_\alpha \alpha_{st}(n_\omega = 1) > |\beta(R, \bar{\nu})|, \quad (5.150)$$

ou seja,

$$\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas}) \geq r_\alpha \alpha_{st}(n_\omega = 1). \quad (5.151)$$

Utilizando o resultado da eq. (5.144) na eq. (5.151), obtemos para $R > \bar{\nu} \gg 1$,

$$\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas}) \geq \frac{r_\alpha}{4} R [\bar{\nu} |H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1}, \text{ para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2}\right)^{1/3} \gg 1. \quad (5.152)$$

Utilizamos $R \approx \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2}\right)^{1/3}$ na eq. (5.140) para valores aproximados da função $|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|$ em $R \approx \bar{\nu} \gg 1$, e obtemos a seguinte aproximação

$$|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)| \approx (\bar{\nu})^{-2/3}. \quad (5.153)$$

Para $R \gg \bar{\nu} \gg 1$, a eq. (5.140) é aproximadamente

$$|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)| \approx \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} R^{-1/2}. \quad (5.154)$$

Utilizando as aproximações da função $|H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|$, as eqs. (5.153) e (5.154), temos para o limiar de estocasticidade no caso de várias ondas

$$\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas}) \geq \begin{cases} r_\alpha \frac{\bar{\nu}^{2/3}}{4}, & \text{para } R \approx \bar{\nu} \gg 1, \\ r_\alpha \frac{1}{4} R [\bar{\nu} |H_{\bar{\nu}}^{(1)'}(R)|]^{-1}, & \text{para } R > \bar{\nu} + \left(\frac{\bar{\nu}}{2}\right)^{1/3} \gg 1, \\ r_\alpha \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{-1/2} \frac{R^{3/2}}{\bar{\nu}}, & \text{para } R \gg \bar{\nu} \gg 1. \end{cases} \quad (5.155)$$

Do regime $R \gg \bar{\nu} \gg 1$ da eq. (5.155) determinamos o limite superior da região estocástica

$$R_{sup} \leq (r_\alpha)^{-2/3} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3} (4\alpha\bar{\nu})^{2/3}. \quad (5.156)$$

Supomos que o limite inferior da região estocástica seja o proposto por Karney [2],

$$R_{inf} \geq \bar{\nu} - (\alpha)^{1/2}. \quad (5.157)$$

No capítulo 2 temos simulações para $\bar{\nu} = 30, 0$ e $50, 0 \leq R \leq 57, 3$ para número de ondas n_ω pequeno nas figuras (2.11), (2.12), (2.13), (2.21) e (2.22), para o caso $R \gg \bar{\nu}$. Para esse caso, temos o valor de R médio, $R_{medio} = 52, 35$. Para esse valor de R_{medio} , temos na tabela (5.2) os

| n_ω | $\alpha_{st}(n_\omega \text{ coerente})$ | $\alpha_{st}(n_\omega \text{ incoerente})$ |
|------------|--|--|
| 1 | 3,95 | — |
| 5 | 1,77 | 1,89 |
| 9 | 1,30 | 1,46 |

Tabela 5.2: Estimativa do limiar de estocasticidade para $\bar{\nu} = 30,0$ e $R_{medio} = 52,35$, utilizando a Eq. (5.155) para $R \gg \bar{\nu}$ e valores de r_α da tabela (2.2).

valores do limiar de estocasticidade utilizando a Eq. (5.155) para $R \gg \bar{\nu} \gg 1$ e valores de r_α da tabela (2.2).

Na figura (2.11) temos o comportamento estocástico de uma onda para $\bar{\nu} = 30,0$ e $50,0 \leq R \leq 57,3$, variando α , mostrando que o limiar de estocasticidade acontece aproximadamente para valores de α acima de $\alpha_{st} = 3,95$.

Nas figuras (2.12), (2.13), (2.21) e (2.22) está apresentado o comportamento estocástico para $\alpha = 2,0$, $\bar{\nu} = 30,0$ e $50,0 \leq R \leq 57,3$, para diferentes valores do número de ondas no pacote. Como já vimos, no caso de apenas uma onda o valor $\alpha = 2,0$ é abaixo do valor necessário para a estocasticidade, mas para o caso de várias ondas esse mesmo valor é acima do limiar de estocasticidade, como predito pela tabela (5.2), e observado nas figuras. A explicação do comportamento para o caso de várias ondas é que há um aumento no valor do limite superior da estocasticidade R_{sup} , conforme a Eq. (5.156). Apresentamos na tabela (5.3) as estimativas dos valores do limite superior da estocasticidade R_{sup} , utilizando a Eq. (5.156) e os valores de r_α da tabela (2.2), com $\alpha = 2,0$.

| n_ω | $R_{sup}(n_\omega \text{ coerente})$ | $R_{sup}(n_\omega \text{ incoerente})$ |
|------------|--------------------------------------|--|
| 1 | 33,22 | — |
| 5 | 56,57 | 54,18 |
| 9 | 69,56 | 64,45 |

Tabela 5.3: Estimativas dos valores do limite superior da estocasticidade R_{sup} , utilizando a Eq. (5.156) e os valores de r_α da tabela (2.2), com $\alpha = 2,0$.

Vemos da tabela (5.3) que para o caso de uma onda $R_{medio} > R_{sup}$, e para o caso de várias ondas $R_{medio} < R_{sup}$ para $R_{medio} = 52,35$, mostrando que a Eq. (5.156), e consequentemente a Eq. (5.155), é uma boa predição para o comportamento estocástico para o caso de várias ondas. No caso de grandes número de ondas n_ω , utilizamos como valores de r_α a Eq. (2.141)

para o caso de ondas coerentes,

$$r_\alpha(n_\omega, \text{coerentes}) = (n_\omega)^{-1/2}, \quad (5.158)$$

e a Eq. (2.142) para o caso de ondas incoerentes

$$\frac{1}{3} < r_\alpha(n_\omega, \text{incoerente}) < \frac{1}{2}, \quad \text{para } n_\omega \gg 1. \quad (5.159)$$

Em ambos os casos o valor de r_α é menor que o caso de uma onda, ou seja, $r_\alpha < 1$. Desse modo, para o caso de várias ondas, o limiar de estocasticidade acontece antes do limiar para ilhas de primeira ordem do caso de uma onda, como podemos ver da tabela (5.2), Eq. (5.158) e (5.159).

Utilizando esses valores de r_α , Eq. (5.158) e (5.159), o limite superior da região estocastica para caso de várias ondas é

$$\frac{R_{sup}(n_\omega \text{ ondas})}{R_{sup}(n_\omega = 1)} \leq \begin{cases} (n_\omega)^{1/3}, & \text{para ondas coerentes,} \\ (2)^{2/3} \sim (3)^{2/3}, & \text{para ondas incoerentes,} \end{cases} \quad (5.160)$$

onde

$$R_{sup}(n_\omega = 1) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3} (4\alpha\bar{\nu})^{2/3}. \quad (5.161)$$

Utilizando os valores de r_α , Eq. (5.158) e (5.159), na Eq. (5.151), o limiar de estocasticidade para caso de várias ondas é

$$\frac{\alpha_{st}(n_\omega \text{ ondas})}{\alpha_{st}(n_\omega = 1)} \geq \begin{cases} (n_\omega)^{-1/2}, & \text{para ondas coerentes,} \\ \frac{1}{3} \sim \frac{1}{2}, & \text{para ondas incoerentes,} \end{cases} \quad (5.162)$$

onde

$$\alpha_{st}(n_\omega = 1) = \frac{(\bar{\nu})^{2/3}}{4}. \quad (5.163)$$

Na fig. (5.1) é apresentada a região onde acontece a estocasticidade, para o caso de uma onda e para o caso de várias ondas, como uma função de α e R , para um valor de $\bar{\nu}$ fixo.

O mecanismo da estocasticidade para o caso de várias ondas é então diferente do caso de uma onda. No caso de uma onda, a estocasticidade ocorre devido à superposição de ilhas de ordens maiores, com o aumento da intensidade da onda eletrostática, onde as ilhas são as representações

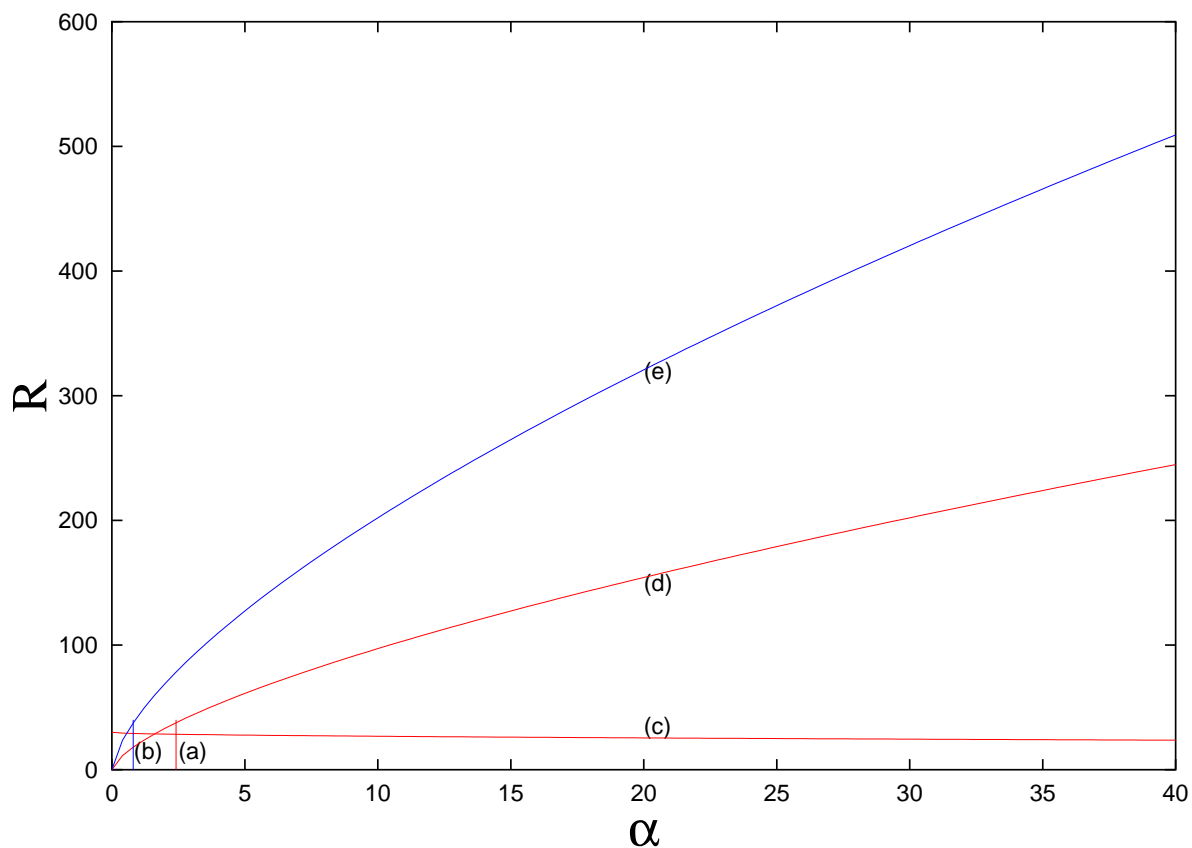


Figura 5.1: Região de estocasticidade, para o caso de uma onda e para o caso de várias ondas, como uma função de α e R , para $\bar{\nu} = 30,0$. A região é limitada pelas eqs. (5.160), (5.161), (5.162) e (5.163). (a) $\alpha_{st}(n_\omega = 1)$; (b) $\alpha_{st}(n_\omega, \text{incoerentes})$ e $\alpha_{st}(n_\omega = 9, \text{coerentes})$; (c) $R_{inf}(n_\omega = 1)$, $R_{inf}(n_\omega, \text{coerentes})$ e $R_{inf}(n_\omega, \text{incoerentes})$; (d) $R_{sup}(n_\omega = 1)$ e (e) $R_{sup}(n_\omega, \text{incoerentes})$ e $R_{sup}(n_\omega = 9, \text{coerentes})$.

das trajetórias das partículas no espaço de fase. No caso de várias ondas, a presença de ondas de frequências próximas à frequência de ressonância causa pequenas perturbações na trajetória principal causada pela onda central, espalhando essa trajetória pelo espaço de fase, de forma mais eficiente que o mecanismo de estocasticidade para o caso de uma onda.

5.5 Sumário.

Nesse capítulo complementamos o estudo do comportamento estocástico iniciado no capítulo 2, analisando no espaço de fase o limiar para ilhas de segunda ordem e de ordens maiores, utilizando os resultados obtidos no capítulo 4. A análise mostrou que para o caso de várias ondas a estocasticidade ocorre antes do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda. No caso de ondas de fases coerentes, se observa que o limiar de estocasticidade diminui com o aumento do número de ondas que compõem o conjunto quase-monocromático de ondas, tendendo a ser nulo no limite em que o número de ondas é infinito. No caso de ondas de fases aleatórias, observou-se também uma diminuição do limiar de estocasticidade com o aumento do número de ondas, mas nesse caso saturando em um valor entre metade e um terço do valor do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda. Se observou também que o limite superior da região de estocasticidade aumenta com o aumento do número de ondas. No caso de ondas de fases coerentes, esse aumento é proporcional a $(n_\omega)^{1/3}$, onde n_ω é o número de ondas que compõem o conjunto de ondas. No caso de ondas com fases aleatórias o limite superior da região de estocasticidade têm um aumento de cerca de 1,58 à 2,08 vezes em relação ao caso de uma onda.

Capítulo 6

Conclusões.

Nesse trabalho generalizamos a discussão sobre a dinâmica estocástica de íons energéticos por ondas do tipo híbrida inferior, considerando casos onde um conjunto de ondas com frequências similares está presente no sistema. A tarefa foi realizada por generalização dos procedimentos utilizados nas Refs. [7, 2, 8], restringindo a análise para o caso de espectro suficientemente estreito, tal que se possa considerar que todas as ondas presentes no sistema têm a mesma velocidade de fase. A formulação utilizada leva em conta que cada onda pode ter fases aleatórias, com o caso de ondas coerentes como um caso particular.

A análise teórica no capítulo 2 mostrou que o estágio inicial da evolução temporal no caso de ondas coerentes é governado por um Hamiltoniano similar àquele que aparece nas Refs. [2, 8], mas com o *threshold* para comportamento estocástico no estágio inicial menor que o *threshold* correspondente obtido para o caso de apenas uma onda. No caso limite de espectro contínuo, com número infinito de ondas coerentes, nossa análise mostrou que o *threshold* tende a desaparecer e que o comportamento estocástico nos estágios iniciais deve ocorrer para qualquer valor da intensidade da onda.

Comparando o caso de apenas uma onda com o caso de número finito de ondas coerentes, para razão de difusão inicial similar, mostramos que no caso de múltiplas ondas a difusão ocorre em picos periódicos, o que reduz a eficiência do processo difusivo.

Considerando a situação mais geral em que as ondas têm fases aleatoriamente distribuídas, a difusão obtida para tempos mais longos se mostrou mais significativa do que no caso de ondas coerentes, para o mesmo número de ondas. Enquanto que no caso de ondas coerentes o comportamento difusivo ocorre em picos periódicos, o comportamento difusivo obtido para o caso de fases aleatórias ocorre continuamente ao longo da evolução temporal. Esse resultado é de particular interesse, visto que o caso de ondas com fases aleatórias é mais representativo do

ponto de vista de investigação, com um conjunto finito de ondas, do efeito de largura finita do pacote de ondas, como os que se encontram em experimentos de interação onda-partícula em tokamaks. Uma representação mais próxima pode ser obtida pela aplicação de uma média de *ensemble* sobre o conjunto inicial de fases aleatórias, um procedimento que pode ser bastante custoso do ponto de vista de recursos numéricos, e aparentemente não parece ser necessário para obter as características gerais do comportamento difusivo que pode ser o resultado da interação onda-partícula.

Fizemos também, uma estimativa analítica das posições das ilhas de primeira ordem, e do limiar para ilhas de primeira ordem e para a estocasticidade, para o caso $R \approx \bar{\nu} \gg 1$, onde R é o raio de Larmor normalizado. Observamos a redução do limiar de estocasticidade com o aumento em número de ondas para o caso de ondas coerentes, de forma inversamente proporcional à raiz quadrada do número de ondas presentes no espectro. Observamos também, para grande número de ondas incoerentes, uma redução do limiar de estocasticidade para um valor em torno de metade a um terço do valor do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda.

Para uma análise mais completa, consideramos também o caso $R > \bar{\nu} \gg 1$, no capítulo 5. Nesse capítulo 5 complementamos o estudo do comportamento estocástico iniciado no capítulo 2, analisando no espaço de fase o limiar para ilhas de segunda ordem e de ordens maiores, utilizando os resultados obtidos no capítulo 4. A análise mostrou que para o caso de várias ondas a estocasticidade ocorre antes do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda. No caso de ondas de fases coerentes, se observa que o limiar de estocasticidade diminui com o aumento do número de ondas que compõem o conjunto quase-monocromático de ondas, tendendo a ser nulo no limite em que o número de ondas no espectro vai a infinito. No caso de ondas de fases aleatórias, se observou também uma diminuição do limiar de estocasticidade com aumento do número de ondas, até um valor entre metade e um terço do valor do limiar de estocasticidade para o caso de uma onda.

A redução do limite de estocasticidade, tanto para $R \approx \bar{\nu}$ quanto para $R > \bar{\nu}$, corrobora a conjectura feita na introdução desse trabalho, de que a presença de diversas ondas deve contribuir para facilitar a ocorrência de difusão estocástica, sob condições que não satisfariam o limiar de estocasticidade no caso monocromático [22, 23].

Outro aspecto observado foi que o limite superior da região de estocasticidade aumenta com o aumento de ondas. No caso de ondas de fases coerentes, esse aumento é proporcional a

$(n_\omega)^{1/3}$, onde n_ω é o número de ondas que compõem o conjunto de ondas. No caso de ondas com fases aleatórias o limite superior da região de estocasticidade têm um aumento de cerca de até 2,08 vezes em relação ao caso de uma onda. Se observou também que o mecanismo da estocasticidade para o caso de varias ondas é diferente do caso de uma onda. No caso de uma onda, a estocasticidade ocorre devido à superposição de ilhas de ordens maiores, com o aumento da intensidade da onda eletrostática, onde as ilhas são as representações das trajetórias das partículas no espaço de fase. No caso de várias ondas, a presença de ondas de frequências próximas à frequência de ressonância causa pequenas perturbações na trajetória principal das partículas causada pela onda central, espalhando-a pelo espaço de fase de forma mais eficiente que o mecanismo de estocasticidade para o caso de uma onda.

Apêndice A

Cálculo da média temporal para um pacote de ondas com frequências muito próximas.

A.1 Introdução

Nesse apêndice calcularemos a média temporal para diversas funções $f(\tau)$ de um pacote de múltiplas ondas com frequências próximas da frequência central que tomamos como referência. Como os períodos das diversas ondas que compõem o pacote de onda são ligeiramente diferentes entre si, a média temporal deve ser feita em um múltiplo N do período da onda central suficientemente grande para que abranja todos os períodos das ondas.

$$\langle f(\tau) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^{NT} f(\tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

onde T é o período da onda central (normalizado)

$$T = \frac{2\pi}{\bar{\nu}}. \quad (\text{A.2})$$

As funções envolvidas são funções trigonométricas com parâmetros em Θ_i

$$\Theta_i = k_i y - \omega_i t - \varphi_i. \quad (\text{A.3})$$

Na forma já normalizada e transformada da seção (2.3) temos:

$$\Theta_i = r_i \sin(\omega) - \nu_i \tau - \varphi_i, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$r_i \equiv r_{\omega_i} (2I)^{1/2}, \quad \nu_i \equiv r_{\omega_i} \bar{\nu}.$$

Preferimos escrever as funções trigonométricas em termos dos diferentes termos da componente de Fourier, utilizando as relações (2.44 - 2.46)

$$f(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) f(\Theta_{i,m}), \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\Theta_{i,m} = m\omega - \nu_i\tau - \varphi_i. \quad (\text{A.6})$$

Para a média temporal de uma função do tipo produto, utilizaremos as seguintes relações trigonométricas

$$\cos \Theta_{i,m} \cos \Theta_{j,n} \equiv \frac{1}{2} [\cos(\Theta_{i,m} - \Theta_{j,n}) + \cos(\Theta_{i,m} + \Theta_{j,n})], \quad (\text{A.7})$$

$$\sin \Theta_{i,m} \sin \Theta_{j,n} \equiv \frac{1}{2} [\cos(\Theta_{i,m} - \Theta_{j,n}) - \cos(\Theta_{i,m} + \Theta_{j,n})], \quad (\text{A.8})$$

$$\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,n} \equiv \theta_{m,n}^{(\pm)}\omega - \zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau - C_{i,j}^{(\pm)}, \quad (\text{A.9})$$

$$\theta_{m,n}^{(\pm)} \equiv (m \pm n), \quad (\text{A.10})$$

$$\zeta_{i,j}^{(\pm)} \equiv (\nu_i \pm \nu_j), \quad (\text{A.11})$$

$$C_{i,j}^{(\pm)} \equiv (\varphi_i \pm \varphi_j). \quad (\text{A.12})$$

Isto significa que para uma média temporal do tipo $\langle \cos \Theta_{i,m} \cos \Theta_{j,n} \rangle$ ou $\langle \sin \Theta_{i,m} \sin \Theta_{j,n} \rangle$ precisamos saber qual é a media temporal de $\langle \cos(\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,n}) \rangle$.

Utilizando a relação trigonométrica de soma de ângulos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle \cos(\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,m}) \rangle &= \langle \cos(\theta_{m,n}^{(\pm)}\omega - \zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau - C_{i,j}^{(\pm)}) \rangle \\ &= \cos(\theta_{m,n}^{(\pm)}\omega - C_{i,j}^{(\pm)}) \langle \cos(\zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau) \rangle + \sin(\theta_{m,n}^{(\pm)}\omega - C_{i,j}^{(\pm)}) \langle \sin(\zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.2 Cálculo do $\langle \cos(\zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau) \rangle$

$$\langle \cos(\zeta_{i,j}^{(\pm)}\tau) \rangle = \langle \cos(\nu_i \pm \nu_j)\tau \rangle = \langle \cos(\nu_i\tau) \cos(\nu_j\tau) \rangle \mp \langle \sin(\nu_i\tau) \sin(\nu_j\tau) \rangle, \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\langle \cos(\nu_i\tau) \cos(\nu_j\tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \int_0^{2\pi N/\bar{\nu}} \cos(\nu_i\tau) \cos(\nu_j\tau) d\tau, \quad (\text{A.15})$$

e

$$\langle \sin(\nu_i\tau) \sin(\nu_j\tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \int_0^{2\pi N/\bar{\nu}} \sin(\nu_i\tau) \sin(\nu_j\tau) d\tau. \quad (\text{A.16})$$

Se $\nu_i = \nu_j$

$$\langle \cos(\nu_i\tau) \cos(\nu_i\tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\tau}{2} + \frac{\sin(2\nu_i\tau)}{4\nu_i} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{8\pi\nu_i N} \sin\left(\frac{4\pi\nu_i N}{\bar{\nu}}\right) = \frac{1}{2}, \quad (\text{A.17})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \sin(\nu_i \tau) \sin(\nu_i \tau) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\tau}{2} - \frac{\sin(2\nu_i \tau)}{4\nu_i} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}} \\ &= \frac{1}{2} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{8\pi\nu_i N} \sin\left(\frac{4\pi\nu_i N}{\bar{\nu}}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Se $\nu_i \neq \nu_j$

$$\begin{aligned} \langle \cos(\nu_i \tau) \cos(\nu_j \tau) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin[(\nu_i - \nu_j)\tau]}{2(\nu_i - \nu_j)} + \frac{\sin[(\nu_i + \nu_j)\tau]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin\left[2\pi N \left(\frac{\nu_i - \nu_j}{\bar{\nu}}\right)\right]}{2(\nu_i - \nu_j)} + \frac{\sin\left[2\pi N \left(\frac{\nu_i + \nu_j}{\bar{\nu}}\right)\right]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \sin(\nu_i \tau) \sin(\nu_j \tau) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin[(\nu_i - \nu_j)\tau]}{2(\nu_i - \nu_j)} - \frac{\sin[(\nu_i + \nu_j)\tau]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin\left[2\pi N \left(\frac{\nu_i - \nu_j}{\bar{\nu}}\right)\right]}{2(\nu_i - \nu_j)} - \frac{\sin\left[2\pi N \left(\frac{\nu_i + \nu_j}{\bar{\nu}}\right)\right]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Sumarizando o resultado temos

$$\langle \cos(\zeta_{i,j}^{(\pm)})\tau \rangle = \delta_{i,j} \delta_{s,-}. \quad (\text{A.21})$$

onde

$$s = \pm.$$

A.3 Cálculo do $\langle \sin(\zeta_{i,j}^{(\pm)})\tau \rangle$

$$\langle \sin(\zeta_{i,j}^{(\pm)})\tau \rangle = \langle \sin(\nu_i \pm \nu_j)\tau \rangle = \langle \sin(\nu_i \tau) \cos(\nu_j \tau) \rangle \pm \langle \cos(\nu_i \tau) \sin(\nu_j \tau) \rangle. \quad (\text{A.22})$$

Nesse caso, precisamos resolver apenas uma das médias, pois os dois termos são análogos.

Escolheremos

$$\langle \sin(\nu_i \tau) \cos(\nu_j \tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \int_0^{2\pi N/\bar{\nu}} \sin(\nu_i \tau) \cos(\nu_j \tau) d\tau. \quad (\text{A.23})$$

Se $\nu_i = \nu_j$

$$\langle \sin(\nu_i \tau) \cos(\nu_i \tau) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin^2(\nu_i \tau)}{2\nu_i} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\sin^2 \left(2\pi N \frac{\nu_i}{\bar{\nu}} \right)}{2\nu_i} \right] = 0. \quad (\text{A.24})$$

Se $\nu_i \neq \nu_j$,

$$\begin{aligned} \langle \sin(\nu_i \tau) \cos(\nu_j \tau) \rangle &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\cos[(\nu_i - \nu_j)\tau]}{2(\nu_i - \nu_j)} + \frac{\cos[(\nu_i + \nu_j)\tau]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right]_0^{\frac{2\pi N}{\bar{\nu}}} \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{\nu}}{2\pi N} \left[\frac{\cos \left[2\pi N \left(\frac{\nu_i - \nu_j}{\bar{\nu}} \right) \right]}{2(\nu_i - \nu_j)} + \frac{\cos \left[2\pi N \left(\frac{\nu_i + \nu_j}{\bar{\nu}} \right) \right]}{2(\nu_i + \nu_j)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Sumarizando o resultado temos

$$\langle \sin(\theta_{i,j}^{(\pm)}) \tau \rangle = 0. \quad (\text{A.26})$$

A.4 Cálculo do $\langle \cos(\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,n}) \rangle$

Utilizando os resultados anteriores temos

$$\langle \cos(\Theta_{i,m} \pm \Theta_{j,n}) \rangle = \delta_{i,j} \delta_{s,-} \cos(\theta_{m,n}^{(\pm)} \omega - C_{i,j}^{(\pm)}). \quad (\text{A.27})$$

Portanto a média do produto $f(\tau) = \cos(\Theta_{i,m}) \cos(\Theta_{j,n})$, utilizando a eq. A.5, é dada por

$$\begin{aligned} \langle \cos(\Theta_i) \cos(\Theta_j) \rangle &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) J_m(r_j) \langle \cos(\Theta_{i,m}) \cos(\Theta_{j,m}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \delta_{i,j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) J_m(r_j) \cos(\theta_{m,n}^{(-)} \omega - C_{i,j}^{(-)}). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Se $i = j$

$$\langle \cos(\Theta_i) \cos(\Theta_i) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r_i) J_m(r_i) = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.29})$$

Se $i \neq j$

$$\langle \cos(\Theta_i) \cos(\Theta_j) \rangle = 0. \quad (\text{A.30})$$

Apêndice B

As somatórias S_1 e S_2 .

B.1 Introdução

As derivações detalhadas das duas somatórias que aparecem no capítulo 5 podem ser encontradas nos artigos do Chia *et al* [19] para o caso de ondas sub-harmônicas, e Benisti *et al* [46] para o caso da onda central super-harmônica. Nesse apêndice, reproduziremos as derivações para ambos os casos, a fim de facilitar a visualização dos resultados das somatórias, que são frequentemente utilizados no capítulo 5. Denotaremos S_i^{sub} o caso de ondas sub-harmônicas, e S_i^{super} o caso de onda central super-harmônica, onde $i = 1, 2$.

B.2 O caso de ondas sub-harmônicas.

B.2.1 S_1^{sub}

Temos o S_1^{sub} que foi primeiramente definido na equação 5.27,

$$\begin{aligned} S_1^{sub}(R) &\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(R) \right]}{(\bar{\nu} - m)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)}, \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde

$$J'_m(R) \equiv \frac{\partial}{\partial R} J_m(R). \tag{B.2}$$

Podemos escrever a equação (B.1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} \\ &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_m(R)}{R(\bar{\nu} + m)} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m^2 J_m(R) J'_m(R)}{R(\bar{\nu}^2 - m^2)}. \quad (\text{B.3})$$

Usando as identidades

$$\frac{m}{R} J_m(R) = \frac{J_{m-1}(R) + J_{m+1}(R)}{2}, \quad (\text{B.4})$$

$$J'_m(R) = \frac{J_{m-1}(R) - J_{m+1}(R)}{2}, \quad (\text{B.5})$$

obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m J_m(R) J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2(\bar{\nu}^2 - m^2)} (J_{m-1}^2(R) - J_{m+1}^2(R)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2(\bar{\nu}^2 - m^2)} \frac{2}{\pi} \left[(-1)^{m-1} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2(m-1)\theta) J_0(2R \cos \theta) \right. \\ & \quad \left. - (-1)^{m+1} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2(m+1)\theta) J_0(2R \cos \theta) \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{\pi(m^2 - \bar{\nu}^2)} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) [\cos(2(m-1)\theta) - \cos(2(m+1)\theta)] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{(m^2 - \bar{\nu}^2)} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) \sin(2m\theta) \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde foi usada a relação [29]

$$J_n^2(R) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2n\theta) J_0(2R \cos \theta),$$

bem como a seguinte relação trigonométrica [29],

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)].$$

Trocando a ordem da somatória e da integração, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m J_m(R) J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m}{(m^2 - \bar{\nu}^2)} \sin(2m\theta) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \left[-\frac{\pi \sin(2\bar{\nu}\theta)}{2 \sin(\bar{\nu}\pi)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde foi usada a relação [29]

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m \sin(mx)}{(m^2 - \nu^2)} = \frac{\pi \sin(\bar{\nu}(2n\pi - x))}{2 \sin(\nu\pi)},$$

se $(2n - 1)\pi < x < (2n + 1)\pi$ e $\bar{\nu} \neq$ inteiro.

Continuando o cálculo

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} \\ &= -\frac{1}{\sin(\bar{\nu}\pi)} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sin(2\bar{\nu}\theta) \\ &= -\frac{1}{2\sin(\bar{\nu}\pi)} \int_0^{\pi/2} d\theta J_0(2R \cos \theta) [\cos(2\theta(1 - \bar{\nu})) - \cos(2\theta(1 + \bar{\nu}))]. \end{aligned}$$

Usando a relação [29]

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \cos(2z\theta) J_{2n}(2r \cos \theta) = \frac{\pi}{2} J_{n+z}(r) J_{n-z}(r),$$

finalmente obtemos

$$S_1^{sub}(R) = \frac{\pi}{4\sin(\bar{\nu}\pi)} [J_{1+\bar{\nu}}(R)J_{-1-\bar{\nu}}(R) - J_{1-\bar{\nu}}(R)J_{-1+\bar{\nu}}(R)]. \quad (\text{B.8})$$

B.2.2 S_2^{sub}

O termo S_2^{sub} que foi primeiramente definido na equação 5.35, pode ser simplificado por uma série de manipulações

$$\begin{aligned} S_2^{sub}(R) &\equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(R) \right]}{(\bar{\nu} - m)} \\ &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_{2\bar{\nu}-m}(R)}{R(\bar{\nu} - m)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mJ_{-m}(R)J'_{2\bar{\nu}+m}(R)}{R(\bar{\nu} + m)} \right] \\ &= \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mJ_m(R)J'_{2\bar{\nu}-m}(R)}{R(\bar{\nu} - m)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(-1)^m J_m(R)J'_{2\bar{\nu}+m}(R)}{R(\bar{\nu} + m)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Se agora substituirmos as seguintes expressões

$$J'_{2\bar{\nu}-m}(R) = \frac{J_{2\bar{\nu}-m-1}(R) - J_{2\bar{\nu}-m+1}(R)}{2}, \quad (\text{B.10})$$

$$J'_{2\bar{\nu}+m}(R) = \frac{J_{2\bar{\nu}+m-1}(R) - J_{2\bar{\nu}+m+1}(R)}{2}, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{m}{R} J_m(R) = \frac{J_{m-1}(R) + J_{m+1}(R)}{2}, \quad (\text{B.12})$$

e

$$\begin{aligned} J_a(R)J_b(R) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{a+b}(2R \cos \theta) \cos((a - b)\theta) \\ &= \frac{2(-1)^b}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{a-b}(2R \cos \theta) \cos((a + b)\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(R) \right]}{(\bar{\nu} - m)} \\
= & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(J_{m-1} + J_{m+1})(J_{2\bar{\nu}-m-1} - J_{2\bar{\nu}-m+1})}{4(\bar{\nu} - m)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (J_{m-1} + J_{m+1})(J_{2\bar{\nu}+m-1} - J_{2\bar{\nu}+m+1})}{4(\bar{\nu} + m)} \right] \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi(\bar{\nu} - m)} \left(\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m)\theta) \\ & + \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m - 2)\theta) \\ & - \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m + 2)\theta) \\ & - \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m)\theta) \end{aligned} \right) \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi(\bar{\nu} + m)} \left(\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m)\theta) \\ & + \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m - 2)\theta) \\ & - \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m + 2)\theta) \\ & - \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m)\theta) \end{aligned} \right) \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\nu} - m} \left[\begin{aligned} & J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m)\theta) \\ & - J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} - 2m)\theta) \\ & + 2J_{\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin((2\bar{\nu} - 2m)\theta) \sin(2\theta) \end{aligned} \right] \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\nu} + m} \left[\begin{aligned} & J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m)\theta) \\ & - J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \cos((2\bar{\nu} + 2m)\theta) \\ & + 2J_{\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin((2\bar{\nu} + 2m)\theta) \sin(2\theta) \end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

Coletando termos com as funções de Bessel de mesmo índice, temos

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{mJ_m(R) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_{2\bar{\nu}-m}(R) \right]}{(\bar{\nu} - m)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{\nu} \cos(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta) + 2m \sin(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{\nu} \cos(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta) + 2m \sin(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m \cos(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta) - 2\bar{\nu} \sin(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)}. \tag{B.14}
\end{aligned}$$

Utilizaremos as seguintes relações [19]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{m^2 - \nu^2} = \frac{1}{2\nu^2} - \frac{\pi \cos(\nu\{(2n+1)\pi - x\})}{2\nu \sin(\nu\pi)}, \tag{B.15}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{m^2 - \nu^2} = \frac{\pi \sin(\nu\{(2n+1)\pi - x\})}{2\nu \sin(\nu\pi)}, \tag{B.16}$$

onde x satisfaz $2n\pi < x < (2n+2)\pi$, sendo n inteiro e ν não inteiro. Utilizaremos também as relações [19]

$$\int_0^{\pi/2} d\theta J_{2a}(2r \cos \theta) = \frac{\pi}{2} J_a^2(r), \tag{B.17}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta J_{2b}(2r \cos \theta) \cos(2a\theta) = \frac{\pi}{2} J_{b-a}(r) J_{b+a}(r), \tag{B.18}$$

onde a parte real $\Re(a) > -1/2$.

O primeiro termo da equação (B.14) pode ser então re-escrito na forma seguinte,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{\nu} \cos(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta) + 2m \sin(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \left[\pi \cot \bar{\nu}\pi - \frac{\cos(2\bar{\nu}\pi)}{\bar{\nu}} \right] \\
&= \left[\frac{1}{4\pi} \cot(\bar{\nu}\pi) J_{\bar{\nu}-1}^2(R) + \frac{1}{4\bar{\nu}} J_{\bar{\nu}+\bar{\nu}-1}(R) J_{1+\bar{\nu}-\bar{\nu}}(R) \right]. \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}-2}(2R \cos \theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{\nu} \cos(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta) + 2m \sin(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\
&= \left[\frac{1}{4\pi} \cot(\bar{\nu}\pi) J_{\bar{\nu}-1}^2(R) + \frac{1}{4\bar{\nu}} J_{2\bar{\nu}-1}(R) J_1(R) \right] \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Utilizando os mesmos procedimentos, a expressão para o segundo termo da equação (B.14) fica dada por

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}+2}(2R \cos \theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\bar{\nu} \cos(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta) + 2m \sin(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\
&= \left[\frac{1}{4\pi} \cot(\bar{\nu}\pi) J_{\bar{\nu}+1}^2(R) - \frac{1}{4\bar{\nu}} J_{2\bar{\nu}+1}(R) J_1(R) \right] \tag{B.21}
\end{aligned}$$

O terceiro termo da equação (B.14) pode ser simplificado a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m \cos(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta) - 2\bar{\nu} \sin(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\ & = \left[\int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) - \frac{1}{\bar{\nu}\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sin(2\bar{\nu}\theta) \right]. \end{aligned}$$

As seguintes expressões podem ser re-escritas como

$$\int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\bar{\nu}\theta) = - \int_{2R}^0 dx x \frac{J_{2\bar{\nu}}(x)}{2R^2} = \frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x),$$

onde $x = 2R \cos \theta$ e

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\bar{\nu}\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sin(2\bar{\nu}\theta) \\ & = -\frac{1}{2\bar{\nu}\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) [\cos((2\bar{\nu} - 2)\theta) - \cos((2\bar{\nu} + 2)\theta)] \\ & = -\frac{1}{4\bar{\nu}} [J_1(R)J_{2\bar{\nu}-1}(R) + J_1(R)J_{2\bar{\nu}+1}(R)]. \end{aligned}$$

O terceiro termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta J_{2\bar{\nu}}(2R \cos \theta) \sin(2\theta) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m \cos(2\bar{\nu}\theta) \sin(2m\theta) - 2\bar{\nu} \sin(2\bar{\nu}\theta) \cos(2m\theta)}{(\bar{\nu}^2 - m^2)} \\ & = \left[\frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x) - \frac{1}{4\bar{\nu}} [J_1(R)J_{2\bar{\nu}-1}(R) + J_1(R)J_{2\bar{\nu}+1}(R)] \right]. \end{aligned}$$

Combinando todas as expressões, o S_2 é dado por

$$S_2^{sub}(R) = \left[\frac{\pi}{4} \cot(\bar{\nu}\pi) (J_{\bar{\nu}-1}^2(R) - J_{\bar{\nu}+1}^2(R)) + \frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x) \right] \quad (\text{B.22})$$

A integração que aparece na equação B.22 é [19]

$$\frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x) = \frac{R^{2\bar{\nu}} {}_1F_2(1 + \bar{\nu}; 2 + \bar{\nu}, 1 + 2\bar{\nu}; -R^2)}{(1 + \bar{\nu})\Gamma(1 + 2\bar{\nu})}$$

onde ${}_1F_2$ é a série hipergeométrica generalizada.

Se $\bar{\nu} = r/2$, $r = 1, 3, 5, \dots$, temos $\cot(\bar{\nu}\pi) = 0$. Então o S_2 é reduzido a

$$S_2^{sub}(R) = \frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x) \quad (\text{B.23})$$

B.3 O caso de onda central super-harmônica.

Quando temos um valor de $\bar{\nu}$ que seja um número inteiro, como é o caso em que a onda central é super-harmônica, as somatórias S_1^{super} e S_2^{super} serão iguais às obtidas para o caso de ondas sub-harmônicas, a menos do termo $m = \bar{\nu}$, onde ocorre a divergência. No artigo de Benisti *et al* [46] esse caso é tratado aproveitando os resultados anteriores de S_1^{sub} e S_2^{sub} obtidos no caso de ondas sub-harmônicas.

B.3.1 S_1^{super}

Segundo se pode ver na Ref. [46], temos

$$\begin{aligned}
S_1^{super}(R) &= \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(R) J'_m(R)}{R(\bar{\nu} - m)} = \lim_{x \rightarrow \bar{\nu}} \left(S_1^{sub} - \frac{\bar{\nu} J_{\bar{\nu}}(R) J'_{\bar{\nu}}(R)}{R(x - \bar{\nu})} \right) \\
&= \frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{4} J_{\bar{\nu}+1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} J_{-x-1} \right)_{x=\bar{\nu}} + (-1)^{\bar{\nu}+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{1+x} \right)_{x=\bar{\nu}} \right] \\
&\quad + \frac{(-1)^{\bar{\nu}+1}}{4} J_{\bar{\nu}-1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} J_{-x+1} \right)_{x=\bar{\nu}} + (-1)^{\bar{\nu}+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{-1+x} \right)_{x=\bar{\nu}} \right]
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Usando a definição da função de Weber

$$Y_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} J_x \right)_{x=\bar{\nu}} - (-1)^{\bar{\nu}} \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{-x} \right)_{x=\bar{\nu}} \right],$$

podemos escrever

$$S_1^{super}(R) \approx \frac{\pi}{4} [J_{\bar{\nu}-1}(R) Y_{\bar{\nu}-1}(R) - J_{\bar{\nu}+1}(R) Y_{\bar{\nu}+1}(R)].$$

B.3.2 S_2^{super}

Nesse caso [46]

$$\begin{aligned}
S_2^{super}(R) &= \sum_{m \neq \bar{\nu}} \frac{m J_m(R) J'_{2\bar{\nu}-m}(R)}{R(\bar{\nu} - m)} = \lim_{x \rightarrow \bar{\nu}} \left(S_2^{sub} - \frac{\bar{\nu} J_{\bar{\nu}}(R) J'_{2x-\bar{\nu}}(R)}{R(x - \bar{\nu})} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left[J_{\bar{\nu}-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{x-1} \right)_{x=\bar{\nu}} - J_{\bar{\nu}+1} \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{1+x} \right)_{x=\bar{\nu}} + \frac{1}{2R^2} \int_0^{2R} dx x J_{2\bar{\nu}}(x) \right] \\
&\quad - \frac{\bar{\nu}}{2R} J_{\bar{\nu}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} J_{x-1} \right)_{x=\bar{\nu}} - \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{x+1} \right)_{x=\bar{\nu}} \right].
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Segundo Benisti *et al* [46], a solução numérica mostra que quando $R < \bar{\nu}$

$$S_2^{super}(R) \ll S_1^{super}(R), \tag{B.26}$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} J_x \right)_{x=\bar{\nu}} \ll \left(\frac{\partial}{\partial x} J_{-x} \right)_{x=\bar{\nu}}. \tag{B.27}$$

Apêndice C

Expansões em primeira ordem no parâmetro Δ' .

C.1 Introdução

Nesse apêndice apresentaremos os cálculos das expansões no parâmetro Δ' para algumas das funções e equações apresentadas no capítulo (5). As funções que dependem do parâmetro Δ' , apresentadas ao longo do trabalho, são as equações (2.62) e (4.12), que são respectivamente

$$r_{\omega_i} \equiv 1 + i\Delta', \quad (\text{C.1})$$

$$\nu_i \equiv r_{\omega_i} \bar{\nu} = \bar{\nu} + i\Delta' \bar{\nu}, \quad (\text{C.2})$$

$$r_i \equiv r_{\omega_i} R = R + i\Delta' R. \quad (\text{C.3})$$

Na expansão em primeira ordem do parâmetro Δ' utilizaremos também as seguintes aproximações até a primeira ordem

$$\frac{1}{(\nu_i - m)} \approx \frac{1}{(\bar{\nu} - m)} \left(1 - i\Delta' \frac{\bar{\nu}}{(\bar{\nu} - m)} \right), \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{1}{r_{\omega_i}} = \frac{1}{(1 + i\Delta')} \approx 1 - i\Delta', \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{1}{r_{\omega_i}^2} = \frac{1}{(1 + i\Delta')^2} \approx 1 - 2i\Delta'. \quad (\text{C.6})$$

C.2 Expansão do $J_m(r_i)$

Utilizando a propriedade de soma de parâmetros da função Bessel [29]

$$\begin{aligned} J_m(r_i) &= J_m(R + i\Delta' R) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(R) J_k(i\Delta' R) \\ &= J_m(R) J_0(i\Delta' R) + \sum_{k=1}^{\infty} J_{m-k}(R) J_k(i\Delta' R) + \sum_{k=-1}^{-\infty} J_{m-k}(R) J_k(i\Delta' R). \end{aligned}$$

Trocando o índice do primeiro termo de $k \rightarrow l$ e o índice do segundo termo de $k \rightarrow -l$ e utilizando a propriedade de troca de sinais da função de Bessel [29], temos

$$J_m(r_i) = J_m(R)J_0(i\Delta'R) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(J_{m-l}(R) + (-1)^l J_{m+l}(R) \right) J_l(i\Delta'R). \quad (\text{C.7})$$

Utilizando expansões da função de Bessel [29] até a primeira ordem,

$$J_0(i\Delta'R) = 1 - \frac{(i\Delta'R)^2}{4} + \dots \approx 1$$

$$J_l(i\Delta'R) = \frac{(i\Delta'R)^l}{2^l \Gamma(l+1)} \left[1 - \frac{(i\Delta'R)^2}{4} + \dots \right],$$

verificamos que para primeira ordem temos somente o termo com $l = 1$

$$J_1(i\Delta'R) \approx \frac{i\Delta'R}{2}.$$

Substituindo essas relações na eq. (C.7) temos

$$J_m(r_i) \approx J_m(R) + \frac{i\Delta'R}{2} (J_{m-1}(R) - J_{m+1}(R)).$$

Utilizando agora uma relação que envolve funções de Bessel e sua derivada em relação ao argumento [29], temos

$$J_m(r_i) \approx J_m(R) + i\Delta'R J'_m(R), \quad (\text{C.8})$$

onde

$$J'_m(R) \equiv \frac{\partial}{\partial R} J_m(R).$$

C.3 Expansão do $\Gamma_{m,n}^{i,i}$

Utilizando a relação (4.35) e (4.36) para $j = i$ temos

$$\Gamma_{m,n}^{i,i} = A_{i,i,m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)} \omega) + A_{i,i,m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{(+)} \omega - 2\nu_i \tau - 2\varphi_i), \quad (\text{C.9})$$

e

$$A_{i,i,m,n}^{(\pm)} = \frac{1}{2(\nu_i - m)} \left(m J_m(r_i) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_i) \right] \pm n J_n(r_i) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_m(r_i) \right] \right). \quad (\text{C.10})$$

Analizando a equação (C.9) observamos que no segundo termo temos uma função cosseno em cujo argumento aparece o parâmetro Δ' . Entretanto, como esse Δ' é multiplicado por um parâmetro de tempo adimensional τ , a fim de evitar secularidades preferimos manter essa função cosseno na forma original, sem expansão.

Analizaremos agora a expansão da equação (C.10). Podemos reescrever os coeficientes das funções trigonométricas na forma seguinte,

$$A_{i,i,m,n}^{(\pm)} = \frac{1}{2(\nu_i - m)} (X_{m,n} \pm X_{n,m}), \quad (\text{C.11})$$

onde

$$X_{m,n} \equiv m J_m(r_i) \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_i) \right]. \quad (\text{C.12})$$

Utilizamos a relação (C.8) para expandir essa variável $X_{m,n}$. Lembrando que $R = (2I)^{1/2}$ temos as seguintes relações

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} (2I)^{1/2} = \frac{1}{R}, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial I} f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{f'(R)}{R}, \quad (\text{C.14})$$

de modo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial I} J_n(r_i) \right] &\approx \frac{\partial}{\partial I} [J_n(R) + i\Delta' R J'_n(R)] \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} [J_n(R) + i\Delta' R J'_n(R)] \\ &= \frac{1}{R} [J'_n(R) + i\Delta' (R J''_n(R) + J'_n(R))]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} X_{m,n} &\approx \frac{m}{R} \{ J_m(R) + i\Delta' R J'_m(R) \} \{ J'_n(R) + i\Delta' (R J''_n(R) + J'_n(R)) \} \\ &\approx \frac{m}{R} \{ J_m(R) J'_n(R) + i\Delta' (R J_m(R) J''_n(R) + J_m(R) J'_n(R) + R J'_m(R) J'_n(R)) \}. \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte relação

$$\frac{\partial}{\partial R} (R J_m(R) J'_n(R)) = J_m(R) J'_n(R) + R J'_m(R) J'_n(R) + R J_m(R) J''_n(R), \quad (\text{C.15})$$

podemos escrever a eq. (C.13) como

$$X_{m,n} \approx \frac{m}{R} \left\{ J_m(R) J'_n(R) + i\Delta' \frac{\partial}{\partial R} (R J_m(R) J'_n(R)) \right\}. \quad (\text{C.16})$$

Utilizando a eq. (C.16) temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} X_{m,n} \pm X_{n,m} &= \frac{1}{R} (m J_m(R) J'_n(R) \pm n J_n(R) J'_m(R)) \\ &\quad + \frac{i\Delta'}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} R (m J_m(R) J'_n(R) \pm n J_n(R) J'_m(R)) \right\}. \end{aligned}$$

Em uma notação mais compacta, podemos definir

$$x_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv mJ_m(R)J'_n(R) \pm nJ_n(R)J'_m(R), \quad (\text{C.17})$$

e escrever

$$\begin{aligned} X_{m,n} \pm X_{n,m} &= \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} + \frac{i\Delta'}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} R x_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] \\ &= \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} + i\Delta' \left(\left[\frac{\partial}{\partial R} x_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right). \end{aligned}$$

Usando a relação

$$R \left[\frac{\partial}{\partial R} \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial R} x_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] - \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R},$$

obtemos

$$X_{m,n} \pm X_{n,m} = \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} + i\Delta' \left(R \left[\frac{\partial}{\partial R} \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right] + 2 \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right). \quad (\text{C.18})$$

Utilizando essa última equação (C.18) e a eq. (C.4) obtemos a aproximação do $A_{i,i,m,n}^{(\pm)}$

$$A_{i,i,m,n}^{(\pm)} \approx \frac{1}{2(\bar{\nu} - m)} \left(1 - i\Delta' \frac{\bar{\nu}}{(\bar{\nu} - m)} \right) \left(\frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} + i\Delta' \left(R \left[\frac{\partial}{\partial R} \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right] + 2 \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R} \right) \right).$$

Definindo

$$a_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv \frac{1}{2(\bar{\nu} - m)} \frac{x_{m,n}^{(\pm)}(R)}{R}, \quad (\text{C.19})$$

obtemos

$$\begin{aligned} A_{i,i,m,n}^{(\pm)} &\approx \left(1 - i\Delta' \frac{\bar{\nu}}{(\bar{\nu} - m)} \right) \left(a_{m,n}^{(\pm)}(R) + i\Delta' \left(R \left[\frac{\partial}{\partial R} a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + 2a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right) \right) \\ &\approx a_{m,n}^{(\pm)}(R) + i\Delta' \left(R \left[\frac{\partial}{\partial R} a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + \left[2 - \frac{\bar{\nu}}{(\bar{\nu} - m)} \right] a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right) \\ &= a_{m,n}^{(\pm)}(R) + i\Delta' \left(R \left[\frac{\partial}{\partial R} a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + \left[1 - \frac{m}{(\bar{\nu} - m)} \right] a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right). \end{aligned}$$

Finalmente obtemos a expressão para $A_{i,i,m,n}^{(\pm)}$ até a primeira ordem da expansão em parâmetro

Δ'

$$A_{i,i,m,n}^{(\pm)} \approx a_{m,n}^{(\pm)}(R) + i\Delta' b_{m,n}^{(\pm)}(R), \quad (\text{C.20})$$

onde

$$a_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv \frac{1}{2(\bar{\nu} - m)R} \left[mJ_m(R)J'_n(R) \pm nJ_n(R)J'_m(R) \right], \quad (\text{C.21})$$

e

$$b_{m,n}^{(\pm)}(R) \equiv R \left[\frac{\partial}{\partial R} a_{m,n}^{(\pm)}(R) \right] + \left[1 - \frac{m}{(\bar{\nu} - m)} \right] a_{m,n}^{(\pm)}(R). \quad (\text{C.22})$$

Substituindo a equação (C.20) na equação (C.9) obtemos a expansão para $\Gamma_{m,n}^{i,i}$

$$\Gamma_{m,n}^{i,i} \approx \Gamma_{m,n}^{(0)} + i\Delta'\Gamma_{m,n}^{(1)}, \quad (\text{C.23})$$

onde

$$\Gamma_{m,n}^{(0)} \equiv a_{m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)}\omega) + a_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{+}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i), \quad (\text{C.24})$$

e

$$\Gamma_{m,n}^{(1)} \equiv b_{m,n}^{(+)} \cos(\theta_{m,n}^{(-)}\omega) + b_{m,n}^{(-)} \cos(\theta_{m,n}^{+}\omega - 2\nu_i\tau - 2\varphi_i). \quad (\text{C.25})$$

Referências

- [1] TAKASE, Y.; EJIRI, A.; KASUYA, N.; MASHIKO, T.; SHIRAIWA, S.; TOZAWA, L. M.; AKIDUKI, T.; KASAHARA, H.; NAGASHIMA, Y.; NOZATO, H.; WADA, H.; YAMADA, H.; YAMADA, T.; YAMAGISHI, K. Initial results from the TST-2 spherical tokamak. *Nucl. Fusion*, Vienna, v. 41, n. 11, p. 1543–1550, Nov. 2001.
- [2] KARNEY, C. F. F. Stochastic ion heating by a lower hybrid wave. *Phys. Fluids*, New York, v. 21, n. 9, p. 1584–1599, Sept. 1978.
- [3] RAM, A. K.; BERS, A.; BÉNISTI, D. Ionospheric ion acceleration by multiple electrostatic waves. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, Washington, v. 103, n. 5, p. 9431–9440, May 1998.
- [4] FISCH, N. J. Theory of current drive in plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, Woodbury, v. 59, n. 1, p. 175–234, Jan. 1987.
- [5] SMITH, G. R.; KAUFMAN, A. N. Stochastic acceleration by a single wave in a magnetic-field. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 34, n. 26, p. 1613–1616, June 1975.
- [6] FUKUYAMA, A.; MOMOTA, H.; ITATANI, R.; TAKIZUKA, T. Stochastic acceleration by an electrostatic wave near ion-cyclotron harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 38, n. 13, p. 701–704, Mar. 1977.
- [7] KARNEY, C. F. F.; BERS, A. Stochastic ion heating by a perpendicularly propagating electrostatic wave. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 39, n. 9, p. 550–554, Aug. 1977.
- [8] KARNEY, C. F. F. Stochastic ion heating by a lower hybrid wave. II. *Phys. Fluids*, New York, v. 22, n. 11, p. 2188–2209, Nov. 1979.
- [9] RIYOPOULOS, S. Enhanced lower-hybrid heating caused by frequency modulation. *Phys. Fluids.*, Woodbury, v. 28, n. 4, p. 1097–1111, Apr. 1985.

- [10] ZASLAVISKII, G. M.; ZAKHAROV, M. Y.; SAGDEEV, R. Z.; USIKOV, D. A.; CHERNIKOV, A. A. Generation of ordered structures with a symmetry axis from a hamiltonian-dynamics. *Jetp Lett.*, Woodbury, v. 44, n. 7, p. 451–456, Oct. 1986.
- [11] ZASLAVISKII, G. M.; SAGDEEV, R. Z.; USIKOV, D. A.; CHERNIKOV, A. A. *Weak chaos and quasi-regular patterns*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [12] CHERNIKOV, A. A.; SAGDEEV, R. Z.; USIKOV, D. A.; ZAKHAROV, M. Y.; ZASLAVSKY, G. M. Minimal chaos and stochastic webs. *Nature*, London, v. 326, n. 6113, p. 559–563, Apr. 1987.
- [13] McCHESNEY, J. M.; STERN, R. A.; BELLAN, P. M. Observations of fast stochastic ion heating by drift waves. *Phys. Rev. Lett.*, Woodbury, v. 59, n. 13, p. 1436–1439, Sept. 1987.
- [14] DEANDRADE, M. C. R.; BRUSATI, M.; BARANOV, Y.; ERIKSSON, L. G.; GORMEZANO, C.; RIGHI, E.; RIMINI, F.; SADLER, G. Interaction of lower-hybrid waves with fast ions in JET. *Plasma Phys. Control Fusion*, Bristol, v. 36, n. 7, p. 1171–1188, July 1994.
- [15] TESTA, D.; LASHMORE-DAVIES, C. N.; GONDHALEKAR, A.; ERIKSSON, L. G.; MANTSINEN, M.; MARTIN, T. J. Measurement and interpretation of interaction of MeV energy protons with lower hybrid waves in JET plasmas. *Plasma Phys. Control Fusion*, Bristol, v. 41, n. 4, p. 507–524, Apr. 1999.
- [16] BENKADDA, S.; SEN, A.; SHKLYAR, D. R. Chaotic dynamics of charged particles in the field of two monochromatic waves in a magnetized plasma. *Chaos*, Woodbury, v. 6, n. 3, p. 451–460, Sept. 1996.
- [17] CANDY, J.; ROZMUS, W. A symplectic integration algorithm for separable Hamiltonian functions. *J. Comput. Phys.*, San Diego, v. 92, n. 1, p. 230–256, Jan. 1991.
- [18] CANDY, J.; ROZMUS, W. Rational resonances in a wave driven linear oscillator. *Physica D*, Amsterdam, v. 52, n. 2/3, p. 267–276, Sept. 1991.
- [19] CHIA, P. K.; SCHMITZ, L.; CONN, R. W. Stochastic ion behavior in subharmonic and superharmonic electrostatic waves. *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 3, n. 5, p. 1545–1568, May 1996.

- [20] BÉNISTI, D.; RAM, A. K.; BERS, A. Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. I. Coherent acceleration. *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 5, n. 9, p. 3224–3232, Sept. 1998.
- [21] BÉNISTI, D.; RAM, A. K.; BERS, A. Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. II. Enhancement of the acceleration. *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 5, n. 9, p. 3233–3241, Sept. 1998.
- [22] TOZAWA, L. M.; ZIEBELL, L. F. Stochastic diffusion of energetic ions due to lower hybrid waves. *Braz. J. Phys.*, São Paulo, v. 28, n. 3, p. 211–221, set. 1998.
- [23] ZIEBELL, L. F.; TOZAWA, L. M. The threshold condition for stochastic diffusion of energetic ions due to lower hybrid waves. *Braz. J. Phys.*, São Paulo, v. 28, n. 3, p. 222–229, set. 1998.
- [24] TOZAWA, L. M.; ZIEBELL, L. F. Stochastic diffusion of ions due to a finite set of lower hybrid waves. *Phys. Rev. E*, Melville, v. 66, n. 11, 056409 13p., Nov. 2002.
- [25] GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. Reading: Addison-Wesley, 1950.
- [26] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [27] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 52, n. 5, p. 263–379, May 1979.
- [28] FARINA, D.; POZZOLI, R.; ROMÉ, M. Quasi-linear stochastic electron energy diffusion driven by an intense cyclotron wave in oblique propagation. *Phys. Plasmas*, Woodbury, v. 1, n. 6, p. 1871–1876, June 1994.
- [29] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover, 1970.
- [30] CARY, J. R. Lie transform perturbation theory for Hamiltonian systems. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 79, n. 2, p. 129–159, Dec. 1981.
- [31] SALETAN, E. J.; CROMER, A. H. *Theoretical mechanics*. New York: John Wiley, 1971.
- [32] NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. New York: John Wiley, 1973.

- [33] WHITTAKER, E. T. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. New York: Dover, 1944.
- [34] GARRIDO, L. M. General interaction picture from action principle for mechanics. *J. Math. Phys.*, New York, v. 10, n. 6, p. 1045–1056, June 1969.
- [35] DEPRIT, A. Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mech.*, v. 1, n. 1, p. 12–30, June 1969.
- [36] SCHMIDT, D. S. Literal solution for Hill’s lunar problem. *Celestial Mech.*, Dordrecht, v. 19, n. 3, p. 279–289, Apr. 1979.
- [37] CHENG, B. K. Motion near the triangular points in the elliptic restricted problem of 3 bodies. *Celestial Mech.*, Dordrecht, v. 19, n. 1, p. 31–41, Jan. 1979.
- [38] McNAMARA, B. Super-convergent adiabatic invariants with resonant denominators by Lie transforms. *J. Math. Phys.*, New York, v. 19, n. 10, p. 2154–2164, Oct. 1978.
- [39] CARY, J. R.; KAUFMAN, A. N. Ponderomotive force and linear susceptibility in Vlasov plasma. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 39, n. 7, p. 402–404, Aug. 1977.
- [40] CARY, J. R.; KAUFMAN, A. N. Ponderomotive effects in collisionless plasma: a Lie transform approach. *Phys. Fluids.*, New York, v. 24, n. 7, p. 1238–1250, July 1981.
- [41] JOHNSTON, R. S.; KAUFMAN, A. N. Lie-operator approach to mode-coupling in nonuniform plasma. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 40, n. 19, p. 1266–1269, May 1978.
- [42] MYNICK, H. E. Guiding-center Hamiltonian for large gyroexcursion particles in mirror configurations. *Phys. Fluids*, New York, v. 23, n. 9, p. 1888–1896, Sept. 1980.
- [43] LITTLEJOHN, R. G. Guiding center Hamiltonian : new approach. *J. Math. Phys.*, New York, v. 20, n. 12, p. 2445–2458, Dec. 1979.
- [44] DEWAR, R. L. Renormalized canonical perturbation theory for stochastic propagators. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Bristol, v. 9, n. 12, p. 2043–2057, Dec. 1976.
- [45] DEWAR, R. L. Exact oscillation center transformations. *J. Phys. A: Math. Gen.*, Bristol, v. 11, n. 1, p. 9–26, Jan. 1978.

- [46] BÉNISTI, D.; RAM, A. K.; BERS, A. Lower bound in energy for chaotic dynamics of ions. *Phys. Lett. A*, Amsterdam, v. 233, n. 3, p. 209–215, Aug. 1997.