

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Um Estudo sobre Curvas NURBS

por

Ciliane de Fátima Minetto

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Rudnei Dias da Cunha, D. Phil
Orientador

Porto Alegre, Junho de 2003.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Minetto, Ciliane de Fátima

Um Estudo sobre Curvas NURBS / Ciliane de Fátima Minetto.—
Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2003.

111 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do
Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Ale-
gre, 2003.

Orientador: Cunha, D. Phil, Rudnei Dias da

Dissertação: Matemática Aplicada
NURBS, B-spline, Curvas

Um Estudo sobre Curvas NURBS

por

Ciliane de Fátima Minetto

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Algoritmos Numéricos e Algébricos

Orientador: Prof. Rudnei Dias da Cunha, D. Phil

Banca examinadora:

Prof. Dr. João Luiz Dihl Comba
PGCC/II/UFRGS

Profa. Dra. Liliane Basso Barichello
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Waldir Leite Roque
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
04 de Julho de 2003.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Coordenador

AGRADECIMENTO

À Deus, que nos guiou nesta jornada, que nos apontou o caminho e que, com certeza, sempre estará presente em nossa vida.

Agradeço, em especial, ao Prof. Rudnei Dias da Cunha pelos ensinamentos, apoio, incentivo, dedicação e tolerância durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao PPGMAp e a URI-FW pela oportunidade e disponibilização dos recursos, materiais e humanos, necessários para a realização deste trabalho.

Agradeço aos demais professores do PPGMAp pela colaboração em minha formação, destacadamente os professores Júlio, Elba, Ausberto, Jacques e Zang.

Agradeço as colegas Fátima, Janaine e Beatriz pela alegria, amizade e companheirismo sempre presentes; também as minhas “irmãs do coração” Adriane e Ângela pelas palavras de incentivo nesse período e pelos anos de amizade e convivência juntas.

Agradeço a Alessandra, amiga e colega de trabalho, pelas dicas e discussões salutares para o desenvolvimento de qualquer trabalho científico e pelo apoio mútuo para terminarmos esta Dissertação.

Agradeço ao Claudio, por ser a fonte de minha inspiração nesse período e por fazer com que eu descobrisse e acreditasse no meu potencial.

Agradeço aos meus pais, Celi e Wilson, pelos ensinamentos de vida e confiança depositados, que com todo amor, carinho e compreensão, me incentivaram e conduziram pela estrada da vida mostrando que sempre vale a pena lutar pelos nossos ideais. Também ao meu irmão, Baltasar, pelo companheirismo e apoio.

Agradeço a todos os familiares e amigos que sempre torceram pelo sucesso na realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	4
LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE ABREVIATURAS	9
RESUMO	10
ABSTRACT	11
1 INTRODUÇÃO	12
2 CONCEITOS GEOMÉTRICOS	14
2.1 Coordenadas Homogêneas	14
2.1.1 Notas Importantes	15
2.1.2 A Dimensionalidade de Coordenadas Homogêneas	15
2.1.3 Pontos Ideais ou Pontos no Infinito	16
2.1.4 Uma Interpretação de Geometria Simples	16
2.2 Continuidade	18
2.3 Curvas Racionais	19
3 CURVAS B-SPLINE E NURBS	20
3.1 Uma Introdução	20
3.2 História da Spline	23
3.3 B-spline: Motivação	25
3.4 Funções Base B-spline: Definição	25
3.4.1 Coeficientes	28
3.5 Funções Base B-spline: Propriedades Importantes	30
3.6 Curvas B-spline: Definição	32
3.7 Curvas B-spline: Propriedades Importantes	35
3.8 Curvas B-spline: Reposicionando Pontos de Controle	44
3.9 Curvas B-spline: Modificando Nós	48
3.9.1 Uma Nota sobre Nós Múltiplos	50
3.10 NURBS: Motivação	53
3.11 Teoria de Curva NURBS e propriedade	55
3.12 NURBS: Definição	56

3.12.1 Dois Resultados Imediatos	57
3.12.2 Uma Interpretação Geométrica	57
3.13 NURBS: Propriedades Importantes	59
3.13.1 As Propriedades Importantes de Funções Base NURBS	59
3.13.2 Propriedades Importantes de Curvas NURBS	60
3.14 NURBS: Modificando Pesos	63
3.14.1 Uma Discussão Detalhada	73
3.15 Curvas B-spline/NURBS: Inserção de Nó	76
3.15.1 Inserindo um Nó Único	77
3.15.2 Exemplo 1: Inserindo um Nó em um Período de Nó	80
3.15.3 Exemplo 2: Inserindo um Nó em um Nó Simples Existente	84
3.15.4 Exemplo 3: Inserindo um Nó em um Nó Múltiplo Existente	87
3.15.5 A Inserção de Nó para Curvas NURBS	89
3.15.6 Corte de Segmento	92
3.16 Comparações entre Curvas B-spline e NURBS	94
3.16.1 B-spline	94
3.16.2 NURBS como um Descritor de Forma	94
3.16.3 Desenhando Toros e Elipsóides com Curvas NURBS e B-spline	96
3.17 Aplicações utilizando NURBS	98
4 CONCLUSÕES	102
BIBLIOGRAFIA	104

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	<i>Ponto Homogêneo Bidimensional como um Ponto no Espaço Tridimensional</i> . . .	17
Figura 2.2	<i>Continuidade Geométrica G^0</i>	18
Figura 2.3	<i>Continuidade Geométrica G^1</i>	18
Figura 2.4	<i>Continuidade Paramétrica C^1</i>	19
Figura 3.1	<i>Relação entre os Quatro Tipos de Representações de Curva</i>	22
Figura 3.2	<i>Funções de Passo</i>	26
Figura 3.3	<i>Diagrama do Esquema de Computação Triangular</i>	26
Figura 3.4	<i>$N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$, respectivamente</i>	27
Figura 3.5	<i>Curva Composta</i>	28
Figura 3.6	<i>Diagrama dos Coeficientes</i>	29
Figura 3.7	<i>(a) Curva B-spline Aberta</i>	32
Figura 3.8	<i>(b) Curva B-spline Semi-fechada</i>	33
Figura 3.9	<i>(c) Curva B-spline Fechada</i>	33
Figura 3.10	<i>Funções Base de Grau 1</i>	34
Figura 3.11	<i>Curva B-spline</i>	35
Figura 3.12	<i>Curva Bézier</i>	36
Figura 3.13	<i>Curva B-spline de Grau 7</i>	36
Figura 3.14	<i>Curva B-spline de Grau 5</i>	37
Figura 3.15	<i>Curva B-spline de Grau 3</i>	37
Figura 3.16	<i>(a) Curvas B-spline com 11 Pontos de Controle (isto é, $n = 10$) e Grau 3</i> . . .	38
Figura 3.17	<i>(b) Curvas B-spline com 11 Pontos de Controle (isto é, $n = 10$) e Grau 3</i> . . .	39
Figura 3.18	<i>(a) Curva B-spline</i>	40
Figura 3.19	<i>(b) Curva B-spline com o Reposicionamento do Ponto de Controle p_2</i>	41
Figura 3.20	<i>Curva B-spline com 18 Pontos de Controle e Grau 4</i>	42
Figura 3.21	<i>Propriedade Diminuindo Variação em uma Curva B-spline</i>	43
Figura 3.22	<i>(a) Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline</i>	44
Figura 3.23	<i>(b) Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline</i>	44
Figura 3.24	<i>(c) Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline</i>	45
Figura 3.25	<i>(a) Curva B-spline de Grau 4</i>	46
Figura 3.26	<i>(b) Curva B-spline de Grau 4 reposicionada</i>	47

Figura 3.27	(a) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6	48
Figura 3.28	(b) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6	49
Figura 3.29	(c) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6	49
Figura 3.30	Curva B-spline de Grau 5	50
Figura 3.31	Nó de Multiplicidade Dois	50
Figura 3.32	Nó de Multiplicidade Três	51
Figura 3.33	Nó de Multiplicidade Quatro	51
Figura 3.34	Nó de Multiplicidade Cinco	52
Figura 3.35	Curva B-spline de Grau 2	53
Figura 3.36	Curva B-spline de Grau 3	53
Figura 3.37	Curva B-spline de Grau 5	54
Figura 3.38	Curva B-spline de Grau 10	54
Figura 3.39	(a) Curva NURBS de Grau 2	60
Figura 3.40	(b) Curva NURBS de Grau 2	61
Figura 3.41	(c) Curva NURBS de Grau 2	61
Figura 3.42	(a) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	63
Figura 3.43	(a) Funções Base NURBS	64
Figura 3.44	(b) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	64
Figura 3.45	(b) Funções Base NURBS	65
Figura 3.46	(c) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	65
Figura 3.47	(c) Funções Base NURBS	66
Figura 3.48	(d) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	66
Figura 3.49	(d) Funções Base NURBS	67
Figura 3.50	(e) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	67
Figura 3.51	(e) Funções Base NURBS	68
Figura 3.52	(f) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	68
Figura 3.53	(f) Funções Base NURBS	69
Figura 3.54	(g) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	69
Figura 3.55	(g) Funções Base NURBS	70
Figura 3.56	(h) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	70
Figura 3.57	(h) Funções Base NURBS	71
Figura 3.58	(i) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6	71

Figura 3.59	(i) Funções Base NURBS	72
Figura 3.60	Mostrando às Curvas de w_4 serem 2, 3, 4, 5, 10, 20 e 50	75
Figura 3.61	Curva B-spline Semi-fechada de Grau 4 com Nós Uniformemente Espaçados	76
Figura 3.62	Resultado depois de um Novo Nó $u = 0.5$ ser Inserido	77
Figura 3.63	Pontos de Controle q_i	78
Figura 3.64	Diagrama do Esquema de Computação de Inserção de Nó Único	79
Figura 3.65	Interpretação Geométrica de a_i	79
Figura 3.66	Diagrama do Alinhamento dos Intervalos no Valor de t	80
Figura 3.67	(a) Curva B-spline	81
Figura 3.68	(a) Funções Base	81
Figura 3.69	(b) Curva B-spline	82
Figura 3.70	(b) Funções Base	82
Figura 3.71	Diagrama da Relação entre os Velhos e os Novos Pontos de Controle	83
Figura 3.72	Relações entre a_j , u_j e t	84
Figura 3.73	(a) B-spline de Grau 4	85
Figura 3.74	(a) Funções Base	85
Figura 3.75	Diagrama do Esquema de Computação	86
Figura 3.76	(b) B-spline de Grau 4 depois do Novo Nó $t = 0.5$ ser Inserido	86
Figura 3.77	(b) Funções Base depois do Novo Nó $t = 0.5$ ser Inserido	87
Figura 3.78	Relações entre a_j , u_j , e t	87
Figura 3.79	Diagrama do Esquema de Computação	89
Figura 3.80	(a) Curva NURBS de Grau 3	90
Figura 3.81	(b) Funções Base	91
Figura 3.82	(b) Curva NURBS resultante	92
Figura 3.83	(b) Funções Base	92
Figura 3.84	Novo conjunto de Pontos de Controle	93
Figura 3.85	Imagem reconstruída usando representação NURBS e B-spline com 12 e 32 Pontos de Controle respectivamente [Liang e Mandava e Khoo, 2003]	95
Figura 3.86	Curva NURBS com 7 Pontos de Controle, Grau 3, 11 Nós e 7 Pesos	96
Figura 3.87	Curva B-spline com 7 Pontos de Controle, Grau 3 e 11 Nós	96
Figura 3.88	Curva NURBS com 7 Pontos de Controle, Grau 3, 11 Nós e 7 Pesos	97
Figura 3.89	Curva B-spline com 7 Pontos de Controle, Grau 3 e 11 Nós	97

Figura 3.90 (a) <i>Lados Esquerdo e Direito de um Dedo</i>	98
Figura 3.91 (b) <i>Visão Perspectiva do Dedo</i>	99
Figura 3.92 (c) <i>Pontos de Controle do Modelo de Dedo</i>	99
Figura 3.93 (d) <i>Extremidades da Unha do Dedo</i>	100
Figura 3.94 (e) <i>Visão Perspectiva da Unha</i>	100
Figura 3.95 (f) <i>Imagem final construída do Dedo</i>	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	<i>Vetor de Nós</i>	39
Tabela 3.2	<i>Vetor Nó Semi-fechado</i>	42
Tabela 3.3	<i>Períodos de Nó e Segmentos de Curva</i>	46
Tabela 3.4	<i>Nós de uma Curva NURBS de Grau 6</i>	74
Tabela 3.5	<i>(a) Vetor de Nós</i>	80
Tabela 3.6	<i>(b) Vetor de Nós</i>	81
Tabela 3.7	<i>(c) Vetor de Nós</i>	84
Tabela 3.8	<i>Nós</i>	90
Tabela 3.9	<i>Pontos de Controle no Plano-xy</i>	90
Tabela 3.10	<i>Novos Pontos de Controle P_i</i>	91

LISTA DE ABREVIATURAS

p, q	O grau de uma curva
u, v	Valores de parâmetros em representações de curvas
w_i	Pesos
u, v	Vetores nós em representações de curvas
$n + 1$	Número de pontos de controle
$m + 1$	Número de nós
$N_{i,p}(u)$	A i -ésima função base B-spline de grau p
$p_{i,j}$	Pontos de controle de uma curva
$R_{i,p}(u)$	A i -ésima função base NURBS de grau p
$P(u)$	Uma curva B-spline
$Q(u)$	Uma curva NURBS

RESUMO

O objetivo primordial desse trabalho está concentrado no estudo de Curvas NURBS (B-spline Racional Não-Uniforme). A literatura em português sobre NURBS é escassa, pouco difundida e os textos e artigos existentes tendem a ser rigorosos, longos e teóricos. Assim, o presente estudo está direcionado para os conceitos matemáticos de NURBS, para o qual foi utilizado uma ferramenta chamada DesignMentor com a finalidade de testar os algoritmos desses conceitos. NURBS são funções paramétricas que podem representar qualquer tipo de curva. NURBS são usadas em computação gráfica na indústria de CAD/CAM e estão sendo consideradas um padrão para criar e representar objetos complexos (indústria automobilística, aviação e embarcação). As ferramentas de criação gráfica mais sofisticadas provêm uma interface para usar NURBS, que são flexíveis suficiente para projetar uma grande variedade de formas. Hoje é possível verificar o uso expandido de NURBS, modelando objetos para as artes visuais, arte e escultura; também estão sendo usados para modelar cenas para aplicações de realidade virtual. NURBS trabalha bem em modelagem 3D, permitindo facilidade para manipular e controlar vértices, controlar curvatura e suavidade de contornos. NURBS provêm uma base matemática, unificada para representar formas analíticas e livres além de manter exatidão e independência de resolução matemática.

ABSTRACT

The primordial goal of this work is concentrated on Curves study NURBS (B-spline Rational Not-uniform). The literature in Portuguese about NURBS is scarce, little spread and the texts and existing articles tend to rigorous, long and theoretical being. This way, the present study is addressed for NURBS's mathematical concepts, for which was used a tool called DesignMentor with the purpose of testing the algorithms of these concepts. NURBS are parametric functions that can represent any type of curve. NURBS are used in graphic computation in CAD/CAM's Industry and are being considered a standard to create and to represent complex objects (automobile industry, aviation and vessel). The tools of more sophisticated graphic creation provide an interface to use NURBS, who are enough flexible to project a great variety of forms. Today it is possible to verify the use expanded of NURBS, modelling objects for the visual arts, art and sculpture; they also are being used to model scenes for applications of virtual reality. NURBS works well in modeling 3D, allowing easiness to manipulate and to control vertexes, control outlines curvature and softness. NURBS result from a mathematical base, unified to represent analytic and free forms to besides maintaining exactness and independence of mathematical resolution.

1 INTRODUÇÃO

Curvas NURBS - B-spline Racional Não Uniforme - estavam direcionadas ao interesse da comunidade de design auxiliado por computador, na qual elas se tornaram o padrão para curva e descrição de superfície. “É possível verificar o uso expandido de NURBS modelando objetos para as artes visuais, inclusive filmes e indústrias de entretenimento, arte e escultura. Os seguintes filmes usaram NURBS para construir cenas: Toy History, O Senhor dos Anéis e Matrix Reload. NURBS, atualmente também estão sendo usadas para modelar cenas para aplicações de realidade virtual. Há expectativas que estas aplicações aumentem de forma gradativa” [NURBS, (a) 2001].

“As curvas e superfícies NURBS tornaram-se de fato padrão de indústria para representação, projeto e troca de informações de dados geométricos processados por computadores. Muitos padrões internacionais, IGES, STEP, PHIGS e OpenGL reconhecem as NURBS como ferramentas poderosas para projeto geométrico ” [Piegl, 1997]. O sucesso enorme atrás de NURBS está em grande parte devido ao fato que:

- NURBS provêm uma base matemática, unificada para representar ambas as formas analíticas como seções cônicas e superfícies quadráticas, além de entidades de formas livres, como corpos de carros, de navios e aviões;
- Uma das vantagens das curvas NURBS é que elas permitem representar formas arbitrárias, enquanto mantém exatidão e independência de resolução matemática;
- O projeto com NURBS é intuitivo, quase toda ferramenta e algoritmo tem um fácil entendimento de interpretação geométrica;
- Algoritmos NURBS são rápidos e numericamente estáveis;
- As curvas e superfícies NURBS são invariantes sob transformações geométricas comuns, como translação, rotação, paralelo, projeções e perspectiva;
- NURBS são generalizações de curvas e superfícies B-splines racionais e não-rationais e curvas e superfícies de Bézier não-rationais;
- NURBS são capazes de proporcionar grande controle sobre a forma de uma curva. Um conjunto de pontos de controle e nós, que guiam a forma da curva, pode ser diretamente manipulado para controlar sua suavidade e curvatura;
- NURBS podem representar formas complexas, através de poucos dados. Para exemplificar, é possível aproximar um círculo por intermédio de uma seqüência de segmentos de reta, as quais exigiriam dezenas de milhares de segmentos para fazer parecer que

é um círculo, ao invés de um polígono. Definindo o mesmo círculo com uma representação NURBS comporta somente sete pontos de controle.

“Além de desenhar curvas NURBS diretamente como itens gráficos, pode-se usá-las de vários outros modos que exploram suas propriedades matemáticas úteis, como para guiarem caminhos de animação ou para interpolar ou aproximar dados. Também é possível usá-las como uma ferramenta para projetar e controlar as formas de superfícies tridimensionais, gerando superfícies de revolução por exemplo” [NURBS - Non-Uniform Rational B-Spline, 2001].

A literatura em português sobre NURBS é escassa, pouco difundida e os documentos disponíveis lidam principalmente com a matemática de splines, a qual é bastante complexa e requer uma compreensão detalhada de teoria de spline. O propósito deste trabalho é prover uma referência dos aspectos de curvas NURBS. A seguir, é feita uma breve descrição dos capítulos que constituem esse trabalho.

No capítulo 2, é realizado uma revisão, antecipando o ingresso ao estudo sobre NURBS. São introduzidos conceitos geométricos de coordenadas homogêneas, continuidade e curvas racionais.

A partir do capítulo 3, principia a avaliação e discussão em seu sentido amplo, referente ao estudo sobre Curvas NURBS. Nesse capítulo, são apresentadas as curvas B-spline e NURBS, no qual são tratados os seguintes assuntos: história da Spline, B-spline, Funções Base B-spline, propriedades importantes de Funções Base B-spline, definição de curvas B-spline, propriedades importantes de curvas B-spline, reposicionando pontos de controle de curvas B-spline, modificando nós de curvas B-spline; definição de NURBS, propriedades importantes de NURBS, modificando pesos NURBS, inserção de nó em curvas B-spline/NURBS, comparações entre curvas B-spline com curvas NURBS e aplicações usando NURBS.

Para finalizar, apresentamos as conclusões atingidas através deste estudo.

2 CONCEITOS GEOMÉTRICOS

2.1 Coordenadas Homogêneas

Um dos muitos propósitos aos quais se destinam o uso das coordenadas homogêneas está direcionado para a utilização do conceito de infinito. “Os matemáticos descobriram que muitos conceitos e computações geométricas podem ser simplificados se o conceito de infinito for usado. Isto será percebido de forma nítida quando acontecer o reposicionamento de curvas. Sem o uso de sistema de coordenadas homogêneas, seria difícil de projetar certas classes de curvas e superfícies muito úteis em computação gráfica e projeto auxiliado por computador” [Geometric, 2001].

Considerando dois números reais, a e w , e calculando a/w é possível reter o valor de a fixo e variar o valor de w . À medida que w diminui, a/w aumenta; se w tende a zero, a/w tende a infinito. Deste modo, para utilizar o conceito de infinito, são empregados dois números a e w , os quais representam um valor v , $v = a/w$. Se w não é zero, o valor é exatamente a/w . Caso contrário, é permitido identificar o valor de infinito com $(a, 0)$. Então, o conceito de infinito pode ser representado com um par de números tal como (a, w) ou como um quociente a/w .

Aplicando o conceito de infinito para o plano- xy de coordenadas, pode-se substituir x e y por x/w e y/w , tal que uma função $f(x, y) = 0$ torna-se $f(x/w, y/w) = 0$. Se a função $f(x, y) = 0$ é um polinômio de grau u , multiplicando-o por w^u eliminará todos os denominadores. Para exemplificar, pode-se supor a existência de uma reta $Ax + By + C = 0$. Substituindo x e y por x/w e y/w , obtêm-se $A(x/w) + B(y/w) + C = 0$. Multiplicando por w , vem:

$$Ax + By + Cw = 0 \tag{2.1}$$

Permitindo que a equação dada seja um polinômio de grau 2, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, após a substituição x e y com x/w e y/w e a multiplicação do resultado por w^2 , vem:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxw + 2Eyw + Fw^2 = 0 \tag{2.2}$$

Comparando este polinômio cuidadosamente, será possível constatar que os graus de todas as condições são iguais. No caso de uma reta, condições x , y e w são de grau 1, enquanto no polinômio de grau 2, todas as condições (isto é, x^2 , xy , y^2 , xw , yw e w^2) são de grau 2.

Em geral, para um polinômio de grau n , depois de introduzir w , todas as condições são de grau n . Conseqüentemente, estes polinômios são chamados polinômios homogêneos e as coordenadas (x, y, w) são chamadas de coordenadas homogêneas.

Analisando um polinômio de grau n em um sistema de coordenadas homogêneas, o qual é obtido dividindo-se w^n e substituindo x/w , y/w por x e y , respectivamente, converterá o polinômio para a forma com variáveis simples. Desse modo, um polinômio homogêneo de grau 3 dado é o seguinte:

$$x^3 + 3xy^2 - 5y^2w + 10w^3 = 0 \quad (2.3)$$

o resultado é:

$$x^3 + 3xy^2 - 5y^2 + 10 = 0 \quad (2.4)$$

As Coordenadas Homogêneas podem ser empregadas em qualquer sistema de coordenadas. Por exemplo, em três dimensões, pode-se substituir um ponto (x, y, z) por $(x/w, y/w, z/w)$; as manipulações algébricas vistas anteriormente podem ser empregadas de forma similar.

2.1.1 Notas Importantes

Atribuindo um ponto (x, y, w) em coordenadas homogêneas, o ponto correspondente no plano- xy é $(x/w, y/w)$. Deste modo, um ponto $(3, 4, 5)$ em coordenadas homogêneas convertidos para o ponto $(3/5, 4/5) = (0.6, 0.8)$ no plano- xy . Semelhantemente, um ponto (x, y, z, w) em coordenadas homogêneas convertidos para um ponto $(x/w, y/w, z/w)$ no espaço.

Inversamente, a coordenada homogênea de um ponto (x, y) no plano- xy é $(x, y, 1)$. Isto é, faz com que o componente w seja 1. De fato, isto é somente um resultado parcial, porque a resposta não é única. As coordenadas homogêneas de um ponto (x, y) no plano- xy é (xw, yw, w) para qualquer w não-nulo. Isso ocorre porque (xw, yw, w) é convertido de volta para (x, y) . Como resultado, a seguir é importante memorizar:

“Convertendo uma coordenada homogênea para uma convencional o resultado é único; mas, convertendo uma coordenada convencional para uma homogênea não é” de acordo com [Boehm e Prautzsch, 1994].

Desse modo, um ponto $(4, 2, 3)$ no espaço é convertido em $(4w, 2w, 3w, w)$ para qualquer w não-nulo.

2.1.2 A Dimensionalidade de Coordenadas Homogêneas

Coordenadas homogêneas necessitam de três e quatro componentes para representar um ponto em duas e três dimensões, respectivamente. Então, um ponto no espaço (resp., o plano- xy) em coordenadas homogêneas realmente tem quatro (resp., três) componentes. Adicionando um quarto (resp., terceiro) componente cujo valor é 1 para as coordenadas de um ponto no espaço (resp., o plano- xy) converte isto para suas correspondentes coordenadas homogêneas.

2.1.3 Pontos Ideais ou Pontos no Infinito

Como foi mencionado anteriormente, as coordenadas homogêneas podem facilmente utilizar o conceito de infinito. Deixando um ponto (x, y) permanecer fixo e convertido em uma coordenada homogênea, a qual será multiplicada com $1/w$, $(x/w, y/w, 1/w)$. Assim, permitindo que o valor de w tenda para zero, então $(x/w, y/w)$ reposiciona-se mais distante na direção de (x, y) . Quando w se torna zero, $(x/w, y/w)$ reposiciona-se para infinito. Então, pode-se afirmar que as coordenadas homogêneas $(x, y, 0)$ são o ponto ideal ou ponto no infinito na direção de (x, y) .

Pode-se contemplar o seguinte exemplo: Considerando que $(3, 5)$ seja um ponto no plano- xy , deve-se destacar $(3/w, 5/w)$. Se w não é zero, este ponto está na reta $y = (5/3)x$. Ou, se tal como da fórmula de vetor, $(3/w, 5/w)$ é um ponto na reta $O + (1/w)d$, no qual o ponto de base O é a origem de coordenadas e $d = (3, 5)$ é o vetor direção. Portanto, como w aproxima-se de zero, o ponto move-se para o infinito na reta. Isto acontece porque $(x, y, 0)$ é o ponto ideal ou o ponto no infinito na direção de (x, y) .

O caso aplica-se na mesma proporção para pontos no espaço, considerando que $(x, y, z, 0)$ é o ponto ideal ou ponto no infinito na direção de (x, y, z) .

O conceito de coordenadas homogêneas e pontos no infinito em certa direção tornar-se muito importante quando aborda-se representações de curvas e superfície.

2.1.4 Uma Interpretação de Geometria Simples

Dada uma coordenada homogênea (x, y, w) de um ponto no plano- xy , é possível considerar que (x, y, w) seja um ponto no espaço dos quais os valores de coordenadas são x , y e w para o x -, y - e eixos $-w$, respectivamente. A reta agrupa-se a este ponto e as intersecções de coordenadas originais ao plano $w = 1$ em um ponto $(x/w, y/w, 1)$.

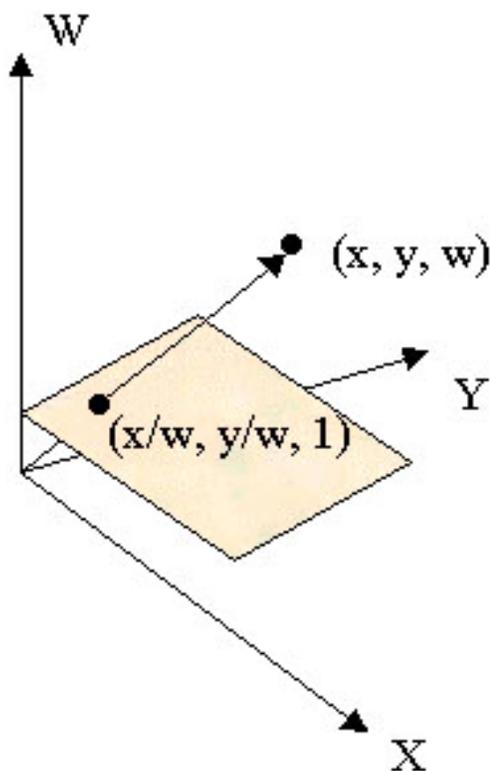


Figura 2.1: *Ponto Homogêneo Bidimensional como um Ponto no Espaço Tridimensional*

Esta transformação trata um ponto homogêneo bidimensional como um ponto no espaço tridimensional e projetos (da origem de coordenadas) localizada no ponto tridimensional para o plano $w = 1$. Então, como um ponto homogêneo move-se na curva definida pelo polinômio homogêneo $f(x, y, w) = 0$, seu ponto correspondente reposiciona no espaço tridimensional, que é sua vez projetado para o plano $w = 1$, $(x/w, y/w)$ movendo-se assim, na curva no plano $w = 1$.

A figura acima também revela claramente este fato enquanto a conversão das Coordenadas Convencionais Euclideana para Coordenadas Homogêneas é única, a direção oposta não é, pois todos os pontos na reta juntando-se a origem e (x, y, w) será projetada para $(x/w, y/w, 1)$.

2.2 Continuidade

“Para assegurar a continuidade entre segmentos de curva, criou-se restrições adicionais de continuidade. Existem dois tipos de continuidade:

- Continuidade paramétrica, denotada por C^n onde $n =$ grau de continuidade.
- Continuidade geométrica, denotada por G^n .

Dada uma curva onde dois segmentos $c_i(u)$ e $c_{i+1}(u)$ se encontram no ponto p :

$$p = c_i(1) = c_{i+1}(0) \quad (2.5)$$

Exemplos de Continuidade:

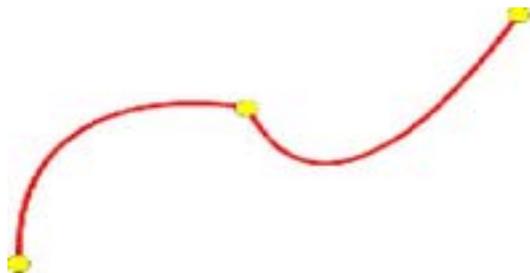


Figura 2.2: *Continuidade Geométrica G^0*

Dois segmentos se encontram em um ponto.

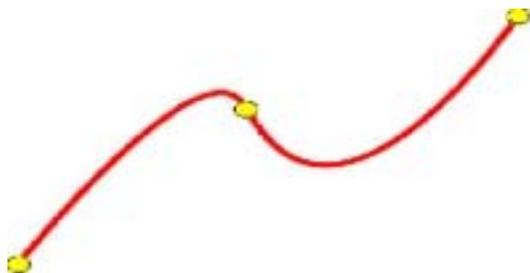


Figura 2.3: *Continuidade Geométrica G^1*

Direção das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção.

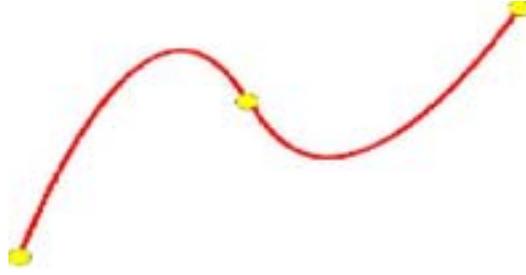


Figura 2.4: *Continuidade Paramétrica C^1*

Direção e magnitude das tangentes dos segmentos são iguais no ponto de junção”
[Barsky e Derosé, 1910]

2.3 Curvas Racionais

“As representações paramétricas, as quais usam polinômios não são poderosas o suficiente porque muitas curvas (por exemplo, círculos, elipses e hipérbolas) não podem ser obtidas deste modo. Uma maneira para superar isto é usar coordenadas homogêneas” conforme [Boehm e Prautzsch, 1994]. Nessa direção, uma curva no espaço é representada com quatro funções ao invés de três como pode-se constatar a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Curva espacial} : F(u) &= (x(u), y(u), z(u), w(u)) \\ \text{Curva plana} : F(u) &= (x(u), y(u), w(u)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

no qual u é um parâmetro localizado em algum intervalo fechado $[a, b]$. Convertendo esta curva para sua fórmula convencional resulta o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Curva espacial} : f(u) &= (x(u)/w(u), y(u)/w(u), z(u)/w(u)) \\ \text{Curva plana} : f(u) &= (x(u)/w(u), y(u)/w(u)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Obviamente, se $w(u) = 1$, uma função constante, as fórmulas homogêneas reduzem para fórmulas convencionais.

Uma curva paramétrica na forma homogênea é chamada de uma curva racional. Para fazer uma distinção, deve-se denominar uma curva na fórmula polinomial de curva polinomial.

3 CURVAS B-SPLINE E NURBS

3.1 Uma Introdução

O primeiro questionamento proposto investiga o porquê da necessidade de novas formas de curvas paramétricas. Uma resposta imediata é que curvas paramétricas não são totalmente geométricas. Mais precisamente, através de uma forma intensamente paramétrica é difícil saber a geometria subjacente que representa sem alguma análise adicional. Os coeficientes das equações não têm qualquer significado geométrico, e é quase impossível prever a mudança de forma se um ou mais coeficientes são modificados. Como resultado, desenhar uma curva que segue certo contorno/retas torna-se uma operação difícil.

Na prática, desenhistas ou usuários normalmente não se concentram na matemática subjacente. Eles estão focalizados pelo fato de conseguirem que seus trabalhos sejam feitos. Para que isso seja feito, um sistema que suporta uso e para que sejam desenhadas curvas devem apresentar os seguintes itens:

1. Intuitivos:

Espera-se que todo passo e todo algoritmo possa ter uma interpretação intuitiva e geométrica.

2. Flexível:

O sistema deve prover aos usuários maior controle para projetar e editar a forma de uma curva. O modo de criar e editar uma curva deve ser fácil e geométrico em vez de manipular equações.

3. Abordagem unificada:

O modo de representar, criar e editar tipos de edição diferentes de curvas (isto é, retas, seções cônicas e curvas cúbicas) deve ser o mesmo. Isto é, não exige técnicas diferentes para manipular diferentes curvas (ou seja, cônicas e cúbicas).

4. Invariante:

A curva representada não mudará sua geometria sujeita à transformações geométricas como translação, rotação, paralela, projeções e perspectiva.

5. Eficiente e Numericamente Estável:

Um usuário de um sistema de desenho de curva não pode se importar com a beleza da geometria subjacente; mas, espera-se que o sistema faça a curva e quer que seja

rápido e preciso. Além disso, grandes quantidades de computações não devem distorcer a forma da curva (isto é, deve haver estabilidade numérica).

Neste capítulo realiza-se um enfoque parcial de técnicas para desenho de curva que podem cumprir os critérios acima. Deve-se discutir B-spline e curvas NURBS. “O tema unificado destas técnicas consiste nas seguintes vantagens:

1. Um usuário pode planejar um conjunto de pontos de controle para o sistema, apresentar uma curva que mais ou menos segue a tendência do conjunto de pontos de controle.
2. Um usuário pode mudar as posições de alguns pontos de controle e algumas outras características para modificar a forma da curva. Nenhuma equação é exigida, porque a equação de uma curva normalmente não está armazenada.
3. Se necessário, um usuário pode adicionar pontos de controle e outras informações vitais sem mudar a forma da curva. Deste modo, um usuário tem mais liberdade para editar a curva, pois adicionando pontos de controle e outras informações aumenta o grau de liberdade da curva.
4. Um usuário pode até partir uma curva em dois pedaços para edição e então juntá-las novamente em um pedaço.
5. Existe muita geometria, algoritmos intuitivos e numericamente estáveis para encontrar pontos na curva sem saber a equação da curva” [Craig, 2001].

“As curvas Bézier foram simultaneamente descobertas por Paul de Casteljaeu na Citroën e Pierre E. Bézier na Renault por volta dos anos 50 e início dos anos 60. As curvas Base Spline ou B-spline, foram conhecidas e estudadas por N. Lobachevsky cuja importante contribuição para a matemática é talvez a denominada geometria hiperbólica (não-euclidiana) no final século XVIII. Porém, deve-se adotar uma versão moderna desenvolvida por C. De Boor, M. Cox e L. Mansfield no final dos anos 70. Deve-se ressaltar que curvas Bézier são casos especiais de B-spline” [Casteljaeu, 1993].

“Ambas as curvas Bézier e B-spline são curvas paramétricas polinomiais. Nesse sentido, formas paramétricas polinomiais não podem representar algumas curvas simples como círculos. Como resultado, Curvas Bézier e B-spline somente podem representar o que formas paramétricas polinomiais podem. Introduzindo coordenadas homogêneas elas se fazem racionais. Curvas Bézier e B-spline são generalizadas para curvas Bézier Racional e B-spline Racional Não-Uniforme, ou NURBS. Obviamente, curvas Bézier Racionais são mais poderosas que curvas Bézier

e atualmente podem representar círculos e elipses. Semelhantemente, NURBS são mais poderosos que B-spline. A relação entre estes quatro tipos de representações de curva é mostrado na figura abaixo” [Lavoie, 2001].

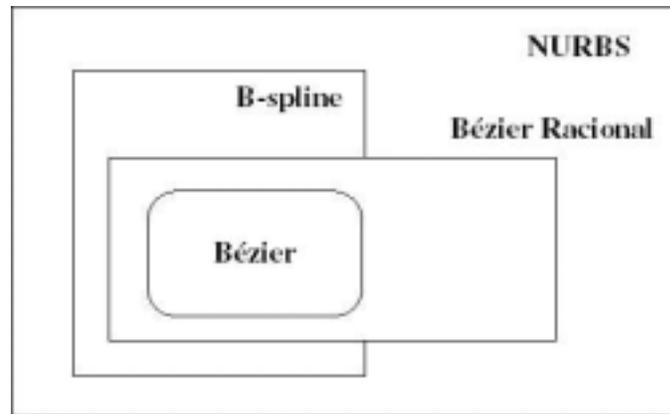


Figura 3.1: *Relação entre os Quatro Tipos de Representações de Curva*

3.2 História da Spline

“Há um tempo atrás, antes dos computadores surgirem, arquitetos, engenheiros, e artistas desenhavam seus projetos para edifícios, estradas, partes de máquina e semelhantes usando lápis, papel e várias ferramentas de desenho. Estas ferramentas incluíam réguas e T-quadrado para as retas de desenho reto, compassos para desenho de círculos, arcos circulares, triângulos e transferidores para fazer ângulos precisos. Obviamente, muitos objetos de formato interessante não podiam ser desenhados somente com estas ferramentas simples, pois eles tinham partes curvadas que não eram círculos ou elipses. Frequentemente, uma curva precisava que fosse suave em vários pontos pré-determinados. Este problema era particularmente crítico na construção naval: embora um artista ou desenhista qualificado, pudesse confiantemente desenhar a mão tais curvas em tabela de desenhos. Construções de navios frequentemente precisavam ser desenhadas de tamanho natural (ou quase do tamanho natural), no qual o tamanho empinado das curvas exigidos para ser desenhado a mão era impossível. Por causa de seu grande tamanho, tais desenhos eram frequentemente feitos na área de sótão de um grande edifício, por um especialista conhecido como “homem do sótão”. Para ajudar na tarefa, o “homem do sótão” empregava tiras longas, magras, flexível de madeira, plástico, ou metal, chamada spline. A spline era segura no lugar com pesos principais. As curvas resultantes eram lisas, e variadas em curvatura que dependiam da posição dos pesos. Como computadores foram introduzidos no processo de projeto, as propriedades físicas de tal spline foram investigadas de forma que elas pudessem ser matematicamente modeladas no computador” [Deboor, 1978].

Também existiam outras versões dessa história, contudo é comumente aceito que a primeira referência matemática para spline é o jornal de Schoenberg que é provavelmente o primeiro lugar que a palavra “spline” foi utilizada com relação a liso, aproximação polinomial de curvas por segmentos. Porém, as idéias têm suas raízes nas indústrias de construção de aeronave e navio. Posteriormente, Robin Forrest descreve “lofting”, uma técnica usada na indústria de aeronave britânica durante a II Guerra Mundial para construir modelos para aviões passando placas de madeira por pontos dispostos no chão de um grande projeto em um sótão. As placas seriam seguras em pontos discretos e entre estes pontos assumiriam formas de energia de tensão mínima. De acordo com Forrest, um possível ímpeto para um modelo matemático para este processo era a perda potencial dos componentes de projetos críticos. Para destruir uma aeronave inteira devia o sótão ser batido por uma bomba inimiga. Isto deu lugar ao “lofting” cônico (colocando no sótão) que usou seções cônicas para modelar a posição da curva entre os pontos. Lofting cônico foi substituído pelo que chamaríamos spline no início dos anos 60 baseado no trabalho na Boeing por J. C. Ferguson e (um pouco mais tarde) por M.A. Sabin na Aeronave Britânica.

De maneira interessante, Forrest diz que a palavra “spline” vem de um dialeto de Anglian Oriental.

“O uso de spline para modelar corpos de automóvel parece ter vários começos independentes. O crédito é reivindicado em nome de De Casteljaou na Citroën, Bézier na Renault, Birkhoff, Garabedian, e De Boor na GM, resultando em vários documentos sendo publicados no início dos anos 60 e inclui alguns dos trabalhos fundamentais em B-spline” [Casteljaou, 1993].

As figuras mostradas a seguir foram obtidas utilizando-se o software “DesignMentor” [Shene, 2001].

3.3 B-spline: Motivação

Para desenhar uma curva B-spline, precisa-se de um conjunto de pontos de controle, um conjunto de nós e um conjunto de coeficientes, um para cada ponto de controle de forma que todos segmentos de curva sejam unidos, satisfazendo certa condição de continuidade.

3.4 Funções Base B-spline: Definição

Funções base B-spline serão usadas como pesos, elas são muito complexas. Existem duas propriedades interessantes, isto é: (1) o domínio é subdividido por nós, e (2) funções base não são não-nulas no intervalo inteiro. De fato, cada função base B-spline é não-nula em algum subintervalo adjacente e, como resultado, funções base B-spline são bastante “locais”.

Permitindo que u seja um conjunto de $m + 1$ números reais não-decrescente, $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_m$. Os u_i são chamados nós, e o conjunto u vetor de nós, e o intervalo semi-aberto $[u_i, u_{i+1})$ o i -ésimo período de nó. Pode-se perceber que alguns u_i podem ser iguais, alguns períodos de nó podem não existir. Se um nó u_i aparecer no tempo k (isto é, $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1}$), onde $k > 1$, u_i é um nó múltiplo de multiplicidade k , escrito como $u_i(k)$. De outra maneira, se u_i aparecer somente uma vez, ele é um nó simples. Se os nós são igualmente periódicos (isto é, $u_{i+1} - u_i$ é uma constante para $0 \leq i \leq m - 1$), o vetor de nós ou a seqüência de nós são ditos uniformes; de outra maneira, são não-uniformes.

Os nós podem ser considerados como pontos de divisão que subdividem o intervalo $[u_0, u_m]$ em períodos de nó. Todas funções base B-spline deveriam ter seu domínio $[u_0, u_m]$. Pode-se perceber que, utilizando-se $u_0 = 0$ e $u_m = 1$ freqüentemente de forma que o domínio está no intervalo fechado $[0, 1]$.

Para definir funções base B-spline, precisa-se mais um parâmetro, o grau destas funções base, p . A i -ésima função base B-spline de grau p , escrita como $N_{i,p}(u)$, é:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.1)$$

e definida recursivamente como:

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.2)$$

Acima a fórmula é chamada de recursão Cox De Boor. Esta definição parece ser complicada, contudo, não é difícil de entender. Se o grau é zero (isto é, $p = 0$), estas funções base

são todas funções de passo e isto é o que a primeira expressão diz. Isto é, função base $N_{i,0}(u)$ é 1 se u está no i -ésimo período de nó $[u_i, u_{i+1})$. Por exemplo, possuindo quatro nós $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ e $u_3 = 3$, períodos de nó 0, 1 e 2 são $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$ e as funções base de grau 0 são $N_{0,0}(u) = 1$ em $[0, 1)$ e 0 em outro lugar, $N_{1,0}(u) = 1$ em $[1, 2)$ e 0 em outro lugar, e $N_{2,0}(u) = 1$ em $[2, 3)$ e 0 em outro lugar. Isto é revelado no gráfico abaixo:

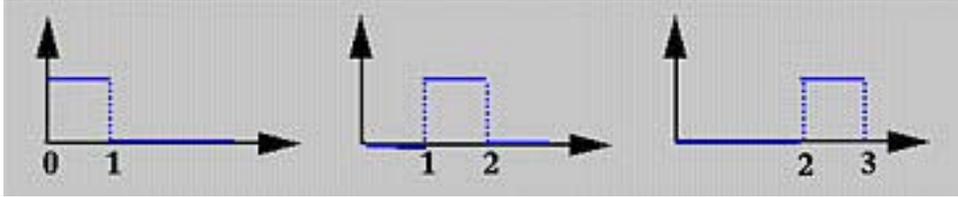


Figura 3.2: *Funções de Passo*

Para compreender o modo de computar $N_{i,p}(u)$ para p maior que 0, pode-se usar o esquema de computação triangular. Todos períodos de nó estão na primeira coluna à esquerda e todas funções base de grau zero na segunda. Isto é mostrado no diagrama seguinte.

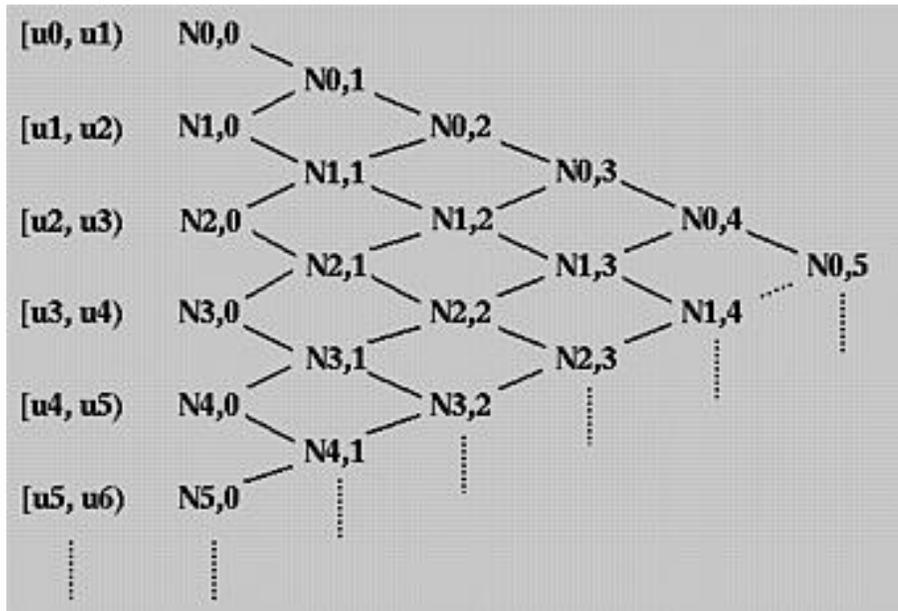


Figura 3.3: *Diagrama do Esquema de Computação Triangular*

Para computar $N_{i,1}(u)$, $N_{i,0}(u)$ e $N_{i+1,0}(u)$ são exigidos. Então, pode-se computar $N_{0,1}(u)$, $N_{1,1}(u)$, $N_{2,1}(u)$, $N_{3,1}(u)$ e assim sucessivamente. Todos estes $N_{i,1}(u)$ são escritos na terceira coluna. Uma vez que todo $N_{i,1}(u)$ tenha sido computado, pode-se computar $N_{i,2}(u)$ e colocá-los na quarta coluna. Este processo continua até que todos $N_{i,p}(u)$ requeridos sejam computados.

Acima, obteve-se $N_{0,0}(u)$, $N_{1,0}(u)$ e $N_{2,0}(u)$ para o vetor de nó $u = \{0, 1, 2, 3\}$. Computando $N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$, deve-se computar $N_{0,1}(u)$, pois $i = 0$ e $p = 1$, da definição ter-se-á:

$$N_{0,1}(u) = (u - u_0)/(u_1 - u_0)N_{0,0}(u) + (u_2 - u)/(u_2 - u_1)N_{1,0}(u) \quad (3.3)$$

Considerando que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e $u_2 = 2$, acima torna-se:

$$N_{0,1}(u) = uN_{0,0}(u) + (2 - u)N_{1,0}(u) \quad (3.4)$$

Observando que $N_{0,0}(u)$ é não-nulo em $[0, 1)$ e $N_{1,0}(u)$ é não-nulo em $[1, 2)$, quando u está em $[0, 1)$ (resp., $[1, 2)$), somente $N_{0,0}(u)$ (resp., $N_{1,0}(u)$) contribui para $N_{0,1}(u)$. Então, quando u está em $[0, 1)$, $N_{0,1}(u)$ é $uN_{0,0}(u) = u$, e quando u está em $[1, 2)$, $N_{0,1}(u)$ é $(2 - u)N_{1,0}(u) = (2 - u)$. Computação semelhante dá $N_{1,1}(u) = u - 1$ se u está em $[1, 2)$, e $N_{1,1}(u) = 3 - u$ se u está em $[2, 3)$. Na figura seguinte, as retas são $N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$, respectivamente. Percebe-se que $N_{0,1}(u)$ (resp., $N_{1,1}(u)$) é não-nulo em $[0, 1)$ e $[1, 2)$ (resp., $[1, 2)$ e $[2, 3)$).

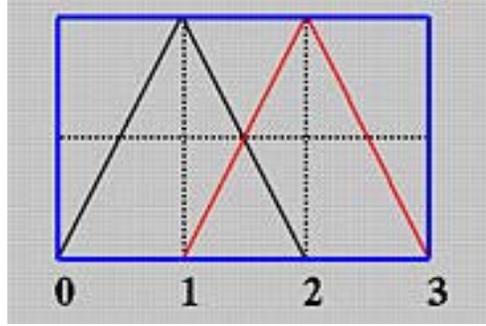


Figura 3.4: $N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$, respectivamente

Uma vez que $N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$ estão disponíveis, pode-se computar $N_{0,2}(u)$. A definição nos apresenta o seguinte:

$$N_{0,2}(u) = (u - u_0)/(u_2 - u_0)N_{0,1}(u) + (u_3 - u)/(u_3 - u_1)N_{1,1}(u) \quad (3.5)$$

Ligando os valores dos rendimentos de nós:

$$N_{0,2}(u) = 0.5uN_{0,1}(u) + 0.5(3 - u)N_{1,1}(u) \quad (3.6)$$

Pode-se perceber que $N_{0,1}(u)$ é não-nulo em $[0, 1)$ e $[1, 2)$ e $N_{1,1}(u)$ é não-nulo em $[1, 2)$ e $[2, 3)$. Então, teremos três casos para considerar:

1. u está em $[0, 1)$:

Neste caso, somente $N_{0,1}(u)$ contribui para o valor de $N_{0,2}(u)$. Considerando que $N_{0,1}(u)$ é u , temos:

$$N_{0,2}(u) = 0.5u^2. \quad (3.7)$$

2. u está em $[1, 2)$:

Neste caso, ambos $N_{0,1}(u)$ e $N_{1,1}(u)$ contribuem para $N_{0,2}(u)$. Destacando que em $[1, 2)$, $N_{0,1}(u) = 2 - u$ e $N_{1,1}(u) = u - 1$, teremos:

$$N_{0,2}(u) = (0.5u)(2 - u) + 0.5(3 - u)(3 - u) = 0.5(-3 + 6u - 2u^2) \quad (3.8)$$

3. u está em $[2, 3)$:

Neste caso, somente $N_{1,1}(u)$ contribui para $N_{0,2}(u)$. Observando que $N_{1,1}(u) = 3 - u$ em $[2, 3)$, ter-se-á:

$$N_{0,2}(u) = 0.5(3 - u)(3 - u) = 0.5(3 - u)^2 \quad (3.9)$$

Desenhando o segmento de curva de cada um dos três casos acima, será possível ver que dois segmentos de curva adjacentes são formas de articulação unindo uma curva nos nós. Mais precisamente, os segmentos de curva do primeiro e segundo caso estão unidos em $u = 1$, enquanto os segmentos de curva do segundo e terceiro caso estão unidos em $u = 2$. Isto é revelado na figura seguinte. Percebendo que a curva composta mostrada aqui é lisa, mas em geral não é sempre o caso se um vetor de nós contém nós múltiplos.

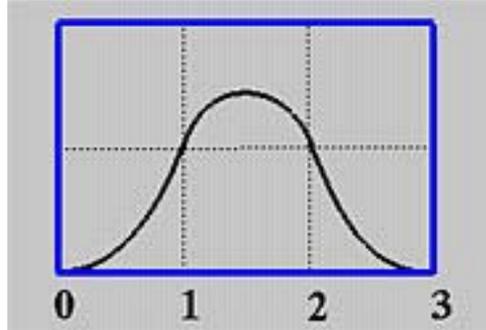


Figura 3.5: *Curva Composta*

3.4.1 Coeficientes

Finalmente, é preciso se concentrar no significado dos coeficientes na definição de $N_{i,p}(u)$. Quando $N_{i,p}(u)$ está sendo computado, usa $N_{i,p-1}(u)$ e $N_{i+1,p-1}(u)$. O primeiro é não-nulo em $[u_i, u_{i+p})$. Se u está neste intervalo semi-aberto, então $u - u_i$ é a distância entre u e a

esquerda deste intervalo, o comprimento de intervalo é $u_{i+p} - u_i$, e $(u - u_i)/(u_{i+p} - u_i)$ é a relação das distâncias acima mencionado e está sempre na faixa de 0 e 1. Contemplando o diagrama a seguir, pode-se verificar que o segundo termo, $N_{i,p-1}(u)$, é não-nulo em $[u_{i+1}, u_{i+p+1})$. Se u está neste intervalo, então $u_{i+p+1} - u$ é a distância de u à direita deste intervalo, $u_{i+p+1} - u_{i+1}$ é o comprimento do intervalo, e $(u_{i+p+1} - u)/(u_{i+p+1} - u_{i+1})$ é a relação destas duas distâncias e seu valor está na faixa de 0 e 1. Então, $N_{i,p}(u)$ é uma combinação linear de $N_{i,p-1}(u)$ e $N_{i+1,p-1}(u)$ com dois coeficientes, ambos linear em u , na faixa de 0 e 1.

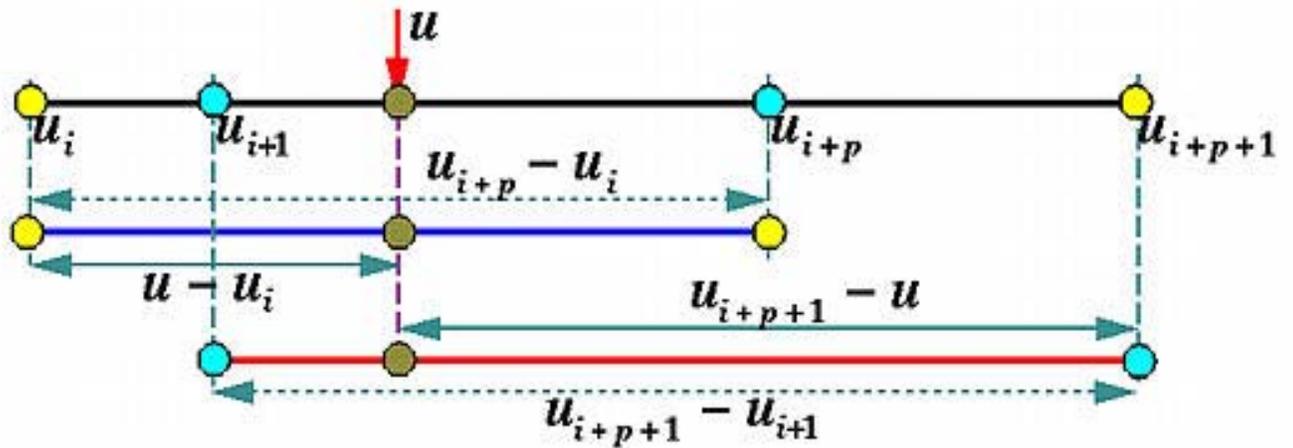


Figura 3.6: Diagrama dos Coeficientes

3.5 Funções Base B-spline: Propriedades Importantes

Recordando a definição das funções base B-spline a seguir:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (3.11)$$

Este conjunto de funções base apresenta as seguintes propriedades:

1. $N_{i,p}(u)$ é um polinômio de grau p em u .
2. Não Negatividade – Para todo i , p e u , $N_{i,p}(u)$ é não negativo.
3. Suporte Local – $N_{i,p}(u)$ é um polinômio não-nulo em $[u_i, u_{i+p+1})$.
4. Em qualquer período $[u_i, u_{i+1})$, no máximo $p+1$ funções base de grau p são não-nulas, isto é: $N_{i-p,p}(u)$, $N_{i-p+1,p}(u)$, $N_{i-p+2,p}(u)$, ..., e $N_{i,p}(u)$.
5. Partição de Unidade – A soma de todas funções base não-nulas de grau p no período $[u_i, u_{i+1})$ é 1:

A propriedade anterior mostra que $N_{i-p,p}(u)$, $N_{i-p+1,p}(u)$, $N_{i-p+2,p}(u)$, ..., e $N_{i,p}(u)$ são não-nulos em $[u_i, u_{i+1})$. Este primeiro estado o qual a soma destas funções base $p+1$ é 1.

6. Se o número de nós é $m+1$, o grau das funções base é p , e o número da função base de grau p é $n+1$, então $m = n + p + 1$:

Deixe $N_{n,p}(u)$ ser a última função base de grau p . É não-nulo em $[u_n, u_{n+p+1})$. Considerando que é a última função base, u_{n+p+1} deve ser o último nó um. Então, será adquirido $u_{n+p+1} = u_m$ e $n + p + 1 = m$. Em resumo, através de m e p , é possível concentrar-se em $n = m - p - 1$ e as funções base de grau p as quais são $N_{0,p}(u)$, $N_{1,p}(u)$, $N_{2,p}(u)$, ..., e $N_{n,p}(u)$.

7. Função base $N_{i,p}(u)$ é uma curva composta de polinômios de grau p com pontos de acoplamento nos nós em $[u_i, u_{i+p+1})$.

O exemplo mostrado anteriormente ilustra bem esta propriedade. Exemplificando, pode-se afirmar que $N_{0,2}(u)$, que é não-nulo em $[0, 3)$, é construído de três parábolas definidas em $[0, 1)$, $[1, 2)$ e $[2, 3)$. Elas estão conectadas juntas nos nós 2 e 3.

8. Em um nó de multiplicidade k , função base $N_{i,p}(u)$ é C^{p-k} contínuo.

Então, aumentando a multiplicidade será diminuído o nível de continuidade, e aumentando o grau aumentará a continuidade. Acima, foram mencionadas funções base de grau 2 $N_{0,2}(u)$ é C^1 contínuo nos nós 2 e 3, visto que eles são nós simples ($k = 1$).

3.6 Curvas B-spline: Definição

Através de $n+1$ pontos de controle p_0, p_1, \dots, p_n e um vetor de nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, a curva B-spline de grau p definida por estes pontos de controle e vetor de nós u é:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)p_i \quad (3.12)$$

no qual $N_{i,p}(u)$ são funções base B-spline de grau p definidas nas equações 3.1 e 3.2. As B-spline são curvas em R^n ($n = 2, 3$), usualmente: $P(u) \in R^n$.

“Uma curva B-spline envolve as seguintes informações: um conjunto de pontos de controle, um vetor de nós e um grau. Pode-se perceber que n , m e p deve satisfazer $m = n + p + 1$. Mais precisamente, para definir uma curva B-spline de grau p com $n + 1$ pontos de controle, será preciso fornecer $n + p + 2$ nós $u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}$. Por outro lado, se um vetor de nó de $m + 1$ nós e $n + 1$ pontos de controle são dados, o grau da curva B-spline é $p = m - n - 1$.

Para mudar a forma de uma curva B-spline, pode-se modificar um ou mais destes parâmetros de controle: as posições de pontos de controle, as posições de nós e o grau da curva” [Lerios, 2001].

Se o vetor de nós não tem qualquer estrutura particular, a curva gerada não tocará o primeiro e último segmento do polígono de controle como mostrada na figura 3.7 a seguir. Estes tipos de curvas B-spline são chamadas curvas B-spline abertas. Pode-se querer atingir a curva de forma que é tangente para o primeiro e a último segmento. Para fazer isso, o primeiro nó e o último nó devem ser repetidos $p + 1$ (isto é, de multiplicidade $p + 1$). Isto gerará as denominadas curvas B-spline semi-fechadas. Veja a figura 3.8 a seguir. Repetindo um pouco de nós e pontos de controle, a curva gerada pode estar fechada em uma. Neste caso, o começo e o fim da junção de curva gerada formam um loop fechado como mostrada na última figura 3.9.

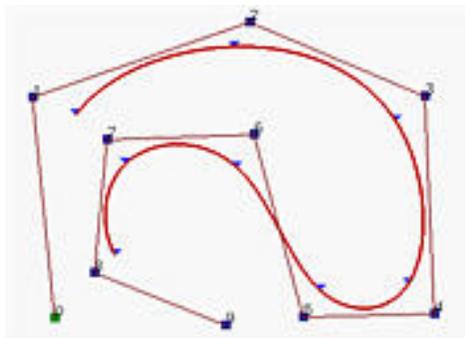


Figura 3.7: (a) Curva B-spline Aberta

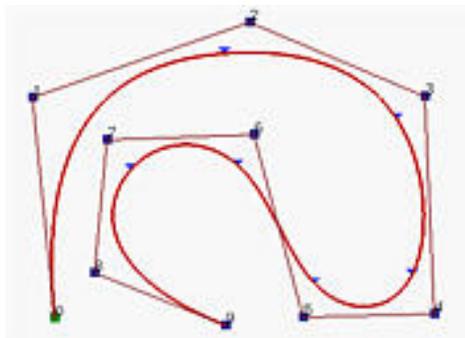


Figura 3.8: (b) Curva B-spline Semi-fechada

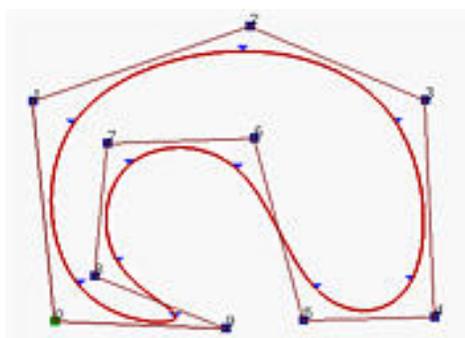


Figura 3.9: (c) Curva B-spline Fechada

As figuras anteriores têm $n + 1$ pontos de controle, considerando $n = 9$ e $p = 3$. Então, m deve ser 13 de forma que o vetor de nós conterá 14 nós. Para ter o efeito semi-fechado, o primeiro $p + 1 = 4$ e os últimos 4 nós devem ser idênticos. Os restantes $14 - (4 + 4) = 6$ nós podem estar em qualquer lugar no domínio. De fato, a curva é gerada com vetor de nós $u = \{0, 0, 0, 0, 0.14, 0.28, 0.42, 0.57, 0.71, 0.85, 1, 1, 1, 1\}$. É possível que com exceção dos primeiros quatro e últimos quatro nós, os uns do meio são quase uniformemente espaçados. As figuras, também, mostram o segmento de curva correspondente de cada período de nó. De fato, os pequenos triângulos são os pontos na curva que correspondem aos nós. Considerando que temos somente seis nós em ambos fins, existem seis pequenos triângulos indicando as posições dos nós correspondentes.

Como foi mencionado antes, se não existe nenhum nó repetido em ambos fins, a curva gerada não será tangente para a primeira e última perna. Exemplo de computação de função base usando vetor de nós $u = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$, no qual $m = 4$. Se as funções base são de grau 1 (isto é, $p = 1$), existem três funções base $N_{0,1}(u)$, $N_{1,1}(u)$ e $N_{2,1}(u)$ como é mostrado a seguir:

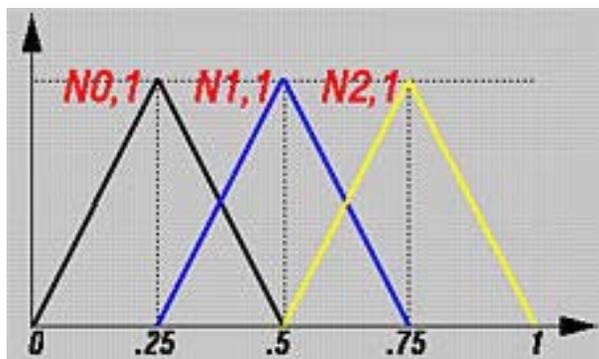


Figura 3.10: *Funções Base de Grau 1*

Visto que este vetor de nós não é semi-fechado, o primeiro e o último período de nó (isto é, $[0, 0.25)$ e $[0.75, 1)$) tem somente uma função base não-nula, enquanto o segundo e o terceiro período de nó (isto é, $[0.25, 0.5)$ e $[0.5, 0.75)$) apresentam duas funções base não-nulas. Recordando as importantes propriedades de B-spline que em um período de nó $[u_i, u_{i+1})$, existem no máximo $p+1$ funções base não-nulas de grau p . Então, neste exemplo, períodos de nó $[0, 0.25)$ e $[0.75, 1)$ não tem “suporte completo” de funções base. Em geral, para grau p , intervalos $[u_0, u_p)$ e $[u_{n-p}, u_n)$ não terá “suporte completo” de funções base e são ignoradas quando uma curva B-spline está aberta. Então, ter-se-á a seguinte nota importante:

Para curvas B-spline abertas, o domínio está no intervalo $[u_p, u_{n-p}]$.

3.7 Curvas B-spline: Propriedades Importantes

É possível analisar algumas das propriedades mais importantes de B-spline, procurando somente se concentrar em curvas B-spline semi-fechadas.

A seguir, é necessário assumir que uma curva B-spline $P(u)$ de grau p é definida por $n + 1$ pontos de controle, vetor de nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ com o primeiro $p + 1$ e último $p + 1$ nós semi-fechados (isto é, $u_0 = u_1 = \dots = u_p$ e $u_{m-p} = u_{m-p+1} = \dots = u_m$).

1. Curva B-spline $P(u)$ é uma curva por segmentos com cada componente uma curva de grau p .

Como foi mencionado anteriormente, $P(u)$ pode ser visualizada como a união de segmentos de curva definidos em cada período de nó. Na figura 3.11 a seguir, na qual $n = 10$, $m = 14$ e $p = 3$, os primeiros quatro nós e últimos quatro nós são semi-fechados e os 7 nós do meio estão uniformemente espaçados. Existem oito períodos de nó, cada um corresponde para um segmento de curva. Os pontos de divisão são $P(u_i)$. Na figura 3.11, estes pontos de divisão são mostrados como triângulos.

Esta propriedade permite que sejam projetadas formas muito complicadas como polinômios de grau mais baixo. Por exemplo, na figura 3.12 é mostrada uma curva Bézier com o mesmo conjunto de pontos de controle. Ainda é possível que seja seguido o polígono de controle, embora seu grau seja 10.

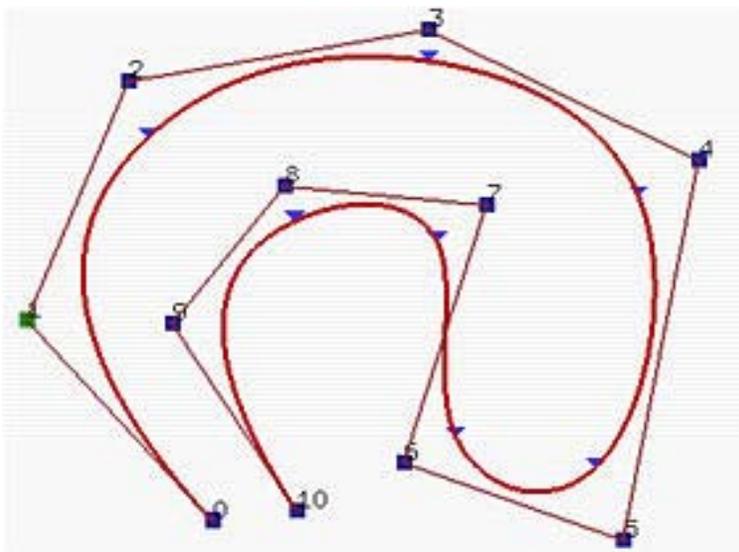


Figura 3.11: *Curva B-spline*

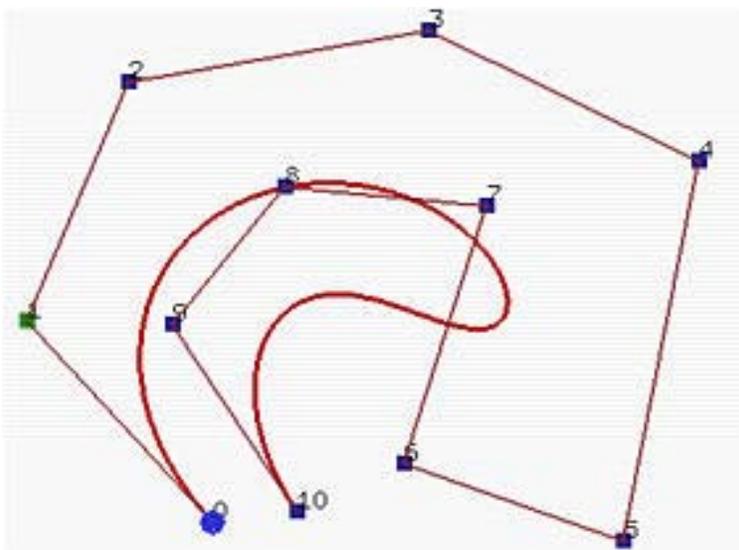


Figura 3.12: *Curva Bézier*

Em geral, o grau quanto mais baixo for, mais uma curva B-spline segue seu polígono de controle. As figuras seguintes usam todas o mesmo polígono de controle e nós são semi-fechados e uniformemente espaçados. A figura 3.13 tem grau 7, a figura 3.14 tem grau 5 e a figura 3.15 tem grau 3. Então, com as diminuições de grau, o B-spline gerado fica mais próximo ao seu polígono de controle.

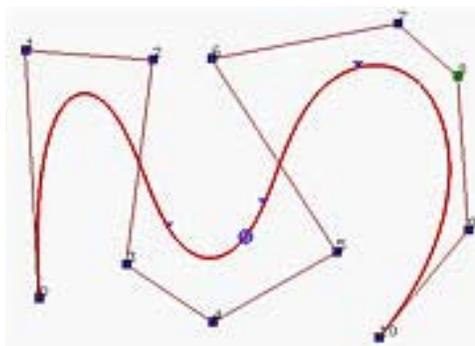


Figura 3.13: *Curva B-spline de Grau 7*

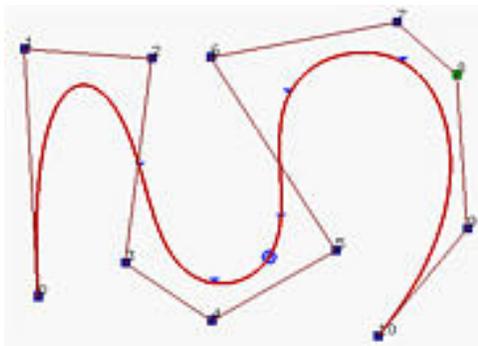


Figura 3.14: *Curva B-spline de Grau 5*

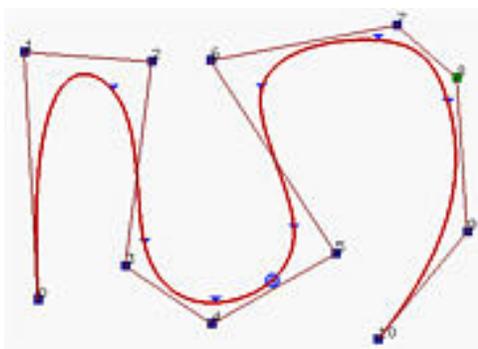


Figura 3.15: *Curva B-spline de Grau 3*

2. A igualdade $m = n + p + 1$ deve ser satisfeita.

Sabendo-se que cada ponto de controle precisa uma função base e o número de funções base satisfazendo $m = n + p + 1$.

3. Curvas B-spline semi-fechadas $P(u)$ passam pelos dois pontos de controle finais p_0 e p_n .

É possível perceber que função base $N_{0,p}(u)$ é o coeficiente do ponto de controle p_0 e é não-nulo em $[u_0, u_{p+1})$. Assim, $u_0 = u_1 = \dots = u_p = 0$ para uma curva B-spline semi-fechada, $N_{0,0}(u), N_{1,0}(u), \dots, N_{p-1,0}(u)$ são zero e somente $N_{p,0}(u)$ é não-nulo. Conseqüentemente, quando $u = 0$, $N_{0,p}(0)$ é 1 e $P(0) = p_0$. Uma discussão semelhante pode mostrar $P(1) = p_n$.

4. Propriedade de Fecho Convexo Forte: a curva B-spline é contida no fecho convexo de seu polígono de controle. Mais precisamente, se u está no período de nó $[u_i, u_{i+1})$, então $P(u)$ está no fecho convexo dos pontos de controle $p_{i-p}, p_{i-p+1}, \dots, p_i$.

Se u está no período de nó $[u_i, u_{i+1})$, existem somente $p + 1$ funções base (isto é, $N_{i,p}(u), \dots, N_{i-p+1,p}(u), N_{i-p,p}(u)$) não-nulas neste período de nó. Considerando que $N_{k,p}(u)$ é o coeficiente do ponto de controle p_k , somente $p+1$ pontos de controle $p_i, p_{i-1}, p_{i-2}, \dots, p_{i-p}$ tem coeficientes não-nulos. Assim, nesse período de nó as funções base são não-nulas e somam para 1, sua média “pesada”, $P(u)$, deve ficar contido no fecho convexo definido pelos pontos de controle $p_i, p_{i-1}, p_{i-2}, \dots, p_{i-p}$.

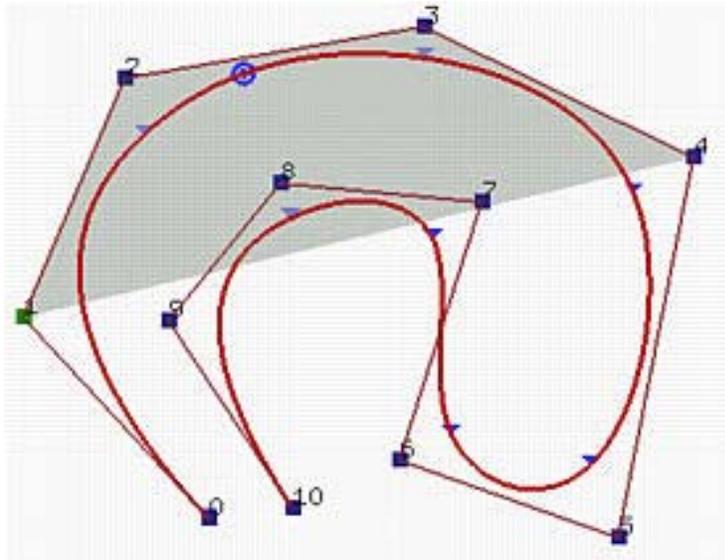


Figura 3.16: (a) *Curvas B-spline com 11 Pontos de Controle (isto é, $n = 10$) e Grau 3*

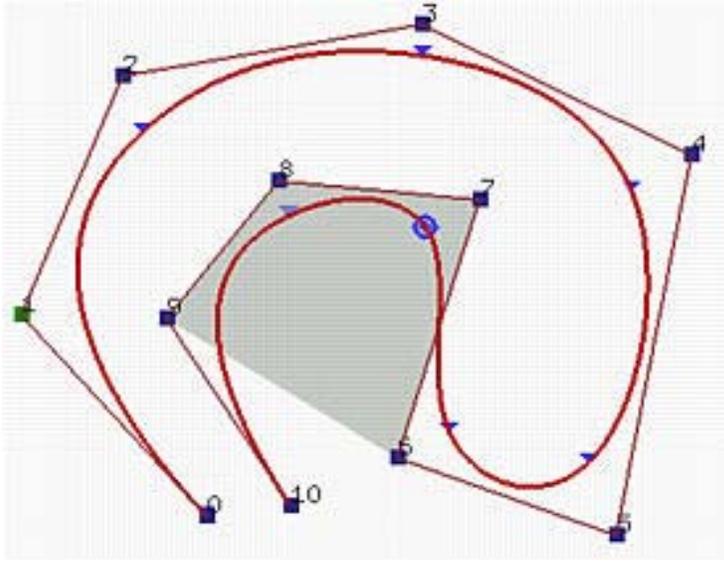


Figura 3.17: (b) Curvas B-spline com 11 Pontos de Controle (isto é, $n = 10$) e Grau 3

Acima duas curvas B-spline apresentam 11 pontos de controle (isto é, $n = 10$), grau 3 (isto é, $p = 3$) e 15 nós ($m = 14$) com os primeiros quatro e últimos quatro nós semi-fechados. Então, o número de períodos de nó é igual para os número de segmentos de curva. O vetor de nós é:

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
0	0	0	0	0.12	0.25	0.37	0.5	0.62	0.75	0.87	1	1	1	1

Tabela 3.1: Vetor de Nós

A primeira figura 3.16 tem u em períodos de nó $[u_4, u_5) = [0.12, 0.25)$ e o ponto correspondente (isto é $P(u)$) no segundo segmento de curva. Então, existem $p + 1 = 4$ funções base não-nulas neste período de nó (isto é, $N_{4,3}(u)$, $N_{3,3}(u)$, $N_{2,3}(u)$ e $N_{1,3}(u)$) e os pontos de controle correspondente são p_4 , p_3 , p_2 e p_1 . A área sombreada é o fecho convexo definido por estes quatro pontos, $P(u)$ fica contido neste fecho convexo.

A curva B-spline na figura 3.17 é definida do mesmo modo. Porém, u está em $[u_9, u_{10}) = [0.75, 0.87)$ e as funções base não-nulas são $N_{9,3}(u)$, $N_{8,3}(u)$, $N_{7,3}(u)$ e $N_{6,3}(u)$. Os pontos de controle correspondente são p_9 , p_8 , p_7 e p_6 .

Conseqüentemente, como u reposiciona de 0 até 1 e cruza um nó, algumas funções base se tornam zero e uma nova função base não-nula fica efetiva. Como resultado, um ponto de controle, cujo coeficiente se torna zero deixará a definição no fecho convexo

corrente e será substituído através de um novo ponto de controle, no qual o coeficiente se torna não-nulo.

5. Esquema de Modificação Local: mudando a posição do ponto de controle p_i somente afeta a curva $P(u)$ no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$.

Isto segue outra propriedade importante de funções base B-spline. Sabendo-se que $N_{i,p}(u)$ é não-nulo no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$. Se u não está neste intervalo, $N_{i,p}(u)$ não revela nenhum efeito em computar $P(u)$, pois $N_{i,p}(u)$ é zero. Por outro lado, se u está no intervalo indicado, $N_{i,p}(u)$ é não-nulo. Se p_i muda sua posição, $N_{i,p}(u)$ é alterado e conseqüentemente $P(u)$ sofre modificações.

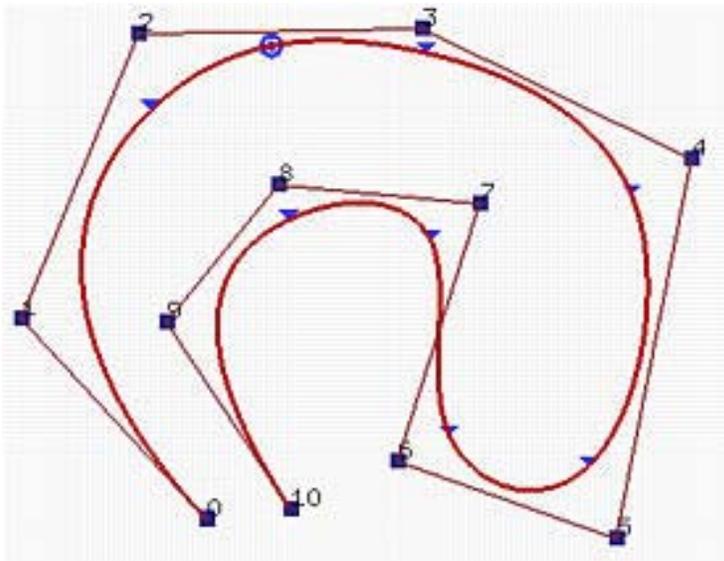


Figura 3.18: (a) Curva B-spline

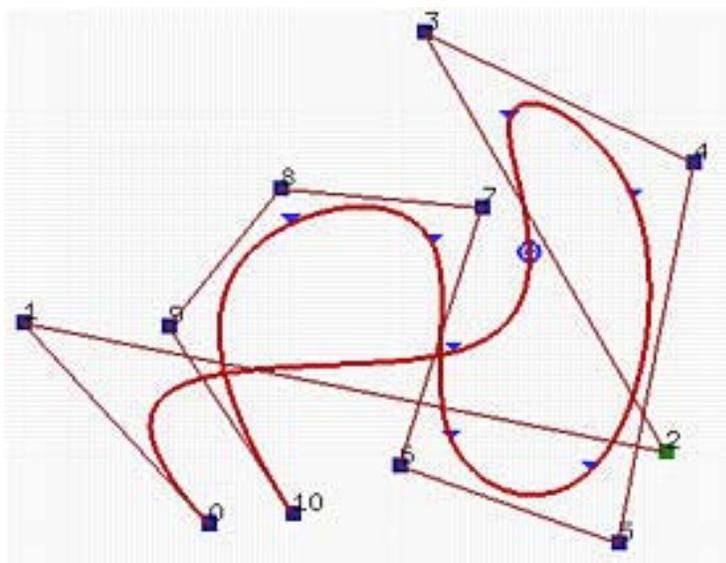


Figura 3.19: (b) Curva B-spline com o Reposicionamento do Ponto de Controle p_2

Acima, curvas B-spline são definidas com os mesmos parâmetros que no exemplo de fecho convexo anterior. Concentrando-se no reposicionamento do ponto de controle p_2 , é possível verificar que o coeficiente deste ponto de controle é $N_{2,3}(u)$ e o intervalo em que este coeficiente não-nulo está é $[u_2, u_{2+3+1}) = [u_2, u_6) = [0, 0.37)$. Assim, considerando que $u_2 = u_3 = 0$, somente três segmentos que correspondem para $[u_3, u_4)$ (o domínio do primeiro segmento de curva), $[u_4, u_5)$ (o domínio do segundo segmento de curva) e $[u_5, u_6)$ (o domínio do terceiro segmento de curva) serão afetados. A figura 3.19 mostra o resultado do reposicionamento de p_2 para o canto mais abaixo à direita. Como é possível verificar, somente o primeiro, segundo e terceiro segmentos de curva mudam suas formas e todos segmentos de curva restantes ficam em seu lugar original sem qualquer mudança.

Este esquema de modificação local é muito importante no projeto de curva, porque podemos modificar uma curva localmente sem mudar a forma num modo global. Além disso, se uma nova definição de curva é exigida, pode-se inserir mais nós (e então mais pontos de controle) de forma que a área afetada possa ser restringida para uma região muito menor.

6. $P(u)$ é C^{p-k} contínuo em um nó de multiplicidade k .

Se u não é um nó, $P(u)$ está no meio de um segmento de curva de grau p e é então infinitamente diferenciável. Se u é um nó no domínio não-nulo de $N_{i,p}(u)$, uma vez que o posterior é somente C^{p-k} contínuo, então deve-se fazer $P(u)$.

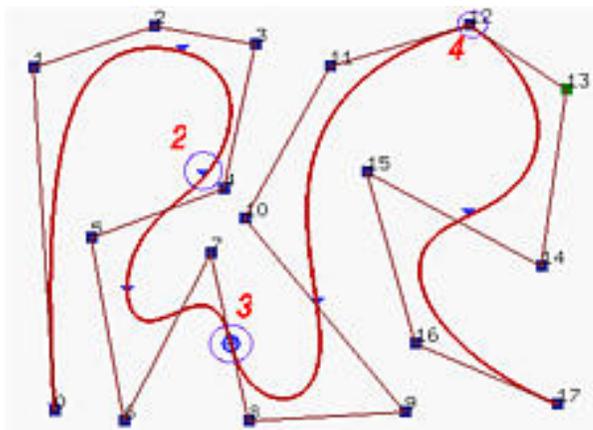


Figura 3.20: Curva B-spline com 18 Pontos de Controle e Grau 4

A curva B-spline anterior tem 18 pontos de controle (isto é, $n = 17$), grau 4 e o seguinte vetor nó semi-fechado:

u_0	para	u_4	u_5	u_6	e	u_7	u_8	u_9	para	u_{11}	u_{12}
		0	0.125			0.25	0.375			0.5	0.625
u_{13}	para	u_{16}	u_{17}	u_{18}	para	u_{22}	-		-		-
		0.75	0.875			1	-		-		-

Tabela 3.2: Vetor Nó Semi-fechado

Deste modo, u_6 é um nó duplo, u_9 é um nó triplo e u_{13} é um nó quádruplo. Conseqüentemente, $P(u)$ é de C^4 contínuo em qualquer ponto que não é um nó, C^3 contínuo em todos os nós simples, C^2 contínuo em u_6 , C^1 contínuo em u_9 , C^0 contínuo em u_{13} .

Todos os pontos na curva, os quais correspondem para nós são marcados com pequenos triângulos. Aqueles correspondentes para nós múltiplos são marcados, de modo mais distante, com círculos em suas multiplicidades. É muito difícil visualizar a diferença entre continuidade C^4 , C^3 e até C^2 . Para o caso C^1 , o ponto correspondente está num segmento, enquanto o caso C^0 força a curva para passar por um ponto de controle.

7. Propriedade Diminuindo Variação.

A propriedade diminuindo variação também é válida para curvas B-spline. Se a curva é contida em um plano, a reta não intercepta uma curva B-spline mais vezes que seu polígono de controle.

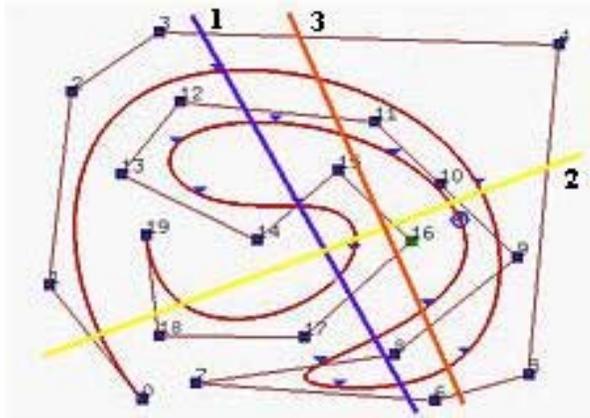


Figura 3.21: *Propriedade Diminuindo Variação em uma Curva B-spline*

Na figura acima, a reta “1” intercepta o polígono de controle e a curva B-spline 6 vezes, enquanto a reta “2” também intercepta o polígono de controle e a curva B-spline 5 vezes. Porém, a reta “3” intercepta o polígono de controle 6 vezes e 4 vezes a curva.

8. As curvas Bézier são casos especiais de Curvas B-spline.

Se $n = p$ (isto é, o grau de uma curva B-spline é igual para n , o número de pontos de controle menos 1), e existem $2(p + 1) = 2(n + 1)$ nós com $p + 1$ deles semi-fechados em cada fim, esta curva B-spline reduz para uma curva Bézier.

9. Invariância Afim.

A propriedade invariância afim também é válida para curvas B-spline. Se uma transformação afim é aplicada a uma curva B-spline, o resultado pode ser construído das imagens afins de seus pontos de controle. A curva representada não mudará sua geometria sob transformações geométricas como translação, rotação, paralela, projeções e perspectiva.

3.8 Curvas B-spline: Reposicionando Pontos de Controle

Reposicionar pontos de controle é o modo mais óbvio de mudar a forma de uma curva B-spline. “O esquema de modificação local, constata que a mudança de posição do ponto de controle p_i somente afeta a curva $P(u)$ no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$, no qual p é o grau de uma curva B-spline. De fato, a mudança de forma é translacional na direção do ponto de controle sendo reposicionado. Mais precisamente, se o ponto de controle p_i é reposicionado em certa direção para uma nova posição q_i , então o ponto $P(u)$, onde u está em $[u_i, u_{i+p+1})$, será reposicionado na mesma direção de p_i para q_i ” [Lerios, 2001]. Porém, a distância reposicionada é diferente de ponto para ponto. Nas figuras seguintes, o ponto de controle p_4 é reposicionado da posição na figura 3.22 para uma nova posição na figura 3.23 e finalmente para a sua posição final na figura 3.24. Como pode-se ver, aqueles pontos correspondendo para nós (marcados com pequenos triângulos) são reposicionados na mesma direção.

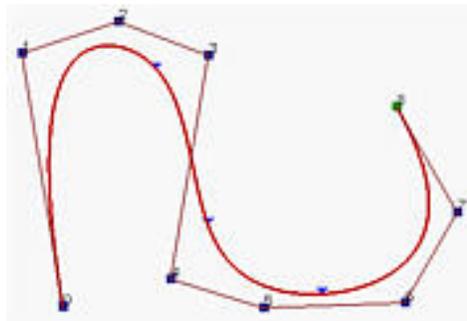


Figura 3.22: (a) *Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline*

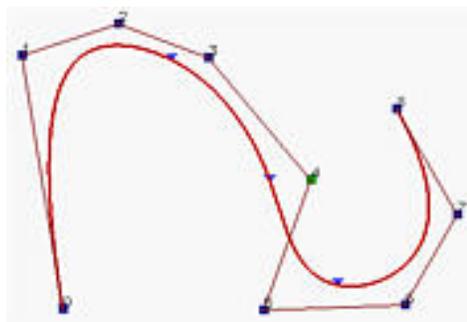


Figura 3.23: (b) *Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline*

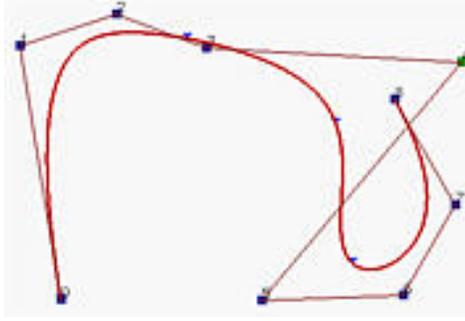


Figura 3.24: (c) *Reposicionando Pontos de Controle em uma Curva B-spline*

É necessário analisar a situação detalhadamente. Supondo-se que $P(u)$ é uma dada curva B-spline de grau p definida como segue:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)p_i \quad (3.13)$$

Permitindo que o ponto de controle p_i seja reposicionado para uma nova posição $p_i + v$. Verifica-se que a nova curva B-spline de grau p é a seguinte:

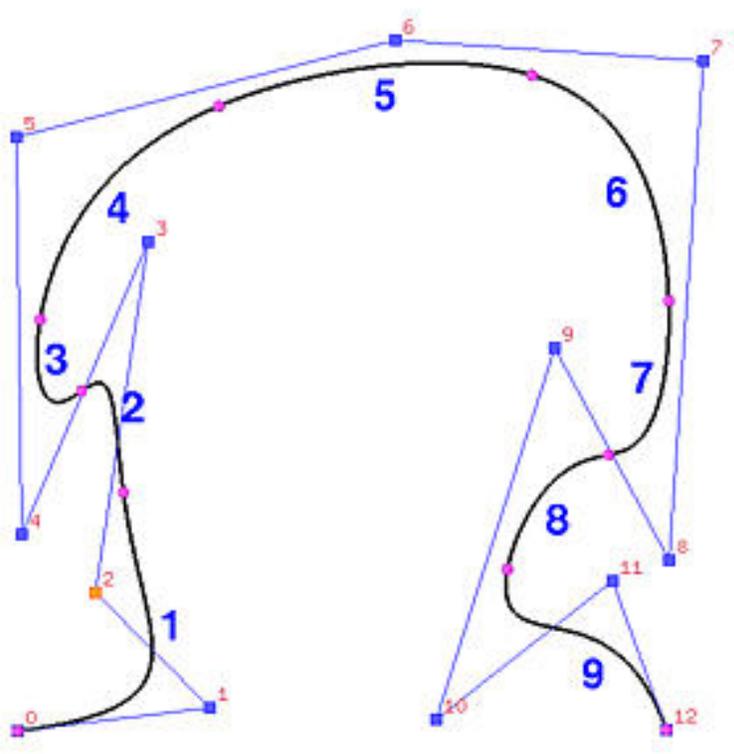
$$\begin{aligned} C(u) &= \sum_{h=0}^{i-1} N_{h,p}(u)p_h + N_{i,p}(u)(p_i + v) + \sum_{h=i+1}^n N_{h,p}(u)p_h \\ &= \sum_{h=0}^n N_{h,p}(u)p_h + N_{i,p}(u)v \\ &= P(u) + N_{i,p}(u)v \end{aligned} \quad (3.14)$$

Então, a nova curva $C(u)$ é simplesmente a soma da curva original $P(u)$ e um vetor de translação $N_{i,p}(u)v$. Considerando que $N_{i,p}(u)$ é não-nulo no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$, se u não está neste intervalo, este termo “translacional” é zero. Então, em B-spline, reposicionar um ponto de controle somente afeta a forma de uma seção da curva dada. A primeira curva a seguir é uma curva B-spline de grau 4 (isto é, $p = 4$) definidos por 13 pontos de controle (isto é, $n = 12$) e 18 nós (isto é, $m = 17$). Estes 18 nós são todos simples e definem uma curva semi-fechada (isto é, $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ e $u_{13} = u_{14} = u_{15} = u_{16} = u_{17} = 1$). Os nós restantes definem 9 períodos de nó e conseqüentemente 9 segmentos de curva como mostrados na figura. Estes nove períodos de nó e segmentos de curva são chamados como segue:

Período	$[u_4, u_5)$	$[u_5, u_6)$	$[u_6, u_7)$	$[u_7, u_8)$	$[u_8, u_9)$	$[u_9, u_{10})$	$[u_{10}, u_{11})$
Segmento	1	2	3	4	5	6	7
Período	$[u_{11}, u_{12})$	$[u_{12}, u_{13})$	-	-	-	-	-
Segmento	8	9	-	-	-	-	-

Tabela 3.3: *Períodos de Nó e Segmentos de Curva*

Observe:

Figura 3.25: (a) *Curva B-spline de Grau 4*

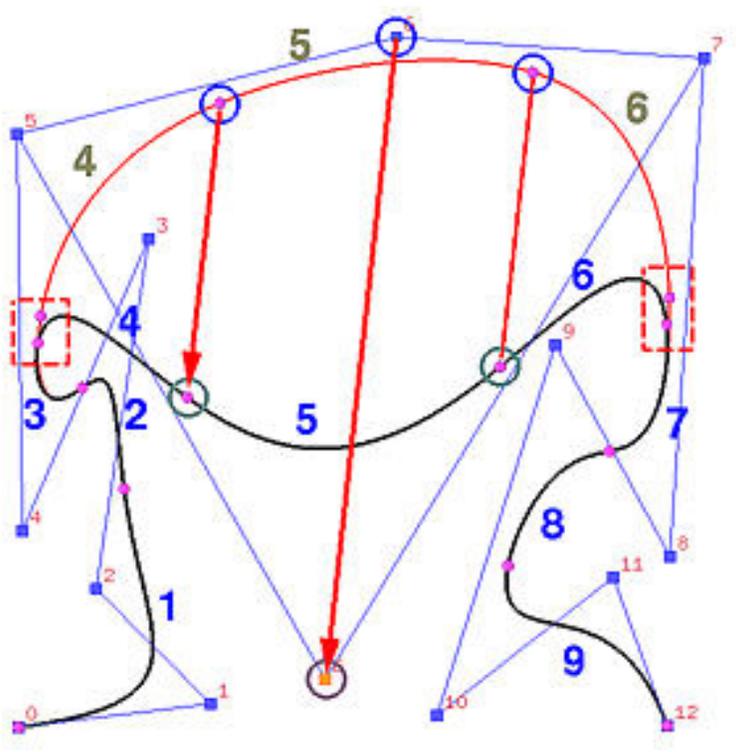


Figura 3.26: (b) Curva B-spline de Grau 4 reposicionada

Movendo-se p_6 , verifica-se o resultado mostrado na figura 3.26 acima. Como pode-se ver a curva é reposicionada na mesma direção do ponto de controle p_6 . O coeficiente de p_6 é $N_{6,4}(u)$ isto é não-nulo em $[u_6, u_{11})$. Deste modo, reposicionando p_6 afeta os segmentos de curva 3, 4, 5, 6 e 7. Segmentos de curva 1, 2, 8 e 9 não são afetados.

3.9 Curvas B-spline: Modificando Nós

“Pelo fato de uma curva B-spline ser uma composição de segmentos de curva, cada segmento é definido em um período de nó, modificando a posição de um ou mais nós, mudarão a associação entre segmentos de curva e períodos de nó e, conseqüentemente modificarão a forma da curva” [Lerios, 2001].

As figuras seguintes ilustram o efeito de modificar um nó único. É uma B-spline de grau 6 com 17 nós com os primeiros sete e últimos sete pontos finais semi-fechados, enquanto os nós no meio são 0.25, 0.5 e 0.75. A curva inicial é mostrada na figura 3.27. Se o nó 0.25 é reposicionado para 0.1, a forma da curva muda e a original $P(0.25)$ move-se descendente para uma nova posição. Se o nó 0.5 é reposicionado para 0.1 de forma que o nó 0.1 se torna um nó duplo (com multiplicidade 2), a forma de curva reposiciona à esquerda; mas $p(0.1)$ é reposicionado para cima para uma posição perto do ponto original (isto é, o original $p(0.25)$). O resultado é mostrado na figura 3.29. Além disso, embora tenha-se um nó duplo em 0.1 um terceiro nó em 0.75 que desigualmente subdivide o domínio $[0, 1]$ em três períodos de nó, a curva B-spline é mais ou menos uniformemente subdividido por seus pontos correspondentes.

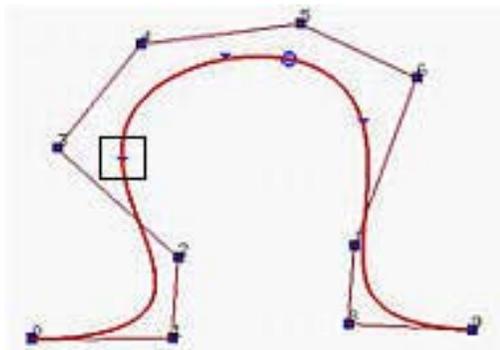


Figura 3.27: (a) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6

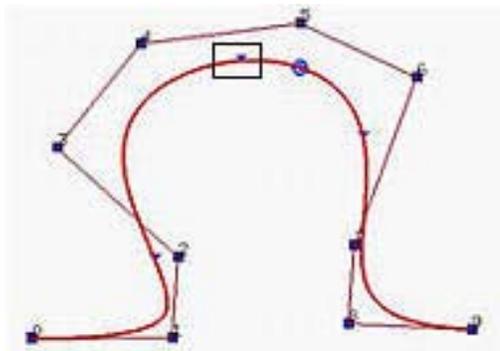


Figura 3.28: (b) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6

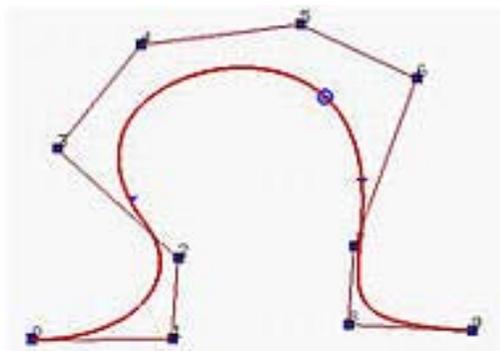


Figura 3.29: (c) Modificando um Nó Único em uma B-spline de Grau 6

Porém, a experiência prática revela que modificando posições de nó também não é previsível nem satisfatório. Mais precisamente, porque não está claro como a forma de uma curva B-spline responderá a mudança do vetor de nó, modificando a forma de uma curva B-spline por nós variáveis é normalmente insatisfatório e difícil de alcançar a meta desejada.

3.9.1 Uma Nota sobre Nós Múltiplos

Os nós múltiplos podem ajudar a gerar resultados esperados e desejáveis. É necessário recordar que uma propriedade de nós múltiplos, que acrescentando a multiplicidade de um nó interno diminui o número de funções base não-nulas neste nó. De fato, se a multiplicidade deste nó é k , existem no máximo $p - k + 1$ funções não-nulas neste nó. Além disso, as funções base são C^{p-k} contínuo neste nó.

Supondo-se que um nó apresenta multiplicidade $p - k$, existirá $k + 1$ funções base não-nulas neste nó e conseqüentemente o ponto correspondente na curva fica contido no fecho convexo definido pelos pontos de controle que correspondem para estas funções base não-nulas. Se $k = p - 1$, existem duas funções não-nulas e o fecho convexo correspondente é um segmento da reta.

Se $k = p$, existe somente uma função não-nula neste nó e conseqüentemente existe somente um ponto de controle que apresenta coeficiente não-nulo. Como resultado, a curva passa por este ponto.

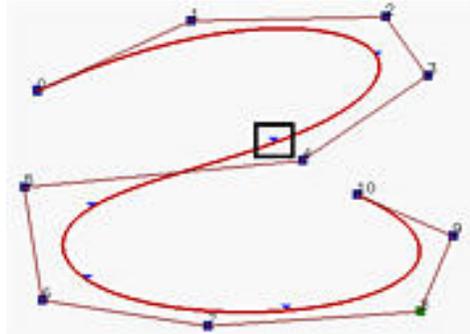


Figura 3.30: Curva B-spline de Grau 5

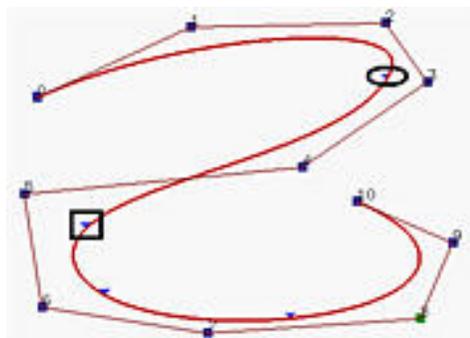


Figura 3.31: Nó de Multiplicidade Dois

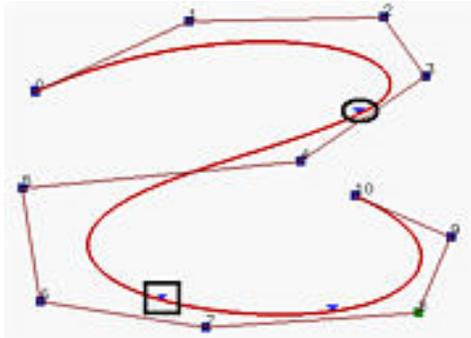


Figura 3.32: *Nó de Multiplicidade Três*

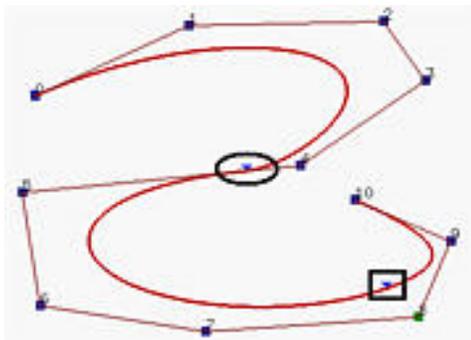


Figura 3.33: *Nó de Multiplicidade Quatro*

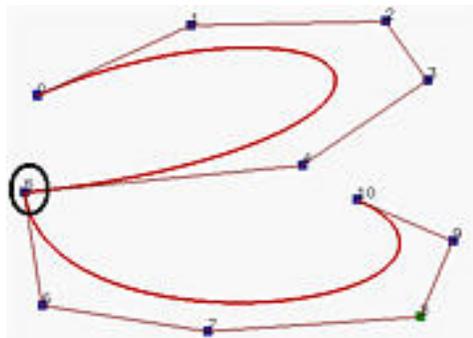


Figura 3.34: *Nó de Multiplicidade Cinco*

Na figura 3.30 apresentada anteriormente, a qual revela uma curva B-spline de grau 5, o nó que corresponde para a curva dividindo ponto (marcado com um retângulo) é reposicionado para seu nó anterior, criando um nó de multiplicidade 2. O resultado é a figura 3.31, que não mostra muita diferença da original. Então, o próximo nó, (marcado com um retângulo) é reposicionado para o nó resultante (marcada com uma elipse) novamente, criando um nó de multiplicidade 3. Isto é a figura 3.32. A curva resultante, reposiciona para um segmento do polígono de controle. Reposicionando mais um nó cria um novo nó de multiplicidade 4. Isto força o ponto correspondente (marcada com uma elipse) estar em um segmento. Finalmente, o único nó restante é reposicionado para combinar com o outro nó. Considerando que sua multiplicidade é 5 e $p = 5$, existe somente um coeficiente não-nulo e, conseqüentemente, força a curva passar naquele ponto de controle. Como mostrado na figura 3.34, aquele ponto de controle é p_5 .

3.10 NURBS: Motivação

Curvas B-spline são curvas polinomiais. Enquanto elas são flexíveis e apresentam muitas propriedades úteis para projeto de curva, elas não podem representar a curva mais simples, ou seja, o círculo. Como discutido nas curvas racionais, círculos podem ser representados com funções racionais (isto é, funções que são quocientes de dois polinômios). Para lidar com círculos, elipses e muitas outras curvas que não podem ser representadas por polinômios, é necessária uma extensão para curvas B-spline.

Um círculo é uma curva de grau 2, assim é possível verificar que B-spline não podem representar isto. As quatro figuras seguintes são curvas B-spline fechadas com 8 pontos de controle. Os graus, respectivamente são 2, 3, 5 e 10. A B-spline de grau 2 fechada não é um círculo. Ao invés, parece com um quadrado arredondado. A curva de grau 3 parece um pouco melhor. Com os aumentos de grau, o contorno da curva melhora. A curva de grau 10 fechada é bem parecida com um círculo, mas não é um círculo. Embora pode-se aceitar esta curva B-spline de grau 10 como um círculo, ela constitui outra forma. Pode-se questionar por que uma curva de grau 2 deveria ser representada com uma curva B-spline fechada de grau 10.

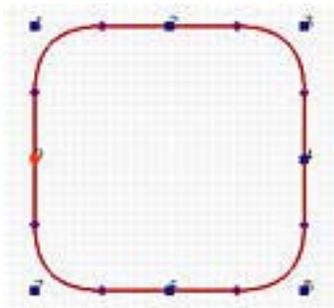


Figura 3.35: *Curva B-spline de Grau 2*



Figura 3.36: *Curva B-spline de Grau 3*

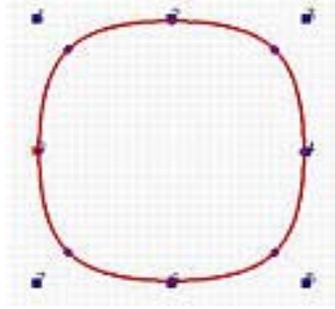


Figura 3.37: *Curva B-spline de Grau 5*

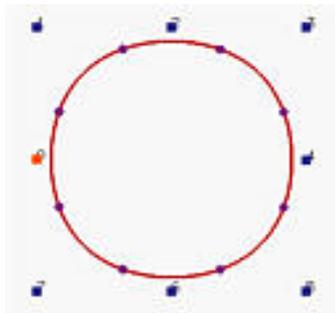


Figura 3.38: *Curva B-spline de Grau 10*

Para dedicar a este problema, é necessário generalizar B-splines para curvas racionais usando coordenadas homogêneas. Então, obtêm-se o nome **B-Splines Racional Não-Uniforme - NURBS**.

3.11 Teoria de Curva NURBS e propriedade

Uma curva NURBS $Q(u)$ de grau p define um ponto no espaço 2D com o parâmetro escalar u assumindo valores dentro de $[0, 1]$.

$$Q(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i p_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \quad (3.15)$$

no qual um conjunto de n pontos de controle p_i formam um polígono de controle e w_i são os pesos. Um aumento no peso w_i puxa a curva mais próxima para o ponto de controle p_i . $N_{i,p}(u)$ é a i -ésima função base B-spline de grau p (ordem $p + 1$), definida nas equações 3.1 e 3.2.

As NURBS são curvas em R^{n+1} (porque tem coordenadas homogêneas), $Q(u) \in R^{n+1}$.

Um vetor de nós não-uniforme, com uma seqüência não-decrescente de números reais é definida como:

$$u = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (3.16)$$

no qual $0 \leq u_i \leq u_{i+1} \leq 1$, $i = 0, \dots, m - 1$ e $m =$ número de nós. Os nós em uma curva NURBS são os pontos em parâmetro espaçados onde as curvas polinomiais racionais são unidas juntas para formar um segmento multicurva.

3.12 NURBS: Definição

Considerando a maneira de introduzir coordenadas homogêneas para uma curva B-spline que deriva a definição de NURBS, através de $n + 1$ pontos de controle p_0, p_1, \dots, p_n e vetor de nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ de $m + 1$ nós, a curva B-spline de grau p definida por estes parâmetros é a seguinte:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)p_i \quad (3.17)$$

É necessário deixar o ponto de controle p_i ser reescrito como um vetor coluna com quatro componentes com o quarto sendo 1:

$$p_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Para coordenadas homogêneas, multiplicando a coordenada de um ponto com um número não-nulo não muda sua posição. Pode-se multiplicar a coordenada de p_i com w_i para obter uma nova forma em coordenadas homogêneas:

$$p_i = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Substituindo esta nova forma homogênea na equação da curva B-spline anterior, será obtido o seguinte:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)p_i = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n N_{i,p} w_i x_i \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p} w_i y_i \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p} w_i z_i \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p} w_i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Então, o ponto $Q(u)$ também está em uma forma de coordenadas homogêneas. É possível converter a fórmula anterior para coordenada cartesiana dividindo $Q(u)$ pelo quarto componente:

$$Q(u) = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i x_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i)} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i y_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i)} \\ \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i z_i)}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)(w_i)} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Finalmente, atingi-se a fórmula a seguir:

$$Q(u) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i p_i \quad (3.22)$$

Isto é a curva NURBS de grau p definida pelos pontos de controle p_0, p_1, \dots, p_n , vetor de nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$, e pesos w_0, w_1, \dots, w_n . Pode-se observar que em virtude do peso w_i ser associado com o ponto de controle p_i como seu quarto componente, o número de pesos e o número de pontos de controle devem ser iguais.

“Geralmente, pesos w_i são positivos, mas pesos negativos tem aplicações interessantes. Se um peso w_i torna-se zero, o coeficiente de p_i é zero, e conseqüentemente o ponto de controle p_i não tem nenhum impacto na computação de $Q(u)$ para qualquer u (isto é, p_i é “desabilitado”). Além disso, pesos zero também têm algumas interpretações muito úteis chamados pontos de controle infinito” [NURBS Curves and Surfaces, 2001].

3.12.1 Dois Resultados Imediatos

Aqui localizam-se dois resultados imediatamente disponíveis da definição anterior.

1. Se todos os pesos forem iguais a 1, uma curva NURBS reduz para uma curva B-spline.

Neste caso, pontos de controle em formas homogêneas são idênticos para sua forma cartesiana convencional e o denominador é 1.

2. As curvas NURBS são Racionais.

O valor multiplicado para os ponto de controle p_i , $N_{i,p}(u)w_i$, é um polinômio de grau p . O denominador é a soma de todos os coeficientes e, conseqüentemente, também é um polinômio de grau p . Como resultado, o coeficiente do ponto de controle p_i é o quociente de dois polinômios de grau p e a função $Q(u)$ é racional.

Estes dois resultados assinalam que curvas B-spline são casos especiais de curvas NURBS. Além disso, visto que curvas NURBS são racionais, círculos, elipses e muitas outras curvas que são impossíveis com curvas B-spline são agora possíveis com curvas NURBS.

3.12.2 Uma Interpretação Geométrica

É possível questionar-se se curvas NURBS são tipos especiais de curvas. Na verdade, elas são simplesmente outro tipo de curvas B-spline. Considerando o ponto de controle $p_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, este ponto revela quatro componentes e pode ser tratado como um ponto no

quadri espaço, e, conseqüentemente, $Q(u)$ abaixo torna-se uma curva B-spline em quatro dimensões:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)p_i = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(w_i x_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(w_i y_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(w_i z_i) \\ \sum_{i=0}^n N_{i,p}(w_i) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Na discussão de uma interpretação geométrica de coordenadas homogêneas, dividindo os primeiros três componentes de coordenadas pelo quarto, adquire-se o equivalente a projetar um ponto em quatro dimensões para o plano $w = 1$. Tendo em vista que a curva acima é convertida em uma curva NURBS, dividindo as três primeiras coordenadas com o quarto componente, conclui-se que uma curva NURBS no espaço tridimensional é meramente a projeção de uma curva B-spline em quadri dimensões espaciais. Então, se as curvas B-spline forem bem compreendidas, é possível entender curvas NURBS facilmente.

3.13 NURBS: Propriedades Importantes

Dado um conjunto de $n + 1$ pontos de controle $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$, cada um é associado com um peso não negativo w_i (isto é, p_i tem peso $w_i \geq 0$), e um vetor de nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ de $m + 1$ nós, a curva NURBS de grau p é definida como segue:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)p_i \quad (3.24)$$

no qual $R_{i,p}(u)$ é definida a seguir:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (3.25)$$

Onde $N_{i,p}$ são definidas nas equações 3.1 e 3.2. A razão de uma notação diferente ser usada é simplesmente porque deseja-se reescrever a definição de uma curva NURBS como fechada para que uma curva B-spline seja possível. Na notação acima, $R_{i,p}(u)$ são funções base NURBS.

3.13.1 As Propriedades Importantes de Funções Base NURBS

Destacando que NURBS é uma generalização de B-spline, herda todas as propriedades de B-spline. A seguir são apresentadas algumas das mais importantes para funções base NURBS.

1. $R_{i,p}(u)$ é uma função racional de grau p em u .
2. Não Negatividade – Para todo i e p , $R_{i,p}(u)$ é não negativo.
3. Suporte Local – $R_{i,p}(u)$ é um não-nulo em $[u_i, u_{i+p+1})$.
4. Em qualquer período de nó $[u_i, u_{i+1})$, no máximo $p + 1$ funções base de grau p são não-nulas, isto é: $R_{i-p,p}(u)$, $R_{i-p+1,p}(u)$, $R_{i-p+2,p}(u)$, ..., e $R_{i,p}(u)$.
5. Partição de Unidade – A soma de todas funções base não-nulas de grau p no período $[u_i, u_{i+1})$ é 1.
6. Se o número de nós é $m + 1$, o grau das funções base é p e o número de funções base de grau p é $n + 1$, então $m = n + p + 1$.
7. Função base $R_{i,p}(u)$ é uma curva composta de funções racionais de grau p com pontos de acoplamento nos nós em $[u_i, u_{i+p+1})$.
8. Em um nó de multiplicidade k , função base $R_{i,p}(u)$ é C^{p-k} contínuo.
9. Se $w_i = c$ para todo i , onde c é uma constante não-nula, $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$.

A partir do que foi constatado, verifica-se que funções base B-spline são casos especiais de funções base NURBS quando todos os pesos tornarem uma constante não-nula. Assim, deve-se mencionar em especial $c = 1$.

3.13.2 Propriedades Importantes de Curvas NURBS

Aquí é apresentada a listagem de importantes propriedades de curvas NURBS. Pode-se perceber que existe a possibilidade de uma NURBS estar aberta, semi-fechada e fechada. Como curvas B-spline, se os primeiros $p + 1$ nós e os últimos $p + 1$ nós são iguais para o fim da esquerda e da direita do domínio, a curva é semi-fechada.

1. Curva NURBS $Q(u)$ é uma curva por partes continuadas com cada componente uma curva racional de grau p .
2. A igualdade $m = n + p + 1$ deve ser satisfeita.
3. Um curva NURBS semi-fechada $Q(u)$ passa pelos dois pontos de controle finais p_0 e p_n .
4. Propriedade de Fecho Convexo Forte: a curva NURBS é contida no fecho convexo de seus pontos de controle. Além disso, se u está no período de nó $[u_i, u_{i+1})$, então $Q(u)$ está no fecho convexo dos pontos de controle $p_{i-p}, p_{i-p+1}, \dots, p_i$.

Esse processo tem sido executado de modo nítido, permitindo que todos os pesos devem ser não-negativos. Se alguns deles são negativos, a propriedade de fecho convexo forte ou até a propriedade de fecho convexo não suportará. A seguir, a figura 3.39 é uma curva NURBS de grau 2 com $n = 2$, $m = 5$ e os primeiros três e últimos três nós semi-fechados. Os pesos dos dois pontos de controle terminam em ambos 1 e o peso do ponto de controle do meio é 0.5. Isto é um arco elíptico. O segmento de curva fica contido no fecho convexo.

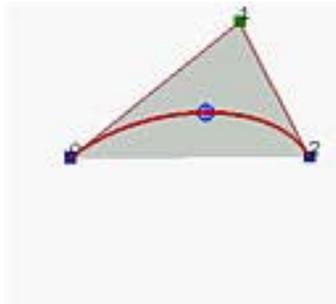


Figura 3.39: (a) Curva NURBS de Grau 2

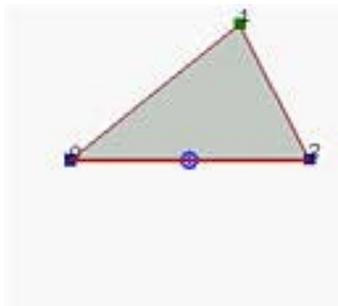


Figura 3.40: (b) Curva NURBS de Grau 2

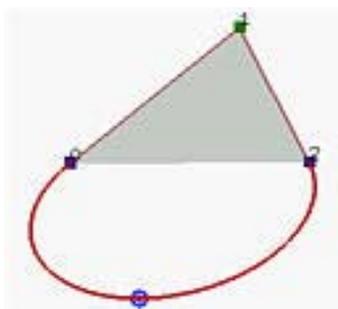


Figura 3.41: (c) Curva NURBS de Grau 2

A figura 3.40 apresenta o peso do ponto de controle do meio configurado para zero. Visto que este ponto de controle não revela nenhum efeito, o resultado é o segmento da linha determinada pelas extremidades. Ainda fica contido no fecho convexo. Se o peso é mudado para -0.5 , o segmento de curva não é contido no fecho convexo e conseqüentemente a propriedade de fecho convexo falha.

5. Esquema de Modificação Local: mudando a posição do ponto de controle p_i somente afeta a curva $Q(u)$ no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$.

Isto segue da propriedade do esquema de modificação local de funções base B-spline. Recorde que $R_{i,p}(u)$ é não-nulo no intervalo $[u_i, u_{i+p+1})$. Se u não está neste intervalo, visto que $R_{i,p}(u)$ é zero e $R_{i,p}(u)p_i$ não tem nenhum efeito em computar $Q(u)$. Por outro lado, se u está no intervalo indicado, $R_{i,p}(u)$ é não-nulo, e se $R_{i,p}(u)p_i$ é mudado, então deve-se fazer $Q(u)$.

Este esquema de modificação local é muito importante no projeto de curva, porque pode-se alterar uma curva localmente sem mudar a forma de um modo global. Além disso, se uma nova definição de forma da curva é exigida, pode se inserir mais nós

(e então mais pontos de controle) de modo que a região afetada possa ser restringida para uma muito menor.

6. $Q(u)$ é C^{p-k} contínuo em um nó de multiplicidade k .

Se u não é um nó, $Q(u)$ está no meio de um segmento de curva de grau p e é então infinitamente diferenciável. Se u é um nó no domínio não-nulo de $R_{i,p}(u)$, considerando que $R_{i,p}(u)$ é somente C^{p-k} contínuo, então é necessário fazer $Q(u)$.

7. Propriedade Diminuindo Variação.

A propriedade diminuindo variação também suporta para curvas NURBS. Se a curva é contida em um plano, a reta não intercepta uma curva NURBS mais vezes que seu polígono de controle.

8. Curvas B-spline e Curvas Bézier são casos especiais de Curvas NURBS.

Se todos os pesos forem iguais, uma curva NURBS torna-se uma curva B-spline. Se, além disso, $n = p$ (isto é, o grau de uma curva B-spline é igual para n , o número de pontos de controle menos 1) e existem $2(p + 1) = 2(n + 1)$ nós com $p + 1$ deles semi-fechados em cada fim, esta curva NURBS reduz para uma curva Bézier.

9. Invariância Projetiva.

3.14 NURBS: Modificando Pesos

Considerando que curvas NURBS são definidas por um conjunto de pontos de controle, um vetor de nós, um grau e um conjunto de pesos, existe mais um parâmetro para mudança da forma (isto é, os pesos). É necessário recordar que as funções base de uma curva NURBS são:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad (3.26)$$

Então, acrescentando e diminuindo o valor de w_i , será acrescentado e diminuído o valor de $R_{i,p}(u)$, respectivamente. Mais precisamente, acrescentando o valor de w_i será puxada a curva em direção ao ponto de controle p_i . De fato, todos os pontos afetados na curva também serão puxados na direção para p_i . Quando w_i tender ao infinito, a curva passará pelo ponto de controle p_i . Por outro lado, diminuindo o valor de w_i , esse afastará a curva do ponto de controle p_i .

As figuras seguintes mostram uma curva NURBS de grau 6 e suas funções base NURBS. O ponto de controle selecionado é p_9 . Na figura 3.42, todos os pesos são 1 e, deste modo, a curva é uma curva B-spline. Na figura 3.43, w_9 é acrescentado para 2 e, como pode-se ver, parte da curva reposiciona em direção a p_9 . Visto que w_9 é acrescentado, então deve-se fazer $R_{9,6}(u)$ como mostrada na figura 3.44.

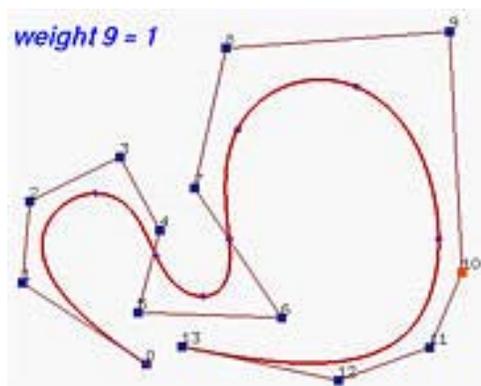


Figura 3.42: (a) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6

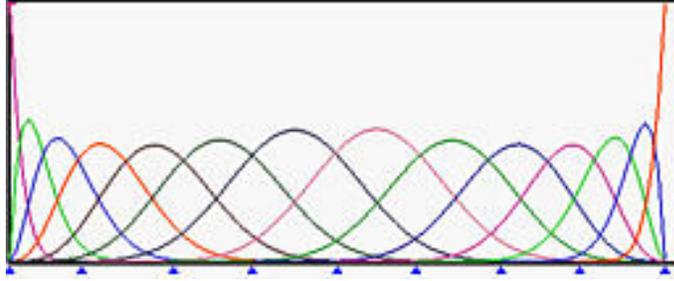


Figura 3.43: (a) Funções Base NURBS

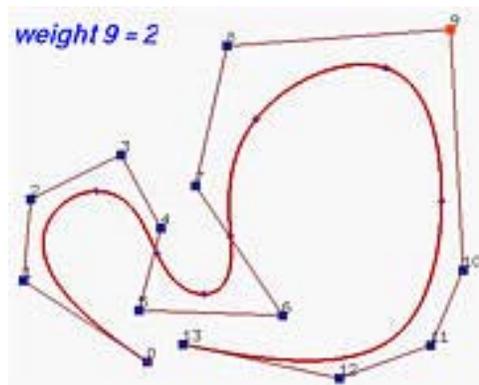


Figura 3.44: (b) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6



Figura 3.45: (b) *Funções Base NURBS*

A próxima etapa, w_9 consiste em adicionar para 5, 10 e 20. O correspondente $R_{9,6}(u)$ fica maior, transportando mais peso. Este puxa a curva adicional para o ponto de controle p_9 . Quando $w_9 = 20$, a curva está muito próxima de p_9 .

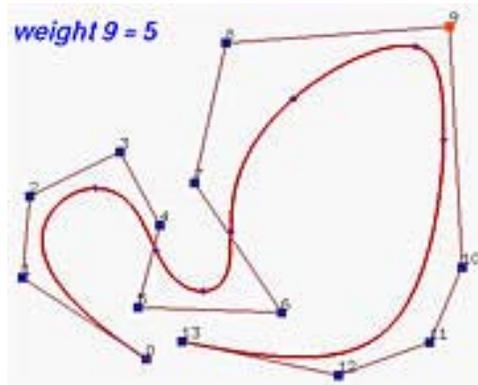


Figura 3.46: (c) *Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6*

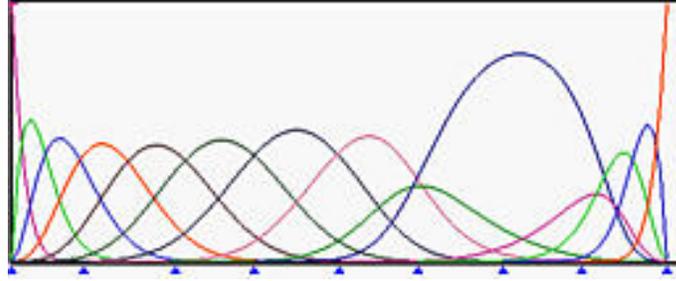


Figura 3.47: (c) Funções Base NURBS

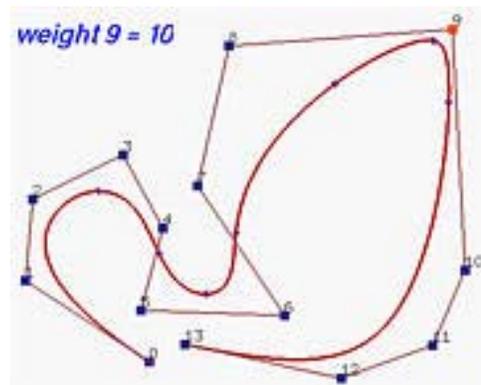


Figura 3.48: (d) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6



Figura 3.49: (d) *Funções Base NURBS*

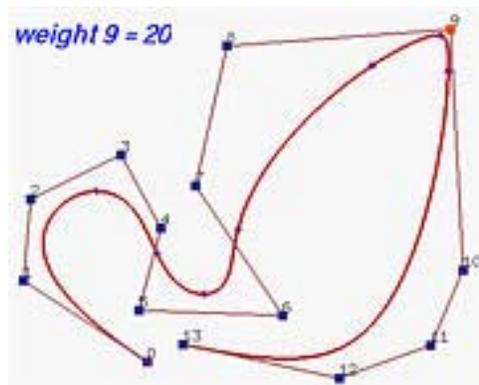


Figura 3.50: (e) *Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6*

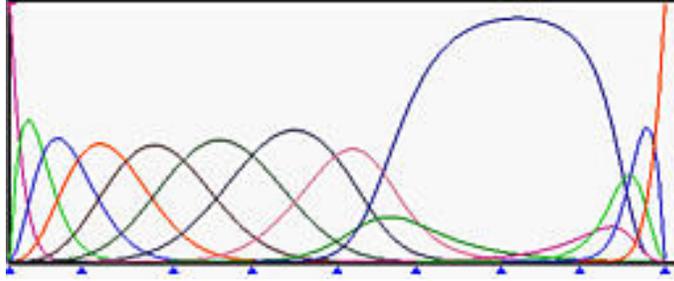


Figura 3.51: (e) Funções Base NURBS

Analisando o efeito oposto, é possível encontrar o caso inicial no qual todos os pesos são 1. Então, w_9 é diminuído para 0.5 e este afasta a curva do ponto de controle p_9 . Note que a correspondente $R_{9,6}(u)$ diminui, e então fazem o impacto do ponto de controle p_9 na curva $Q(u)$. Quando w_9 muda para 0.1, a curva é reposicionada mais longe e o valor de $R_{9,6}(u)$ é menor. A figura 3.58 revela a curva de w_9 definida como zero. Considerando que $R_{9,6}(u)$ é zero, não se concretiza nenhum impacto na curva e, como resultado, o segmento oposto da curva para o ponto de controle p_9 é plano.

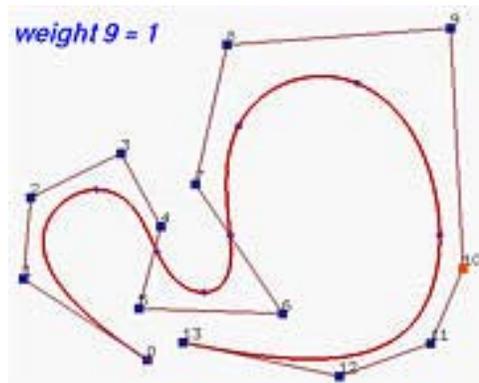


Figura 3.52: (f) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6

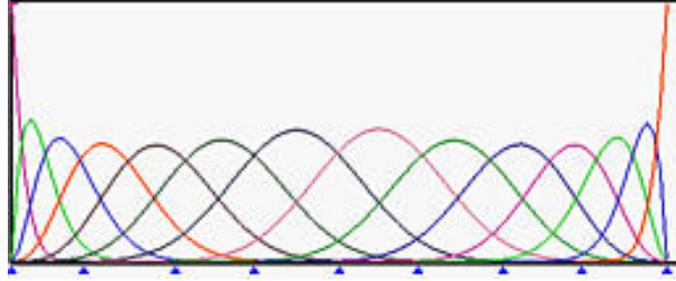


Figura 3.53: (f) Funções Base NURBS

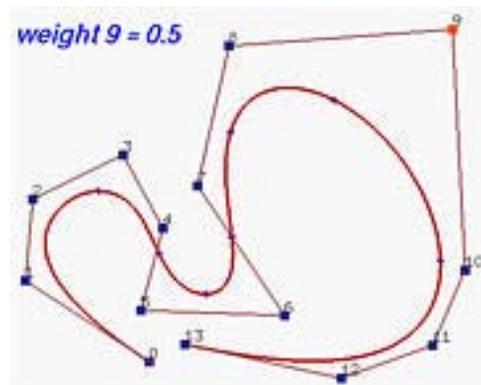


Figura 3.54: (g) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6

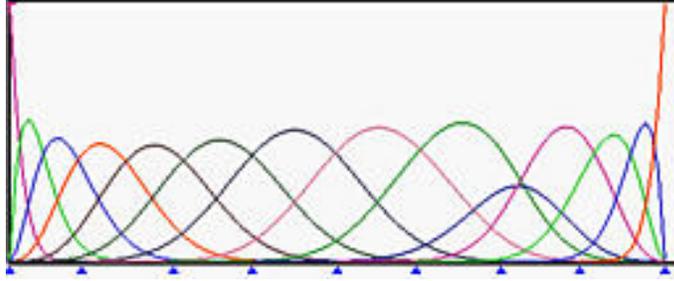


Figura 3.55: (g) *Funções Base NURBS*

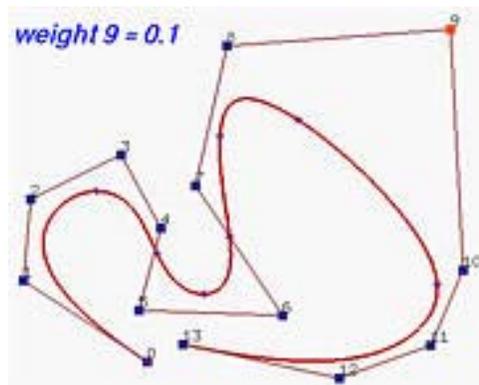


Figura 3.56: (h) *Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6*

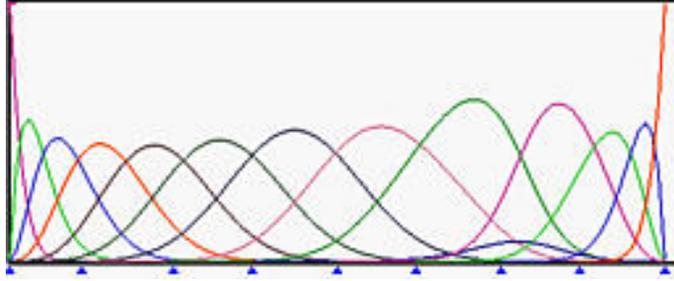


Figura 3.57: (h) Funções Base NURBS

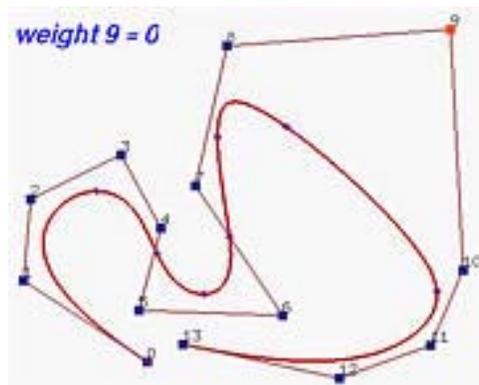


Figura 3.58: (i) Modificando Pesos de uma Curva NURBS de Grau 6

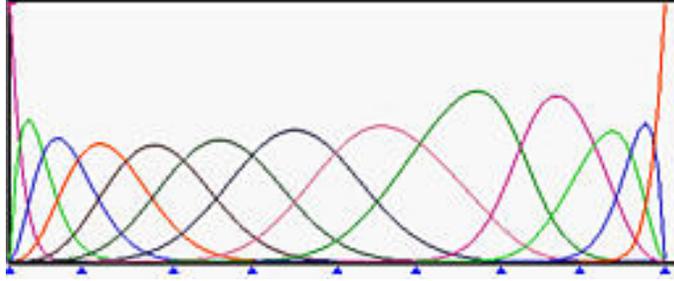


Figura 3.59: (i) *Funções Base NURBS*

Sintetizando, apresenta-se o seguinte:

“Acrescentando (resp., decrementando) o valor de peso w_i puxa (resp., empurra) a curva em direção ao (resp., longe de) ponto de controle p_i . Quando o valor de w_i torna-se infinito, a curva passa pelo ponto de controle p_i e quando w_i é zero, o ponto de controle p_i não tem impacto na curva” [NURBS, (a) 2001].

3.14.1 Uma Discussão Detalhada

Para que haja mais precisão no impacto ao mudar o peso de um ponto de controle selecionado, deve-se retornar à definição de curvas NURBS:

$$Q(u) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i p_i \quad (3.27)$$

Selecionando o ponto de controle p_k e investigando o impacto da variável w_k , pode-se considerar que p_k pode somente contribuir para a curva $Q(u)$ no domínio não-nulo de seu coeficiente $N_{k,p}(u)$ (isto é, $[u_k, u_{k+p+1})$), em que segue, assumimos u estando em $[u_k, u_{k+p+1})$.

Tomando as condições que envolvem w_k fora das adições resulta no seguinte:

$$Q(u) = \frac{1}{N_{k,p}(u)w_k + \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i} (N_{k,p}(u)w_k p_k + \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i p_i) \quad (3.28)$$

Introduzindo as seguintes expressões,

$$A = N_{k,p}(u)w_k \quad (3.29)$$

$$B = \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i \quad (3.30)$$

$$X = \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i p_i \quad (3.31)$$

obtêm-se:

$$Q(u) = \frac{1}{A+B} (Ap_k + X) \quad (3.32)$$

Considerando o caso $w_k = 0$ primeiro, ter-se-á $A = 0$ e o ponto na curva, denotado como $Q^0(u)$, é:s

$$Q^0(u) = \frac{X}{B} \quad (3.33)$$

Ao calcular-se o ponto de “base” $Q^0(u)$ para seu ponto correspondente $Q(u)$ para um valor arbitrário w_k , obtêm-se:

$$Q(u) - Q^0(u) = \frac{1}{A+B} (Ap_k + X) - \frac{X}{B} = \frac{A}{A+B} \left(p_k - \frac{X}{B} \right) = \frac{A}{A+B} (p_k - Q^0(u)) \quad (3.34)$$

Esta equação indica que o vetor $Q(u) - Q^0(u)$ e vetor $p_k - Q^0(u)$ apresentam a mesma direção e o comprimento do tempo anterior é $A(A+B)$ dos posteriores para todo u em $[u_k, u_{k+p+1})$.

Pelo fato dos pontos p_k e $Q^0(u)$ serem fixos, pode-se dizer que $Q(u)$ está na linha de p_k e $Q^0(u)$. Além disso, se todos os pesos forem não negativos, A e B são ambos não negativos e o valor de $A(A + B)$ está entre 0 e 1. Isto é, o ponto $Q(u)$ está no segmento da linha de p_k e $Q^0(u)$.

Se w_k tende ao infinito, pode-se dividir o numerador e denominador da curva $Q(u)$ por w_k como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} Q(u) &= \frac{1}{N_{k,p}(u)w_k + \sum_{i \neq n}^n N_{i,p}(u)w_i} (N_{h,p}(u)w_k p_k + \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i p_i) \\ &= \frac{1}{N_{k,p}(u) + \frac{1}{w_k} + \sum_{i \neq n}^n \frac{N_{i,p}(u)w_i}{w_k}} (N_{h,p}(u)p_k + \frac{1}{w_k} + \sum_{i \neq k}^n N_{i,p}(u)w_i) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Se w_k tende ao infinito, $1/w_k$ aproxima-se de zero. Conseqüentemente, $Q(u)$ aproxima-se de p_k , o ponto de controle selecionado. A seguir, apresentam-se uma síntese dos aspectos considerados até o momento.

“Se w_k é não negativo, $Q(u)$ sempre está no segmento da linha de $Q^0(u)$ e p_k , no qual $Q^0(u)$ é o ponto correspondendo para $w_k = 0$, e u está em $[u_k, u_{k+p+1})$. Além disso, quando w_k muda de 0 até o infinito, $Q(u)$ reposiciona de $Q^0(u)$ para p_k , e se w_k é infinito, $Q(u)$ torna-se p_k ” [NURBS Curves and Surfaces, 2001].

A figura 3.60 ilustra este resultado. Nela é apresentada uma curva NURBS de grau 6 definido por 9 pontos de controle ($n = 8$) e 16 nós ($m = 15$) como é mostrado a seguir.

$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6$	u_7	u_8	$u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{14} = u_{15}$
0	1/3	2/3	1

Tabela 3.4: Nós de uma Curva NURBS de Grau 6

O ponto de controle selecionado é p_4 , considerando que o coeficiente de p_4 , $N_{4,6}(u)$, é não-nulo em $[u_4, u_{4+6+1}) = [0, 1)$, sua mudança w_4 afeta a curva inteira.

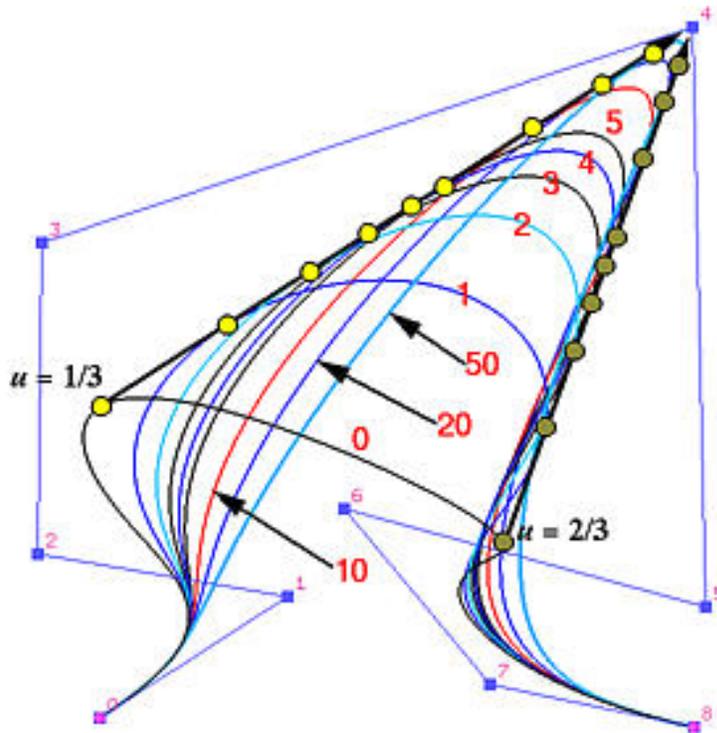


Figura 3.60: Mostrando às Curvas de w_4 serem 2, 3, 4, 5, 10, 20 e 50

Os pontos que correspondem para $u = 1/3$ e $u = 2/3$ são marcados na curva. A curva correspondendo para $w_4 = 0$ são os mais baixos marcados com 0. A figura mostra às curvas de w_4 serem 2, 3, 4, 5, 10, 20 e 50. Como o valor de w_4 aumenta, a curva é puxada em direção ao ponto de controle p_4 . Quando w_4 é acrescentado para 50, a curva aproxima-se de p_4 . Deve-se perceber que todos os pontos que correspondem para $Q(1/3)$ estão no segmento da linha $Q^0(1/3)$ e p_4 e todos os pontos que correspondem para $Q(2/3)$ estão no segmento da linha $Q^0(2/3)$ e p_4 . É preciso também destacar que o segmento de curva entre $Q(1/3)$ e $Q(2/3)$ fica menor com o aumento do valor de w_4 . Eventualmente, o comprimento deste segmento de curva torna-se zero (isto é, $Q(1/3)$ e $Q(2/3)$ fica idêntico para p_4) quando w_4 é infinito.

3.15 Curvas B-spline/NURBS: Inserção de Nó

“Na inserção de nó o seu processo fundamental consiste em adicionar um novo nó no vetor de nós existente sem mudar a forma da curva. Este novo nó pode ser igual para um nó existente e neste caso a multiplicidade daquele nó é acrescentado de um. Em virtude da igualdade fundamental $m = n + p + 1$, depois de adicionar um novo nó, o valor de m é acrescentado de um e, conseqüentemente, ou o número de pontos de controle ou o grau da curva também deve ser acrescentado de um” [Lerios, 2001]. Mudando o grau da curva mudará a forma da curva globalmente e não será considerada. Então, a inserção de um novo nó causa um novo ponto de controle a ser adicionado. De fato, alguns pontos de controle existentes são removidos e substituídos com uns novos por cortes de segmentos.

Embora inserção de nó não pareça muito interessante, representa um dos algoritmos mais importantes para curvas B-spline e de NURBS, pois muitos outros algoritmos úteis serão baseados em inserção de nó. Então, deve-se começar com algoritmos de inserção de nó. A seguir, é necessário apresentar um algoritmo para inserir um nó único.

A figura 3.61 a seguir revela uma curva B-spline semi-fechada de grau 4 com nós uniformemente espaçados. A figura 3.62 apresenta o resultado depois de um novo nó $u = 0.5$ ser inserido. Como pode-se ver, a forma da curva não muda; porém, a definição do polígono de controle é mudada. De fato, quatro novos pontos de controle (indicadas com elipses) substituem os pontos de controle original p_4 , p_5 e p_6 , e três cortes de segmentos da reta em p_4 , p_5 e p_6 .

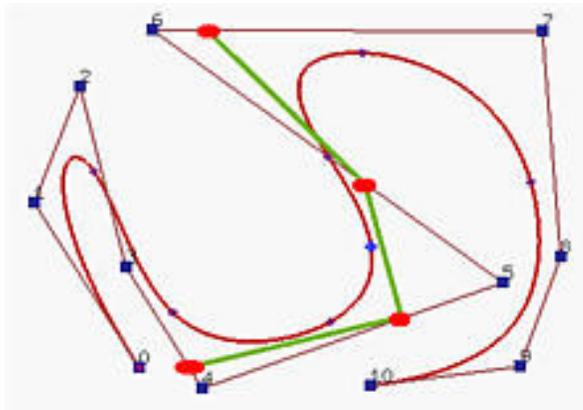


Figura 3.61: *Curva B-spline Semi-fechada de Grau 4 com Nós Uniformemente Espaçados*

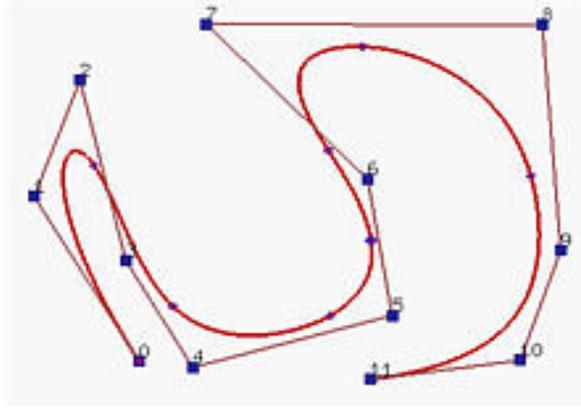


Figura 3.62: Resultado depois de um Novo Nó $u = 0.5$ ser Inserido

3.15.1 Inserindo um Nó Único

A partir de um conjunto de $n + 1$ pontos de controle p_0, p_1, \dots, p_n , um vetor de nós de $m + 1$ nós $u = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ e um grau p , deseja-se inserir um novo nó t no vetor de nó sem mudar a forma da curva B-spline.

Supondo-se que o novo nó t fica contido no período de nó $[u_k, u_{k+1})$, da propriedade de fecho convexo, $Q(t)$ permanece contido no fecho convexo definido pelos pontos de controle $p_k, p_{k-1}, \dots, p_{k-p}$ e todas outras funções base são zero. Deste modo, a computação de inserção de nó pode ser restringida nos pontos de controle $p_k, p_{k-1}, \dots, p_{k-p}$. O modo de inserir t é para encontrar p novos pontos de controle q_k no segmento $p_{k-1}p_k$, q_{k-1} no segmento $p_{k-2}p_{k-1}$, \dots , e q_{k-p+1} no segmento $p_{k-p}p_{k-p+1}$ tal que o conhecido polígono entre p_{k-p} e p_k é substituído por $p_k - pq_{k-p+1} \dots q_k p_k$ cortando os segmentos em $p_{k-p+1}, \dots, p_{k-1}$. Todos outros pontos de controle são inalterados. Pode-se perceber que $p - 1$ pontos de controle do polígono de controle original são removidos e substituídos por p novos pontos de controle.

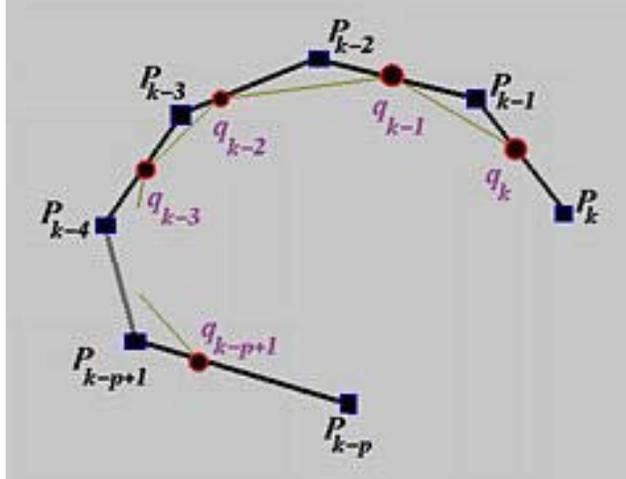


Figura 3.63: Pontos de Controle q_i

Para se calcular o novo ponto de controle q_i no segmento $p_{i-1}p_i$, usa-se:

$$q_i = (1 - a_i)p_{i-1} + a_i p_i \quad (3.36)$$

sabendo-se que a_i é definido como:

$$a_i = \frac{t - u_i}{u_{i+p} - u_i} \quad \text{para } k - p + 1 \leq i \leq k \quad (3.37)$$

Em resumo, a inserção de um novo nó t , exige que primeiro seja encontrado o período de nó $[u_k, u_{k+1})$ que contém este novo nó. Com k disponível, p novos pontos de controle q_{k-p+1} , ..., q_k são computados com a fórmula acima. Finalmente, o polígono de controle original entre p_{k-p} e p_k é substituído com o novo polígono definido por p_{k-p} , q_{k-p+1} , q_{k-p+2} , ..., q_{k-1} , q_k e p_k . É notável que depois de inserir um novo nó, o vetor de nó torna-se $u_0, u_1, \dots, u_k, t, u_{k+1}, \dots, u_m$. Se o novo nó t é igual para u_k , a multiplicidade de u_k é acrescentada por um.

O esquema de computação acima pode ser ilustrado com o diagrama 3.64. Primeiro, os pontos de controle afetados são listados na coluna à esquerda. Então, os novos pontos de controle computados são listados na segunda coluna. Pode-se perceber que o número de novos pontos de controle apresenta um a menos que os pontos de controle afetados. A computação do novo ponto de controle q_i , no qual $k - p + 1 \leq i \leq k$, requer dois pontos de controle original p_{i-1} e p_i com coeficientes $1 - a_i$ e a_i , respectivamente. Após a computação, será verificado o uso dos pontos cercados pela linha pontilhada para substituir não aquelas na região. Todos pontos de controle afetados são preservados. Portanto, o conjunto original de pontos de controle p_{k-p} , p_{k-p+1} , ..., p_{k-1} , p_k são substituídos com p_{k-p} , q_{k-p+1} , ..., q_{k-1} , p_k .

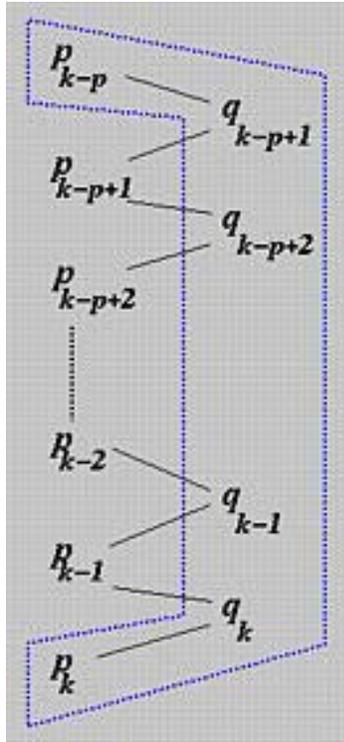


Figura 3.64: Diagrama do Esquema de Computação de Inserção de Nó Único

Torna-se possível contemplar uma interpretação geométrica de a_i . De sua definição, a_i é a relação da divisão do intervalo $[u_i, u_{i+p})$ pelo valor de t como mostrado a seguir:

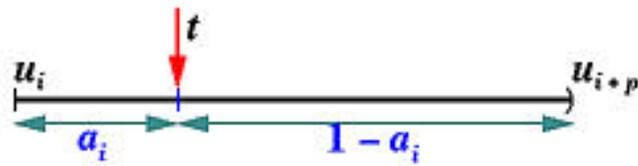


Figura 3.65: Interpretação Geométrica de a_i

Existem ka_i , cada um cobre p períodos de nó (isto é, $[u_i, u_{i+p})$). Se estes intervalos forem empilhados juntos e alinhado no valor de t , tem-se o seguinte diagrama:

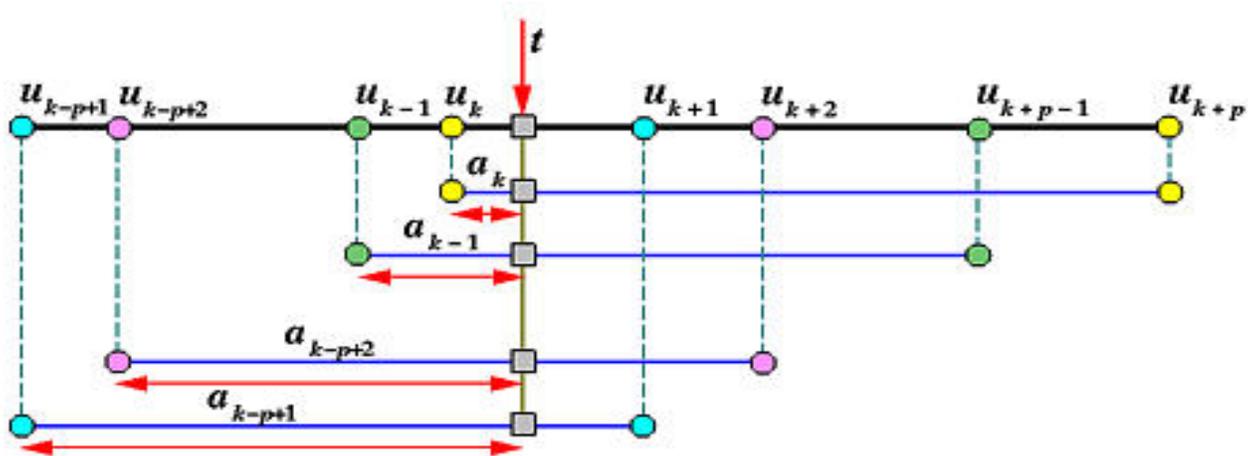


Figura 3.66: Diagrama do Alinhamento dos Intervalos no Valor de t

Então, a posição de t divide períodos de nó $[u_k, u_{k+p})$, $[u_{k-1}, u_{k+p-1})$, \dots , $[u_{k-p+1}, u_{k+1})$ nas relações a_k , a_{k-1} , \dots , a_{k-p+1} , que, na sua vez, provêem as mesmas relações para dividir segmentos $p_k p_{k-1}$, $p_{k-1} p_{k-2}$, \dots , $p_{k-p} p_{k-p+1}$.

3.15.2 Exemplo 1: Inserindo um Nó em um Período de Nó

Supondo que tem-se uma curva B-spline de grau 3 com um vetor de nós como segue:

u_0	para	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	para	u_{11}
		0	0.2	0.4	0.6	0.8			1

Tabela 3.5: (a) Vetor de Nós

Deseja-se inserir um novo nó $t = 0.5$. Considerando que $t = 0.5$ fica contido no período de nó $[u_5, u_6)$, os pontos de controle afetados são p_5 , p_4 , p_3 e p_2 . Para determinar os três novos pontos de controle q_5 , q_4 e q_3 , é necessário computar a_5 , a_4 e a_3 como segue:

$$a_5 = (t - u_5)/(u_8 - u_5) = (0.5 - 0.4)/(1 - 0.4) = 1/6$$

$$a_4 = (t - u_4)/(u_7 - u_4) = (0.5 - 0.2)/(0.8 - 0.2) = 1/2$$

$$a_3 = (t - u_3)/(u_6 - u_3) = (0.5 - 0)/(0.6 - 0) = 5/6$$

Então, os três novos pontos de controle são:

$$q_5 = (1 - 1/6)p_4 + (1/6)p_5$$

$$q_4 = (1 - 1/2)p_3 + (1/2)p_4$$

$$q_3 = (1 - 5/6)p_2 + (5/6)p_3$$

O novo polígono de controle torna-se $p_0, p_1, p_2, q_3, q_4, q_5, p_5, \dots$, e o novo vetor de nós é:

u_0	para	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	para	u_{12}
		0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8			1

Tabela 3.6: (b) *Vetor de Nós*

Destacando que a curva B-spline original tem $p = 3$ e $m = 11$, apresenta-se $n = m - p - 1 = 11 - 3 - 1 = 7$ e conseqüentemente 8 pontos de controle. A seguir é revelada uma curva B-spline satisfazendo esta condição e suas funções base:

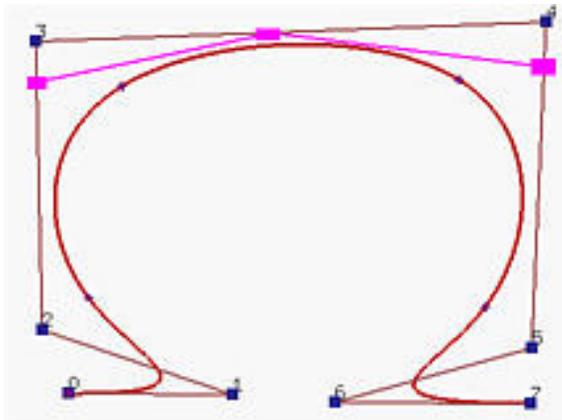


Figura 3.67: (a) *Curva B-spline*

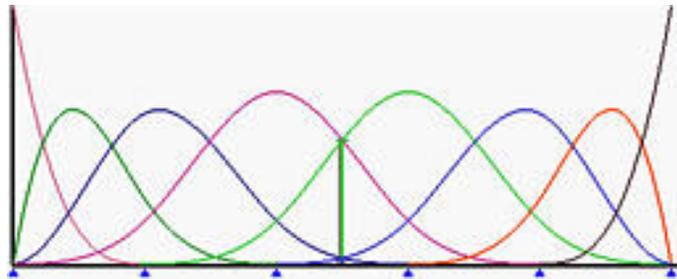


Figura 3.68: (a) *Funções Base*

Os três retângulos são q_3 , q_4 e q_5 . Depois de inserir $t = 0.5$, os segmentos em p_3 e p_4 são cortados, rendendo a seguinte curva B-spline e suas funções base. É possível notar que a forma da curva não muda:

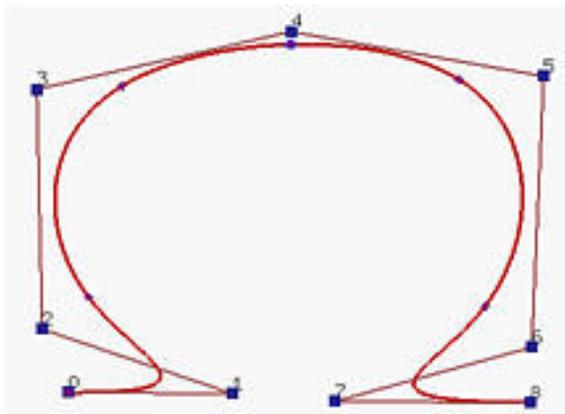


Figura 3.69: (b) Curva B-spline

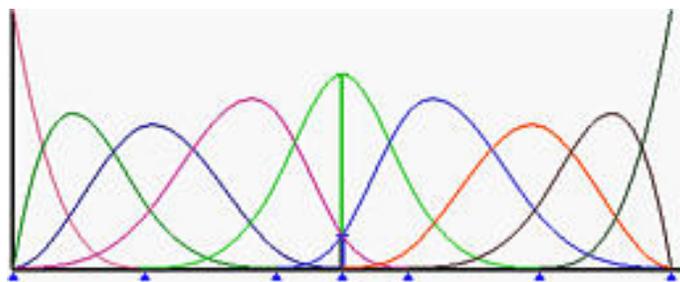


Figura 3.70: (b) Funções Base

O diagrama seguinte mostra a relação entre os velhos e os novos pontos de controle. Torna-se notável que o novo conjunto de pontos de controle contém p_0 , p_1 , p_2 , q_3 , q_4 , q_5 , p_5 , p_6 e p_7 .

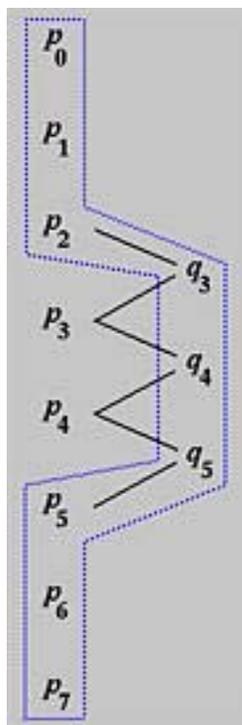


Figura 3.71: *Diagrama da Relação entre os Velhos e os Novos Pontos de Controle*

As relações entre a_j , u_j e t são mostradas a seguir:

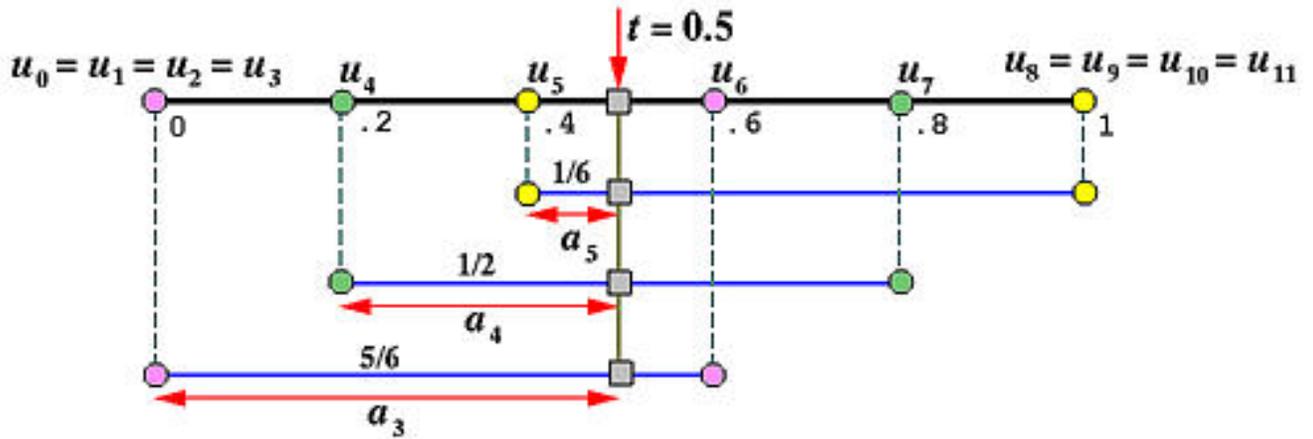


Figura 3.72: Relações entre a_j , u_j e t

3.15.3 Exemplo 2: Inserindo um Nó em um Nó Simples Existente

Supondo que esteja-se sobre posse de um vetor de nós como segue:

u_0	para	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	para	u_{16}
0		0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875		1		

Tabela 3.7: (c) Vetor de Nós

Desejando-se inserir um novo nó $t = 0.5$, que é igual para um existente (isto é, $t = u_8 = 0.5$). A seguir é apresentada uma curva B-spline de grau 4 e suas funções base antes do novo nó t ser inserido.

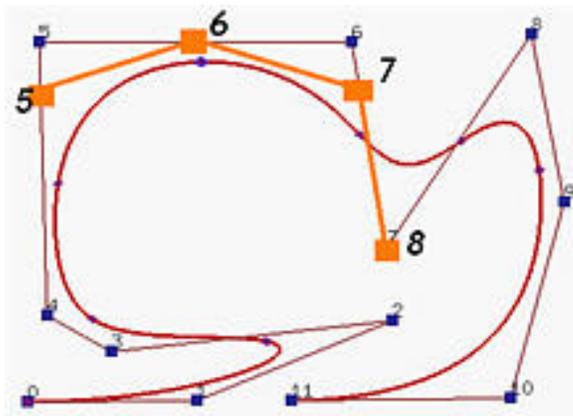


Figura 3.73: (a) B-spline de Grau 4

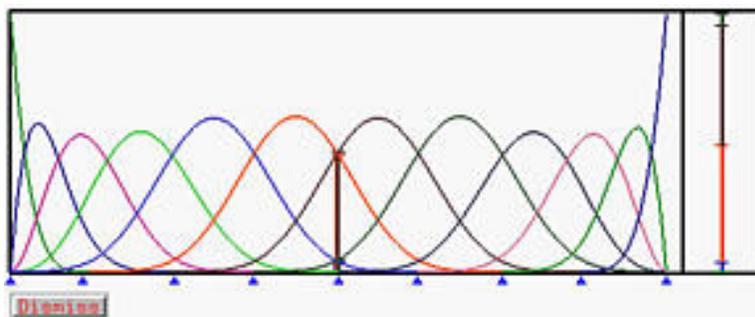


Figura 3.74: (a) Funções Base

Considerando que t está em $[u_8, u_9]$, os pontos de controle afetados são p_8, p_7, p_6, p_5 e p_4 . Os coeficientes são computados a seguir:

$$a_8 = (t - u_8)/(u_{12} - u_8) = (0.5 - 0.5)/(1 - 0.875) = 0$$

$$a_7 = (t - u_7)/(u_{11} - u_7) = (0.5 - 0.375)/(0.875 - 0.375) = 1/4$$

$$a_6 = (t - u_6)/(u_{10} - u_6) = (0.5 - 0.25)/(0.75 - 0.25) = 1/2$$

$$a_5 = (t - u_5)/(u_9 - u_5) = (0.5 - 0.125)/(0.625 - 0.125) = 3/4$$

Os novos pontos de controle são:

$$q_8 = (1 - 0)p_7 + 0p_8$$

$$q_7 = (1 - 1/4)p_6 + (1/4)p_7$$

$$q_6 = (1 - 1/2)p_5 + (1/2)p_6$$

$$q_5 = (1 - 3/4)p_4 + (3/4)p_5$$

O novo ponto de controle q_8 é igual para o ponto de controle original p_7 . De fato, se t é igual para um nó, digamos u_k , então:

$$a_k = (t - u_k)/(u_{k+p} - u_k) = 0$$

Conseqüentemente, possui-se:

$$q_k = (1 - 0)p_{k-1} + 0p_k = p_{k-1}$$

Isto é, se o novo nó t para ser inserido é igual para um nó simples existente u_k , então q_k , o último novo ponto de controle, é igual para p_{k-1} . O diagrama seguinte é o esquema de computação:

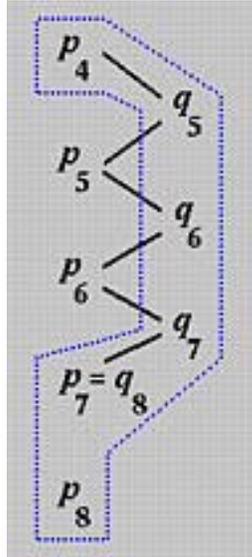


Figura 3.75: Diagrama do Esquema de Computação

A figura mostrada no início deste exemplo mostra os novos pontos de controle e o novo polígono de controle. É indispensável notar que os novos pontos de controle são: $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, q_5, q_6, q_7, q_8 = p_7, p_8, p_9, p_{10}$ e p_{11} . A curva e suas funções base depois do novo nó $t = 0.5$ inserido são mostradas a seguir:

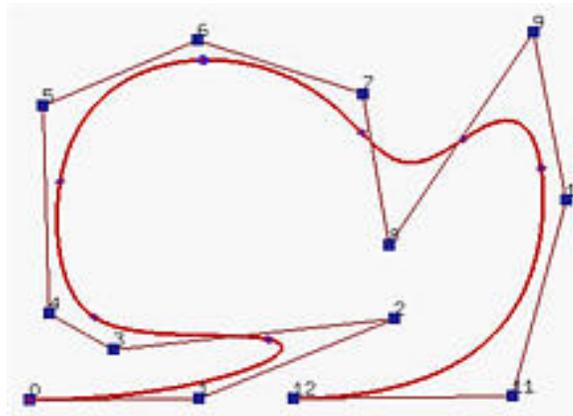


Figura 3.76: (b) B-spline de Grau 4 depois do Novo Nó $t = 0.5$ ser Inserido

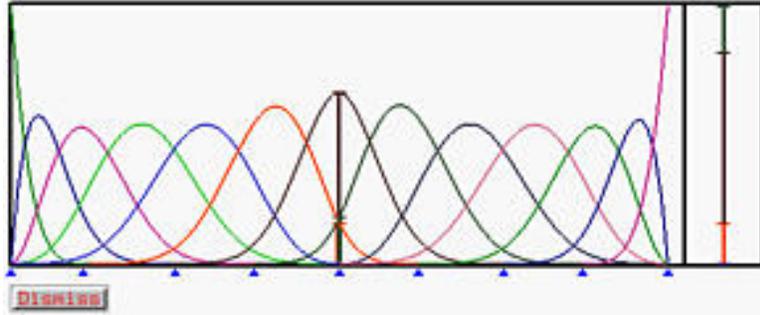


Figura 3.77: (b) Funções Base depois do Novo Nó $t = 0.5$ ser Inserido

As relações entre a_j , u_j e t são apresentadas no gráfico a seguir:

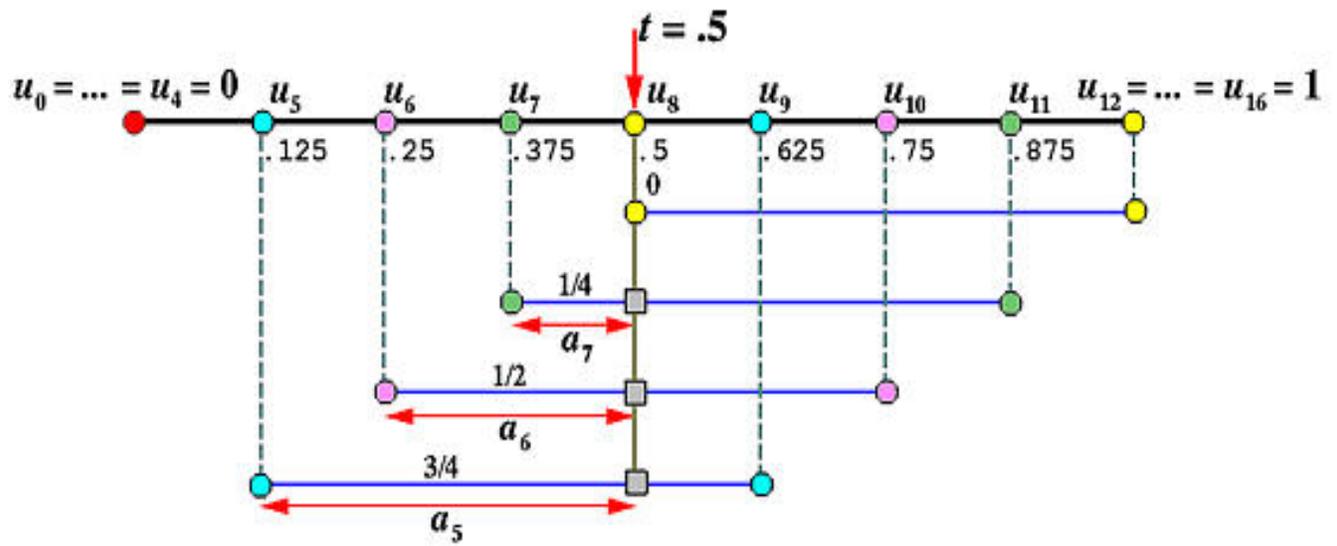


Figura 3.78: Relações entre a_j , u_j , e t

3.15.4 Exemplo 3: Inserindo um Nó em um Nó Múltiplo Existente

Se o novo nó t é inserido em um nó múltiplo, suponha-se que t é inserido no nó u_k de multiplicidade s . Conseqüentemente, ter-se-á s nós iguais sucessivos: $u_k = u_{k-1} = u_{k-2} = \dots = u_{k-s+1}$ e u_{k-s+1} não sendo igual para u_{k-s} . Na computação de coeficientes a_k, \dots, a_{k-p+1} , possui-se o seguinte:

$$a_k = (t - u_k)/(u_{k+p} - u_k) = (u_k - u_k)/(u_{k+p} - u_k) = 0$$

$$a_{k-1} = (t - u_{k-1})/(u_{k+p-1} - u_{k-1}) = (u_k - u_{k-1})/(u_{k+p-1} - u_{k-1}) = 0$$

.....

$$a_{k-s+1} = (t - u_{k-s+1}) / (u_{k-s+1+p} - u_{k-s+1}) = (u_k - u_{k-s+1}) = 0$$

Conseqüentemente, os coeficientes a_k, \dots, a_{k-p+1} são todos zero e nesse sentido, irá obter-se:

$$q_k = (1 - a_k)p_{k-1} + a_k p_k = p_{k-1}$$

$$q_{k-1} = (1 - a_{k-1})p_{k-2} + a_{k-1}p_{k-1} = p_{k-2}$$

.....

$$q_{k-s} = (1 - a_{k-s+1})p_{k-s} + a_{k-s+1}p_{k-s} = p_{k-s}$$

Isto comprova que se o novo nó t é inserido em um nó u_k de multiplicidade s , então os últimos s novos pontos de controle, $q_k, q_{k-1}, \dots, q_{k-s+1}$ são iguais para os pontos de controle originais $p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_{k-s}$. Se $s = 1$ (isto é, nó simples), q_k é igual para p_{k-1} , que é exatamente o que foi discutido no Exemplo 2. Se $s = 0$ (isto é, t não é um nó), então todos pontos de controle de p_{k-p} para p_k são envolvidos. Isto é o caso do Exemplo 1. O seguinte diagrama é o esquema de computação:

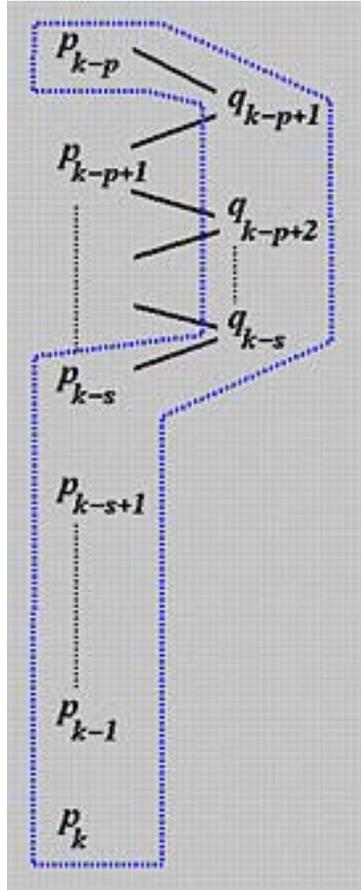


Figura 3.79: Diagrama do Esquema de Computação

3.15.5 A Inserção de Nó para Curvas NURBS

A discussão referente à inserção de nó está direcionada para curvas B-spline. Considerando que curvas NURBS são as projeções 4D de curvas B-spline para 3D, inserção de nó para curvas NURBS representa algo fácil. Pode-se perceber que a discussão e computação acima não exige os pontos de controle que estão na terceira dimensão espacial. Então, inserção de nó para curvas NURBS é feita em três passos: (1) convertendo a curva NURBS dada em 3D para uma curva B-spline em 4D, (2) apresentando inserção de nó para esta curva B-spline em quatro dimensões, e (3) projetando o novo conjunto de pontos de controle de volta para a forma 3D do novo conjunto de pontos de controle para a curva NURBS apresentada, depois que o nó exigido for inserido.

Supondo-se que exista $n + 1$ pontos de controle p_0, p_1, \dots, p_n com pesos associados w_0, w_1, \dots, w_n , um vetor de nós u e um grau p , deve-se deixar $p_i = (x_i, y_i, z_i)$. Então, pontos

de controle $P_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, $0 \leq i \leq n$, e vetor de nós u define uma curva B-spline de quadri dimensões de grau p . Pode-se inserir um nó t para esta curva B-spline de quadri dimensões produzindo um novo conjunto de pontos de controle $Q_i = (X_i, Y_i, Z_i, W_i)$, $0 \leq i \leq n$. Projetando estes pontos de controle de volta para o espaço tridimensional pela divisão dos três primeiros componentes com o quatro, é produzido um novo conjunto de pontos de controle dados na curva NURBS.

Analisando um exemplo, deve-se supor que esteja sob domínio 9 nós:

u_0	para	u_3	u_4	u_5	para	u_8
		0	0.5			1

Tabela 3.8: Nós

E uma curva NURBS de grau 3 definida pelos seguintes 5 pontos de controle no plano- xy :

	x	y	w
p_0	-70	-76	1
p_1	-70	75	0.5
p_2	74	75	4
p_3	74	-77	5
p_4	-40	-76	1

Tabela 3.9: Pontos de Controle no Plano- xy

A seguir é mostrada a curva e suas funções base:

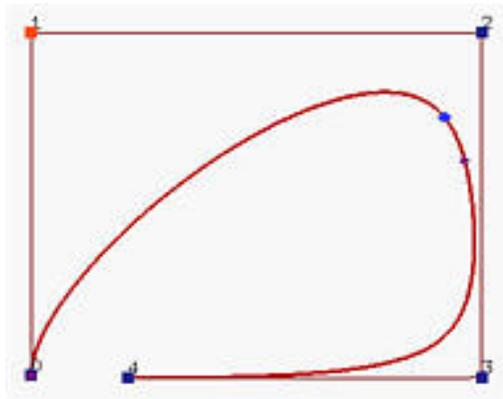


Figura 3.80: (a) Curva NURBS de Grau 3

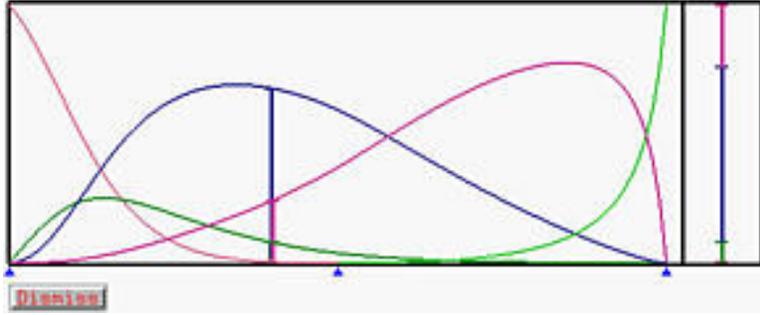


Figura 3.81: (b) Funções Base

Inserindo um novo nó $t = 0.4$, pode-se considerar que t está no período de nó $[u_3, u_4]$ e o grau da curva NURBS é 3, os pontos de controle afetados são p_3, p_2, p_1 e p_0 . Sabendo-se que isto é uma curva NURBS, deve-se usar coordenadas homogêneas multiplicando todos pontos de controle com seus pesos correspondentes. É possível denominar estes novos pontos de controle P_i :

	x	y	w
P_0	-70	-76	1
P_1	-35	37.5	0.5
P_2	296	300	4
P_3	370	-385	5

Tabela 3.10: Novos Pontos de Controle P_i

É notável que P_4 não é afetada, pois não é computado na tabela acima. Então, deve-se computar a_3, a_2 e a_1 a seguir:

$$a_3 = (t - u_3)/(u_6 - u_3) = (0.4 - 0)/0/(1 - 0) = 0.4$$

$$a_2 = (t - u_2)/(u_5 - u_2) = (0.4 - 0)/0/(1 - 0) = 0.4$$

$$a_1 = (t - u_1)/(u_4 - u_1) = (0.4 - 0)/0/(0.5 - 0) = 0.8$$

Os novos pontos de controle Q_3, Q_2 e Q_1 são:

$$Q_3 = (1 - a_3)P_2 + a_3P_3 = (325.6, 26, 4.4)$$

$$Q_2 = (1 - a_2)P_1 + a_2P_2 = (97.4, 142.5, 1.9)$$

$$Q_1 = (1 - a_1)P_0 + a_1P_1 = (-42, 14.8, 0.6)$$

Projetando estes três pontos de controle em quadri dimensões dividindo os primeiros dois componentes com o terceiro (o peso), ter-se-á:

$$q_3 = (74, 5.9) \text{ com peso } 4.4$$

$$q_2 = (51.3, 75) \text{ com peso } 1.9$$

$q_1 = (-70, 24.6)$ com peso 0.6

A seguir é apresentada a curva NURBS resultante e suas funções base:

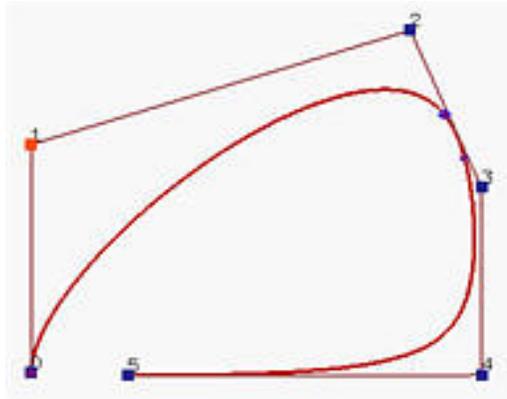


Figura 3.82: (b) Curva NURBS resultante

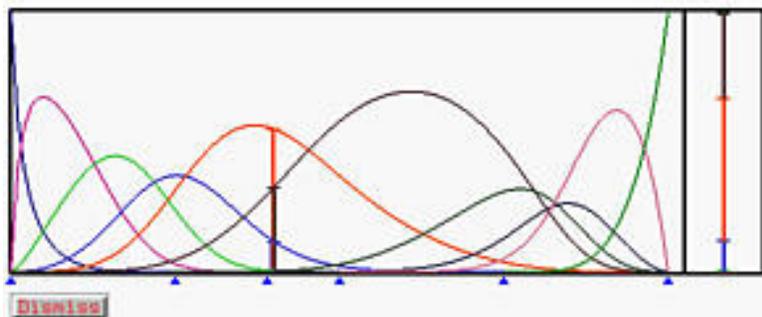


Figura 3.83: (b) Funções Base

3.15.6 Corte de Segmento

Como foi mencionado anteriormente, inserção de nó é um processo de corte de segmento. Assim, supondo-se que uma curva B-spline de grau 6 e deseja-se inserir u duas vezes em um nó u_{10} de multiplicidade 2. Os pontos de controle afetados são p_{10}, p_9, \dots, p_4 , considerando que $k = 10, p = 6$ e $k - p = 4$. Assim a multiplicidade de u_{10} é 2, revelando que $s = 2$ e u_{10} e p_9 não são mudados. A primeira inserção produz $p_{8,1}, p_{7,1}, p_{6,1}$ e $p_{5,1}$ e os segmentos em p_7, p_6 e p_5 são cortados. O novo conjunto de pontos de controle contém p_0 para $p_4, p_{5,1}, p_{6,1}, p_{7,1}, p_{8,1}, p_8, p_9, p_{10}, \dots$

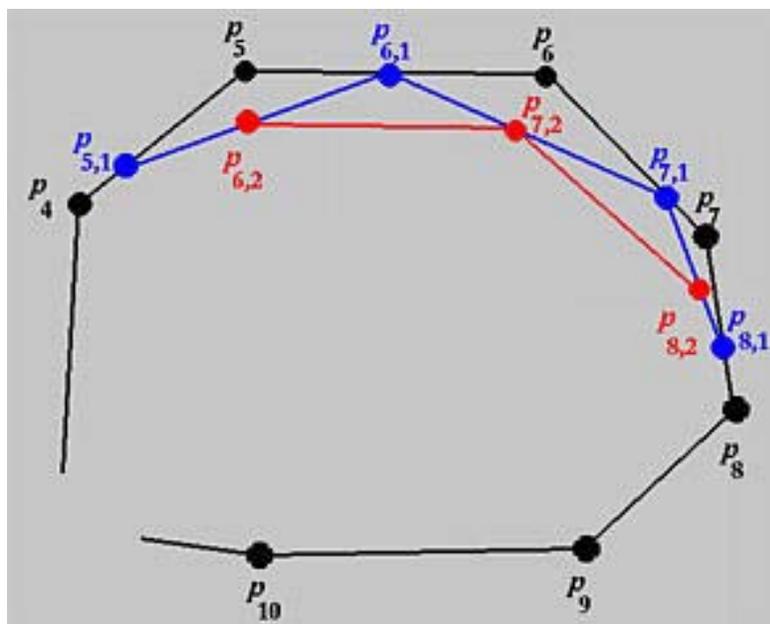


Figura 3.84: *Novo conjunto de Pontos de Controle*

A segunda inserção produz $p_{8,2}$, $p_{7,2}$ e $p_{6,2}$. Deste modo, os segmentos em $p_{7,1}$ e $p_{6,1}$ são cortados e o novo conjunto de pontos de controle são p_0 para p_4 , $p_{5,1}$, $p_{6,2}$, $p_{7,2}$, $p_{8,2}$, $p_{8,1}$, p_8 , p_9 , p_{10} ,

3.16 Comparações entre Curvas B-spline e NURBS

3.16.1 B-spline

“B-spline permanece como um dos mais eficientes métodos de representação de forma para uso em processamento de sinal e imagem. Embora B-spline ofereça uma representação compacta e tem alta robustez contra a presença de ruído na imagem, pouco trabalho foi feito para seu uso em comparação de semelhança de forma. É em parte devido a não singularidade dos descritores de B-spline, em que uma forma dada pode ser representada por conjuntos diferentes de parâmetros B-spline. Além disso, cada imagem pode ser representada por um número diferente de parâmetros de B-spline para ser comparado. Então, é uma tarefa difícil achar correspondentes parâmetros relevantes de B-spline em funções para apresentar comparação de semelhança entre duas imagens.

B-Splines Racional Não-Uniforme (NURBS), é uma melhor representação Spline comparada a B-spline. A fim de resolver o perceptivo problema de correspondência, é apresentado uma comparação elástica, o método de computar a pontuação de semelhança entre duas imagens. No método de comparação elástica, pontuação de semelhança é computado baseado em comparações locais dos contornos de formas. A comparação elástica é relacionada a energia física que é obtida medindo a quantidade de deformação para explicar a diferença em dois contornos” [Liang e Mandava e Khoo, 2003].

3.16.2 NURBS como um Descritor de Forma

B-Splines Racional Não-Uniforme (NURBS) são escolhidos como um descritor de forma para modelar várias formas comparado ao B-spline.

A escolha de NURBS como um descritor de forma, não só oferece uma forma matemática comum para representar formas livres mas também formas geométricas. “A diferença entre NURBS e B-spline, é que NURBS inclui um vetor de laço não uniforme e um parâmetro adicional, que é o peso. A inclusão de peso como um parâmetro adicional adiciona um grau extra da liberdade para NURBS e facilita a representação de uma grande variedade de formas. Além disso, o uso de vetores de laço não uniformes permite melhor controle de forma e modelagem de muitas classes de formas que o vetor de laço uniforme usado em B-spline. Com estes parâmetros adicionais, NURBS permite uma representação compacta mais alta, que reduz o número original dos pontos de limite exigidos para representar a imagem em questão” [Liang e Mandava e Khoo, (c) 2002].

A figura a seguir ilustra a forma da imagem reconstruída em relação a imagem original usando números diferentes de pontos de controle NURBS e B-spline. Deste, pode ser visto, com 12 pontos de controle, a aproximação de curva com NURBS é superior a aquela com B-spline. Com 32

pontos de controle, a representação de NURBS converge mais próximo aos pontos de curvatura alta comparado a representação B-spline. Então, observa-se que NURBS é um método de representação apropriada para descrever qualquer forma livre que possa conter numerosas porções convexas e côncavas.

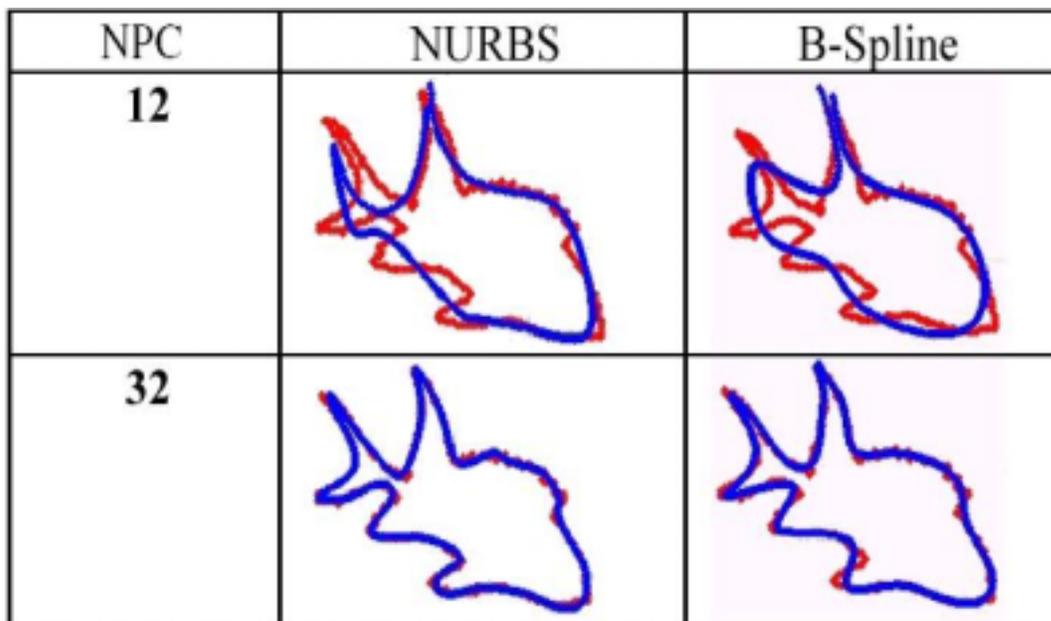


Figura 3.85: *Imagem reconstruída usando representação NURBS e B-spline com 12 e 32 Pontos de Controle respectivamente [Liang e Mandava e Khoo, 2003]*

3.16.3 Desenhando Toros e Elipsóides com Curvas NURBS e B-spline

A seguir tem-se um toro desenhado com uma curva NURBS e depois este mesmo toro desenhado com uma curva B-spline:

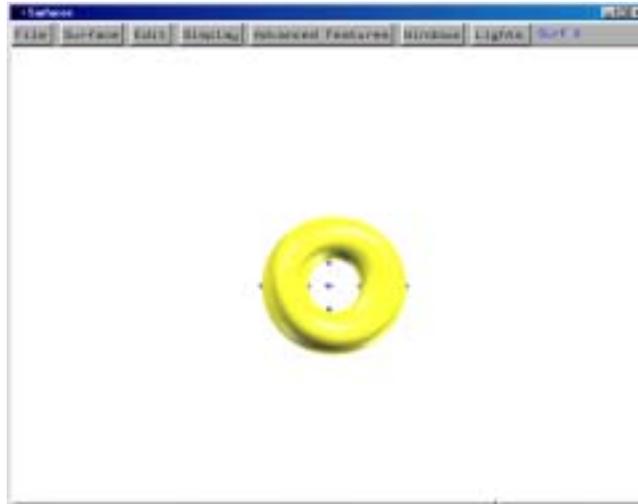


Figura 3.86: Curva NURBS com 7 Pontos de Controle, Grau 3, 11 Nós e 7 Pesos



Figura 3.87: Curva B-spline com 7 Pontos de Controle, Grau 3 e 11 Nós

A seguir tem-se uma elipsóide desenhada com uma curva NURBS e depois esta mesma elipsóide desenhada com uma curva B-spline:

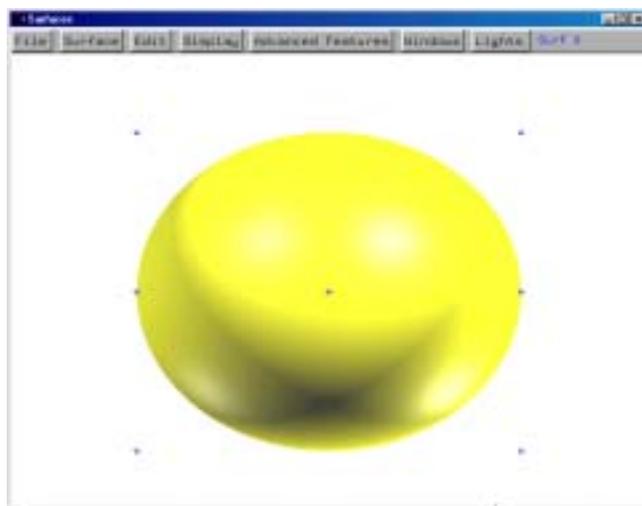


Figura 3.88: *Curva NURBS com 7 Pontos de Controle, Grau 3, 11 Nós e 7 Pesos*

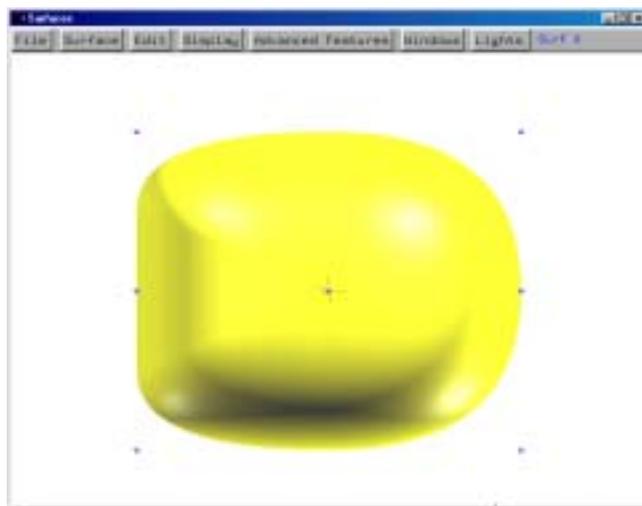


Figura 3.89: *Curva B-spline com 7 Pontos de Controle, Grau 3 e 11 Nós*

Como pode-se observar tanto um toro quanto uma elipsóide é melhor desenhada utilizando curva NURBS.

3.17 Aplicações utilizando NURBS

Construindo um dedo com NURBS. Foi utilizado o software “Rhino 3D” [Rhino 3D, 2001] para realizar esta tarefa.

Passos para a construção:

1. Desenhe duas curvas vistas de frente, representando os lados esquerdo e direito de um dedo. Desenhe a curva alinhada ao eixo central até uni-la no topo.

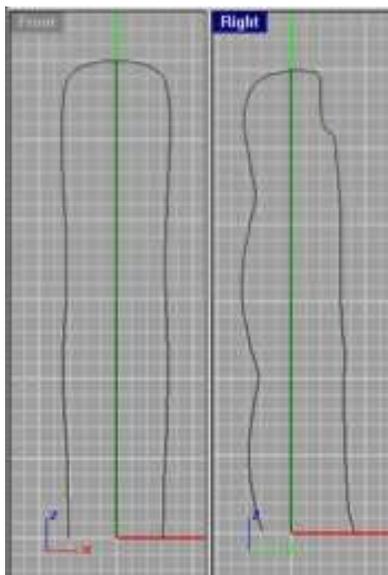


Figura 3.90: (a) *Lados Esquerdo e Direito de um Dedo*

2. Desenhe duas curvas reposicionadas, representando a visão lateral da frente e atrás do dedo. A unha será outra superfície separada do restante.
3. Faça a visão de perspectiva ou ative a visão superior, de forma que se possa ver as quatro curvas de uma vez. Reconstrua a superfície de cada curva com mais ou menos 10 ou 12 pontos de controle de forma fechada.

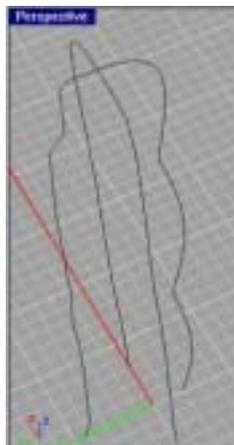


Figura 3.91: (b) *Visão Perspectiva do Dedo*

4. Faça uma nova camada, e repositone as curvas construídas mais longe da camada inicial.
5. Mostre pontos em seu modelo de dedo, e edite sua forma. Pode-se inserir mais nós aos pontos, para maior controle da forma.

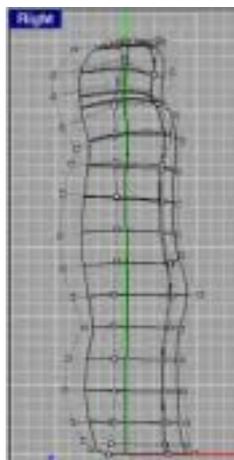


Figura 3.92: (c) *Pontos de Controle do Modelo de Dedo*

6. Amplie a visão superior do tipo de dedo, e desenhe 4 curvas. As curvas da direita e esquerda devem representar as extremidades da unha do dedo.

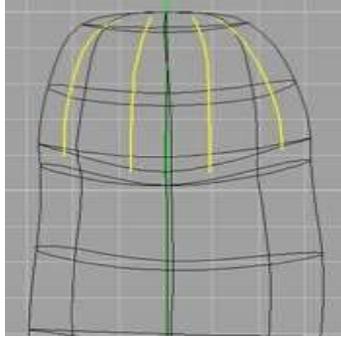


Figura 3.93: (d) *Extremidades da Unha do Dedo*

7. Use “Proj” (ou Curve>From Surfaces>Projective) e selecione as quatro curvas e aperte <enter>. Então selecione o objeto dedo e aperte <enter>.

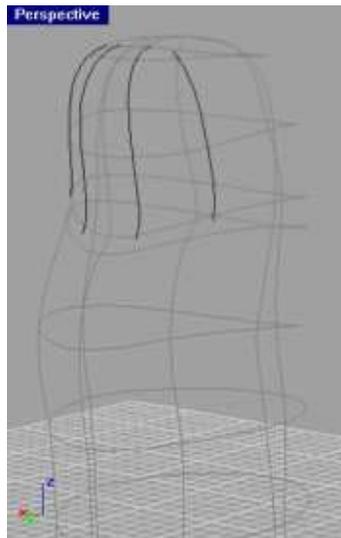


Figura 3.94: (e) *Visão Perspectiva da Unha*

8. Selecione o dedo, e clique no ícone “Ghost” na caixa de ferramentas “Larger Toolbox”.
9. A direita da janela de perspectiva, pode-se ver que existem cinco conjuntos de curvas. O conjunto de curvas desenhadas está no centro, e existem curvas projetadas sobre a frente e atrás do dedo.
10. As únicas curvas necessárias são aquelas projetando a parte do lado de trás da unha do dedo. Selecione e apague os outros dois conjuntos.
11. Unindo as quatro curvas no alto para fazer a unha (desligue a caixa de verificação - “closed” em “check-box”).

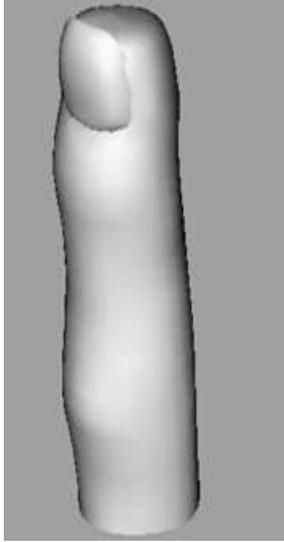


Figura 3.95: *(f) Imagem final construída do Dedo*

4 CONCLUSÕES

Ao longo desse trabalho foi realizado um estudo referente à Curvas NURBS. A seguir, serão relatadas as conclusões chegadas com este estudo:

Coordenadas Homogêneas - Um dos muitos propósitos de usar coordenadas homogêneas é capturar o conceito de infinito. Os matemáticos descobriram que muitos conceitos e computações geométricas podem ser simplificadas se o conceito de infinito é usado.

Curvas Racionais - Representações paramétricas usando coordenadas homogêneas.

Splines são fórmulas matemáticas que permitem construir linhas vetoriais a partir de pontos estabelecidos. São utilizadas em programas CAD para ajudar os engenheiros a fazerem curvas suaves. Dois tipos mais comuns de Splines são curvas Bézier e curvas B-spline.

Curvas B-splines são generalizações de Curvas Bézier. Para desenhar uma curva B-spline, precisamos de um conjunto de pontos de controle, um conjunto de nós e um conjunto de coeficientes, um para cada ponto de controle de forma que todos segmentos de curva sejam unidas satisfazendo certa condição de continuidade. Os coeficientes são a relação das distâncias entre os pontos e sempre estão no intervalo de 0 e 1.

Curvas Bézier são casos especiais de B-splines. As curvas Bézier e B-splines são curvas paramétricas polinomiais. Nesse sentido, formas paramétricas polinomiais não podem representar algumas curvas simples como círculos. Como resultado, Curvas Bézier e B-splines somente podem representar as formas que paramétricas polinomiais podem. Introduzindo coordenadas homogêneas, tornam-se racionais, fazendo com que Curvas Bézier e B-splines sejam generalizados para curvas Bézier Racional e B-splines Racional Não-Uniforme, ou NURBS. Obviamente, curvas Bézier Racionais são mais poderosas que curvas Bézier e agora podem representar círculos e elipses. Semelhantemente, NURBS são mais poderosas que B-splines.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) - B-splines Racionais Não-Uniformes: são funções paramétricas que podem representar qualquer tipo de curva e superfície.

Vantagens de usar NURBS:

- NURBS oferecem uma forma matemática comum para representar e projetar formas de padrão analítico e formas livres.
- NURBS são invariantes sob transformações geométricas de escala, rotação, translação, cortes de segmentos como também paralelas, projeção e perspectiva.

- Manipulando os pontos de controle como também os pesos, NURBS provê flexibilidade para projetar uma grande variedade de formas.

- NURBS tem interpretações geométricas claras, fazendo seu uso particularmente útil para desenhistas e projetistas.

- NURBS tem um conjunto de ferramentas geométricas poderosas (inserção de nó, elevação de grau, etc.) isto pode ser usado para projetar, analisar processos e interrogar objetos.

- Uma motivação muito importante para usar curvas NURBS é a habilidade de controlar suavidade. O modelo NURBS permite-nos definir curvas sem torcer ou mudar subitamente de direção (como corte transversal asa-avião) ou com controle preciso acima de onde torce e curvas acontecem (cortes de segmentos de objetos feitos à máquina, por exemplo).

Porém, uma das desvantagens que NURBS tem, é a necessidade de armazenamento extra para definir formas tradicionais (por exemplo círculos). Estes resultados de parâmetros além dos pontos de controle, finalmente permitem a flexibilidade desejada para definir formas paramétricas.

BIBLIOGRAFIA

- [Acton, 1996] Acton, F. S. (1996). *REAL Computing Made REAL*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [Altmann, 2001] Altmann, M. (2001). NURBS. *About Nonuniform Rational B-Splines - NURBS*. Disponível em <<http://www.cs.wpi.edu/~matt/courses/cs563/talks/nurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Ayam, 2001] Ayam: *NURBS Modeling Tools*. Disponível em <<http://www.ayam3d.org/docs/ayam-5.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Anton, 2000] Anton, H. (2000). *Cálculo um novo horizonte*. Editora Artes Médicas Sul LTDA, 6ª Edição, Volume 2.
- [Barsky e Derose, 1910] Barsky, B. A. e Derose, T. D. (1910). *Geometric Continuity of Parametric Curves: Constructions of Geometrically Continuous Splines*, IEEE Computer Graphics Applications, Vol. 10, No. 1 (January), pp. 60-68.
- [Barsky e Derose, 1989] Barsky, B. A. e Derose, T. D. (1989). *Geometric Continuity of Parametric Curves: Three Equivalent Characterizations*, IEEE Computer Graphics Applications, Vol. 9, No. 6 (November), pp. 60-68.
- [Boehm e Prautzsch, 1994] Boehm, W. e Prautzsch, H. (1994). *Geometric Concepts for Geometric Design*, AK Peters, Wellesley, MA.
- [Bourke, 2001] Bourke, P. (2001). Spline curve. *Spline curves (in 3D)*. Spline Surfaces. Disponível em <<http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/curves/spline/>> Acesso em: out. de 2001.
- [Bowyer, 1993] Bowyer, A. e Woodwark, J. (1993). *Introduction to Computing with Geometry*, Information Geometers Ltd, Winchester, UK.
- [B-spline (a), 2001] B-spline Basis Functions. *B-Spline Basis Functions: Code to compute basis functions induced by different knot vectors*. Comparison of cubic B-spline and Bézier space curves (image). Disponível em <<http://www.dgp.toronto.edu/people/elf/2505/bspline.html>> Acesso em: out. de 2001.
- [B-spline (b), 2001] *B-spline basis functions*. Disponível em <<http://www.ipm.sci-nnov.ru/~demidov/VRML/Splines/Intro/Basis.htm>> Acesso em: out. de 2001.
- [B-spline (c), 2001] B-Spline - from MathWorld. *B-Spline, A generalization of the Bézier curve*. Disponível em <<http://mathworld.wolfram.com/B-Spline.html>> Acesso em: out. de 2001.

- [B-spline (d), 2001] B-Spline Surface. *B-Spline Surface*. The equation which describe the B-Spline surface depends on parameters. Disponível em <http://wwwinfo.cern.ch/asd/geant/geant4_public/prototype/gerep/node5.html> Acesso em: out. de 2001.
- [B-spline (e), 2001] B-Spline Surface Intersection Algorithms. *B-Spline Surface Intersection Algorithms*. This is an introduction to the various methods used for finding an intersection between a B-Spline surface and a line. Disponível em <http://wwwinfo.cern.ch/asd/geant/geant4_public/prototype/gerep/node9.html> Acesso em: out. de 2001.
- [Casteljau, 1993] Casteljau, P. (1993). *Polar Forms for Curve and Surface Modeling as Used at Citroën*, in *Fundamental Developments of Computer-Aided Geometric Modeling*, edited by Les Piegl, Academic Press, pp. 1-12.
- [Casey, 1996] Casey, J. (1996). *Exploring Curvature*, Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- [Craigén, 2001] Craigén, D. (2001). *Advantages of NURBS in CAE Modeling*. Disponível em <<http://www.integratedsoft.com/papers/research/nursbs/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Colonna e Kepler e Neumann e God 1996] Colonna, J. e Kepler e Neumann, V. e God (1996). (More rounding-off error visualizations), *The Visual Computer*, Vol. 12, pp. 346-349.
- [Dawson e Becker 2001] Dawson, V. e Becker, M. (2001). *Rhino Nurbs 3D Modeling Book Review*. Disponível em <<http://interneteye3d.com/Reviews2000/Prev/RhinoN3DM/default.asp>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Deboor, 1978] Deboor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. New York, Spinger-Verlang.
- [Develop, 2001] *Develop June 96 - According to Script: Attaching and Embedding*. Disponível em <<http://developer.apple.com/dev/techsupport/develop/issue25/schneider.html>> Acesso em: set. de 2001.
- [Earnshaw e Wiseman, 1992] Earnshaw, R. A. e Wiseman, N. (1992). *Um Guia Introdotório para Visualização Científica*, Springer-Verlang.
- [Efficient, 2001] *Efficient Rendering of Trimmed NURBS Surfaces* Disponível em <<http://www.cs.jhu.edu/~subodh/research/abs.trim.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [D-NURBS, 2001] *D-NURBS: A Physics-Based Framework for Geometric Design*. Disponível em <<http://www.computer.org/tvcg/tg1996/v0085abs.htm>> Acesso em: set. de 2001.

- [Farin, 1997] Farin, G. (1997). *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, fourth edition, Academic Press.
- [Faux e Pratt, 1979] Faux, I. D. e Pratt, M. J. (1979). *Computacional Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood Ltda.
- [Foley, 1994] Foley, J. D. (1994). *Introduction to Computer Graphics*. Addison-Wesley.
- [Gary, 2001] Gary Granger's Home Page. Download the source; Installation instructions. B-Spline documentation. *Developed a C++ template library for computing cubic b-splines*. Disponível em <<http://www.atd.ucar.edu/homes/granger/>> Acesso em: out. de 2001.
- [GDC, 2001] *GDC: Project: Volumetric NURBS*. Disponível em <<http://www.cs.utah.edu/gdc/projects/trivar/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Geometric, 2001] *Geometric Modeling - On-Line Notes*. Coordinates and Convex Combinations. Frames. Bernstein Polynomials. Other Curve/Patch Representations. Disponível em <<http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotes/CAGD-Notes.html>> Acesso em: set. de 2001.
- [Hierarchical, 2001] *Hierarchical B-splines*. A traditional B-spline surface has a number of drawbacks that arise from the mathematical properties of the B-spline basis functions. Disponível em <<http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/forsey/dragon/hbsplines.html>> Acesso em: out. de 2001.
- [Hollig e Reif e Wipper, 2001] Höllig, K. e Reif, U. e Wipper, J. (2001). *Weighted Extended B-Spline Approximation of Dirichlet Problems*. Mathematics. Disponível em <<http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/37320>> Acesso em: out. de 2001.
- [Hoschek e Lasser, 1993] Hoschek, J. e Lasser, D. (1993). *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, translated from the German 1989 edition by Larry L. Schumaker, A K Peters.
- [How, 2001] *How to create complex meshes with NURBS*. A Lightwave 3D tutorial. Disponível em <<http://www.geocities.com/SiliconValley/Lakes/2057/nurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Interactive, 2001] *Interactive Bézier splines (a Java program)*. Disponível em <<http://www.sunsite.ubc.ca/LivingMathematics/V001N01/UBCExamples/Bezier/bezier.html>> Acesso em: out. de 2001.
- [Kapp, 2001] Kapp, K. (2001). *Character Modeling Using Nurbs Primitives*. Character Modeling Using Nurbs Primitives and Sub-Divisions Surfaces Or How to Make a Chicken From

Scratch. Disponível em <<http://www.gignews.com/kappblackcock.htm>> Acesso em: nov. de 2001.

- [Kenneth, 2001] Kenneth, I. (2001). The Uniform B-spline Blending Function. *On-Line Geometric Modeling Notes* The Uniform B-spline Blending Function. Disponível em <<http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotes/Uniform-B-Splines-as-a-Convolution.pdf>> Acesso em: out. de 2001.
- [Lavoie, 2001] Lavoie, P. (2001). *An introduction to NURBS*. Athree dimensional (3D) object is composed of curves and surfaces. Disponível em <<http://yukon.genie.uottawa.ca/~lavoie/software/nur-bs/nurbsintro.pdf>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Lerios, 2001] Lerios, A. (2001). B-Spline Curve Visualization. *B-Spline Curve Visualization*. Scurvy is a simple program that allows the user to visualize and manipulate B-spline curves in space. Disponível em <<http://graphics.stanford.edu/courses/cs348c-95-fall/software/scurvy/>> Acesso em: out. de 2001.
- [Liang e Mandava e Khoo, 2003] Liang, K.M. e Mandava, R. e Khoo, B.E. (2003). *NURBS: A new shape descriptor for shape-based image retrieval*. International Conference on Robotic, Vision, Information and Signal Processing, Penang, Malaysia, 141-146.
- [Liang e Mandava e Khoo, 2002] Liang, K.M. e Mandava, R. e Khoo, B.E. (2002). *Similarity measure determination from NURBS-warping approach*. The Seventh International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, Singapore.
- [Liang e Mandava e Khoo, (a) 2002] Liang, K.M. e Mandava, R. e Khoo, B.E. (2002). *A novel and fast shape description method using Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)*. National Conference on Computer Graphics and Multimedia, Melaka, Malaysia, 190-195.
- [Liang e Mandava e Khoo, (b) 2002] Liang, K.M. e Mandava, R. e Khoo, B.E. (2002). *Exploration of shape similarity matching using NURBS-warping*. Proceedings of the Second World Engineering Congress, Sarawak, Malaysia, 185-191.
- [Liang e Mandava e Khoo, (c) 2002] Liang, K.M. e Mandava, R. e Khoo, B.E. (2002). *Free form shape representation using NURBS modelling*. The Tenth International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision, Plenz, Chezh Republic, 67-73.
- [Lowther e Shene, 1997] Lowther, J. L. e Shene, C. K. (1997). *Geometric Computing in the Undergraduate Computer Science Curricula*. The Journal of Computing in Small Colleges, Vol. 13 (1997), n^o 2 (November), pp. 50-61.

- [Manchester, 2001] The Manchester NURBS library. *The Manchester NURBS library*. Introduction. The Manchester Visualization Center. NURBS curves and surfaces. Disponível em <<http://www.man.ac.uk/MVC/research/nurbs/library/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [MapTools, 2001] MapTools Basic - Poly NURBS Fitting Information. *PolyNURBS*. Create Splines or Polylines that approximate the path of a true NURBS Spline from the vertices of any 2D or 3D Polyline. Disponível em <http://www.tcicorp.com/html/prod_MTbasic7.php> Acesso em: nov. de 2001.
- [Martin e Cohen e Fish e Shirley, 2001] Martin, W. e Cohen, E. e Fish, R. e Shirley, P. (2001). *Practical Ray Tracing of Trimmed NURBS Surfaces*. Abstract Practical Ray Tracing of Trimmed NURBS Surfaces. Disponível em <<http://www.cs.utah.edu/vissim/papers/raynurbs/raynurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Medioni, 2001] Medioni, G. (2001). *Song Han, Triangular B-Splines, NURBS, Winged B-Snakes Roboo*. Song Han. Dept. National Multimedia Research Center; Robotics/Vision Group. Disponível em <<http://iris.usc.edu/~han/index-main.html>> Acesso em: out. de 2001.
- [Mortenson, 1985] Mortenson, M. E. (1985). *Geometric Modeling*. John Wiley Sons.
- [Mortenson, 1989] Mortenson, M. E. (1989). *Computer Graphics: An Introduction to the Mathematics and Geometry*, Heinemann Newnes, Oxford, UK.
- [Newhook, 2001] Newhook, P. (2001). EDM/2 - OpenGL and OS/2 - All About NURBS. *OpenGL and OS/2. All About NURBS*. Disponível em <<http://www.edm2.com/0608/opengl.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Nurbana, 2001] *Nurbana - Free 3D Nurbs Modeling*. Tutorials Section Updated: Three tutorials have been added to the tutorials section of the website. Disponível em <<http://www.nurbana.cx/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS++, (a) 2001] NURBS++. *The NURBS++ library is now a sourceforge project*. Disponível em <<http://yukon.genie.uottawa.ca/~lavoie/software/nurbs/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS++, (b) 2001] NURBS++. *The NURBS++ package*. Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) curves and surface are parametric functions which can represent any type of curves or surfaces. Disponível em <<http://libnurbs.sourceforge.net/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS, 2001] *NURBS*. Disponível em <<http://isal.me.ku.edu/Projects/NURBS/nurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.

- [NURBS Curves and Surfaces, 2001] *NURBS Curves and Surfaces*. A general set of classes written in Java to represent and manipulate Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS). Disponível em <<http://www.ocnus.com/NURBS/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Demo, 2001] *NURBS Demo*. Disponível em <<http://www.w3.org/People/maxf/past/research/publications/slides/munich98/demo.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Modelling, 2001] *NURBS Modelling*. This tutorial will introduce you to more NURBS modelling techniques as well as the ‘Duplicate’ tool in Maya. Disponível em <<http://www.arch.columbia.edu/gsap/8694>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS, (a) 2001] NURBS. *NonUniform Rational B-splines (NURBS)*. Weighted Euclidean coordinates are used in interactive NURBS.java applet. Disponível em <<http://www.ipm.sci-nnov.ru/~demidov/VRML/Splines/Intro/NURBS.htm>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS, (b) 2001] *NURBS*. NURBS constructions and manipulations (NLib): Creation of common curves: circles and circular arcs; conics and conic arcs; straight line segments. Disponível em <<http://www.smlib.com/NURBS.htm>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS, (c) 2001] NURBS. *NURBS for Curve and Surface Design, 2nd ed.* Disponível em <http://eros.cagd.eas.asu.edu/~farin/rbook/rbook_home.html> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Overview, 2001] NURBS Overview. *NURBS Overview*. When you need unbroken smooth surfaces use NURBS. Disponível em <<http://www.taffix.com/Tutorials/NURBSIntro/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Surface Editor, 2001] *NURBS Surface Editor*. Hence NURBS are gaining popularity for use of three dimensional computer aided design (CAD). Disponível em <<http://www.man.ac.uk/MVC/research/nurbs/editor/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Toolbox, 2001] NURBS Toolbox. *NURBS Toolbox*. NURBS - Non Uniform Rational B-Splines. The NURBS toolbox is provide free of any charges and has a GPL. Disponível em <<http://www.aria.uklinux.net/nurbs.php3>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS Webopedia.com, 2001] *NURBS Webopedia.com*. Dynamic NURBS. Describes dynamic NURBS (D-NURBS), which enable you to interactively “sculpt” curves and surfaces. Disponível em <<http://www.webopedia.com/TERM/N/NURBS.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [NURBS - Non-Uniform Rational B-Spline, 2001] *NURBS - Non-Uniform Rational B-Spline*. Non-Uniform Rational B-Spline (nurbs). A way to represent 3D objects as a math function. Disponível em <http://www.cknow.com/ckinfo/acro_n/nurbs_1.shtml> Acesso em: nov. de 2001.

- [Piegl, 1987] Piegl, L. e Tiller, W. (1987). *Curve and surface constructions using rational B-splines*, CAD, Vol. 19, No. 9 (November), pp. 485-498.
- [Piegl, 1989] Piegl, L. (1989). *Modifying the shape of rational B-splines*. Part 1: curves, CAD, Vol. 21, No. 8 (October), pp. 509-518.
- [Piegl, 1991] Piegl, L. (1991). *On NURBS: A Survey*. Jan. 01, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol 11, N^o 1, pp. 55-71
- [Piegl, 1997] Piegl, L. e Tiller, W. (1997). *The NURBS Book*, second edition, Springer-Verlag.
- [Prat, 2001] Prat, V. (2001). *FlipCode - Tutorial - NURBS Curves Surfaces*. Disponível em <http://www.flipcode.com/tutorials/tut_tnurbs.shtml> Acesso em: nov. de 2001.
- [Rhino 3D, 2001] *Rhino 3D - Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)*. Disponível em <<http://www.glasspalace.fi/rhino3d/nurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Rhinoceros, 2001] *Rhinoceros, NURBS modeling for Windows*. Rhino can create, edit, analyze, and translate NURBS curves, surfaces, and solids in Windows. Disponível em <<http://www.rhino3d.com/>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Rogers e Adams, 1990] Rogers, D. F. e Adams, A. (1990). *Mathematical Elements for Computer Graphics*, second edition, McGraw-Hill.
- [Rogers e Earnshaw, 1991] Rogers, D. F. e Earnshaw, R. A. (1991). *State of the Art in Computer Graphics - Visualization and Modeling.*, New York, AMC press, Addison-Wesley.
- [Rogers, (a) 2001] Rogers, D. F. (2001). An Introduction to NURBS. *An Introduction to NURBS C code Page*. Disponível em <<http://www.nar-associates.com/nurbs/c.code.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Rogers, (b) 2001] Rogers, D. F. (2001). An Introduction to NURBS Page. *Gaussian Curvature Hard Line, An Introduction to NURBS*. Disponível em <<http://www.nar-associates.com/nurbs/nurbs.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Shene, 2001] Shene, C. K. (2001). Bézier, Rational Bézier, B-spline and NURBS Curves. *A User Guide to the Curve Subsystem of DesignMentor*. Department of Computer Science Michigan Technological University. Disponível em <<http://www.cs.mtu.edu/~shene/COURSES/cs3621/LAB/curve/curve.html>> Acesso em: nov. de 2001.
- [Storage, 2001] Storage Requirements of Hierarchical B-Spline Surfaces. *Traditional B-spline and Bézier surfaces*. Disponível em

<<http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/forsey/dragon/stor.html>> Acesso em: out. de 2001.

[Struik, 1950] Struik, D. J. (1950). *Lectures on Classical Differential Geometry*, second edition, Dover, New York.

[Thevenaz, 2001] Thévenaz, P. (2001). MathSource: B-Spline Interpolation of Data with Regular Sampling. *B-Spline Interpolation of Data with Regular Sampling*. Disponível em <<http://www.mathsource.com/Content/Enhancements/Numerics/0211-149>> Acesso em: out. de 2001.

[Weisstein, 2001] Weisstein, E. W. (2001). *NURBS Surface - from MathWorld*. NURBS Surface, B-Spline, Bézier Curve, NURBS Curve. © 1999 CRC Press LLC, © 1999-2001 Wolfram Research, Inc. Disponível em <<http://mathworld.wolfram.com/NURBSSurface.html>> Acesso em: nov. de 2001.

[Zhao e Lowther e Shene, 1998] Zhao, Y. e Lowther, J. L. e Shene, C. K. (1998). *A Tool for Teaching Curve Design*. The Proceedings of the Twenty-ninth SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education, February 25 - March 1, Atlanta, Georgia, pp. 97-101.