

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**CONTROLE DE RADIAÇÃO SONORA NUMA PLACA
RETANGULAR ATRAVÉS DE ATUADORES PIEZELÉTRICOS
DISCRETOS**

por

Rejane Pergher

Tese para a obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre

06 de novembro de 2003

**CONTROLE DE RADIAÇÃO SONORA NUMA PLACA
RETANGULAR ATRAVÉS DE ATUADORES PIEZELÉTRICOS
DISCRETOS**

por

Rejane Pergher
Mestre em Matemática Aplicada

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Ruiz Claeysen

Coorientador: Prof. Dr. João Batista da Paz Carvalho

Comissão Avaliadora:

Prof. Dr. Alberto Tamagna

Prof. Dr. German Ramon Canahualpa Suazo

Prof. Dr. Jun Sérgio Ono Fonseca

Profa. Dra. Tereza Tsukasan

Prof. Dr. Jun Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 06 de novembro de 2003

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, principalmente:

Ao professor Júlio Claeysen, pela orientação, paciência e atenção.

Ao professor João Carvalho, pela ajuda e apoio na reta final.

Aos professores do PROMEC e do Instituto de Matemática da UFRGS, que contribuíram para a minha formação acadêmica.

Ao professor Valdecir Bottega, que desempenhou vários papéis, dentre eles, amigo, companheiro, professor, orientador, incentivador, banca, mas acima de tudo, obrigada por estar sempre do meu lado em todas as horas.

Aos amigos e colegas, que compartilharam as mesmas angústias e que hoje colhem, ou em breve colherão, os frutos de um trabalho árduo mas compensador.

Aos familiares, que torceram pelo sucesso e conclusão desta etapa.

À Universidade de Caxias do Sul, pela liberação das atividades neste ano e pelo apoio.

Ao Centro Universitário La Salle, pelo apoio e compreensão.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de realizar os estudos com excelentes profissionais.

Enfim, à Deus.

RESUMO

Neste trabalho, é estudado o controle da transmissão do som numa placa retangular e fina. Para tanto, é encontrada a resposta dinâmica da placa, excitada por forças harmônicas pontuais e piezomomentos, obtida usando uma base não-clássica e uma análise modal. A radiação sonora emitida pela vibração da placa é encontrada. A potência sonora radiada pode ser calculada aplicando controle ativo diretamente na estrutura, na forma de uma entrada vibratória, uma vez conhecida a resposta na superfície da placa, obtendo-se uma significativa redução analítica. Os piezocerâmicos, modelados como quatro momentos pontuais, são unidos à superfície da placa como atuadores. A potência sonora transmitida antes e depois do controle é comparada, usando diferente número de atuadores. Uma estratégia clássica de controle linear quadrático (LQR) é empregada no contexto de um procedimento de otimização da posição dos atuadores do sistema.

ABSTRACT

TITLE: “CONTROL OF SOUND RADIATION ON A RECTANGULAR PLATE THROUGH DISCRET PIEZOELECTRIC ACTUATORS”

In this work, it is studied the control of sound transmission through a thin rectangular plate. The dynamic response of a clamped plate excited by harmonic point forces and piezomoments is obtained by using a non-classical basis and modal analysis. Sound radiation emitted by a vibrating plate is evaluated. The sound power radiated by such a plate can be calculated applying the control action directly to the structure, in the form of vibration inputs, once its surface response is known, leading to a significant analytical reduction. The piezoceramic patches, modelled as four point moments, are bonded on the surface of the plate as actuators. The transmitted sound power before and after control is compared using different numbers of actuators. A classical strategy of Linear Quadratic Control is used in an optimization procedure for actuators position.

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, D	constantes arbitrárias
\mathbf{A}	matriz companheira
$\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$	matrizes usadas no funcional custo quadrático
a, b	dimensões da placa [m]
\mathcal{B}	matriz das condições de contorno
\mathbf{B}_1	matriz localização dos atuadores
\mathbf{c}	vetor dos coeficientes
\mathbf{c}^E	matriz elasticidade em campo elétrico
C_0	velocidade do som [m/s]
D	rigidez flexural [N·m]
\mathbf{d}	vetor de carga por unidade de área
\mathbf{d}_k	vetor unitário direção descendente
\mathbf{D}_m	matriz diagonal de inércia modal [kg]
E	módulo de Young [N/m ²]
\mathbf{E}_c	vetor de campo elétrico
\mathbf{e}	matriz das constantes piezelétricas
\mathbf{F}_p	vetor das forças externas [N]
\mathbf{G}	matriz de ganho de retroalimentação
h	espessura da placa [m]
$h(x)$	solução dinâmica ou resposta impulso
\mathbf{H}	matriz Hamiltoniana
$H(s)$	transformada de Laplace de $h(x)$ ou matriz de transferência
$\hat{\mathbf{H}}$	matriz de Fourier da base de aproximação
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária
$I(\theta, \phi)$	intensidade radiada na direção (θ, ϕ) [W/m ²]
\mathbf{I}	matriz identidade
J	funcional custo quadrático

J_0	valor mínimo de J
k	número de onda acústica [rad/m]
\mathbf{k}	vetor propagação da onda [m]
\mathbf{K}	matriz de rigidez [N/m]
\mathbf{K}_M	matriz de rigidez após o controle [N/m]
k_m	rigidez translacional da mola [N.m]
k_r	rigidez rotacional da mola [N.m]
l	lado do quadrado do atuador piezocerâmico [m]
L	operador diferencial
\mathbf{L}	matriz localização das perturbações de entrada
m, n	parâmetros inteiros e variáveis das funções $X(x)$ e $Y(y)$
m_0	momento pontual [N.m]
M	momento concentrado [N.m]
\mathbf{M}	matriz de relação entre aceleração estrutural e potência acústica radiada
\mathbf{M}_1	matriz de inércia [kg.m]
M_c	amplitude do momento do controlador da placa [N.m]
M_e	amplitude do momento do excitador da placa [N.m]
N	número de atuadores
p_e	força externa [N]
\mathcal{P}	solução da equação de Riccati
P	módulo da força pontual concentrada aplicada na placa [N]
P_{in}	pressão sonora incidente [dB]
P_{rad}	pressão sonora transmitida [dB]
P_0	módulo da onda [N]
R	distância entre os vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 [m]
\mathbf{r}	vetor posição no espaço [m]
Re	parte real
\mathbf{s}	vetor de deformação
$S(x, y)$	base de aproximação espacial

S_1, S_2	áreas de integração usadas no cálculo da potência radiada na placa
t	tempo [s]
T	denota a transposta de uma matriz
\mathbf{T}	vetor de tensão
\mathcal{U}	matriz das autofunções associadas
u^o	controle ótimo
$\mathbf{u}(t)$	vetor de entrada dos atuadores
\mathbf{U}	matriz modal normalizada
\mathbf{V}	matriz modal
$v(\mathbf{r}_i)$	velocidade normal do meio acústico em \mathbf{r}_i [m/s]
$v(t)$	vetor de perturbações de entrada
$v(t, x, y)$	velocidade normal no ponto (x, y) [m/s]
$V(x, y)$	amplitude da velocidade [m/s]
$w(t, x, y)$	deslocamento da placa [m]
$\mathbf{W}_p(\mathbf{t})$	matriz de amplitude modal
$X(x), Y(y)$	autofunções ou funções formas modais
x, y, z	variáveis espaciais [m]
\mathbf{x}	vetor posição dos atuadores
\mathbf{x}_0	vetor posição inicial dos atuadores
x_{ai}, y_{ai}	posição i dos atuadores piezelétricos [m]
β_n	autovalores
$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho_s h}{D}$	constante auxiliar
$\delta(x)$	função delta de Dirac
ϵ_{PZT}	voltagem aplicada [V]
ϵ^s	matriz dielétrica em deformação constante
(ξ, η)	coordenadas do momento pontual [m]
(ξ_0, η_0)	coordenada generalizada do centro do atuador/excitador [m]
(ξ_e, η_e)	coordenada do centro do excitador [m]
(ξ_c, η_c)	coordenada do centro do controlador [m]

κ_0	constante $[\text{N}\cdot\text{m}/\text{V}]*10^{-4}$
λ	autovalor
λ_k	solução ótima
μ_i	inércia modal $[\text{kg}\cdot\text{m}]$
ν	coeficiente de Poisson
π	número pi
ρ_a	densidade do ar $[\text{kg}/\text{m}^3]$
$\rho_a C_0$	impedância acústica $[\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s})]$
ρ_s	densidade da placa $[\text{kg}/\text{m}^3]$
θ, ϕ	ângulos da onda incidente na placa $[\text{rad}]$
$\sigma(x)$	fator de forma modal
ω	freqüência característica $[\text{rad}/\text{s}]$
ω_{mn}	freqüência natural do modo (m, n) $[\text{rad}/\text{s}]$
∇	gradiente
∇^4	operador diferencial biarmônico
$\Delta(s)$	inversa da matriz de transferência
ΔS	elemento de área $[\text{m}^2]$
$\Delta\xi$	distância que separa duas forças pontuais $[\text{m}]$
Π	potência acústica $[\text{dB}]$
Π_{min}	potência sonora mínima $[\text{dB}]$
Φ	matriz das autofunções ou funções de base
Ω^2	matriz diagonal espectral
Ψ	matriz modal do sistema controlado
v^*	vetor conjugado

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
2	SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA PLACA	7
2.1	Modelagem	7
2.1.1	Condições Iniciais e de Contorno	8
2.2	Frequências e Modos de Vibração	8
2.3	Estudo da Equação $X^{iv} - \beta^4 X = 0$	10
2.4	Base Dinâmica	12
2.5	Cálculo Matricial dos Modos	14
2.6	Discretização Espacial através do Método de Galerkin	16
2.7	Análise Modal de Sistemas Não-Amortecidos	19
2.8	Modos Normais e a Matriz de Transferência	23
2.9	Transmissão de uma Onda Plana Incidente	24
3	DESLOCAMENTO E POTÊNCIA COM CONTROLE	30
3.1	Uso de Materiais Piezelétricos	30
3.1.1	Sensores e Atuadores Integrados	32
3.2	Modelagem do Atuador Piezelétrico	33
3.3	Controle da Potência Sonora Radiada	37

3.4	O Controle Ótimo	42
3.5	Solução da Placa após o Controle	46
4	UMA APLICAÇÃO: DUTOS DE AR CONDICIONADO . . .	49
4.1	Formulação do Problema	49
4.2	Frequências e Modos de Vibração	51
4.3	A Equação Característica	56
5	OTIMIZAÇÃO	58
5.1	Modelagem	59
5.2	Programação Não Linear	61
5.2.1	O Intervalo de Incerteza	62
5.2.2	O Método da Razão Áurea (Golden Section)	63
5.2.3	Procura Multidimensional	65
5.2.3.1	Método da Descida	65
6	RESULTADOS	69
6.1	Potência Sonora Radiada	69
6.2	Bases de Aproximação	71
6.3	Posicionamento Ótimo dos Atuadores	77
6.4	Convergência do Método da Descida	80
6.5	Simulação do Deslocamento Obtido com Configuração Ótima	82

7 CONCLUSÕES	84
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86
APÊNDICE A OPERADOR AUTO ADJUNTO	93
A.1 Operador diferencial linear auto-adjunto	93
A.2 Condições de Contorno: Placa Engastada	94
A.3 Condições de Contorno: Ar Condicionado	95

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Sistema de coordenadas com origem no centro da placa	8
Figura 2.2	Áreas de integração S_1 e S_2 usadas no cálculo da potência radiada na placa	26
Figura 2.3	Discretização da área da placa	28
Figura 3.1	Sistema de controle piezelétrico distribuído	31
Figura 3.2	Placa sob a excitação de um momento concentrado	34
Figura 3.3	Placa sob a excitação de duas forças concentradas simulando um momento concentrado	34
Figura 3.4	Placa sob a excitação de quatro momentos concentrados simulando um piezoatuador	36
Figura 3.5	Modelo da placa engastada e as posições dos quatro piezocerâmicos (piezocerâmicos na superfície inferior da placa são mostrados por linhas pontilhadas)	40
Figura 3.6	Diagrama de blocos do sistema de controle	45
Figura 3.7	Retroalimentação do regulador linear ótimo	47
Figura 4.1	Uma placa retangular num duto de ar condicionado	49
Figura 4.2	Modelo de condições de contorno de molas translacionais	50
Figura 4.3	Modelo de condições de contorno de molas rotacionais	50
Figura 4.4	Modelo de condições de contorno em x de molas translacionais e rotacionais	51

Figura 4.5	Modelo de condições de contorno em y de molas rotacionais e apoiada	52
Figura 5.1	Interpolação B-Spline	67
Figura 5.2	Interpolação B-Spline em duas dimensões	68
Figura 6.1	Placa com o sistema de medida	70
Figura 6.2	Modelo da câmara acústica	70
Figura 6.3	Base Modal de Aproximação para placa engastada $S[m, n]$ com $m = 1$ e $n = 1, 2, \dots, 6$	73
Figura 6.4	Os cinco primeiros modos de vibração para condições de contorno engastadas em x e y	74
Figura 6.5	Base Modal de Aproximação para a simulação de dutos de ar condicionado $S[m, n]$ com $m = 1$ e $n = 1, 2, \dots, 6$	75
Figura 6.6	Os cinco primeiros modos de vibração para a simulação de dutos de ar condicionado em x e y	76
Figura 6.7	Funcional de custo quadrático com 4 atuadores	78
Figura 6.8	Configurações das localizações ótimas dos atuadores dispostos na placa	79
Figura 6.9	Convergência do método da descida para dois atuadores	80
Figura 6.10	Convergência do método da descida para três atuadores	81
Figura 6.11	Convergência do método da descida para quatro atuadores	81
Figura 6.12	Convergência do método da descida para cinco atuadores	82
Figura 6.13	Modos de vibração sem e com controle	83

Figura 6.14 Deslocamento da placa sem e com controle com $t = 0.1$ segundo 83

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1	Comparação de frequências naturais	33
Tabela 3.2	Coefficientes κ_0 para várias frequências	37
Tabela 3.3	Voltagens e momentos do excitador e controlador aplicados . . .	39
Tabela 6.1	Constantes do problema	69
Tabela 6.2	Potência sonora calculada e medida experimentalmente com e sem o controle com dois piezelétricos	71
Tabela 6.3	Potência sonora calculada com o controle e com quatro piezelétricos	71
Tabela 6.4	Raízes da equação característica e frequências para condições de contorno engastadas	74
Tabela 6.5	Raízes da equação característica e frequências para simulação do ar condicionado	76
Tabela 6.6	Procura da posição ótima para quatro atuadores	77
Tabela 6.7	Posição ótima dos atuadores na placa	80

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, é estudada a resposta dinâmica de uma placa retangular, fina, excitada por forças pontuais harmônicas. A resposta impulso, isto é, a resposta de um sistema a uma força impulsiva unitária, gera uma base matemática [12]-[18], que permite uma nova abordagem no estudo de problemas vibratórios. A resposta livre do sistema pode ser descrita através da resposta impulso. Dessa forma, é possível destacar duas componentes da resposta: uma parte transiente, que está relacionada com a resposta do sistema livre estável e uma parte vinculada à força excitadora do sistema. Para tanto, utiliza-se a análise modal.

Será apresentada a solução da placa sob excitação de quatro momentos pontuais concentrados, simulando um piezoatuador, perfeitamente unido à superfície da placa, que será usado para minimizar a potência sonora radiada.

Para altas frequências do som, a atenuação da potência é usualmente atingida através de material absorvente na superfície da estrutura. Entretanto, esta técnica não é eficiente para baixas frequências (500 - 1000 Hz), pois a quantidade de material absorvente cresce com o decréscimo da frequência. Controle ativo de ruído é usado onde a técnica de interferência destrutiva é empregada para reduzir o campo de pressão sonora [54]. Mesmo para uma fonte simples (monopolo) muitas fontes acústicas seriam necessárias para obter o controle global do som quando as fontes de controle estão localizadas a mais de um quarto do comprimento de onda do ruído [47]. Para ruído estruturalmente radiado, o controle ativo é ainda mais necessário porque a maioria das fontes de ruído são complexas ou distribuídas.

O cálculo das entradas de controle é simplificado se todas as informações necessárias para o controle podem ser obtidas diretamente da placa. Por isso, a resposta da placa é muito importante. Várias técnicas foram desenvolvidas. Os métodos de Ritz [57] e da superposição [37] foram empregados na solução de equações simultâneas ou matrizes de alta ordem, tornando o cálculo da potência sonora ra-

diada mais difícil. O controle ativo da radiação sonora foi investigado, analítica e experimentalmente, para placa retangular engastada [54] e para placa circular [24, 25].

Neste trabalho, foi usado o método de Galerkin para obter a solução da placa com condições de contorno clássicas e não-clássicas, sujeita à excitação de forças pontuais. A fórmula da integral de Rayleigh [34, 49, 50] é empregada para obter a distribuição da pressão e a potência sonora radiada. Como uma aplicação direta, pode-se citar o controle do ruído em dutos de ar condicionado, por exemplo.

Materiais piezelétricos podem ser unidos a superfícies de várias estruturas ou em laminados, o que permite uma boa ligação mecânica e elétrica entre piezelétrico e estrutura. Atuadores piezelétricos podem ser unidos a várias estruturas por viscoelasticidade. Assim, reduzem a vibração estrutural por dissipação de energia. Momentos fletores gerados por atuadores piezelétricos também ajudam a atenuar as vibrações estruturais [51].

Vários materiais foram investigados por suas estruturas e propriedades piezelétricas. Alguns importantes materiais piezelétricos, que são de uso hoje, incluem óxido de zinco (Z_nO), nitrito de alumínio (ALN), titanato zirconato de chumbo (PZT) e fluoreto de polivinilideno (PVDF), entre outros. O Z_nO tem sido importante na pesquisa de desenvolvimento de sensores acústicos. O AIN é um material piezelétrico de filme fino promissor devido à sua alta velocidade acústica e sua resistência na umidade e alta temperatura. O PZT é um material piezocerâmico com alta piezeletricidade, com polarização espontânea. O PVDF é conhecido por sua flexibilidade, durabilidade, peso leve e relativamente baixa impedância acústica. PVDF foi usado em muitas aplicações, tais como em equipamentos de áudio, ultrassônicos, subaquáticos, óticos e eletromecânicos.

Primeiramente, deve-se especificar os objetivos de desempenho no controle, que podem incluir supressão de vibrações, absorção de energia, forma do controle e monitoramento de danos.

O controle para estruturas flexíveis emprega materiais piezelétricos. Pode ser local (descentralizado), global (centralizado) ou do tipo híbrido (hierárquico). O objetivo do controle local é adicionar amortecimento à estrutura em níveis locais, enquanto que os objetivos do controle global são estabilizar a estrutura e desprezar distúrbios. O controle global tem melhores características de desempenho que o controle local na estabilidade da estrutura, mas é computacionalmente volumoso. Um só controle centralizado teria que desempenhar um enorme número de computações para estruturas inteligentes, contendo muitos sensores e atuadores piezelétricos. O controle híbrido tem dois níveis de controle: um global para o desempenho e um controle local para o processamento distribuído.

Vários esquemas de controle foram implementados na literatura, no controle estrutural pelo uso de dispositivos piezelétricos. Entre eles, retroalimentação na posição ou deslocamento e velocidade, retroalimentação na taxa de tensão e deformação, retroalimentação na força, P (proporcional), PD (proporcional derivativo) e PID (proporcional integral derivativo), entre outros.

A escolha de sensores e atuadores piezelétricos apropriados é muito importante. Os sensores piezelétricos são escolhidos pelo tipo de deslocamento, velocidade ou aceleração, inclinação, taxa ou aceleração de declividade, tensão, deformação, taxa ou aceleração de deformação e atuadores piezelétricos são selecionados pelo tipo de força aplicada, momento ou deformação aplicados.

Há dois fenômenos básicos que permitem que materiais piezelétricos sejam usados como sensores e atuadores no sistema de controle. O primeiro fenômeno é conhecido como efeito direto de piezoelétrico, o qual implica que a aplicação de força mecânica ou pressão para um piezelétrico produza carga ou tensão elétrica. Por

outro lado, a aplicação de carga ou tensão elétrica para o material é respondido com tensão ou deslocamento induzidos. O segundo fenômeno é conhecido como efeito piezelétrico inverso. Estes efeitos piezelétricos direto e inverso formam uma base para o uso de material piezelétrico como sensores e atuadores, respectivamente. É o fenômeno de efeito direto de piezeletricidade que capacita materiais piezelétricos serem usados como sensores em diversos campos. O sensor piezelétrico converte deslocamento em saída elétrica.

Quando há muitos sensores e atuadores piezelétricos discretos, o controle ótimo é uma questão crítica no projeto do controle. Grupos individuais podem ser insuficientes e vários testes antecedem as melhores combinações destes sensores e atuadores. Leis de controle de entrada e saída simples (SISO) ou múltiplas (MIMO) podem ser usadas no controle [51].

Atuadores piezelétricos convertem entradas elétricas em deslocamentos em várias estruturas devido ao efeito de conversão do piezelétrico. Os parâmetros importantes para caracterizar seu desempenho são deformação, espessura, largura de banda, linearidade, sensibilidade à temperatura, força, densidade e eficiência.

Estruturas inteligentes são o objetivo de intensa pesquisa em diversas áreas. No campo aeroespacial, o termo tecnologias inteligentes implica o uso de sensores e atuadores para controle acústico estrutural ativo, onde atuadores estão ligados à fuselagem da aeronave, a fim de reduzir o ruído no compartimento de passageiros. Esta abordagem está sendo considerada para veículos de todos os tamanhos, desde estruturas espaciais grandes até micro-aeronaves e para produtos de todos os tipos, desde automóveis até aspiradores de pó. Um aspecto importante das tecnologias inteligentes é determinar o número ótimo de dispositivos de controle ativo, por exemplo, atuadores piezelétricos e sua posição na estrutura. Similarmente, o número e localização de sensores, por exemplo: extensômetros resistivos ("strain gages"), pode ser crítico para o funcionamento robusto de sistemas de controle ativo [48].

Na literatura, vários métodos de otimização da localização de sensores e atuadores são utilizados, entre eles, técnicas de otimização manual ou de localização intuitiva, métodos sistemáticos, problemas de otimização numérica, uso de algoritmos genéticos, além de combinações de métodos. O objetivo do método de localização ótima, no campo aeroespacial, é selecionar a localização de sensores e atuadores que reduzam o ruído em diversas frequências discretas produzidas por típicas aeronaves de hélice.

Problemas de localização de atuadores e sensores ocorrem em engenharia muito freqüentemente, até mesmo na estação espacial internacional. Pesquisas estudam as diferenças e similaridades nestes sistemas. As diferenças incluem número e tipo de atuadores (autofalantes, dispositivos piezelétricos) e número e tipo de sensores (microfones, acelerômetros, extensômetros resistivos). As semelhanças estão nos algoritmos para localização ótima de atuadores e sensores. Todos eles selecionam um subconjunto de localizações dentre um conjunto de localizações possíveis.

No capítulo dois, é apresentada a solução da equação de Kirchhoff da placa, com condições de contorno clássicas (engastada), em termos da base dinâmica introduzida por Claeysen [12]-[18], caracterizada por condições impulsivas, através da análise modal e a matriz de transferência. A integral de Rayleigh [34, 49, 50] é usada para obter a pressão sonora e a potência sonora radiada.

No capítulo três, é usado o controle ótimo na solução da equação da placa, juntamente com o uso dos materiais piezelétricos. A potência sonora radiada é expressa em termos da aceleração. A análise modal adjunta é utilizada para a obtenção da resposta da placa engastada após o controle.

No capítulo quatro, é apresentada uma aplicação da formulação proposta, isto é, dutos de ar condicionado. São utilizadas condições de contorno não-clássicas, que correspondem a reações restritivas lineares associadas a elementos

elásticos de translação e de rotação e são mostrados os correspondentes modos de vibração.

No capítulo cinco, é apresentada a otimização da localização dos atuadores piezelétricos, representado por um funcional linear quadrático. Estratégias clássicas para o problema do regulador quadrático linear (LQR), são usadas para o cálculo das matrizes de retroalimentação. Técnicas de programação não linear são empregadas no cálculo da solução ótima. Para o cálculo de gradientes, a idéia adotada leva em consideração as derivadas das funções aproximação do tipo B-Spline [52].

No capítulo seis, são mostrados os resultados, obtidos com o auxílio dos *softwares* MAPLE[©] e MATLAB[©]. Foram encontradas as potências sonoras radiadas na placa antes e depois do controle para dois e quatro atuadores. A base modal de aproximação é calculada para condições de contorno engastadas e para a aplicação proposta aqui, dutos de ar condicionado, ou seja, mola rotacional e apoiada em cada extremo. O funcional custo quadrático é apresentado para diferente número de atuadores. A posição ótima dos atuadores é encontrada.

No capítulo sete, são apresentadas as conclusões do trabalho.

2 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA PLACA

2.1 Modelagem

A equação de movimento da placa é baseada no modelo de Kirchhoff, onde o cisalhamento é desprezado. Nesse modelo são assumidas algumas hipóteses tais como a de que a placa é elástica, linear, as seções transversais planas e perpendiculares permanecem sempre planas e perpendiculares ao plano médio da placa após a flexão e a de que a dimensão da espessura da placa é pequena em comparação com o seu comprimento e largura, em geral, uma ordem de grandeza menor [11].

A teoria de Kirchhoff é válida para placas com comprimento l e comprimento da semi onda muito maior que a espessura, tipicamente vinte vezes maior. Caso contrário, deve-se mudar de teoria, considerando placas semi-espessas, utilizando a teoria de placas de Mindlin ou Reissner

O deslocamento de uma placa fina é governado pela seguinte equação, com o sistema de coordenadas definido na Figura 2.1,

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w(t, x, y) = p_e(t, x, y), \quad (2.1)$$

onde $w(t, x, y)$ é o deslocamento, h é a espessura, ρ_s é a densidade da placa, p_e é a força externa e D é a rigidez de flexão definida por

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2.2)$$

com E sendo o módulo de elasticidade e ν , o coeficiente de Poisson.

2.1.1 Condições Iniciais e de Contorno

Para um problema dinâmico, $w(t, x, y)$ deve satisfazer a equação (2.1), juntamente com as condições iniciais temporais, $w(0, x, y) = w_0$, $w_t(0, x, y) = w_1$ e condições de contorno espaciais.

Assumindo que a placa é engastada nas extremidades, as condições de contorno são:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \quad (2.3)$$

e

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = -\frac{b}{2}, \frac{b}{2}. \quad (2.4)$$

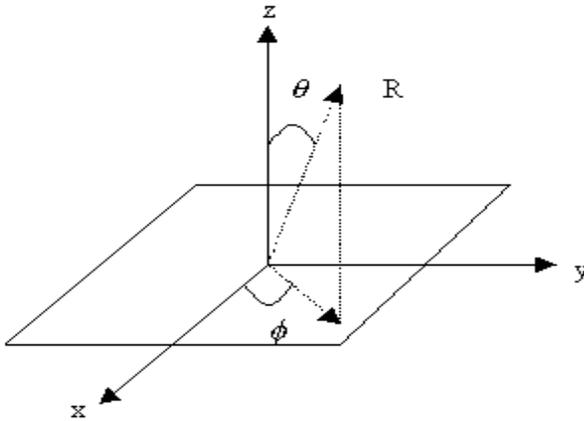


Figura 2.1 Sistema de coordenadas com origem no centro da placa

2.2 Freqüências e Modos de Vibração

Se nenhuma força externa é aplicada, ou seja, se $p_e(t, x, y) = 0$, da equação (2.1), segue que as vibrações livres são geradas pela equação

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w(t, x, y) = 0. \quad (2.5)$$

Na análise modal, a procura de soluções do tipo oscilatório da equação (2.5),

$$w(t, x, y) = e^{\gamma t} X(x) Y(y) \quad (2.6)$$

ou, numa variável espacial,

$$w = e^{\gamma t} X(x) \quad \text{e} \quad w = e^{\gamma t} Y(y), \quad \text{com} \quad \gamma = i\omega, \quad (2.7)$$

implica, por substituição, a resolução de um problema de autovalor generalizado

$$Lw = \lambda w, \quad \text{com} \quad \lambda = -\frac{\gamma^2 \rho_s h}{D}, \quad (2.8)$$

ou ainda, $\lambda = \frac{\rho_s h}{D} \omega^2$ são os autovalores e $L = \frac{d^4}{dx^4}$ é um operador diferencial linear, sujeito às condições de contorno engastada nos extremos espaciais

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (2.9)$$

$$X\left(-\frac{a}{2}\right) = X\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$X'\left(-\frac{a}{2}\right) = X'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

e

$$Y^{(iv)}(y) - \beta^4 Y(y) = 0 \quad (2.10)$$

$$Y\left(-\frac{b}{2}\right) = Y\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$Y'\left(-\frac{b}{2}\right) = Y'\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$$

onde $\beta^4 = \frac{\rho_s h}{D} \omega^2$.

Sob a hipótese de que $X(x)$ e $Y(y)$ satisfazem as condições de contorno, o valor ω será referido como frequência característica e, $X(x)$ e $Y(y)$, como as

autofunções ou os modos associados à ω . Tem-se que

$$\boxed{\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_s h}}}. \quad (2.11)$$

2.3 Estudo da Equação $X^{iv} - \beta^4 X = 0$

Aqui, considera-se, de maneira unificada, o método de obtenção dos modos de vibração $X(x)$ e $Y(y)$. É aplicada uma formulação que pode envolver diferentes condições de contorno e diferentes bases de soluções da equação que descreve os modos. Na prática, são consideradas duas bases de solução: a base espectral clássica, obtida a partir das raízes da equação característica, associada à equação diferencial ordinária linear de quarta ordem e a base dinâmica, introduzida por Claeysen [12]-[18], obtida a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas.

Inicialmente, é apresentada a aplicação desta metodologia para a base dinâmica, no caso específico onde são aplicadas as condições de contorno em $x = -\frac{a}{2}, x = \frac{a}{2}$ e $y = -\frac{b}{2}, y = \frac{b}{2}$ como sendo engastadas.

Ambos os problemas (2.9) e (2.10) são, de forma genérica, com condições de contorno, em $x = -\frac{a}{2}$

$$A_{11}X + B_{11}X' + C_{11}X'' + D_{11}X''' = 0 \quad (2.12)$$

$$A_{12}X + B_{12}X' + C_{12}X'' + D_{12}X''' = 0$$

e, em $x = \frac{a}{2}$,

$$A_{21}X + B_{21}X' + C_{21}X'' + D_{21}X''' = 0 \quad (2.13)$$

$$A_{22}X + B_{22}X' + C_{22}X'' + D_{22}X''' = 0.$$

Da teoria de equações diferenciais, a solução da equação linear homogênea (2.9), é dada por

$$X(x) = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4 = \mathbf{\Phi}\mathbf{c}, \quad (2.14)$$

onde $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ é uma base de soluções,

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4], \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a equação (2.14) em (2.12) e (2.13), tem-se, para $x = -\frac{a}{2}$,

$$A_{11}\mathbf{\Phi}\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + B_{11}\mathbf{\Phi}'\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + C_{11}\mathbf{\Phi}''\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + D_{11}\mathbf{\Phi}'''\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} = 0$$

$$A_{12}\mathbf{\Phi}\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + B_{12}\mathbf{\Phi}'\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + C_{12}\mathbf{\Phi}''\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + D_{12}\mathbf{\Phi}'''\left(-\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} = 0$$

e, para $x = \frac{a}{2}$,

$$A_{21}\mathbf{\Phi}\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + B_{21}\mathbf{\Phi}'\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + C_{21}\mathbf{\Phi}''\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + D_{21}\mathbf{\Phi}'''\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} = 0$$

$$A_{22}\mathbf{\Phi}\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + B_{22}\mathbf{\Phi}'\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + C_{22}\mathbf{\Phi}''\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} + D_{22}\mathbf{\Phi}'''\left(\frac{a}{2}\right)\mathbf{c} = 0.$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \Phi'\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \Phi''\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \Phi'''\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \Phi\left(\frac{a}{2}\right) \\ \Phi'\left(\frac{a}{2}\right) \\ \Phi''\left(\frac{a}{2}\right) \\ \Phi'''\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

ou, de maneira expandida,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & C_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & B_{12} & C_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21} & B_{21} & C_{21} & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{22} & B_{22} & C_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_2\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_3\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_4\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1'\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_2'\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_3'\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_4'\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_2''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_3''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_4''\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1'''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_2'''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_3'''\left(-\frac{a}{2}\right) & \phi_4'''\left(-\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_2\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_3\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_4\left(\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1'\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_2'\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_3'\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_4'\left(\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_2''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_3''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_4''\left(\frac{a}{2}\right) \\ \phi_1'''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_2'''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_3'''\left(\frac{a}{2}\right) & \phi_4'''\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

2.4 Base Dinâmica

Para a obtenção dos modos é utilizada a base dinâmica, introduzida por Claeysen [12]-[18], obtida a partir de uma solução com condições iniciais impulsivas.

A solução de $X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0$ pode ser escrita em termos da base dinâmica como

$$X(x) = c_1 h\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_2 h'\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_3 h''\left(x + \frac{a}{2}\right) + c_4 h'''\left(x + \frac{a}{2}\right), \quad (2.17)$$

onde

$$\begin{aligned} h^{(iv)}\left(x + \frac{a}{2}\right) - \beta^4 h\left(x + \frac{a}{2}\right) &= 0 \\ h\left(-\frac{a}{2}\right) = h'\left(-\frac{a}{2}\right) = h''\left(-\frac{a}{2}\right) &= 0, \quad h'''\left(-\frac{a}{2}\right) = 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A solução de $h\left(x + \frac{a}{2}\right)$ é definida como a resposta impulso ou a solução dinâmica. Observe que, pelas condições iniciais de $h\left(x + \frac{a}{2}\right)$, o Wronskiano de $h\left(x + \frac{a}{2}\right)$ e suas derivadas até terceira ordem são não-nulos [46]. Portanto, $\{h, h', h'', h'''\}$ constitui uma base de soluções.

Esta base foi escolhida com o objetivo de zerar o maior número possível de elementos de Φ .

Usando as notações,

$$\phi_1 = h\left(x + \frac{a}{2}, \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh \beta\left(x + \frac{a}{2}\right) - \sin \beta\left(x + \frac{a}{2}\right)}{\beta^3} \right], \quad (2.19)$$

$$\phi_2 = h'\left(x + \frac{a}{2}, \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh \beta\left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos \beta\left(x + \frac{a}{2}\right)}{\beta^2} \right], \quad (2.20)$$

$$\phi_3 = h''\left(x + \frac{a}{2}, \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh \beta\left(x + \frac{a}{2}\right) + \sin \beta\left(x + \frac{a}{2}\right)}{\beta} \right], \quad (2.21)$$

$$\phi_4 = h'''\left(x + \frac{a}{2}, \beta\right) = \frac{1}{2} \left[\cosh \beta\left(x + \frac{a}{2}\right) + \cos \beta\left(x + \frac{a}{2}\right) \right], \quad (2.22)$$

tem-se

$$\Phi_{-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}} = \begin{bmatrix} \Phi(-a/2) \\ \Phi'(-a/2) \\ \Phi''(-a/2) \\ \Phi'''(-a/2) \\ \Phi(a/2) \\ \Phi'(a/2) \\ \Phi''(a/2) \\ \Phi'''(a/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \\ h(a) & h'(a) & h''(a) & h'''(a) \\ h'(a) & h''(a) & h'''(a) & h^{(iv)}(a) \\ h''(a) & h'''(a) & h^{(iv)}(a) & h^{(v)}(a) \\ h'''(a) & h^{(iv)}(a) & h^{(v)}(a) & h^{(vi)}(a) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.5 Cálculo Matricial dos Modos

Para as condições de contorno engastadas nos extremos, utilizando a base dinâmica descrita anteriormente, tem-se para $x = -\frac{a}{2}$ e para $x = \frac{a}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(-a/2) \\ \Phi'(-a/2) \\ \Phi''(-a/2) \\ \Phi'''(-a/2) \\ \Phi(a/2) \\ \Phi'(a/2) \\ \Phi''(a/2) \\ \Phi'''(a/2) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

De maneira compacta, tem-se

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Seja $\mathcal{U} = \mathcal{B}\Phi$, uma matriz que incorpora os valores associados às condições de contorno, então

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h(a) & h'(a) & h''(a) & h'''(a) \\ h'(a) & h''(a) & h'''(a) & h^{(iv)}(a) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

O sistema singular a ser resolvido é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ h(a) & h'(a) & h''(a) & h'''(a) \\ h'(a) & h''(a) & h'''(a) & h^{(iv)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

de onde tem-se $c_3 = c_4 = 0$.

O determinante nulo do sistema fornece a equação característica. Obtém-se solução $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ se

$$\begin{vmatrix} h(a) & h'(a) \\ h'(a) & h''(a) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.28)$$

cuja solução é

$$c_1 = -c_2 \frac{h'(a)}{h(a)}. \quad (2.29)$$

O termo $\sigma(x) = -\frac{h'(x)}{h(x)}$ é chamado de fator de forma modal.

Assim,

$$\boxed{X(x) = \sigma(a) h\left(x + \frac{a}{2}\right) + h'\left(x + \frac{a}{2}\right)}. \quad (2.30)$$

Analogamente, obtém-se:

$$\boxed{Y(y) = \sigma(b) h\left(y + \frac{b}{2}\right) + h'\left(y + \frac{b}{2}\right)}. \quad (2.31)$$

A equação característica

$$\cosh(\beta a) \cos(\beta a) = 1, \quad (2.32)$$

com autovalores $\beta_n \approx \frac{(2n+1)\pi}{2a}$, é obtida com o uso da base clássica.

A equivalente equação característica, escrita na base dinâmica, é

$$h(a)h''(a) - h'(a)^2 = 0. \quad (2.33)$$

Conseqüentemente, os valores de suas raízes são os mesmos para ambas as bases utilizadas. Da mesma forma, ambas as bases fornecem os mesmos modos de vibração, embora com formas analíticas distintas.

Deste modo, tem-se uma infinidade de raízes que fornecem os modos $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ na direção x e, analogamente, $Y_1, Y_2, \dots, Y_m, \dots$ na direção y .

2.6 Discretização Espacial através do Método de Galerkin

A partir das bases espaciais separadas

$$\begin{aligned} &\{X_1(x), X_2(x), \dots, X_n(x), \dots\} \\ &\{Y_1(y), Y_2(y), \dots, Y_m(y), \dots\}, \end{aligned}$$

escritas em termos da base dinâmica, constrói-se a base de aproximação espacial $S(x, y) = [S_1, \dots, S_l]^T$ com $l = mn$, onde S_p denota uma função forma modal

genérica, isto é:

$$\begin{aligned}
S_1 &= X_1(x)Y_1(y) , S_2 = X_1(x)Y_2(y) , \dots , S_m = X_1(x)Y_m(y) \\
S_{m+1} &= X_2(x)Y_1(y) , S_{m+2} = X_2(x)Y_2(y) , \dots , S_{2m} = X_2(x)Y_m(y) \\
&\dots \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \dots \\
S_{l-n} &= X_n(x)Y_1(y) , S_{l-n+1} = X_n(x)Y_2(y) , \dots , S_l = X_n(x)Y_m(y).
\end{aligned}$$

Para obter, por um método variacional, o deslocamento aproximado $w(t, x, y) = S_p^T(x, y)W_p(t)$, com $W_p(t)$ sendo a matriz de amplitude modal,

$$\int_{\sigma} S_p S_q d\sigma = \int_{\sigma} X_i Y_r X_j Y_s d\sigma = \int_{-a/2}^{a/2} X_i X_j dx \int_{-b/2}^{b/2} Y_r Y_s dy,$$

pela propriedade de ortogonalidade das funções formas modais, tem-se

$$\int_{\sigma} S_p S_q d\sigma = 0 \text{ se } X_i \neq X_j \text{ ou } Y_r \neq Y_s. \quad (2.34)$$

A seguir, será considerado o método de Galerkin [57], com $S = [S_1, \dots, S_l]^T$ sendo a base de aproximação de forma e de teste. Procura-se, então, obter $w(t, x, y)$ de modo que

$$R = \left[\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \nabla^4 w(t, x, y) - p_e \right], \quad (2.35)$$

onde ∇^4 é o operador diferencial biharmônico,

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

seja ortogonal com o subespaço de aproximação gerado pela base S , isto é,

$$\int_{\sigma} \left[\rho_s h \frac{\partial^2 w(t, x, y)}{\partial t^2} + D \nabla^4 w(t, x, y) - p_e \right] S_p d\sigma = 0. \quad (2.36)$$

Decorre de $w(t, x, y) = S_p^T(x, y)W_p(t)$ que

$$\rho_s h \int_{\sigma} S_p S_q d\sigma W_p''(t) + D \int_{\sigma} \nabla^4 S_p S_q d\sigma W_p(t) = \int_{\sigma} p_e S_p d\sigma. \quad (2.37)$$

Assim, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias,

$$\boxed{M_l W_p''(t) + K W_p(t) = F_p(t)} \quad (2.38)$$

onde

$F_p(t) = \int_{\sigma} p_e S_p d\sigma$ é o vetor de força externa,

com

$$M_l = \rho_s h \int_{\sigma} S_p S_q d\sigma, \quad K = D \int_{\sigma} \nabla^4 (S_p) S_q d\sigma, \quad F_p(t) = \int_{\sigma} p_e(t, \sigma) S_p d\sigma,$$

sendo a matriz de inércia.

Usando a propriedade de ortogonalidade (2.34), tem-se de [7],

$$M_l = \rho_s h \int_{-a/2}^{a/2} X_i X_j dx \int_{-b/2}^{b/2} Y_r Y_s dy = \rho_s h a b I, \quad (2.39)$$

uma matriz diagonal, onde I é a matriz identidade $l \times l$ e,

$$K = D \int_{\sigma} \nabla^4 (X_i Y_j) X_r Y_s d\sigma = D \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} Y_j + 2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + X_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial y^4} \right) X_r Y_s d\sigma, \quad (2.40)$$

ou ainda, como $X_i^{iv} = \beta^4 X_i$ e $Y_j^{iv} = \beta^4 Y_j$,

$$K = D \int_{\sigma} \left(\beta^4 X_i Y_j + 2 \frac{\partial^4 X_i Y_j}{\partial x^2 \partial y^2} + X_i \beta^4 Y_j \right) X_r Y_s d\sigma = D \int_{\sigma} \left(2\beta^4 S_p + 2 \frac{\partial^4 S_p}{\partial x^2 \partial y^2} \right) S_q d\sigma. \quad (2.41)$$

é a matriz de rigidez.

Usando a propriedade de ortogonalidade (2.34), tem-se

$$K = \begin{cases} D \int_{\sigma} 2 \frac{\partial^4 S_p}{\partial x^2 \partial y^2} S_q d\sigma & \text{se } p \neq q \\ D \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) S_p \right] S_p d\sigma & \text{se } p = q. \end{cases} \quad (2.42)$$

Na forma matricial,

$$K = D \begin{bmatrix} \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) S_1 \right] S_1 d\sigma & \cdots & \int_{\sigma} 2 \frac{\partial^4 S_p}{\partial x^2 \partial y^2} S_q d\sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{simétrica} & \cdots & \int_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) S_l \right] S_l d\sigma \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

é uma matriz real e simétrica.

2.7 Análise Modal de Sistemas Não-Amortecidos

O fato de um sistema possuir frequências naturais e modos vibratórios é de suma relevância para a determinação das vibrações livres de um sistema não-amortecido. Através da propriedade de ortogonalidade dos modos é possível desacoplar o sistema em l sistemas de um grau de liberdade. Esta propriedade também é importante para o estudo das vibrações forçadas [27].

Se uma das matrizes M_l ou K for não-diagonal, então haverá *acoplamento* das coordenadas generalizadas. No caso de sistemas não-amortecidos, a

equação do movimento a ser resolvida é

$$\boxed{M_l W_p''(t) + K W_p(t) = 0}. \quad (2.44)$$

A terminologia *freqüência fundamental* é reservada para a menor freqüência não nula. Usualmente, é atribuída à ω_1 . Contudo, se as matrizes M_l e K forem simétricas e positivas definidas, certamente, as l freqüências serão positivas e ω_1 será a freqüência fundamental [41].

Modos correspondentes a freqüências diferentes, relativos à matriz de inércia M_l e à matriz de rigidez K são ortogonais.

Para M_l simétrica positiva definida e K simétrica, tem-se

$$V^T M_l V = D_m, \quad V^T K V = D_m \Omega^2 \quad (2.45)$$

onde V é a *matriz modal*

$$V = \text{diag}[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_l], \quad (2.46)$$

Ω^2 é a *matriz espectral diagonal*

$$\Omega^2 = \text{diag}[\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \cdots \ \omega_l^2], \quad (2.47)$$

e D_m é a *matriz diagonal de inércia modal*

$$D_m = \text{diag}[\mu_1 \ \mu_2 \ \cdots \ \mu_l]. \quad (2.48)$$

O parâmetro μ_i é denominado *inércia modal*.

Os modos podem ser normalizados de forma que a matriz de inércia modal seja a matriz identidade. Isto é, definindo

$$u_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^t M_l v_i}} \quad (2.49)$$

ou, equivalentemente,

$$U = \frac{V}{\sqrt{D_m}}, \quad (2.50)$$

decorrem as relações dos modos normais

$$U^T M_l U = I, \quad U^T K U = \Omega^2.$$

onde U é a matriz modal normalizada, cujas colunas são vetores u_k , normalizados com respeito a M_l e satisfazendo

$$K u_k = \omega_k^2 M_l u_k,$$

com ω_k^2 real, $k = 1, 2, \dots, l$.

Portanto, as matrizes M_l e K podem ser simultaneamente diagonalizadas por uma mesma matriz não singular U . Este resultado é conhecido como o *teorema dos modos normais* [28].

Para um sistema livre não-amortecido (2.44), a solução é dada por [27]

$$W_p(t) = h(t) M_l W_p'(0) + h'(t) M_l W_p(0), \quad (2.51)$$

onde

$$h(t) = U \frac{\text{sen} \Omega t}{\Omega} U^T \quad \text{e} \quad h'(t) = U (\text{cos} \Omega t) U^T, \quad (2.52)$$

U é a matriz modal normalizada e Ω^2 é a matriz espectral (2.47).

Agora, será estabelecida uma fórmula matricial para a resposta impulso de um sistema não-amortecido, bem como sua relação com a fórmula anterior, obtida através da análise modal. Também será determinada a resposta de um sistema forçado, segundo a afirmação:

O sistema (2.38) possui a resposta geral

$$\boxed{W_p(t) = h'(t)M_lW_p(0) + h(t)M_lW_p'(0) + \int_0^t h(t-\tau)F_p(\tau)d\tau}, \quad (2.53)$$

onde a resposta impulso matricial, $h(t)$, satisfaz

$$M_lh''(t) + Kh(t) = 0, \quad h(0) = 0, \quad M_lh'(0) = I. \quad (2.54)$$

Por [27], obtém-se a vibração livre

$$\boxed{W_p(t) = h'(t)M_lW_p(0) + h(t)M_lW_p'(0)}, \quad (2.55)$$

em analogia matricial ao caso de um grau de liberdade.

Desta maneira, a resposta matricial a um impulso unitário é dada (como na equação (2.52)), expandida em modos,

$$h(t) = U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^T = \sum_{k=0}^l \frac{\text{sen}(\omega_k t)}{\omega_k} U U^T \quad (2.56)$$

Para M_l e K matrizes simétricas e positivas definidas, a resposta forçada é

$$\boxed{W_p(t) = \int_0^t h(t-\tau)F_p(\tau)d\tau}, \quad (2.57)$$

na forma modal,

$$W_p(t) = \int_0^t U \frac{\text{sen}\Omega(t-\tau)}{\Omega} U^T F_p(\tau) d\tau \quad (2.58)$$

ou

$$W_p(t) = U \begin{bmatrix} \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_1(t-\tau)}{\omega_1} F_1(\tau) d\tau \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_2(t-\tau)}{\omega_2} F_2(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^t \frac{\text{sen}\omega_l(t-\tau)}{\omega_l} F_n(\tau) d\tau \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

onde $F_k(t)$ é a k-ésima componente do vetor $U^T F_p(t)$.

2.8 Modos Normais e a Matriz de Transferência

A solução dinâmica ou resposta impulso matricial (2.54) é equivalente

a

$$M_l h''(t) + K h(t) = \delta(x) I \quad h(0) = 0 \quad M_l h'(0) = 0. \quad (2.60)$$

Aplicando a transformada de Laplace para $h(t)$ e após simplificações, tem-se que

$$\Delta(s) H(s) = I, \quad (2.61)$$

onde $H(s)$ é a transformada de Laplace de $h(t)$ e será denominada a matriz de transferência do sistema não-amortecido (2.38) e $\Delta(s) = s^2 M_l + K$.

Portanto, a matriz de transferência é dada por

$$H(s) = [s^2 M_l + K]^{-1}. \quad (2.62)$$

Como $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta impulso, tem-se

$$H(s) = L(h(t)) = L\left(U \frac{\text{sen}\Omega t}{\Omega} U^T\right) = U [s^2 I + \Omega^2]^{-1} U^T. \quad (2.63)$$

Também, sendo Ω uma matriz diagonal (2.47), segue que

$$(s^2 I + \Omega^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Conclui-se que a matriz de transferência é dada por

$$H(s) = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_1^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + \omega_2^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

ou, em forma equivalente,

$$H(s) = [s^2 M_l + K]^{-1} = U [s^2 I + \Omega^2]^{-1} U^T = \sum_{k=1}^l \frac{u_k u_k^T}{s^2 + \omega_k^2}. \quad (2.66)$$

Em particular, tem-se a função frequência matricial

$$H(i\omega) = [(i\omega)^2 M_l + K]^{-1} = U [(i\omega)^2 I + \Omega^2]^{-1} U^T = \sum_{k=1}^l \frac{u_k u_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2}. \quad (2.67)$$

2.9 Transmissão de uma Onda Plana Incidente

Para uma onda plana incidente P_{in} na placa [33]

$$P_{in}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{P} \exp \mathbf{i}(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega \mathbf{t}), \quad (2.68)$$

onde

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} = k \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + k \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + k \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \text{ e } k = \frac{\omega}{C_0} \text{ é o número de onda acústica.}$$

Sob a hipótese de que a placa é rígida, assume-se reflexão total da onda incidente e, assim, o campo de pressão que excita a placa em movimento é duas vezes a pressão incidente [56]. Então, pode-se derivar a resposta forçada da placa para uma onda acústica incidente.

Na equação (2.1), tem-se para p_e ,

$$p_e(t, x, y) = P_0 e^{i\omega t} f(x, y), \quad (2.69)$$

com

$$P_0 = P e^{-ik_z z} \quad (2.70)$$

e

$$f(x, y) = e^{-i(k_x x + k_y y)}. \quad (2.71)$$

Assim,

$$F_p(t) = P_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} \int_{\sigma} f(x, y) S_1 d\sigma \\ \int_{\sigma} f(x, y) S_2 d\sigma \\ \vdots \\ \int_{\sigma} f(x, y) S_l d\sigma \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Utilizando a análise modal, descrita anteriormente, procura-se solução do tipo

$$W_p = \tilde{f} e^{i\omega t}. \quad (2.73)$$

Substituindo (2.73) em (2.38), tem-se

$$W_p = (-\omega^2 M_l + K)^{-1} F_p. \quad (2.74)$$

Usando (2.67), obtém-se

$$W_p(t) = \sum_{k=1}^l \frac{u_k u_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2} F_p(t). \quad (2.75)$$

onde ω é a frequência da entrada harmônica.

A solução da placa engastada com incidência de uma onda plana será

$$w(t, x, y) = S_p^T(x, y) \sum_{k=1}^l \frac{u_k u_k^T}{\omega_k^2 - \omega^2} F_p(t). \quad (2.76)$$

A onda sonora transmitida devido ao movimento da placa é assumida propagar-se no espaço semi-infinito, como mostrado na Figura 2.2.

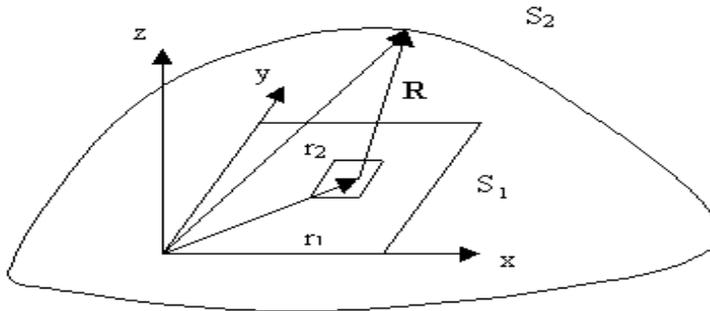


Figura 2.2 Áreas de integração S_1 e S_2 usadas no cálculo da potência radiada na placa

A pressão num ponto (R, θ, ϕ) no sistema de coordenadas esféricas, devido a uma entrada harmônica de frequência ω é calculada usando a integral de Rayleigh [34, 49, 50].

Quando a placa vibra, a pressão acústica $P(\mathbf{r}_2)$ em \mathbf{r}_2 existe e é obtida por

$$P(\mathbf{r}_2) = \frac{\omega \rho_a}{2\pi} \int_{S_1} v(\mathbf{r}_1) \frac{e^{-ikR}}{R} dS_1, \quad (2.77)$$

onde ω é a frequência angular da placa, k é o número de onda, R é a distância entre os vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , ou seja, $R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ e S_1 é a área da placa.

A intensidade acústica $I(\mathbf{r}_2)$ é expressa por

$$I(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \text{Re} \{ P(\mathbf{r}_2) v^*(\mathbf{r}_2) \}, \quad (2.78)$$

onde $v(\mathbf{r}_2)$ é a velocidade normal do meio acústico em \mathbf{r}_2 e $*$ denota o complexo conjugado.

A potência sonora Π radiada no espaço semi-infinito acima da placa é

$$\Pi = \int_{S_2} I(\mathbf{r}_2) dS_2, \quad (2.79)$$

onde S_2 é uma superfície arbitrária que cobre a área S_1 e \mathbf{r}_2 é o vetor posição de S_2 (figura 2.2).

Substituindo (2.77) e (2.78) em (2.79) e tomando $S_2 = S_1$, então \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 representam dois vetores posição arbitrários na superfície da placa (Figura 2.3).

A potência radiada pela placa é

$$\Pi = \frac{\omega \rho_a}{4\pi} \int_{S_2} \int_{S_1} \text{Re} \left\{ v(\mathbf{r}_1) \frac{e^{-ikR}}{R} v^*(\mathbf{r}_2) \right\} dS_1 dS_2, \quad (2.80)$$

onde S_1 e S_2 são áreas no plano xy com $-a/2 < x < a/2$ e $-b/2 < y < b/2$.

Para uma função complexa C , a relação $\text{Re}\{C\} = \frac{C + C^*}{2}$ é sempre válida.

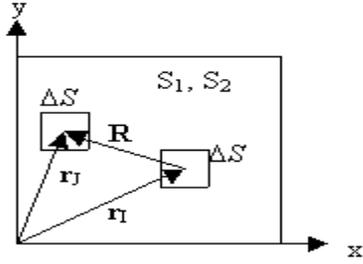


Figura 2.3 Discretização da área da placa

Assim,

$$Re \left\{ v(\mathbf{r}_1) \frac{e^{-ikR}}{R} v^*(\mathbf{r}_2) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left[v(\mathbf{r}_1) \frac{\sin kR + i \cos kR}{R} v^*(\mathbf{r}_2) \right] + \left[v^*(\mathbf{r}_1) \frac{\sin kR - i \cos kR}{R} v(\mathbf{r}_2) \right] \right\}. \quad (2.81)$$

Devido à relação de reciprocidade entre a fonte em \mathbf{r}_1 e o receptor em \mathbf{r}_2 , a equação (2.81) é simplificada como

$$Re \left\{ v(\mathbf{r}_1) \frac{e^{-ikR}}{R} v^*(\mathbf{r}_2) \right\} = v(\mathbf{r}_1) \frac{\sin kR}{R} v^*(\mathbf{r}_2). \quad (2.82)$$

Portanto, a equação (2.80) torna-se

$$\Pi = \frac{\omega \rho_a}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} v(\mathbf{r}_1) \frac{\sin kR}{R} v^*(\mathbf{r}_2) dx_1 dy_1 \right] dx_2 dy_2. \quad (2.83)$$

Considere a placa retangular dividida em N elementos ΔS (Figura 2.3). A equação (2.83) é, então, aproximada como [54]

$$\Pi \cong \frac{\omega \rho_a}{4\pi} \sum_j \sum_i \frac{\sin kR}{R} v(\mathbf{r}_i) v^*(\mathbf{r}_j) (\Delta S) (\Delta S), \quad (2.84)$$

onde \mathbf{r}_i e \mathbf{r}_j são os vetores posição do ponto central dos dois elementos arbitrários.

3 DESLOCAMENTO E POTÊNCIA COM CONTROLE

3.1 Uso de Materiais Piezelétricos

Materiais piezelétricos são ideais para uso em sensoriamento e controle distribuído de estruturas flexíveis. Sistemas de controle piezelétrico têm vantagens como leveza, alta precisão e eficiência. Estruturas flexíveis necessitam o uso de sensores e atuadores de modo adequado. Esta questão é particularmente importante para estruturas espaciais e aeronaves, cuja missão requerida é crucial e a divergência destes requerimentos pode ser formidavelmente caro. A pesquisa no campo de sensoriamento e controle de estruturas flexíveis tem progredido quase paralelamente a avanços na tecnologia espacial e tem interações com a indústria aeronáutica.

O sensoriamento e controle de estruturas flexíveis está relacionado com o posicionamento discreto de sensores e atuadores, que operam de acordo com a escolha da lei de controle. Muitas técnicas modernas de controle foram desenvolvidas recentemente com o desafio de desenhar controladores que se adaptem a estruturas flexíveis, funcionando com algumas condições requeridas. Os materiais dos sensores e atuadores também são importantes, pois afetam fatores como precisão, confiabilidade, flexibilidade, durabilidade, peso, etc. Sensores e atuadores discretos trazem o problema do seu posicionamento, enquanto que os distribuídos oferecem maior flexibilidade e melhor resposta e características de monitoramento.

Piezeletricidade é o fenômeno mais usado no sensoriamento e controle distribuído de estruturas flexíveis. Define, basicamente, uma relação entre um campo elétrico aplicado e tensão ou uma tensão aplicada e campo elétrico em certos cristais, cerâmicos e filmes. Piezeletricidade foi descoberto primeiramente pelos irmãos Curie, em 1880, mas seu uso em sensoriamento e controle de estruturas flexíveis é relativamente novo. Muitos artigos tratam de piezeletricidade em várias áreas [1, 53, 60].

Um sistema de controle piezolétrico distribuído consiste de uma barra flexível com camadas de piezolétricos ligados à superfície atuando como sensores e atuadores como mostra a Figura 3.1.

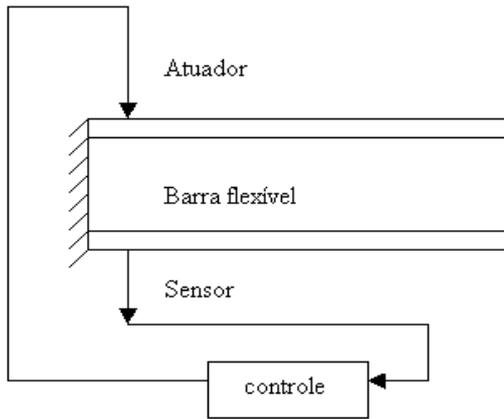


Figura 3.1 Sistema de controle piezolétrico distribuído

Embora a teoria não linear de piezeletricidade esteja bem estabelecida [9], devido a pequenas vibrações estruturais, que são na maioria das vezes consideradas e devido também a complicações com a piezeletricidade não linear, as equações piezolétricas lineares são freqüentemente usadas. Elas assumem movimento quase estático indicando que as forças elétricas e mecânicas são balanceadas em um dado instante. As equações lineares de piezeletricidade [3] são dadas por

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}^T \mathbf{s} + \varepsilon^S \mathbf{E}_c$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{s} - \mathbf{e} \mathbf{E}_c \quad (3.1)$$

onde \mathbf{d} , \mathbf{T} , \mathbf{s} e \mathbf{E}_c são os vetores de carga por unidade de área, tensão, deformação e campo elétrico, respectivamente, e é a matriz de constantes piezolétricas, ε^S é a matriz dielétrica em deformação constante e c^E é a matriz elasticidade em campo elétrico constante. Na equação (3.1), o superíndice T denota a transposta da matriz.

A primeira e a segunda equação em (3.1) descrevem os efeitos direto e inverso, respectivamente.

3.1.1 Sensores e Atuadores Integrados

O estudo de estruturas flexíveis adaptativas, com aplicações na aerodinâmica e em ambientes acústicos é freqüentemente encontrado na literatura. O uso de sensores e atuadores piezelétricos para controle ativo na radiação sonora de uma barra simplesmente apoiada foi demonstrado em [61]. A barra foi sujeita a uma força pontual harmônica e o nível de pressão sonora para casos com ressonância foi reduzido. Controle da transmissão sonora ativa usando sensor e atuador piezelétrico foi experimentalmente estudado para placa fina [4]. Controle de som e radiações acústicas em banda-larga para estruturas adaptativas foi estudado em [53].

As características de desempenho de estruturas adaptativas dos atuadores piezelétricos são freqüentemente testados em aerodinâmica e ambientes acústicos: o controle ativo da pressão acústica numa cavidade bi-dimensional com barra flexível foi implementado com piezelétrico na superfície da barra. O controle ativo da transmissão/radiação do som para placas harmonicamente excitadas usando atuadores piezoelétricos foi teoricamente investigado [22].

É o fenômeno de efeito direto de piezeletricidade que capacita materiais piezelétricos serem usados como sensores em diversos campos desde a descoberta da piezeletricidade mais de um século atrás. O sensor piezelétrico converte deformação em saída elétrica. A sensibilidade para deformação de sensores piezelétricos está na faixa de 10^4 V por unidade de deformação sob cargas e geometrias razoáveis e suas larguras da banda de freqüência, bem estendidas sobre a faixa de controle estrutural convencional.

3.2 Modelagem do Atuador Piezelétrico

Foi deduzido em [55] a resposta dinâmica da placa $w(t, x, y) = W(x, y)e^{i\omega t}$, com $p_e(t, x, y) = P(x, y)e^{i\omega t}$, onde $P(x, y) = \mathcal{P}\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$, ou seja, sujeita a uma força pontual harmônica

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{\mathcal{P}X_n(\xi)Y_m(\eta)}{D(I_1I_2 + 2I_3I_4 + I_5I_6) - \rho_s h \omega^2 I_2 I_6} X_n(x) Y_m(y), \quad (3.2)$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a/2}^{a/2} X_n^{(4)} X_n dx, \quad I_2 = \int_{-b/2}^{b/2} Y_m^2 dy, \quad I_3 = \int_{-a/2}^{a/2} X_n'' X_n dx, \\ I_4 &= \int_{-b/2}^{b/2} Y_m'' Y_m dy, \quad I_5 = \int_{-b/2}^{b/2} Y_m^{(4)} Y_m dy, \quad I_6 = \int_{-a/2}^{a/2} X_n^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

As frequências naturais são encontradas quando o denominador de (3.2) é zero, ou seja,

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D(I_1I_2 + 2I_3I_4 + I_5I_6)}{\rho_s h I_2 I_6}}, \quad (3.4)$$

com ω_{mn} sendo a frequência natural do modo (m, n) . A tabela abaixo mostra as frequências naturais medidas e calculadas [56], para uma placa quadrada de lado $l = 0.4m$, com espessura $h = 0.002m$, densidade $\rho_s = 7099kg/m^3$, módulo de Young $E = 190 \times 10^9 N/m^2$ e razão de Poisson $\nu = 0.3$.

Tabela 3.1 Comparação de frequências naturais

Modos		1	2	3	4	5
Frequência (Hz)	Experimental	106	216.7	318.3	389.25	489.255
	Método de Ritz	105.7	215.7	318	386.6	488.5

Um momento pontual pode ser tratado como duas forças pontuais com a mesma magnitude mas separadas por uma distância $\Delta\xi$ e orientadas em direções opostas [57]. Considere um momento pontual M atuando na placa no ponto (ξ, η) como mostrado nas Figuras 3.2 e 3.3.

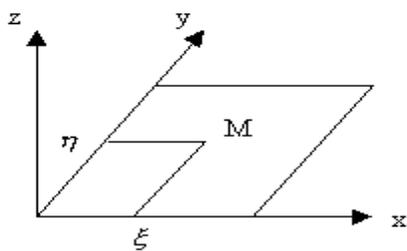


Figura 3.2 Placa sob a excitação de um momento concentrado

O momento M é expresso por

$$M = \mathcal{M}\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

onde \mathcal{M} é a magnitude do momento M e δ é a função delta de Dirac.

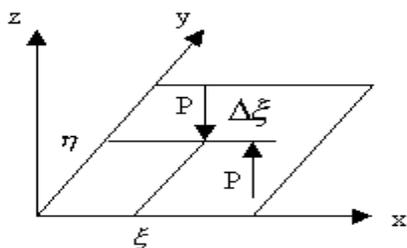


Figura 3.3 Placa sob a excitação de duas forças concentradas simulando um momento concentrado

Quando um momento pontual \mathcal{M} é substituído por um par de momentos e fazendo $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Delta\xi)$, a resposta total da placa será a superposição das respostas induzidas pelas duas forças pontuais

$$W(x, y) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \mathcal{P} [f(\xi + \Delta\xi, \eta, x, y) - f(\xi, \eta, x, y)], \quad (3.6)$$

onde $f(\xi, \eta)$ e $f(\xi + \Delta\xi, \eta)$ representam as respostas induzidas pelas duas forças pontuais localizadas em (ξ, η) e $(\xi + \Delta\xi, \eta)$, respectivamente.

Ao $\Delta\xi \rightarrow 0$ e mantendo \mathcal{M} constante, $\mathcal{P} \rightarrow \infty$. Então, a equação (3.6) fica

$$W(x, y) = \mathcal{M} \left[\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi + \Delta\xi, \eta, x, y) - f(\xi, \eta, x, y)}{\Delta\xi} \right]. \quad (3.7)$$

Usando (3.7) em (3.2), tem-se

$$W(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\mathcal{M} X_n(x) Y_m(y) Y_m(\eta)}{D(I_1 I_2 + 2I_3 I_4 + I_5 I_6) - \rho_s h \omega^2 I_2 I_6} \frac{\partial X_n(\xi)}{\partial \xi}. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) representa a resposta da placa para uma excitação do momento pontual atuando na direção negativa de y . Analogamente, quando o momento é aplicado na direção de x , tem-se

$$W(x, y) = \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{\mathcal{M} X_n(x) Y_m(y) X_n(\xi)}{D(I_1 I_2 + 2I_3 I_4 + I_5 I_6) - \rho_s h \omega^2 I_2 I_6} \frac{\partial Y_m(\eta)}{\partial \eta}. \quad (3.9)$$

Considere um atuador piezocerâmico perfeitamente unido à placa. Quando um campo elétrico alternado é aplicado no atuador piezocerâmico ao longo da direção de z , a tensão induzida nas direções de x e y causará vibração na placa.

O efeito de um piezocerâmico pode ser tratado como quatro momentos pontuais concentrados no centro da placa como mostra a Figura 3.4. O piezocerâmico atuador é um quadrado de lado l .

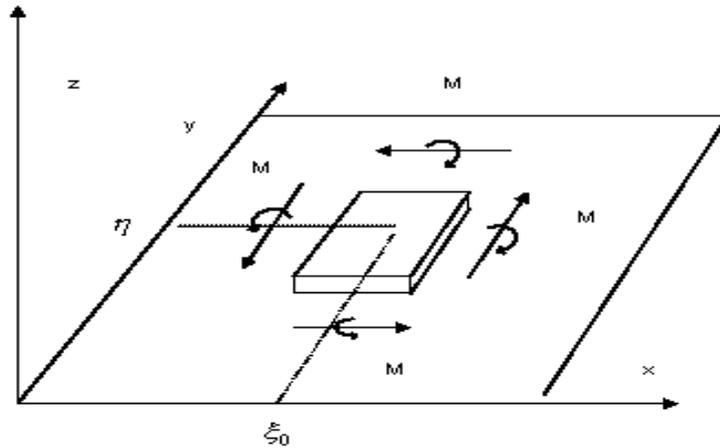


Figura 3.4 Placa sob a excitação de quatro momentos concentrados simulando um piezoatuador

Das equações (3.8) e (3.9) e considerando a resposta da placa induzida por um atuador piezocerâmico sendo a superposição de respostas induzidas por quatro momentos pontuais, tem-se

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{\mathcal{M} X_m(x) Y_n(y)}{D (I_1 I_2 + 2 I_3 I_4 + I_5 I_6) - \omega^2 \rho_s h I_2 I_6} \left[Y_n(\eta_0) \frac{\partial X_m(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0-l/2} - \right. \\ \left. - Y_n(\eta_0) \frac{\partial X_m(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0+l/2} + X_m(\xi_0) \frac{\partial Y_n(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0-l/2} - X_m(\xi_0) \frac{\partial Y_n(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0+l/2} \right], \quad (3.10)$$

onde l é o comprimento do piezocerâmico e (ξ_0, η_0) é a coordenada do centro do atuador.

Este modelo mostrou-se uma boa aproximação do atuador piezelétrico quando a dimensão do piezocerâmico é muito menor que a dimensão da placa [56].

O momento pontual gerado é dado por

$$\mathcal{M} = \kappa_0 \epsilon_{PZT} \quad (3.11)$$

onde ϵ_{PZT} é a voltagem aplicada para o excitador piezocerâmico e κ_0 é uma constante de proporcionalidade entre o piezomomento gerado \mathcal{M} e ϵ_{PZT} , dada na tabela abaixo [54].

Tabela 3.2 Coeficientes κ_0 para várias frequências

Modos	1	2	3	4	5
Frequências [Hz]	106	214.45	319	389	489
coeficientes κ_0 (N·m/V)* 10^{-4}	7.199	30.31	35.99	28.75	27.56

3.3 Controle da Potência Sonora Radiada

A velocidade normal no ponto (x, y) na superfície é obtida como

$$v(t, x, y) = \frac{\partial w(t, x, y)}{\partial t} = i\omega W(x, y)e^{i\omega t} = \omega W(x, y)e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (3.12)$$

que pode ser reescrita na forma

$$v(t, x, y) = V(x, y)e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (3.13)$$

onde $V(x, y)$ é a amplitude de $v(t, x, y)$.

Assume-se, inicialmente, dois piezocerâmicos na superfície da placa, onde um serve como entrada vibratória ou excitador e o outro, como controle da redução vibratória. As coordenadas do centro do excitador e controlador são, respectivamente, (ξ_e, η_e) e (ξ_c, η_c) .

Reescrevendo a equação (3.10), numa forma simplificada, tem-se

$$W(x, y) = \mathcal{M}G(\xi_0, \eta_0, x, y). \quad (3.14)$$

onde

$$G(\xi_0, \eta_0, x, y) = \sum_m \sum_n \frac{X_m(x)Y_n(y)}{D(I_1I_2 + 2I_3I_4 + I_5I_6) - \omega^2\rho_s h I_2 I_6} \left[Y_n(\eta_0) \frac{\partial X_m(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0-l/2} - \right. \\ \left. - Y_n(\eta_0) \frac{\partial X_m(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0+l/2} + X_m(\xi_0) \frac{\partial Y_n(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0-l/2} - X_m(\xi_0) \frac{\partial Y_n(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0+l/2} \right],$$

Quando o excitador e o controlador são ativados simultaneamente, a resposta da placa pode ser escrita como

$$W(x, y) = M_e G(\xi_e, \eta_e, x, y) + M_c G(\xi_c, \eta_c, x, y) \quad (3.15)$$

onde M_e e M_c são as amplitudes dos momentos pontuais do excitador e controlador da placa, respectivamente.

A amplitude da velocidade da placa fica

$$V(x, y) = \omega [M_e G(\xi_e, \eta_e, x, y) + M_c G(\xi_c, \eta_c, x, y)], \quad (3.16)$$

que pode ser escrita por

$$V(x, y) = M_e \varphi_e + M_c \varphi_c \quad (3.17)$$

onde $\varphi_e = \omega G(\xi_e, \eta_e, x, y)$ e $\varphi_c = \omega G(\xi_c, \eta_c, x, y)$.

Assim, pode-se calcular a potência sonora radiada (2.84) como

$$\Pi = \frac{\omega \rho_a (\Delta S)^2}{4\pi} \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} [(M_e \varphi_{ei} + M_c \varphi_{ci}) \times (M_e \varphi_{ej} + M_c \varphi_{cj})], \quad (3.18)$$

onde $\varphi_{ei} = \omega G(\xi_e, \eta_e, x_i, y_i)$, $\varphi_{ej} = \omega G(\xi_e, \eta_e, x_j, y_j)$ e $\varphi_{ci} = \omega G(\xi_c, \eta_c, x_i, y_i)$, $\varphi_{cj} = \omega G(\xi_c, \eta_c, x_j, y_j)$.

Reescrevendo a equação (3.18), numa forma simplificada, tem-se

$$\Pi = \frac{\omega\rho_a(\Delta S)^2}{4\pi} (\Gamma_1 M_c^2 + \Gamma_2 M_e M_c + \Gamma_3 M_e^2), \quad (3.19)$$

onde $\Gamma_1 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ci} \varphi_{cj}$, $\Gamma_2 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ci} \varphi_{ej} + \varphi_{ei} \varphi_{cj})$ e $\Gamma_3 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ei} \varphi_{ej}$.

Os dados [54] da Tabela 3.3 serão utilizados para o cálculo da potência sonora radiada antes do controle ($M_c = 0$) e após o controle.

Tabela 3.3 Voltagens e momentos do excitador e controlador aplicados

Modo	Excitador		Controlador		
	No.	$\epsilon_e[V]$	$M_e[N.m]$	$\epsilon_c[V]$	$M_c[N.m]$
2		141.4	0.429	-80.6	-0.244
3		141.4	0.509	-93.3	-0.336
4		141.4	0.406	-137.2	-0.394
5		141.4	0.389	-125.8	-0.347

Para minimizar a potência sonora radiada, o controlador M_c deve satisfazer

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_c} = 0. \quad (3.20)$$

Portanto, M_c deve ser

$$M_c = -\frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1} M_e. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.19), a potência sonora mínima será

$$\Pi_{\min} = \frac{\omega\rho_a(\Delta S)^2}{4\pi} \left(\Gamma_3 - \frac{\Gamma_2^2}{4\Gamma_1} \right) M_e^2. \quad (3.22)$$

Da equação (3.21) e da proporcionalidade entre a voltagem de entrada e o momento do piezocerâmico, a voltagem ótima para o controle pode ser expressa

por

$$\epsilon_c = -\frac{\Gamma_2}{2\Gamma_1}\epsilon_{PZT}. \quad (3.23)$$

A seguir, assume-se quatro piezocerâmicos na superfície da placa, onde dois servem como entrada vibratória ou excitador e os outros dois, como controle da redução vibratória. As coordenadas dos centros dos excitadores e controladores são, respectivamente, (ξ_{e1}, η_{e1}) , (ξ_{c1}, η_{c1}) , (ξ_{e2}, η_{e2}) e (ξ_{c2}, η_{c2}) , conforme a Figura 3.5.

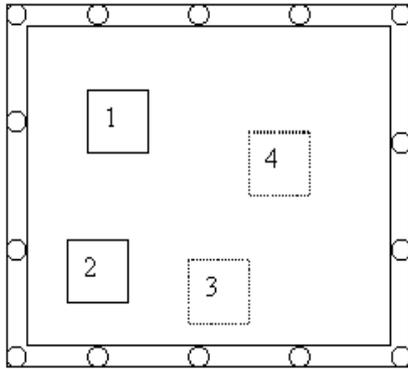


Figura 3.5 Modelo da placa engastada e as posições dos quatro piezocerâmicos (piezocerâmicos na superfície inferior da placa são mostrados por linhas pontilhadas)

Pretende-se, então, comparar os resultados da redução da potência sonora radiada, obtidos para dois [55] e quatro piezocerâmicos unidos à placa.

Quando os excitadores e os controladores são ativados simultaneamente, a resposta da placa pode ser escrita como

$$W(x, y) = M_{e1}G(\xi_{e1}, \eta_{e1}, x, y) + M_{c1}G(\xi_{c1}, \eta_{c1}, x, y) + M_{e2}G(\xi_{e2}, \eta_{e2}, x, y) + M_{c2}G(\xi_{c2}, \eta_{c2}, x, y) \quad (3.24)$$

onde M_{e1} , M_{e2} e M_{c1} , M_{c2} são as amplitudes dos momentos pontuais dos excitadores e controladores da placa, respectivamente.

A amplitude da velocidade da placa fica

$$V(x, y) = \omega[M_{e1}G(\xi_{e1}, \eta_{e1}, x, y) + M_{c1}G(\xi_{c1}, \eta_{c1}, x, y) + M_{e2}G(\xi_{e2}, \eta_{e2}, x, y) + M_{c2}G(\xi_{c2}, \eta_{c2}, x, y)], \quad (3.25)$$

que pode ser escrita por

$$V(x, y) = M_{e1}\varphi_{e1} + M_{c1}\varphi_{c1} + M_{e2}\varphi_{e2} + M_{c2}\varphi_{c2} \quad (3.26)$$

onde $\varphi_{e1} = \omega G(\xi_{e1}, \eta_{e1}, x, y)$, $\varphi_{e2} = \omega G(\xi_{e2}, \eta_{e2}, x, y)$ e $\varphi_{c1} = \omega G(\xi_{c1}, \eta_{c1}, x, y)$, $\varphi_{c2} = \omega G(\xi_{c2}, \eta_{c2}, x, y)$.

Assim, pode-se calcular a potência sonora radiada (2.84) como

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\omega\rho_a(\Delta S)^2}{4\pi} \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} [(M_{e1}\varphi_{ei1} + M_{c1}\varphi_{ci1} + M_{e2}\varphi_{ei2} + M_{c2}\varphi_{ci2}) \\ \times (M_{e1}\varphi_{ej1} + M_{c1}\varphi_{cj1} + M_{e2}\varphi_{ej2} + M_{c2}\varphi_{cj2})], \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde $\varphi_{ei1} = \omega G(\xi_{e1}, \eta_{e1}, x_i, y_i)$, $\varphi_{ei2} = \omega G(\xi_{e2}, \eta_{e2}, x_i, y_i)$, $\varphi_{ej1} = \omega G(\xi_{e1}, \eta_{e1}, x_j, y_j)$, $\varphi_{ej2} = \omega G(\xi_{e2}, \eta_{e2}, x_j, y_j)$ e $\varphi_{ci1} = \omega G(\xi_{c1}, \eta_{c1}, x_i, y_i)$, $\varphi_{ci2} = \omega G(\xi_{c2}, \eta_{c2}, x_i, y_i)$, $\varphi_{cj1} = \omega G(\xi_{c1}, \eta_{c1}, x_j, y_j)$, $\varphi_{cj2} = \omega G(\xi_{c2}, \eta_{c2}, x_j, y_j)$.

Reescrevendo a equação (3.27), numa forma simplificada, tem-se

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{\omega\rho_a(\Delta S)^2}{4\pi} (\Gamma_1 M_{e1}^2 + \Gamma_2 M_{e2}^2 + \Gamma_3 M_{c1}^2 + \Gamma_4 M_{c2}^2 + \Gamma_5 M_{e1}M_{e2} + \\ \Gamma_6 M_{e1}M_{c1} + \Gamma_7 M_{e1}M_{c2} + \Gamma_8 M_{e2}M_{c1} + \Gamma_9 M_{e2}M_{c2} + \Gamma_{10} M_{c1}M_{c2}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ei1}\varphi_{ej1}, \quad \Gamma_2 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ei2}\varphi_{ej2} \\ \Gamma_3 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ci1}\varphi_{cj1}, \quad \Gamma_4 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} \varphi_{ci2}\varphi_{cj2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_5 &= \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ei1}\varphi_{ej2} + \varphi_{ei2}\varphi_{ej1}), \quad \Gamma_6 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ei1}\varphi_{cj1} + \varphi_{ci1}\varphi_{ej1}) \\ \Gamma_7 &= \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ei1}\varphi_{cj2} + \varphi_{ci2}\varphi_{ej1}), \quad \Gamma_8 = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ei2}\varphi_{cj1} + \varphi_{ci1}\varphi_{ej2}) \\ \Gamma_9 &= \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ei2}\varphi_{cj2} + \varphi_{ci2}\varphi_{ej2}), \quad \Gamma_{10} = \sum_i \sum_j \frac{\sin kR}{R} (\varphi_{ci1}\varphi_{cj2} + \varphi_{ci2}\varphi_{cj1})\end{aligned}$$

3.4 O Controle Ótimo

A pressão sonora transmitida também pode ser escrita em termos da aceleração $w''(t, x, y) = S_p^T(x, y)W_p''(t)$, então

$$P_{rad}(t, R) = \frac{\rho_a e^{-ikR}}{2\pi R} \int_{S_2} S_p^T(x, y) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dS_2 W_p''(t) \quad (3.29)$$

ou ainda,

$$P_{rad}(t, R) = \frac{\rho_a e^{-ikR}}{2\pi R} \hat{\mathbf{H}} \cdot W_p''(t), \quad (3.30)$$

onde

$$\hat{\mathbf{H}} = i\omega \int_{S_2} S_p^T(x, y) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dS_2. \quad (3.31)$$

Usando o valor real da pressão e fixando R , a intensidade I radiada na direção (θ, ϕ) é

$$I(\theta, \phi) = \frac{|P|^2}{\rho_a C_0}, \quad (3.32)$$

onde $\rho_a C_0$ é chamada impedância característica, constante de proporcionalidade entre pressão e velocidade [45].

A potência total radiada pode ser obtida pela integração da intensidade sobre o hemisfério de raio R

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\theta, \phi) R^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.33)$$

ou ainda,

$$\Pi = W_p''(t)^{T*} \cdot \bar{M} \cdot W_p''(t), \quad (3.34)$$

com

$$\bar{M} = \frac{\rho_a}{4\pi^2 C_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \hat{\mathbf{H}}^* \cdot \hat{\mathbf{H}}^T \sin \theta d\theta d\phi, \quad (3.35)$$

onde $*$ denota o complexo conjugado e \bar{M} é uma matriz real, simétrica e não negativa.

A matriz \bar{M} tem um significado físico explícito: define a relação entre os níveis de aceleração modal estrutural e a potência acústica radiada. Os termos da diagonal de \bar{M} são os valores da potência resultante da vibração de um modo estrutural isolado, enquanto que os elementos fora da diagonal são importantes para a modificação deste valor causado pela coexistência de outros modos. Em geral, \bar{M} será de posto P . Casos degenerados $r < P$, foram estudados por Baumann [5].

Agora, o efeito do atuador e a pressão incidente são introduzidos na equação (2.38), obtendo-se

$$M_l W_p''(t) + K W_p(t) = B_l u(t) + L v(t), \quad (3.36)$$

onde B_l é a matriz de localização dos atuadores, $u(t) \in R^m$ é o vetor de entrada dos atuadores que são usados no controle da estrutura, L é a matriz localização das perturbações de entrada e $v(t)$ é o vetor de perturbações.

A equação (3.36), pode ser reescrita como

$$W_p''(t) = -M_l^{-1} K W_p(t) + M_l^{-1} B_l u(t) + M_l^{-1} L v(t). \quad (3.37)$$

Substituindo a aceleração na equação (3.34) e assumindo que as perturbações de entrada não são conhecidos, tem-se para a potência

$$\Pi = (-M_l^{-1} K W_p(t) + M_l^{-1} B_l u(t))^{T*} \cdot \bar{M} (-M_l^{-1} K W_p(t) + M_l^{-1} B_l u(t)). \quad (3.38)$$

Escolhe-se a função custo J [56] com o objetivo de minimizar a potência total radiada (3.34)

$$J = W_p(t)^{T*} \cdot \tilde{A} \cdot W_p(t) + W_p(t)^{T*} \cdot \tilde{B} \cdot u(t) + u(t)^{T*} \cdot \tilde{B}^{T*} \cdot W_p(t) + u(t)^{T*} \cdot \tilde{C} \cdot u(t) + \beta u(t)^{T*} \cdot u(t), \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (-M_l^{-1}K)^{T*} \cdot \bar{M} \cdot (-M_l^{-1}K), \\ \tilde{B} &= (-M_l^{-1}K)^{T*} \cdot \bar{M} \cdot (M_l^{-1}B_l), \\ \tilde{C} &= (M_l^{-1}B_l)^{T*} \cdot \bar{M} \cdot (M_l^{-1}B_l) \end{aligned}$$

e β é uma constante que limita a quantidade de energia de controle que pode ser aplicada num dado intervalo de tempo. Quando $\beta \rightarrow 0$, a energia de controle é menos restrita e o efeito do controle é melhor.

A função custo pode ser reescrita como

$$J = W_p(t)^{T*} \cdot \tilde{A} \cdot W_p(t) + W_p(t)^{T*} \cdot \tilde{B} \cdot u(t) + u(t)^{T*} \cdot \tilde{B}^{T*} \cdot W_p(t) + u(t)^{T*} (\tilde{C} + \beta I) \cdot u(t). \quad (3.40)$$

Há muitos métodos diretos para projetar um sistema de controle de retroalimentação que encontram a máxima redução na resposta possível, conhecidos como sistemas de controle ótimo [36]. No controle ótimo, o sistema de controle de retroalimentação deve minimizar a função custo. Quando o objetivo é reduzir a resposta o máximo possível, o sistema de controle é dito ser regulador. É algebricamente conveniente escolher a função custo quadraticamente dependente da resposta, pois simplifica o problema de otimização [26].

Pode ser difícil usar estratégias de controle ótimo na prática, uma vez que é assumido um conhecimento do sistema controlado e dos processos de ruídos. Um controle de retroalimentação depende da minimização da função custo quadrática e não leva em conta os ruídos. Para perturbações randômicas Gaus-

sianas, o controle é chamado Gaussiano Quadrático Linear (LQG), enquanto que para o problema de regulador, o controle é chamado Regulador Quadrático Linear (LQR).

Derivando a equação (3.40), em relação ao controle $u(t)$, tem-se o controle ótimo como uma retroalimentação na amplitude modal em tempo invariante, ou seja, assintoticamente ótimo, dado por

$$u^o(t) = \mathbf{G}W_p(t)$$

onde \mathbf{G} é a matriz de ganho de retroalimentação ou, ainda,

$$u^o(t) = - \left(\tilde{\mathbf{C}} + \beta I \right)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{B}}^{T*} \cdot W_p(t) \quad (3.41)$$

O problema é como estimar $W_p(t)$ para um número finito de sensores. Isto pode ser feito usando o filtro modal [8] e, então, usar a estimativa para a lei de controle.

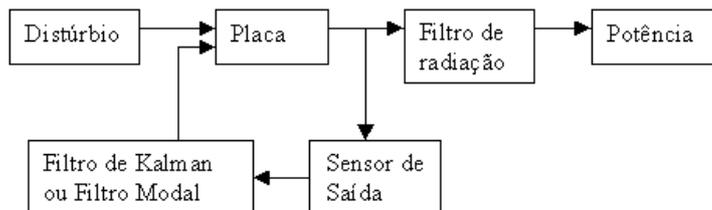


Figura 3.6 Diagrama de blocos do sistema de controle

Em [5], foi construído um filtro de radiação, que foi incorporado no desenho do controle para minimizar a radiação acústica. Simulações numéricas

demonstraram sua eficiência quando comparado a um controlador de vibração usando a mesma energia de controle, com a vantagem de reduzir a complexidade sem perda significativa de desempenho.

3.5 Solução da Placa após o Controle

Para sistemas clássicos, o teorema dos modos normais do problema de autovalor gera autovalores puramente imaginários $\lambda = i\omega$ e autovetores ortogonais com relação à matriz de inércia M_l . Porém, para sistemas ditos não-clássicos, os autovalores podem ser complexos e os correspondentes autovetores podem não ser ortogonais. Assim, a análise modal clássica não pode ser utilizada para desacoplar o sistema e, então, calcular a sua solução.

Com a introdução da análise modal adjunta é possível ampliar a classe de modelos ditos desacopláveis [19].

Para este caso, tem-se a matriz de transferência,

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{2l} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} \frac{u_k v_k^*}{(i\omega - \lambda_k)}. \quad (3.42)$$

Observação 1:

No caso de modos normais com $M_l^T = M_l > 0$ e $K^T = K \geq 0$, tem-se autovetores reais, tais que $u_k = v_k$ e autovalores puramente imaginários $\lambda_k = i\omega_k$. Além disso, supondo a normalização $u_k^T M_l u_k = 1$, tem-se $u_k^T K u_k = \omega_k^2$, a constante γ_k pode ser identificada como

$$\gamma_k = \langle \psi_k, \phi_k \rangle = \lambda_k^2 u_k^T M_l u_k - u_k^T K u_k = 2\lambda_k^2. \quad (3.43)$$

Nessa situação, a resposta impulso é dada por

$$h(t) = \sum_{k=1}^{2l} \frac{1}{2\lambda_k} e^{\lambda_k t} u_k u_k^T \quad (3.44)$$

que é a fórmula utilizada por [63].

Observação 2:

No caso dos modos normais, a matriz de transferência (3.42) pode ser escrita por

$$H(i\omega) = \sum_{k=1}^{2l} \frac{u_k u_k^T}{2\omega_k(\omega_k - \omega)}, \quad (3.45)$$

que é a mesma utilizada em (2.67), para l autovalores.

O problema do regulador quadrático linear pode ser representado pelo diagrama de blocos da Figura (3.7).

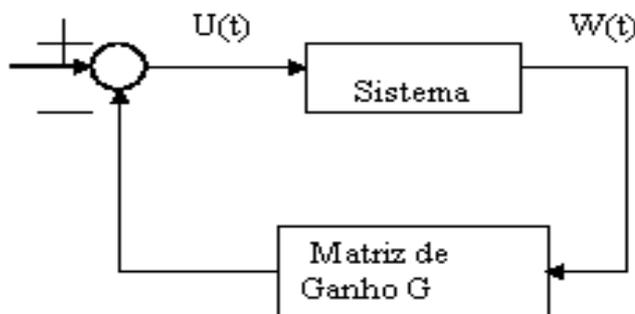


Figura 3.7 Retroalimentação do regulador linear ótimo

Substituindo o controle ótimo (3.41) na equação (3.36), tem-se o sistema modificado

$$W_p''(t) + K_M W_p(t) = F(t), \quad (3.46)$$

onde

$$K_M = M_l^{-1} \left[K + B \left(\tilde{C} + \beta I \right)^{-1} \tilde{B}^{T*} \right] \quad (3.47)$$

e $F(t) = M_l^{-1} F_p(t)$.

Através da análise modal adjunta, encontra-se $W_p(t)$ utilizando a matriz de transferência (3.42). A solução da placa, com o controle ótimo (3.41), é

$$w(t, x, y) = S_p^T(x, y) \sum_{k=1}^{2l} \frac{\lambda_k}{\gamma_k} \frac{u_k v_k^*}{(i\omega - \lambda_k)} F(t) \quad (3.48)$$

onde $\gamma_k = \langle v_k, \lambda_k^2 M_l u_k - K_M u_k \rangle \neq 0$, λ_k e u_k são os autovalores e autovetores associados ao problema direto, respectivamente, e v_k são os autovetores associados ao problema adjunto.

4 UMA APLICAÇÃO: DUTOS DE AR CONDICIONADO

A caracterização de soluções na base dinâmica do sistema permite uma formulação evolutiva bastante geral para incluir dados iniciais, condições de contorno não clássicas e incorporar a ação de cargas externas.

4.1 Formulação do Problema

Para um problema dinâmico, $w(t, x, y)$ deve satisfazer a equação (2.1), juntamente com as condições iniciais temporais, $w(0, x, y) = w_0$, $w_t(0, x, y) = w_1$ e condições de contorno espaciais.

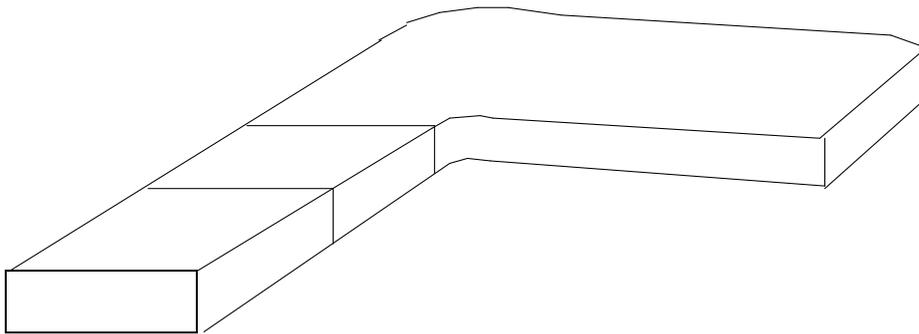


Figura 4.1 Uma placa retangular num duto de ar condicionado

Na aplicação proposta aqui, dutos de ar condicionado, supõe-se que a placa tenha como condições de contorno:

1. Uma restrição elástica translacional que corresponde a uma força de reação da mola igual à força de cisalhamento [44].

$$k_m w + D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{em } x = -\frac{a}{2} \quad (4.1)$$

$$k_m w - D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{em } x = \frac{a}{2} \quad (4.2)$$

onde k_m é a rigidez translacional da mola.

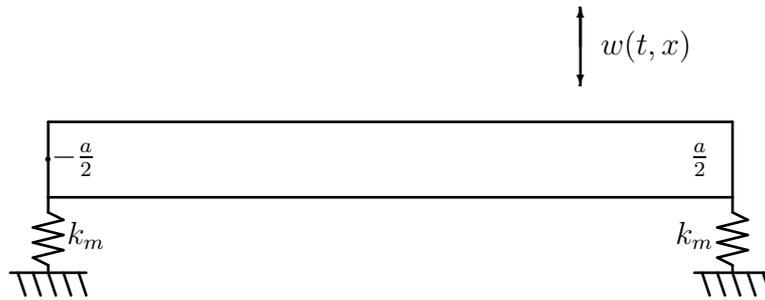


Figura 4.2 Modelo de condições de contorno de molas translacionais

2. A restrição elástica rotacional que corresponde a um momento de reação da mola igual ao momento fletor.

$$k_r \frac{\partial w}{\partial y} - D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = -\frac{b}{2} \quad (4.3)$$

$$k_r \frac{\partial w}{\partial y} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } y = \frac{b}{2} \quad (4.4)$$

onde k_r é a rigidez rotacional da mola.

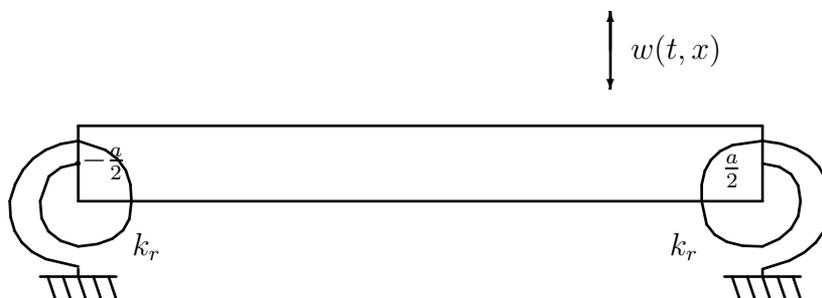


Figura 4.3 Modelo de condições de contorno de molas rotacionais

Como no caso anterior, os sinais diferem em extremos opostos e mais uma condição é requerida para cada extremo.

4.2 Freqüências e Modos de Vibração

Em x , admite-se duas molas, uma rotacional e outra translacional, em cada extremo, conforme Figura 4.4,

$$X^{(iv)}(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (4.5)$$

$$k_m X\left(-\frac{a}{2}\right) + DX''' \left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_r X' \left(-\frac{a}{2}\right) - DX'' \left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_m X\left(\frac{a}{2}\right) - DX''' \left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_r X' \left(\frac{a}{2}\right) + DX'' \left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

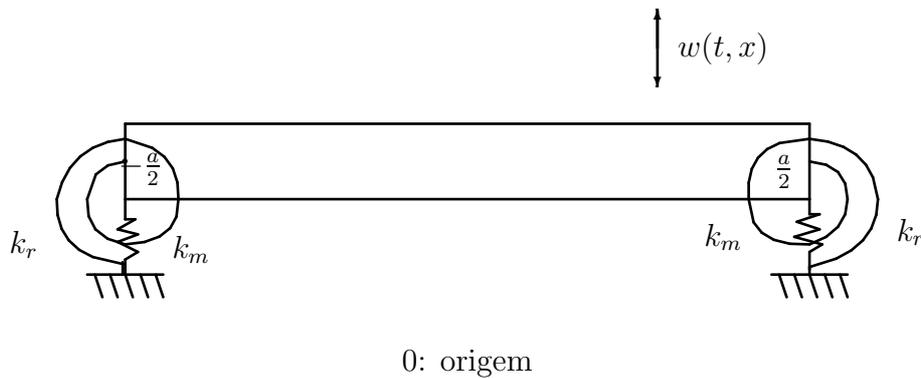
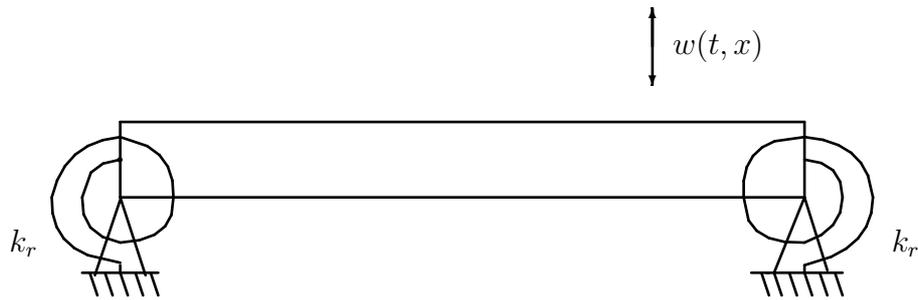


Figura 4.4 Modelo de condições de contorno em x de molas translacionais e rotacionais

e, em y , admite-se uma mola rotacional e apoiada, em cada extremo, conforme Figura 4.5,

$$Y^{(iv)}(y) - \beta^4 Y(y) = 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
Y\left(-\frac{b}{2}\right) &= Y\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \\
k_r Y'\left(-\frac{b}{2}\right) - DY''\left(-\frac{b}{2}\right) &= 0 \\
k_r Y'\left(\frac{b}{2}\right) + DY''\left(\frac{b}{2}\right) &= 0.
\end{aligned}$$



0: origem

Figura 4.5 Modelo de condições de contorno em y de molas rotacionais e apoiada

Para as condições de contorno do problema (4.5), na variável x , utilizando a base dinâmica descrita anteriormente, tem-se para $x = -\frac{a}{2}$ e para $x = \frac{a}{2}$:

$$\begin{bmatrix}
k_m & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k_r & -D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & k_m & 0 & 0 & -D \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_r & D & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Phi(-a/2) \\
\Phi'(-a/2) \\
\Phi''(-a/2) \\
\Phi'''(-a/2) \\
\Phi(a/2) \\
\Phi'(a/2) \\
\Phi''(a/2) \\
\Phi'''(a/2)
\end{bmatrix}
\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

De maneira compacta, tem-se

$$\mathcal{B}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Seja $\mathcal{U}=\mathcal{B}\Phi$, uma matriz que incorpora os valores associados às condições de contorno, então

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} k_m h(0) + Dh'''(0) & k_m h'(0) + Dh^{(iv)}(0) & k_m h''(0) + Dh^{(v)}(0) & k_m h'''(0) + Dh^{(vi)}(0) \\ k_r h'(0) - Dh''(0) & k_r h''(0) - Dh'''(0) & k_r h'''(0) - Dh^{(iv)}(0) & k_r h^{(iv)}(0) - Dh^{(v)}(0) \\ k_m h(a) - Dh'''(a) & k_m h'(a) - Dh^{(iv)}(a) & k_m h''(a) - Dh^{(v)}(a) & k_m h'''(a) - Dh^{(vi)}(a) \\ k_r h'(a) + Dh''(a) & k_r h''(a) + Dh'''(a) & k_r h'''(a) + Dh^{(iv)}(a) & k_r h^{(iv)}(a) + Dh^{(v)}(a) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

O sistema singular a ser resolvido é

$$\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & k_m \\ 0 & -D & k_r & 0 \\ k_m h(a) - Dh'''(a) & k_m h'(a) - D\beta^4 h(a) & k_m h''(a) - D\beta^4 h'(a) & k_m h'''(a) - D\beta^4 h''(a) \\ k_r h'(a) + Dh''(a) & k_r h''(a) + Dh'''(a) & k_r h'''(a) + D\beta^4 h(a) & k_r \beta^4 h(a) + D\beta^4 h'(a) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Para obter soluções não-nulas, deve-se ter o determinante do sistema nulo. Isso fornece a equação característica

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) = & (k_m^2 k_r^2 + D^4 \beta^8 + 2k_m k_r D^4 \beta^8)[h'(a)]^2 + 2D(k_m^2 k_r - D^2 \beta^4 k_m)h'(a)h''(a) + \\ & 2D(k_r^2 k_m - D^2 \beta^4 k_r)h''(a)h'''(a) - (2D^2 \beta^4 k_m k_r + D^4 \beta^8 + k_m^2 k_r^2)h(a)h''(a) + 2D(D^2 \beta^4 k_m - k_m^2 k_r)h(a)h'''(a) + \\ & 2D\beta^4 k_r(D^2 \beta^4 - k_m k_r)h(a)h'(a) + 4D^2 k_m k_r [h'''(a)]^2 + D^2(k_m^2 - \beta^4 k_r^2)[h''(a)]^2 + D^2 \beta^4 (\beta^4 k_r^2 - k_m^2)[h(a)]^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Deste modo, tem-se

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_m}{D} \\ \frac{k_r}{D} \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)} \\ \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Assim, obtém-se os modos de vibração em x ,

$$\boxed{X(x) = h'''(x + \frac{a}{2}) + \sigma_2 h''(x + \frac{a}{2}) + \sigma_1 h'(x + \frac{a}{2}) + \sigma_0 h(x + \frac{a}{2})}, \quad (4.13)$$

com

$$\sigma_2 = \frac{k_m^2 h(a) + D^2 \beta^4 h''(a) - 2Dk_m h'''(a)}{Dk_m h''(a) + (k_m k_r - D^2 \beta^4) h'(a) - D\beta^4 k_r h(a)},$$

$$\sigma_1 = \frac{k_r}{D} \sigma_2 \text{ e } \sigma_0 = -\frac{k_m}{D}.$$

Para o problema (4.6), na variável y , tem-se, para $y = -\frac{b}{2}$ e para $y = \frac{b}{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r & -D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_r & D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(-b/2) \\ \Phi'(-b/2) \\ \Phi''(-b/2) \\ \Phi'''(-b/2) \\ \Phi(b/2) \\ \Phi'(b/2) \\ \Phi''(b/2) \\ \Phi'''(b/2) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

A matriz $\mathcal{U}=\mathcal{B}\Phi$ dos valores associados às condições de contorno será

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ k_r h'(0) - Dh''(0) & k_r h''(0) - Dh'''(0) & k_r h'''(0) - Dh^{(iv)}(0) & k_r h^{(iv)}(0) - Dh^{(v)}(0) \\ h(b) & h'(b) & h''(b) & h'''(b) \\ k_r h'(b) + Dh''(b) & k_r h''(b) + Dh'''(b) & k_r h^{(iv)}(b) + Dh^{(iv)}(b) & k_r h'''(b) + Dh^{(v)}(b) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

O sistema singular a ser resolvido é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -D & k_r & 0 \\ h(b) & h'(b) & h''(b) & h'''(b) \\ k_r h'(b) + Dh''(b) & k_r h''(b) + Dh'''(b) & k_r h'''(b) + D\beta^4 h(b) & k_r \beta^4 h(b) + D\beta^4 h'(b) \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (4.16)$$

Novamente, para obter soluções não-nulas, o determinante do sistema deve ser nulo. A equação característica, em função de $h(y + \frac{b}{2}, \beta)$, é

$$\Delta(\beta) = 2Dk_r h(b)h'''(b) + D^2\beta^4[h(b)]^2 + k_r^2 h(b)h''(b) - 2Dk_r h'(b)h''(b) - k_r^2[h'(b)]^2 - D^2[h''(b)]^2. \quad (4.17)$$

Obtém-se as constantes

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_r h'(b) + Dh''(b)}{Dh(b)} \\ \frac{k_r}{D} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Assim, obtém-se os modos de vibração em y

$$\boxed{Y(y) = h''(y + \frac{b}{2}) + \gamma_1 h'(y + \frac{b}{2}) + \gamma_0 h(y + \frac{b}{2})}, \quad (4.19)$$

onde $\gamma_0 = -\frac{k_r h'(b) + Dh''(b)}{Dh(b)}$ e $\gamma_1 = \frac{k_r}{D}$.

4.3 A Equação Característica

Reescrevendo a equação característica (4.11), tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(\beta) = & c_1 h'(a) h''(a) + c_2 h''(a) h'''(a) + c_3 h(a) h'(a) + c_4 h(a) h''(a) + \\ & c_5 h(a) h'''(a) + c_6 [h'''(a)]^2 + c_7 [h''(a)]^2 + c_8 [h'(a)]^2 + c_9 [h(a)]^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $c_1 = 2Dk_m(k_mk_r - D^2\beta^4)$,

$$c_2 = 2Dk_r(k_mk_r - D^2\beta^4),$$

$$c_3 = -2D\beta^4 k_r(k_mk_r - D^2\beta^4),$$

$$c_4 = -(2D^2\beta^4 k_mk_r + D^4\beta^8 + k_m^2 k_r^2),$$

$$c_5 = -2Dk_m(k_mk_r - D^2\beta^4),$$

$$c_6 = 4D^2 k_m k_r,$$

$$c_7 = D^2(k_m^2 - \beta^4 k_r^2),$$

$$c_8 = k_m^2 k_r^2 + D^4\beta^8 + 2k_mk_r D^4\beta^8$$

$$c_9 = D^2\beta^4(\beta^4 k_r^2 - k_m^2).$$

Pode-se observar que esta equação é não linear na variável β .

As equações características (4.11) e (4.17), quando $h(z)$ é escrita na base clássica de Euler

$$\sinh(\beta z), \sin(\beta z), \cosh(\beta z), \cos(\beta z),$$

ou seja,

$$h(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\beta z) - \sin(\beta z)}{\beta^3} \right],$$

com $z = x, y$, resultam em

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, x) = & \cos(\beta a) \cosh(\beta a) (6D^2 \beta^4 k_m k_r - D^4 \beta^8 - k_m^2 k_r^2) + 2D^2 \beta^2 \sin(\beta a) \sinh(\beta a) (k_m^2 - k_r^2 \beta^4) + \\ & 2D \beta \sin(\beta a) \cosh(\beta a) (k_m^2 k_r - D^2 \beta^4 k_m - D^2 \beta^6 k_r + \beta^2 k_m k_r^2) + \\ & 2D \beta \sinh(\beta a) \cos(\beta a) (D^2 \beta^4 k_m - k_m^2 k_r - D^2 \beta^6 k_r + \beta^2 k_m k_r^2) + k_m^2 k_r^2 + D^4 \beta^8 + 2D^2 \beta^4 k_m k_r = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(\beta, y) = & 2D^2 \beta^2 \sin(\beta b) \sinh(\beta b) + 2D k_r \beta (\sin(\beta b) \cosh(\beta b) - \sinh(\beta b) \cos(\beta b)) \\ & + k_r^2 (1 - \cos(\beta b) \cosh(\beta b)) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A equação característica em x é altamente não linear. Por simplicidade, utiliza-se as condições de contorno dadas na Figura 4.5, em ambas as autofunções $X(x)$ e $Y(y)$. Como consequência, as equações (4.6) serão utilizadas nos dois casos.

5 OTIMIZAÇÃO

Na literatura, vários artigos estudam a posição ótima de atuadores e sensores, como em [10, 29, 35, 38, 39]. Questões sobre confiabilidade na localização dos componentes do sistema de controle [43] e controlabilidade em sistemas oscilatórios [2] foram investigadas.

Neste capítulo, um método para encontrar a localização ótima do atuador para o controle de estruturas flexíveis é apresentado.

Suponha que um número específico de atuadores é dado e que eles devam ser localizados em pontos específicos na estrutura, tais que a eficiência do controle seja maximizada. Se, a priori, do número e da localização escolhidos não resulta suficiente eficiência, a pergunta é como as localizações podem ser alteradas. Além disso, é possível que o número de atuadores seja insuficiente ou que seus papéis na ação de controle sejam redundantes. Assim, é necessária uma técnica, computacionalmente viável, capaz de determinar um conjunto ótimo de localizações e um número mínimo de atuadores e sensores, além de outros aspectos, como por exemplo, o tamanho ótimo dos atuadores.

Em geral, haverá mais localizações possíveis do que o número de atuadores disponíveis. Se o número de atuadores é conhecido a priori, todas as possíveis combinações podem ser avaliadas e o mínimo global encontrado. Infelizmente, o número de combinações possíveis pode ser muito grande (depende fatorialmente do número de localizações possíveis) e, portanto, uma procura exaustiva para o mínimo global é computacionalmente inviável. Por outro lado, técnicas baseadas em programação não linear produzem mínimos locais, a não ser que a função seja estritamente quase convexa [6].

No passado, várias definições de grau de controlabilidade e observabilidade foram usadas na procura de localizações ótimas de atuadores e sensores.

Entretanto, pouca atenção tem sido dada ao desenvolvimento de uma estratégia de procura sistemática para encontrar um conjunto ótimo de atuadores e sensores.

5.1 Modelagem

O sistema (2.38) pode ser escrito como

$$W_p''(t) = -M_l^{-1}KW_p(t) + M_l^{-1}B_l u(t), \quad (5.1)$$

onde $F_p = B_l u(t)$,

$$u(t) = \sum_{i=1}^N u_i \delta(x - x_{a_i}) \delta(y - y_{a_i}) \quad (5.2)$$

e

$$B_l = \begin{bmatrix} S_1(x - x_{a1}, y - y_{a1}) & \cdots & S_1(x - x_{aN}, y - y_{aN}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_l(x - x_{a1}, y - y_{a1}) & \cdots & S_l(x - x_{aN}, y - y_{aN}) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

ou, na forma clássica de primeira ordem,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5.4)$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & -M_l^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} M_l^{-1}B_l \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(t) = \begin{bmatrix} W_p' \\ W_p \end{bmatrix}$.

Para o problema do regulador quadrático linear (LQR), dadas as matrizes Q , simétrica positiva semi-definida, e R , simétrica positiva definida, encontra-se a matriz de retroalimentação G , tal que o controle $u(t) = Gx(t)$ é tal que o funcional de custo quadrático

$$J(x) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (5.5)$$

é minimizado sujeito à $x' = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$.

Usando o teorema do regulador quadrático linear (LQR) em tempo contínuo [20], tem-se que existe um único controle ótimo $u^0(t)$ que minimiza $J(x)$ nos termos acima. O vetor de controle é dado por $u^0(t) = \mathbf{G}x(t)$, onde $\mathbf{G} = -R^{-1}B^T\mathcal{P}$, onde \mathcal{P} é solução positiva semi-definida da equação algébrica de Riccati [20]

$$\mathcal{P}A + A^T\mathcal{P} + Q - \mathcal{P}BR^{-1}B^T\mathcal{P} = 0. \quad (5.6)$$

Além disso, o valor mínimo de $J(x)$ é dado por $J_0 = x_0^T\mathcal{P}x_0$.

A matriz Hamiltoniana

$$H = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

é a matriz associada à equação algébrica de Riccati em tempo contínuo, com $S = BR^{-1}B^T$. Sob a hipótese que o sistema é estabilizável e detectável [20], H tem n autovalores com parte real negativa, nenhum autovalor no eixo imaginário e n autovalores com parte real positiva. A estratégia adotada para a solução mínima da equação (5.6) explora o fato de que a única solução estabilizante \mathcal{P} pode ser obtida construindo um subespaço invariante com os autovalores estáveis da matriz H . Dessa forma, a cada posicionamento de atuadores, corresponderá uma matriz B_l , satisfazendo (5.3) e, por conseguinte, uma matriz \mathcal{P} , satisfazendo (5.6), de onde o valor mínimo $J_0 = x_0^T\mathcal{P}x_0$ é calculado. O posicionamento ótimo dos atuadores é então obtido através da minimização da quantidade J_0 , considerada como um funcional das posições $(x_{a1}, \dots, x_{aN}; y_{a1}, \dots, y_{aN})$ dos atuadores. Seja $[\mathcal{P}_1^T \ \mathcal{P}_2^T]^T$ uma matriz com colunas formadas por autovetores correspondentes aos autovalores estáveis de H . Pode-se mostrar [20], assumindo que \mathcal{P}_1 é não singular, que a matriz $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1^{-1}$ é a única solução estabilizante da equação algébrica de Riccati (5.6).

5.2 Programação Não Linear

Otimização não restrita trata de problemas de minimização ou maximização de uma função de várias variáveis, na ausência de qualquer restrição. Mesmo que, na prática, a maioria dos problemas de otimização tenha restrições que devam ser satisfeitas, o estudo de técnicas de otimização sem restrição é importante. Muitos algoritmos resolvem problemas com restrição transformando-os em uma seqüência de problemas sem restrição, via multiplicadores de Lagrange ou via funções de penalidade. Ainda, outra classe de métodos procura encontrar uma direção e, então, minimizar a função ao longo desta direção. Isto é equivalente a minimizar uma função de uma variável sem restrições ou com restrições simples.

Existem procedimentos de minimização que não usam derivadas, como a pesquisa uniforme, pesquisa dicotômica, método da seção áurea (golden) e o método de Fibonacci. Outros procedimentos de minimização usam derivadas, como é o caso do método da bissecção e do método de Newton. Bem como métodos semi-analíticos para a análise de sensibilidade.

Muitos algoritmos em programação não linear procedem da seguinte forma:

Dado um ponto \mathbf{x}_k , encontra-se um vetor direção \mathbf{d}_k e um adequado passo de tamanho λ_k , obtendo um novo ponto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$. Encontrar λ_k envolve a solução do problema de minimizar $f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$, que é unidimensional na variável λ .

Considere uma função θ de uma variável λ para ser minimizada. Uma técnica utilizada é fazer sua derivada igual a zero e encontrar λ . Entretanto, θ é usualmente definida implicitamente em termos da função f de várias variáveis. Em particular, dados os vetores \mathbf{x} e \mathbf{d} , $\theta(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$. Se f é não diferenciável, então θ não será diferenciável. Se f é diferenciável, então $\theta'(\lambda) = \mathbf{d}^T \nabla f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$. Portanto, para encontrar um ponto λ com $\theta'(\lambda) = 0$, temos que resolver a equação

$\mathbf{d}^T \nabla f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) = 0$, que é usualmente não linear em λ . Além disso, λ que satisfaz $\theta'(\lambda) = 0$ não é necessariamente o mínimo procurado. Pode ser um mínimo local, máximo local ou ponto de sela. Por causa disso, recorreremos a uma técnica numérica para minimizar a função θ .

5.2.1 O Intervalo de Incerteza

Seja o problema de minimizar $\theta(\lambda)$ sujeito a $a \leq \lambda \leq b$. Já que a localização exata do mínimo de θ em $[a, b]$ não é conhecida, este intervalo é chamado de intervalo de incerteza, pois o ponto mínimo $\bar{\lambda}$ está em $[a, b]$, embora seu valor exato não seja conhecido.

Definição: Seja $f : S \rightarrow \Re$, onde S é um conjunto convexo não vazio de \Re^n . A função f é dita ser estritamente quase convexa se para cada $x_1, x_2 \in S$ com $f(x_1) \neq f(x_2)$, tem-se $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ para cada $\lambda \in (0, 1)$.

Funções estritamente convexas são importantes em programação não linear pois asseguram que o mínimo local no conjunto convexo é o mínimo global:

Teorema 1: Seja $f : \Re^n \rightarrow \Re$ uma função estritamente quase convexa. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito à $x \in S$, onde S é um conjunto convexo não vazio de \Re^n . Se \bar{x} é a solução ótima local, então \bar{x} é também solução ótima global.

A prova deste teorema encontra-se em [6].

O teorema abaixo mostra que, se a função θ é estritamente quase convexa, então o intervalo de incerteza pode ser reduzido avaliando θ em dois pontos dentro do intervalo.

Teorema 2: Seja $\theta : \Re \rightarrow \Re$ uma função estritamente quase convexa sobre o intervalo $[a, b]$. Seja $\lambda, \mu \in [a, b]$ tal que $\lambda < \mu$. Se $\theta(\lambda) > \theta(\mu)$, então

$\theta(z) \geq \theta(\mu)$ para todo $z \in [a, \lambda]$. Se $\theta(\lambda) \leq \theta(\mu)$, então $\theta(z) \geq \theta(\mu)$ para todo $z \in (\mu, b]$.

A prova deste teorema encontra-se em [6].

5.2.2 O Método da Razão Áurea (Golden Section)

Este método pode ser usado para minimizar uma função estritamente quase convexa num intervalo $[a, b]$.

Seja $[a_k, b_k]$ o intervalo de incerteza na iteração k . Pelo teorema 2, o novo intervalo de incerteza $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ é dado por $[\lambda_k, b_k]$ se $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ e por $[a_k, \mu_k]$ se $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$. Os pontos λ_k e μ_k são selecionados tais que

1. O comprimento do novo intervalo de incerteza $b_{k+1} - a_{k+1}$ não depende do resultado da k -ésima iteração. Portanto, podemos ter $b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$. Assim, se λ_k é da forma

$$\lambda_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k) \quad (5.7)$$

onde $\alpha \in (0, 1)$, então μ_k é da forma

$$\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k) \quad (5.8)$$

assim,

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k). \quad (5.9)$$

2. Como λ_{k+1} e μ_{k+1} são selecionados com o objetivo de uma nova iteração, ou λ_{k+1} coincide com μ_k ou μ_{k+1} coincide com λ_k . Se isto pode ser realizado, então durante a iteração $k + 1$ apenas uma nova observação é necessária.

Caso 1: $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$

Neste caso, $a_{k+1} = \lambda_k$ e $b_{k+1} = b_k$. A fim de satisfazer $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e aplicando (5.7), com k substituído por $k + 1$, tem-se

$$\mu_k = \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}) = \lambda_k + (1 - \alpha)(b_k - \lambda_k). \quad (5.10)$$

Substituindo as expressões de λ_k e μ_k de (5.7) e (5.8) na expressão acima, tem-se $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

Caso 2: $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$

Neste caso, $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = \mu_k$. A fim de satisfazer $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e aplicando (5.7), com k substituído por $k + 1$, tem-se

$$\lambda_k = \mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \alpha(\mu_k - a_k). \quad (5.11)$$

Obtém-se também $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, cujas raízes são $\alpha \cong 0.618$ e $\alpha \cong -1.618$. Já que α deve estar no intervalo $(0, 1)$, então $\alpha \cong 0.618$.

Se, na iteração k , μ_k e λ_k são escolhidos de acordo com (5.7) e (5.8), então o intervalo de incerteza é reduzido por um fator de 0.618. Na primeira iteração, duas leituras são necessárias em λ_1 e μ_1 , mas, para cada subsequente iteração, apenas uma avaliação é necessária, já que $\lambda_{k+1} = \mu_k$ ou $\mu_{k+1} = \lambda_k$.

Algoritmo:

Passo de Inicialização: Escolha um comprimento final de incerteza $l > 0$. Seja $[a_1, b_1]$ o intervalo inicial de incerteza, $\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$ e $\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, onde $\alpha \cong 0.618$. Avalie $\theta(\lambda_1)$ e $\theta(\mu_1)$, seja $k = 1$ e vá para o passo principal.

Passo Principal:

1. Se $b_k - a_k < l$, pare. A solução ótima está no intervalo $[a_k, b_k]$. Caso contrário, se $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$, vá para o passo 2 e, se $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$, vá para o passo 3.

2. Seja $a_{k+1} = \lambda_k$ e $b_{k+1} = b_k$. Além disso, seja $\lambda_{k+1} = \mu_k$ e $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \alpha(b_{k+1} - a_{k+1})$. Avalie $\theta(\mu_{k+1})$ e vá para o passo 4.

3. Seja $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = \mu_k$. Além disso, seja $\mu_{k+1} = \lambda_k$ e $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Avalie $\theta(\lambda_{k+1})$ e vá para o passo 4.

4. Substitua k por $k + 1$ e volte ao passo 1.

5.2.3 Procura Multidimensional

Considere o problema de minimização de uma função f de várias variáveis. Existem métodos que usam apenas avaliações funcionais ao longo da otimização. Outros métodos usam derivadas na determinação das direções de busca, como é o caso do método da descida e gradientes conjugados. Neste trabalho, foi utilizado o método da descida, descrito a seguir.

5.2.3.1 Método da Descida

É um método simples para minimizar uma função diferenciável de várias variáveis. O vetor \mathbf{d} é chamado uma direção descendente de f em \mathbf{x} se, existe um $\delta > 0$, tal que $f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) < f(\mathbf{x})$ para todo $\lambda \in (0, \delta)$. Em particular, se

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) - f(\mathbf{x})}{\lambda} < 0,$$

então \mathbf{d} é uma direção descendente. Esse método de passo descendente procura uma solução ao longo da direção \mathbf{d} com $\|\mathbf{d}\| = 1$, a qual minimiza o limite acima. Em [6], é mostrado que se f é diferenciável em \mathbf{x} com um gradiente não nulo, então $-\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$

é, de fato, a direção de descida mais rápida. Assim, por estas razões, este método é também conhecido como o método do gradiente.

Algoritmo:

Dado um ponto \mathbf{x} , o método da descida estabelece uma linha de procura ao longo da direção $-\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$, ou, equivalentemente, ao longo da direção $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Passo de Inicialização: Seja $\epsilon > 0$ o critério de parada. Escolha um ponto inicial \mathbf{x}_1 e faça $k = 1$.

Passo Principal: Se $\|\nabla f(\mathbf{x})\| < \epsilon$, pare.

- faça $\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$;
- sendo λ_k uma solução ótima do problema de minimizar $f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)$, sujeito à $\lambda \geq 0$, faça $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$;
- substitua k por $k + 1$;
- repita o passo principal.

Observação 1: A convergência deste método é assegurada em [6]; além disso, o método da descida converge ao ponto com gradiente zero.

Observação 2: Para o cálculo de λ , foi utilizado o método da razão áurea, descrito anteriormente. Para o cálculo de gradientes, a estratégia adotada foi a de substituir a computação tradicional de derivadas, via diferenças finitas, por um cálculo que leva em consideração as derivadas (conhecidas) de funções de aproximação do tipo B-Spline [21].

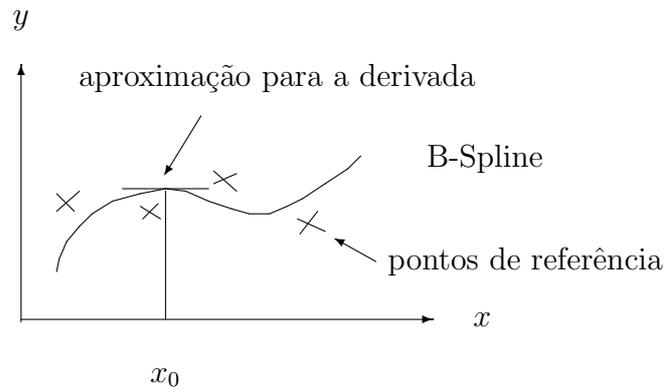


Figura 5.1 Interpolação B-Spline

Essa idéia, que pode ser exemplificada na figura 5.1, foi implementada em duas dimensões.

Exemplo: Na configuração com quatro atuadores, o funcional J depende das variáveis $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$, isto é, $J = J(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$.

Para o cálculo de $\frac{\partial J}{\partial y_1}$:

Posição dos atuadores 2,3,4: fixos.

Posição do atuador 1: móvel. J é dado em função de duas variáveis x_1 e y_1 .

A Figura 5.2 mostra uma representação para B-spline em duas dimensões.

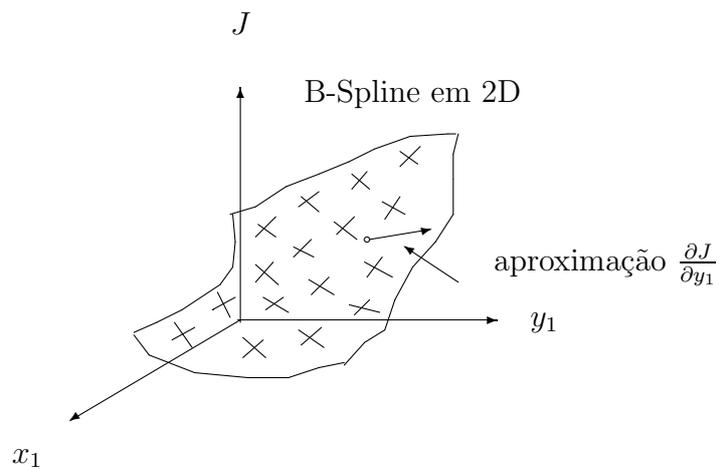


Figura 5.2 Interpolação B-Spline em duas dimensões

Todos os programas desta seção foram desenvolvidos em MATLAB[®].

6 RESULTADOS

Os resultados foram obtidos através dos *softwares* MAPLE[©] V7 e MATLAB[©] 6.0, para placa com condições de contorno engastadas e simulando um duto de ar condicionado.

6.1 Potência Sonora Radiada

Nesta seção, é apresentada a potência sonora radiada numa placa engastada, utilizando quatro atuadores. Comparando os resultados obtidos experimentalmente [54], observa-se uma redução em relação a dois atuadores.

As dimensões e as constantes materiais da placa são apresentados na Tabela 6.1

Tabela 6.1 Constantes do problema

Lados da placa	$a = b = 0.4$ m
Espessura da placa	$h = 0.002$ m
Densidade da placa	$\rho_s = 7099$ kg/m ³
Módulo de Young	$E = 190 \times 10^9$ N/m ²
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Densidade do ar	$\rho_a = 1.21$ kg/m ³
Velocidade do som	$C_0 = 344$ m/s
Raio de incidência	1 m
Lado atuador	$l = 0.025$ m
Posição	$(-0.1125; 0.875), (-0.875; -0.1115)$ m
Rigidez da mola	$k_r = 1000$ N.m

Experimentalmente [54], para medir a resposta da placa, um dos piezo-cerâmicos foi usado como atuador para excitar a placa e um acelerômetro (B&K 4393), pesando 2.2 g foi usado como sensor (Figura 6.1).

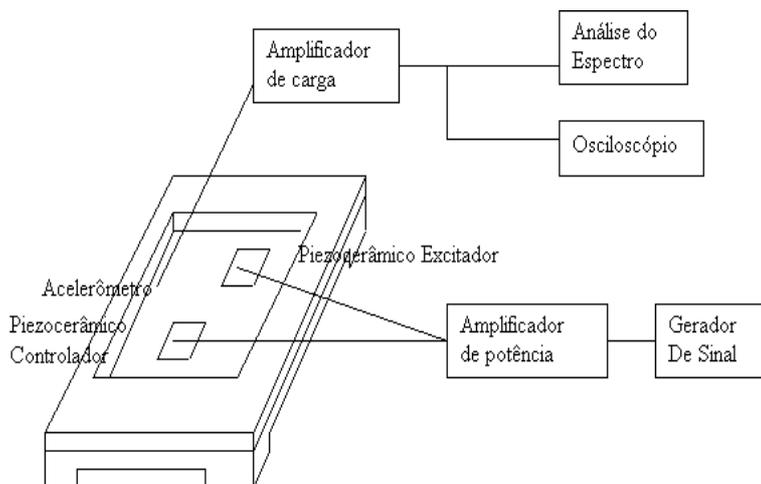


Figura 6.1 Placa com o sistema de medida

A placa descrita na Figura 6.1 foi localizada na abertura de uma câmara acústica, como mostra a Figura 6.2. Um microfone foi localizado no tubo 0.2 m da placa e outro na câmara [54]. Perturbações harmônicas, geradas por um auto-falante, instalado no outro lado do tubo, foram aplicadas na placa como uma onda incidente normal. O microfone no tubo foi usado para medir a pressão sonora incidente. O microfone na câmara foi usado para medir a pressão sonora transmitida.

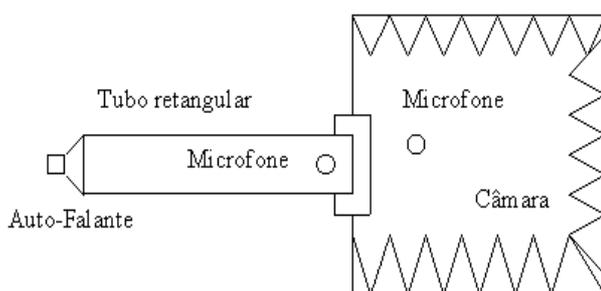


Figura 6.2 Modelo da câmara acústica

A maior redução obtida foi de 24 Hz. A quantidade usada para medir a pressão sonora é o nível de pressão sonora, definido por

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p_{rms}}{p_{ref}}, \quad (6.1)$$

onde p_{ref} é $20 \mu Pa$, que é a pressão de referência usada para a propagação do som no ar e p_{rms} é dada pela raiz quadrada da pressão.

Utilizando a fórmula (3.19), a Tabela 6.2 mostra a potência sonora radiada, antes do controle, e comparada com os dados experimentais de [54].

Tabela 6.2 Potência sonora calculada e medida experimentalmente com e sem o controle com dois piezelétricos

Modo	Sem controle		Com controle	
	Calculada	Medida	Calculada	Medida
2	90.4	88.6	77.3	65.1
3	91.5	85.8	75.8	67.2
4	107.5	100.7	83.5	86.5
5	104.9	98.3	86.4	88.2

Utilizando a fórmula (3.28), a Tabela 6.3 mostra a potência sonora radiada, utilizando quatro piezelétricos, observando-se uma redução maior.

Tabela 6.3 Potência sonora calculada com o controle e com quatro piezelétricos

Modo	Potência [dB]
2	43.15
3	56.24
4	62.47
5	69.21

6.2 Bases de Aproximação

Neste seção, foram calculadas, com auxílio do software matemático Maple, as bases de aproximação para as condições de contorno engastadas e do

tipo não-clássica, ou seja, mola rotacional e apoiada em cada extremo, simulando um ar condicionado. As raízes das equações características e os modos de vibração são tabelados e visualizados graficamente.

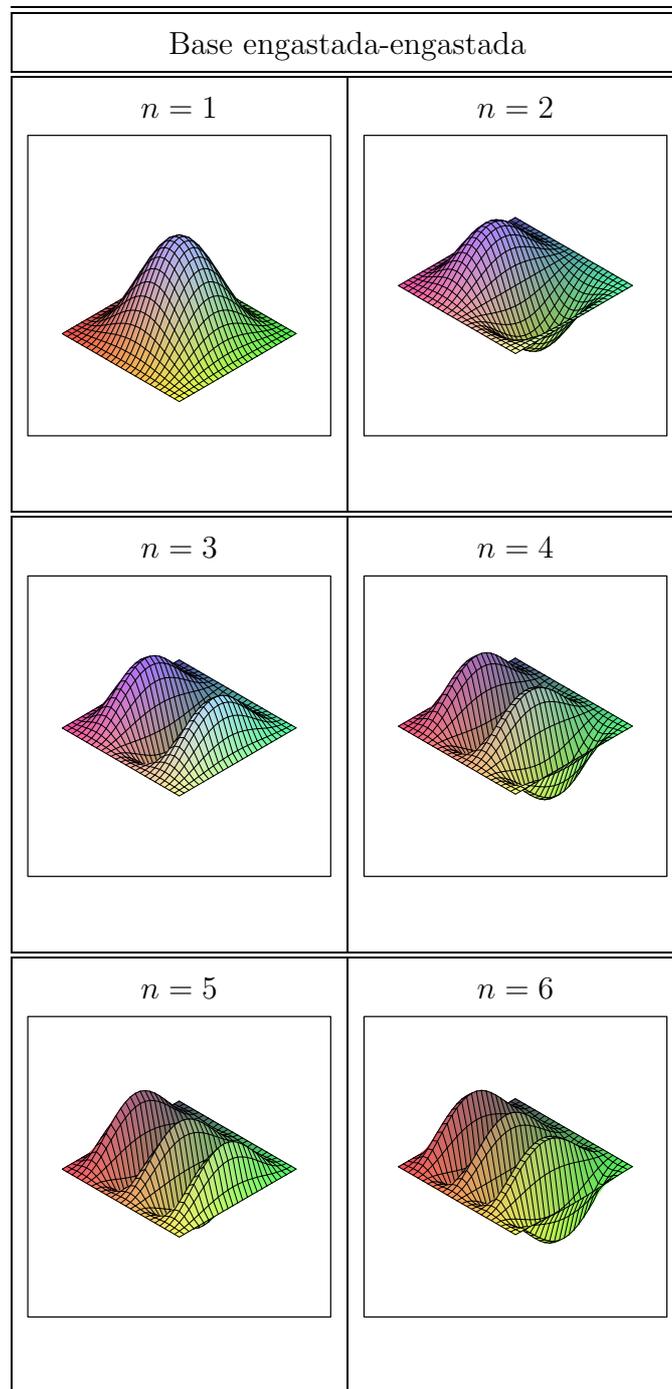


Figura 6.3 Base Modal de Aproximação para placa engastada $S[m, n]$ com $m = 1$ e $n = 1, 2, \dots, 6$

As raízes da equação característica, em x e y , equação (2.32), foram calculadas com o auxílio do software matemático Maple[©], apresentadas na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 Raízes da equação característica e frequências para condições de contorno engastadas

	Autovalores em x e y	Frequências [Hz]
β_1	11.83	66.47
β_2	19.63	183.24
β_3	27.49	359.22
β_4	35.34	593.8
β_5	43.2	887.04
β_6	51.05	1238.92

Na figura 6.4, são apresentados os modos de vibração $X(x)$ e $Y(y)$, equação (4.19), para os cinco primeiros modos.

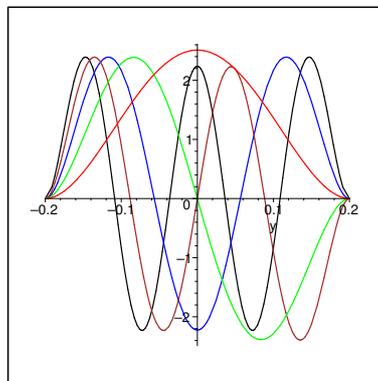


Figura 6.4 Os cinco primeiros modos de vibração para condições de contorno engastadas em x e y

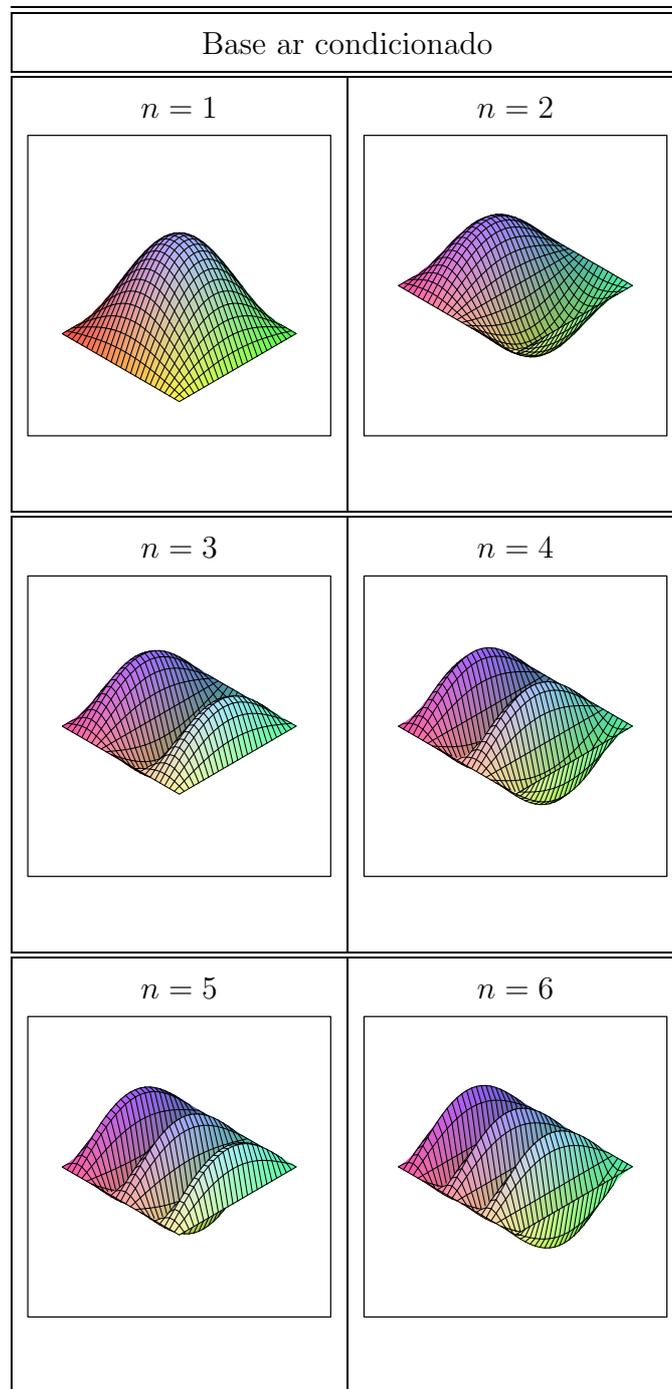


Figura 6.5 Base Modal de Aproximação para a simulação de dutos de ar condicionado $S[m, n]$ com $m = 1$ e $n = 1, 2, \dots, 6$

As raízes da equação característica, em x e y , equação (4.22), foram calculadas com o auxílio do software matemático Maple, apresentadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 Raízes da equação característica e frequências para simulação do ar condicionado

	Autovalores em x e y	Frequências [Hz]
β_1	9.32	41.29
β_2	16.65	131.85
β_3	24.26	279.72
β_4	31.96	485.67
β_5	39.72	750.02
β_6	47.51	1072.87

Na figura 6.6, são apresentados os modos de vibração $X(x)$ e $Y(y)$, dados pela equação (4.19), para os cinco primeiros modos.

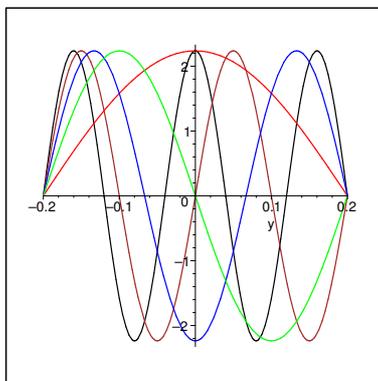


Figura 6.6 Os cinco primeiros modos de vibração para a simulação de dutos de ar condicionado em x e y

6.3 Posicionamento Ótimo dos Atuadores

Nesta seção, são apresentadas as localizações ótimas para diferente número de atuadores, utilizando dois métodos distintos: um método de inspeção e o método da descida.

Na tabela 6.6, é apresentada a posição ótima de cada atuador, por um método de inspeção-comparação. Neste caso, o valor mínimo encontrado para o custo quadrático foi de 8.232.

Tabela 6.6 Procura da posição ótima para quatro atuadores

n	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4
0	-.2	-.2	.2	-.2	-.2	.2	.2	.2
1	-0.1160	-0.1160	0.1160	-0.1160	-0.1160	0.1160	0.1160	0.1160
2	-0.1120	-0.1120	0.1120	-0.1120	-0.1120	0.1120	0.1120	0.1120
3	-0.1110	-0.1110	0.1110	-0.1110	-0.1110	0.1110	0.1110	0.1110
4	-0.1102	-0.1102	0.1102	-0.1102	-0.1110	0.1110	0.1102	0.1102
5	-0.1082	-0.1082	0.1122	-0.1122	-0.1122	0.1122	0.1082	0.1082
6	-0.1082	-0.1082	0.1122	-0.1122	-0.1122	0.1122	0.1082	0.1082
7	-0.1086	-0.1086	0.1118	-0.1118	-0.1118	0.1118	0.1086	0.1086
8	-0.1087	-0.1087	0.1117	-0.1117	-0.1117	0.1117	0.1087	0.1087

Na figura 6.7, é apresentado o funcional de custo quadrático para quatro atuadores distribuídos na placa, considerando três modos de vibração. A convergência do método de inspeção (Tabela 6.6) é apresentada.

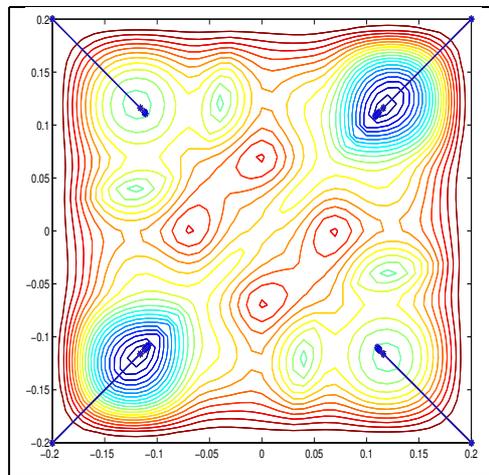


Figura 6.7 Funcional de custo quadrático com 4 atuadores

Utilizando o método da descida descrito no capítulo anterior, realizamos um estudo comparativo em relação ao número de atuadores e sua distribuição na placa. A Figura 6.8 mostra as configurações ótimas obtidas.

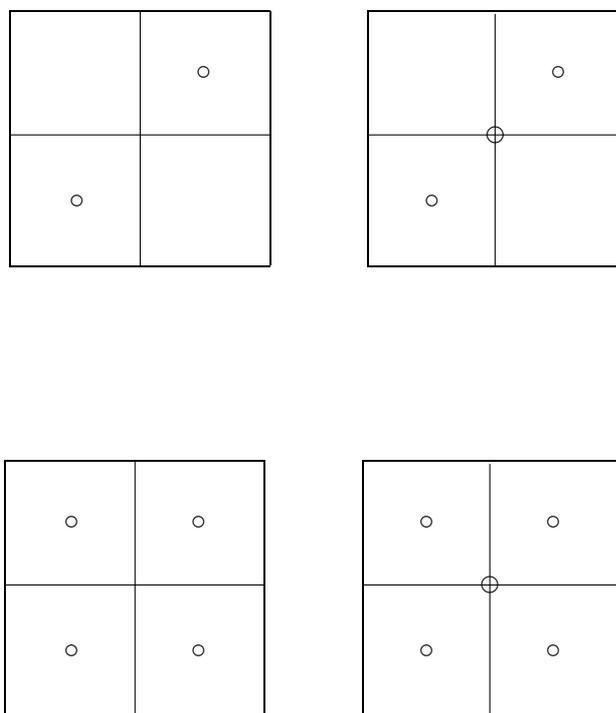


Figura 6.8 Configurações das localizações ótimas dos atuadores dispostos na placa

Nestes casos, a localização de cada atuador, nas configurações da Figura 6.8, bem como os funcionais encontrados, são apresentados na Tabela 6.7. Observa-se uma pequena vantagem na utilização de três atuadores em relação à quatro atuadores, sendo que o menor J_0 encontrado está na configuração para cinco atuadores.

Cabe salientar que a localização ótima obtida para quatro atuadores, usando o método da inspeção-comparação, é a mesma encontrada pelo método da descida.

Tabela 6.7 Posição ótima dos atuadores na placa

Atuador	Posição Ótima	J_0
2	$(-0.1098,-0.1098)$ e $(0.1098,0.1098)$	10.18
3	$(-0.1104,-0.1104)$, $(0.1104,0.1104)$ e $(0,0)$	7.89
4	$(-0.1087,-0.1087)$, $(-0.1117,0.1117)$, $(0.1117,-0.1117)$ e $(0.1087,0.1087)$	8.23
5	$(-0.1102,-0.1097)$, $(-0.1122,0.12)$, $(0.1191,-0.1145)$, $(0.1102,0.1097)$ e $(0.0197,0.0209)$	7.08

6.4 Convergência do Método da Descida

Nesta seção, é visualizada a convergência do método da descida usando os gráficos da função custo em relação à posição e número dos atuadores.

Na Figura 6.9, é visualizada a convergência do método da descida para dois atuadores, considerando três modos de vibração.

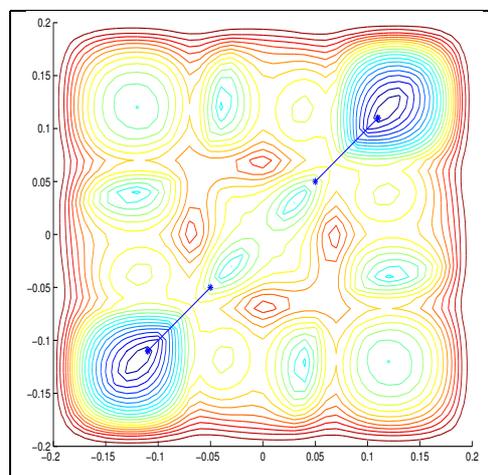


Figura 6.9 Convergência do método da descida para dois atuadores

Na Figura 6.10, é visualizada a convergência do método da descida para três atuadores, considerando três modos de vibração.

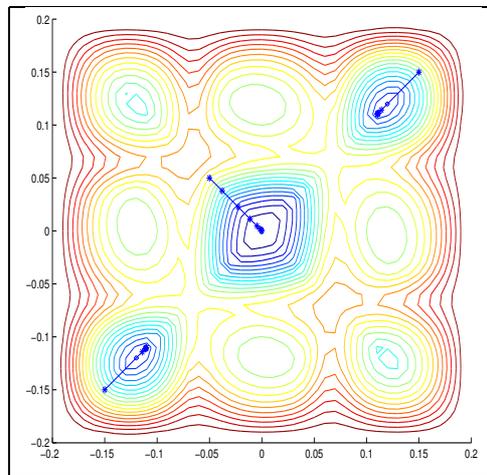


Figura 6.10 Convergência do método da descida para três atuadores

Na Figura 6.11, é visualizada a convergência do método da descida para quatro atuadores, considerando três modos de vibração.

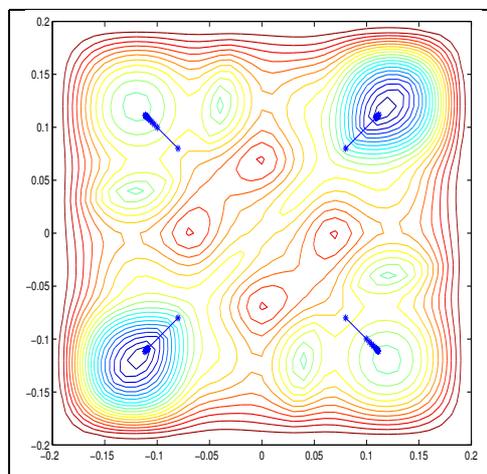


Figura 6.11 Convergência do método da descida para quatro atuadores

Na Figura 6.12, é visualizada a convergência do método da descida para cinco atuadores, considerando três modos de vibração.

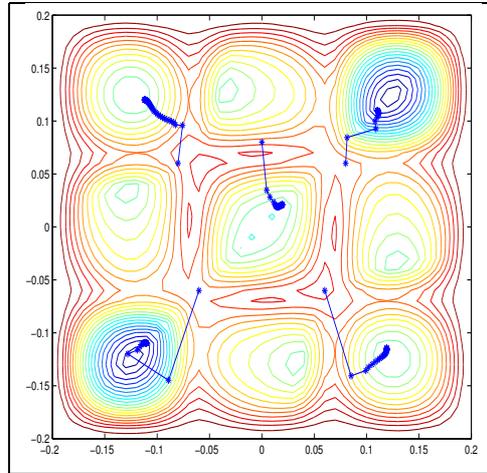


Figura 6.12 Convergência do método da descida para cinco atuadores

6.5 Simulação do Deslocamento Obtido com Configuração Ótima

Usando o MatLab/Simulink para o sistema:

$$W_p''(t) = M^{-1}[KW_p(t) + B_l u(t) + F_p(t)], \quad (6.2)$$

$$\text{com } u(t) = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_p' \\ W_p \end{bmatrix},$$

tem-se

$$W_p''(t) = M^{-1}[(B_l G_2 - K)W_p(t) + B_l G_1 W_p'(t) + F_p(t)]. \quad (6.3)$$

Utilizando quatro atuadores localizados na posição ótima encontrada na Tabela 6.7, com três modos de vibração e força externa $F_p = \cos(\frac{t}{4})$, apresentamos os gráficos para os modos de vibração antes e depois do controle, Figura 6.13, e para o deslocamento da placa antes e depois do controle, Figura 6.14.

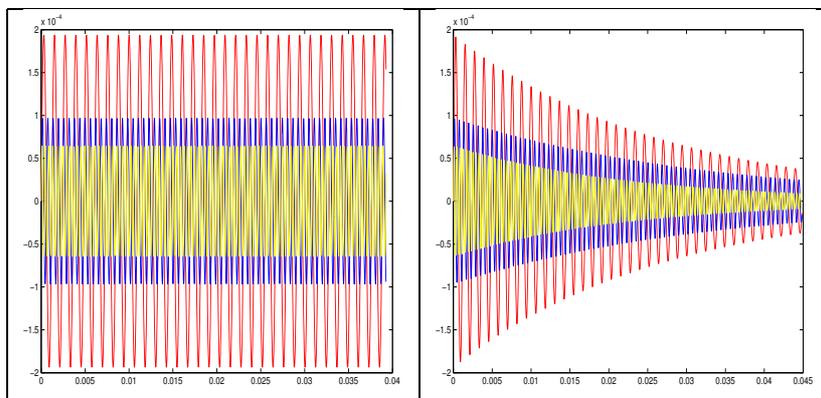


Figura 6.13 Modos de vibração sem e com controle

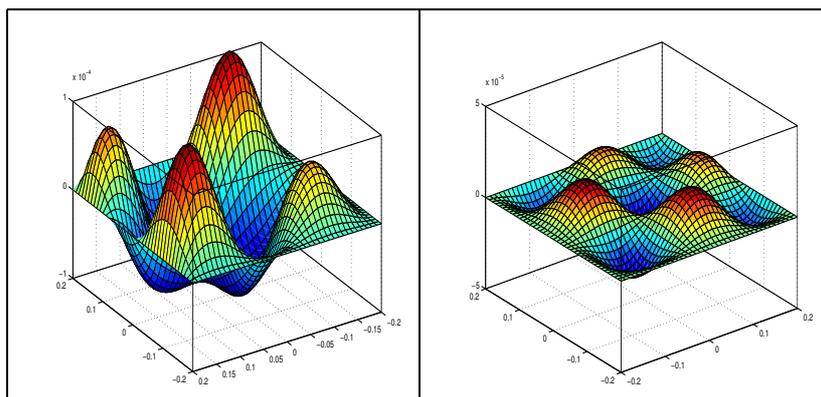


Figura 6.14 Deslocamento da placa sem e com controle com $t = 0.1$ segundo

Resultados com diferente número de atuadores foram semelhantes.

7 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi abordada a solução da equação de Kirchhoff para uma placa fina, elástica, linear, retangular, com condições de contorno clássicas, engastadas, e não-clássicas, com mola rotacional e apoiada em cada extremo, ampliando o uso de uma base não-clássica, chamada base dinâmica [12]-[18], através de uma análise modal e da matriz de transferência.

A determinação dos modos relativos ao modelo de Kirchhoff para placas, diante de condições de contorno engastadas e com uma extensão da metodologia matricial para uma combinação de condições de contorno não-clássicas, ou seja, mola rotacional e apoiada em cada extremo foi realizada, simulando um duto de ar condicionado.

Os modos foram obtidos de uma maneira matricial unificada, permitindo o uso da base dinâmica. A resolução do sistema algébrico linear singular, para a determinação dos modos, foi realizada através da decomposição LU e com o uso do *software* MAPLE[©] V7.

O uso de qualquer uma das bases, clássica ou dinâmica, é indiferente, em termos de exatidão, na determinação das frequências. Porém, nem todas as raízes da equação característica, obtida com a base clássica, correspondem a frequências do sistema. Isto não ocorre com a base dinâmica. Ambas fornecem os mesmos modos de vibração, embora com formas analíticas distintas.

A potência sonora radiada foi calculada antes e depois do controle e comparada com dados experimentais para placa engastada por Sung e Jan [54], para dois e quatro piezocerâmicos, observando uma redução da potência sonora radiada maior para quatro atuadores.

Foi implementado, usando o *software* MATLAB[©] 6.0, um procedimento para a otimização do posicionamento de diferentes números de atuadores em uma

placa quadrada, fina, elástica e linear com condições de contorno do tipo não-clássica, com mola rotacional e apoiada em cada extremo. O cálculo do funcional custo quadrático foi feito para diferentes números de atuadores, observando um valor menor para a configuração com três atuadores do que para quatro atuadores.

O cálculo do deslocamento para placa com condições de contorno não-clássicas, aplicando o controle e usando a base dinâmica, mostrou-se eficaz na redução.

Para trabalhos futuros, investigações em relação ao número ótimo de atuadores devem ser feitas. Também o tamanho e a forma do atuador podem ser considerados. Além disso, outras geometrias podem ser estudadas, usando a base dinâmica descrita aqui.

Referências Bibliográficas

- [1] AKISHITA, S and MITANI, Y. Sound Transmission Control Through Rectangular Plate by Using Piezoelectric Ceramics as Actuators and Sensors. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures** 5, pp. 371-378, 1994.
- [2] ARBEL, A., Controllability Measures and Actuator Placement in Oscillatory Systems, **International Journal of Control**, vol. 33, no. 3, pp. 565-574, 1981.
- [3] BANKS, H. T., SMITH, R. C. and WANG, Y., **Smart Material Structures, Modeling, Estimation and Control**, John Wiley & Sons, 1996.
- [4] BAO XARADAN, V. V. and VARADAN, V. K., Active Control of Sound Transmission Through a Plate Using a Piezoelectric Actuator and Sensor. **Smart Material Structures**, 4(4), pp. 231-239, 1995.
- [5] BAUMANN, W. T., Active Suppression of Acoustic Radiation from Impulsively Excited Structures, **Journal of Acoustical Society of America**, 90(6), 1991.
- [6] BAZARAA, M. S. e SHETTY, C. M., **NonLinear Programming**, John Wiley & Sons, 1979.
- [7] BLEVINS, R. D., **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**, Krieger Publishing Company, 1979.
- [8] BURDISSO, R. A. e FULLER, C. R., Theory of Feedforward Controlled System Eigenproperties. **Journal of Sound and Vibration**, 153(3), pp. 437-451, 1992.
- [9] CARDOSO, E. L. e FONSECA, J. S. O., An Incremental Lagrangian Formulation to the Analysis of Piezoelectric Bodies Subjected to Geometric

- Nonlinearities, **International Journal Numer. Meth. Engng** 2004; 59:1-2.
- [10] CHEN, S.-T., FAN, Y.-H., LEE, A.-C., Effective Active Damping Design for Suppression of Vibration in Flexible Systems via Dislocated Sensor/Actuator Positioning, **JSME International Journal**, vol. 37, no. 2, 1994.
- [11] CHIWIACOWSKY, L. D., Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Kirchhoff-Love para Placas, **Dissertação de Mestrado**, UFRGS-CPGMAp, Porto Alegre, 2000.
- [12] CLAEYSSSEN, J. C. R., On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions. **Journal of Sound and Vibration**, 140(1): pp. 73-84, 1990.
- [13] CLAEYSSSEN, J. C. R. e TSUKAZAN, T., Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. **Quarterly of Applied Mathematics**, vol. XLVIII, no. 1, 1990.
- [14] CLAEYSSSEN, J. C. R., Time and Frequency Response, **ICIAM 95**, Hamburgo, 1995.
- [15] CLAEYSSSEN, J. C. R., CANAHUALPA, G., JUNG, C., A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations. **Applied Numerical Mathematics**, vol. 30, 1999.
- [16] CLAEYSSSEN, J. C. R., The Matrix Impulse Response in Vibrating Systems, Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences. **ABCM-SBMAC-SIAM**, vol. 2, Ed. J. Baltazhar, 1999.

- [17] CLAEYSSSEN, J. R., CHIWIACOWSKY, L. D., SUAZO, G. C., The Impulse Response in the Symbolic Computing of Modes for Beams and Plates, **Applied Numerical Mathematics**, vol. 40, pp. 119-135, 2002.
- [18] CLAEYSSSEN, J. R. e SODER, R., A Dynamical Basis for Computing the Modes of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams, **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 259(4), 2003.
- [19] COPETTI, R. D., Sistemas Concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta, **Tese de Doutorado**, UFRGS-PROMECC, 2002.
- [20] DATTA, B., **Linear Control Systems Design and Analysis**. To appear, 2003.
- [21] DEBOOR, C., **A Practical Guide to Splines**. Appl. Math Sci Series, 27, Springer-Verlag, 1978.
- [22] DIMITRIADIS, E. K. and FULLER, C. R., Active Control of Sound Transmission through Elastic Plates using a Piezoelectric Actuator. **AIAA Journal**, 29(11), pp. 1771-1772, 1991.
- [23] ELLIOT, S. J., NELSON, P. A. and THOMAS, D. R., Experiments on the Active Control of the Transmission of Sound Through a Clamped Rectangular Plate, **Journal of Sound and Vibration**, 139(2), pp. 351-355, 1990.
- [24] FULLER, C.R., Active Control of Sound Transmission/Radiation from Elastic Plates by Vibration Inputs: I. Analysis. **Journal of Sound and Vibration** 136(1), pp. 1-15, 1990.
- [25] FULLER, C.R., Active Control of Sound Transmission/Radiation from Elastic Plates by Vibration Inputs: II. Experiments. **Journal of Sound and Vibration** 153(3), pp. 387-402, 1992.

- [26] FULLER, C. R., ELLIOTT, S. J. and NELSON, P. A., **Active Control of Vibration**, Academic Press, 1997.
- [27] GALLICCHIO, E., **Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e da Matriz de Transferência. Tese de Doutorado**, UFRGS-PROMEC, Porto Alegre, 1999.
- [28] GANTMACHER, F. R., **The Theory of Matrices**, Chelsea Publishing, New York, 1959.
- [29] HAC, A. and LIU, L., Sensor and Actuator Location in Motion Control of Flexible Structures, **Journal of Sound and Vibration**, 167(2), pp. 239-261, 1993.
- [30] HIRAMOTO, K., DOKI, H. e OBINATA, G., Optimal Sensor/Actuator Placement for Active Vibration Control using Explicit Solution of Algebraic Riccati Equation, **Journal of Sound and Vibration**, 229(5), 2000.
- [31] HSIAO, M., HUANG, J. e TAYLOR Jr., L. W., Optimal Modal-Space Controller for Structural Damping Enhancements, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, 18, pp. 657-663, 1995.
- [32] INMAN, D., **Engineering Vibration**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [33] KINSLER, L. E., **Fundamentals of Acoustics**. John Wiley, New York, 1962.
- [34] KIND, G. S., **Acoustic Waves**, Prentice-Hall, 1987.
- [35] KONDOH, S., YATOMI, C. and INOUE, K., The Positioning of Sensors and Actuators in the Vibration Control of Flexible Systems, **JSME International Journal**, vol. 33, no. 2, 1990.
- [36] KWAKERNAAK, H. e SIVAN, R., **Linear Optimal Control Systems**, John Wiley & Sons, 1972.

- [37] LI, N., Forced Vibration Analysis of the Clamped Orthotropic Rectangular Plate by the Superposition Method. **Journal of Sound and Vibration**, 158, pp. 307-316, 1992.
- [38] LIM, K. B., Method for Optimal Actuator and Sensor Placement for Large Flexible Structures, **J. Guidance**, vol. 15, no. 1, 1992.
- [39] MARTIN, J-C. E., Optimal Allocation of Actuators for Distributed-Parameter Systems, **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, vol. 100, 1978.
- [40] McFARLANE, D. C. e GLOVER, K., Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description. **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, vol. 138, Berlin: Springer, 1990.
- [41] MEIROVITCH, L., **Analytical Methods in Vibrations**. The Macmillan Company, New York, 1969.
- [42] MEIROVITCH, L., **Elements of Vibration Analysis**. McGraw-Hill, 1975.
- [43] MONTGOMERY, R. C., Reliability Considerations in the Placement of Control System Components, **J. Guidance**, vol. 8, no. 3, 1985.
- [44] MORELATO, T., Cálculo de Modos Vibratórios no Modelo Estrutural de Euler-Bernoulli com Condições de Contorno Não-Clássicas. **Dissertação de Mestrado**, UFRGS-CPGMAp, Porto Alegre, 2001.
- [45] MORSE, P. M. e INGARD, K. U., **Theoretical Acoustics**, Princeton University Press, New Jersey, 1986.
- [46] MOSCHEN, I. D., Cálculo Simbólico de Modos Vibratórios no Modelo de Euler-Bernoulli para Vigas. **Dissertação de Mestrado**, UFRGS-CPGMAp, Porto Alegre, 1999.

- [47] NELSON, P.A., CURTIS, A.R.D., ELLIOTT, S.J. e BULLMORE, A.J., The Minimum Power Output of Free Field Point Sources and the Active Control of Sound, **Journal of Sound and Vibration**, 116(3), pp. 397-414, 1987.
- [48] PADULA, S. L. e KINCAID, R. K., Optimization Strategies for Sensor and Actuator Placement, **Nasa Langley Research Center**, pp. 1-12, 1999.
- [49] PIERCE, A. D., **Acoustics: an Introduction to its Physical Principles and Applications**. McGraw-Hill, 1981.
- [50] RAYLEIGH, L.W.S., **Theory of Sound**, Dover Publications, 1945.
- [51] RAO, S. S. e SUNAR, M., Recent Advances in Sensing and Control of Flexible Structures via Piezoelectric Materials Technology. **American Society of Mechanical Engineers, Appl. Mech. Rev.**, vol. 52, no. 1, 1999.
- [52] ROGERS, D. F. e ADAMS, J. A., **Mathematical Elements for Computer Graphics**, McGraw-Hill, 1989.
- [53] SMITH, J. P., FULLER, C. R. and BURDISSO, R. A., Control of Broadband acoustic Radiation with Adaptive Structures. **Journal of Intelligent Material System Structures**, 7(1), pp. 54-64, 1996.
- [54] SUNG, C.-C. e JAN, C. T., Active Control of Structurally Radiated Sound from Plates. **Journal of Acoustical Society of America**, 102(1), 1997.
- [55] SUNG, C.C. e JAN, C.T., The response of and sound power radiated by a clamped rectangular plate. **Journal of Sound and Vibration** 207(3), pp. 301-317, 1997.
- [56] SUNG, C.-C. and CHIU, C.-Y., Control of Sound Transmission Through Thin Plate. **Journal of Sound and Vibration**, 218(4), pp. 605-618, 1998.

- [57] SZILARD, R., **Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods**. New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
- [58] TIMOSHENKO, S. P. e WEAVER, W. Jr, **Vibration Problems in Engineering**, John Wiley, New York, 1974.
- [59] VLASOV, V.Z., Some New Problems on Shell and Thin Structures. **Nat. Adv. Comm. Aeron., Naca Technical Memo** 1024, 1949.
- [60] WANG, B-T., FULLER, C. R. and DIMITRIADIS, E. K., Active Control of Structurally Radiated Noise using Multiple Piezoelectric Actuators. **AIAA Journal**, 29(11), pp. 1802-1809, 1991.
- [61] WANG, B-T., Active Control of a Far-field Sound Radiation by a Beam with Piezoelectric Control Transducers: Physical System Analysis. **Smart Material Structures**, 3(4), pp. 476-484, 1994.
- [62] WARBUTON, G.B., The Vibration of Rectangular Plates. **Proceedings of Institute of Mechanical Engineers**, 168, pp. 371-381, 1954.
- [63] YANG, B. Closed-Form Transient Response of Distributed Damped Systems, Part I: Modal Analysis and Green's Function Formula, **ASME Journal of Applied Mechanics**, vol. 63, pp. 997-1003, 1996.

Apêndice A OPERADOR AUTO ADJUNTO

A.1 Operador diferencial linear auto-adjunto

Considere o produto interno

$$\langle v, u \rangle = \int_0^L v(x)\overline{u(x)} dx, \quad (\text{A.1})$$

sobre o corpo de escalares complexos

O operador adjunto \mathcal{L}^* de um operador diferencial linear dado \mathcal{L} é definido através da relação

$$\langle \mathcal{L}v, u \rangle = \langle v, \mathcal{L}^*u \rangle \quad (\text{A.2})$$

Para o operador $\mathcal{L}(v) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \beta^4 v$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{L}(v)u dx &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} u - \beta^4 v u \right) dx \\ &= \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \beta^4 v u dx \\ &= \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \beta^4 v u dx \\ &= \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \beta^4 v u dx \\ &= \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx - \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \beta^4 v u dx \\ &= \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} + \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} v \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \beta^4 u \right) dx \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

O operador diferencial linear \mathcal{L} é dito auto-adjunto se $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Portanto \mathcal{L} é auto-adjunto, se e somente se,

$$\left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} u - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u\left(-\frac{a}{2}\right) &= u\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \\ v\left(-\frac{a}{2}\right) &= v\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{a}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Um resultado clássico nos diz que, neste caso, suas autofunções são ortogonais em $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, com relação ao produto interno definido em (A.2).

A.2 Condições de Contorno: Placa Engastada

As autofunções $X(x)$ e $Y(y)$ em x e y , dadas pelas equações (2.30) e (2.31), satisfazem as condições de contorno em $x = -\frac{a}{2}$ e $x = \frac{a}{2}$

$$X\left(-\frac{a}{2}\right) = \sigma(a)h(0) + h'(0) = 0,$$

$$X'\left(-\frac{a}{2}\right) = \sigma(a)h'(0) + h''(0) = 0$$

e

$$X\left(\frac{a}{2}\right) = \sigma(a)h(a) + h'(a) = -\frac{h'(a)}{h(a)}h(a) + h'(a) = 0,$$

$$X'\left(\frac{a}{2}\right) = \sigma(a)h'(a) + h''(a) = \frac{-h'(a)^2 + h(a)h''(a)}{h(a)}. \quad (\text{A.5})$$

Tem-se $X'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ como consequência da equação característica (2.33). Analogamente, as condições de contorno são satisfeitas em y .

A.3 Condições de Contorno: Ar Condicionado

A autofunção em x , equação (4.13), satisfaz as condições de contorno, em $x = -\frac{a}{2}$,

$$k_m X\left(-\frac{a}{2}\right) + DX'''\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} k_m[h''''(0) + \sigma_2 h''(0) + \sigma_1 h'(0) + \sigma_0 h(0)] + D[\beta^4 h''(0) + \sigma_2 \beta^4 h'(0) + \sigma_1 \beta^4 h(0) + \sigma_0 h''''(0)] \\ = k_m + D\sigma_0 = k_m + D \cdot -\frac{k_m}{D} = 0, \end{aligned}$$

$$k_r X\left(-\frac{a}{2}\right) - DX''\left(-\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} k_r[\beta^4 h(0) + \sigma_2 h''''(0) + \sigma_1 h''(0) + \sigma_0 h'(0)] - D[\beta^4 h'(0) + \sigma_2 \beta^4 h(0) + \sigma_1 h''''(0) + \sigma_0 h''(0)] \\ = k_r \sigma_2 - D\sigma_1 = k_r \sigma_2 - D \frac{k_r}{D} \sigma_2 = 0 \end{aligned}$$

e, em $x = \frac{a}{2}$,

$$k_m X\left(\frac{a}{2}\right) - DX'''\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_m[h''''(a) + \sigma_2 h''(a) + \sigma_1 h'(a) + \sigma_0 h(a)] - D[\beta^4 h''(a) + \sigma_2 \beta^4 h'(a) + \sigma_1 \beta^4 h(a) + \sigma_0 h''''(a)] = 0,$$

é obtido substituindo os valores de σ_2 , σ_1 e σ_0 e, como última condição de contorno, tem-se

$$k_r X'\left(\frac{a}{2}\right) + DX''\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$k_r[\beta^4 h(a) + \sigma_2 h''''(a) + \sigma_1 h''(a) + \sigma_0 h'(a)] + D[\beta^4 h'(a) + \sigma_2 \beta^4 h(a) + \sigma_1 h''''(a) + \sigma_0 h''(a)] = 0. \quad (\text{A.6})$$

Da equação (A.6) tem-se a equação característica (4.11), em termos da base dinâmica. A autofunção em y , equação (4.19), satisfaz as condições de contorno, em $y = -\frac{b}{2}$,

$$Y\left(-\frac{b}{2}\right) = h''(0) + \gamma_1 h'(0) + \gamma_0 h(0) = 0,$$

$$k_r Y'\left(-\frac{b}{2}\right) - DY''\left(-\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
& k_r[h'''(0) + \gamma_1 h''(0) + \gamma_0 h'(0)] - D[\beta^4 h(0) + \gamma_1 h'''(0) + \gamma_0 h''(0)] \\
& = k_r - D\gamma_1 = k_r - D\frac{k_r}{D} = 0
\end{aligned}$$

e, em $y = \frac{b}{2}$,

$$Y\left(\frac{b}{2}\right) = h''(b) + \gamma_1 h'(b) + \gamma_0 h(b) = 0,$$

é obtido substituindo os valores de γ_1 e γ_0 e, como última condição de contorno, tem-se

$$k_r Y'\left(\frac{b}{2}\right) + D Y''\left(\frac{b}{2}\right) = 0$$

$$k_r[h'''(b) + \gamma_1 h''(b) + \gamma_0 h'(b)] + D[\beta^4 h(b) + \gamma_1 h'''(b) + \gamma_0 h''(b)] = 0. \quad (\text{A.7})$$

Da equação (A.7) tem-se a equação característica (4.17), em termos da base dinâmica.