

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL E ESPACIAL DA
TEORIA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELAS TÉCNICAS DA GITT E
DECOMPOSIÇÃO

por

Claudio Zen Petersen

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Novembro 2011

SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL E ESPACIAL DA
TEORIA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS PELAS TÉCNICAS DA GITT E
DECOMPOSIÇÃO

por

Claudio Zen Petersen

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômeno de Transportes

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-orientador: Prof. Dr. Piero Ravetto

Aprovada por:

Prof. Dr. Sérgio de Queiroz Bogado Leite (CNEN/RJ)

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros (UERJ/RJ)

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França (UFRGS/RS)

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França

Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 9, Novembro 2011.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida que me foi concedida.

Agradeço aos meus pais pela educação, incentivo e por tudo aquilo que fizeram e ainda fazem por mim.

Agradeço ao professor Vilhena pela orientação, apoio e confiança ao longo do trabalho.

Agradeço aos colegas do DENUC que contribuíram e participaram desta caminhada.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

Agradeço ao PROMEC pela possibilidade de cursar o doutorado.

Por fim, agradeço a Simone pela total compreensão, carinho e amor dedicados a mim.

RESUMO

Neste trabalho, relatam-se soluções analíticas para as equações da cinética da teoria de difusão de nêutrons. Para a solução das equações da cinética pontual consideram-se seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e assume-se reatividade variável como uma função arbitrária do tempo. A ideia principal consiste inicialmente na determinação da solução das equações da cinética pontual com reatividade constante apenas usando os resultados bem conhecidos para a solução de sistemas de equações diferenciais matriciais lineares de primeira ordem com entradas constantes. Com a aplicação do método de Decomposição, é possível transformar as equações da cinética pontual com reatividade variável com o tempo em um conjunto de problemas recursivos semelhantes às equações da cinética pontual com reatividade constante, o que pode ser resolvido diretamente com a técnica mencionada anteriormente. Para ilustração, apresentam-se simulações para as funções com reatividade constante, linear e senoidal, bem como comparações com resultados na literatura. Já com relação às equações da cinética espacial, consideram-se um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, modelo multigrupo de energia, meio homogêneo e dimensões espaciais bi e tridimensionais. O formalismo do procedimento da solução é geral em relação ao número de grupos de energia, famílias de precursores de nêutrons atrasados e regiões com diferentes composições químicas. O fluxo rápido e térmico e as concentrações de nêutrons atrasados são expandidos em uma série de termos de autofunções que, pela aplicação da técnica da GITT, resulta em uma equação diferencial matricial de primeira ordem semelhante às equações de cinética pontual. Por esse motivo, a solução deste problema transformado segue o formalismo do método da Decomposição aplicado às equações da cinética pontual. Por fim, apresentam-se simulações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Cinética multigrupo; equação da difusão de nêutrons; método da Decomposição; GITT; solução analítica.

ABSTRACT

In this work we report analytical solutions for the neutron kinetics diffusion equations. For the solution of the point kinetics equations we consider six groups of delayed neutron precursors and assume that the reactivity is an arbitrary function of time. The main idea initially consists in the determination of the solution of the point kinetics equations with constant reactivity by just using the well-known results of the solution of systems of first-order linear ordinary differential equations in matrix form with constant matrix entries. Applying the decomposition method, we are able to transform the point kinetics equations with time dependent reactivity into a set of recursive problems similar to the point kinetics equations with constant reactivity, which can be directly solved by the above mentioned technique. For illustration, we also report simulations for constant, linear and sinusoidal reactivity time functions of time as well as comparisons with results published in the literature. As for the space kinetics equations we consider six groups of delayed neutron precursors, energy multigroup model, homogeneous media and two and three-dimensional geometries. The solution procedure formalism is general with respect to the number of energy groups, neutron precursor families and regions with different chemical compositions. The fast and thermal flux and the delayed neutron precursors concentrations are expanded in a series in terms of eigenfunctions that, upon insertion into the kinetics equation and upon taking moments, result in a first order linear differential matrix equation with source terms similar to the point kinetics equations. The solution of this transformed problem follows the formalism of the decomposition method applied to the point kinetics equations. We present numerical simulations and comparisons with available results in the literature.

Keywords: Multigroup kinetics; neutron diffusion equation; Decomposition method; GITT; analytical solution.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA DA TEORIA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS.....	7
2.1 EQUAÇÃO MULTIGRUPO DE ENERGIA DA TEORIA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS	7
2.1.1 Cálculos de criticalidade	10
2.1.2 Equação multigrupo da difusão de nêutrons com fonte de fissão (problema de autovalor)	11
2.1.3 Equação da difusão de nêutrons a dois grupos de energia (problema de autovalor) .	12
2.2 CINÉTICA DE REATORES NUCLEARES.....	13
2.2.1 A importância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética	14
2.2.2 Derivação das equações da cinética pontual	17
3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO.....	23
3.1 O MÉTODO CLÁSSICO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN.....	23
3.2 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO	25
3.3 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	29
3.3.1 Critério de Lyapunov	30
3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS	31
3.4.1 Caso A. Reatividade Constante.....	31
3.4.2 Caso B. Reatividade variável com o tempo	33
4. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA ESPACIAL.....	40
4.1 A GITT.....	41
4.2 O PROBLEMA 2D.....	45
4.3 O PROBLEMA 3D.....	52
4.4 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA E UNICIDADE PARA O PROBLEMA AUXILIAR.....	55
4.5 RESULTADOS NUMÉRICOS	57
4.5.1 Caso teste para o problema 2D.....	58
5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
APÊNDICE A - DIFUSÃO ESTACIONÁRIA DE NÊUTRONS	82
A.1 O PROBLEMA DE DIFUSÃO ESTACIONÁRIO DE NÊUTRONS	82
APÊNDICE B - TESTE DE ABEL.....	88
B.1 CRITÉRIO DE CAUCHY PARA A CONVERGÊNCIA UNIFORME.....	88

B.2 TESTE DE ABEL PARA CONVERGÊNCIA UNIFORME	89
ANEXO A - POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV	93

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Variação da energia para um grupo de energia g	7
Figura 2.2 - Esquema multigrupo de energia.	8
Figura 2.3 - Caracterização dos grupos de energia para um reator térmico.	12
Figura 3.1 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at$	35
Figura 3.2 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at + bt^2$	37
Figura 3.3 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = 0,00073 \text{ sen}(t)$	39
Figura 4.1 - Distribuição do fluxo térmico de nêutrons para $t = 0,4 \text{ s}$	60
Figura 4.2 - Distribuição do fluxo rápido de nêutrons para $t = 0,4 \text{ s}$	61
Figura 4.3 - Potência normalizada para uma rampa linear considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.	62
Figura 4.4 - Potência normalizada para uma rampa linear considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.	62
Figura 4.5 - Potência normalizada para uma rampa linear seguida de uma perturbação uniforme considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.	64
Figura 4.6 - Potência normalizada para uma rampa linear seguida de uma perturbação uniforme considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.....	65
Figura 4.7 - Potência normalizada para uma perturbação senoidal considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.	66
Figura 4.8 - Potência normalizada para uma perturbação senoidal considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.	67
Figura 4.9 - Fluxo térmico para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$	69
Figura 4.10 - Fluxo rápido para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$	70
Figura 4.11 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo rampa linear para um grupo de precursor.	71
Figura 4.12 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo oscilatória para um grupo de precursores considerando $\alpha = 0,396 \times 10^{-3}$	72
Figura 4.13 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo oscilatória para um grupo de precursor considerando $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Parâmetros nucleares dos precursores de nêutrons atrasados para alguns núcleos.	15
Tabela 3.1 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.	31
Tabela 3.2 - Densidade de nêutrons entre diferentes tempos de geração Λ para reatividades constantes $\rho(t) = \rho_0$	32
Tabela 3.3 - Comparação dos resultados numéricos com $\Lambda = 0,00002s$ para diferentes reatividades constantes $\rho(t) = \rho_0$	33
Tabela 3.4 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.....	34
Tabela 3.5 - Densidade de nêutrons para reatividade do tipo rampa $\rho(t) = at$ para um tempo de geração de $\Lambda = 0,00001s$	34
Tabela 3.6- Satisfação do critério de Lyapnouv para os R sistemas recursivos com o uso da continuação analítica para $\rho = 0,5t$, $t = 1s$ e $h = 0,25s$	36
Tabela 3.7 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.	36
Tabela 3.8- Parâmetros nucleares para um reator térmico.	37
Tabela 3.9- Comparação dos resultados numéricos para densidade de nêutrons com reatividade senoidal $\rho(t) = 0,00073 \text{ sen}(t)$	38
Tabela 4.1 - Parâmetros nucleares.....	59
Tabela 4.2 - Parâmetros nucleares para seis grupos de precursores.....	59
Tabela 4.3 - Comparação numérica do fluxo térmico de nêutrons no centro do domínio (100, 100, t) para diferentes tempos.	60
Tabela 4.4 - Distribuição do fluxo de nêutrons para $t = 0,4s$	60
Tabela 4.5 - Fluxo de nêutrons rápido no centro do domínio (100, 100, t) para diferentes tempos.....	61
Tabela 4.6 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4s$	63
Tabela 4.7 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4s$	64
Tabela 4.8 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4s$	65
Tabela 4.9 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4s$	66
Tabela 4.10 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $T = 0,28s$ e $t = 0,4s$	67
Tabela 4.11 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $T = 0,28s$ e $t = 0,4s$	68

Tabela 4.12 - Comparação numérica do fluxo térmico no centro do reator (100, 100, 100, t) para diferentes tempos.....	69
Tabela 4.13 - Distribuição do fluxo de nêutrons para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$	69
Tabela 4.14 - Fluxo de nêutrons rápido no centro do domínio (100, 100, 100,t) para diferentes tempos.....	70

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AEM	Analytical Exponential Method
CNEN	Comissão Nacional de Energia Nuclear
GAEM	Generalized Analytical Exponential Method
GITT	Generalized Transform Integral Technique
GITTDM	Generalized Transform Integral Technique Decomposition Method
GRK	Generalized Runge-Kutta Method
PROMEC	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
PWS	Power Series Solution
SCM	Stiff Confinement Method
UERJ	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Operador diferencial de segunda ordem
\mathbf{A}	Matriz de entradas constantes
A_{kj}	Polinômios de Adomian
B^2	“Buckling” material, cm^{-2}
$C(t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados no tempo t , cm^{-3}
$C_i(\mathbf{r}, t)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição \mathbf{r} para o grupo i de precursores no tempo t , cm^{-3}
$C_i(\mathbf{r}, 0)$	Concentração de precursores de nêutrons atrasados na posição \mathbf{r} para o grupo i de precursores no tempo $t = 0$ s, cm^{-3}
\mathbf{D}	Matriz diagonal dos autovalores
\mathbf{D}_0	Matriz diagonal com entradas constantes
$\mathbf{D}_1(t)$	Matriz diagonal com entradas dependentes do tempo
D	Coefficiente de difusão de nêutrons, cm
$D(\mathbf{r}, t)$	Coefficiente de difusão de nêutrons na posição \mathbf{r} no tempo t , cm
$D(\mathbf{r})$	Coefficiente de difusão de nêutrons na posição \mathbf{r} , cm
$D_g(\mathbf{r}, t)$	Coefficiente de difusão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t , cm
D_1	Coefficiente de difusão de nêutrons do grupo rápido, cm
D_2	Coefficiente de difusão de nêutrons do grupo térmico, cm
f	Funções não lineares
G	Número de grupo de energia
g	Grupos de energia
g	Funções conhecidas
l	Tempo médio de vida do nêutron, s
L	Comprimento de difusão de nêutrons, cm
L	Operador associado ao problema de Sturm Liouville
L	Dimensão espacial na direção x , cm

k_{eff}	Coeficiente de multiplicação efetivo, $\left[\frac{v \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B^2} = \frac{k_\infty}{1 + L^2 B^2} \right]$
k_∞	Coeficiente de multiplicação infinito, $\left[\frac{v \Sigma_f}{\Sigma_a} \right]$
M	Dimensão espacial na direção y , cm
m	Inteiro positivo
$n(t)$	Densidade de nêutrons no tempo t , cm^{-3}
$n(0)$	Densidade de nêutrons no tempo $t = 0$ s, cm^{-3}
N	Quadrado da Norma
N_{max}	Ordem de truncamento das séries
P	Número de grupos de precursores de nêutrons atrasados
p	Função real e contínua
Q	Dimensão espacial na direção z , cm
$Q_g(\mathbf{r}, t)$	Fonte de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t , $cm^{-3} \times s^{-1}$
Q_g^{ext}	Fonte externa de nêutrons, $cm^{-3} \times s^{-1}$
q	Função real e contínua
R	Ordem de truncamento do problema transformado
t	Tempo, s
T	Período, s
v	Velocidade do nêutron, cm / s
v_g	Velocidade do nêutron do grupo g , cm / s
v_1	Velocidade do nêutron do grupo térmico, cm / s
v_2	Velocidade do nêutron no grupo rápido, cm / s
${}_{92}U^{235}$	Elemento Urânio 233
${}_{92}U^{235}$	Elemento Urânio 235
U	Matriz dos elementos restantes fora da diagonal
V	Volume arbitrário
$W(t)$	Matriz do problema transformado com entradas dependente do tempo
X	Matriz dos autovetores

\mathbf{X}^{-1}	Matriz inversa dos autovetores
\mathbf{Y}	Vetor solução desconhecido
β	Fração de nêutrons atrasados
β_i	Fração de nêutrons atrasados para o grupo i de precursores
γ	Autovalor
Δr	Variação da dimensão espacial do domínio
ε	Parâmetro de valor pequeno e positivo
Λ	Tempo médio de geração entre o nascimento do nêutron e posterior absorção, s
λ	Constante de decaimento, s^{-1}
λ	Autovalor
λ_i	Constante de decaimento para o grupo i de precursores, s^{-1}
η	Autofunção
ν	Número médio de nêutrons produzidos na fissão
ν_g	Número médio de nêutrons produzidos na fissão do grupo g
ν'_g	Número médio de nêutrons produzidos na fissão do grupo g'
ν_1	Número médio de nêutrons produzidos na fissão do grupo rápido
ν_2	Número médio de nêutrons produzidos na fissão do grupo térmico
ρ	Reatividade, $\left[\frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \right]$
Σ_a	Seção de choque macroscópica de absorção, cm^{-1}
$\Sigma_a(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de absorção na posição \mathbf{r} no tempo t , cm^{-1}
Σ_{a1}	Seção de choque macroscópica de absorção do grupo rápido, cm^{-1}
Σ_{a2}	Seção de choque macroscópica de absorção do grupo térmico, cm^{-1}
$\Sigma_{a2}(\mathbf{r})$	Seção de choque macroscópica de absorção na posição \mathbf{r} do grupo térmico, cm^{-1}
$\Sigma_{a2}(0)$	Seção de choque macroscópica de absorção no grupo 2 no estado estacionário, cm^{-1}

Σ_f	Seção de choque macroscópica de fissão, cm^{-1}
$\Sigma_f(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de fissão na posição \mathbf{r} no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_f(\mathbf{r})$	Seção de choque macroscópica de fissão na posição \mathbf{r} , cm^{-1}
$\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de fissão na posição \mathbf{r} do grupo g' no tempo t , cm^{-1}
Σ_{f1}	Seção de choque macroscópica de fissão do grupo rápido, cm^{-1}
Σ_{f2}	Seção de choque macroscópica de fissão do grupo térmico, cm^{-1}
Σ_R	Seção de choque macroscópica de remoção, cm^{-1}
$\Sigma_{Rg}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de remoção na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{R1}(\mathbf{r})$	Seção de choque macroscópica de remoção na posição \mathbf{r} do grupo rápido, cm^{-1}
$\Sigma_{R2}(\mathbf{r})$	Seção de choque macroscópica de remoção na posição \mathbf{r} do grupo térmico, cm^{-1}
Σ_s	Seção de choque macroscópica de espalhamento, cm^{-1}
$\Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de espalhamento na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{sg'}(\mathbf{r}, t)$	Seção de choque macroscópica de espalhamento na posição \mathbf{r} do grupo g para o grupo g' no tempo t , cm^{-1}
$\Sigma_{s12}(\mathbf{r})$	Seção de choque macroscópica de espalhamento na posição \mathbf{r} do grupo rápido para o grupo térmico, cm^{-1}
Σ_T	Seção de choque macroscópica total, cm^{-1}
Σ_{Tg}	Seção de choque macroscópica total no grupo g , cm^{-1}
τ	Autovalor
$\phi(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} no tempo t , $cm^{-2}s^{-1}$
$\phi(\mathbf{r})$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} , $cm^{-2}s^{-1}$

$\phi_g(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t , $cm^{-2}s^{-1}$
$\phi_g(\mathbf{r}, 0)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo $t = 0$ s, $cm^{-2}s^{-1}$
$\phi_1(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo rápido no tempo t , $cm^{-2}s^{-1}$
$\phi_2(\mathbf{r}, t)$	Fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo térmico no tempo t , $cm^{-2}s^{-1}$
φ	Autofunção
χ_g	Espectro de fissão para o grupo g
ψ	Autofunção
Ω	Função quadrado integrável
∇	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergente
∇^2	Laplaciano
$\ \cdot\ $	Norma do máximo

1. INTRODUÇÃO

Para um reator nuclear operar em um nível de potência constante, a taxa de produção via fissão de nêutrons deverá ser balanceada pela perda via absorção ou fuga de nêutrons. Isto equivale a dizer que a densidade neutrônica ou o fluxo não depende do tempo. Esse é conhecido como o estado crítico de um reator. Algum desvio dessa condição de balanço resultará em uma dependência temporal da população de nêutrons e, conseqüentemente, uma variação temporal da potência do reator. Isso pode acontecer devido a uma série de fatores. Por exemplo, quando se deseja ligar ou desligar um reator, ou quando se deseja mudar o nível de potência em que o reator está funcionando, o que é muito frequente nas usinas geradoras de eletricidade; nesse caso a potência do reator variará ao longo do tempo e, conseqüentemente, a densidade e o fluxo de nêutrons. Ao estudo do comportamento de um reator cuja densidade e o fluxo variam com o tempo chama-se de cinética de reator.

Dentro da teoria de difusão de nêutrons, as equações que governam a dinâmica temporal e espaço-temporal da população de nêutrons são chamadas equações de cinética.

As equações da cinética da teoria da difusão dividem-se em: equações da cinética pontual e equações da cinética espacial.

As equações da cinética pontual envolvem exclusivamente a variação da amplitude do fluxo com o tempo, ou seja, assumem total separabilidade no tempo e no espaço, na qual a forma espacial do fluxo é conhecida o que torna essas equações exclusivamente dependentes do tempo. O modelo da cinética pontual ainda tem um papel relevante em física de reatores na medida em que pode ser utilizado, quando devidamente resolvido, para uma previsão de tempo quase real da potência do reator, o que permite um controle em tempo útil e de intervenção na planta, a fim de evitar a ocorrência de acidentes graves [Buzano, 1985]. Quando as equações da cinética pontual têm coeficientes constantes, soluções analíticas são facilmente estabelecidas [Aboanber, 2002; Zhangsheng et al. 2006], mas elas tornam-se complicadas quando os coeficientes variam com o tempo.

A rigidez é uma grande dificuldade em resolver numericamente as equações da cinética devido à grande diferença em magnitude entre os tempos de vida média dos nêutrons prontos e atrasados, o que resulta na exigência de incrementos muito pequenos no intervalo de tempo na resolução por métodos numéricos. Tem havido um grande esforço na investigação sobre a eliminação do problema da rigidez. Existem vários métodos, especialmente adaptados

para resolver os problemas de valor inicial para sistemas rígidos de equações diferenciais ordinárias. Dentre os métodos numéricos citamos: o de integração usando a regra de Simpson [Keepin e Cox, 1960], o método dos elementos finitos [Kang e Hansen, 1973; Zhiyuan, 1981], o método de Runge Kutta [Allerd e Carter, 1958; Sánchez, 1989], o método quase-estático [Ott e Meneley, 1969; Koclas et al., 1996], o método singular de perturbação [Hendry e Bell, 1969; Goldstein e Shotkin, 1969; Bienski et al., 1978] e o método de diferenças finitas [Brown, 1957]. A maioria destes métodos funcionam com sucesso em alguns problemas específicos, mas continuam a ter desvantagens como mencionado por [Vigil, 1967]. Essas limitações concentram-se no passo de tempo máximo admissível para assegurar a estabilidade computacional. Para transientes lentos em reatores rápidos, mesmo a continuação analítica mostrado em [Vigil, 1967] deve ser mudada no seu procedimento básico para alcançar a computação eficiente e incapacidade de resolver as equações da cinética pontual em sua generalidade completa. Devido a esse problema, [Chao e Attard, 1985] desenvolveram o método de confinamento da rigidez (SCM). [Basken e Lewins, 1996] introduziram a solução das equações da cinética pontual por uma série de potências com a reatividade variando com o tempo. [Aboanber e Hamada, 2003] desenvolveram o método PWS (solução em séries de potência) para resolver as equações de cinética pontual com acoplamento dos efeitos da temperatura newtoniana. Diversos outros métodos têm sido implementados por diversos pesquisadores tais como [Nóbrega 1971], [Lawrence e Doring 1976], e [Aboanber e Nahla 2004].

Alterações nas propriedades nucleares que ocorrem durante um transiente podem causar alterações na distribuição da população de nêutrons tanto no espaço como em energia. A fonte fundamental de desvio no modelo da cinética pontual é a falta de elementos responsáveis por estas alterações na distribuição espacial do fluxo de nêutrons.

Experimentos numéricos realizados por Yasinsky e Henry [Yasinsky e Henry, 1965] demonstraram claramente a inadequação das equações da cinética pontual e necessidade de modelos mais sofisticados, o que despertou o interesse para a questão dos problemas de cinética com dependência espacial. Desde então, foram feitas muitas análises comparativas entre a cinética pontual e aproximações espaciais, o que proporcionou uma melhor compreensão da aplicabilidade de cada modelo.

As equações da cinética espacial, utilizando a teoria da difusão multigrupo de energia a uma, duas ou três-dimensões têm sido aceitas pela maioria dos pesquisadores em física de

reatores como a melhor aproximação para a predição do comportamento dos nêutrons em um reator nuclear. Vários métodos têm sido desenvolvidos por muitos pesquisadores para encontrar uma solução numérica para as equações da cinética espacial, já que uma solução analítica completa dessas equações não se tem conhecimento. Estes métodos geralmente são classificados como: métodos de diferenças finitas [Chou et al., 1990; Urku e Christenson, 1994; Jagannathan, 1985 a, b], método dos elementos finitos [Koclas, 1998], síntese nodal ou métodos de expansão [Kaplan, 1962; Dougherty e Shen, 1962; Kaplan et al., 1964; Yasinsky, 1967; Yasinsky e Kaplan, 1967; Stacey, 1968; Jagannathan, 1985a, b; Crouzet, 1996], os métodos de malha nodal [Ott, 1969; Dodds, 1976; Camiciola et al., 1986; Koclas et al., 1997; Dahmani et al., 2001], que mais tarde evoluiu para os métodos quase-estático e métodos adiabáticos. Uma ampla classe de métodos chamados métodos semi-implícitos para a solução das equações de cinética espacial são examinados por Reed e Hansen [Reed e Hansen, 1970]. Para melhorar a precisão e permitir uma maior eficiência computacional, uma classe de métodos de Runge-Kutta generalizados foi desenvolvida para tratar das deficiências dos tradicionais Runge-Kutta de Kaps [Kaps e Rentrop, 1979]. No entanto, os métodos de Kaps e Rentrop foram aplicados com sucesso por [Sanchez, 1989] e [Kelly e Harris, 1991]. Recentemente, um método de Runge-Kutta estável generalizado foi desenvolvido por [Aboanber e Hamada, 2008] para resolver as equações da cinética espacial.

A fim de desenvolver métodos que possam prever o comportamento da população de nêutrons no núcleo de um reator nuclear com suficiente precisão e confiabilidade, soluções analíticas são necessárias. A motivação por trás do desenvolvimento de métodos analíticos para resolver as equações da cinética não é apenas o desafio de desenvolver um método para resolver um conjunto de equações diferenciais acopladas, mas também uma necessidade real para prever o desempenho e avaliar a segurança de reatores nucleares de potência, tanto estes atualmente em funcionamento quanto aqueles que estão sendo projetados para o futuro. Além da possibilidade de se obter uma solução em forma fechada, a solução analítica possui uma aptidão relevante para gerar soluções “*benchmark*”, para validar códigos computacionais. Além disso, a solução analítica de certa forma elimina ou pelo menos atenua a avaliação do desvio exigido por métodos numéricos. A título de ilustração da literatura sobre soluções analíticas, citam-se os trabalhos de [Bodmann et al., 2010], [Ceolin, 2010], [Petersen et al., 2009] e [Vilhena et al., 2008].

Dentro desse contexto, esta tese enquadra-se no objetivo de resolver em forma analítica as equações da cinética pontual com reatividade variável a seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e as equações da cinética espacial bi e tridimensionais com dois grupos de energia, seis grupos de precursores de nêutrons atrasados e dependência temporal dos parâmetros nucleares.

Para resolver as equações da cinética pontual para uma reatividade variável com o tempo, aplica-se o método da Decomposição [Adomian, 1988], [Adomian, 1996], [Adomian, 1994], [Eugene, 1993]. A ideia principal compreende as seguintes etapas: expandir a densidade de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada, substituir estas expansões nas equações da cinética pontual e construir um conjunto de sistemas recursivos de equações diferenciais de primeira ordem semelhante às equações da cinética pontual com coeficientes constantes. A solução deste sistema recursivo é prontamente obtida utilizando-se soluções conhecidas para equações diferenciais matriciais de primeira ordem linear com entradas constantes. Esta técnica foi utilizada recentemente por [Petersen, et al, 2009].

Uma vez encontrada as soluções para as equações da cinética pontual, resultados numéricos são gerados e comparados com algumas metodologias encontradas da literatura para a validação do método. Alguns casos teste são elaborados para verificação e análise do comportamento da solução obtida. A convergência é assegurada satisfazendo o critério de Lyapunov.

Para resolver as equações da cinética espacial bi e tridimensionais com o modelo de difusão, aplica-se a técnica da GITT (Generalized Integral Transform Technique) nas coordenadas espaciais. A ideia básica compreende as seguintes etapas: expandir os fluxos de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em séries em termos de autofunções. Substituir estas séries na equação da cinética espacial, multiplicando a equação resultante por autofunções e utilizar a propriedade da ortogonalidade, resultando assim em uma equação diferencial ordinária linear matricial conhecida como problema transformado. Este problema transformado é resolvido de forma análoga às equações da cinética pontual, seguindo a ideia do método da Decomposição. Para problemas de ordem superior, a resolução do problema transformado pode ser tratada dividindo a matriz que aparece no problema transformado como soma de uma matriz diagonal, mais a matriz restante dos demais termos.

Essa reformulação do problema transformado permite trabalhar com matrizes de ordem muito elevada, uma vez que a exponencial de uma matriz diagonal é facilmente estabelecida.

A técnica da GITT é uma metodologia bem estabelecida para resolver analiticamente as equações diferenciais parciais lineares para uma ampla classe de problemas na área de física e engenharia. Por analítico quer se dizer que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação da solução, a não ser o truncamento das expansões em séries. A ideia principal dessa abordagem consiste na construção de um par de transformações a partir dos termos adjuntos do laplaciano que aparecem na equação diferencial a ser resolvida. Esse fato nos permite escrever a solução como uma expansão em série em termos de autofunções ortogonais, obtidas da solução de um problema de Sturm-Liouville auxiliar, construído a partir dos termos adjuntos. A ortogonalidade das autofunções completa o par de transformações. Existe uma vasta literatura sobre este método na qual mencionam-se os livros de [Cotta, 1993], [Cotta e Mikhaylov, 1997] e [Cotta, 1998].

O modelo multigrupo de cinética espacial da teoria de difusão de nêutrons foi implementado considerando dois grupos de energia e seis grupos de precursores para os nêutrons atrasados. Para problemas deste tipo, encontra-se uma literatura predominantemente baseada em esquemas numéricos para soluções aproximadas. Em princípio, não existe nenhuma tentativa até agora que se concentre em uma solução exata para o referido problema, com exceção de abordagens analíticas feitas por [Oliveira, 2007], [Corno, 2008], [Dulla et al., 2007] e recentemente [Petersen et al., 2011 a].

Neste trabalho, a solução das equações da cinética espacial de difusão de nêutrons é obtida de forma geral, no sentido que extensões para mais grupos energia, mais grupos de precursores de nêutrons atrasados e problemas heterogêneos com diferentes composições químicas não demandam por modificações significativas da solução, a não ser o número de termos do sistema de equações.

Uma vez estabelecida a solução das equações da cinética espacial, aplica-se a solução a casos numéricos para validação da metodologia. Casos testes são elaborados para verificar o comportamento da solução. Para completar a análise matemática, discute-se a convergência, utilizando uma analogia com o Teorema de Interpolação Cardinal. O teste de Abel reforça a convergência uniforme.

A presente tese encontra-se estruturada da seguinte maneira: no capítulo 2, apresentam-se alguns conceitos sobre a física de reatores, bem como a derivação das

principais equações de interesse nesta tese. No capítulo 3, mostra-se a solução analítica e os resultados numéricos para as equações da cinética pontual para seis grupos de precursores de nêutrons atrasados considerando uma reatividade constante e variável com o tempo. No capítulo 4, apresentam-se a solução analítica e os resultados numéricos para as equações da cinética espacial, considerando dimensões espaciais bi e tridimensionais, dois grupos de energia, um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, reatividade constante e variável com o tempo. No capítulo 5, apresentam-se as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros. No apêndice A, mostra-se a obtenção da solução do problema estacionário da difusão de nêutrons em forma analítica. Por fim, no apêndice B, demonstra-se o teste de Abel para a convergência uniforme.

2. AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA DA TEORIA DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS

2.1 Equação multigrupo de energia da teoria de difusão de nêutrons

Aplicando o conceito de balanço de nêutrons para um dado grupo de energia, na qual nêutrons podem entrar ou sair deste grupo tem-se uma maneira de chegar às equações multigrupo de energia. Considerando um típico grupo de energia g , conforme Figura 2.1.

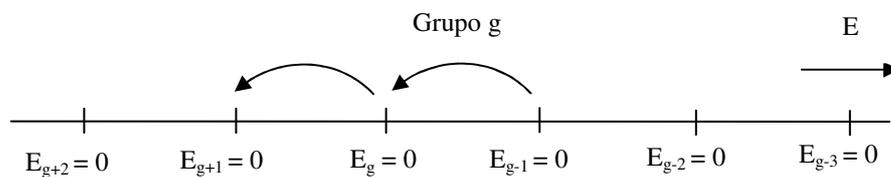


Figura 2.1 - Variação da energia para um grupo de energia g .

Na Figura 2.1, os índices estão ordenados de forma decrescente, pois correspondem fisicamente ao fato de que usualmente os nêutrons perdem energia no processo “migratório”. Assim, os nêutrons da fissão “nascem” nos grupos de alta energia e passam para grupos de energias menores, à medida que sofrem colisões com núcleos leves.

A principal limitação do modelo monoenergético é assumir que todos os nêutrons possuem a mesma energia cinética, por isso, este modelo simplificado também recebe a denominação de modelo a uma velocidade. Os nêutrons em um reator possuem energias que variam de 10 MeV para menos do que $0,01 \text{ eV}$. Assim, há aproximadamente umas nove ordens de magnitude de variação na energia dos nêutrons [Duderstadt e Hamilton, 1976]. Por isso, para cálculos globais em física de reatores, precisa-se de um tratamento mais realístico da dependência da energia. Neste caso, o fluxo de nêutrons dependerá de energia, mas, ao invés de tratar a energia E do nêutron como variável contínua, discretiza-se o domínio energético em intervalos ou grupos contíguos. Isto é, divide-se o domínio energético em G grupos de energia, conforme a Figura 2.2.

Na Figura 2.2, os índices estão ordenados de forma decrescente, pois correspondem fisicamente ao fato de que usualmente os nêutrons perdem energia no processo “migratório”.

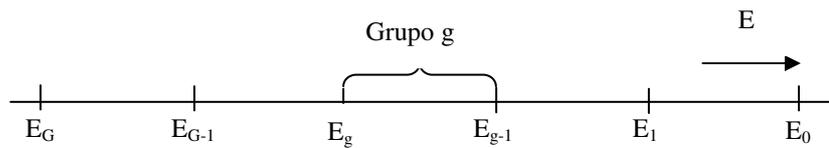


Figura 2.2 - Esquema multigrupo de energia.

Portanto, tem-se o seguinte balanço:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{l} \text{Taxa de variação do} \\ \text{fluxo de nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] &\equiv - \left[\begin{array}{l} \text{Perda devido à} \\ \text{fuga} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Perda devido à} \\ \text{absorção no grupo } g \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{l} \text{Fonte de} \\ \text{nêutrons} \\ \text{no grupo } g \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para fora do} \\ \text{grupo } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Espalhamento de} \\ \text{nêutrons para dentro do} \\ \text{grupo } g \end{array} \right] \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Esse balanço pode ser usado para chegar às equações multigrupo de energia da difusão de nêutrons que aparecem como:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + Q_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\
 &+ \sum_{g \neq g}^G \Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

para $g = 1:G$ na qual:

- $\phi_g(\mathbf{r}, t)$ representa o fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;
- v_g representa a velocidade dos nêutrons no grupo g ;
- $D_g(\mathbf{r}, t)$ representa o coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;
- $\Sigma_{ag}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;
- $Q_g(\mathbf{r}, t)$ representa a fonte de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g no tempo t ;

$\Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g para o grupo g' no tempo t ; isto é, $\Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t) = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sgg'}$.

$\Sigma_{sgg}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' para o grupo g no tempo t ;

Pode-se separar o termo fonte de nêutrons em dois: um devido às fissões e outro devido a uma fonte externa, então se escreve:

$$Q_g(\mathbf{r}, t) = \chi_g \sum_{g' \neq g}^G \nu_{g'} \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + Q_g^{ext}, \quad (2.3)$$

na qual:

χ_g representa a fração de nêutrons que aparece no grupo g ;

$\nu_{g'}$ representa o número médio de nêutrons emitidos na fissão no grupo g' ;

$\Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição \mathbf{r} do grupo g' no tempo t ;

Q_g^{ext} representa a fonte externa de nêutrons;

G representa o número de grupo de energia.

Considerando somente um grupo de energia (modelo monoenergético), e, na ausência de fonte externa, a equação (2.2) torna-se a forma simplificada:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.4)$$

na qual:

$\phi(\mathbf{r}, t)$ representa o fluxo escalar de nêutrons na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

v representa a velocidade dos nêutrons;

$D(\mathbf{r}, t)$ representa o coeficiente de difusão na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

$\Sigma_a(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque de absorção na posição \mathbf{r} e no tempo t ;

ν representa o número médio de nêutrons emitidos na fissão;
 $\Sigma_f(\mathbf{r}, t)$ representa a seção de choque de fissão na posição \mathbf{r} e no tempo t .

2.1.1 Cálculos de criticalidade

Os nêutrons emitem num processo de fissão um número ν de nêutrons em média por fissão nuclear. Destes ν nêutrons, alguns são absorvidos no meio material não combustível do reator, alguns são absorvidos por captura no próprio combustível e alguns desaparecem pelo contorno do reator. Depois de todas essas perdas serem contabilizadas, ainda deve existir um nêutron para causar uma nova fissão, caso contrário, não será possível manter uma reação em cadeia sustentável. Deseja-se manter a distribuição de nêutrons em um reator na ausência de fontes externas, mas na presença de uma fonte fissionável. Esta fonte é dada pelo produto da taxa de fissão $\Sigma_f(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})$ pelo número de nêutrons emitidos por fissão, onde Σ_f é a seção de choque macroscópica de fissão.

Pode-se escrever a fonte de nêutrons como:

$$\text{Fonte Reator} \equiv \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Considerando que a equação da difusão monoenergética (2.4) seja um modelo matemático satisfatório para cálculos neutrônicos em reatores nucleares e desconsiderando a variação temporal da população de nêutrons, fica-se com:

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Infelizmente a equação acima não tem solução de relevância física para casos gerais realísticos, a menos que se corrija a combinação exata da composição e geometria do reator, para que o mesmo esteja crítico. Portanto, o que se faz é introduzir um parâmetro arbitrário k nesta equação de tal forma que:

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Logo, para algum valor de k , pode-se garantir relevância física. Se $k = 1$, a equação (2.7) reduz-se a (2.6) e, portanto, consegue-se um sistema crítico. Se $k \neq 1$, entretanto, precisa-se escolher uma nova combinação entre dimensão e composição, para que se atinja a criticalidade. Claramente, haverá em geral um conjunto de autovalores para a equação (2.7), na qual apenas o maior destes autovalores, ou seja, o autovalor dominante corresponderá a uma autofunção $\phi(\mathbf{r})$ que seja não-negativa em todos os pontos do sistema e, portanto, fisicamente relevante. Define-se o autovalor dominante como o fator de multiplicação efetivo (k_{eff}) que indicará se o sistema está em estado subcrítico ($k_{eff} < 1$), crítico ($k_{eff} = 1$) ou supercrítico ($k_{eff} > 1$). Assim, pode-se reescrever a equação (2.7) como:

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}) + \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad . \quad (2.8)$$

A equação (2.8) é conhecida como equação estacionária do modelo monoenergético da difusão de nêutrons.

2.1.2 Equação multigrupo da difusão de nêutrons com fonte de fissão (problema de autovalor)

Ignorando a dependência do tempo e na ausência de fonte externa, tem-se o problema de autovalor para as equações multigrupo da difusão de nêutrons conforme [Duderstadt e Hamilton, 1976]:

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \Sigma_{Rg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g=1}^G \Sigma_{sg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) + \frac{1}{k_{eff}} \chi_g \sum_{g=1}^G \nu_g \Sigma_{fg}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}), \quad (2.9)$$

para $g = 1:G$. A equação (2.9) é conhecida como a equação estacionária multigrupo da difusão de nêutrons. Ela forma um sistema de G equações diferenciais parciais cuja solução fundamental $\phi_g(\mathbf{r})$ é definida como o fluxo escalar de nêutrons que está no grupo g de energia no núcleo do reator nuclear. O autovalor dominante é definido como o fator de multiplicação efetivo do reator (k_{eff}) e pode também ser interpretado como o número pelo qual se pode dividir as equações multigrupo de difusão para que representem um balanço perfeito

de nêutrons. Isto é, se em cada grupo de energia onde houver fissão nuclear forem emitidos um número médio de nêutrons $\nu'_g = \nu_g / k_{eff}$, então a equação (2.9) representa um balanço perfeito de nêutrons para a geometria, dimensão e composição do sistema multiplicativo para o modelo multigrupo da difusão.

2.1.3 Equação da difusão de nêutrons a dois grupos de energia (problema de autovalor)

Em cálculos globais de reatores nucleares térmicos, é convencional usar apenas dois grupos de energia. A estrutura dos grupos pode ser vista conforme a Figura 2.3.

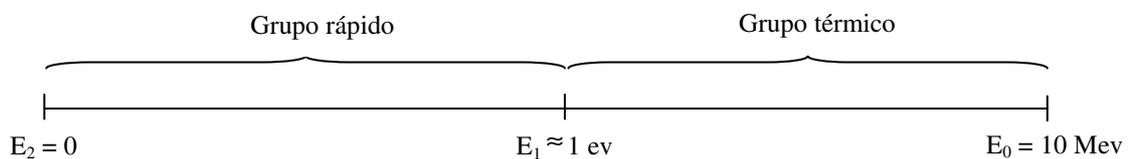


Figura 2.3 - Caracterização dos grupos de energia para um reator térmico.

Fica claro que o “up-scattering” fora do grupo térmico pode ser ignorado, devido à alta diferença de energia para o grupo rápido. Então se pode identificar:

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \int_{E_1}^{E_0} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \text{fluxo rápido} \quad (2.10)$$

e

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) = \int_{E_2}^{E_1} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \equiv \text{fluxo térmico} . \quad (2.11)$$

Pode-se simplificar o grupo de constantes para este modelo. Considera-se primeiramente a fissão, que ocorre essencialmente no grupo térmico, gerando nêutrons no grupo rápido. Portanto, pode-se escrever:

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} dE \chi(E) = 1 \quad , \quad \chi_2 = \int_{E_2}^{E_1} dE \chi(E) = 0 \quad . \quad (2.12)$$

Assim, a fonte de fissão apenas aparecerá na equação do grupo rápido como:

$$Q_{f_1} = \nu_1 \sum_{f_1} \phi_1 + \nu_2 \sum_{f_2} \phi_2 \quad (\text{rápido}) \quad (2.13)$$

e

$$Q_{f_2} = 0 \quad (\text{térmico}). \quad (2.14)$$

Considerando que não há “up-scattering” para fora do grupo térmico, dois grupos de energia para o cálculo da criticalidade e na ausência de fonte externa, fica-se com as seguintes equações multigrupo do problema estacionário conforme [Duderstadt e Hamilton, 1976]:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_1(\mathbf{r}) \nabla \phi_1(\mathbf{r}) + \Sigma_{R1}(\mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_{eff}} \left(\nu_1 \sum_{f1}(\mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{r}) + \nu_2 \sum_{f2}(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) \right) \\ -\nabla \cdot D_2(\mathbf{r}) \nabla \phi_2(\mathbf{r}) + \Sigma_{a2}(\mathbf{r}) \phi_2(\mathbf{r}) &= \Sigma_{s12}(\mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 Cinética de reatores nucleares

Para um reator nuclear operar em um nível de potência constante, a taxa de produção via fissão de nêutrons deverá ser balanceada pela perda via absorção ou fuga de nêutrons. Isto equivale a dizer que a densidade neutrônica ou o fluxo não depende do tempo. Esse é conhecido como o estado crítico de um reator. Algum desvio dessa condição de balanço resultará em uma dependência temporal da população de nêutrons e, conseqüentemente, uma variação temporal da potência do reator. Ao estudo do comportamento de um reator cuja densidade ou fluxo variam com o tempo, chama-se de cinética de reator.

Deve-se reconhecer que as mudanças no comportamento da população neutrônica, muitas vezes, não estão sob o controle do operador do reator. Em alguns casos, isso dependerá da composição do núcleo, que dependerá também de outras variáveis que não estão diretamente acessíveis ao controle, tais como a temperatura do combustível ou refrigerante. Entretanto, essas variáveis dependem, por sua vez, do nível de potência do reator e, conseqüentemente, do fluxo de nêutrons. O estudo dessas causas intrínsecas do comportamento da população de nêutrons é chamado de dinâmica de reator nuclear. Nesta tese, dá-se ênfase à cinética de reator nuclear, mais especificamente às variações do fluxo de nêutrons devido a escalas pequenas de tempo, ou seja, o afastamento da criticalidade devido a mudanças nos parâmetros nucleares para tempos pequenos.

2.2.1 A importância dos nêutrons atrasados nas equações da cinética

A fissão nuclear dá origem a fragmentos que são elementos com menor número de massa do que o núcleo original. Alguns desses fragmentos são instáveis e nos processos de decaimento eles emitem nêutrons. Tais nêutrons que são emitidos após o processo da fissão são chamados de nêutrons atrasados e os núcleos que os emitem são chamados de precursores de nêutrons atrasados.

Os nêutrons atrasados não têm as mesmas propriedades que os nêutrons prontos produzidos diretamente da fissão. A energia média dos nêutrons prontos é muito maior do que a energia média dos nêutrons atrasados [Stacey, 2001]. O fato dos nêutrons atrasados “nascerem” com energias mais baixas tem dois impactos significantes na maneira que eles procedem no ciclo de vida do nêutron. Primeiramente, os nêutrons atrasados têm uma probabilidade muito menor de causar fissões rápidas do que os nêutrons prontos, devido ao fato de que sua energia média está abaixo do mínimo requerido para a ocorrência da fissão rápida. Em segundo lugar, os nêutrons atrasados têm uma probabilidade menor de fuga do núcleo, porque eles “nascem” com energias mais baixas e, por isso, viajam distâncias mais curtas do que os nêutrons rápidos.

Os produtos de fissão que emitem nêutrons atrasados foram reunidos em 6 grupos de acordo com sua meia-vida. A Tabela 2.1 mostra a fração de nêutrons atrasados para cada grupo de alguns combustíveis usados em reatores nucleares.

Por definição, $\beta = \sum_{i=1}^6 \beta_i$. Assim, na Tabela 2.1 temos que $\beta = 0,0065$, ou seja, os

nêutrons atrasados correspondem a 0,65% dos nêutrons produzidos pela fissão do elemento Urânio ${}_{92}\text{U}^{235}$. Parece pouco, porém para escalas de tempo maiores quando comparadas com a escala de tempo da fissão, esses nêutrons têm um efeito muito significativo.

Sabendo isso, o próximo passo é definir um conjunto de equações que descrevam a dependência temporal da concentração dos precursores de nêutrons atrasados. Para isso, inicialmente avaliam-se quais os mecanismos de perda e ganho dos precursores, possibilitando assim a construção de uma equação de balanço.

A Tabela 2.1 acima apresenta algumas constantes dos precursores de nêutrons atrasados conforme [Stacey, 2001].

Tabela 2.1 - Parâmetros nucleares dos precursores de nêutrons atrasados para alguns núcleos.

Grupo	$\lambda_i (s^{-1})$	Fração β_i
U₂₃₅		
1	0,0124	0,00022
2	0,0305	0,00142
3	0,111	0,00127
4	0,310	0,00257
5	1,14	0,00075
6	3,01	0,00027
Pu₂₃₉		
1	0,0129	0,000076
2	0,0311	0,000560
3	0,134	0,000432
4	0,331	0,000656
5	1,26	0,000206
6	3,21	0,000070
U₂₃₃		
1	0,0126	0,00023
2	0,0337	0,00081
3	0,139	0,00068
4	0,305	0,00075
5	1,13	0,00014

Fonte: adaptada de Duderstadt, 1976.

Sabe-se que a variação temporal da concentração dos precursores é dada pela produção do precursor através da fissão e pela perda causada pelo posterior decaimento.

Os nêutrons produzidos pelo grupo i , considerando um grupo de energia, podem ser contabilizados da seguinte forma: multiplicando a taxa de produção de nêutrons na fissão pela fração de nêutrons atrasados, de forma que:

$$\beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.16)$$

para $i = 1:6$. Já a perda é dada pela taxa de decaimento do precursor que pode ser expressa como o produto da concentração do precursor $C_i(\mathbf{r}, t)$ e da sua respectiva constante de decaimento λ_i para $i = 1:6$.

Assim, a equação de balanço que representa a variação temporal da concentração de precursores é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t), \quad (2.17)$$

$i = 1:6$. Logo, incluindo os nêutrons atrasados através da fração de nêutrons atrasados β e da taxa de decaimento λ_i para cada precursor, tem-se, incluindo a equação de balanço para a concentração de precursores, a equação de cinética espacial monoenergética que é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) v \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i v \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad , \quad (2.18)$$

para $i = 1:6$. Considerando o modelo multigrupo de energia, fica-se com as equações multigrupo da cinética espacial dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{Tg}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) + \\ &\quad \sum_{g'=1}^G \left(\Sigma_{sg}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) \chi_g^p v \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \right) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^P \chi_g^d \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (2.19) \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{g'=1}^G \beta_i v \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

para $i = 1:P$, $g = 1:G$.

Para se chegar às equações da cinética pontual, parte-se da equação da cinética espacial monoenergética (2.18) e considera-se o domínio homogêneo na qual se simplifica:

$D(\mathbf{r}) = D$, $\Sigma_a(\mathbf{r}) = \Sigma_a$ e $\Sigma_f(\mathbf{r}) = \Sigma_f$. Assim, fica-se com:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) &= D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (2.20) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

para $i = 1:6$. Considerando

$$Q = [1 - \beta] v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \quad , \quad (2.21)$$

como sendo a fonte de nêutrons. No caso estacionário, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.22)$$

para $i = 1:6$. Portanto,

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_i v \Sigma_f}{\lambda_i} \phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.23)$$

2.2.2 Derivação das equações da cinética pontual

Partindo das equações (2.20), a fim de chegar às equações de cinética pontual, reescrevem-se tais equações como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) &= A \phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i v \Sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

para $i = 1:6$, na qual o operador diferencial de segunda ordem A é dado por:

$$A = D\nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta) v \Sigma_f. \quad (2.25)$$

Pela equação (2.24) e considerando o regime crítico de funcionamento de um reator, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} C_i(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow \beta v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = 0 &\Rightarrow D\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \phi(\mathbf{r}, t) + v \Sigma_f \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \end{aligned}, \quad (2.26)$$

ou seja, o sistema (2.24) reduz-se à

$$A \phi = 0, \quad (2.27)$$

isto é, a equação de Helmotz:

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0, \quad (2.28)$$

na qual,

$$B^2 = \frac{(v \Sigma_f - \Sigma_a)}{D} \quad (2.29)$$

é o chamado “buckling” material.

Com a introdução do comprimento de difusão de nêutrons

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (2.30)$$

e do fator de multiplicação infinita

$$k_\infty = \frac{v \Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad (2.31)$$

relativo ao número de nêutrons produzidos pelos nêutrons absorvidos, a equação (2.28) pode ser escrita na forma:

$$\nabla^2 \phi + \frac{k_\infty - 1}{L^2} \phi = 0. \quad (2.32)$$

Assumindo a separabilidade do tempo e espaço, pode-se expandir o fluxo de nêutrons $\phi(\mathbf{r}, t)$ e a concentração de precursores $C_i(\mathbf{r}, t)$ em séries de autofunções como:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = v \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t) \varphi_j(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

e

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{i,j}(t) \varphi_j(\mathbf{r}), \quad (2.34)$$

para $i = 1:6$, na qual $\varphi_j(\mathbf{r})$ satisfaz a equação (2.28).

Como em [Vilhena, 1988], considerando somente o primeiro termo das séries, isto é,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = v n_1(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

e

$$C_i(\mathbf{r}, t) = C_{i,1}(t) \varphi_j(\mathbf{r}) = C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) . \quad (2.36)$$

Substituindo (2.35) e (2.36) no sistema (2.20) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) - D v n(t) \nabla^2 \varphi_1(\mathbf{r}) + \sum_a v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = (1 - \beta) v \sum_f v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \\ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} , \quad (2.37)$$

e

$$\frac{d}{dt} C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = -\lambda_i C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \beta_i v \sum_f v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) , \quad (2.38)$$

para $i = 1:6$. Isolando $\frac{d}{dt} n(t) \varphi_1(\mathbf{r})$ em (2.37), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = (1 - \beta) v \sum_f v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + D v n(t) \nabla^2 \varphi_1(\mathbf{r}) - \sum_a v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \\ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} . \quad (2.39)$$

Utilizando o fato de que $\varphi_1(\mathbf{r})$ satisfaz à equação (2.28) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = (1 - \beta) v \sum_f v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + D v n(t) (-B^2 \varphi_1(\mathbf{r})) - \sum_a v n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \\ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} , \quad (2.40)$$

ou ainda, colocando em evidência o termo $n(t) \varphi_1(\mathbf{r})$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = \left[(1 - \beta) v \sum_f v - B^2 D v - \sum_a v \right] n(t) \varphi_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) . \quad (2.41)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[(1-\beta)v \sum_f \nu - B^2 D v - \sum_a v \right] n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.42)$$

Definindo como em [Duderstadt e Hamilton, 1976]

$$l = \left[v \sum_a (1 + L^2 B^2) \right]^{-1}, \quad (2.43)$$

como sendo o tempo médio de vida do nêutron no reator e

$$k_{eff} = \frac{v \sum_f / \sum_a}{1 + L^2 B^2} = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B^2}, \quad (2.44)$$

como sendo o fator de multiplicação efetivo, então (2.42) torna-se:

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[(1-\beta) \frac{k_{eff}}{l} - v(B^2 D + \sum_a) \right] n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t), \quad (2.45)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{(1-\beta)k_{eff} - 1}{l} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t). \quad (2.46)$$

De forma análoga, colocando $\varphi_1(\mathbf{r})$ em evidência, na equação (2.38), obtém-se:

$$\frac{d}{dt}C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = \left[-\lambda_i C_i(t) + \beta_i v \sum_f \nu n(t) \right] \varphi_1(\mathbf{r}), \quad (2.47)$$

para $i = 1:6$, que pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt}C_i(t) \varphi_1(\mathbf{r}) = \left[-\lambda_i C_i(t) + \beta_i \frac{k_{eff}}{l} \right] \varphi_1(\mathbf{r}). \quad (2.48)$$

Então,

$$\frac{d}{dt}C_i(t) = -\lambda_i C_i(t) + \beta_i \frac{k_{eff}}{l}, \quad (2.49)$$

para $i = 1:6$.

Neste ponto, introduz-se duas novas definições conforme [Duderstadt e Hamilton, 1976]:

$$\Lambda = \frac{l}{k_{eff}}, \quad (2.50)$$

que é o tempo médio de geração entre o nascimento do nêutron e a subsequente absorção induzindo fissão, e

$$\rho(t) = \frac{k_{eff}(t) - 1}{k_{eff}(t)}, \quad (2.51)$$

que é a reatividade. Então, $\rho(t)$ pode assumir três valores: $\rho(t) > 0$ (supercrítico); $\rho(t) = 0$ (crítico) e $\rho(t) < 0$ (subcrítico). A reatividade $\rho(t)$ é um adimensional, contudo é referido a várias unidades: (% , \$, ¢). O mais comum é o 1\$ que corresponde a reatividade numericamente igual a β e o 1¢ que corresponde a $0,01\beta$.

Com a definição (2.51) pode-se reescrever as equações (2.46) e (2.49) como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt}C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \end{aligned}, \quad (2.52)$$

para $i = 1:6$. Estas são conhecidas como as equações da cinética pontual. Cabe ressaltar que, em geral, a reatividade pode tornar-se uma função dependente não só do tempo, mas também da própria densidade, o que tornaria a equação (2.52) não linear. Esses casos são tratados pelos modelos de dinâmica. Para mais detalhes ver [Hetrick, 1971]. Nesta tese, considera-se o caso em que a reatividade é uma função exclusivamente dependente do tempo.

Tanto a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acoplados (2.52), quanto o sistema de equações diferenciais parciais acoplados (2.19) para dois grupos de

energia e seis grupos de precursores, que descrevem o comportamento da população de nêutrons e o decaimento de precursores de nêutrons atrasados, serão alvo de interesse nesta tese. Enquanto o primeiro considera a amplitude do fluxo tendo sua forma conhecida, a resolução de (2.19) fornece a amplitude e forma, possibilitando uma solução mais completa do comportamento da população de nêutrons. Estes dois sistemas são de difícil resolução numérica, e uma das razões é a grande diferença nas escalas dos parâmetros nucleares. Esses sistemas são denominados do tipo rígidos (“stiff”) e técnicas sofisticadas de soluções numéricas são exigidas como, por exemplo, a classe de métodos denominados A-estáveis. Nesse sentido, nos dois próximos capítulos, mostra-se como resolver em forma analítica esses dois problemas de vital importância em física de reatores nucleares.

3. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL PELO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO

O modelo mais simples para o estudo da população neutrônica é o modelo de cinética pontual [Stacey, 2001].

As equações de cinética pontual são um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas dependentes do tempo que descrevem o comportamento da população de nêutrons e o decaimento de precursores de nêutrons atrasados. A distribuição neutrônica é suposta evoluir como um ponto, no sentido em que cada ponto é representativo de todo o sistema. Para um sistema sem fontes externas é equivalente se afirmar que uma única autofunção fundamental aparece na distribuição neutrônica em todos os instantes, de maneira que a forma do fluxo é conhecida. Soluções desta equação dão uma ideia da flutuação da população de nêutrons ocorrida durante a inicialização ou desligamento ou quando as barras de controle são ajustadas para regular a potência de um reator nuclear.

Para construir a solução de equações da cinética pontual com reatividade constante e variável com o tempo considerando 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados, utiliza-se uma ideia modificada do método clássico da Decomposição desenvolvido por Adomian [Adomian, 1988].

3.1 O método clássico da Decomposição de Adomian

Considerando o sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_1 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_2 \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_m \end{aligned} \quad (3.1)$$

que pode ser escrito na forma compacta:

$$y_k' = f_k(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_k, \quad (3.2)$$

para $k = 1:m$, onde f_k são funções não-lineares e g_i são funções conhecidas. Procuram-se soluções y_1, y_2, \dots, y_m que satisfaçam o sistema de equações (3.2).

Assumindo que para qualquer g_k o sistema (3.2) possua somente uma solução, aplica-se o método da Decomposição de Adomian [Adomian, 1994], [Adomian, 1998] e [Mahmood et al., 2005], no sistema (3.2), ficando com:

$$Ly_k = N_k(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_k, \quad (3.3)$$

para $k = 1:m$, onde $L = \frac{d}{dt}$ é um operador linear e $N_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = f_k(y_1, y_2, \dots, y_m)$ são operadores não lineares. Aplicando em ambos os lados de (3.3) o operador inverso de L , que nesse caso é dado por $L^{-1}[\cdot] = \int_0^t [\cdot] dt$, tem-se:

$$y_k = y_k(0) + L^{-1}N_k(y_1, y_2, \dots, y_m) + L^{-1}g_k, \quad (3.4)$$

para $k = 1:m$, na qual $y_k(0)$ é a condição inicial da equação (3.1). O método clássico da decomposição de Adomian consiste em aproximar a solução (3.4) por uma série infinita da forma:

$$y_k = \sum_{j=0}^{\infty} y_{kj}, \quad (3.5)$$

para $k = 1:m$, decompor o operador não linear N_k como:

$$N_k(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj}, \quad (3.6)$$

para $k = 1:m$, na qual A_{kj} são polinômios de y_1, y_2, \dots, y_m , chamados de Polinômios de Adomian [Adomian, 1998]. Substituindo as expansões (3.5) e (3.6) em (3.4) obtém-se:

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_{kj} = y_k(0) + L^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} + L^{-1}g_k, \quad (3.7)$$

para $k = 1:m$. Então, escolhendo o primeiro sistema, conforme Adomian [Adomian, 1994] como:

$$y_{k0} = y_k(0) + L^{-1}g_k, \quad (3.8)$$

para $k = 1:m$ e para os demais sistemas recursivos até uma ordem de truncamento como:

$$y_{k(j+1)} = L^{-1}A_{kj}, \quad (3.9)$$

para $k = 1:m$. Tem-se assim definido um procedimento iterativo, conhecido como método clássico da Decomposição de Adomian.

Cabe ressaltar que nesta tese, tanto para resolver as equações da cinética pontual quanto para resolver as equações transformadas da cinética espacial, utiliza-se uma ideia modificada do método clássico da Decomposição de Adomian, uma vez que as referidas equações, que se considera nesta tese são lineares e não se precisa dos polinômios de Adomian. Esta técnica é comumente chamada de método da Decomposição. A ideia principal compreende em expandir a densidade de nêutrons e as concentrações de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada, substituir estas expansões nas equações de cinética e construir um conjunto de sistemas recursivos de equações diferenciais de primeira ordem de forma que, ao primeiro sistema é introduzida toda a condição inicial para resultar em um sistema homogêneo de equações diferenciais de primeira ordem com entradas constantes. Aos demais sistemas é introduzida a dependência temporal como um termo fonte de forma que se fica com uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não homogênea.

A solução destes sistemas recursivos é prontamente obtida reformulando estas equações na forma matricial e utilizando as soluções conhecidas para as equações diferenciais ordinárias matriciais de primeira ordem.

3.2 Solução das equações da cinética pontual pelo método da Decomposição

Para o modelo de cinética pontual resolvido nesta tese considera-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \\ \frac{d}{dt} C_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \end{aligned} \quad , \quad (3.10)$$

para $i = 1:6$, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} n(0) &= n_0 \\ C_i(0) &= \frac{\beta_i n_0}{\lambda_i \Lambda} \end{aligned} \quad , \quad (3.11)$$

para $i = 1:6$. Aqui $n(t)$ denota a densidade de nêutrons, $\rho(t)$ é a reatividade variável com o tempo, β_i é a fração de nêutrons atrasados emitidos pelo precursor (para $i = 1:6$), β é a fração total de nêutrons que são atrasados emitidos por todos os precursores, Λ é o tempo de geração média do nêutron, $C_i(t)$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados, λ_i é a constante de decaimento da concentração de precursores de nêutrons atrasados, para $i = 1:6$, $n(0)$ e $C_i(0)$ são, respectivamente, a densidade de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados no instante inicial, ou seja, quando $t = 0s$. A fim de aplicar o método da Decomposição, expande-se a densidade de nêutrons e a concentração de precursores de nêutrons atrasados em uma série truncada como:

$$\begin{aligned} n(t) &= \sum_{j=0}^R n_j(t) \\ C_i(t) &= \sum_{j=0}^R C_{ij}(t) \end{aligned} \quad , \quad (3.12)$$

para $i = 1:6$. A substituição das expansões (3.12) nas equações de cinética pontual (3.10) omitindo a dependência temporal (t) resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (n_0 + n_1 + \dots n_R) &= \left(\frac{\rho_0 + \rho_1(t) - \beta}{\Lambda} \right) (n_0 + n_1 + \dots n_R) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i (C_{i0} + C_{i1} + \dots C_{iR}) \\ \frac{d}{dt} (C_{i0} + C_{i1} + \dots C_{iR}) &= \frac{\beta_i}{\Lambda} (n_0 + n_1 + \dots n_R) - \lambda_i (C_{i0} + C_{i1} + \dots C_{iR}) \end{aligned} \quad , \quad (3.13)$$

para $i = 1:6$. Aqui se considera que a reatividade é escrita como $\rho(t) = \rho_0 + \rho_1(t)$, onde ρ_0 é um valor constante. Nota-se que existem $7 \times R$ incógnitas e apenas sete equações o que torna este sistema indeterminado. Supera-se esta dificuldade construindo o seguinte sistema recursivo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_0(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n_0(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i0}(t) \\ \frac{d}{dt} C_{10}(t) &= \frac{\beta_1}{\Lambda} n_0(t) - \lambda_1 C_{10}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} C_{60}(t) &= \frac{\beta_6}{\Lambda} n_0(t) - \lambda_6 C_{60}(t) \end{aligned} \quad , \quad (3.14)$$

para o primeiro termo da expansão da solução e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_j(t) &= \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n_j(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{ij}(t) + \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} n_{j-1}(t) \\ \frac{d}{dt} C_{1j}(t) &= \frac{\beta_1}{\Lambda} n_j(t) - \lambda_1 C_{1j}(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt} C_{6j}(t) &= \frac{\beta_6}{\Lambda} n_j(t) - \lambda_6 C_{6j}(t) \end{aligned} \quad , \quad (3.15)$$

para o termo genérico da expansão da solução com $j = 1:R$. Aqui é preciso observar que, embora não seja única, esta decomposição é feita de tal maneira que o cumprimento da equação (3.10) é garantido, a menos do último termo $\frac{\rho_1(t)}{\Lambda} n_R$ que não aparece em (3.14) e consta em (3.13). Reescrevendo o sistema recursivo em forma matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} n_0(t) \\ \frac{d}{dt} C_{10}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} C_{60}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & \cdots & -\lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0(t) \\ C_{10}(t) \\ \vdots \\ C_{60}(t) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

para a equação homogênea e

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} n_j(t) \\ \frac{d}{dt} C_{1j}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} C_{6j}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & \cdots & -\lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_j(t) \\ C_{1j}(t) \\ \vdots \\ C_{6j}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\rho_1(t)}{\Lambda} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{j-1}(t) \\ C_{1j-1}(t) \\ \vdots \\ C_{6j-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

para as equações não-homogêneas, com $j = 1 : R$. Até este ponto, enfatiza-se que a solução das equações (3.16) e (3.17) são diretamente determinadas pelos resultados bem conhecidos de equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem. Reescrevendo a equação (3.17) na forma diferencial matricial linear compacta:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} - \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}(t), \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{Y}(t)$ é a variável dependente, $\mathbf{H}(t)$ é o vetor fonte e \mathbf{A} é uma matriz com entradas constantes. A solução conhecida para equação matricial (3.18), utilizando a técnica da Transformada de Laplace com a propriedade da convolução, resulta na seguinte solução:

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{Y}(0) + \int_0^t \exp(\mathbf{A}(t-\tau)) \mathbf{H}(t-\tau) d\tau. \quad (3.19)$$

Quando $\mathbf{H}(t)$ é zero em (3.19) a solução torna-se simplesmente:

$$\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{Y}(0). \quad (3.20)$$

Por outro lado, para os problemas especiais em que os autovalores da matriz \mathbf{A} são distintos, a exponencial da matriz pode ser expressa por:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{X} \exp(\mathbf{D}t) \mathbf{X}^{-1}, \quad (3.21)$$

onde X é a matriz cujas colunas são autovetores de A e X^{-1} é a sua inversa. A matriz D é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores da matriz A . Tendo em vista que os autovalores das matrizes que aparecem nas equações (3.16) e (3.17) são distintos, a solução do problema (3.10) é bem determinada pela equação (3.12), lembrando que os sistemas recursivos (3.16) e (3.17) são determinados, respectivamente pelas equações (3.19) e (3.20), ambas utilizando a decomposição (3.21). Para completar a análise de solução, afirma-se que o problema homogêneo (3.16) satisfaz a condição inicial (3.11), enquanto que para os problemas não-homogêneos (3.17) impõem-se condição inicial nula.

Finalmente, deve-se lembrar a existência de várias abordagens na literatura para obter a solução da equação (3.18) [Moler e Van Loan, 1978]. Nesta tese, menciona-se a técnica referente à aplicação da Transformada de Laplace combinada com a diagonalização da matriz, devido à sua aptidão para lidar com problemas matriciais de ordem elevada (até 1500). Esta metodologia tem a vantagem de ser geral, no sentido que também pode ser aplicada para resolver uma classe de problemas com autovalores repetidos [Segatto et al., 1999] [Segatto et al., 2008]. Cabe salientar que a solução dada por (3.12) é exata exceto pela ordem de truncamento da série [Adomian, 1988]. Nesta tese, apresenta-se o critério de Lyapunov para mostrar a convergência da solução proposta para os R sistemas recursivos.

3.3 Critério de Convergência

Vários autores investigaram e ainda é assunto de pesquisa a convergência do método de Decomposição de Adomian. O tratamento da convergência do método da Decomposição foi considerado por [Cherruault, 1989] e [Répaci, 1990]. Ambos mostraram a convergência do método baseado em uma sutil conexão com técnicas de ponto fixo. Estes resultados foram melhorados por [Cherruault e Adomian, 1993], que propuseram uma nova prova da convergência para a técnica de Adomian baseados em propriedades da convergência de séries. Nesta tese, com o objetivo de analisar a convergência desta nova solução analítica das equações da cinética pontual dada pelo método da Decomposição, propõem-se um novo procedimento baseado no critério de Lyapunov [Boichenko et al., 2005] que foi recentemente utilizado por Berra [Berra, 2010].

3.3.1 Critério de Lyapunov

Sem perda de generalidade, considera-se para a análise da convergência a solução das equações da cinética pontual para a densidade de nêutrons, visto que para as concentrações de precursores de nêutrons atrasados o procedimento é análogo. Por conveniência usa-se a notação: $\Gamma_R = \sum_{j=0}^R n_j$. Se $|\delta Z_R| = \left\| \sum_{j=R+1}^{\infty} n_j \right\|$ denota a separação máxima de Γ_R para a solução exata n , onde $\|\cdot\|$ significa a norma do máximo. Então, seguindo o critério de Lyapunov tem-se:

$$|\delta Z_R| \approx e^{\lambda \|\Gamma_R\|} |\delta Z_0|. \quad (3.22)$$

Se $\lambda < 0$ a convergência da solução é garantida. Isolando a exponencial e aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da desigualdade acima, o sinal de λ é determinado por:

$$\lambda = \frac{1}{\|\Gamma_R\|} \ln \left(\frac{|\delta Z_R|}{|\delta Z_0|} \right). \quad (3.23)$$

O critério de Lyapunov determina a influência da variação da condição inicial na solução. Nesta tese, o critério é utilizado para verificar se a solução para a densidade de nêutrons da equação da cinética pontual diverge ou converge para a solução única. Se $\lambda < 0$ $\forall n > n_0$ então a convergência da solução é garantida a partir de um determinado incremento no número de termos da série. Comprova-se a estabilidade da solução a partir da inclusão de termos da série até que o critério de parada seja satisfeito. Como δZ_0 leva toda a influência da condição inicial, é fácil ver que $\lambda < 0$ quando δZ_R tender a zero. Em outras palavras, quando o primeiro termo da solução for dominante com relação a soma dos demais termos, neste caso, tem-se que o logaritmo da equação (3.23) torna-se negativo. No entanto, quando $\lambda > 0$ $\forall n > n_0$, o comportamento da solução é caótico, o que sugere que a série se afasta do raio de convergência da solução.

3.4 Resultados Numéricos

Mostra-se a viabilidade do método da Decomposição (DM) para resolver as equações da cinética pontual para diversas reatividades. Assume-se primeiramente reatividade constante (Caso A) e posteriormente reatividade variável com o tempo (Caso B). Para todos os casos consideram-se as condições iniciais como $n(0)=1$ e $C_i(0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} n(0)$, para $i = 1:6$.

3.4.1 Caso A. Reatividade Constante

Neste exemplo, para avaliar o método da Decomposição (DM), consideram-se dois exemplos: o primeiro para avaliar a solução em diferentes tempos de geração do nêutron e para diferentes reatividades; o segundo para comparar e validar a metodologia proposta (DM) com outras metodologias encontradas na literatura.

Aqui assumem-se os parâmetros nucleares típicos de um reator térmico dados pela Tabela 3.1 conforme [Aboanber, 2003].

Tabela 3.1 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.

Nêutrons Atrasados	
$\beta_i \times 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,266	0,0127
1,491	0,0317
1,316	0,115
2,849	0,311
0,896	1,40
0,182	3,87
$\beta = 7 \times 10^{-3}$	

Exemplo 1

Neste exemplo, os resultados obtidos pelo (DM) para três diferentes tempos de geração: Λ ($10^{-3}s$, $10^{-4}s$, $10^{-5}s$), e para três reatividades: sub-prontocrítica ($\rho = 0,003$); pronto-crítica ($\rho = 0,007$) e super-prontocrítica ($\rho = 0,008$). Os resultados são apresentados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Densidade de nêutrons entre diferentes tempos de geração Λ para reatividades constantes $\rho(t) = \rho_0$.

		$\rho = 0,003$	$\rho = 0,007$	$\rho = 0,008$
$\Lambda(s)$	Tempo(s)	Densidade de nêutrons [cm^{-3}] DM	Densidade de nêutrons [cm^{-3}] DM	Densidade de nêutrons [cm^{-3}] DM
10^{-3}	10^{-3}	1,0029	1,0070	1,0080
	10^{-1}	1,2484	1,7034	1,8454
	1	1,9672	11,0252	20,7376
10^{-4}	10^{-3}	1,0294	1,0700	1,0804
	10^{-1}	1,7652	8,3474	15,4198
	1	2,1876	1055,5143	$1,14917 \times 10^6$
10^{-5}	10^{-3}	1,2472	1,7000	1,8414
	10^{-1}	1,8022	110,7571	$2,22968 \times 10^5$
	1	2,2126	$4,0266 \times 10^8$	$3,7558 \times 10^{45}$

Na Tabela 3.2, nota-se que para reatividades mais altas, o fluxo neutrônico aumenta mais rapidamente quanto mais curto for o tempo de geração médio do nêutron. Ou seja, para reatores com tempo de geração médio pequeno (reatores rápidos), há uma maior dificuldade de controle quando comparado com aqueles que possuem tempo de geração maiores (reatores térmicos). Além disso, percebe-se que, quando $\rho < \beta$ a influência do tempo de geração é quase desprezível, o que sugere que a densidade neutrônica vem determinada principalmente pelos nêutrons atrasados. Em contrapartida, quando a reatividade é maior ou igual que a fração de nêutrons atrasados, ou seja, $\rho \geq \beta$, o reator torna-se praticamente fora de controle, o que sugere que a contribuição dos atrasados é desprezível frente aos nêutrons prontos.

Exemplo 2

Neste exemplo, a densidade de nêutrons obtida pelo método da Decomposição (DM) é comparada com: o método Theta (θ weighting) [Porching, 1966]; o método do confinamento da rigidez (SCM) [Chao e Attard, 1985]; o método de Runge-Kutta generalizado (GRK) [Sanchez 1989] e o método do modo da exponencial analítica (AEM) [Aboanber, 2003]. Os parâmetros nucleares são os mesmos utilizados no exemplo anterior dados pela Tabela 3.1.

Na Tabela 3.3, apresentam-se os resultados obtidos pelo método da Decomposição (DM) para diferentes tempos. Quatro tipos de reatividades são considerados: duas sub-prontocrítica ($\rho < \beta$), $\rho = 0,003$ e $\rho = 0,0055$; uma pronto-crítica ($\rho = \beta$), $\rho = 0,007$ e uma super-prontocrítica ($\rho > \beta$), $\rho = 0,008$.

Tabela 3.3 - Comparação dos resultados numéricos com $\Lambda = 0,00002\text{ s}$ para diferentes reatividades constantes $\rho(t) = \rho_0$.

ρ_0	Método	Δt inicial (s)	Densidade de nêutrons [cm^{-3}]		
			t = 1 s	t = 10 s	t = 20 s
0,003	θ weighting	0,000333 0,01	2,1737	8,0069	$2,8076 \times 10^1$
	SCM		2,2254	8,0324	$2,8351 \times 10^1$
	GRK		2,2098	8,0192	$2,8297 \times 10^1$
	AEM		2,2098	8,0192	$2,8297 \times 10^1$
	DM		2,2098 (0)*	8,0192 (0)*	$2,8297 \times 10^1 (0)*$
0,0055	θ weighting	0,000182 0,01	t = 0,1 s	t = 2 s	t = 10 s
	SCM		5,1945	$4,2625 \times 10^1$	$1,3882 \times 10^5$
	GRK		5,2057	$4,3024 \times 10^1$	$1,3875 \times 10^5$
	AEM		5,2100	$4,3025 \times 10^1$	$1,3886 \times 10^5$
	DM		5,2100 (0)*	$4,3025 \times 10^1 (0)*$	$1,3886 \times 10^5 (7,2 \times 10^{-5})*$
0,007	θ weighting	0,000143 0,01	t = 0,01 s	t = 0,5 s	t = 2 s
	SCM		4,5089	$5,3484 \times 10^3$	$2,0641 \times 10^{11}$
	GRK		4,5001	$5,3530 \times 10^3$	$2,0627 \times 10^{11}$
	AEM		4,5088	$5,3459 \times 10^3$	$2,0591 \times 10^{11}$
	DM		4,5088 (0)*	$5,3459 \times 10^3 (0)*$	$2,0591 \times 10^{11} (0)*$
0,008	θ weighting	0,000125 0,01	t = 0,01 s	t = 0,1 s	t = 1s
	SCM		6,2030	$1,4115 \times 10^3$	$6,2258 \times 10^{23}$
	GRK		6,2046	$1,4089 \times 10^3$	$6,1574 \times 10^{23}$
	AEM		6,2029	$1,4104 \times 10^3$	$6,1634 \times 10^{23}$
	DM		6,2028 (0)*	$1,4104 \times 10^3 (0)*$	$6,1633 \times 10^{23} (0)*$

* (desvio relativo com relação ao método AEM)

Aqui utiliza-se como resultado de referência a densidade de nêutrons e calcula-se o desvio relativo percentual em relação ao método (AEM) proposto por [Aboanber, 2003]. Quando comparado com este, pode-se aferir uma excelente concordância dos resultados obtidos pelo método (DM), uma vez que se obteve um desvio relativo de praticamente 0% para todos os tempos.

Em vista dos resultados apresentados, pode-se inferir que o método da Decomposição se aplicou muito bem para a resolução das equações de cinética pontual com reatividade constante.

3.4.2 Caso B. Reatividade variável com o tempo

Para esse caso, resolve-se o problema de cinética pontual para uma reatividade variável com o tempo. Consideram-se três exemplos com reatividades dependentes do tempo: uma do tipo linear; uma do tipo quadrática e uma do tipo senoidal.

Exemplo 1

Neste exemplo, considera-se inicialmente que a reatividade é descrita como uma função linear do tempo da forma $\rho(t) = at$, onde a [$\$/s$] é uma constante. A densidade de nêutrons é calculada para dois valores diferentes para a constante a . Os parâmetros nucleares são descritos na Tabela 3.4 para um reator térmico conforme [Nahla, 2008] para um tempo de geração $\Lambda = 0,00001$ s.

Tabela 3.4 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.

Nêutrons Atrasados	
$\beta_i \times 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,246	0,0127
1,363	0,0317
1,203	0,115
2,605	0,311
0,819	1,40
0,167	3,87
$\beta = 6,4 \times 10^{-3}$	

Na Tabela 3.5, apresentam-se os resultados obtidos pelo método da Decomposição (DM) comparados com (GAEM) proposto por [Nahla, 2008] e aproximação do tipo Padé. Utiliza-se um critério de parada de 10^{-5} para o truncamento dos R sistemas recursivos e calcula-se o desvio relativo percentual com relação ao método (GAEM).

Tabela 3.5 - Densidade de nêutrons para reatividade do tipo rampa $\rho(t) = at$ para um tempo de geração de $\Lambda = 0,00001$ s.

a(\$/s)	tempo (s)	Densidade de nêutrons [cm^{-3}]		
		Padé	GAEM	DM
0,25	0,25	1,069840	1,069541	1,069651 (0,01)*
	0,50	1,157065	1,156694	1,156849 (0,01)*
	0,75	1,265795	1,265331	1,265493 (0,01)*
	1,0	1,402562	1,401981	1,401838 (0,01)*
0,5	0,25	1,149544	1,149200	1,149328 (0,01)*
	0,5	1,369438	1,368927	1,368775 (0,01)*
	0,75	1,708411	1,707600	1,707983 (0,02)*
	1,0	2,276692	2,275271	2,275336** (0,002)*

* (desvio relativo percentual com relação ao método GAEM)

** (uso da continuação analítica)

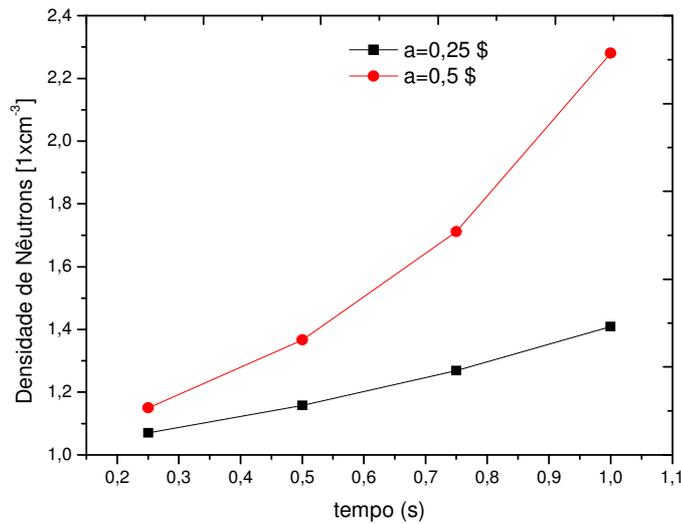


Figura 3.1 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at$.

Com os resultados apresentados na Tabela 3.5, pode-se observar uma boa concordância dos resultados quando comparados com o método (GAEM) e aproximação (Padé). O método da Decomposição satisfaz em todos os pontos o respectivo critério de Lyapunov, o que assegura a convergência da solução, exceto para o parâmetro $a = 0,5 \text{ \$} \times \text{s}^{-1}$ e tempo $t = 1 \text{ s}$, na qual se utilizou a continuação analítica para assegurar tal critério, ou seja, resolve-se o problema de cinética pontual para um passo de tempo h onde a convergência da solução estava assegurada e utiliza-se esta solução como condição inicial para o próximo passo. Fica claro que se pode controlar a precisão dos resultados e a convergência da solução pelo aumento dos R sistemas recursivos e o uso da continuação analítica. A Tabela 3.6 ilustra a satisfação do critério de Lyapunov para $a = 0,5 \text{ \$} \times \text{s}^{-1}$, $t = 1 \text{ s}$ e $h = 0,25 \text{ s}$. Para os R sistemas recursivos, utiliza-se a continuação analítica para um passo no tempo de $h = 0,25 \text{ s}$. Neste caso, a condição inicial foi a densidade de nêutrons para $t = 0,75 \text{ s}$, onde a convergência da solução estava assegurada.

Exemplo 2

Neste exemplo, resolvem-se as equações da cinética pontual pelo método da decomposição para uma reatividade do tipo rampa quadrática dada por: $\rho(t) = at + bt^2$, onde a e b são constantes arbitrárias.

Tabela 3.6- Satisfação do critério de Lyapnov para os R sistemas recursivos com o uso da continuação analítica para $\rho = 0,5t$, $t = 1 s$ e $h = 0,25 s$.

Número de sistemas recursivos	Densidade de nêutrons [cm^{-3}]		Critério de Lyapnov
$R = 0$	1,707983*	1,707983**	-
$R = 1$	0,425883*	2,133886**	-1,38890
$R = 2$	0,106196*	2,240062**	-1,16627
$R = 3$	0,0264803*	2,266542**	-1,11770
$R = 4$	0,00660297*	2,273145**	-1,10595
$R = 5$	0,00164648*	2,274791**	-1,10304
$R = 6$	0,000410556*	2,275202**	-1,10232
$R = 7$	0,000102374*	2,275304**	-1,10214
$R = 8$	0,0000255273*	2,275330**	-1,10209
$R = 9$	$6,36534 \times 10^{-6}$ *	2,275336**	-1,10208

* (solução para os R sistemas)

** (somatório das soluções dos R sistemas)

Os parâmetros nucleares são dados na Tabela 3.7 para um reator térmico para um tempo de geração de $A = 10^{-4} s$ conforme [Nobrega, 1971].

Tabela 3.7 - Parâmetros nucleares para um reator térmico.

Nêutrons Atrasados	
$\beta_i \times 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,2850	0,0127
1,5975	0,0317
1,4100	0,115
3,0525	0,311
0,9600	1,40
0,1950	3,87
$\beta = 7,5 \times 10^{-3}$	

Na Figura 3.2, ilustra-se a resposta da densidade de nêutrons a uma variação quadrática na reatividade para um tempo de geração $A = 10^{-4} s$. Utiliza-se uma reatividade do tipo $\rho(t) = at + bt^2$, estabelecendo um parâmetro fixo b e variando o parâmetro a . Neste caso, nota-se que se pode controlar o crescimento da densidade de nêutrons pelo simples ajuste do parâmetro a . Fisicamente isso poderia representar uma aproximação dos movimentos das barras de controle dada pela variação da reatividade em função do tempo.

Aqui, novamente tem-se o critério de Lyapunov satisfeito para todos os pontos calculados, exceto para $t = 1,2 s$, na qual se utiliza a continuação analítica para um passo de $h = 0,2$ para satisfazer tal critério. Como critério de parada utilizou-se 10^{-5} para os R sistemas recursivos.

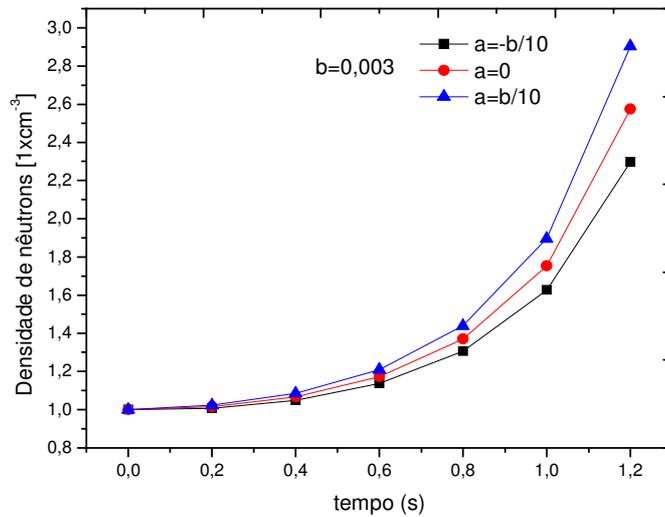


Figura 3.2 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = at + bt^2$.

Exemplo 3

Para completar a análise dos resultados numéricos, resolvem-se as equações de cinética pontual para reatividade senoidal do tipo $\rho(t) = \rho_0 \text{sen}(t)$ com $\rho_0 = 0,00073$ para um $\Lambda = 0,00003 \text{ s}$. Os parâmetros nucleares são dados pela Tabela 3.8 conforme [Hansen, 1965].

Tabela 3.8- Parâmetros nucleares para um reator térmico.

Nêutrons Atrasados	
$\beta_i \times 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,214	0,0124
1,423	0,0305
1,247	0,111
2,568	0,301
0,748	1,14
0,273	3,01
$\beta = 6,4 \times 10^{-3}$	

Na Tabela 3.9, apresentam-se os resultados numéricos para a densidade de nêutrons obtidos pela metodologia proposta (DM) para o tempo variando de 0 a 10 segundos. Estes resultados são ilustrados também na Figura 3.3.

Tabela 3.9- Comparação dos resultados numéricos para densidade de nêutrons com reatividade senoidal $\rho(t) = 0,00073 \text{ sen}(t)$.

tempo (s)	Densidade de Nêutrons [cm^{-3}]		
	DM	Hansen	Taylor
t = 0	1,00000	1,00000	1,00000
t = 1	1,12397 R=6 (0,0008*)	1,12396	1,12394
t = 2	1,16881 R=6 (0,006*)	1,16889	1,16884
t = 3	1,07443 R=5 (0,004*)	1,07448	1,07442
t = 4	0,95381 R=4 (0,001*)	0,95382	0,95380
t = 5	0,90737 R=6 (0,002*)	0,90735	0,90737
t = 6	0,96151 R=4 (0,002*)	0,96153	0,96158
t = 7	1,08748 R=5 (0,002*)	1,08745	1,08749
t = 8	1,17168 R=6 (0,0008*)	1,17167	1,17164
t = 9	1,11128 R=6 (0,001*)	1,11130	1,11124
t = 10	0,98464 R=4 (0,004*)	0,98468	0,98464

* (desvio relativo percentual com relação a Hansen)

Mais uma vez os resultados foram excelentes quando comparados com as metodologias propostas por Hansen e Taylor. Aqui o desvio relativo percentual foi limitado a menos que (0,001%). Além disso, o critério de Lyapunov foi satisfeito para todos os pontos.

Tendo em vista os resultados obtidos para as equações da cinética pontual com reatividade variável com o tempo, obteve-se sucesso na obtenção da solução para o referido problema com o uso do método da Decomposição.

Percebe-se que o uso da continuação analítica pode ser usado não só para garantir a convergência, naqueles pontos onde isto não ocorre, como também para controlar a precisão da solução, no sentido de diminuição dos R sistemas recursivos e satisfação de um critério de parada.

Além disso, observa-se que quando a solução se afasta da solução inicial $n(0)$, um número maior de sistemas recursivos é exigido para se obter solução dentro um critério de parada prescrito.

Cumpra salientar que a solução obtida para as equações é analítica e não ser pelo truncamento da série e a convergência é assegurada pelo critério de Lyapunov.

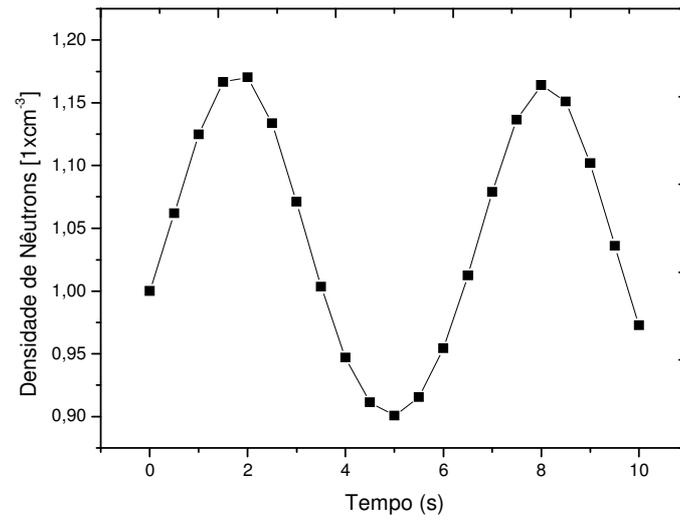


Figura 3.3 - Densidade de nêutrons para $\rho(t) = 0,00073 \text{ sen}(t)$.

4. SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA ESPACIAL

Na maioria das situações encontradas na análise de diferentes tipos de reatores nucleares, é suficiente para modelar o comportamento neutrônico no espaço-tempo, uma aproximação do modelo de transporte de nêutrons. O modelo mais amplamente utilizado nestas aproximações é a teoria multigrupo da difusão de nêutrons, dada pelas seguintes equações da cinética espacial escritas em geometria cartesiana:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{rg}(\mathbf{r}, t) \phi_g(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{g'=1}^G \left(\Sigma_{sg'}(\mathbf{r}, t) + (1 - \beta) \chi_g^p v \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \right) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^P \chi_g^d \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t), \quad (4.1) \\ &\vdots \\ \frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{g'=1}^G \beta_i v \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}, t) \phi_{g'}(\mathbf{r}, t) - \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

para $g = 1:G$, $i = 1:P$ e $g \neq g'$, com condições de contorno usuais aplicadas em física de reatores de fluxo nulo nos contornos e condições iniciais dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_g(\mathbf{r}, 0) &= \phi_{g0}(\mathbf{r}) \\ C_i(\mathbf{r}, 0) &= \frac{\beta_i (v \Sigma_{fg} \phi_{g0}(\mathbf{r}))}{\lambda_i}, \quad (4.2) \end{aligned}$$

para $g = 1:G$, $i = 1:P$. Estas condições iniciais são obtidas através da resolução do problema estacionário da teoria de difusão de nêutrons. Aqui G é número total de grupos de energia dos nêutrons, P é o número total de grupos de precursores de nêutrons atrasados, $\phi_g(\mathbf{r}, t)[cm^{-2}s^{-1}]$ é o fluxo escalar de nêutrons para o grupo g , $\phi_g(\mathbf{r}, 0)[cm^{-2}s^{-1}]$ é o fluxo escalar de nêutrons inicial para $t = 0$ s, $C_i(\mathbf{r}, t)[cm^{-3}]$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados para o grupo i , $C_i(\mathbf{r}, 0)[cm^{-3}]$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados inicial para o grupo i em $t = 0$ s, $D_g(\mathbf{r}, t)[cm]$ é o coeficiente de difusão de nêutrons para o grupo g ,

$\Sigma_{rg}(\mathbf{r}, t)[cm^{-1}]$ é a seção de choque macroscópica de remoção para o grupo g , $\Sigma_{sgg}(\mathbf{r}, t)[cm^{-1}]$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' para o grupo g , χ_g^p é o espectro de fissão dos nêutrons prontos para o grupo g , χ_g^d é o espectro de fissão dos nêutrons atrasados para o grupo g , ν é o número médio de nêutrons emitidos por fissão, $\Sigma_{fg}(\mathbf{r}, t)[cm^{-1}]$ é a seção de choque macroscópica de fissão para o grupo g e $v_g[cm/s]$ é a velocidade média dos nêutrons para o grupo g .

Nesta tese, resolvem-se em forma analítica as equações (4.1) para 2 e 3 dimensões considerando 2 grupos de energia, 1 e 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados, parâmetros nucleares constantes no espaço-tempo e parâmetros nucleares dependentes do tempo dados pela variação temporal da seção de choque macroscópica de remoção. Considerando a seção de choque macroscópica de remoção como um parâmetro dependente do tempo tem-se: $\Sigma_{r2}(\mathbf{r}, t) \equiv \Sigma_{r2}(t)$. Aqui considera-se que não há “up-scattering” ($\Sigma_{s21} = 0$) e tem-se $\Sigma_{r2}(t) = \Sigma_{a2}(t)$.

Para a resolução destas equações, utiliza-se a metodologia conhecida como GITT (*Generalized Integral Transform Technique*) nas dimensões espaciais, a fim de recair num problema transformado dependente do tempo, semelhante às equações da cinética pontual resolvidos anteriormente pelo método da Decomposição.

4.1 A GITT

A seguir são mostrados os passos básicos para a obtenção da solução de um problema unidimensional dependente do tempo pela técnica da GITT. Para problemas multidimensionais, o procedimento é análogo. A análise restringe-se ao sistema de coordenadas cartesianas, mas pode-se aplicar a qualquer sistema.

Seguindo o formalismo da GITT, dada uma equação genérica conforme [Wortmann, 2003]

$$A\phi(x, t) = S, \quad (4.3)$$

em $a \leq x \leq b$ e $t > 0$, sujeita às condições de contorno homogêneas,

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d\phi(a,t)}{dx} + a_2 \phi(a,t) &= 0 \\ b_1 \frac{d\phi(b,t)}{dx} + b_2 \phi(b,t) &= 0 \end{aligned}, \quad (4.4)$$

na qual, A é o operador diferencial parcial associado ao problema unidimensional dependente do tempo, S é o termo fonte e as constantes a_1, a_2, b_1, b_2 dependem das propriedades físicas do problema. O primeiro passo é expandir a variável $\phi(a,t)$ em uma base adequada. Para se determinar esta base, o operador A é reescrito da seguinte forma:

$$A\phi(x,t) = B\phi(x,t) + L\phi(x,t), \quad (4.5)$$

na qual L é um operador associado ao problema de Sturm-Liouville e B é o operador associado aos termos restantes. Assim, L tem a forma:

$$L\psi(\lambda, x) \equiv \nabla \cdot [p(x)\nabla \psi(\lambda, x)] + q(x)\psi(\lambda, x). \quad (4.6)$$

As funções $p(x)$ e $q(x)$ devem ser reais e contínuas, e ainda $p(x) > 0$ em todo o intervalo (a,b) . Definido no problema representado pela equação (4.3)

$$L\psi(\lambda, x) + \lambda^2\psi(\lambda, x) = 0, \quad (4.7)$$

em $a \leq x \leq b$, com

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial \phi(a,t)}{\partial x} + a_2 \phi(a,t) &= 0 \\ b_1 \frac{\partial \phi(b,t)}{\partial x} + b_2 \phi(b,t) &= 0 \end{aligned}. \quad (4.8)$$

O problema (4.7) com condições de contorno (4.8) é chamado de problema de Sturm-Liouville e é a forma geral dos chamados problemas auxiliares na teoria da GITT. As constantes a_1, a_2, b_1, b_2 devem ser as mesmas do problema original (4.4). A equação (4.7) pode

ser escrita para um λ_m qualquer, uma vez que o parâmetro λ é independente das constantes a_1, a_2, b_1 e b_2 . Logo, (4.7) torna-se:

$$L\psi_m(x) + \lambda_m^2 \psi_m(x) = 0 \quad , \quad (4.9)$$

na qual $\psi_m(x) \equiv \psi(\lambda_m, x)$. As funções $\psi_m(x)$ e os valores λ_m são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador L . Elas formam a base para o espaço onde o operador L está contido, cuja ortogonalidade é definida da seguinte forma [Özsisik, 1980]:

$$\frac{1}{\sqrt{N_m}\sqrt{N_n}} \int \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} . \quad (4.10)$$

Na qual N_m é o quadrado da norma $L^2(a, b)$ expressa por:

$$N_m = \int \psi_m^2(x)dx . \quad (4.11)$$

Esta base de autofunções (também conhecida como autovetores) será usada para expandir a variável $\phi(x, t)$ da equação (4.3) na seguinte forma:

$$\phi(x, t) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\phi}_i(t)\psi_i(x)}{\sqrt{N_i}} . \quad (4.12)$$

Uma vez determinado o problema de autovalores associado ao problema original e expandida a sua variável dependente, aplica-se na equação (4.3) o seguinte operador:

$$\frac{1}{\sqrt{N_i}} \int \psi_i(x)dx , \quad (4.13)$$

que é a transformação integral propriamente dita. Executadas todas as integrações, o resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja variável dependente é $\bar{\phi}_i(t)$. A obtenção desta variável e dos autovetores $\psi_i(x)$ é feita solucionando-se este sistema de equações e o problema de autovalores associado respectivamente. Conhecendo-se estas duas grandezas, o somatório da equação (4.12) pode ser truncado em um número de termos para a determinação do potencial original $\phi(x,t)$.

Cada termo do somatório da equação (4.12) corresponde a uma equação no sistema de equações transformado. Por isso, sua ordem de truncamento é muito importante. Assim, oportunamente, nesta tese discute-se um verdadeiro critério de convergência baseado em uma analogia ao Teorema Cardinal de Interpolação aplicado ao problema de cinética espacial.

A seguir apresentam-se os principais passos para obtenção da solução de uma equação pela GITT:

- a) Determina-se o problema auxiliar identificando-se o operador L na equação que se quer resolver. Na equação (4.6) este operador está representado na sua forma mais completa. Entretanto, algumas de suas parcelas podem ser nulas dependendo do problema a ser resolvido, porém a função $p(x)$ não pode ser nula, ainda que seja uma função identidade.
- b) As condições de contorno aplicadas às variáveis dependentes do problema auxiliar devem ser as mesmas que aquelas aplicadas às variáveis dependentes do problema principal. Caso o problema principal não tenha condições de contorno homogêneas, deve-se fazer o uso de projetores ortogonais [Cassol, 2006].
- c) Resolve-se o problema auxiliar.
- d) Usa-se o operador definido na equação (4.13) para transformar a equação original em um sistema de equações transformado.
- e) Resolve-se o sistema de equações transformado.
- f) Trunca-se a equação (4.12) até um critério de parada baseado em algum critério de convergência.

Para finalizar esta seção, fazem-se algumas observações sobre os problemas que podem ser resolvidos pela GITT. Existem duas condições básicas:

- a) O operador diferencial da equação que se quer resolver deve ser um termo Laplaciano. Isto equivale a dizer que a função $p(x)$ da equação (4.6) é não nula.

- b) As variáveis que se quer transformar têm que ter dimensão finita, ou seja, têm que estar contidas dentro do intervalo $a < x < b$.

4.2 O problema 2D

Sem perda de generalidade, estamos considerando 2 grupos de energia para os nêutrons ($G = 2$), 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados ($P = 6$) e 2 dimensões espaciais (x,y) , na qual $0 < x < L$ e $0 < y < M$. Aqui a perturbação na reatividade consiste em uma variação na seção macroscópica de remoção do grupo térmico, o que torna para fins de cálculos este parâmetro nuclear dependente do tempo.

Para solucionar o problema proposto utilizando o método GITT (*Generalized Integral Transform Technique*) algumas condições devem ser satisfeitas. A dimensão na qual se aplica o método deve ser finita e as condições de contorno devem ser homogêneas, caso contrário pode-se fazer o uso de projetores ortogonais [Cassol, 2006]. Além disso, o operador diferencial da equação a ser solucionada deve conter um termo laplaciano, porém a ausência desse termo pode ser resolvida adicionando-se uma constante multiplicada ao laplaciano na qual o seu limite tenda a zero [Ceolin, 2010]. Por isso, introduz-se um termo de difusão fictícia nas equações para a concentração de precursores de nêutrons atrasados da seguinte forma:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) C_i(x, y, t), \quad (4.14)$$

para $i = 1 : 6$, na qual ε é um parâmetro de valor pequeno e positivo, ou seja, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Portanto, assumindo que os parâmetros nucleares não variam no espaço-tempo, a não ser a seção macroscópica de remoção do grupo térmico, introduzindo o termo de difusão fictícia (4.14) e tendo em vista que todos os nêutrons são gerados no grupo rápido, ou seja, $\chi_1^p = \chi_1^d = 1$ e $\chi_2^p = \chi_2^d = 0$, pode-se escrever o sistema (4.1) em 2 dimensões como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1(x, y, t)}{\partial t} &= D_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \sum_{r_1} \phi_1(x, y, t) + \sum_{s_{21}} \phi_2(x, y, t) \\
&\quad + (1 - \beta) \chi_1^p \left(v \sum_{f_1} \phi_1(x, y, t) + v \sum_{f_2} \phi_2(x, y, t) \right) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, y, t) \\
\frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_2(x, y, t)}{\partial t} &= D_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \sum_{r_2} \phi_2(x, y, t) + \sum_{s_{12}} \phi_1(x, y, t) \\
&\quad \vdots \\
\frac{\partial C_i(x, y, t)}{\partial t} &= \beta_i \left(v \sum_{f_1} \phi_1(x, y, t) + v \sum_{f_2} \phi_2(x, y, t) \right) - \lambda_i C_i(x, y, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) C_i(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

para $i = 1 : 6$. Reescrevendo o sistema (4.15) em forma mais compacta e considerando que não há “up-scattering”, ou seja, $\sum_{s_{21}} = 0$, fica-se com:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1(x, y, t)}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 \phi_1(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + b \phi_1(x, y, t) + c \phi_2(x, y, t) + d_1 C_1 + \dots + d_6 C_6 \\
\frac{\partial \phi_2(x, y, t)}{\partial t} &= e \left(\frac{\partial^2 \phi_2(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + f \phi_1(x, y, t) + g(t) \phi_2(x, y, t) \\
&\quad \vdots \\
\frac{\partial C_i(x, y, t)}{\partial t} &= +\varepsilon \left(\frac{\partial^2 C_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_i(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + h_i \phi_1(x, y, t) + j_i \phi_2(x, y, t) + k_i C_i(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

na qual: $a = v_1 D_1$, $b = -v_1 \sum_{r_1} + v_1 (1 - \beta) v \sum_{f_1}$, $c = v_2 (1 - \beta) v \sum_{f_2}$, $d_i = v_1 \lambda_i$, $e = v_2 D_2$, $f = v_2 \sum_{s_{12}}$, $g(t) = -v_2 \sum_{r_2}(t)$, $h_i = \beta_i v \sum_{f_1}$, $j_i = \beta_i v \sum_{f_2}$, $k_i = -\lambda_i$, para $i = 1 : 6$.

A existência do termo laplaciano nas equações do sistema (4.16) a ser resolvido é uma exigência para a aplicação do método da GITT, pois possibilita a determinação do problema de Sturm-Liouville auxiliar. Logo, seguindo o formalismo da GITT, escolhe-se o problema auxiliar nas duas dimensões espaciais como:

$$\begin{aligned}
\phi_m''(x) + \lambda_m^2(x) \phi_m(x) &= 0 \quad 0 < x < L \\
\psi_n''(y) + \gamma_n^2(y) \psi_n(y) &= 0 \quad 0 < y < M
\end{aligned} \tag{4.17}$$

sujeito as mesmas condições de contorno do problema original na dimensão transformada. As funções $\varphi_m(x)$ e $\psi_n(y)$ e os valores λ_m e γ_n são conhecidos, respectivamente, como as autofunções e autovalores do operador diferencial de segunda ordem. Uma vez resolvido as equações (4.17), tem-se bem determinado as autofunções e seus respectivos autovalores. Se as condições de contorno forem homogêneas do tipo fluxo nulo nos contornos, tem-se por (Özikick,1980) que:

$$\begin{aligned}\varphi_m(x) &= \text{sen}(\lambda_m x) \\ \psi_n(y) &= \text{sen}(\gamma_n y)\end{aligned}\quad (4.18)$$

com os respectivos autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \left(\frac{m\pi}{L}\right) \\ \gamma_n &= \left(\frac{n\pi}{M}\right)\end{aligned}\quad (4.19)$$

para $m=1:N_{\max}$ e $n=1:N_{\max}$, na qual N_{\max} é a ordem de truncamento das séries. Estas autofunções (4.18) satisfazem as propriedades de ortogonalidade definidas como:

$$\frac{1}{\sqrt{N_m}\sqrt{N_p}} \int_0^L \varphi_m(x)\varphi_p(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq p \\ 1, & m = p \end{cases}\quad (4.20)$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{N_n}\sqrt{N_q}} \int_0^M \psi_n(y)\psi_q(y)dy = \begin{cases} 0, & n \neq q \\ 1, & n = q \end{cases} .\quad (4.21)$$

Aqui as normas N_m e N_n são dadas por:

$$N_m = \int_0^L \varphi_m^2(x)dx\quad (4.22)$$

e

$$N_n = \int_0^M \psi_n^2(y)dy .\quad (4.23)$$

As autofunções formam uma base para o espaço onde o operador diferencial está contido. Essa base será usada para expandir as variáveis fluxo de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados como somatórios dados por:

$$\phi_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}}, \quad (4.24)$$

$$\phi_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}}, \quad (4.25)$$

$$C_i(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{im,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}}, \quad (4.26)$$

para $i = 1:6$. Seguindo o formalismo da GITT substituem-se os somatórios (4.24), (4.25) e (4.26) no sistema (4.16) e obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}'_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} &= a \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m''(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n''(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \right) \\ &+ b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + d_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \\ &+ d_2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + \dots + d_6 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{6m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}'_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} &= e \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m''(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n''(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \right) \\ &+ f \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + g(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}'_{im,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} &= +\mathcal{E} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{im,n}(t) \varphi_m''(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{im,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n''(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \right), \quad (4.27) \\ &+ h_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + j_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2m,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} + k_i \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\xi}_{im,n}(t) \varphi_m(x) \psi_n(y)}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \end{aligned}$$

para $i = 1:6$. Aplicando o operador integral

$$\int_0^L \int_0^M \frac{\varphi_p(x) \psi_q(y)}{\sqrt{N_p} \sqrt{N_q}} dx dy \quad (4.28)$$

em (4.27), usando a propriedade da ortogonalidade e sabendo que $\varphi_m''(x) = -\lambda_m^2 \varphi_m(x)$ e $\psi_n''(y) = -\gamma_n^2 \psi_n(y)$, fica-se com uma equação diferencial ordinária matricial escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \overline{\Phi_{1m,n}}(t) \\ \overline{\Phi_{2m,n}}(t) \\ \overline{\xi_{1m,n}}(t) \\ \overline{\xi_{2m,n}}(t) \\ \vdots \\ \overline{\xi_{6m,n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2 & \cdots & \mathbf{D}_6 \\ \mathbf{E} & \mathbf{F}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_6 & \mathbf{H}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{K}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Phi_{1m,n}}(t) \\ \overline{\Phi_{2m,n}}(t) \\ \overline{\xi_{1m,n}}(t) \\ \overline{\xi_{2m,n}}(t) \\ \vdots \\ \overline{\xi_{6m,n}}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

para $m, n = 1: N_{\max}$, onde N_{\max} é a ordem de truncamento das séries (4.22), (4.23) e (4.24).

As matrizes de (4.29) são escritas como: $\mathbf{A} = a(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2) + b$, $\mathbf{B} = c$, $\mathbf{D}_i = d_i$, $\mathbf{E} = f$, $\mathbf{F}(t) = e(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2) + g(t)$, $\mathbf{G}_i = h_i$, $\mathbf{H}_i = j_i$, $\mathbf{K}_i = \varepsilon(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2) + k_i$, para $i = 1:6$. Todas essas matrizes são diagonais devido à aplicação da propriedade da ortogonalidade das autofunções. Além disso, elas têm ordem $(N_{\max})^2$ o que torna a equação matricial (4.29) de ordem $(G+P)(N_{\max})^2$. Considerando dois grupos de energia ($G = 2$) e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados ($P = 6$), tem-se que a ordem de (4.29) é de $8(N_{\max})^2$.

Nota-se que a equação (4.29) é uma equação matricial linear homogênea de primeira ordem com entradas dependentes do tempo e pode ser escrita como:

$$\overline{\mathbf{X}}'(t) + \mathbf{W}(t) \overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

Para resolver a equação (4.30), utiliza-se o método da Decomposição, analogamente ao caso das equações da cinética pontual. Expande-se $\overline{\mathbf{X}}(t)$ como uma série truncada da seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \sum_{r=0}^R \overline{\mathbf{X}}_r(t) \quad (4.31)$$

Substitui-se (4.31) em (4.30) resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\overline{\mathbf{X}}_0(t) + \overline{\mathbf{X}}_1(t) + \dots + \overline{\mathbf{X}}_R(t) \right) + (\mathbf{W}_0) \left(\overline{\mathbf{X}}_0(t) + \overline{\mathbf{X}}_1(t) + \dots + \overline{\mathbf{X}}_R(t) \right) \\ = -\mathbf{W}_1(t) \left(\overline{\mathbf{X}}_0(t) + \overline{\mathbf{X}}_1(t) + \dots + \overline{\mathbf{X}}_R(t) \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

na qual, $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1(t)$.

Seguindo o procedimento análogo a resolução das equações da cinética pontual, pode-se construir o sistema recursivo

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{\mathbf{X}}_0(t) \right) + \mathbf{W}_0 \overline{\mathbf{X}}_0(t) = 0 \quad (4.33)$$

para o primeiro termo da expansão da solução (4.32) e

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{\mathbf{X}}_r(t) \right) + \mathbf{W}_0 \left(\overline{\mathbf{X}}_r(t) \right) = -(\mathbf{W}_1(t)) \left(\overline{\mathbf{X}}_{r-1}(t) \right) \quad (4.34)$$

para o termo genérico da expansão da solução com $r=1:R$. A solução conhecida para equação matricial (4.34) utilizando a técnica da Transformada de Laplace com a propriedade da convolução é dado pela expressão (3.19). Da mesma forma, quando $\mathbf{W}_1(t) = 0$ em (4.34), a solução torna-se simplesmente a expressão (3.20). Além disso, para os problemas especiais em que os autovalores da matriz \mathbf{W}_0 são distintos, a exponencial da matriz pode ser expressa por (3.21).

Para completar a análise da solução, afirma-se que o problema homogêneo (4.33) satisfaz às condições iniciais (4.2) transformadas dadas por:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{g0m,n}(x, y, 0) &= \int_0^L \int_0^M \frac{\phi_g^0(x, y, 0) dx dy}{\sqrt{N_m} \sqrt{N_n}} \\ \overline{\xi}_{i0m,n}(x, y, 0) &= \frac{\beta_i \left(\sum_{g=1}^2 \nu \Sigma_{fg} \overline{\Phi}_{g0m,n}(x, y, 0) \right)}{\lambda_i} \end{aligned} \quad (4.35)$$

para $g = 1:2$ e $i = 1:6$, enquanto que para os problemas não-homogêneos (4.34) impõem-se condições iniciais nulas. Cabe ressaltar que estas condições iniciais $\phi_g^0(x, y, 0)$, para $g = 1:2$, são obtidas resolvendo-se a equação de difusão estacionária em forma analítica. Para mais detalhes ver apêndice A.

Uma vez determinada a solução para os $R+1$ sistemas recursivos dados por (4.33) e (4.34), basta substituí-los em (4.31) para obter a solução transformada. Com isso, pode-se encontrar a solução final dos fluxos de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados, utilizando as fórmulas da inversa da GITT dadas por (4.24 - 4.26). Analogamente, como na solução das equações da cinética pontual para a solução do problema transformado, truncam-se os R sistemas recursivos a partir de um critério de parada prescrito. A convergência é garantida satisfazendo-se o critério de Lyapunov.

A técnica mostrada anteriormente para a resolução do problema transformado se aplica bem para problemas de ordem até 1500 [Segatto et al., 1999] [Segatto et al., 2008]. Para casos específicos de problemas com ordens mais altas, propõe-se a ideia de fatorar a matriz \mathbf{W} como:

$$\mathbf{W}(t) = \widehat{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{U}, \quad (4.36)$$

na qual $\widehat{\mathbf{D}}(t)$ é a matriz diagonal de $\mathbf{W}(t)$ e \mathbf{U} é a matriz dos elementos restantes. Assim a equação (4.30) torna-se:

$$\overline{\mathbf{X}}'(t) + \mathbf{D}(t) \overline{\mathbf{X}}(t) = -\mathbf{U} \overline{\mathbf{X}}(t). \quad (4.37)$$

Agora aplica-se o método da Decomposição, analogamente ao caso das equações da cinética pontual. Primeiro, fazendo $\widehat{\mathbf{D}}(t) = \widehat{\mathbf{D}}_0 + \widehat{\mathbf{D}}_1(t)$, na qual $\widehat{\mathbf{D}}_0$ é a matriz diagonal de

$\mathbf{W}(t)$ sem o termo dependente do tempo e $\widehat{\mathbf{D}}_1(t)$ é a matriz diagonal de $\mathbf{W}(t)$ somente com o termo dependente do tempo. Expande-se $\overline{\mathbf{X}}(t)$ como uma série truncada e substitui-se em (4.37). Com isto é possível construir o sistema recursivo

$$\frac{d}{dt}(\overline{\mathbf{X}}_0(t)) + \widehat{\mathbf{D}}_0 \overline{\mathbf{X}}_0(t) = 0, \quad (4.38)$$

para o primeiro termo da expansão em série e

$$\frac{d}{dt}(\overline{\mathbf{X}}_r(t)) + \widehat{\mathbf{D}}_0(\overline{\mathbf{X}}_r(t)) = -(\widehat{\mathbf{D}}_1(t) + U)(\overline{\mathbf{X}}_{r-1}(t)) \quad (4.39)$$

para o termo genérico da expansão da solução em série com $r = 1 : R$.

A fatoração da matriz \mathbf{W} como $\mathbf{W}(t) = \widehat{\mathbf{D}}(t) + U$ possibilita trabalhar com matrizes de ordem muito elevada, uma vez que a solução da solução homogênea (4.38) e não-homogênea (4.39) tornam-se facilmente resolvidas pelas expressões (3.19 -3.21). A vantagem aqui é que a solução do problema homogêneo torna-se simplificada, uma vez que $\widehat{\mathbf{D}}_0$ é uma matriz diagonal e sua exponencial torna-se:

$$\exp(-\widehat{\mathbf{D}}_0 t) = \begin{pmatrix} \exp(-\widehat{d}_{11}t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(-\widehat{d}_{22}t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(-\widehat{d}_{jj}t) \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

na qual, \widehat{d}_{jj} são os elementos da diagonal da matriz $\widehat{\mathbf{D}}_0$ para $j = 1 : 8(N_{\max})^2$. Ou seja, para uma matriz diagonal, calcular a sua exponencial é equivalente a exponenciar cada elemento da diagonal.

4.3 O problema 3D

Analogamente ao caso 2D, sem perda de generalidade, consideram-se para este caso: 2 grupos de energia para os nêutrons ($G = 2$), 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados

($P = 2$) e 3 dimensões espaciais (x, y, z) na qual: $0 < x < L$, $0 < y < M$ e $0 < z < Q$. Introduzindo o termo de difusão fictícia nas equações para a concentração de precursores de nêutrons atrasados, assumindo que os parâmetros nucleares não variam no espaço-tempo, a não ser a seção de choque macroscópica de remoção do grupo térmico, e tendo em vista que todos os nêutrons são gerados no grupo rápido, fica-se com as equações de cinética espacial 3D:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1(x, y, z, t)}{\partial t} &= D_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_1(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) - \Sigma_{r1} \phi_1(x, y, z, t) \\
&+ \Sigma_{s21} \phi_2(x, y, z, t) + (1 - \beta) \chi_1^p \left(\nu \Sigma_{f1} \phi_1(x, y, z, t) + \nu \Sigma_{f2} \phi_2(x, y, z, t) \right) \\
&+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(x, y, z, t) \\
\frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_2(x, y, z, t)}{\partial t} &= D_2 \left(\frac{\partial^2 \phi_2(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) - \Sigma_{r2}(t) \phi_2(x, y, z, t), \quad (4.41) \\
&+ \Sigma_{s12} \phi_1(x, y, z, t) \\
\frac{\partial C_i(x, y, z, t)}{\partial t} &= \beta_i \left(\nu \Sigma_{f1} \phi_1(x, y, z, t) + \nu \Sigma_{f2} \phi_2(x, y, z, t) \right) - \lambda_i C_i(x, y, z, t) \\
&+ \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) C_i(x, y, z, t)
\end{aligned}$$

para $i = 1:6$, com condições de contorno para o problema tridimensional, especificamente dadas por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_g(x, y, 0, t)}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \phi_g(x, 0, z, t)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \phi_g(0, y, z, t)}{\partial x} &= 0 \cdot \\
\phi_g(x, y, Q, t) &= 0 \\
\phi_g(x, M, z, t) &= 0 \\
\phi_g(L, y, z, t) &= 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

para $g = 1:2$, com as condições iniciais para $t > 0$ dadas por (4.2).

Ao invés de seguir o formalismo da GITT e determinar o problema auxiliar de Sturm Liouville nas três dimensões espaciais, escolhe-se o problema auxiliar em uma dimensão espacial, recaindo num problema 2D resolvido anteriormente. Assim, escolhendo o problema auxiliar na dimensão z fica-se com:

$$\eta_p''(z) + \tau_p^2(z) \eta_p(z) = 0, \quad (4.43)$$

para $0 < z < Q$, $p = 1:N_{\max}$, na qual N_{\max} é a ordem de truncamento da expansão em série, sujeito as mesmas condições de contorno originais na dimensão transformada. A função $\eta_p(z)$ e o valor τ_p são, respectivamente, as autofunções e autovalores do operador diferencial de segunda ordem. Uma vez resolvido as equações (4.43), tem-se bem determinado as autofunções e seus respectivos autovalores. Tomando as condições de contorno (4.43) na dimensão z , tem-se por [Öziziki, 1980]

$$\eta_p(z) = \cos(\tau_p z), \quad (4.44)$$

com os respectivos autovalores

$$\tau_p = \left(\frac{(2p-1)\pi}{2Q} \right), \quad (4.45)$$

para $p = 1:N_{\max}$. Esta autofunção (4.44) satisfaz a propriedade de ortogonalidade definida por:

$$\frac{1}{\sqrt{N_p} \sqrt{N_s}} \int_0^Q \eta_p(z) \eta_s(z) dz = \begin{cases} 0, & p \neq s \\ 1, & p = s \end{cases} \quad (4.46)$$

Aqui a norma N_p é dada por:

$$N_p = \int_0^Q \eta_p^2(z) dz \quad (4.47)$$

Aplicando a GITT na dimensão z , expandem-se as variáveis fluxo de nêutrons e concentração de precursores de nêutrons atrasados como somatórios dados por:

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{1p}(x, y, t) \eta_p(z)}{\sqrt{N_p}} \quad , \quad (4.48)$$

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\overline{\Phi}_{2p}(x, y, t) \eta_p(z)}{\sqrt{N_p}} \quad , \quad (4.49)$$

$$C_i(x, y, z, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\overline{\zeta}_{ip}(x, y, t) \eta_p(z)}{\sqrt{N_p}} \quad , \quad (4.50)$$

para $i = 1 : 6$. Seguindo o formalismo da GITT, realizam-se os seguintes passos: substituem-se os somatórios (4.48 – 4.50) em (4.41); aplica-se o operador integral (4.46) e usa-se a propriedade da ortogonalidade sabendo que $\eta_p''(z) = -\tau_p^2 \eta_p(z)$, para $p = 1 : N_{\max}$. Com isso, recai-se num problema semelhante ao caso 2D com dimensão N_{\max} . A diferença está na composição da diagonal da matriz da equação (4.29) que agora contém os autovalores do problema na dimensão z , ou seja, contém as seguintes matrizes: $\mathbf{A} = a(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2 - \tau_p^2) + b$, $\mathbf{F}(t) = e(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2 - \tau_p^2) + g(t)$, $\mathbf{K}_i = \varepsilon(-\lambda_m^2 - \gamma_n^2 - \tau_p^2) + k_i$, para $i = 1:6$, o que resulta num problema transformado análogo ao problema bidimensional da mesma forma:

$$\overline{\mathbf{X}}'(t) + \mathbf{W}(t)\overline{\mathbf{X}}(t) = 0, \quad (4.51)$$

com dimensão agora $(8 N_{\max}^3)$.

Uma vez que a solução da equação (4.51) está bem estabelecida, basta substituir nas expansões em série (4.48 - 4.50) para se obter a solução do problema 3D, de forma análoga ao problema 2D.

4.4 Critério de convergência e unicidade para o problema auxiliar

Nesta seção, mostra-se a análise da convergência para uma dimensão espacial, no caso específico para a coordenada x , uma vez que para as demais dimensões o procedimento é

análogo. Cabe ressaltar que, como os problemas auxiliares são idênticos nas dimensões espaciais, a ordem de truncamento das séries é a mesma em todas as dimensões espaciais.

Com o sistema de equações transformado resolvido, sua solução é substituída nas fórmulas inversas da GITT (4.24 – 4.26). Uma questão natural que surge é quando truncar a série para a garantia da convergência e obtenção dos resultados para um desvio prescrito. Aqui determina-se um critério real de convergência salientando a eficiência do algoritmo proposto para controlar a convergência da solução e determinar seu truncamento associado a uma precisão prescrita baseado numa analogia ao Teorema Cardinal de Interpolação.

Mais especificamente, sabendo que o comportamento do fluxo de nêutrons rápidos e térmicos são dominados pelos valores das seções de choque total Σ_{Tg} para cada grupo, pode-se inferir que entre o livre caminho médio do nêutron, o seu fluxo é inalterado. Ao analisar microscopicamente o problema, estima-se que a média de caminho percorrido por um nêutron logo após uma interação qualquer é igual ao livre caminho médio; porém, há uma probabilidade de interações que ocorrem antes (como depois) do nêutron ter percorrido o livre caminho médio. A ideia básica de definir o critério de convergência consiste na determinação de um divisor inteiro (m) do livre caminho médio de nêutrons tal que, abaixo deste valor, o fluxo de nêutrons é quase homogêneo, garantindo que é muito pouco provável que interações possam alterar o fluxo de nêutrons de forma significativa neste caminho. Em outras palavras, a quantidade $(m \Sigma_{Tg})^{-1}$ define uma densidade de amostragem.

A estrutura do fluxo escalar de nêutrons é essencialmente determinada pela interação de nêutrons presente em forma de seções de choque transversais macroscópicas. Isto significa que entre duas sucessivas interações de nêutrons eles se comportam na média como partículas livres compatível com um fluxo homogêneo. Assim, pode-se concluir que, com a diminuição do comprimento $(m \Sigma_{Tg})^{-1}$ para um crescente m , variações na solução tornam-se desprezíveis.

Assim, utiliza-se uma analogia ao Teorema Cardinal de Interpolação [Godmann, 1996] que diz: "Uma função quadrado integrável $\Omega = \int_r \phi(x,t)dx$, com espectro (λ_i) , na qual é limitado por $(m \Sigma_T)^{-1}$ tem uma solução exata para uma expansão finita".

No caso da abordagem utilizada no presente caso, este teorema se encaixa perfeitamente se, depois de certa ordem de truncamento do número de termos N_{\max} das séries, o desvio se torna irrelevante, permitindo assim a aplicação do teorema. A escolha de m está

relacionada com o número máximo de termos (no caso N_{\max}) na série para a região de interesse, que depende da convergência da solução. Assim é possível estabelecer uma relação entre m e N_{\max} , a saber:

$$N_{\max} = \text{int} \left(\frac{m \sum_{T_g} \Delta r}{2\pi} \right), \quad (4.52)$$

na qual m é um inteiro, $\sum_{T_g} = \sum_{ag} + \sum_{fg} + \sum_{g'g}$ é a seção de choque macroscópica total do grupo g e Δr denota a dimensão total no domínio transformado, ou seja, no presente caso, $\Delta r = M$. Esta relação é uma aproximação e está relacionado com a convergência da abordagem e o teorema de Parseval pode ser usado para estimar o desvio. Para o espectro limitado e de acordo com o teorema a solução é exata. Em nossa aproximação, se m é adequadamente escolhido de forma que a parte de corte do espectro é desprezível, então a solução encontrada é quase exata.

Para completar a análise, no apêndice B, prova-se um teorema com o qual pode se estabelecer uma solução em forma única. O teste de Abel, mostrado no apêndice B, para a convergência uniforme, permite determinar as propriedades de convergência adicional de soluções obtidas em forma de série, propriedades que são úteis tanto em soluções já estabelecidas e para provar que existe uma solução única com a aplicação da GITT.

4.5 Resultados numéricos

Para os resultados numéricos, no caso de uma perturbação uniforme na reatividade, utilizam-se como referência os trabalhos de: [Aboanber e Hamada, 2008] para o problema 2D e [Ferguson, 1973] para o problema 3D. Para as perturbações variáveis com o tempo, utilizam-se apenas os parâmetros nucleares dos referidos autores e verificam-se as soluções obtidas pela metodologia proposta em casos teste.

Todos os transientes considerados são uma perturbação no estado estacionário, ou seja, é suposto que, quando esta perturbação ocorre, o fluxo e as concentrações de precursores estão em seus valores no estado estacionário. Estas condições iniciais são geralmente obtidas a partir de cálculos estacionários da teoria da difusão. Aqui cabe salientar que utiliza-se uma condição inicial resolvida de forma semelhante a [Bodmann et al., 2010]. A diferença está no tratamento dado ao conjunto de equações diferenciais ordinárias transformadas surgidas da

aplicação da GITT, na qual, recentemente, [Bodmann et al., 2010] resolveu utilizando transformada de Laplace. Neste trabalho, utiliza-se a diagonalização da matriz. Para mais detalhes ver Apêndice A.

Para os resultados numéricos considera-se o parâmetro $\varepsilon = 10^{-9}$, um critério de parada para os R sistemas recursivos do problema transformado de $\gamma = 10^{-5}$ e um N_{\max} para o truncamento das séries dado pela expressão (4.44). Cabe ressaltar que para determinação do N_{\max} consideram-se os parâmetros nucleares para o grupo térmico e um intervalo de $m = 10$. Para efeito de simplicidade, na comparação dos resultados numéricos, a metodologia proposta para a resolução das equações da cinética espacial será designado por GITTDM.

4.5.1 Caso teste para o problema 2D

Para este problema são considerados dois grupos de energia, um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados para um reator térmico. O reator é homogêneo de 200 cm de lado. As condições de contorno utilizadas foram de Dirichlet homogêneas nos contornos. Consideram-se neste problema três tipos de reatividades. O caso teste A consiste de uma perturbação uniforme na seção macroscópica de absorção térmica correspondente a $\Sigma_{a2} = \Sigma_{a2}(0) - 0,396 \times 10^{-4}$. O caso teste B consiste de uma perturbação do tipo rampa linear, induzida pela alteração na seção de choque de absorção térmica. Dois transientes foram estudados: uma rampa linear de acordo com $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha t$ para $t > 0$ s; e uma rampa linear $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha t$ para $0 < t < 0,16$ s, seguida de uma perturbação uniforme $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha$ para $t > 0,16$ s, onde α é um valor real. Por fim, para o caso teste C, faz-se uma perturbação do tipo senoidal: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - 0,396 \times 10^{-4} \text{sen}(2\pi t / T)$, onde T é o período.

O caso de uma perturbação uniforme na seção de choque macroscópica de absorção foi utilizado para validar a metodologia desenvolvida procurando reproduzir os resultados de [Aboanber e Hamada, 2008] para um grupo de precursor de nêutrons atrasados. Já para as demais perturbações, faz-se casos teste para testar a metodologia proposta em diferentes situações variando a seção de choque de absorção térmica, tanto para um grupo como para seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Os parâmetros nucleares utilizados para as três perturbações são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Parâmetros nucleares.

Dimensões	Homogêneo 2 Dimensões	
	Grupo 1	Grupo 2
Propriedades Materiais		
$D_g [cm]$	1,35	1,08
$\Sigma_{ag} [cm^{-1}]$	0,001382	0,00569
ν	2,41	2,41
$\Sigma_{fg} [cm^{-1}]$	0,000242	0,00428
$\Sigma_{sgg} [cm^{-1}]$	0,0023	0
χ_g	1,0	0
Constante dos Precursores	$\lambda = 0,08$	$\beta = 0,0064$
k_{eff}	1,000008	

Para os seis grupos de precursores, os parâmetros nucleares são dados pela Tabela 4.2.

Tabela 4.2 - Parâmetros nucleares para seis grupos de precursores.

Nêutrons Atrasados	
$\beta_i \times 10^{-3}$	$\lambda_i (s^{-1})$
0,214	0,0124
1,423	0,0305
1,247	0,111
2,568	0,301
0,748	1,14
0,273	3,01
$\beta = 6,4 \times 10^{-3}$	

Caso A: perturbação uniforme

Para esta perturbação calcula-se o fluxo térmico de nêutrons no centro do domínio para diferentes tempos e compara-se com a solução numérica obtida por [Aboanber e Hamada, 2008]. Na Tabela 4.3, como esperado, a partir de nossa análise de convergência para poucos termos na expansão em série, obteve-se uma boa concordância com os resultados apresentados pela referência. Os resultados obtidos pela metodologia GITTDM teve uma melhor concordância com o GRK 4A para $N = 306$ passos no tempo.

Na Tabela 4.4, mostra-se o comportamento do fluxo de nêutrons para diversos pontos do domínio para $t = 0,4$ s. Pode-se observar a simetria do fluxo e seu máximo no centro do domínio.

Tabela 4.3 - Comparação numérica do fluxo térmico de nêutrons no centro do domínio (100, 100, t) para diferentes tempos.

tempo (s)	Fluxo de Nêutrons térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)			
	GITDM $N_{\max} = 3$ $\gamma = 10^{-5}$	GRK 4A $N = 306$	GRK 4T $N = 1006$	GRK 4P1 $N = 1423$
0	0,38135	0,382	0,382	0,382
0,08	0,61321	0,613	0,613	0,613
0,16	0,81622	0,816	0,816	0,815
0,24	0,99721	0,995	0,995	0,996
0,32	1,15884	1,156	1,155	1,155
0,4	1,30330	1,300	1,300	1,299

Tabela 4.4 - Distribuição do fluxo de nêutrons para $t = 0,4s$.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	0,65164	1,76099
(50,100)	0,92156	2,49042
(50,150)	0,65164	1,76099
(100,100)	1,30330	3,52199
(100,150)	0,92156	2,49042
(150,50)	0,65164	1,76099
(150,100)	0,92156	2,49042
(150,150)	0,65164	1,76099

Isso também pode ser observado nas Figuras 4.1 e 4.2, bem como a exata satisfação das condições de contorno para o fluxo de nêutrons.

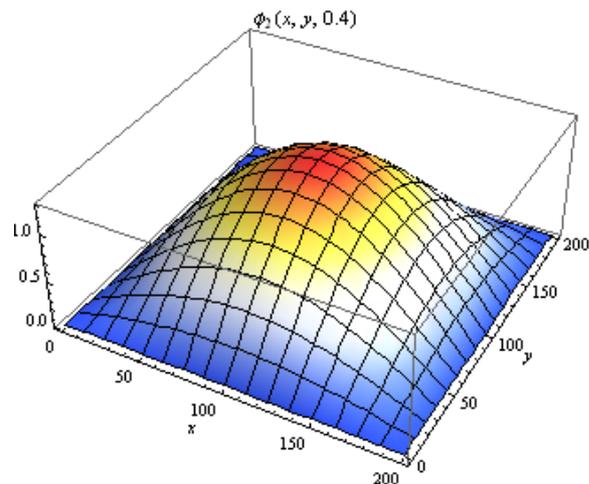


Figura 4.1 - Distribuição do fluxo térmico de nêutrons para $t = 0,4s$.

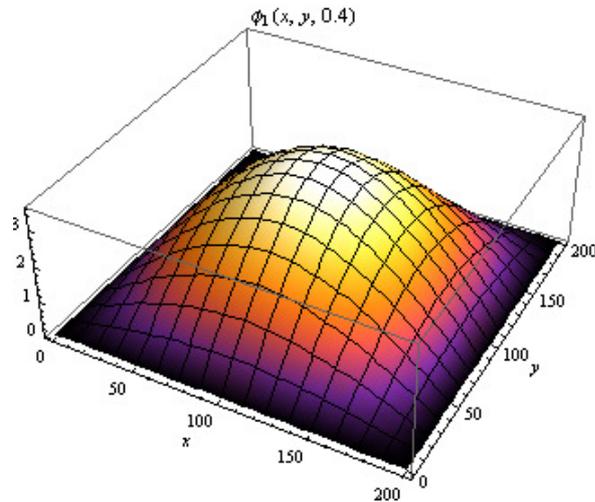


Figura 4.2 - Distribuição do fluxo rápido de nêutrons para $t = 0,4s$.

Para finalizar a análise desta perturbação uniforme, mostra-se na Tabela 4.5 o fluxo de nêutrons rápido para diferentes tempos.

Tabela 4.5 - Fluxo de nêutrons rápido no centro do domínio (100, 100, t) para diferentes tempos.

tempo (s)	Fluxo de Nêutrons rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)		
	$N_{\max} = 3$	$\gamma = 10^{-5}$	GITTD
0			1,13200
0,08			1,65713
0,16			2,20574
0,24			2,69485
0,32			3,13163
0,4			3,52199

Caso B: perturbação do tipo rampa

Neste caso teste B consideram-se 2 exemplos. A ideia aqui é variar a inclinação das rampas e observar as mudanças na potência do reator para um e seis grupos de precursores.

Primeiro considera-se uma perturbação do tipo rampa linear da seguinte forma: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha t$, onde α é um parâmetro real. A ideia aqui é variar a inclinação dada por α e observar as variações na potência normalizada para diversas inclinações. Isto pode ser observado nas Figuras 4.3 e 4.4 que mostram o comportamento da potência para diferentes inclinações considerando um e seis grupos de precursores, respectivamente. Nota-se um

crescimento considerável da potência para um $\alpha = 0,396 \times 10^{-3}$ que corresponde a um aumento na reatividade para $t = 0,4s$ de aproximadamente 80 cents. Para as demais inclinações da rampa, há um crescimento controlado da potência para os tempos calculados. Observa-se também um crescimento da potência para o parâmetro $\alpha = 0$, uma vez que o sistema é supercrítico. Ou seja, no estado estacionário o coeficiente de multiplicação efetivo está um pouco acima da criticalidade.

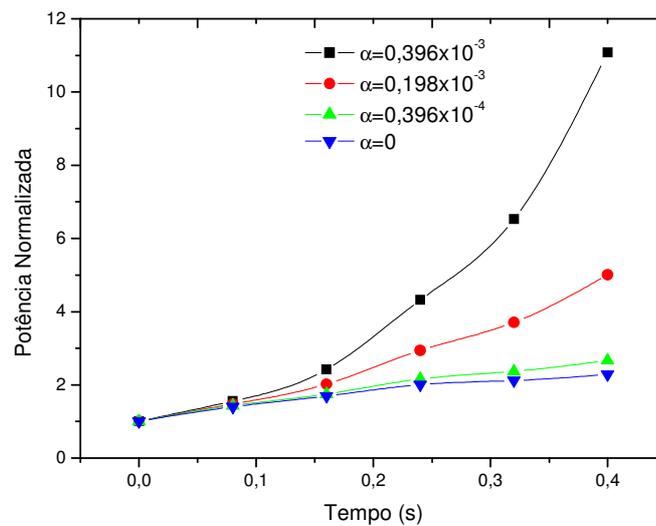


Figura 4.3 - Potência normalizada para uma rampa linear considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.

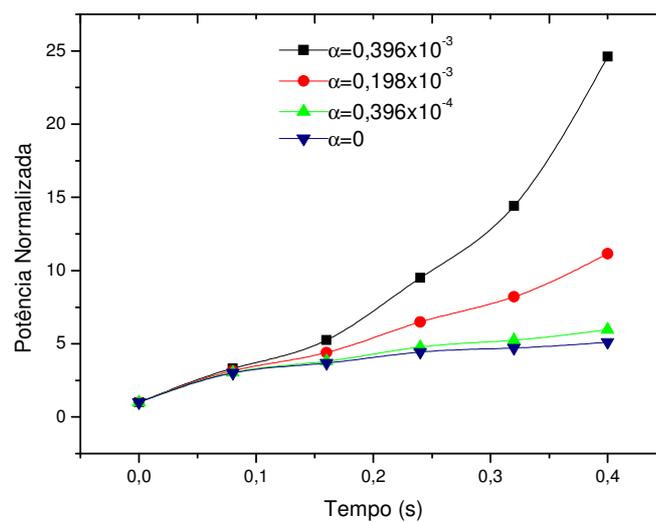


Figura 4.4 - Potência normalizada para uma rampa linear considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Analisando os resultados encontrados para a potência normalizada apresentados na Figura 4.4, observa-se que o valor da potência para o modelo de cinética, considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados é aproximadamente o dobro da potência encontrada para o modelo considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados (Figura 4.3). A explicação para esse resultado, decorre no fato que, usando os resultados obtidos para a concentração, nota-se que o termo de fonte da equação do fluxo para o modelo de seis grupos é aproximadamente 60% maior que o valor do termo de fonte para um grupo de precursores, para os valores de tempo considerados. Cumpre também observar que, a constante de decaimento para o modelo de um grupo de precursores foi aquela apresentada na Tabela 4.1, já para seis grupos, aquela apresentada na Tabela 4.2. Por outro lado, empregando a fórmula de equivalência para o modelo de um grupo ($\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{\lambda_i}$), nota-se uma redução significativa dessa diferença entre os termos de fonte do modelo de seis grupos e um grupo. Acredita-se que a explicação da diferença de potência observada é fundamentada pelos argumentos acima citados.

Para finalizar, mostra-se o comportamento do fluxo de nêutrons para um e seis grupos de precursores em diferentes pontos para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ nas Tabelas 4.6 e 4.7. Mais uma vez percebe-se a simetria do fluxo e seu máximo sendo atingido no centro do domínio. Pode-se notar também que, tanto o comportamento da potência como o do fluxo de nêutrons são semelhantes para um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados, diferenciando-se apenas pela magnitude dos mesmos.

Tabela 4.6 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4$ s .

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	0,51496	1,39540
(50,100)	0,72827	1,97340
(50,150)	0,51496	1,39540
(100,100)	1,02993	2,79081
(100,150)	0,72827	1,97340
(150,50)	0,51496	1,39540
(150,100)	0,72827	1,97340
(150,150)	0,51496	1,39540

Tabela 4.7 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4$ s.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	1,22374	3,31700
(50,100)	1,73063	4,69095
(50,150)	1,22374	3,31700
(100,100)	2,44748	6,63401
(100,150)	1,73063	4,69095
(150,50)	1,22374	3,31700
(150,100)	1,73063	4,69095
(150,150)	1,22374	3,31700

Para o segundo exemplo considera-se uma rampa linear do tipo: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha t$ para $0 < t < 0,16$ s, seguida de uma perturbação uniforme do tipo $\Sigma_{a2} = \Sigma_{a2}(0) - \alpha$ para $t > 0,16$ s, na qual α é um valor real.

Mais uma vez a ideia é variar α a fim de observar as variações do fluxo e, consequentemente, da potência do reator. Nota-se que para inclinações maiores há um crescimento mais significativo do fluxo de nêutrons o que corresponde a uma maior potência.

Para este tipo de perturbação, observa-se um crescimento mais rápido da potência para tempos curtos quando comparado com o exemplo anterior.

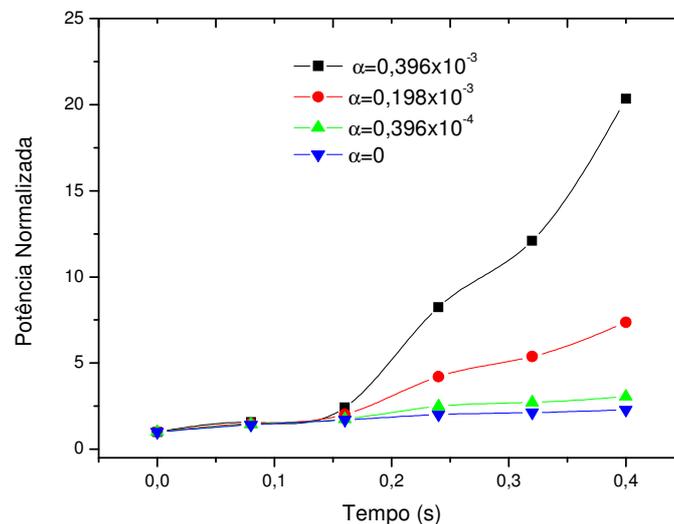


Figura 4.5 - Potência normalizada para uma rampa linear seguida de uma perturbação uniforme considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.

Isto pode ser melhor observado nas Figuras 4.5 e 4.6 para um e seis grupos de precursores, respectivamente. Percebe-se que, para um $\alpha = 0,396 \times 10^{-3}$, há um crescimento

mais significativo da potência para um intervalo curto de tempo. Isto pode ser explicado pelo maior decréscimo da seção de choque de absorção em valores absolutos. Mais uma vez, observa-se na Figura 4.6 que a potência normalizada aproximadamente é o dobro em relação a um grupo de precursores (Figura 4.5). A explicação é análoga ao exemplo anterior.

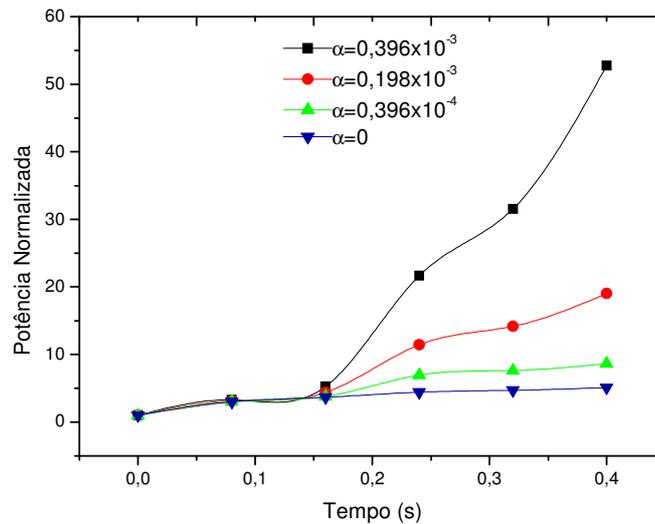


Figura 4.6 - Potência normalizada para uma rampa linear seguida de uma perturbação uniforme considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Para finalizar, nas Tabelas 4.8 e 4.9, mostra-se o comportamento do fluxo de nêutrons em diferentes pontos para $\alpha=0,396 \times 10^{-4}$, considerando um e seis grupos de precursores, respectivamente. Mais uma vez percebe-se a simetria do fluxo e seu máximo sendo atingido no centro do reator. O comportamento para um e seis grupos de precursores é semelhante, diferenciando-se pela magnitude dos fluxos e potência.

Tabela 4.8 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $\alpha=0,396 \times 10^{-4}$ e $t=0,4s$.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	0,58774	1,58831
(50,100)	0,83119	2,24621
(50,150)	0,58774	1,58831
(100,100)	1,17549	3,17661
(100,150)	0,83119	2,24621
(150,50)	0,58774	1,58831
(150,100)	0,83119	2,24621
(150,150)	0,58774	1,58831

Tabela 4.9 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $t = 0,4s$.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	1,77426	4,79620
(50,100)	2,50918	6,78285
(50,150)	1,77426	4,79620
(100,100)	3,54851	9,59238
(100,150)	2,50918	6,78285
(150,50)	1,77426	4,79620
(150,100)	2,50918	6,78285
(150,150)	1,77426	4,79620

Caso C: perturbação do tipo senoidal

Neste caso, considera-se uma perturbação do tipo: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - 0,396 \times 10^{-4} \text{sen}(2\pi t / T)$, na qual T é o período. A ideia aqui é variar o período da função seno e observar as variações do fluxo e, conseqüentemente, da potência do reator.

Nas Figuras 4.7 e 4.8, para um e seis grupos de precursores respectivamente, apresentam-se os resultados obtidos. Pode-se observar um crescimento oscilatório da potência a medida que o tempo cresce. Além disso, como esperado, a potência normalizada para seis grupos é aproximadamente o dobro em relação a um grupo.

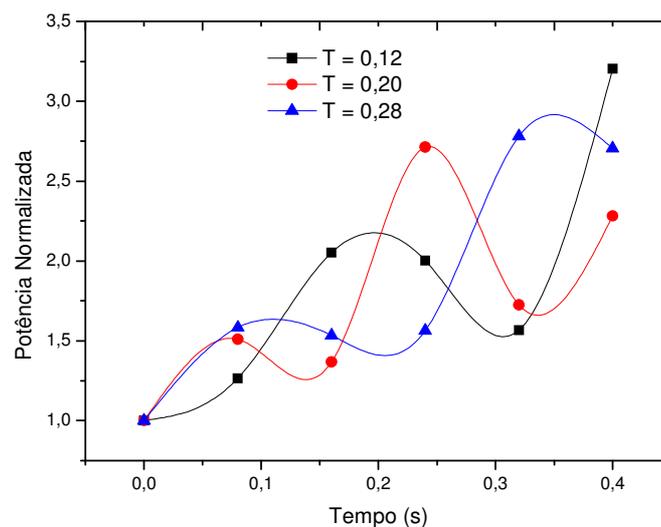


Figura 4.7 - Potência normalizada para uma perturbação senoidal considerando um grupo de precursores de nêutrons atrasados.

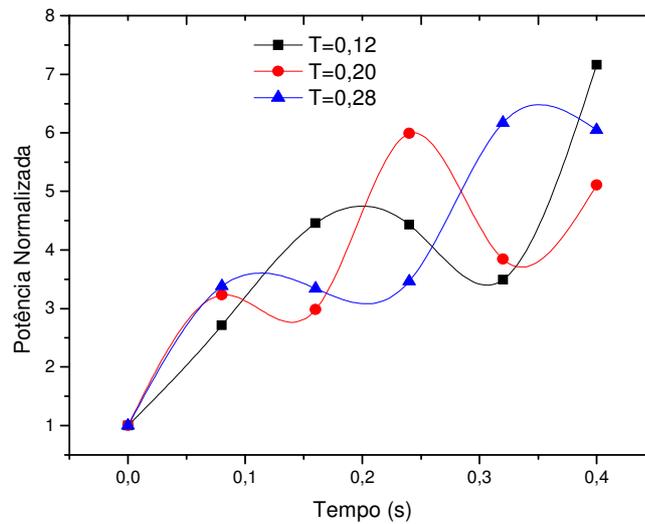


Figura 4.8 - Potência normalizada para uma perturbação senoidal considerando seis grupos de precursores de nêutrons atrasados.

Nas Tabelas 4.10 e 4.11, para um e seis grupos de precursores respectivamente, apresenta-se o comportamento da distribuição do fluxo de nêutrons, mostrando mais uma vez a simetria e o máximo sendo alcançado no centro do reator para $t = 0,4 s$ e $T = 0,28 s$.

Mais uma vez o comportamento para um e seis grupos de precursores de nêutrons é semelhante; diferenciando-os pela magnitude dos fluxos e potência.

Tabela 4.10 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando um grupo de precursores para $T = 0,28 s$ e $t = 0,4 s$.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	0,44038	1,19548
(50,100)	0,62280	1,69067
(50,150)	0,44038	1,19548
(100,100)	0,88077	2,39097
(100,150)	0,62280	1,69067
(150,50)	0,44038	1,19548
(150,100)	0,62280	1,69067
(150,150)	0,44038	1,19548

4.5.2 Caso teste para o problema 3D

Para o caso teste 3D, considera-se um cubo homogêneo, de lado $200 cm$, com dois grupos de energia e um grupo de precursores de nêutrons atrasados. As condições de contorno

utilizadas foram do tipo mista, divididas em duas partes: condição de contorno de Dirichlet e condição de contorno de Neumann para os seis lados dadas pela equação (4.45).

Tabela 4.11 - Distribuição do fluxo de nêutrons considerando seis grupos de precursores para $T = 0,28s$ e $t = 0,4s$.

Pontos do domínio (x,y)	Fluxo Térmico ($cm^{-2} \times s^{-1}$)	Fluxo Rápido ($cm^{-2} \times s^{-1}$)
(50,50)	1,04736	2,84405
(50,100)	1,48119	4,02210
(50,150)	1,04736	2,84405
(100,100)	2,09472	5,68810
(100,150)	1,48119	4,02210
(150,50)	1,04736	2,84405
(150,100)	1,48119	4,02210
(150,150)	1,04736	2,84405

Consideram-se, analogamente ao problema 2D, perturbações que consistem em mudanças na seção de choque de absorção térmica das seguintes formas: uniforme, rampa e oscilatória.

O caso de uma perturbação constante é utilizado para validar a metodologia e verificar o comportamento espacial do fluxo de nêutrons. Os resultados são comparados com o 3DKIN proposto por [Ferguson, 1973]. Os parâmetros nucleares usados para este caso teste 3D são os mesmos do problema 2D, dados pelas Tabelas 4.1 e 4.2. Já para as demais perturbações variáveis com o tempo, casos teste são feitos para verificar a metodologia proposta em diferentes situações, variando a seção de choque de absorção térmica e observando as variações na potência.

Caso A: perturbação uniforme

Na Tabela 4.12, os valores apresentados são para o fluxo de nêutrons térmico no ponto central do reator. A fim de reproduzir valores numéricos que mantenham a solução abaixo de um nível de desvio prescrito, três termos na solução em série são necessários. O método GITTDM mostra boa concordância quando comparado com o código 3DKIN proposto por [Ferguson, 1973].

Na Tabela 4.13, é mostrado o comportamento do fluxo de nêutrons para $z = 100\text{ cm}$ e $t = 0,4s$.

Tabela 4.12 - Comparação numérica do fluxo térmico no centro do reator (100, 100, 100, t) para diferentes tempos.

tempo (s)	Fluxo Térmico [$cm^{-2} \times s^{-1}$]				
	3DKIN $\Delta t = 0,01$	3DKIN $\Delta t = 0,005$	3DKIN $\Delta t = 0,002$	3DKIN $\Delta t = 0,001$	GITDM $N_{\max} = 3$
0	0,816	0,816	0,816	0,816	0,81679
0,05	0,920	1,043	1,116	1,124	1,12785
0,10	1,151	1,361	1,403	1,406	1,40727
0,15	1,454	1,651	1,660	1,660	1,66387
0,20	1,782	1,904	1,892	1,891	1,892020
0,30	2,388	2,328	2,294	2,288	2,28934
0,40	2,840	2,671	2,628	2,622	2,62060

O fluxo é máximo no contorno e decai satisfazendo as condições de contorno. Isto também pode ser observado nas Figuras 4.9 e 4.10.

Tabela 4.13 - Distribuição do fluxo de nêutrons para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$.

Pontos do domínio (x,y,z)	Fluxo térmico [$cm^{-2} \times s^{-1}$]	Fluxo rápido [$cm^{-2} \times s^{-1}$]
(50,50,100)	4,45887	11,80740
(50,100,100)	3,41267	9,03700
(50,150,100)	1,84692	4,89079
(100,100,100)	2,62060	6,93976
(100,150,100)	1,41826	3,75577
(150,50,100)	1,85916	4,92352
(150,100,100)	1,42294	3,25372
(150,150,100)	0,77008	2,03939

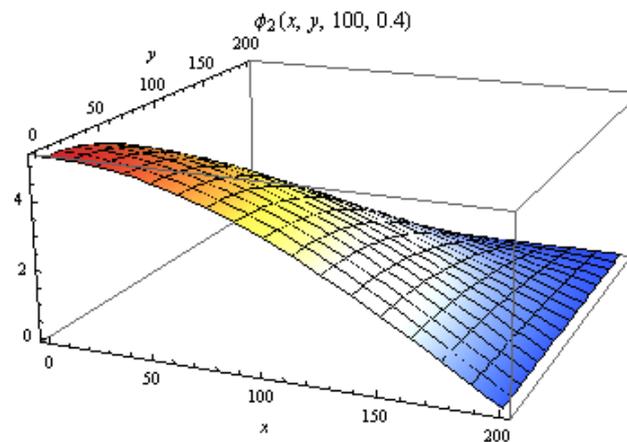


Figura 4.9 - Fluxo térmico para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$.

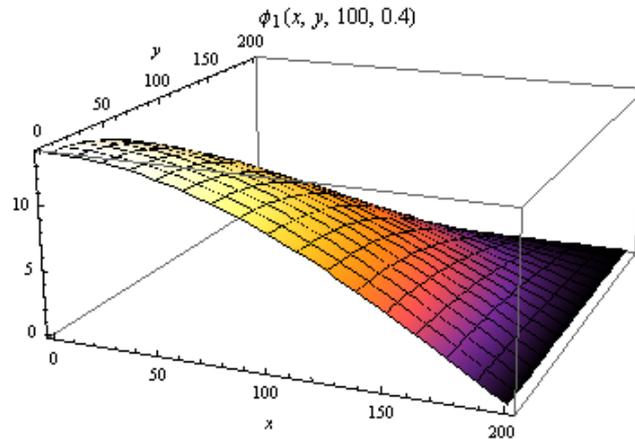


Figura 4.10 - Fluxo rápido para $z = 100 \text{ cm}$ e $t = 0,4 \text{ s}$.

Por fim, na Tabela 4.14, apresenta-se o fluxo rápido de nêutrons para diferentes tempos no centro do domínio.

Tabela 4.14 - Fluxo de nêutrons rápido no centro do domínio (100, 100, 100,t) para diferentes tempos.

tempo (s)	Fluxo de Nêutrons rápido ($\text{cm}^{-2} \times \text{s}^{-1}$)	
	$N_{\text{max}} = 3$	$\gamma = 10^{-5}$ GITTDM
0	2,16347	
0,05	2,98704	
0,1	3,72689	
0,15	4,39575	
0,20	5,00567	
0,3	6,05994	
0,4	6,93976	

Caso B: perturbação do tipo rampa

Neste exemplo, considera-se uma perturbação do tipo rampa linear da seguinte forma: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) + \alpha t$, onde α é um parâmetro real. A ideia aqui é variar a inclinação dada por α e observar as variações da potência normalizada. Isto pode ser observado na Figura 4.11 que mostra o comportamento da potência normalizada para algumas inclinações. Pode-se observar que, para $\alpha = 0,396 \times 10^{-2}$, há uma diminuição da potência para todos os tempos. Já para $\alpha = 0,396 \times 10^{-3}$, há inicialmente um pequeno crescimento da potência, até $t = 0,2 \text{ s}$ seguido de um pequeno decréscimo a partir de $t = 0,2 \text{ s}$. Enquanto para as demais inclinações ($\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$ e $\alpha = 0$), há um crescimento linear da potência. Fica claro que

existe um valor crítico na seção de choque de absorção que torna significativo o decréscimo da potência normalizada. Este valor corresponde a mudanças na criticalidade que possibilita mudanças na variação da potência. Observa-se também que, como o sistema é supercrítico mesmo para $\alpha=0$, há um crescimento da potência para tempos pequenos. Esse mesmo comportamento é observado para alguns $\alpha > 0$, na qual a potência apresenta um crescimento até um valor crítico e depois começa a decair com o tempo.

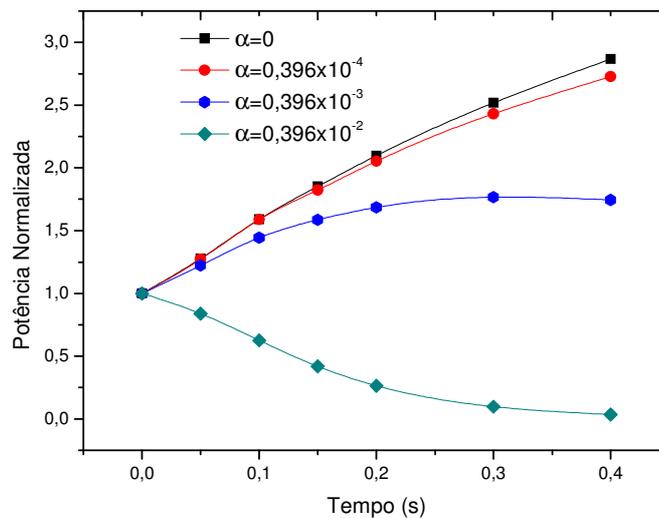


Figura 4.11 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo rampa linear para um grupo de precursor.

Caso C: perturbação oscilatória

Para este caso consideram-se perturbações oscilatórias do tipo: $\Sigma_{a2}(t) = \Sigma_{a2}(0) - \alpha \text{ChebyshevT}[n, t]$, na qual $\text{ChebyshevT}[n, t]$ são os polinômios de Chebyshev de primeira ordem. Para mais detalhes ver anexo A. A ideia aqui é variar tanto α quanto n , a fim de observar as variações do fluxo e, conseqüentemente, da potência do reator. Observa-se para um $\alpha=0,396 \times 10^{-3}$ e ($n=10, n=15, n=20$) há uma oscilação da potência até $t=0,15s$, na qual o máximo é atingido em $t=0,3s$ seguido de um decréscimo da potência para tempos maiores. Este comportamento assemelha-se aos polinômios de $\text{ChebyshevT}[n, t]$ que assumem este comportamento para este intervalo de tempo.

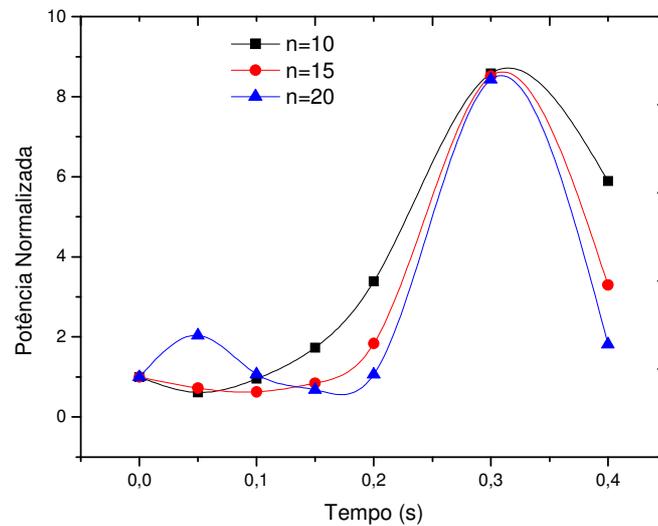


Figura 4.12 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo oscilatória para um grupo de precursores considerando $\alpha = 0,396 \times 10^{-3}$.

Já na Figura 4.13, para os mesmos valores de $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$ e para um $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$, observa-se um crescimento praticamente linear da potência assumindo um máximo próximo de $t = 0,3s$. Aqui a magnitude da potência torna-se menor, uma vez que considera-se uma inclinação menor do parâmetro α . Fica claro que, algumas inclinações são preponderantes para um aumento ou decréscimo mais significativo da potência, visto que mudanças no valor absoluto da seção de choque de absorção serão maiores para inclinações mais acentuadas. Cabe ressaltar que o uso dos polinômios de ChebyshevT[n, t] são uma alternativa para perturbações oscilatórias, uma vez que se pode trabalhar com polinômio ao invés de funções trigonométricas. Esses polinômios têm propriedades interessantes como ortogonalidade e periodicidade dentro de intervalos limitados.

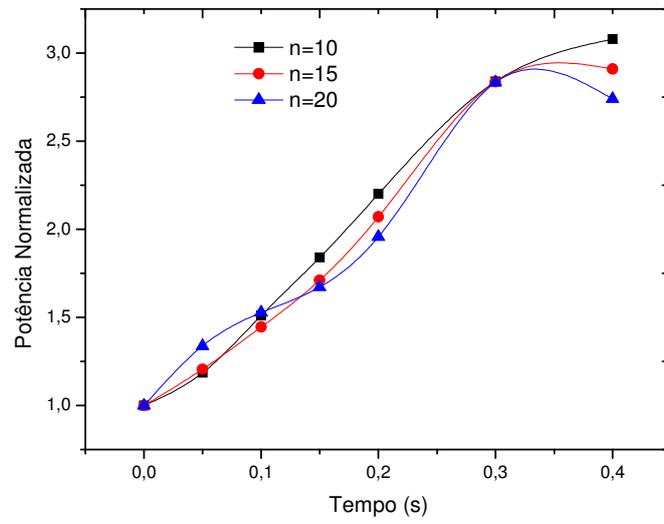


Figura 4.13 - Potência normalizada para uma perturbação do tipo oscilatória para um grupo de precursor considerando $\alpha = 0,396 \times 10^{-4}$.

5. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho, é apresentada uma solução analítica para as equações da cinética pontual e espacial da teoria de difusão de nêutrons, considerando um e seis grupos de precursores de nêutrons atrasados. O caráter analítico das soluções, além de fornecer uma dependência explícita dos parâmetros, permite diminuir o desvio referente ao método de solução da equação associada ao modelo. Este fato contribui para uma melhor avaliação da validade do modelo físico.

Com relação às equações da cinética pontual, teve-se sucesso na questão da busca de uma solução analítica para a reatividade sendo uma função dependente do tempo, tendo em vista que, em nosso conhecimento, este tipo de solução não existe na literatura. Percebe-se a relevância deste trabalho no fato de que, além da característica de análise e da simplicidade da solução, salienta-se que esta metodologia é uma abordagem sólida para resolver as equações da cinética pontual, quer no âmbito matemático, quer no computacional. A solução proposta é bastante geral, pois é válida para qualquer reatividade variável como função arbitrária do tempo, uma vez que a existência da solução é garantida. Além disso, esta solução também é adequada para gerar resultados “*benchmark*”, pois se pode controlar o desvio apenas aumentando o número de termos de soma na solução em série ou diminuição no passo de tempo. A garantia da convergência do método da Decomposição é assegurada pelo critério de Lyapunov.

Com relação às equações da cinética espacial a solução discutida é analítica, no sentido de que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação da solução, a não ser o truncamento das expansões em séries. Cabe observar que a metodologia é facilmente estendida para problemas com um número arbitrário de grupos de energia e meio heterogêneo, o que reforça ainda mais a relevância deste trabalho. Embora se tenha feito apenas o caso variável para a seção de choque de absorção, a solução proposta é bastante geral, pois é válida para qualquer parâmetro nuclear como função arbitrária do tempo. No presente trabalho, obteve-se uma solução exata para as equações da cinética espacial em termos de uma série bem definida. Para uma precisão prescrita apenas alguns termos são necessários para reproduzir numericamente a solução quase exata do problema em uma forma relativamente compacta. A convergência da solução está sob controle por uma nova interpretação do Teorema Cardinal de Interpolação, onde a seção de choque macroscópica

total desempenha o papel de uma densidade de amostragem e a reconstrução da solução segue o procedimento comum em processamento de sinal introduzido em trabalhos independentes por Whittaker, Nyquist, Kotelnikov e Shannon [Unser, 2000] e referências aí contidas. Além disso, o teste de Abel reforça a convergência uniforme da GITT.

A solução analítica discutida apresenta a vantagem de eliminar o caráter “stiff” do problema considerado decorrente das diferenças consideráveis de escalas de tempo entre os nêutrons prontos e atrasados. Com a presente abordagem, estas dificuldades desaparecem, como também a instabilidade, característica presente em abordagens numéricas. Também deve-se considerar que o estudo feito para domínios homogêneos não se restringe a generalidade do procedimento, uma vez que para problemas heterogêneos pode ser implementada a ideia seguindo o raciocínio de [Bodmann et al., 2010].

Além disso, cumpre notar que a metodologia devido ao caráter matricial da solução é apropriada para problemas que requerem elevada ordem da matriz decorrente do número de grupos de energia, grupos de precursores de nêutrons atrasados, bem como número de regiões.

Face ao exposto, como trabalho futuro, sugere-se a generalização deste tipo de solução para problemas heterogêneos, bem como a introdução da temperatura nos modelos considerados.

Portanto, as contribuições deste trabalho permitem produzir uma ferramenta computacional que possa ser efetivamente utilizada para gerar resultados que constituam um bom padrão matemático para testes de algoritmos numéricos e códigos a serem adotados para avaliações em física de reatores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aboanber, A. E.; Hamada, Y. M. PWS: an efficient code system for solving space-independent nuclear reactor dynamics, **Annals of Nuclear Energy**, v. 29, p. 2159-2172, 2002.

Aboanber, A. E.; Hamada, Y. M. Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback, **Annals of Nuclear Energy**, v. 30, p. 1111-1122, 2003.

Aboanber, A. E.; Nahla, A. A. On Padé approximations to the exponential function and application to the point kinetics equations, **Progress in Nuclear Energy**, v. 44(4), p. 347-368, 2004.

Aboanber, A. E.; Hamada, Y. M. Generalized Runge-Kutta method for two - and three-dimensional space-time diffusion equations with a variable time step, **Annals of Nuclear Energy**, v. 35, p. 1024-1040, 2008.

Adomian, G. A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 135, p. 501-544, 1988.

Adomian, G. **Solving frontier problem of physics: the decomposition method**, Kluwer, Boston, 1994.

Adomian, G. Solution of coupled nonlinear partial differential equations by decomposition, **Computers and Mathematics with Applications**, v. 31, p. 117-120, 1996.

Allerd, J. C.; Carter, D. S. Kinetics of homogeneous power reactors of the LAPRE type, **Nuclear Science and Engineering**, v. 3, p. 482, 1958.

Basken, J.; Lewins, J. D. Power series solutions of the reactor kinetics equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 122, p. 407-416, 1996.

Berra, K. **Simulação da dispersão de poluentes na camada limite planetária através da solução da equação de Langevin pelo método da Decomposição**, Tese (Doutorado em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

Bienski, T.; Gadamski, A.; Mika, J. Higher order prompt-jump approximation in reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, v. 66, p. 277-283, 1978.

Bodmann, B.; Vilhena, M. T.; Ferreira, L. S.; Bardaji, J. B. An analytical solver for the multi-group two dimensional neutron-diffusion equation by integral transform techniques, **II Nuovo Cimento della Società Italiana di Fisica**, v. 1, p. 1-10, 2010.

Boichenko, V. A.; Leonov, G. A.; Reitman. **Dimension theory for ordinary equations**, Teubner, Stuttgart, 2005.

Brown, H. D. A general treatment of flux transients, **Nuclear Science and Engineering**, v. 2, p. 687-693, 1957.

Buzano, M. L.; Corno, S. E.; Cravero, I. A new procedure for integrating the point kinetic equations for fission reactors, **Applied Mathematics and Computation**, v. 29 (5), p. 5-19, 1995.

Camiciola, P.; Cundari, D.; Montagnini, B. A coarse-mesh method for 1-D reactor kinetics, **Annals of Nuclear Energy**, v. 13 (11), p. 629-636, 1986.

Casol, M. **Solução analítica do problema bidimensional transiente de dispersão de poluentes atmosféricos pelo método da GITT dupla**, Dissertação (Mestrado em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

Ceolin, C. **Solução Analítica da Equação Cinética de Difusão Multigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana Unidimensional pela Técnica da Transformada Integral**, Dissertação (Mestrado em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Comissão Nacional de Engenharia Nuclear, 2010.

Chao, Y.; Attard, A. A resolution of the stiffness problem of reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, v. 90, p. 40-46, 1985.

Cherruault, Y. Convergence of Adomian's method, **Kybernetes**, v. 18, p. 31-38, 1989.

Cherruault, Y.; Adomian, G. Decomposition methods: a new proof of convergence, **Mathematical and Computer Modelling**, v. 18, p. 103-106, 1993.

Chou, H. P.; Lu, J. R.; Chang, M. B. A three-dimensional space-time model and its use in pressurized water reactor rod ejection analysis, **Nuclear Technology**, v. 90, p. 142-154, 1990.

Corno, S. E.; Dulla, S.; Picca, P.; Ravetto, P. Analytical approach to the neutron kinetics of the non-homogeneous reactor. **Progress in Nuclear Energy**, v. 50, p. 847-865, 2008.

Cotta, R. M. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, CRC Press, Florida, 1993.

Cotta, R.; Mikhaylov, M. **Heat Conduction Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**, John Wiley & Sons, Lane, Chinchester, England, 1997.

Cotta, R. M. **The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering**, Begell House Inc., New York, 1998.

Crouzet, N. et al. A second-derivative-based adaptive time-step method for spatial kinetics calculations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 123, p. 206-214, 1996.

Dahmani, M. et al. A 3D nodal mixed dual method for nuclear reactor kinetics with improved quasistatic model and a semi-implicit scheme to solve the precursor equations, **Annals of Nuclear Energy**, v. 28, p. 805-824, 2001.

Dodds, H. L. Accuracy of the quasistatic method for two dimensional thermal reactor transients with feedback, **Nuclear Science and Engineering**, v. 59, p. 271–281, 1976.

Dougherty, D. E.; Shen, C. N. The space–time neutron kinetic equations obtained by the semidirect variational method, **Nuclear Science and Engineering**, v. 13, p. 141-148, 1962.

Duderstadt, J. J.; Hamilton, L. J. **Nuclear Reactor Analysis**, John Wiley & Sons, New York, 1976.

Dulla, S.; Ravetto, P.; Picca, P.; Tomatis D. Analytical benchmarks for the kinetics of accelerator-driven systems, **Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications**, Monterey, CA (2007).

Eugene, Y. Application of the decomposition to the solution of the reaction connection diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, v. 56, p. 1-27, 1993.

Ferguson, D. R.; Hansen, K. F. Solution of the Space-Dependent Reactor Kinetics Equations in Three Dimensions, **Nuclear Science and Engineering**, v. 51, p. 189-205, 1973.

Goulart, A.; Vilhena, M. T.; Bodmann, B.; Moreira, D. An analytical solution for the nonlinear energy spectrum equation by the decomposition method, **Journal of Physics A, Mathematical and Theoretical**, v. 41, p. 425205, 2008.

Goldstein, R. Shotkin, L. M. Use of the prompt-jump approximation in fast reactor kinetics, **Nuclear Science and Engineering**, v. 38, p. 94-103, 1969.

Hansen, K. F.; Koen, B. V.; Little, W. W. Stable numerical solutions of the reactor kinetics equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 22, p. 51-59, 1965.

Hendry, W. L.; Bell, G. I. An analysis of the time-dependent neutron transport equation with delayed neutrons by the method of matched asymptotic expansions, **Nuclear Science and Engineering**, v. 35, p. 240–248, 1969.

Henry, A. E. Refinements in accuracy of coarse-mesh finite difference solution of the group-diffusion equations, **Proceedings of the Seminar on Numerical Reactor Equations**, v. 447, p. 17-21, 1972.

Henry A. **Nuclear Reactor Analysis**, The MIT Press, Chap.7, Cambridge Massachusetts, 1975.

Hetrick, D. L. **Dynamics of Nuclear Reactors**, University of Chicago press, Chicago and London, 1971.

Jagannathan, V. Application of the finite-element synthesis model to multidimensional reactor transient problems without feedback, **Annals of Nuclear Energy**, v. 12 (11), p. 583-591, 1985a.

Jagannathan, V. An analysis of multidimensional reactor transients using reduced integration techniques in the finite-element method, **Annals of Nuclear Energy**, v. 13 (7), p. 379-390, 1985b.

Kang, C. M.; Hansen, K. F. Finite element methods for reactor analysis, **Nuclear Science and Engineering**, v. 51, p. 456 - 495, 1973.

Kaplan, S. Some new methods of flux synthesis, **Nuclear Science and Engineering**, v. 13, p. 22-31, 1962.

Kaps, P.; Rentrop, P. Generalized Runge-Kutta Methods of Order Four with Step-size Control for Stiff Ordinary Differential Equations, **Numerical Mathematics**, v. 33, p. 55-68, 1979.

Keepin, G. R.; Cox, C. W. General solution of the reactor kinetic equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 8, p. 670, 1960.

Kelly, D. J.; D. R. Harris. Comparison of Variable Time step Differencing Methods Applied to the Point Reactor Kinetic Equations, **Transactions of the American Nuclear Society**, v. 64, p. 531-533, 1991.

Kinard, E.; Allen, M. J. Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics, **Annals of Nuclear Energy**, v. 31, p. 1039-1051, 2004.

Koclas, J.; Sissaoui, M. T.; Hébert, A. Solution of the improved and generalized quasistatic methods using an analytic calculation or a semi-implicit scheme to compute the precursor equations, **Annals of Nuclear Energy**, v. 23 (14), p. 1127-1142, 1996.

Koclas, J.; Sissaoui, M. T.; Marleau, G. Comparison between the multi-group improved and generalized quasistatic methods for different numbers of energy groups, **Annals of Nuclear Energy**, v. 24 (15), p. 1223-1232, 1997.

Koclas, J. Comparisons of the different approximations leading to mesh centered finite differences starting from the analytic nodal method, **Annals of Nuclear Energy**, v. 25 (11), p. 821-838, 1998.

Lamarch, J. R. **Introduction to Nuclear Reactor Theory**, Wesley publishing company, New York, 1966.

Lawrence, R. D.; Doring, J. J. A smoothing and extrapolation method for point kinetics. Trans, **American Nuclear Society**, v. 24, p. 199-201, 1976.

Moler, M.; Van Loan, C. Nineteen dubious ways of computing the exponential of a matrix, **SIAM Review**, p. 801-836, 1978.

Nahla, A. A. Generalization of the analytical exponential model to solve the point kinetics, equations of Be- and D₂O-moderated reactors, **Nuclear Engineering and Design**, v. 238, p. 2648–2653, 2008.

Nóbrega, J. A. W. A new solution of the point kinetics equations, **Nuclear Science Engineering**, v. 46, p. 366–370, 1971.

Oliveira F. L.; Maiorino J. R.; Santos R. S. The analytical benchmark solution of spatial diffusion kinetics in source driven systems for homogeneous media, **International Nuclear Atlantic Conference**, INAC, Rio de Janeiro, Brazil, 2007.

Ott, K. O.; Meneley, D. A. Accuracy of the quasistatic treatment of spatial reactor kinetics, **Nuclear Science Engineering**, v. 36, p. 402-411, 1969.

Petersen, Z. C.; Vilhena, M. T.; Dulla, S.; Ravetto, P. An analytical solution of the point kinetics equations with time variable reactivity by the decomposition method, In: **International Nuclear Atlantic Conference**, Rio de Janeiro, R16 Applied Mathematics and Computation, R16-43, 2009.

Petersen, C. Z.; Dulla, S.; Vilhena, M. T.; Ravetto, R. An analytical solution of the point kinetics equations with time-variable reactivity by the decomposition method, **Progress in Nuclear Energy (New series)**, p. 1-4, 2011 a.

Petersen, C. Z.; Vilhena, M. T.; Bodmann, B. J. E.; Dulla, S.; Ravetto P. On the exact solution for the multi-group kinetic neutron diffusion equation in a rectangle, **International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering**, M&C2011, 2011 b.

Porsching, T. A. Numerical solution of the reactor kinetics equations by approximate exponentials, **Nuclear Science and Engineering**, v. 25, p. 183–188, 1966.

Reed, W. H.; Hansen, K. F. Alternating direction methods for the reactor kinetics equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 41, p. 431–442, 1970.

Répací, A. Nonlinear dynamical systems: on the accuracy of Adomian's decomposition method, **Applied Mathematics Letters**, v. 3, p. 35-39, 1990.

Sánchez, J. On the numerical solution of the point reactor kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods, **Nuclear Science and Engineering**, v. 103, p. 94-99, 1989.

Segatto, C. S.; Vilhena, M. T.; Gomes, M. G. The one-dimensional LTSN solution in a slab with high degree of quadrature, **Annals of Nuclear Engineering**, v. 26, p. 925-934, 1999.

Segatto, C. F.; Vilhena, M. T.; Marona, D. V. The LTSn solution of the transport equation for one-dimensional Cartesian geometry with $c=1$, **Kerntechnik**, v. 73, p. 57-60, 2008.

Sekimoto, H. **Nuclear Reactor Theory**, COE-INES, Tokyo, Institute of Technology, 2007.

Stacey, W. M. **Modal Approximations: Theory and an Application to Reactor Physics**, M.I.T Press, Massachusetts, 1967.

Stacey Jr, W. M. A variational multichannel space-time synthesis method for nonseparable reactor transients, **Nuclear Science and Engineering**, v. 34, p. 45-56, 1968.

Unser M. Sampling-50 Years after Shannon, **Proc. IEEE**, v. 88(4), p. 69-587, 2000.

Urku, H.; Christenson, J. M. An investigation of the temporal subdomain method for solving the finite element formulation of the space-time reactor kinetics equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 116, p. 55-66, 1994.

Vigil, J. C. Solution of the reactor kinetics equations by analytic continuation, **Nuclear Science and Engineering**, v. 29, p. 392-401, 1967.

Vilhena, M. T.; Heinen, I. R.; Bodmann, B. An analytical solution for the general perturbative diffusion equation by integral transform techniques, **Annals of Nuclear Energy**, v. 35, p. 2410-2413, 2008.

Yasinsky, J. B.; Henry, A. F. Some numerical experiments concerning space-time reactor kinetics behavior, **Nuclear Science Engineering**, v. 22, p. 171-181, 1965.

Yasinsky, J. B. The solution of the space-time neutron group diffusion equations by a time-discontinuous synthesis method, **Nuclear Science Engineering**, v. 29, p. 381-391, 1967.

Yasinsky, J. B.; Kaplan, S. Synthesis of three-dimensional flux shapes using discontinuous sets of trial functions, **Nuclear Science and Engineering**, v. 28, 426-437, 1967.

Zhang, H.; Rizwan, U.; Dorning, J. J. Systematic homogenization and self consistent flux and pin power reconstruction for nodal diffusion methods diffusion equation based theory, **Nuclear Science and Engineering**, v. 121, p. 226-244, 1995.

Zhangsheng, C.; Xuewen, G.; Lei, Y. A uniform formula of neutron multiplication calculation from sub-criticality to prompt-criticality with step change of reactivity, **Nuclear Power Engineering**, v. 27 (2), p. 14-16 (in Chinese), 2006.

Zhiyuan, Z. Finite element method for solving the point reactor neutron kinetics equations, **Atomic Energy Science and Technology**, v. 15 (6), p. 656-663 (in Chinese), 1981.

APÊNDICE A - DIFUSÃO ESTACIONÁRIA DE NÊUTRONS

Aqui mostra-se como se obtém a solução da equação de difusão estacionária em forma analítica. Cabe ressaltar que a solução desta equação é a condição inicial para o problema de cinética espacial. Sem perda de generalidade, considera-se a solução do problema 2D em geometria cartesiana para dois grupos de energia, visto que para o problema 3D e demais grupos de energia o procedimento é análogo.

A.1 O problema de difusão estacionário de nêutrons

Considerando a equação de difusão de nêutrons em regime estacionário em coordenadas cartesianas com dois grupos de energia em um retângulo de material homogêneo, cujo(s) núcleo(s) atômico(s) é(são) físsil(eis) ($0 < x < L$, $0 < y < M$):

$$\begin{aligned}
 -D_g \left(\frac{\partial^2 \phi_g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_g(x, y)}{\partial y^2} \right) + \Sigma_{Rg} \phi_g(x, y) \\
 = \chi_g \frac{\nu}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^2 (\Sigma_{fg'} \phi_{g'}(x, y)) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 (\Sigma_{g'g} \phi_{g'}(x, y))
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

No caso teste, o problema está sujeito a condições de contorno de isolamento nas laterais do retângulo e a dimensão z , perpendicular às outras duas dimensões, será desprezada, como se fosse um paralelepípedo retangular fino de material físsil. Estas condições são descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \phi_g(0, y) = \phi_g(M, y) = 0, \\
 \phi_g(x, 0) = \phi_g(x, L) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Aqui g é o sub-índice que denota o grupo de energia média dos nêutrons (1 para rápidos, 2 para térmicos), $\phi_g(x, y)$ é o fluxo escalar de nêutrons do grupo g de energia em [$cm^{-2} \times s^{-1}$], D_g é o coeficiente de difusão para o grupo g de energia em [cm], Σ_{Rg} é a seção de choque

macroscópica de remoção do grupo g de energia em [cm^{-1}], Σ_{ag} é a seção de choque macroscópica de absorção do grupo g de energia em [cm^{-1}], $\Sigma_{g'g}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' de energia para o grupo g de energia em [cm^{-1}], Σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g de energia em [cm^{-1}], k_{eff} é o fator de multiplicação efetivo, ν é o número médio de nêutrons liberados por fissão e χ_g é o espectro integrado de fissão do grupo g de energia (toma valores 1 se $g = 1$, 0 se $g = 2$). Para fins de cálculos, $\Sigma_{Rg} = \Sigma_{ag} + \Sigma_{gg'}$.

Considerando que não há “up-scattering” – aumento de energia do nêutron com uma colisão em um núcleo atômico – pode-se reescrever a equação (A.1) em uma forma mais compacta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y)}{\partial y^2} + a \phi_1(x, y) + b \phi_2(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y)}{\partial y^2} + c \phi_1(x, y) + d \phi_2(x, y) &= 0 \end{aligned}, \quad (A.3)$$

$$\text{em que: } a = \frac{\nu \Sigma_{f1}}{k_{eff} D_1} - \frac{\Sigma_{R1}}{D_1}, \quad b = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{k_{eff} D_1}, \quad c = \frac{\Sigma_{12}}{D_2} \quad \text{e} \quad d = -\frac{\Sigma_{R2}}{D_2}.$$

A fim de resolver a equação (A.3) utilizando a técnica da transformada integral generalizada (GITT) algumas condições devem ser satisfeitas. Esta transformada necessita que as condições de contorno na dimensão transformada sejam homogêneas, além de, para a sua aplicação, também é necessário que haja um termo laplaciano nas equações diferenciais que descrevem o problema. Como estas exigências são satisfeitas pelo problema, a função fluxo de nêutrons em qualquer grupo pode ser transformada em uma expansão em série de autofunções ortonormais com a seguinte forma:

$$\phi_g(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{\max}} \frac{\psi_i(x) \varphi_{gi}(y)}{N_i^{1/2}}. \quad (A.4)$$

Na expansão em série original, o somatório tem limites 1 e ∞ , porém, para fins de encontrar valores numéricos, esta série é truncada em um determinado N_{\max} , suficiente para

cumprir exigências de precisão prescritas. A dimensão transformada, neste caso, é a dimensão x , escolhida exatamente por satisfazer as condições de contorno necessárias para a aplicação da GITT, e as autofunções ortonormais relacionadas são os $\psi_i(x)$, cuja norma é N_i . Os $\varphi_{g_i}(y)$ são as funções que contêm a informação dos parâmetros nucleares e também da geometria na outra dimensão do problema.

Os $\psi_i(x)$ são determinados por um problema auxiliar de Sturm-Liouville cujas condições de contorno são idênticas às do problema original na dimensão transformada. O problema auxiliar toma a forma:

$$\psi_i''(x) + \lambda_i^2 \psi_i(x) = 0, \quad (\text{A.5})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0, \quad (\text{A.6})$$

e a solução para este problema são as autofunções ortonormais

$$\psi_i(x) = \sin(\lambda_i x), \quad (\text{A.5})$$

com os respectivos autovalores:

$$\lambda_i = i\pi / L, \quad (\text{A.6})$$

para $i=1:N_{\max}$. Com as autofunções encontradas, é possível calcular a sua norma, cuja equação é:

$$N_i = N_{ij} = \int_0^L \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad (\text{A.7})$$

apenas quando $j = i$ (quando esta igualdade não ocorre, a norma é nula). Substituindo (A.4) em (A.3) e agrupando os somatórios, obtêm-se as seguintes equações:

$$\sum_{i=1}^{N_{\max}} \left[\frac{\psi_i''(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}''(y)}{N_i^{1/2}} + a \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + b \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} \right] = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{i=1}^{N_{\max}} \left[\frac{\psi_i''(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} + \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}''(y)}{N_i^{1/2}} + c \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + d \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} \right] = 0$$

Como uma somatória de funções é identicamente nula se, e somente se, todos os termos da somatória forem nulos, se analisa cada termo da somatória separadamente (cada i , ou um i não identificado). De acordo com a equação (A.5), o termo $\psi_i''(x)$ pode ser substituído por $-\lambda_i^2 \psi_i(x)$. Fazendo estas considerações e rearranjando as equações, obtém-se:

$$\frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}''(y)}{N_i^{1/2}} + (a - \lambda_i^2) \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + b \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} = 0$$

$$\frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}''(y)}{N_i^{1/2}} + c \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + (d - \lambda_i^2) \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} = 0, \quad (\text{A.9})$$

Aplicando o operador ortogonal integral $\frac{1}{N_{ij}^{1/2}} \int_0^M \psi_j(x) (\cdot) dx$ nas duas equações, é possível eliminar a dependência de x das equações, tendo em mente que $\int_0^M \psi_i(x) \psi_j(x) dx = 0, i \neq j$ e $\int_0^M \psi_i(x) \psi_j(x) dx = N_i, i = j$. As equações resultantes são:

$$\varphi_{1i}''(y) + (\alpha - \lambda_i^2) \varphi_{1i}(y) + \gamma \varphi_{2i}(y) = 0$$

$$\varphi_{2i}''(y) + \beta \varphi_{1i}(y) + (\mu - \lambda_i^2) \varphi_{2i}(y) = 0 \quad (\text{A.10})$$

para $i=1:N_{\max}$. Estas são as chamadas equações transformadas da GITT.

Processo semelhante a este é realizado também nas condições de contorno, e o resultado são as condições de contorno transformadas.

Como as equações (A.10) valem para $i=1:N_{\max}$, logo podem ser escritas como uma equação diferencial linear de segunda ordem matricial na seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dy^2} \begin{Bmatrix} \varphi_{11}(y) \\ \varphi_{12}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{1N_{\max}}(y) \\ \varphi_{21}(y) \\ \varphi_{22}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{2N_{\max}}(y) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a-\lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-\lambda_2^2 & \cdots & 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-\lambda_{N_{\max}}^2 & 0 & 0 & \cdots & b \\ c & 0 & \cdots & 0 & d-\lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & d-\lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & 0 & 0 & \cdots & d-\lambda_{N_{\max}}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11}(y) \\ \varphi_{12}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{1N_{\max}}(y) \\ \varphi_{21}(y) \\ \varphi_{22}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{2N_{\max}}(y) \end{Bmatrix} = \bar{0}, \quad (\text{A.11})$$

em que $\bar{0} = \{0 \ 0 \ \cdots \ 0\}^T$. Este sistema de equações diferenciais escrito em forma matricial pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{Y}''(y) + \mathbf{U}\mathbf{Y}(y) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.12})$$

Como os autovalores da matriz \mathbf{U} são distintos, uma vez que o operador associado à equação de difusão de nêutrons é auto-adjunto, a ideia é diagonalizar a matriz \mathbf{U} e reescrever a equação (A.12) da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}''(y) + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}(y) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

onde \mathbf{P} é a matriz dos autovetores de \mathbf{U} , \mathbf{P}^{-1} é sua inversa e \mathbf{A} é a matriz diagonal dos respectivos autovalores de \mathbf{U} . Definindo uma nova variável $\mathbf{R}(y) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}(y)$ e multiplicando toda a equação por \mathbf{P}^{-1} , a equação (A.13) é reescrita como:

$$\mathbf{R}''(y) + \mathbf{A}\mathbf{R}(y) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.14})$$

Lembrando que a matriz \mathbf{A} é diagonal, então a equação diferencial matricial (A.14) se reduz a um conjunto de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem desacopladas com coeficientes constantes dadas por:

$$r_j''(y) + a_{jj}^2 r_j(y) = 0, \quad (\text{A.15})$$

com $j=1:2N_{\max}$ e a_{jj}^2 são os valores da diagonal de \mathbf{A} , que por sua vez são os autovalores de \mathbf{U} . A solução bem conhecida para esta equação é:

$$r_j(y) = C_{1j} \cos(a_{jj}y) + C_{2j} \sin(a_{jj}y), \quad (\text{A.16})$$

onde C_{1j} e C_{2j} são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno. Com esta transformação $\mathbf{R}(y) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}(y)$ e com as condições de contorno transformadas, é possível calcular as constantes C_{1j} e C_{2j} . Uma vez determinada estas constantes, para cada $j=1:2N_{\max}$, reconstrói-se o vetor $\mathbf{R}(y)$ utilizando a relação $\mathbf{Y}(y) = \mathbf{P}\mathbf{R}(y)$. Feita esta reversão, o vetor $\mathbf{Y}(y)$ está completamente determinado e, por conseguinte, as funções $\varphi_{gi}(y)$ que o compunham.

Estas funções auxiliares da GITT, quando encontradas, completam a transformação, e então os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos estão encontrados de forma analítica substituindo-os em A4.

APÊNDICE B - TESTE DE ABEL

Aqui mostra-se o teste de Abel para a convergência uniforme. Isto permite fortalecer e garantir a convergência da GITT, uma vez que pode-se fazer uma analogia deste teste com a sua fórmula inversa. Para isto algumas propriedades devem ser estabelecidas em forma de série, propriedades que são úteis na criação de soluções e para provar que existe uma solução única.

B.1 Critério de Cauchy para a convergência uniforme

Seja $s_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da série de funções $X_i(x)$ na qual converge para a soma $s(x)$:

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{N_{\max}} X_i(x), \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x). \quad (\text{B.1})$$

Supondo que a série converge uniformemente com respeito a x para todo x em algum intervalo. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe um número n_ε , independente de x , tal que :

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad (\text{B.2})$$

para $n > n_\varepsilon$ e para todo x no intervalo. Seja j um positivo inteiro. Então:

$$|s_n - s_{n+j}| = |s_n - s + s - s_{n+j}| \leq |s - s_n| + |s - s_{n+j}| < \varepsilon. \quad (\text{B.3})$$

Logo, a condição necessária para a convergência uniforme das séries é que, para todo positivo inteiro j ,

$$|s_{n+j}(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \quad (\text{B.4})$$

para $n > n_\varepsilon$.

A condição (B.4) é uma condição suficiente, o critério de Cauchy estabelece a convergência das séries para cada x fixo mesmo que n_ε não seja independente de x . Portanto, isto implica que a soma $s(x)$ existe. Assim, para algum n e x fixos, e para todo ε , um inteiro $j_\varepsilon(x)$ existe tal que

$$|s(x) - s_{n+j}(x)| < \varepsilon, \quad (\text{B.5})$$

para $j > j_\varepsilon(x)$.

Para mostrar que a condição (B.4) implica convergência uniforme é preciso escolher um determinado inteiro n_ε , na qual n_ε corresponde a todo número ε no sentido que a condição (B.4) é satisfeita para todo x . Então, para cada particular x a condição (B.5) é satisfeita quando $j > j_\varepsilon(x)$ e, portanto,

$$|s - s_n| = |s - s_{n+j} + s_{n+j} - s_n| \leq |s - s_{n+j}| + |s_{n+j} - s_n|, \quad (\text{B.6})$$

Segue das condições (B.4) e (B.5) que

$$|s(x) - s_n(x)| < 2\varepsilon. \quad (\text{B.7})$$

Quando $j > j_\varepsilon(x)$ e $n > n_\varepsilon$. Então $|s(x) - s_n(x)|$, que é independente de j , é arbitrariamente pequeno para cada x quando $n > n_\varepsilon$. Portanto, se n_ε é independente de x , a convergência uniforme é estabelecida. Nota-se aqui que x pode igualmente designar um conjunto de variáveis (x_1, x_2, \dots, x_m) independentes representando todos os pontos de algum conjunto E_m em m dimensões espaciais. A convergência uniforme é então estabelecida com respeito a todas as m variáveis em E_m .

B.2 Teste de Abel para convergência uniforme

Agora se estabelece um teste para a convergência uniforme de séries infinitas cujos termos são produtos de funções de certas classes.

Diz-se que as funções de uma sequência de funções $T_i(t)$, $(i = 1, 2, \dots)$ são uniformemente limitadas por todos os pontos t num intervalo se a constante K , independente de i , existe tal que:

$$|T_i(t)| < k, \quad (\text{B.8})$$

para $(i = 1, 2, \dots)$ e para todo t no intervalo.

Uma sequência é monótona com respeito a i se para todo t

$$T_{i+1}(t) \leq T_i(t), \quad (\text{B.9})$$

para $(i = 1, 2, \dots)$ ou

$$T_{i+1}(t) \geq T_i(t), \quad (\text{B.10})$$

para $(i = 1, 2, \dots)$.

A seguinte forma generalizada do teste de Abel mostra que quando os termos de uma série uniformemente convergente são multiplicados por funções $T_i(t)$ como descritas acima, ou seja, monótonas, a nova série é uniformemente convergente. Fica claro a analogia com a GITT, uma vez que as séries uniformemente convergentes fazem o papel da solução do problema auxiliar e as funções $T_i(t)$ fazem o papel da solução do problema transformado.

Teorema 1. A série $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t)$ converge uniformemente com respeito as duas variáveis x e t numa região R do plano xt se:

- a) A série $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)$ converge uniformemente com respeito a x para todo x tal que (x, t) está em R e

- b) Para todo t tal que (x,t) está em R , as funções $T_i(t)$ são uniformemente limitadas e monótonas com respeito a i ($i = 1, 2, \dots$).

Demonstração:

Seja S_n as somas parciais da série em (B.7)

$$S_n(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t). \quad (\text{B.11})$$

Como mostrado na seção anterior, a convergência uniforme é estabelecida se para cada $\varepsilon > 0$ existir um correspondente inteiro n_ε , independente de x e t , tal que

$$|S_m(x,t) - S_n(x,t)| < \varepsilon. \quad (\text{B.12})$$

sempre que $n > n_\varepsilon$ para todos os inteiros $m = n+1, n+2, \dots$ e para todos os pontos (x,t) em R .

Escrevendo s_n para as somas parciais

$$s_n = X_1(x) + X_2(x) + \dots + X_n(x). \quad (\text{B.13})$$

Então para cada par de inteiros m, n com ($m > n$), $S_m - S_n$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} X_{n+1}T_{n+1} + X_{n+2}T_{n+2} + \dots + X_mT_m &= (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})T_{n+2} + \dots + (s_m - s_{m-1})T_m \\ &= (s_{n+1} - s_n)T_{n+1} + (s_{n+2} - s_{n+1})T_{n+2} - (s_{n+1} - s_n)T_{n+2} + \dots + (s_m - s_n)T_m - (s_{m-1} - s_n)T_m. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Juntando os pares alternados fica-se com

$$\begin{aligned} S_m - S_n &= (s_{n+1} - s_n)(T_{n+1} - T_{n+2}) + (s_{n+2} - s_{n+1})(T_{n+2} - T_{n+3}) \\ &+ \dots + (s_{m-1} - s_n)(T_{m-1} - T_m) + (s_m - s_n)T_m. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Supondo agora que as funções $T_i(t)$ são não decrescentes com respeito a i tal que elas satisfazem a condição (B.4). Logo, elas também satisfazem a condição uniformemente limitadas (B.1). Então os termos $T_{n+1} - T_{n+2}, T_{n+2} - T_{n+3}$ em (B.15) são não-negativos e $|T_i(t)| < k$. Portanto, a série com respeito a $X_i(x)$ converge uniformemente. Ou seja, um inteiro n_ε existe tal que:

$$|s_{n+j}(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3k} \quad . \quad (\text{B.16})$$

para $n > n_\varepsilon$ e para todo inteiro positivo j , onde ε é algum número positivo e n_ε é independente de x . Então, se $n > n_\varepsilon$ e $m > n$, segue da equação (B.15) que:

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &< \frac{\varepsilon}{3k} [(T_{n+1} - T_{n+2}) + (T_{n+2} - T_{n+3}) + \dots + |T_m|] \\ &= \frac{\varepsilon}{3k} (T_{n+1} - T_m + |T_m|) \leq \frac{\varepsilon}{3k} (|T_{n+1}| + 2|T_m|) \end{aligned} \quad . \quad (\text{B.17})$$

Portanto, $|S_m(x, t) - S_n(x, t)| < \varepsilon$ para $m > n > n_\varepsilon$ e a convergência da série $\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t)$ está estabelecida.

A prova é similar no caso de funções $T_i(t)$ não decrescentes com respeito a i .

O teorema mostra que, quando $T_i(t)$ são limitadas e monótnas, as séries dos termos $X_i(x)T_i(t)$ é uniformemente convergente com respeito a t .

Extensões do teorema para casos em que $X_i(x)$ e $T_i(t)$ são funções de muitas variáveis torna-se evidente quando é observado que na prova basta a convergência das séries dos termos $X_i(x)$ e a monotocidade das funções $T_i(t)$.

ANEXO A - POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV

Em matemática, os polinômios de Chebyshev ou Polinômios de Tchebychev receberam esse nome após o matemático Pafnuty Chebyshev defini-los como uma sequência de polinômios ortogonais, relacionados com a fórmula de Moivre e facilmente obtidos de forma recursiva. Costuma-se denotar os polinômios de Tchebychev de primeira ordem por T_n e os polinômios de Tchebychev de segunda ordem por U_n . O uso da letra T para os polinômios de primeira ordem foi dado devido a uma das transliterações de Tchebychev, que admitem também Chebyshev, Tchebyshev e Tschebyscheff.

Os polinômios de Tchebychev T_n ou U_n são polinômios de grau n e a sequência dos polinômios de todos os graus formam uma sequência polinomial.

Os polinômios de Tchebyshev são importantes na teoria da aproximação porque as raízes dos polinômios de primeira ordem podem ser utilizadas na interpolação polinomial. O resultado da interpolação minimiza o problema do fenômeno de Runge e fornece a melhor aproximação de uma função contínua que obedece à norma do supremo. Essa aproximação conduz diretamente ao método da quadratura de Clenshaw–Curtis.

No estudo de equações diferenciais, os polinômios de Tchebychev surgem como soluções das equações de Chebyshev:

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'' - xy' + n^2y &= 0 \\ (1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y &= 0\end{aligned}$$

Os polinômios de Tchebyshev de primeira ordem são definidos pela relação recursiva:

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Os polinômios de Tchebychev podem ser definidos também através das identidades trigonométricas:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cosh(n \operatorname{arccosh} x).$$

Diferentes abordagens na definição dos polinômios de Tchebychev levam a fórmulas específicas, tais como:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)), & x \in [-1, 1] \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(x)), & x \geq 1 \\ (-1)^n \cosh(n \operatorname{arccosh}(-x)), & x \leq -1 \end{cases}$$

e

$$T_n(x) = \frac{\left(x - \sqrt{(x^2 - 1)}\right)^n + \left(x + \sqrt{(x^2 - 1)}\right)^n}{2} = x^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (1 - x^{-2})^k.$$

Ambos os polinômios de primeira e segunda ordem, T_n e U_n , formam uma sequência de polinômios ortogonais. Os polinômios de primeira ordem são ortogonais com relação ao peso $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ no intervalo $[-1, 1]$, ou seja:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \begin{cases} 0 : n \neq m \\ \pi : n = m = 0 \\ \pi / 2 : n = m \neq 0 \end{cases}.$$

Os primeiros cinco polinômios de Tchebyshev de primeira ordem são:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

O gráfico do polinômio de ChebyshevT é ilustrado abaixo para $n = 10$, $n = 15$ e $n = 20$ no intervalo de $[0; 0,5]$.

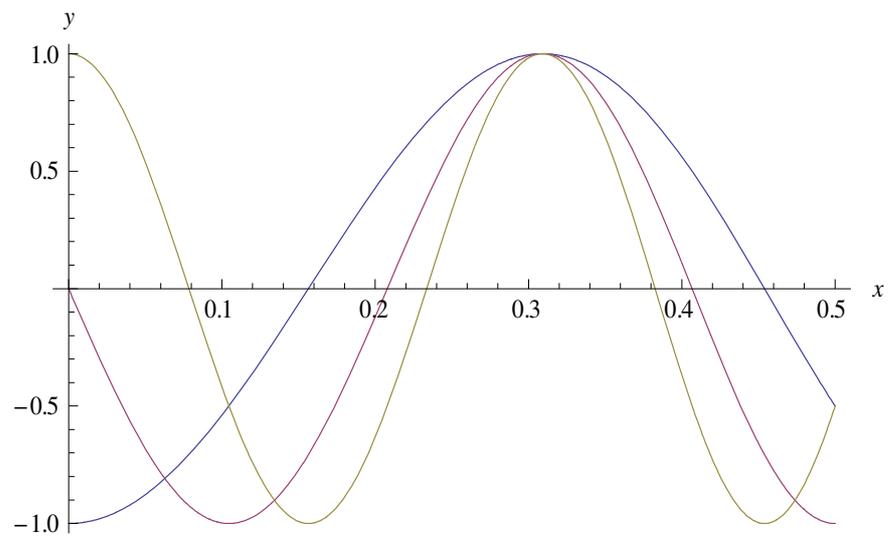


Figura – Gráfico dos polinômios Chebyshev T para $n = 10$ (azul) $n = 15$ (vermelho) $n = 20$ (amarelo) no intervalo $[0;0,5]$.