

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS GENÉTICOS E SQP PARA OTIMIZAÇÃO DE
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA EM SISTEMAS VIBROACÚSTICOS

por

Régis Eduardo Antich

Dissertação para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, Maio de 2011.

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS GENÉTICOS E SQP PARA OTIMIZAÇÃO DE
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA EM SISTEMAS VIBROACÚSTICOS

por

Régis Eduardo Antich
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de:

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Prof. Dr. Tiago Becker.....ULBRA/TC

Prof. Dr. Leticia Fleck Fadel Miguel.....UFRGS/PROMEC

Prof. Dr. Rafael Antonio Camparsi Laranja.....UFRGS/PROMEC

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, Maio de 2011.

*Dedico este trabalho aos meus pais Marlene Terezinha
Flores Antich e José Eduardo Antich*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não poderia ser finalizado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto minha homenagem:

A minha família, principalmente aos meus pais.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas, pela motivação, apoio, dedicação que sempre dedicou a este trabalho.

Aos bolsistas de iniciação científica do GMAP, em particular Vinicius Ribeiro da Silva e Marco Antônio Nesello Grabski; demais colegas e professores do PROMEC que colaboraram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

À UFRGS e ao PROMEC, pela oportunidade.

Aos professores membros da Comissão de Avaliação pelas sugestões para melhoria deste trabalho.

A empresa GKN do Brasil, que sustentou a minha ausência nos momentos em que foi necessário.

Às pessoas que de uma maneira indireta forneceram apoio para este momento tornar-se realidade.

RESUMO

Neste trabalho o autor programa e avalia algoritmos para análise e otimização de pressão sonora desenvolvidos para sistemas acoplados vibroacústicos, verificando o desempenho da análise da resposta e comparando a adequação dos algoritmos de Programação Quadrática Sequencial (SQP - *Sequential Quadratic Programming*) e Genético na otimização da resposta. A otimização da resposta é implementada no programa acadêmico de elementos finitos Meflab, e utiliza para otimização a função *fmincon* disponível no programa comercial Matlab®. Igualmente a otimização da resposta é implementada através de um código desenvolvido de algoritmos genéticos. Para os casos acoplados estudados o algoritmo SQP mostra uma redução da pressão sonora inicial inferior ao algoritmo Genético, para casos desacoplados o método SQP consegue reduções maiores. Os resultados foram validados através de formulações analíticas disponíveis e comparados em alguns casos com soluções de programas comerciais.

Palavras-chave: Sistema Fluido-Estrutura; Resposta em Frequência; Algoritmo SQP; Algoritmo Genético.

ABSTRACT

In this work the author implements in a software and evaluates algorithms for analysis and optimization of the sound pressure developed for coupled vibroacoustic systems, checking the performance and response analysis comparing the suitability of the Sequential Quadratic Programming (SQP) and Genetic algorithms in optimizing response. The optimization of the response is implemented in the academic program Meflab finite element, and uses optimization function fmincon available in the commercial program Matlab ®. Also the optimization of the response is implemented through a code developed genetic algorithms. For the coupled cases studied the SQP algorithm reduce less the inicial sunde pressure tha Genetic algorithm, for uncoupled cases SQP method has a bigger reduccion. The results were validated by analytical formulations available in some cases and compared with commercial software solutions.

Keywords: Fluid-structure system; Frequency Response; SQP algorithm; Genetic algorithm.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Generalidades.....	1
1.2	Sistemas vibroacústicos e otimização numérica.....	3
1.3	Definição do problema.....	4
1.4	Objetivos da pesquisa.....	4
1.5	Organização do trabalho.....	5
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
2.1	Modelagem fluido-estrutura.....	7
2.2	Análise de resposta e otimização de sistemas fluido-estrutura.....	10
2.3	Desenvolvimentos analíticos, aplicações e testes em sistemas fluido-estrutura.....	13
3.	MODELAGEM DE SISTEMAS VIBROACÚSTICOS.....	15
3.1	Generalidades.....	15
3.2	Formulação do sistema estrutural.....	15
3.2.1	Equações de movimento de Lagrange.....	15
3.2.2	Vibração por flexão de vigas.....	19
3.2.3	Vibração por flexão de placa fina.....	25
3.2.3.1	Elemento de placa retangular fina não conforme.....	29
3.2.3.2	Elemento de placa retangular fina conforme.....	38
3.3	Formulação do sistema acústico.....	40
3.3.1	Funções de energia – sólido tridimensional.....	44
3.3.2	Vibração de sólidos – elemento hexaédrico retangular.....	46
3.4	Sistemas acoplados vibroacústicos.....	56
4.	ANÁLISE DE RESPOSTA E OTIMIZAÇÃO.....	59
4.1	Generalidades.....	59
4.2	Análise modal em sistemas acoplados fluido-estrutura.....	59
4.3	Resposta em frequência direta.....	62
4.4	Resposta em frequência modal.....	66
4.5	Otimização através de parâmetros.....	68
4.6	Otimização através de Programação Quadrática Sequencial.....	70
4.7	Implementação do método SQP no Meflab.....	72
4.7.1	Algoritmo de otimização de larga escala.....	73
4.7.2	Algoritmo de otimização de média escala.....	73
4.7.2.1	Atualização da matriz Hessiana.....	74
4.7.2.2	Solução da programação quadrática QP.....	75
4.7.2.3	Procura unidimensional e função mérito.....	78
4.7.3	Rotinas de viabilização.....	78
4.8	Otimização através de algoritmos Genéticos.....	79
4.9	Implementação do algoritmo Genético no Meflab.....	81
4.10	Diminuição de resposta em frequência.....	87
5.	ANÁLISE DE RESULTADOS.....	90
5.1	Generalidades.....	90

5.2	Sistema estrutural I: Análise de frequências naturais de uma chapa quadrada simplesmente apoiada.....	90
5.3	Sistema acústico I: Análise de frequências naturais de uma cavidade hexaédrica retangular.....	97
5.4	Sistema estrutural II – Análise de resposta em frequência de uma placa engastada.....	102
5.5	Sistema estrutural III – Otimização de resposta de uma chapa engastada pelo método SQP.....	109
5.6	Sistema estrutural III – Otimização de resposta de uma chapa engastada através de algoritmo Genético.....	113
5.6.1	Influência do número de cromossomos na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab.....	114
5.6.2	Influência do número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab.....	115
5.6.3	Influência do número de bits na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab.....	117
5.6.4	Resultado otimização Genética da resposta em frequência do Meflab com os melhores parâmetros.....	118
5.6.5	Melhoria do algoritmo Genético proposto para otimização da resposta em frequência do Meflab com os melhores parâmetros.....	121
5.7	Sistema fluido-estrutura I. Resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada.....	123
5.7.1	Análise estrutural da placa quadrada.....	124
5.7.2	Análise acústica da cavidade hexaédrica.....	127
5.7.3	Análise vibroacústica da cavidade hexaédrica sobre placa quadrada.....	131
5.7.4	Análise de resposta em frequência da cavidade hexaédrica sobre placa quadrada.....	133
5.8	Sistema fluido-estrutura I. Otimização da resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, uma frequência de excitação e um ponto de medição.....	134
5.9	Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, múltiplas frequências de excitação e um ponto de medição.....	138
5.10	Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, uma frequência de excitação e dois pontos de medição.....	142
5.11	Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – duas forças de excitação, uma frequência de excitação e um ponto de medição.....	146
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS.....	150
6.1	Conclusões.....	150
6.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	152
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	154

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Teste Modo estrutural (A), acústico (B) e acoplado (C) de um cilindro contendo fluido.....	8
Figura 2.2 Velocidade vibracional de excitação U e ponto de medição Ω_{op}	11
Figura 2.3 Modelo físico e numérico de uma caixa.....	13
Figura 3.1 Sistema massa, mola e amortecedor.....	15
Figura 3.2 Elemento de viga.....	19
Figura 3.3 Elemento de flexão de placa com indicação do sistema de coordenadas.....	26
Figura 3.4 Geometria e sistema de coordenadas do elemento placa fina.....	29
Figura 3.5 Esquema de um sistema acoplado fluido-estrutura.....	40
Figura 3.6 Sólido com sistema de coordenadas.....	44
Figura 3.7 Geometria e sistema de coordenadas de um elemento hexaédrico retangular.....	47
Figura 4.1 Método SQP aplicado a uma função não linear restrita de Rosenbrock.....	74
Figura 4.2 Fluxograma do processo de otimização Genética.....	82
Figura 4.3 Processo de seleção e recombinação dos cromossomos.....	86
Figura 5.1 Chapa quadrada de aço.....	91
Figura 5.2 Chapa 4 x 4 – 16 elementos.....	91
Figura 5.3 Chapa 8 x 8 – 64 elementos.....	92
Figura 5.4 Chapa 12 x 12 – 144 elementos.....	92
Figura 5.5 Frequência natural em função do número de elementos - Meflab elemento não conforme.....	93
Figura 5.6 Frequência natural em função do número de elementos – Meflab elemento conforme.....	93
Figura 5.7 Frequência natural em função do número de elementos – MSC Nastran®.....	94
Figura 5.8 Cavidade de ar.....	98
Figura 5.9 Cavidade 4 x 4 x 4 – 64 elementos.....	98
Figura 5.10 Cavidade 8 x 8 x 8 – 512 elementos.....	99
Figura 5.11 Cavidade 12 x 12 x 12 – 1728 elementos.....	99
Figura 5.12 Frequência natural em função do número de elementos – Meflab.....	100
Figura 5.13 Frequência natural em função do número de elementos – MSC Nastran®.....	100
Figura 5.14 Chapa engastada.....	103

Figura 5.15 Chapa engastada 4x10 elementos.....	103
Figura 5.16 Numeração dos elementos e nós.....	104
Figura 5.17 Resposta do nó 11 no Meflab.....	106
Figura 5.18 Resposta do nó 11 no MSC Nastran®.....	106
Figura 5.19 Resposta do nó 33 no Meflab.....	107
Figura 5.20 Resposta do nó 33 no MSC Nastran®.....	107
Figura 5.21 Resposta do nó 55 no Meflab.....	108
Figura 5.22 Resposta do nó 55 no MSC Nastran®.....	108
Figura 5.23 Resposta inicial e otimizada para 2363 Hz utilizando 1 modo.....	112
Figura 5.24 Resposta em frequência inicial e otimizada para 2363 Hz utilizando 10 modos.....	112
Figura 5.25 Resposta inicial e otimizada para 134 Hz algoritmo Genético.....	119
Figura 5.26 Resposta inicial e otimizada para 134 Hz algoritmo SQP.....	120
Figura 5.27 Placa quadrada de alumínio.....	124
Figura 5.28 Chapa alumínio 8 x 8 – 64 elementos.....	125
Figura 5.29 Cavidade de ar.....	127
Figura 5.30 Cavidade de ar 8x8x8 – 512 elementos.....	128
Figura 5.31 Aplicação da força no nó 30.....	133
Figura 5.32 Resposta em frequência para sistema vibroacústico no Meflab.....	134
Figura 5.33 Pressão sonora inicial e otimizada para 206,7 Hz algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita).....	136
Figura 5.34 Pressão sonora inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) múltiplas excitações.....	140
Figura 5.35 Resposta inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) dois pontos de medição (pressões sonoras somadas).....	144
Figura 5.36 Resposta inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) duas forças.....	148

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Análise por métodos direto e modal e modelamento da interação fluido-estrutura com vários códigos de elementos finitos.....	10
Tabela 5.1 30 primeiras frequências naturais da chapa quadrada.....	95
Tabela 5.2 Diferença RMS das 30 primeiras frequências naturais da chapa.....	96
Tabela 5.3 Diferença RMS das 10 primeiras frequências naturais da chapa.....	96
Tabela 5.4 30 primeiras frequências naturais da cavidade.....	101
Tabela 5.5 Diferença RMS nas 30 primeiras frequências da cavidade.....	102
Tabela 5.6 30 primeiras frequências naturais para a placa engastada.....	104
Tabela 5.7 Diferença RMS das 6 primeiras frequências naturais da placa engastada.....	105
Tabela 5.8 Diferença MSC Nastran em relação ao Meflab das 30 primeiras frequências naturais.....	105
Tabela 5.9 Diferença MSC Nastran em relação ao Meflab das 6 primeiras frequências naturais.....	105
Tabela 5.10 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 134 Hz.....	110
Tabela 5.11 Deslocamento em frequência para cada número de modos (m).....	111
Tabela 5.12 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 2363 Hz.....	111
Tabela 5.13 Resposta das simulações para a variação do número de cromossomos.....	114
Tabela 5.14 Comparação variação Genético com número de cromossomos versus SQP.....	115
Tabela 5.15 Respostas das simulações para a variação do número máximo de repetições....	116
Tabela 5.16 Comparação variação Genético com número máximo de repetições versus SQP.....	116
Tabela 5.17 Respostas das simulações para a variação do número de bits.....	117
Tabela 5.18 Comparação variação Genético com número de bits versus SQP.....	118
Tabela 5.19 Respostas das simulações para a melhor combinação de parâmetros.....	119
Tabela 5.20 Comparação variação Genético com melhores parâmetros versus SQP.....	119
Tabela 5.21 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 134 Hz Genético.....	120
Tabela 5.22 Resposta das simulações para a melhor combinação de parâmetros com algoritmo melhorado.....	121
Tabela 5.23 Comparação variação Genético com melhores parâmetros com algoritmo melhorado versus SQP.....	122

Tabela 5.24 Resposta das simulações para alteração do critério de parada de 10 para 15 com algoritmo melhorado.....	122
Tabela 5.25 Comparação variação Genético com alteração do critério de parada de 10 para 15 com algoritmo melhorado versus SQP.....	122
Tabela 5.26 Resposta das simulações para alteração do número de cromossomos de 20 para 30 com algoritmo melhorado.....	123
Tabela 5.27 Comparação variação Genético com alteração do número de cromossomos de 20 para 30 com algoritmo melhorado versus SQP.....	123
Tabela 5.28 Frequências naturais em Hz de uma placa quadrada suportada nos vértices.....	125
Tabela 5.29 Diferença Meflab não conforme x Meflab conforme.....	126
Tabela 5.30 Diferença MSC Nastran® x Meflab não conforme – 30 frequências naturais...	126
Tabela 5.31 Diferença MSC Nastran® x Meflab não Conforme – 15 frequências naturais..	127
Tabela 5.32 Frequências naturais da cavidade acústica.....	129
Tabela 5.33 Diferença RMS 30 primeiras frequências naturais para a cavidade hexaédrica.....	130
Tabela 5.34 Frequências naturais alinhadas da cavidade acústica.....	130
Tabela 5.35 Resultados 30 primeiras frequências naturais para o sistema vibroacústico.....	132
Tabela 5.36 Diferença sistema vibroacústico.....	132
Tabela 5.37 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa.....	135
Tabela 5.38 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa.....	137
Tabela 5.39 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa múltiplas excitações.....	139
Tabela 5.40 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa múltiplas excitações.....	141
Tabela 5.41 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa dois pontos de medição.....	143
Tabela 5.42 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa dois pontos de medição.....	145
Tabela 5.43 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa duas forças.....	147
Tabela 5.44 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa duas forças.....	149

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{a}	vetor de coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n ou coordenadas generalizadas
a_y	aceleração linear na direção y [m/s^2]
a_a	aceleração angular [rad/s^2]
b	largura da seção transversal retangular da estrutura [m]
c	velocidade do som ou velocidade de fase para ondas acústicas em fluidos [m/s]
dm	massa de uma partícula infinitesimal do fluido [kg]
e	variável altura da estrutura [m]
e^*	altura modificada da estrutura [m]
e_l	altura do elemento finito estrutural l
f	função objetivo
\mathbf{f}	vetor de excitação no sistema acoplado[N]
\mathbf{f}_s	vetor da força de excitação atuando na estrutura[N]
\mathbf{f}_f	vetor da força de excitação atuando no fluido[N]
$\mathbf{f}_{s\Gamma}$	vetor de forças de superfície atuando na estrutura[N]
\mathbf{f}_{sB}	vetor de forças de volume atuando na estrutura[N]
f_Γ	função de \mathbf{x} , ou constante ou zero no contorno $\Gamma \in \Omega$
f_Ω	função de \mathbf{x} , ou constante ou zero no domínio Ω
f	função objetivo
g	Restrição
k	Constante
n	número parcial de modos acoplados
\hat{n}	direção normal exterior à estrutura
\mathbf{n}_s	vetor das funções de forma na estrutura
\mathbf{n}_f	vetor das funções de forma no fluido
\mathbf{p}	vetor de pressão nodal no domínio fluido[Pa]
\tilde{p}	solução aproximada do campo de pressões locais do fluido[Pa]
p	variação de pressão ou pressão acústica em qualquer ponto[Pa]
p_l	pressão instantânea num ponto[Pa]
p_0	pressão de equilíbrio constante no fluido[Pa]

q	carregamento transversal por unidade de comprimento[N/m]
r_k	k -ésima variável de projeto
r	raio de curvatura[m]
u, u_y	deflexão da curva elástica[m]
\mathbf{u}	vetor de variáveis dependentes, resposta do sistema
$\tilde{\mathbf{u}}$	solução aproximada de \mathbf{u}
\mathbf{u}_f	vetor de pressão do domínio fluido[Pa]
\mathbf{u}_s	vetor de deslocamento nodal da estrutura[m]
$\tilde{\mathbf{u}}$	solução aproximada do campo de deslocamento transversal estrutural[m]
\mathbf{v}	vetor velocidade de uma partícula[m/s]
$v_{\hat{n}}$	velocidade do fluido na direção normal \hat{n} [m/s]
\mathbf{w}_s	vetor das funções de ponderação na estrutura
\mathbf{w}_f	vetor das funções de ponderação no fluido
x	parâmetro do projeto
\mathbf{x}	vetor de variáveis independentes, por exemplo as coordenadas nodais
x_l	contorno inferior de x
x_u	contorno superior de x
A	área da seção transversal da estrutura[m ²]
A_T	área do elemento finito triangular[m ²]
B	operador diferencial no contorno $\Gamma \in \Omega$
D	operador diferencial no domínio Ω
E	módulo de Young ou de elasticidade[N/m ²]
F_y	força no eixo y [N]
\mathbf{F}	vetor de amplitude da excitação do sistema acoplado
F_s	amplitude da força de excitação f_s [N]
H	altura de uma cavidade acústica retangular[m]
\mathbf{H}	matriz Hessiana da função Lagrangeana
I, I_z	momento de inércia de área relativo ao eixo z [m ⁴]
\mathbf{K}	matriz de rigidez do sistema acoplado
\mathbf{K}_{ff}	matriz volumétrica da energia cinética do domínio fluido
\mathbf{K}^*	matriz de rigidez do sistema acoplado modificado
\mathbf{K}_{sf}	matriz com os termos de acoplamento
\mathbf{K}_{ss}	matriz de rigidez da estrutura

L_k	comprimento do elemento estrutural k [m]
L_T	comprimento total da viga[m]
M	matriz de massa do sistema acoplado
M_{ff}	a matriz de inércia ou compressibilidade do domínio fluido
M_{fs}	matriz com os termos de acoplamento
M^*	matriz de massa do sistema acoplado modificado
M_{ss}	matriz de massa do domínio estrutural
\bar{M}	momento fletor prescrito[N.m]
M, M_z	momento fletor na direção do eixo z [N.m]
N	número total de coordenadas nodais incógnitas ou modos do sistema
N_s	número de graus de liberdade da estrutura
N_f	número de graus de liberdade do domínio fluido
P_B	variável que envolve as forças de corpo no fluido[Pa/m ²]
Q	massa de um disco não estrutural[kg]
R_i	resíduo ponderado i
R_Γ	resíduo no contorno Γ
R_Ω	resíduo no domínio Ω
U	vetor de amplitude da resposta do sistema acoplado
U_s	componente estrutural do vetor de amplitude da resposta
U_f	componente no domínio fluido do vetor de amplitude da resposta
V	força de cisalhamento transversal [N]
\bar{V}	força de cisalhamento transversal prescrita [N]
Z	matriz de impedância do sistema acoplado
\aleph	função ponderadora
∇	operador gradiente
∇^2	operador laplaciano
ρ	parâmetro de penalidade
L	função lagrangeana
α	comprimento do passo
ϵ_x	deformação na direção do eixo x
q	inclinação da curva elástica[rad]
ϑ	volume constante da estrutura[m ³]

k	constante arbitrária
$\lambda_j^{(DF)}$	j -ésimo autovalor predito do projeto modificado via diferenças finitas
$\lambda_j^{(R)}$	j -ésimo autovalor predito do projeto modificado via quociente de Rayleigh
λ_j^*	j -ésimo autovalor do projeto modificado
l	autovalor do sistema acoplado[rad ² /s ²]
l_j	j -ésimo autovalor do sistema acoplado[rad ² /s ²]
m	parâmetro de mudança dado
ρ_f	densidade do fluido, ou densidade instantânea num ponto[kg/m ³]
r_{f0}	densidade de equilíbrio constante do fluido[kg/ m ³]
r_s	densidade da estrutura[kg/m ³]
s_{\max}	tensão normal máxima no eixo x [N/m ²]
σ_x	tensão normal longitudinal no eixo x [N/m ²]
σ_{ij}	tensão normal na face i de um cubo atuando na direção j [N/m ²]
ζ	Condensação
τ_{ij}	tensão cisalhante na face i de um cubo atuando na direção j [N/m ²]
ν	multiplicador de Lagrange
f	autovetor à direita ou simplesmente autovetor do sistema acoplado
f_j	j -ésimo autovetor a direita do sistema acoplado
f_{fj}	componente de f_j relativo à u_f
f_{sj}	componente de f_j relativo a u_s
f_j^*	j -ésimo autovetor do projeto modificado
ϕ_j	j -ésimo autovetor a direita do sistema acoplado
$\bar{\phi}_j$	j -ésimo autovetor a esquerda do sistema acoplado
$\bar{\phi}_j^*$	j -ésimo autovetor a esquerda do projeto modificado
$\bar{\phi}_j^{(DF)}$	j -ésimo autovetor a esquerda predito do projeto modificado via DF
w	frequência[Hz]
Γ_I	superfície de interface
Γ_{SL}	superfície livre do fluido
Γ_{PR}	superfície de parede rígida
Δe	variação da altura da estrutura[m]
Δm	massa do elemento diferencial da viga[kg]

ΔJ	diferencial de momento de inércia de massa[$\text{kg}\cdot\text{m}^2$]
Δr	variação da variável de projeto r
Δr_k	variação da k -ésima variável de projeto ou controle r
Δx	diferencial de comprimento no eixo x [m]
\mathbf{A}	matriz diagonal de autovalores do sistema acoplado
\mathbf{A}_s	matriz de autovalores do sistema desacoplado estrutural
\mathbf{A}_f	matriz de autovalores do sistema desacoplado fluido
\mathcal{E}	módulo de compressibilidade adiabático[N/m^2]
Υ	função mérito
Φ	matriz de autovetores a direita do sistema acoplado
Φ_s	submatriz de Φ em relação a \mathbf{u}_s
Φ_f	submatriz de Φ em relação a \mathbf{u}_f
Ψ_s	matriz de autovetores do sistema desacoplado estrutural
Ψ_f	matriz de autovetores do sistema desacoplado fluido
Ω_f	domínio fluido
Ω_s	domínio estrutural
$(\)$	diferenciação de $(\)$ em relação ao tempo (ordem segundo a quantidade de pontos)
$(\)'$	derivada de $(\)$ em relação a variável estrutural
$(\)^*$	valor de $(\)$ no projeto modificado
$(\)^{(m)}$	solução de $(\)$ na m -ésima iteração
$\ \ \ $	norma de uma matriz ou de um vetor
$(\)$	valor prescrito de $(\)$
$(\)\tilde{\ }$	valor aproximado de $(\)$
$(\)^{(DF)}$	cálculo de $(\)$ utilizando o método de diferenças finitas em avanço
$(\)^{(R)}$	cálculo de $(\)$ utilizando o método do quociente de Rayleigh

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BFGS	Fórmula de B royden- F letcher- G oldfarb- S hanno
<i>DF</i>	Método de diferenças finitas
DFR	Resposta em frequência direta (D irect F requency R esponse)
KT	Equações de Kuhn-Tucker
MEF	Método dos elementos finitos
MFR	Resposta em frequência modal (M odal F requency R esponse)
NP	Programação não linear (N onlinear P rogramming)
QP	Programação quadrática (Q uadratic P rogramming)
<i>R</i>	Quociente de Rayleigh
SPL	Nível de pressão do som (S ound P ressure L evel)
SQP	Programação quadrática seqüencial (S equencial Q uadratic P rogramming)

1. INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Graças aos avanços tecnológicos verificados nos últimos anos na área de informática e processamento de dados, que vem aumentando a velocidade dos processadores assim como a quantidade de memória disponível para análises de dados, hoje já é possível implementação de análises numéricas complexas, que no passado não eram viáveis de serem implementadas devido ao seu custo computacional. Desta forma muitas técnicas numéricas desenvolvidas no passado para análises estruturais, acústicas ou vibroacústicas, que antes só poderiam ser aplicadas em análises de sistemas simples devido à limitação técnica como capacidade de memória e processamento dos computadores disponíveis no passado, agora podem ser aplicadas a análises mais complexas e se aproximando mais de aplicações práticas, Marburg (2002).

Um dos muitos métodos e algoritmos desenvolvidos nos últimos 40 anos, que antes tinham a sua aplicação limitada devido aos recursos computacionais disponíveis, é a análise da resposta de sistemas acoplados fluido-estrutura, Marburg (2002). Sistemas fluido-estrutura do tipo vibroacústico são formados por uma estrutura mais um fluido, sendo este um gás, onde há uma interação entre o fluido e a estrutura, ou seja, a estrutura tem um efeito sobre a resposta dinâmica do fluido e o fluido tem um efeito sobre a resposta dinâmica da estrutura, Pierro et al. (2009). Esses efeitos de acoplamento, normalmente, se tornam mais evidentes quanto maior a flexibilidade de estrutura, quanto mais próximas às frequências naturais do fluido e da estrutura estão, e quando a massa do fluido tem influência significativa na massa do conjunto (estrutura mais fluido). Sistemas vibroacústicos possuem normalmente um forte acoplamento entre fluido e estrutura, isso quer dizer que a resposta do sistema a excitações, frequências naturais e outras propriedades dependem da interação do fluido e da estrutura, sendo uma fonte de erro considerar os dois sistemas separados. Por outro lado, a análise da resposta de um sistema acoplado tem um custo computacional elevado devido à natureza não linear das funções geradas, Marburg (2002).

O estudo do acoplamento sistemas fluido-estrutura é de interesse de diversas áreas da Engenharia conforme Étienne et al. (2005), pois isto permite prever o comportamento do sistema, como exemplo pode ser citado as cabines de automóveis, onde excitações,

transmitidas pelo motor ou por irregularidades da estrada onde se trafega, acabam transmitindo uma excitação à estrutura da cabine que a transmite para o fluido dentro da cabine, no caso, ar. Estas excitações acabam gerando uma resposta dinâmica no fluido, em certos pontos esta resposta será percebida pelo condutor como um ruído. Sendo assim, a análise da resposta do sistema permite prever o nível de ruído gerado dentro da cabine, verificar se é aceitável, e proceder com as modificações necessárias quando este ruído não é aceitável. Tudo isto sem a necessidade de construção de um modelo físico, gerando uma redução no custo e no tempo de desenvolvimento do projeto, Duhiring et al. (2008).

Deste modo, a implementação e aprimoramento de algoritmos para estudo da resposta em frequência de sistemas vibroacústicos permite ter um modelo numérico mais acurado e representativo de sistemas reais. Porém apenas a análise da resposta em frequência já não é suficiente, é necessário desenvolver técnicas que permitam definir as modificações a serem feitas em sistemas de forma que possamos atingir os objetivos desejados. Usando novamente a cabine de um veículo como exemplo, apenas saber que a pressão sonora em um ponto será alta e não aceitável não é suficiente, é necessário saber como modificar o projeto para que esta pressão sonora seja diminuída. Estas técnicas para alterar as variáveis de projeto para atingir a melhor resposta de um sistema são conhecidas como processos de otimização, Marburg (2002) e Duhiring et al. (2008).

Também os algoritmos de otimização tiveram suas implementações viabilizadas para sistemas mais complexos e reais graças à evolução computacional dos últimos anos. Processos de otimização normalmente são iterativos, o que acaba acarretando em um custo computacional elevado, principalmente em sistemas complexos e quando cálculos numéricos também complexos estão envolvidos, porém estes custos agora não inviabilizam relativamente o desenvolvimento destes algoritmos para sistemas complexos e reais e por isto esta área vem sendo alvo de pesquisa nos últimos 25 anos, Marburg (2002). Principalmente nos dias atuais, onde recursos como energia, espaço e recursos naturais como petróleo e minérios vem se tornando mais escassos e caros, há uma pressão da sociedade para que os produtos sejam cada vez mais eficientes de modo que consumam menos recursos, por outro lado há igual pressão para que estes recursos se tornem cada vez mais úteis e confortáveis de forma a facilitar a vida das pessoas. No caso da resposta vibroacústica, ela é uma importante fonte de poluição sonora e desconforto, vale ressaltar que esta poluição vem se tornando ao longo dos anos um dos grandes problemas em relação à saúde humana, pois é fonte de diversas doenças, entre elas o estresse. Estes são os motivos pelo qual ao longo dos anos vem

se buscando algoritmos de otimização da resposta em diversos sistemas de engenharia, a exemplo dos sistemas vibroacústicos.

1.2 Sistemas vibroacústicos e otimização numérica

A grande importância do desenvolvimento de trabalhos na área de otimização de sistemas vibroacústicos vem do fato que, apesar da existência de muitos programas comerciais para simulações numéricas, eles normalmente não oferecerem modelos de interação fluido-estrutura devido à necessidade de computadores poderosos e engenheiro habilidosos para fazerem o modelamento, Mossou (2005). Desta forma também existem poucos programas comerciais que oferecem a otimização de sistemas fluido-estrutura.

Diversos estudos mostraram que dependendo das funções a serem otimizadas e das variáveis a serem modificadas, diferentes técnicas podem ser empregadas de forma a se obter um resultado de forma mais rápida e com variáveis mais otimizadas, ou seja, infelizmente ainda não há um procedimento único para análise e otimização vibroacústicas que seja útil para qualquer aplicação, assim cada caso deve ser estudado individualmente, Marburg (2002).

Em relação à otimização vibroacústicas, muitas variáveis são fontes de estudo para serem minimizadas ou maximizadas, entre as principais podemos citar a otimização de: peso, pressão sonora, resposta em frequência, frequências naturais, etc. Estas otimizações podem ser feitas através de uma série de modificações aplicadas na estrutura, sendo as mais importantes modificações da secção, espessura, adição de massas, rigidez, etc. Todas estas modificações têm efeitos maiores ou menores dependendo da variável que se pretende otimizar, Marburg (2002).

As variáveis de projeto servem de entrada para as funções objetivo que avaliam e julgam as propriedades desejadas e alteradas; avaliar uma cavidade acústica, por exemplo a cabine de um veículo, através de uma função objetivo em termos pressão sonora de apenas um ponto pode resultar em valores muito baixos nesse ponto, mas ao mesmo tempo em valores muito altos para outros pontos. É possível considerar um ponto ou poucos pontos de avaliação se considerar que a variação da função objetivo é desprezível em relação ao ponto a ser avaliado, Duhiring et al. (2008).

Na otimização é sempre mais fácil otimizar estruturas simples. Estruturas complexas são normalmente influenciadas por um grande número de modos de vibração que causam diversos efeitos localizados de mínimos e máximos, o que leva a otimização a convergir de

forma lenta, nestes casos técnicas de aproximação são muito apropriadas. É importante ressaltar que em sistemas complexos um ganho de pequena escala pode significar um resultado muito mais significativo do que um grande ganho em sistemas simples.

Da mesma forma as variáveis a serem modificadas costumam ter efeitos locais, o que dificulta grandes ganhos em relação à estrutura original. A otimização tende a ter ganhos maiores quando menos modos de vibração estão envolvidos. Outro ponto a ser considerado é que apesar do interesse em encontrar a resposta mais otimizada possível é importante que esta resposta também seja robusta de forma que pequenas variações das variáveis não comprometam o resultado encontrado, afinal é necessário sempre considerar que em aplicações reais as variáveis não terão um valor fixo, mas sim um valor dentro de uma faixa de tolerância. Outro importante resultado que diversos trabalhos apresentam é que o uso de métodos modais como base para os cálculos de otimização apresentam bons resultados desde que os modos de vibração considerados não saiam dos limites das frequências que se está analisando. Marburg (2002).

Outro ponto de interesse, mas pouco explorado é a otimização multiobjetivo. Uma das técnicas para este caso é a escolha de uma variável mais importante como sendo o objetivo e utilizar as outras variáveis que se deseja minimizar como restrições, Marburg (2002).

1.3 Definição do problema

A análise e otimização numérica da resposta em sistemas vibroacústicos é um tema de atual interesse das diversas áreas da Engenharia, visto que ele pode ser aplicado em situações como a cabine de veículos. A utilização do algoritmo mais adequado na otimização da resposta deste tipo de sistemas representa um problema numérico em aberto, uma vez que possibilitará a redução do custo e tempo de desenvolvimento de projeto, evitando a construção de modelos físicos para testes e análises antes dos mesmos estarem fabricados.

1.4 Objetivos da pesquisa

Este trabalho é desenvolvido com o objetivo principal de:

- Desenvolver e implementar algoritmos para otimização da pressão sonora de sistemas acoplados vibroacústicos em três dimensões baseado na equação:

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{GDLin} \sum_{l=1}^n \phi_{il} \left(\frac{1}{\lambda_l - \omega_j^2} \right) \bar{\phi}_{kl} F_k \quad (1.1)$$

Onde U_{ij} é a resposta em frequência, no caso deste trabalho a pressão sonora, em um ponto i de medição, resultante de uma força excitatória aplicada a um ponto da estrutura, chamado de grau de liberdade de entrada ($GDLin$), com uma frequência de excitação ω_j obtida através do método de superposição modal acoplado para n modos de modo que ϕ_{il} é a componente i do autovetor à direita l , λ_l é o autovalor l , $\bar{\phi}_{kl}$ a componente k do autovetor à esquerda l , sendo que todas estas componentes são função da variável de projeto, no caso deste trabalho a espessura dos elementos de placa fina usados para discretizar o domínio estrutural.

Os objetivos secundários do trabalho são:

- Verificação de desempenho da análise da resposta
- Comparação entre os algoritmos de Programação Quadrática Sequencial (SQP) e Genético na otimização da resposta

1.5 Organização do trabalho

O trabalho encontra-se dividido em sete capítulos.

O *Capítulo 1* define e justifica o problema a ser tratado neste trabalho, os objetivos que se pretendem atingir, e a organização da metodologia que foi utilizada.

O *Capítulo 2* disponibiliza a revisão bibliográfica, envolvendo diferentes trabalhos e estudos desenvolvidos ao longo dos anos sobre o tema deste trabalho, procedimentos, técnicas e aplicações em diversos casos de estudo.

O *Capítulo 3* apresenta a fundamentação teórica requerida para a modelagem estrutural, acústica e interação vibroacústica.

O *Capítulo 4* tem por finalidade desenvolver os princípios essenciais da análise de resposta e otimização.

O *Capítulo 5* apresenta resultados de diversos estudos de caso cujos resultados obtidos foram comparados com resultados analíticos, obtidos em outros trabalhos ou em programas comerciais quando possível.

O *Capítulo 6* apresenta as conclusões gerais obtidas, assim como sugestões para o desenvolvimento de futuros trabalhos na área.

O *Capítulo 7* lista as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo se apresenta uma revisão da literatura com o objetivo de conhecer os diferentes estudos relacionados ao tema da pesquisa, inclusive com a finalidade de auxiliar na justificativa do tema e na definição do problema, na determinação dos objetivos e na construção de hipóteses de solução, se for o caso.

2.1 Modelagem fluido-estrutura

A seguir são apresentadas algumas pesquisas recentes realizadas na modelagem da interação fluidos estrutura, com a finalidade de identificar os avanços, embasar e contribuir ao desenvolvimento das hipóteses do trabalho.

Um método variacional cinemático em sistemas lineares conservativos de interação fluido-estrutura é proposto por Moussou (2005), baseado no conceito de fluido adicionado, que estabelece o deslocamento do fluido de forma implícita ou explícita associado com o deslocamento estrutural numa abordagem mecânica pura, Figura 2.1. Mostra-se que os modos naturais acoplados podem ser deduzidos a partir dos modos desacoplados através de um procedimento envolvendo matrizes de rigidez e de massa simétricas. Alguns indicadores da resistência do acoplamento são fornecidos: um sistema pode ser fortemente acoplado se a sua rigidez ou massa adicionada são grandes, ou se um dos modos acústicos coincide com um modo estrutural. Afirma-se também que sistemas fracamente acoplados podem ser expostos a grandes variações dos seus níveis de vibração se suas frequências naturais desacopladas coincidem, enquanto o comportamento de sistemas fortemente acoplados depende menos nos valores das frequências desacopladas.

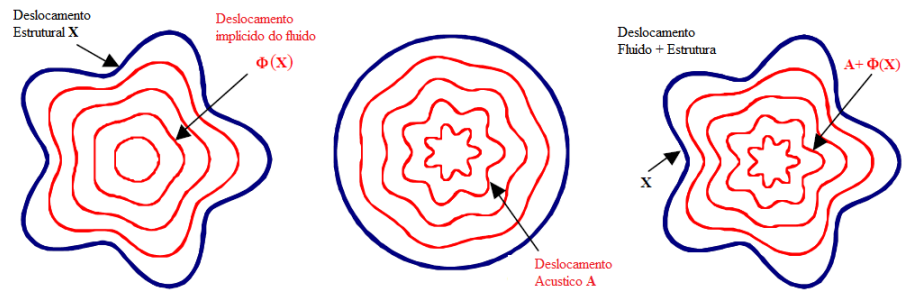


Figura 2.1 Teste Modo estrutural (A), acústico (B) e acoplado (C) de um cilindro contendo fluido.

Fonte: adaptada P. Moussou (2005).

Marburg (2002), analisa 344 estudos já desenvolvidos na área de análise vibroacústica assim como otimização vibroacústica. Neste trabalho é possível encontrar análises e referências comentadas de mais de trezentos trabalhos já realizados na área. Ele reúne uma série de considerações sobre análise estrutural, análise acústica, interação fluido estrutura, funções objetivo, análise de sensibilidade, técnicas especiais, otimização vibroacústica, variáveis de projeto, restrições, métodos e estratégias de otimização, conceitos de aproximação, análise sobre resultados já encontrados e sugestões de problemas a serem desenvolvidos, além de uma vasta referência bibliográfica.

Os métodos que utilizam elementos finitos costumam apresentar erros em altas frequências, erros que não ocorrem quando utilizados elementos de contorno para avaliação de altas frequências, porém este método é muito mais complicado quando se tem frequências naturais irregulares. Conforme Marburg e Nolte (2008) as frequências naturais irregulares ocorrem quando o método de elementos de contorno resolve os problemas interior e exterior ao mesmo tempo em uma equação integral combinada, sendo compreensível que a solução exterior falhe quando o domínio interior se torna acusticamente ressonante em suas frequências naturais associadas às condições de contorno especificadas. Como este trabalho será focado em otimizações de frequências de excitações menores que 3000 Hz frequências operacionais, a utilização de elementos finitos é justificada.

Outro ponto importante é que a utilização de métodos diretos para resolver cada frequência resulta em um grande custo computacional, principalmente quando aplicado em um intervalo grande de frequências. Uma alternativa para diminuir o custo computacional é a utilização de métodos modais, que envolvem a resolução de autovalores e autovetores de matrizes simétricas ou assimétricas. Como o modelo matemático de um sistema com interação

fluido-estrutura é um modelo bastante complexo, a utilização de métodos modais torna-se muito desejável para que as simulações não sejam caras e as análises não se tornem muito longas, principalmente quando se deseja realizar ciclos de otimização, por isso este trabalho se focará em métodos modais.

Os métodos mais usados para sistemas com interação fluido-estrutura normalmente envolvem o deslocamento como variável estrutural; porém variáveis como pressão, pressão sonora, potência sonora e potencial de velocidade e de deslocamento, são usadas para descrever o fluido. Dependendo da combinação das variáveis a formulação final pode resultar em matrizes de massa e de rigidez simétricas ou não simétricas. A combinação dessas variáveis depende fortemente do problema a ser resolvido, pois há performances melhores ou piores dependendo do caso em estudo.

Mitra e Sinhamahapatra (2008), apresentam o desenvolvimento de uma formulação e um procedimento para resolução de sistemas de duas dimensões considerando a interação fluido estrutura. A parte estrutural é discretizada usando elementos de barra de Bernoulli e o fluido é discretizado através de elementos finitos retangulares. As variáveis consideradas são deslocamento para o domínio estrutural e pressão para o domínio fluido. O método de resíduos ponderados de Galerkin é empregado. A pesquisa é aplicada ao problema de *sloshing*, que é o movimento livre da superfície de líquidos, em um reservatório retangular. A pressão hidrodinâmica tende a se amplificar e sua distribuição difere do correspondente reservatório rígido, desenvolvendo um momento de flexão maior nas paredes do reservatório. O movimento de *sloshing* também se amplifica com o incremento da flexibilidade das paredes.

Pierro et al. (2009), apresentam uma formulação de decomposição modal para análise modal operacional vibroacústica com foco na forma analítica do espectro de potência cruzada entre as saídas do sistema quando o acoplamento fluido-estrutura está presente. Os espectros de potência cruzada entre as velocidades de saída estrutural e a resposta acústica do microfone dentro da cabine de um helicóptero são consideradas como entradas de uma análise modal operacional. Equações não simétricas no deslocamento da estrutura e pressão do fluido são utilizadas no equacionamento dinâmico da interação fluido-estrutura.

Sigrist e Garreau (2007) discutem formulações simétricas e não simétricas que vem sendo implementadas em diversos programas computacionais, comentam formulações não simétricas que aparecem quando do acoplamento deslocamento da estrutura - pressão do fluido (u, p) são usadas. Formulações simétricas podem ser derivadas através do acoplamento entre deslocamento da estrutura com deslocamento do fluido (u, ζ) ou pressão e potencial de

deslocamento do fluido (u, p, φ). A Tabela 2.1 mostra alguns códigos disponíveis com sua formulação de acoplamento e método de resolução. Os autores também implementaram desenvolvimentos numéricos no código de elementos finitos ANSYS com a finalidade de realizar análise dinâmica em sistemas fluido-estrutura acoplados com uma formulação baseada na pressão, usando métodos modais e espectrais. As possibilidades de modelagem do código são ampliadas com a implementação das formulações simétricas (u, p, φ) e (u, η, φ) para problemas elastoacústicos e hidroelásticos. A validação dos desenvolvimentos é exposta no código, com foco no cálculo de massa efetiva para automodos acoplados.

Tabela 2.1 Análise por métodos direto e modal e modelamento da interação fluido-estrutura com vários códigos de elementos finitos

Código do Elemento Finito	Formulação de acoplamento	Método direto	Método modal
ABAQUS	(u, p, φ)	x	x
ASTER	(u, p, φ)	x	x
CASTEM	(u, p, φ)	x	x
SAMCEF	(u, p, φ)	x	x
PERMAS	(u, p)	x	x
ANSYS	(u, ξ)	x	x
ANSYS	(u, p)	x	o

Fonte: adaptada de Sigrist e Garreau (2007).

2.2 Análise de resposta e otimização de sistemas fluido-estrutura

Dühring et al. (2008), propõem um método para a redução de ruído através de uma otimização topológica. O campo acústico é modelado conforme a equação de Helmholtz e a otimização topológica é baseada nas funções de interpolação de material contínuo na densidade e no módulo de compressibilidade. A função objetivo é a amplitude da pressão sonora quadrática. Uma das restrições usadas é o volume. O sistema é discretizado e resolvido através de métodos de elementos finitos. Análises de sensibilidade são necessárias para o algoritmo de otimização. Para os modelos 2D se utilizam elementos triangulares e para modelos 3D elementos tetraédricos. Para as análises um amortecimento proporcional à massa foi considerado na estrutura, porém não é considerado efeito de amortecimento no ar.

A fonte de excitação é gerada dentro do domínio acústico, Figura 2.2, e a otimização é feita através da distribuição de materiais absorvedores ou refletivos ao longo das paredes do

domínio estrutural. Outro tipo de otimização do ruído é realizada através do uso de barreiras no interior do fluido. Para ambos os casos modelos 2D e 3D são otimizados para uma única frequência ou para várias frequências .

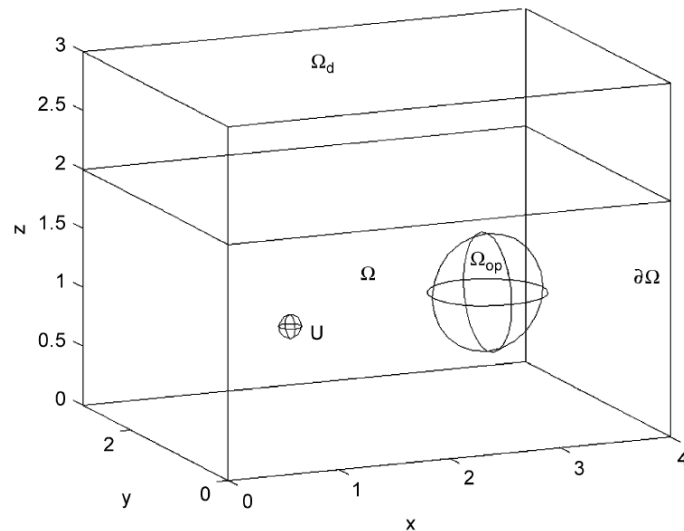


Figura 2.2 Velocidade vibracional de excitação U e ponto de medição Ω_{op} .

Fonte: adaptada de Duhring et al. (2008).

A pesquisa cita que a diminuição do tamanho do elemento finito usado na malha em geral resulta em perfis e detalhes muito pequenos que são difíceis de serem fabricados. Porém, para altas frequências um design bem definido, sem pequenos detalhes, é mais complexo de ser obtido, uma vez que a análise de sensibilidade é muito dependente do tamanho da malha. Em altas frequências as amplitudes da pressão sonora se tornam mais complexas e perfis e detalhes pequenos passam a ter mais influência, sendo necessárias malhas menores.

As considerações apresentadas por Leite e Topping (1998), sobre otimização estrutural utilizando algoritmos genéticos foram utilizadas neste caso. As vantagens do algoritmo Genético vem do fato de ele ser um método estocástico que permite trabalhar com funções descontínuas ou não lineares, não convexas, multimodal, entre outras, nas quais a otimização dificilmente será obtida com métodos determinísticos, pois estes métodos dependem do cálculo de gradientes e derivadas, o que pode tornar o custo computacional muito alto. Por outro lado, para problemas mais simples a utilização de algoritmos genéticos não se justifica uma vez que eles são menos eficientes que os métodos determinísticos para estes casos. Quando existe um grande espaço para procura de variáveis, os métodos determinísticos também tendem a ser computacionalmente caros. Mesmo sendo o algoritmo Genético

estocástico e um algoritmo de aproximação, ele vem sendo aplicado em diversos problemas de engenharia, pois na prática, respostas aproximadas da solução ótima são normalmente bem aceitas.

Um importante ponto para o sucesso de algoritmo Genético é sua aleatoriedade, ele é um algoritmo probabilístico, que combina elementos estocásticos com procura direta, é flexível e tem capacidade de trabalhar com sistemas complexos, ele combina de forma balanceada a procura por novas respostas no espaço delimitado com o refinamento de boas soluções encontradas. Outro ponto importante para o sucesso do método é uso de funções de penalização para administrar as restrições impostas ao sistema, eliminar diretamente cromossomos por violar uma restrição pode trazer dificuldades ao programa explorar o espaço de respostas. Assim adota-se o sistema de penalização para as restrições, porém deve-se ter cuidado para não privilegiar de forma muito forte os melhores cromossomos, pois faz a resposta convergir rapidamente, mas diminui a exploração do universo de respostas, podendo fazer o algoritmo convergir para mínimos locais. Por outro lado não privilegiar os melhores melhora a exploração, mas diminui a velocidade de convergência e pode, eventualmente, não convergir. Determinar uma função para a penalização, de forma a atingir os melhores resultados, mostra-se o grande desafio desta estratégia, penalizar fortemente violações aumentam a convergência, mas diminuem a capacidade de exploração, penalizar de forma branda aumenta a capacidade de exploração, mas diminui a convergência. Outra maneira proposta para melhorar a obtenção das respostas é sempre garantir a presença dos melhores cromossomos encontrados em cada sorteio na geração seguinte, isto evita que este cromossomo desapareça nos sorteios e não possa mais ser gerado.

A mutação também serve como um método de exploração fazendo com que os cromossomos movam-se para outros pontos. Valores muito altos para a probabilidade de mutação aumentam a exploração, mas dificultam a convergência da resposta. As mutações tendem a ser muito úteis nos estágios iniciais do algoritmo, mas indesejados nos estágios finais quando este está convergindo para um valor de resposta. Uma maneira de melhorar o desempenho das mutações é utilizar uma taxa variável de mutação, assim a mutação terá probabilidades maiores de ocorrer no começo da otimização e menores no final.

Leite e Topping (1998), também relatam que o número de pontos de recombinação dos cromossomos não tem influência significativa na resposta, ou seja, recombinar em dois pontos tem praticamente o mesmo efeito que recombinar em três, quatro ou mais pontos.

Um ponto de divergência entre a evolução natural e a evolução desejada na engenharia é o fato de na natureza os processos genéticos procuram gerar uma série de indivíduos bem

adaptados ao invés de buscar superindivíduos, já na engenharia o interesse é encontrar superindivíduos.

2.3 Desenvolvimentos analíticos, aplicações e testes em sistemas fluido-estrutura

Apesar de haver muitas pesquisas desenvolvidas na área de análise e otimização vibroacústica, poucas publicações apresentam comparações entre os resultados obtidos pelo modelamento matemático proposto, resultados analíticos e experimentais.

Marburg et al. (2002) constrói um modelo físico de uma caixa composta por chapas finas de diferentes espessuras e barras de secção retangular foi construído. No seu interior o fluido é ar. A caixa foi instrumentada de forma a permitir a coleta de dados tanto do domínio acústico quanto do domínio estrutural. Após a construção do modelo físico, um modelo matemático da caixa foi idealizado para a simulação, as barras da caixa foram modeladas com elementos finitos de viga de Bernoulli, as chapas foram modeladas com elementos finitos tipo chapa plana fina e o fluido foi modelado com elementos de contorno. A Figura 2.3 mostra uma foto do modelo físico construído e a modelagem do modelo usado na simulação.

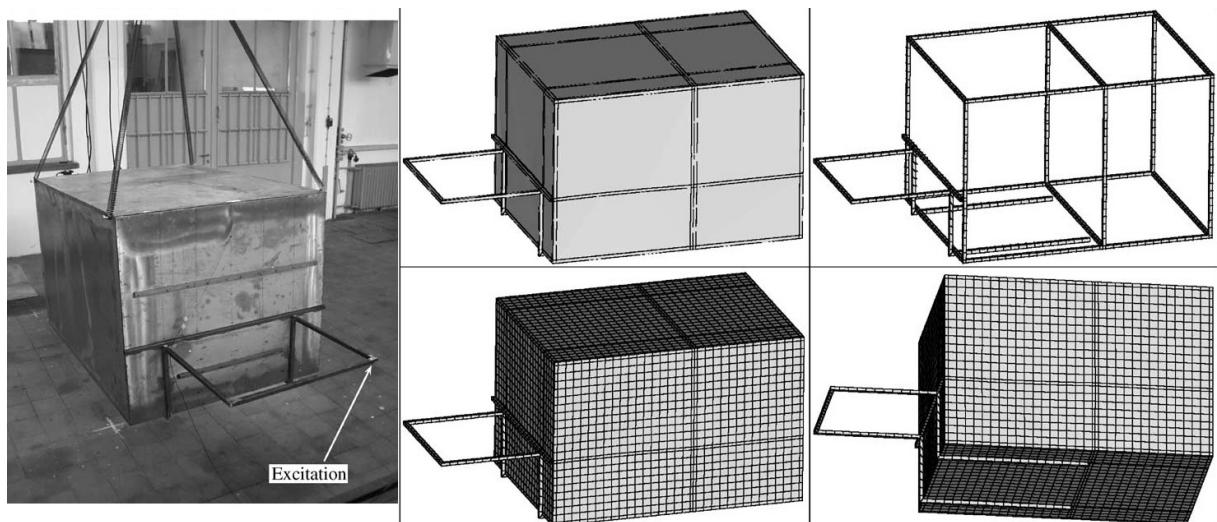


Figura 2.3 Modelo físico e numérico de uma caixa.

Fonte: adaptada de Marburg et al. (2002).

É importante ressaltar que a concepção do modelo físico não foi feita de forma aleatória, além de a caixa ser um modelo simples, as barras utilizadas nas arestas da caixa causam um aumento na rigidez.

Primeiramente as frequências naturais e modos de vibração da caixa construída foram calculados através de métodos numéricos usando técnicas modais propostas pelo autor, depois foram feitas medições no modelo físico. Tanto o cálculo como o experimento demonstraram que para baixas frequências apenas uma chapa contribui para cada modo de vibração, enquanto as altas frequências são caracterizadas por modos globais, estes modos globais são mais difíceis de ajustar entre o modelo experimental e o numérico. Os resultados encontrados na análise modal e no experimento apresentaram uma boa concordância, de 24 frequências naturais previstas pelo cálculo apenas a oitava frequência não pode ser observada no modelo físico. Os valores das frequências naturais medidas e calculadas também apresentaram valores próximos uns dos outros, o que os autores consideram como bom resultado.

O experimento também procedeu com a determinação da função de transferência estrutural, ou seja, o deslocamento da estrutura em um ponto devido à excitação de uma força unitária, neste caso foi possível verificar que a razão de amortecimento modal é menor que 1% tendendo a zero quando se aumenta os valores da frequência de excitação. Também foi calculada a função de transferência acústica para o fluido, ou seja, o nível de pressão sonora de um ponto dentro da caixa devido à excitação de uma força externa unitária. A função de transferência acústica foi o foco de otimização posterior.

Também é proposta a otimização da função de transferência acústica de um ponto preestabelecido através de um método de iteração aleatória. Para proceder à otimização, 4 barras adicionais foram acopladas na estrutura, 2 na chapa inferior e 2 na chapa frontal, a variável de modificação considerada foi a posição das barras em cada chapa. A adição de barras foi proposta para não necessitar a desmontagem ou destruição do modelo inicial, evitando que novas variáveis fossem adicionadas ao sistema, pois uma vez desmontada, é muito difícil garantir que depois da remontagem a caixa fique exatamente nas mesmas condições iniciais. Novamente uma boa concordância entre os resultados previstos pelo modelo numérico e os resultados experimentais foram encontrados.

O trabalho realizado por Marburg et al. (2002), traz uma grande contribuição no estudo de análise e otimização vibroacústica, uma vez que demonstra a aplicabilidade e a eficiência dos modelos matemáticos desenvolvidos em estudos teóricos, quando usados para analisar e otimizar sistemas reais vibroacústicos.

3. MODELAGEM DE SISTEMAS VIBROACÚSTICOS

3.1 Generalidades

Para ser possível a realização de análises e otimizações sobre sistemas reais, os mesmos devem ser modelados matematicamente. Com essa finalidade, por exemplo, discretiza-se o sistema através do método dos elementos finitos. A finalidade deste capítulo é apresentar o embasamento teórico tradicional e apresentado em diversas literaturas, necessário para o desenvolvimento de elementos finitos requeridos na modelagem dos sistemas estrutural, acústico e vibroacústico das aplicações deste trabalho. As formulações mostradas nos Itens 3.2 e 3.3 são baseadas nas formulações apresentadas por Pety (1998).

3.2 Formulação do sistema estrutural

3.2.1 Equações de movimento de Lagrange

Considera-se a Figura 3.1 para representar um sistema dinâmico massa, mola e amortecedor:

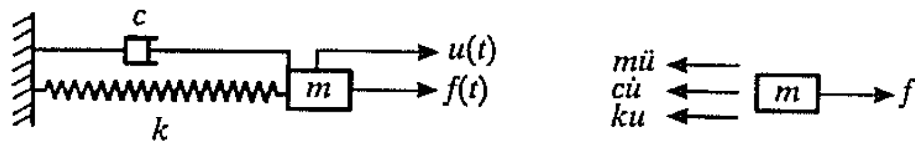


Figura 3.1 Sistema massa, mola e amortecedor.

Fonte: adaptada de Pety (1998).

Utilizando o princípio de Hamilton para descrever a dinâmica do sistema resulta,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta(T - U) + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (3.1)$$

A energia cinética, T , e a energia de deformação, U , são expressas como:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 = T(\dot{u}) \quad (3.2)$$

$$U = \frac{1}{2} k u = U(u) \quad (3.3)$$

O trabalho virtual δW_{nc} realizado por uma força não conservativa é dada por:

$$\delta W_{nc} = (f - c\dot{u})\delta u \quad (3.4)$$

Desta forma a equação (3.1) resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} - \frac{\partial U}{\partial u} \delta u + (f - c\dot{u}) \delta u \right) dt = 0 \quad (3.5)$$

Integrando o primeiro termo por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta u \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt \quad (3.6)$$

Considerando que $\delta u = 0$ para $t = t_1$ e $t = t_2$, o primeiro termo da equação (3.6) pode ser anulado, então:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.5) tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial U}{\partial u} + f - c\dot{u} \right) \delta u dt = 0 \quad (3.8)$$

Como δu é arbitrária:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial U}{\partial u} + c\dot{u} = f \quad (3.9)$$

Introduzindo a função de dissipação que representa a taxa de energia instantânea dissipada, como:

$$D = \frac{1}{2} c\dot{u}^2 \quad (3.10)$$

A força de amortecimento é dada por:

$$c\dot{u} = \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} \quad (3.11)$$

Substituindo a relação (3.11) na equação (3.9):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial U}{\partial u} = f \quad (3.12)$$

A equação (3.12) nada mais é do que a equação de Lagrange para um grau de liberdade. Inserido as equações (3.2), (3.3) e (3.10) na equação (3.12) a equação de movimento do sistema fica:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \quad (3.13)$$

No caso de vários graus de liberdade, a energia de deformação é função de n deslocamentos generalizados independentes, enquanto a energia cinética e a função de dissipação são funções de n velocidades generalizadas independentes:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (3.14)$$

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (3.15)$$

$$D = D(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \quad (3.16)$$

Então o trabalho virtual das forças não conservativas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\delta W_{nc} = \sum_{j=1}^n \left(Q_j - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \quad (3.17)$$

Sendo Q_j as forças generalizadas. Desta forma a equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

Utilizando a notação matricial, a energia cinética, a função de dissipação e a energia de deformação podem ser escritas como:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.19)$$

$$D = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.20)$$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.21)$$

Onde:

\mathbf{q} = vetor coluna dos deslocamentos do sistema

$\dot{\mathbf{q}}$ = vetor coluna das velocidades do sistema

\mathbf{M} = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de inércia

\mathbf{C} = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de amortecimento

\mathbf{K} = matriz simétrica quadrada dos coeficientes de rigidez

Usando as equações (3.19), (3.20) e (3.21) os termos das equações de Lagrange ficam:

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right\} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.22)$$

$$\left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} = \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right\} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.24)$$

Desta forma substituindo os ternos independentes (3.22), (3.23) e (3.24) na equação de Lagrange (3.18):

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = Q \quad (3.25)$$

3.2.2 Vibração por flexão de vigas

Para derivar as funções de um elemento de viga é considerado:

- 1 - A vibração ocorre apenas em um dos planos principais;
- 2 - A viga possui secção constante;
- 3 - O comprimento de onda é dez vezes maior que a secção transversal da viga;
- 4 - As componentes de tensão σ_y , σ_z , τ_{yz} e τ_{xz} são zero;
- 5 - Uma secção plana e normal à linha neutra da barra permanece plana e normal à linha neutra deformada após a aplicação de uma força.

Baseado nas considerações anteriores a teoria de vigas de Bernoulli pode ser aplicada. A Figura 3.2 mostra um elemento de viga com o sistema de coordenadas adotado.

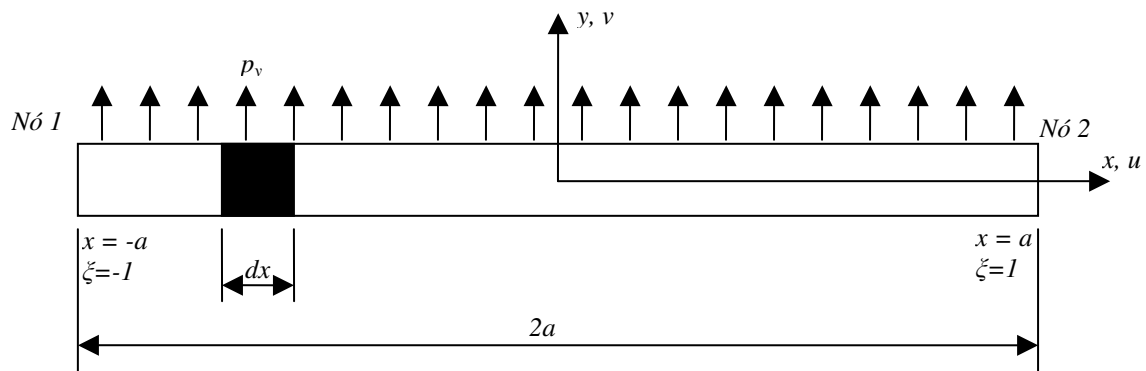


Figura 3.2 Elemento de viga

Fonte: adaptada de Pety (1998).

Com base neste sistema de coordenadas, o deslocamento axial u de um ponto a uma distância y do eixo centroidal da Figura 3.2 pode ser dado por:

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.26)$$

Onde:

$v = v(x)$ deslocamento do eixo centroidal na direção y na posição x . A deformação axial ε_x e de cisalhamento γ_{xy} são expressas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.28)$$

Baseado nas equações (3.27) e (3.28), a energia de deformação acumulada ou energia potencial elástica no elemento de viga é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x \, dv \quad (3.29)$$

A tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.30)$$

Substituindo a equação (3.30) na equação (3.29) tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_x^2 \, dV \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.27) na equação (3.31) e considerando que:

$$dV = dA \, dx \quad (3.32)$$

Tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^a EI_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.33)$$

Onde I_z é o segundo momento de área da secção transversal no eixo z e é dado por:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (3.34)$$

A energia cinética de um elemento diferencial dx é dada por:

$$T_y = \frac{1}{2} \dot{v}^2 \rho A dx \quad (3.35)$$

Integrando a equação (3.35), a energia cinética total do elemento é:

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \dot{v}^2 \rho A dx \quad (3.36)$$

Se uma carga distribuída p_y é aplicada como mostrado na Figura 3.2, então a força em um comprimento dx é $(p_y dx)$, e o trabalho num deslocamento virtual δv é $(\delta v p_y dx)$. Desta forma o trabalho virtual para todo o elemento de viga é dado por:

$$\delta W = \int_{-a}^a p_y \delta v dx \quad (3.37)$$

Considerando v e $\partial v/\partial x$ como graus de liberdade em cada nó do elemento de viga, o elemento mostrado na Figura 3.2 tem dois nós e quatro graus de liberdade. Assim, a função deslocamento pode ser representada pela equação polinomial com quatro constantes α_i .

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3 \quad (3.38)$$

A equação (3.38) pode ser escrita na forma matricial:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Ou:

$$v = \mathbf{P}(\xi) \boldsymbol{\alpha} \quad (3.40)$$

Diferenciando a equação (3.38) tem-se:

$$a\theta_z = a \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \alpha_2 + 2\alpha_3\xi + 3\alpha_4\xi^2 \quad (3.41)$$

Resolvendo as equações (3.15) e (3.18) para $\xi = \mp 1$, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ a\theta_{z1} \\ v_2 \\ a\theta_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

Que pode ser escrita da seguinte forma

$$\bar{\mathbf{v}}_e = \mathbf{A}_e \boldsymbol{\alpha} \quad (3.43)$$

O vetor $\boldsymbol{\alpha}$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_e^{-1} \bar{\mathbf{v}}_e \quad (3.44)$$

Onde:

$$\mathbf{A}_e^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A equação (3.44) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}_e \mathbf{v}_e \quad (3.46)$$

Onde:

$$\mathbf{v}_e^T = [v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}] \quad (3.47)$$

E:

$$\mathbf{C}_e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & a & 2 & -a \\ -3 & -a & 3 & -a \\ 0 & -a & 0 & a \\ 1 & a & -1 & a \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Substituindo a equação (3.46) na equação (3.40), tem-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}(\xi) \mathbf{C}_e \mathbf{v}_e \quad (3.49)$$

Que pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{v}_e \quad (3.50)$$

Onde

$$\mathbf{N}(\xi) = [N_1(\xi) \quad aN_2(\xi) \quad N_3(\xi) \quad aN_4(\xi)] \quad (3.51)$$

As funções de deslocamento da equação (3.51) são dadas por:

$$N_1(\xi) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \quad (3.52)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \quad (3.53)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \quad (3.54)$$

$$N_4(\xi) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \quad (3.55)$$

Ao substituir a equação (3.50) na equação (3.33) da energia de deformação, tem-se:

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a EI_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 EI_z \frac{1}{a^4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right)^2 a d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_e^T \frac{EI_z}{a^3} \int_{-1}^1 \mathbf{N}''(\xi)^T \mathbf{N}''(\xi) d\xi \mathbf{v}_e
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

A partir da equação (3.56) é possível extrair a matriz de rigidez do elemento tipo viga como sendo:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{a^3} \int_{-1}^1 \mathbf{N}''(\xi)^T \mathbf{N}''(\xi) d\xi \tag{3.57}$$

Substituindo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) na equação (3.57) e integrando obtém-se:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_z}{2a^3} \begin{bmatrix} 3 & 3a & -3 & 3a \\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2 \\ -3 & -3a & 3 & -3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Ao substituir a equação (3.50) na equação (3.36) da energia cinética, tem-se:

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \dot{v}^2 \rho A dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \dot{v}^2 \rho A a d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{v}}_e^T \rho A a \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) d\xi \dot{\mathbf{v}}_e
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

A partir da equação (3.59) pode-se extrair a matriz de massa do elemento tipo viga como sendo:

$$\mathbf{m}_e = \rho A a \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi)^T \mathbf{N}(\xi) d\xi \tag{3.60}$$

Substituindo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) na equação (3.60) e integrando obtem-se:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A a}{105} \begin{vmatrix} 78 & 22a & 27 & -13a \\ 22a & 8a^2 & 13a & -6a^2 \\ 27 & 13a & 78 & -22a \\ -13a & -6a^2 & -22a & 8a^2 \end{vmatrix} \quad (3.61)$$

Ao substituir a equação (3.50) na equação (3.37) do trabalho virtual, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a p_y \delta v dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_y \delta v a d\xi \\ &= \delta \mathbf{v}_e^T a \int_{-1}^1 p_y \mathbf{N}(\xi)^T d\xi \end{aligned} \quad (3.62)$$

A partir da equação (3.62) pode-se extrair o vetor de força do elemento tipo viga como sendo:

$$\mathbf{f}_e = a \int_{-1}^1 p_y \mathbf{N}(\xi)^T d\xi \quad (3.63)$$

Substituindo as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) na equação (3.63), assumindo p_y ter um valor constante p_y^e sobre o elemento e integrando, obtem-se:

$$\mathbf{f}_e = p_y^e \frac{a}{3} \begin{Bmatrix} 3 \\ a \\ 3 \\ -a \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

3.2.3 Vibração por flexão de placa fina

Para começar a análise de uma placa fina primeiramente serão derivadas as equações de energia utilizando como base a Figura 3.3

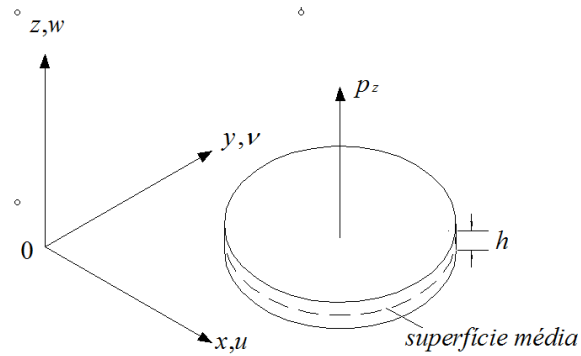


Figura 3.3 Elemento de flexão de placa com indicação do sistema de coordenadas

Fonte: adaptada de Pety (1998).

Para derivar as funções de placa fina serão feitas as seguintes considerações:

- 1 – A tensão transversal na direção σ_z é zero;
- 2 – As normais em relação à superfície média da placa indeformada continuam retas e normais à superfície média depois da placa deformada.

Feitas as considerações acima os deslocamentos paralelos à superfície média indeformada podem ser dados por:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.65)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.66)$$

Onde $w_{,xy}$ é o deslocamento da superfície média na direção z . As componentes de deformação são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.68)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.69)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.70)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.71)$$

Como σ_z , γ_{xz} e γ_{yz} são zero, a energia de deformação acumulada ou energia potencial elástica no elemento é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \quad (3.72)$$

A equação (3.72) pode ser escrita de forma matricial como,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.73)$$

Onde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Como a tensão na direção z é zero, escreve-se a relação tensão-deformação como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.76)$$

Onde para materiais isotrópicos com propriedades elásticas similares em todas as direções:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E' & E'\nu & 0 \\ E'\nu & E' & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3.78)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.79)$$

E = Módulo de elasticidade.

ν = Coeficiente de Poisson.

Substituindo a equação (3.76) na equação (3.73) de energia de deformação tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.80)$$

Usando as equações (3.67), (3.68) e (3.69), a matriz de deformação pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \boldsymbol{\chi} \quad (3.81)$$

Substituindo a equação (3.81) na equação (3.80):

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\chi} dA \quad (3.82)$$

A energia cinética da placa é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_A \rho h \dot{w}^2 dA \quad (3.83)$$

O trabalho virtual da carga transversal é dado por:

$$\delta W = \int_A p_z \delta w dA \quad (3.84)$$

Para analisar um elemento de placa fina retangular quando sujeita a esforços de vibração considera-se o sistema de coordenadas conforme mostrado na Figura 3.4.

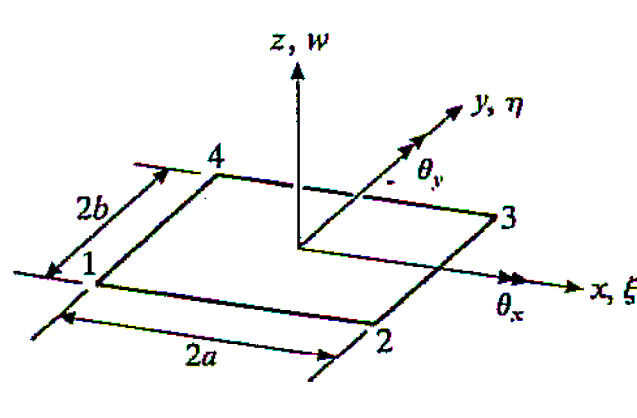


Figura 3.4 Geometria e sistema de coordenadas do elemento placa fina.

Fonte: adaptada de Pety (1998).

Esta placa retangular possui um nó em cada canto. Neste trabalho explora-se dois equacionamentos usados para o modelamento matemático de uma placa fina. O primeiro utilizando o chamado elemento placa retangular fina não conforme e o segundo utilizando o elemento placa retangular fina conforme. As vantagens e desvantagens da utilização de cada método serão discutidas nas seções a seguir.

3.2.3.1 Elemento de placa retangular fina não conforme

Cada nó deste elemento possui três graus de liberdade: o deslocamento normal ao plano da placa (w), a rotação em relação ao eixo x ($\theta_x = \partial w / \partial y$) e a rotação em relação ao eixo y ($\theta_y = -\partial w / \partial x$). Considerando as coordenadas ξ e η as rotações podem ser escritas como:

$$\theta_x = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (3.85)$$

$$\theta_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (3.86)$$

Como o elemento tem 12 graus de liberdade no total, a função de deslocamento pode ser representada através de um polinômio de 12 termos-se:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3 \quad (3.87)$$

A equação (3.87) pode ser escrita na forma matricial:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi \eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2 \eta & \xi \eta^2 & \eta^3 & \xi^3 \eta & \xi \eta^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.88)$$

Diferenciando a equação (3.88) em termos de ξ e η tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & 2\xi \eta & \eta^2 & 0 & 3\xi^2 \eta & \eta^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 2\eta & 0 & \xi^2 & 2\xi \eta & 3\eta^2 & \xi^3 & 3\xi \eta^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.90)$$

Considerando o vetor de deslocamento dos nós do elemento tem-se:

$$\bar{\mathbf{w}}_e^T = \begin{bmatrix} w_1 & b\theta_{x1} & a\theta_{y1} & w_2 & b\theta_{x2} & a\theta_{y2} & w_3 & b\theta_{x3} & a\theta_{y3} & w_4 & b\theta_{x4} & a\theta_{y4} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Como as equações (3.88), (3.89) e (3.90) dependem de $\boldsymbol{\alpha}$ pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{w}}_e = \mathbf{A}_e \boldsymbol{\alpha} \quad (3.92)$$

Onde a matriz A_e será dada por:

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1^2 & \xi_1\eta_1 & \eta_1^2 & \xi_1^3 & \xi_1^2\eta_1 & \xi_1\eta_1^2 & \eta_1^3 & \xi_1^3\eta_1 & \xi_1\eta_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_1 & 2\eta_1 & 0 & \xi_1^2 & 2\xi_1\eta_1 & 3\eta_1^2 & \xi_1^3 & 3\xi_1\eta_1^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\xi_1 & -\eta_1 & 0 & -3\xi_1^2 & -2\xi_1\eta_1 & -\eta_1^2 & 0 & -3\xi_1^2\eta_1 & -\eta_1^3 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2^2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2^2 & \xi_2^3 & \xi_2^2\eta_2 & \xi_2\eta_2^2 & \eta_2^3 & \xi_2^3\eta_2 & \xi_2\eta_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_2 & 2\eta_2 & 0 & \xi_2^2 & 2\xi_2\eta_2 & 3\eta_2^2 & \xi_2^3 & 3\xi_2\eta_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\xi_2 & -\eta_2 & 0 & -3\xi_2^2 & -2\xi_2\eta_2 & -\eta_2^2 & 0 & -3\xi_2^2\eta_2 & -\eta_2^3 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3^2 & \xi_3\eta_3 & \eta_3^2 & \xi_3^3 & \xi_3^2\eta_3 & \xi_3\eta_3^2 & \eta_3^3 & \xi_3^3\eta_3 & \xi_3\eta_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_3 & 2\eta_3 & 0 & \xi_3^2 & 2\xi_3\eta_3 & 3\eta_3^2 & \xi_3^3 & 3\xi_3\eta_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\xi_3 & -\eta_3 & 0 & -3\xi_3^2 & -2\xi_3\eta_3 & -\eta_3^2 & 0 & -3\xi_3^2\eta_3 & -\eta_3^3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4^2 & \xi_4\eta_4 & \eta_4^2 & \xi_4^3 & \xi_4^2\eta_4 & \xi_4\eta_4^2 & \eta_4^3 & \xi_4^3\eta_4 & \xi_4\eta_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_4 & 2\eta_4 & 0 & \xi_4^2 & 2\xi_4\eta_4 & 3\eta_4^2 & \xi_4^3 & 3\xi_4\eta_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\xi_4 & -\eta_4 & 0 & -3\xi_4^2 & -2\xi_4\eta_4 & -\eta_4^2 & 0 & -3\xi_4^2\eta_4 & -\eta_4^3 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Para calcular os valores de α a equação (3.92) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\alpha = A_e^{-1} \bar{w}_e \quad (3.94)$$

Resolvendo a matriz (3.93) para os valores de $\xi = \mp 1$ e $\eta = \mp 1$, e fazendo sua inversão encontra-se a seguinte matriz:

$$A_e^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -4 & -1 & -1 & 4 & -1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Substituindo a equação (3.94) na equação (3.88) tem-se:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix} \mathbf{A}_e^{-1} \bar{\mathbf{w}}_e \quad (3.96)$$

Onde $\bar{\mathbf{w}}_e^T$ dado pela equação (3.91) pode ser reescrito retirando-se os valores de a e b , que serão adicionados as outras matrizes, resultando:

$$\mathbf{w}_e^T = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Os dois primeiros termos do membro direito da equação (3.96) podem ser escritos como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix} \mathbf{A}_e^{-1} = \mathbf{N}(\xi, \eta) \quad (3.98)$$

Onde $\mathbf{N}(\xi, \eta)$ é chamado de vetor de funções de forma. Reescrevendo a equação (3.96) e utilizando os nós da chapa fina tem-se:

$$w = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{w}_e = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \mathbf{w}_e \quad (3.99)$$

Onde as funções de forma para cada nó são dadas por:

$$\mathbf{N}_j^T(\xi, \eta) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(2 + \xi_j \xi + \eta_j \eta - \xi_j^2 - \eta_j^2) \\ \left(\frac{b}{8}\right)(1 + \xi_j \xi)(\eta_j + \eta)(\eta^2 - 1) \\ -\left(\frac{a}{8}\right)(\xi_j + \xi)(\xi^2 - 1)(1 + \eta_j \eta) \end{array} \right\} \quad (3.100)$$

Onde (ξ_j, η_j) são as coordenadas do nó j . Este elemento é normalmente chamado de elemento não conforme.

Substituindo a equação (3.99) na equação (3.83)

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{w}}_e \quad (3.101)$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_e &= \int_{A_e} \rho h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \\ &= \rho h ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \mathbf{N}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.102)$$

Onde a equação (3.102) é a matriz de massa. Substituindo as funções $N_j(\xi, \eta)$ vindas da equação (3.100), obtem-se:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho h ab}{6300} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{21}^T \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Onde:

$$\mathbf{m}_{11} = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ 922b & 320b^2 & & & & \\ -922a & -252ab & 320a^2 & & & \\ 1226 & 398b & -548a & 3454 & & \\ 398b & 160b^2 & -168ab & 922b & 320b^2 & \\ 548a & 168ab & -240a^2 & 922a & 252ab & 320a^2 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\mathbf{m}_{21} = \begin{bmatrix} 394 & 232b & -232a & 1226 & 548b & 398a \\ -232b & -120b^2 & 112ab & -548b & -240b^2 & -168ab \\ 232a & -112ab & -120a^2 & 398a & 168ab & 160a^2 \\ 1226 & 548b & -398a & 394 & 232b & 232a \\ -548b & -240b^2 & 168ab & -232b & -120b^2 & -112ab \\ -398a & -168ab & 160a^2 & -232a & -112ab & -120a^2 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$$\mathbf{m}_{22} = \begin{bmatrix} 3454 & & & & & \\ -922b & 320b^2 & & & & \\ 922a & -252ab & 320a^2 & & & \\ 1226 & -398b & 548a & 3454 & & \\ -398b & 160b^2 & -168ab & -922b & 320b^2 & \\ -548a & 168ab & -240a^2 & -922a & 252ab & 320a^2 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

Para a matriz de rigidez substitui-se a equação (3.99) no vetor χ da equação (3.81) e na equação (3.82) obtendo,

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{w}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{w}_e \quad (3.107)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_e = \int_{A_e} \frac{h^3}{12} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (3.108)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} & \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} & \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}(\xi, \eta) \quad (3.109)$$

Onde a equação (3.108) é a matriz de rigidez. Substituindo as funções $N_j(\xi, \eta)$ vindas da equação (3.100), obtém-se:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E h^3}{48(1-\nu^2)ab} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & & & \text{Simétrica} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & & \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_{11} = \begin{bmatrix} \{4(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\} & & & \text{Simétrica} \\ 2\{2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}b & 4\{\frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)\}b^2 & & \\ 2\{-2\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}a & -4\nu ab & 4\{\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \nu)\}a^2 & \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{k}_{21} = \begin{bmatrix} -\{2(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\} & 2\{\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}b^2 & 2\{2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\}a & \\ 2\{\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}b & 4\{\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)\}b^2 & 0 & \\ -2\{2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\}a & 0 & 4\{\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu)\}a^2 & \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

$$\mathbf{k}_{31} = \begin{bmatrix} -\{2(\beta^2 + \alpha^2) - \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\} & 2\{-\alpha^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\}b & 2\{\beta^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\}a \\ 2\{\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\}b & 4\{\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)\}b^2 & 0 \\ 2\{-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\}a & 0 & 4\{\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \nu)\}a^2 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{k}_{41} = \begin{bmatrix} \{2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{2}{5}(7 - 2\nu)\} & 2\{-2\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu)\}b & 2\{-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}a \\ 2\{2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu)\}b & 4\{\frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu)\}b^2 & 0 \\ 2\{-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu)\}a & 0 & 4\{\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu)\}a^2 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad (3.115)$$

$$\beta = \frac{b}{a} \quad (3.116)$$

O restante das matrizes \mathbf{k}_{ij} são definidas da seguinte maneira:

$$\mathbf{k}_{22} = \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_3 \quad (3.117)$$

$$\mathbf{k}_{32} = \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{41} \mathbf{I}_3 \quad (3.118)$$

$$\mathbf{k}_{42} = \mathbf{I}_3^T \mathbf{k}_{31} \mathbf{I}_3 \quad (3.119)$$

$$\mathbf{k}_{33} = \mathbf{I}_1^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_1 \quad (3.120)$$

$$\mathbf{k}_{43} = \mathbf{I}_1^T \mathbf{k}_{21} \mathbf{I}_1 \quad (3.121)$$

$$\mathbf{k}_{44} = \mathbf{I}_2^T \mathbf{k}_{11} \mathbf{I}_2 \quad (3.122)$$

Onde:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

O vetor de forças nodais é obtido substituindo a equação (3.99) na equação (3.84):

$$\delta W = \delta \mathbf{w}_e^T \mathbf{f}_e \quad (3.126)$$

Onde:

$$\mathbf{f}_e = \int_A \mathbf{N}^T p_z dA \quad (3.127)$$

Considerando p_z constante e substituindo as funções $N_j(\zeta, \eta)$ vindas da equação (3.100), obtem-se:

$$\mathbf{f}_e = p_z \frac{ab}{3} \begin{Bmatrix} 3 \\ b \\ -a \\ 3 \\ b \\ a \\ 3 \\ -b \\ a \\ 3 \\ -b \\ -a \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

Analisando o elemento finito de placa fina não conforme é possível verificar que ele possui um erro de continuidade na sua formulação. Vamos considerar a aresta 2-3 do elemento ilustrado na Figura 3.4. Resolvendo a equação (3.100) para o lado 2-3 ($\zeta=1$), tem-se:

$$\mathbf{N}_1^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{N}_2^T = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)(2-\eta-\eta^2) \\ \left(\frac{b}{4}\right)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\mathbf{N}_3^T = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}(1+\eta)(2+\eta-\eta^2) \\ \left(\frac{b}{4}\right)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.131)$$

$$\mathbf{N}_4^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.132)$$

Analisando as equações (3.129), (3.130), (3.131) e (3.132) concluí-se que o deslocamento e a rotação no eixo x em qualquer ponto são determinados apenas pelos valores de deslocamento e rotação dos nós 2 e 3. Além disso, o deslocamento e a rotação em x não variam com a posição em $x(\xi)$, apenas com a posição em $y(\eta)$.

Agora se considera que dois elementos finitos de placa fina não conforme estão acoplados na mesma aresta 2-3, a rotação no eixo y seria dada pela substituição da equação (3.99) na equação (3.86):

$$\theta_y = -\frac{1}{a} \left[\frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \right] \mathbf{w}_e \quad (3.133)$$

Substituindo a equação (3.100) na equação (3.133) e resolvendo para o lado 2-3 ($\xi=1$), teremos:

$$\frac{\partial \mathbf{N}_j^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}(1 + \eta_j \eta)(-2 + 2\xi_j^2 + \eta_j \eta \xi_j - \eta_j^2 \xi_j) \\ \left(\frac{b}{8}\right) \xi_j (\eta_j + \eta)(\eta^2 - 1) \\ -\left(\frac{a}{8}\right)(2 + 2\xi_j)(1 + \eta_j \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.134)$$

Resolvendo a equação (3.134) para os quatro nós do elemento de placa fina não conforme:

$$\frac{\partial N_1^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8}\eta(1 - \eta^2) \\ -\left(\frac{b}{8}\right)(-1 + \eta)(\eta^2 - 1) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial N_2^T}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8}\eta(1-\eta^2) \\ \left(\frac{b}{8}\right)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ \left(\frac{a}{2}\right)(1-\eta) \end{vmatrix} \quad (3.136)$$

$$\frac{\partial N_3^T}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} \frac{1}{8}\eta(1-\eta^2) \\ \left(\frac{b}{8}\right)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ \left(\frac{a}{2}\right)(1+\eta) \end{vmatrix} \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial N_4^T}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{8}\eta(1-\eta^2) \\ -\left(\frac{b}{8}\right)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.138)$$

Considerando as equações (3.130) e (3.131) conclui-se que o deslocamento e a rotação em x da aresta são exclusivamente determinados pelos valores de w e θ_x nos nós 2 e 3. Para θ_y ser contínuo entre os elementos deveria ser exclusivamente determinada pelos seus valores nos nós 2 e 3. As equações (3.133), (3.135), (3.136), (3.137) e (3.138) indicam que neste caso θ_y é determinado pelos valores de w e θ_x nos nós 1, 2, 3 e 4 assim como θ_y nos nós 2 e 3. Desta forma o elemento é não conforme, ele possui um erro de continuidade. Apesar disto este elemento é amplamente utilizado e sua falha de continuidade é desconsiderada em certas aplicações. A relevância do erro deste elemento para os objetivos deste trabalho serão avaliados no Capítulo 5.

3.2.3.2 Elemento de placa retangular fina conforme

Como foi mencionado na seção do elemento de placa retangular fina não conforme, esse tipo de elemento possui um erro devido a um problema de continuidade, assim para melhorar a precisão do elemento de placa retangular fina pode ser usado o elemento conforme. Para isso usa-se as equações (3.52), (3.53), (3.54) e (3.55) do elemento de viga. Neste caso a função deslocamento para a placa é da forma da equação (3.99) com:

$$\mathbf{N}_j^T(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} f_j(\xi) f_j(\eta) \\ b f_j(\xi) g_j(\eta) \\ -a g_j(\xi) f_j(\eta) \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

Onde:

$$f_j(\xi) = \frac{1}{4} (2 + 3\xi_j \xi + \xi_j \xi^3) \quad (3.140)$$

$$g_j(\xi) = \frac{1}{4} (-\xi_j - \xi + \xi_j \xi^2 + \xi^3) \quad (3.141)$$

$$f_j(\eta) = \frac{1}{4} (2 + 3\eta_j \eta + \eta_j \eta^3) \quad (3.142)$$

$$g_j(\eta) = \frac{1}{4} (-\eta_j - \eta + \eta_j \eta^2 + \eta^3) \quad (3.143)$$

Analisando as equações de deslocamento (3.99), (3.139), (3.140), (3.141), (3.142) e (3.143) conclui-se que o giro $\partial^2 w / \partial x \partial y$ é zero nos quatro nós. Isso significa que à medida que uma superfície é dividida em um grande número de elementos, a placa tende para uma condição de torção zero. Isso pode ser evitado usando $\partial^2 w / \partial x \partial y$ como um quarto grau de liberdade para cada nó da placa. Assim, a função deslocamento para a placa é da forma da equação (3.99) com:

$$\mathbf{w}_e^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_{xy1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_{xy2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_{xy3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad w_{xy4}] \quad (3.144)$$

Onde $w_{xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$, e

$$\mathbf{N}_j^T(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} f_j(\xi) f_j(\eta) \\ b f_j(\xi) g_j(\eta) \\ -a g_j(\xi) f_j(\eta) \\ a b g_j(\xi) g_j(\eta) \end{Bmatrix} \quad (3.145)$$

Análogo ao que foi feito para o elemento de placa retangular fino não conforme pode-se calcular as matrizes de massa e rigidez e o vetor de força através das equações (3.102), (3.108) e (3.127) respectivamente. Por possuir um grau de liberdade a mais, o elemento de placa retangular fino conforme apresenta um resultado mais próximo do analítico em relação ao elemento de placa retangular fino não conforme, porém também possui um custo

computacional maior. A relevância deste resultado mais próximo ao analítico, para os objetivos deste trabalho, é avaliado no Capítulo 5.

3.3 Formulação do sistema acústico

Considerando a equação (3.146) da onda sem perda para a propagação do som em fluidos, também conhecida como a equação de Helmholtz:

$$g \nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_{f0} \nabla \cdot \mathbf{g} \quad (3.146)$$

Onde c é a velocidade de fase para ondas acústicas em meios fluidicos:

$$c = \sqrt{\frac{\Xi}{\rho_{f0}}} \quad (3.147)$$

Onde Ξ é o módulo de compressibilidade adiabático (N/m^2).

A partir da equação de Helmholtz dada pela equação (3.146), é possível resolver a dinâmica do fluido através da aproximação dos resíduos ponderados via Galerkin. Para isso considera-se a Figura 3.5 onde se representa um sistema acoplado fluido-estrutura.

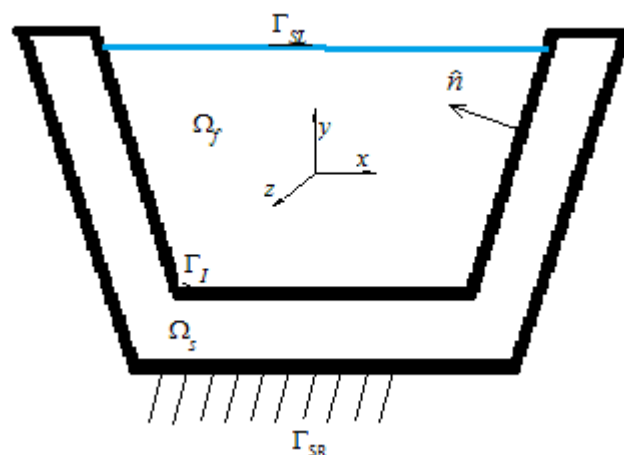


Figura 3.5 Esquema de um sistema acoplado fluido-estrutura.

Onde:

Ω_f é o domínio do fluido.

Ω_s é o domínio estrutural.

Γ_{SL} é a superfície livre.

Γ_{SR} é a superfície rígida.

Γ_I é a superfície de interface entre fluido e estrutura.

\hat{n} é a direção normal ao exterior da estrutura.

Baseado na Figura 3.5 pode-se escrever a dinâmica do sistema acústico sob determinadas condições de contorno:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + P_B = 0 \quad \text{em } \Omega_f \quad (3.148)$$

$$p = 0, \quad \text{em } \Gamma_{SL} \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = 0, \quad \text{em } \Gamma_{SR} \quad (3.150)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = -\rho_f \dot{v}_{\hat{n}}, \quad \text{em } \Gamma_I \quad (3.151)$$

Onde

P_B são as forças de volume.

$\dot{v}_{\hat{n}}$ é um valor pré-determinado.

Ao obter uma solução aproximada \tilde{p} da pressão p , obtem-se um resíduo $R(\tilde{p})$ como sendo:

$$R(\tilde{p}) = \nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \quad (3.152)$$

O problema de dinâmica do fluido será resolvido através do método dos elementos finitos, sendo assim o domínio do fluido será discretizado. Considerando o método de resíduos ponderados que fornece uma solução elementar aproximada do sistema de equações diferenciais, e utilizando a técnica de Galerkin que considera as funções de ponderação do domínio fluido w_{fi} como sendo as mesmas funções de forma N_{fi} utilizadas para o cálculo da aproximação de \tilde{p} , tem-se:

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{N}_f \quad (3.153)$$

Onde:

\mathbf{w}_f são as funções de ponderação do domínio do fluido

\mathbf{N}_f são as funções de forma ponderadoras no espaço tridimensional.

Desta forma, o elemento finito do domínio fluido pode ser descrita com a seguinte equação integral usando a técnica de Galerkin:

$$\int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f \left(\nabla^2 \tilde{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} + P_B \right) d\Omega_f = \mathbf{0} \quad (3.154)$$

Integrando por partes a equação (3.154), considerando e aplicando as condições de contorno da equação (3.151) encontra-se a forma fraca da equação:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial x} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial y} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial z} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \right) d\Omega_f - \rho_f \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_f \dot{v}_n d\Gamma_i - \\ & \frac{1}{c^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f \ddot{\tilde{p}} d\Omega_f + \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f P_B d\Omega_f = 0 \end{aligned} \quad (3.155)$$

Usando o método dos elementos finitos obtém-se a seguinte aproximação:

$$\tilde{p} = \mathbf{N}_f \mathbf{p} \quad (3.156)$$

Onde:

\tilde{p} é a aproximação do campo escalar das pressões locais em cada elemento fluido;

\mathbf{N}_f é o vetor das funções de forma do fluido;

\mathbf{p} é o vetor de pressões nodais do elemento.

Como \mathbf{N}_f é independente do tempo e de \mathbf{p} , e \mathbf{p} é independente da posição pode-se escrever:

$$\ddot{\tilde{p}} = \mathbf{N}_f \ddot{\mathbf{p}} \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial x} \mathbf{p} \quad (3.158)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial y} \mathbf{p} \quad (3.159)$$

Substituindo as equações (3.157), (3.158) e (3.159) na equação (3.155) e simplificando obtém-se o resíduo total no domínio do fluido como o somatório dos resíduos do número de elementos de fluido.

$$\sum_{j=1}^{num_el_fl} \left\{ \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_f^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}_f^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{N}_f^T}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{N}_f}{\partial z} \right) d\Omega_f \{ \mathbf{p} \} + \right. \quad (3.160)$$

$$\left. + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_f^T \dot{\tilde{v}}_{\hat{n}} d\Gamma_i + \frac{1}{\rho_f c_s^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Omega_f \{ \ddot{\tilde{p}} \} - \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T P_B d\Omega_f = 0 \right\}$$

Arranjando a equação acima após montagem dos elementos obtém-se:

$$\mathbf{m}_{ff} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{k}_{ff} \mathbf{p} + \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}_f^T \dot{\tilde{v}}_{\hat{n}} d\Gamma_i = \mathbf{f}_f \quad (3.161)$$

Onde:

\mathbf{m}_{ff} é a matriz de inércia ou compressibilidade do fluido.

\mathbf{k}_{ff} é a matriz volumétrica da energia cinética do fluido.

\mathbf{f}_f é o vetor das excitações externas.

Desta forma a parte integral da equação junta os termos da matriz de interface \mathbf{m}_{fs} . Assim, as matrizes de inércia do fluido \mathbf{m}_{ff} , a matriz volumétrica da energia cinética do fluido \mathbf{k}_{ff} e o vetor de excitações \mathbf{f}_f podem ser apresentados da seguinte forma:

$$\mathbf{m}_{ff} = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_f d\Omega_f \quad (3.162)$$

$$\mathbf{k}_{ff} = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega_f \quad (3.163)$$

$$\mathbf{f}_f = \frac{1}{\rho_f} \int_{\Omega_f} \mathbf{N}_f^T P_B d\Omega_f \quad (3.164)$$

Onde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{N}_f}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_f}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{N}_f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

3.3.1 Funções de energia – sólido tridimensional

Para analisar um sólido de volume V e superfície S sujeito a esforços de vibração, considera-se o sistema de coordenadas conforme mostrado na Figura 3.6.

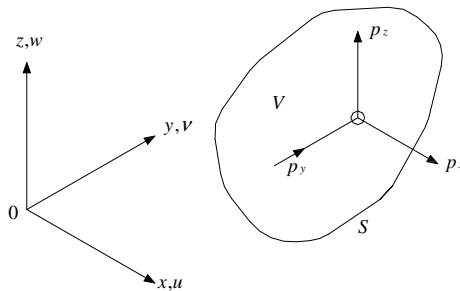


Figura 3.6 Sólido com sistema de coordenadas.

Fonte: adaptada de Pety (1998).

Os estados de tensão e deformação em um ponto são definidos por seis componentes independentes que podem ser escritos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Baseado nas equações (3.166) e (3.167) a energia de deformação é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (3.168)$$

Que pode ser expressa de forma matricial:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.169)$$

Onde:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.171)$$

A relação tensão-deformação é expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.172)$$

Onde \mathbf{D} é uma matriz simétrica que para um material isotrópico, material que será considerado neste trabalho, tem a forma:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ \text{Sim} & & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (3.173)$$

Substituindo a equação (3.172) na equação (3.169) tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.174)$$

A relação deslocamento-deformação é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (3.175)$$

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (3.176)$$

Se p_x , p_y e p_z são componentes das forças de superfícies aplicadas por unidade de área, então o trabalho virtual é dado por:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_S (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS \quad (3.177)$$

3.3.2 Vibração de sólidos – elemento hexaédrico retangular

Para analisar um sólido sujeito a esforços de vibração considera-se o elemento hexaédrico com o sistema de coordenadas conforme mostrado na Figura 3.7.

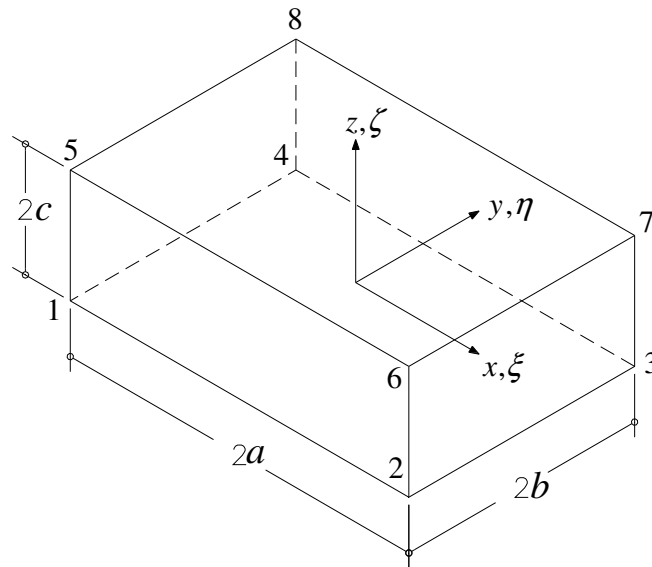


Figura 3.7 Geometria e sistema de coordenadas de um elemento hexaédrico retangular.

Fonte: adaptada de Pety (1998).

O elemento hexaédrico apresenta oito nós, um em cada canto com três graus de liberdade por nó. Estes graus de liberdade são as componentes de deslocamento u , v , w nas direções x , y , z respectivamente. Cada componente pode ser representado com um polinômio de oito termos. Assim os deslocamentos podem ser representados pela expressão de forma:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 xz + \alpha_8 xyz \quad (3.178)$$

Os coeficientes α_i podem ser expressos em termos dos valores da componente u do deslocamento nos oito nós e resolvidos através da equação (3.178). Porém é muito mais simples expressar o deslocamento através das funções de deslocamento da seguinte forma:

$$u = \sum_{j=1}^8 N_j u_j \quad (3.179)$$

$$v = \sum_{j=1}^8 N_j v_j \quad (3.180)$$

$$w = \sum_{j=1}^8 N_j w_j \quad (3.181)$$

As funções N_j devem ter um valor unitário no nó j e zero nos outros sete nós. Logo a expressão (3.178) pode ser expressa com um produto de três funções lineares em x , y , e z respectivamente:

$$N_j = \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta) \quad (3.182)$$

Onde (ξ_j, η_j, ζ_j) são as coordenadas do nó j .

Em cada face a variação do deslocamento é bilinear e unicamente determinada pelos valores dos quatro nós, desta forma haverá então continuidade de deslocamento entre elementos adjacentes.

As equações (3.179), (3.180) e (3.181) podem ser combinadas e escritas como:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e \quad (3.183)$$

Onde:

$$\mathbf{u}_e^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8 \quad w_8] \quad (3.184)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3.185)$$

Substituindo a equação (3.183) na (3.176):

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{u}}_e \quad (3.186)$$

Onde \mathbf{m} é a matriz de massa do elemento dada por:

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.187)$$

O típico elemento desta matriz é:

$$\begin{aligned}
 m &= \rho abc \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i N_j d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \frac{\rho abc}{64} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi_i \xi) (1 + \xi_j \xi) d\xi \int_{-1}^{+1} (1 + \eta_i \eta) (1 + \eta_j \eta) d\eta \int_{-1}^{+1} (1 + \zeta_i \zeta) (1 + \zeta_j \zeta) d\zeta \quad (3.188) \\
 &= \frac{\rho abc}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \xi_i \xi_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_j\right) \left(1 + \frac{1}{3} \zeta_i \zeta_j\right)
 \end{aligned}$$

Usando este resultado tem-se a seguinte matriz de massa:

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{m}_1 = 2 \mathbf{m}_2 \quad (3.190) \\
 \mathbf{m}_2 &= \rho \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.191)
 \end{aligned}$$

Substituindo a equação (3.183) na equação (3.174):

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (3.192)$$

Onde \mathbf{k}_e é a matriz de rigidez do elemento dada por:

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.193)$$

A matriz de deformação tem a forma:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \quad \mathbf{B}_5 \quad \mathbf{B}_6 \quad \mathbf{B}_7 \quad \mathbf{B}_8] dV \quad (3.194)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

Usando a equação (3.182):

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\xi_i}{8a} (1 + \eta_i \eta) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (3.196)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\eta_i}{8b} (1 + \xi_i \xi) (1 + \zeta_i \zeta) \quad (3.197)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\zeta_i}{8c} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (3.198)$$

Substituindo a equação (3.194), (3.195), (3.196), (3.197) e (3.198) e integrando em termos de (ξ, η, ζ) a equação (3.193) resulta:

$$\mathbf{k}_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} abc \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta d\zeta \quad (3.199)$$

As forças nodais equivalentes devido a uma carga distribuída sobre a face $\xi = 1$ é obtida substituindo a equação (3.183) na equação (3.177)

$$\partial \mathbf{W}_e = \partial \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e \quad (3.200)$$

Onde:

$$\mathbf{f}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T_{\xi=1} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} bc d\eta d\zeta \quad (3.201)$$

Quando $\xi = 1$:

$$N_i = \begin{cases} 0 & \text{para } i = 1,4,5,8 \\ \frac{1}{4}(1 + \eta_1 \eta)(1 + \zeta_1 \zeta) & \text{para } i = 2,3,6,7 \end{cases} \quad (3.202)$$

Considerando que p_x , p_y e p_z são constantes, as forças nodais equivalentes são dadas por:

$$\mathbf{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \mathbf{f}_5 \\ \mathbf{f}_6 \\ \mathbf{f}_7 \\ \mathbf{f}_8 \end{Bmatrix} \quad (3.203)$$

Onde:

$$\mathbf{f}_i = 0 \quad \text{para } i = 1,4,5,8 \quad (3.204)$$

$$\mathbf{f}_i = bc \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \quad \text{para } i = 2,3,6,7 \quad (3.205)$$

Considerando que o elemento da Figura 3.7 representa um fluido e levando-se em conta as equações (3.178) a (3.205), porém considerando que neste trabalho usa-se a pressão como grau de liberdade para o domínio do fluido e que a pressão não varia com as coordenadas x , y

e z , desta forma o elemento hexaédrico resultante apresenta apenas um grau de liberdade por nó. Assim, a função da pressão pode ser escrita como:

$$p = \mathbf{N} \mathbf{p}_e \quad (3.206)$$

Onde:

$$\mathbf{p}_e^T = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8] \quad (3.207)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8] \quad (3.208)$$

A energia cinética do elemento hexaédrico pode ser calculada a partir da equação (3.176) considerando $u = p$, então tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{p}^2 dV \quad (3.209)$$

Derivando-se a equação (3.206) tem-se:

$$\dot{p} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}}_e \quad (3.210)$$

Substituindo a equação (3.210) na equação (3.209):

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\mathbf{p}}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}}_e dV = T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}_e^T \left(\int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{p}}_e \quad (3.211)$$

A equação (3.211) pode ser reescrita como:

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{p}}_e \quad (3.212)$$

Onde a matriz de massa ou inércia é dada por:

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.213)$$

Utilizando a equação (3.188) as funções de forma do elemento fluido podem ser escritas analogamente à forma apresentada na equação (3.182):

$$\begin{aligned}
 \text{Nó } 1_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f1} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) + (1-\zeta) \\
 \text{Nó } 2_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f2} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) + (1-\zeta) \\
 \text{Nó } 3_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f3} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) + (1-\zeta) \\
 \text{Nó } 4_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = -1 \quad N_{f4} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta) + (1-\zeta) \\
 \text{Nó } 5_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f5} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta) + (1+\zeta) \\
 \text{Nó } 6_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = -1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f6} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta) + (1+\zeta) \\
 \text{Nó } 7_f \quad \xi_j = 1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f7} &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta) + (1+\zeta) \\
 \text{Nó } 8_f \quad \xi_j = -1 \quad \eta_j = 1 \quad \zeta_j = 1 \quad N_{f8} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta) + (1+\zeta)
 \end{aligned} \tag{3.214}$$

Assim a equação (3.208) fica:

$$N_f(\xi, \eta, \zeta)_e = [N_{f1} \quad N_{f2} \quad N_{f3} \quad N_{f4} \quad N_{f5} \quad N_{f6} \quad N_{f7} \quad N_{f8}] \tag{3.215}$$

Juntando as equações (3.213) e a (3.215) obtém-se a matriz inercial ou massa elementar como sendo:

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_2 & \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} \tag{3.216}$$

Onde:

$$\mathbf{m}_1 = 2 \mathbf{m}_2 \tag{3.217}$$

$$\mathbf{m}_2 = \rho \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.218}$$

A matriz de massa do elemento fluido é dada pela equação (3.162), usando as equações (3.217) e (3.218) a matriz de massa do elemento fluido fica:

$$\mathbf{m}_{ff_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ff1_e} & \mathbf{m}_{ff2_e} \\ \mathbf{m}_{ff2_e} & \mathbf{m}_{ff1_e} \end{bmatrix} \quad (3.219)$$

Onde:

$$\mathbf{m}_{ff1_e} = 2 \mathbf{m}_{ff2_e} \quad (3.220)$$

$$\mathbf{m}_{ff2_e} = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.221)$$

Logo a matriz de massa do elemento do fluido resulta em:

$$\mathbf{m}_{ff_e} = \frac{1}{\rho_f c_s^2} \frac{abc}{27} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

A matriz de rigidez do elemento de fluido também resulta de um desenvolvimento análogo ao realizado para a matriz de massa com $u = p$. Nesse caso a equação (3.192) torna-se:

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{p}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{p}_e \quad (3.223)$$

Nesse caso a matriz de rigidez será dada pela equação (3.163), as matrizes de deformação são dadas pelas equações (3.194), (3.195), (3.196), (3.197) e (3.198). Desta forma a matriz de rigidez completa do elemento fluido resulta:

3.4 Sistemas acoplados vibroacústicos

Para analisar-se o acoplamento de um sistema fluido estrutura inicialmente considera-se o efeito da pressão do fluido sobre a estrutura na superfície de interface Γ_I como sendo $f_{s\Gamma_I}$, que acrescentado das forças de volume f_{sB} constituem os termos de excitação na equação dinâmica:

$$\mathbf{k}_{ss} \mathbf{u} + \mathbf{m}_{ss} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_{s\Gamma_I} + \mathbf{f}_{sB} \quad (3.225)$$

Onde:

$$\mathbf{f}_{s\Gamma_I} = \int_A \mathbf{N}_s^T q \, dA \quad (3.226)$$

A pressão que o fluido exerce sobre a interface com a estrutura acaba gerando forças distribuídas q normais à superfície da estrutura. Juntando as equações (3.156) e (3.226) e substituindo q por \tilde{p} obtem-se a condição de equilíbrio na interface como sendo:

$$\mathbf{f}_{s\Gamma_I} = \int_A \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_f \, dA \mathbf{p} \quad (3.227)$$

Adicionando a (3.227) na equação (3.225):

$$\mathbf{k}_{ss} \mathbf{u} + \mathbf{m}_{ss} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_{fs} \mathbf{p} = \mathbf{f}_s \quad (3.228)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_{fs} = - \int_A \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_f \, dA \quad (3.229)$$

O acoplamento do domínio estrutural com o domínio fluido é imposto na direção normal \hat{n} da superfície de interface, através de uma identidade que garanta a compatibilidade

cinemática (Zienkiewicz e Taylor, 1989). Isto pode ser representado através da condição de escorregamento do fluido na direção tangencial da interface:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\hat{n}} = \dot{\mathbf{u}}_{\hat{n}} \quad (3.230)$$

O acoplamento fluido-estrutura é descrito em termos da variação de pressão próxima da região do domínio estrutural para o domínio do fluido. As condições de contorno para este caso são dadas pela equação (3.151), que usando a equação (3.230) fica definida como:

$$\frac{\partial p}{\partial \hat{n}} = -\rho_f \ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}, \quad \text{em } \Gamma_I \quad (3.231)$$

Adicionando a equação (3.230) na equação (3.231), que significa substituir a componente normal $\dot{\mathbf{v}}_{\hat{n}}$ por $\dot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}$, e adotando $\ddot{\mathbf{u}} = N_s \ddot{\mathbf{u}}$ para aproximar o valor de $\ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}$ por $\ddot{\mathbf{u}}_{\hat{n}}$, ou em forma discreta por $N_s \ddot{\mathbf{u}}$, tem-se:

$$\mathbf{m}_{ff} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{k}_{ff} \mathbf{p} + \mathbf{m}_{fs} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_f \quad (3.232)$$

Onde:

\mathbf{m}_{fs} é a matriz com os termos de interface que pode ser reescrita de forma semi-discretizada:

$$\mathbf{m}_{fs} = \int_{\Gamma_I} N_f^T N_s d\Gamma_I \quad (3.233)$$

A partir das equações (3.228) e (3.232) podemos organizar-las de forma matricial compacta, evidenciando a formulação $\mathbf{u-p}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_{fs} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{fs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_f \end{Bmatrix} \quad (3.234)$$

Como pode ser visto pela equação (3.234) esta formulação matricial é não simétrica o que é uma das suas principais desvantagens, pois impossibilita a utilização de diversos algoritmos eficientes desenvolvidos para matrizes simétricas. Porém, o principal benefício

desta formulação ocorre devido ao seu reduzido número de graus de liberdade empregados no modelamento do domínio fluido. No caso de vibrações livres, o vetor de forças da Equação (3.234) é zero.

A matriz de rigidez de interação do domínio fluído-estrutura é dada pela integração da equação (3.229):

$$\mathbf{k}_{fs} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{fs_1} & \mathbf{k}_{fs_2} \\ \mathbf{k}_{fs_3} & \mathbf{k}_{fs_4} \end{bmatrix} \quad (3.235)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_{fs_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.236)$$

$$\mathbf{k}_{fs_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.237)$$

$$\mathbf{k}_{fs_3} = \begin{bmatrix} 11/45*a*b & 1/15*a*b^2 & -1/15*a^2*b & 19/180*a*b & 1/30*a*b^2 & 2/45*a^2*b \\ 19/180*a*b & 1/30*a*b^2 & -2/45*a^2*b & 11/45*a*b & 1/15*a*b^2 & 1/15*a^2*b \\ 2/45*a*b & 1/45*a*b^2 & -1/45*a^2*b & 19/180*a*b & 2/45*a*b^2 & 1/30*a^2*b \\ 19/180*a*b & 2/45*a*b^2 & -1/30*a^2*b & 2/45*a*b & 1/45*a*b^2 & 1/45*a^2*b \end{bmatrix} \quad (3.238)$$

$$\mathbf{k}_{fs_4} = \begin{bmatrix} 2/45*a*b & -1/45*a*b^2 & 1/45*a^2*b & 19/180*a*b & -2/45*a*b^2 & -1/30*a^2*b \\ 19/180*a*b & -2/45*a*b^2 & 1/30*a^2*b & 2/45*a*b & -1/45*a*b^2 & -1/45*a^2*b \\ 11/45*a*b & -1/15*a*b^2 & 1/15*a^2*b & 19/180*a*b & -1/30*a*b^2 & -2/45*a^2*b \\ 19/180*a*b & -1/30*a*b^2 & 2/45*a^2*b & 11/45*a*b & -1/15*a*b^2 & -1/15*a^2*b \end{bmatrix} \quad (3.239)$$

Onde a matriz de massa de interação do domínio fluído-estrutura é dada pela integração da equação (3.233) e corresponde a relação:

$$\mathbf{k}_{fs} = -\mathbf{m}_{fs}^T \quad (3.240)$$

4. ANÁLISE DE RESPOSTA E OTIMIZAÇÃO

4.1 Generalidades

Baseado nos métodos de análise de elementos finitos mostrados no Capítulo 3 é possível desenvolver funções de análise de resposta em frequência e otimização. A finalidade deste capítulo é apresentar o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento das análises de resposta em frequência e otimização para os domínios estrutural, acústico e vibroacústico.

4.2 Análise modal em sistemas acoplados fluido-estrutura.

Em muitos exemplos práticos de melhorias ou otimizações estruturais, estes processos acabam demandando muito tempo de processamento e conseqüentemente custo computacional, isto se deve ao fato destes processos exigirem repetidas modificações e análises dos efeitos na estrutura, até que o maior ou menor valor possível da resposta, ou um resultado próximo dele, seja encontrado. Uma metodologia capaz de resolver estes problemas é a análise modal. Esta metodologia matemática torna mais fácil a determinação de como a estrutura deve ser modificada para que os resultados ou objetivos sejam atingidos. Outra metodologia que será adotada neste trabalho é a análise de resposta para sistemas vibroacústicos, através da metodologia modal desenvolvida por Ma e Hagiwara (1991). Este método modal, assim como outros, reduzem os custos computacionais quando comparados aos métodos diretos, principalmente quando procedimentos de otimização são usados, pois estes cálculos são iterativos.

Como foi visto no item 3.4 do Capítulo 3, a formulação resultante para um sistema acoplado, usando as variáveis $u-p$, resulta em uma equação matricial não simétrica, o que conseqüentemente resulta em problemas de autovalores complexos, também a condição convencional de ortogonalidade obtida em sistemas simétricos não será obtida. A formulação não simétrica como já foi vista é dada por:

$$M\ddot{u} + Ku = f \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{ss} & 0 \\ \mathbf{m}_{fs} & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{fs} \\ 0 & \mathbf{k}_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_f \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Para solucionar o problema de autovalores complexos e a condição de não ortogonalidade, um processo de simetrizarão das matrizes da formulação $u-p$ poderia ser adotado, porém este processo de simetrização em muitos casos pode ter um custo computacional muito caro. Por isso neste trabalho é decidido adotar o conceito de autovetores à direita e a esquerda. Para usar este conceito as seguintes preposições são assumidas:

1 – Todos os autovalores e autovetores à direita e à esquerda fornecidos pela equação (4.2) são números reais, vale ressaltar que os termos de amortecimento são desconsiderados nas equações de acoplamento.

2 – Os autovetores à esquerda $\bar{\phi}_j$ podem ser determinados a partir dos autovetores à direita ϕ_j . Partindo da equação (4.1) os autovalores podem ser obtidos por:

$$(K - \lambda M)\phi = 0 \quad (4.3)$$

Onde λ é o autovalor e ϕ o respectivo autovetor à direita a partir da equação (4.3), N modos, λ_j e ϕ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) podem ser obtidos, sendo que N corresponde ao total de coordenadas nodais do sistema acoplado. Como simplificação é assumido que não existem autovalores repetidos para este caso.

Como já foi dito anteriormente para solucionar o problema de ortogonalidade adota-se o conceito de autovetor à esquerda em:

$$\bar{\phi}^T (K - \lambda M) = 0 \quad (4.4)$$

O autovetor à esquerda $\bar{\phi}$ da equação (4.4) pode ser encontrado usando o autovetor a direita da equação (4.3):

$$\bar{\phi}_j = k \left\{ \begin{array}{c} \phi_{sj} \\ (1/\lambda_j)\phi_{fj} \end{array} \right\} \text{ para } \lambda_j \neq 0 \quad (4.5)$$

$$\bar{\phi}_j = k \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \phi_{fj} \end{array} \right\} \text{ para } \lambda_j = 0 \text{ e } \phi_{fj} \neq 0 \quad (4.6)$$

$$\bar{\phi}_j = k \left[\begin{array}{c} I \\ K_{ff}^{-1} M_{fs} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \phi_{sj} \\ \phi_{fj} \end{array} \right] \text{ para } \lambda_j = 0 \text{ e } \phi_{fj} = 0 \quad (4.7)$$

Onde I é uma matriz identidade, k é uma constante arbitrária normalmente assumida com valor unitário, ϕ_{sj} e ϕ_{fj} são as componentes do autovetor à direita ϕ_j relativos à u_s e u_f , respectivamente, desta forma o autovetor à esquerda pode ser determinado a partir dos autovetores à direita da seguinte forma:

$$\bar{\phi}_j = \left[\begin{array}{c} \phi_{sj} \\ \phi_{fj} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

3 – Existem condições de ortogonalidade para um sistema acoplado, porém como as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} não são simétricas, as condições de ortogonalidade tradicionalmente adotada para matrizes simétricas mostradas nas Equações (4.9) e (4.10) para análises modais, normalmente não são atendidas:

$$\phi_i^T K \phi_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (4.9)$$

$$\phi_i^T M \phi_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (4.10)$$

Então para se obter a condição de ortogonalidade usa-se o conceito de autovetor à esquerda. Assim as condições ficam:

$$\bar{\phi}_i^T K \phi_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (4.11)$$

$$\bar{\phi}_i^T M \phi_j = 0 \text{ para } i \neq j \quad (4.12)$$

$$\bar{\phi}_i^T K \phi_j = \lambda_j \text{ para } i = j \quad (4.13)$$

$$\bar{\phi}_i^T M \phi_j = 1 \text{ para } i = j \quad (4.14)$$

4 – A normalização do sistema e dos autovetores é feita em relação à massa do sistema.

As equações obtidas no Item 4.2 podem ser utilizadas para sistemas somente estruturais ou somente acústicos, sendo uma forma mais generalizada de cálculo do que o equacionamento modal que utiliza apenas o autovetor à direita.

4.3 Resposta em frequência direta

Resposta em frequência direta ou do inglês *Direct Frequency Response* (DFR) é um método analítico para o cálculo de respostas em sistemas somente estruturais, somente acústicos ou acoplados vibroacústicos. No caso de sistemas somente estruturais ou somente acústicos, eles normalmente possuem matrizes simétricas o que facilita e acelera os cálculos do método DFR. Porém, como já discutido no Capítulo 3, para sistemas acoplados as matrizes resultantes não são simétricas, desta forma o uso de métodos analíticos convencionais se tornam ineficientes para os cálculos. Para resolver este problema o método iterativo proposto por Ma e Hagiwara (1991) foi adotado. Este método emprega uma matriz de impedância desacoplada do sistema estrutural e do sistema acústico, ao invés de usar a inversa de uma matriz ou resolução triangular de toda a matriz de impedância do sistema acoplado fluido-estrutura. Este método reduz o custo computacional e possui uma excelente exatidão. Para a formulação DFR primeiramente considera-se as equações (4.1) e (4.2). Então pode-se escrever:

$$ZU = F \quad (4.15)$$

Onde Z representa a matriz de impedância do sistema acoplado e é dado por:

$$Z = \begin{bmatrix} K_{ss} - \omega^2 M_{ss} & K_{fs} \\ -\omega^2 M_{fs} & K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A resposta do sistema é U_s no domínio estrutural e U_f no domínio acústico ou do fluido.

$$U = \begin{bmatrix} U_s \\ U_f \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Considerando uma força de excitação somente no domínio estrutural, o que normalmente ocorre, por exemplo, em cabines de veículos, pode-se escrever o vetor da força de excitação como:

$$F = \begin{bmatrix} F_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Resolvendo a equação (4.15) através do método analítico convencional o valor de DFR é obtido por:

$$U = Z^{-1}F \quad (4.19)$$

Como já escrito neste trabalho, e como pode ser visto na equação (4.16), a matriz de impedância para o caso de sistemas acoplados não é simétrica tornando o cálculo de sua inversa computacionalmente caro. Considerando a utilização deste método em processos de otimização, onde o cálculo da resposta é refeito diversas vezes, o custo computacional do método analítico convencional torna o processo de otimização caro e muitas vezes inviável. Para contornar o problema da não simetria das matrizes do sistema a matriz de impedância da equação (4.16) é separada em duas matrizes triangulares:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} K_{ss} - \omega^2 M_{ss} & 0 \\ -\omega^2 M_{fs} & K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & K_{fs} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Assim tem-se que a matriz de impedância é:

$$Z = \begin{bmatrix} K_{ss} - \omega^2 M_{ss} & 0 \\ -\omega^2 M_{fs} & K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & K_{fs} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (4.23)$$

Assim a equação (4.15) pode ser reescrita a partir das equações (4.20) e (4.21).

$$Z_1 U = F - Z_2 U \quad (4.24)$$

Considerando que o vetor de resposta inicial é dado por:

$$U^0 = Z_1^{-1} F \quad (4.25)$$

Assim o restante dos vetores de resposta são dadas por:

$$U^n = U^0 + B U^{n-1} \quad (4.26)$$

Onde o vetor B é dado por:

$$B = Z_1^{-1} Z_2 \quad (4.27)$$

A condição necessária para que a equação (4.26) convirja é que a norma da matriz B seja menor que um, ou seja, $\|B\| < 1$ ou que o maior autovalor de B seja 1. Como a norma é função da frequência ω , este valor pode ser muito grande quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural da estrutura ou do fluido, desta forma impedindo a convergência do sistema. Para evitar os problemas de convergência quando a excitação está

próxima de uma frequência natural, adota-se uma matriz de impedância desacoplada, assim a resposta do domínio estrutural e do domínio fluído são separados e então obtem-se o vetor de resposta inicial como:

$$U_s^0 = Z_{ss}^{-1} F_s \quad (4.28)$$

$$U_f^0 = B_{fs} U_s^0 \quad (4.29)$$

Assim o restante dos vetores de resposta são dados por:

$$U_s^n = U_s^{n-1} + B_{sf} U_f^{n-1} \quad (4.30)$$

$$U_f^n = B_{fs} U_s^n \quad (4.31)$$

Onde os vetores B_{sf} e B_{fs} são dados por:

$$B_{fs} = -Z_{ff}^{-1} Z_{fs} \quad (4.32)$$

$$B_{sf} = -Z_{ss}^{-1} Z_{sf} \quad (4.33)$$

Onde:

$$Z_{ss} = K_{ss} - \omega^2 M_{ss} \quad (4.34)$$

$$Z_{ff} = K_{ff} - \omega^2 M_{ff} \quad (4.35)$$

$$Z_{sf} = Z_{fs} = -\omega^2 M_{fs} \quad (4.36)$$

Resolver equações desacopladas ou separadamente é menos custoso em termos computacionais do que resolver equações acopladas.

4.4 Resposta em frequência modal

A resposta em frequência modal ou do inglês *Modal Frequency Response* (MFR) é uma técnica amplamente utilizada em domínios estruturais, esta mesma técnica pode ser empregada em sistemas acoplados fluido-estrutura.

Para o cálculo utilizando base modal assume-se que não existem autovalores nulos ou repetidos no sistema. As matrizes de autovalores e de autovetores a direita são representadas por A e Φ respectivamente, desta forma tem-se:

$$A = \text{diag}\{\lambda\} \quad (4.37)$$

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_n] \quad (4.38)$$

Considerando-se as condições de ortogonalidade do sistema e a normalização em relação à massa, a inversa da matriz de impedância do sistema pode ser escrita como:

$$Z^{-1} = \Phi \Omega^{-1} \bar{\Phi}^T \quad (4.39)$$

Onde $\bar{\Phi}$ representa os autovalores à esquerda como visto no item 4.2 e o termo Ω^{-1} relaciona os autovalores. Ambos os termos são determinados por:

$$\bar{\Phi}^T = [\Phi_s^T \quad \Phi_f^T \quad A^{-1}] \quad (4.40)$$

$$\Omega^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{1}{\lambda_i - \omega^2}\right\} \quad (4.41)$$

Sendo Φ_s e Φ_f as submatrizes da matriz de autovetores acoplados à direita em relação aos domínios estruturais e do fluido.

A resposta em frequência modal pode ser obtida da seguinte forma:

$$U = \Phi Q \quad (4.42)$$

Onde a matriz Q é obtida pela substituição da equação (4.39) e (4.42) na equação (4.19), então tem-se:

$$Q = \Omega^{-1} \bar{\Phi}^T F \quad (4.43)$$

Chama-se a solução u como a resposta em frequência e desta forma tem-se:

$$u = \sum_{i=1}^n \phi_i q_i \quad (4.44)$$

Substituindo a equação (4.44) na equação (4.1), pré-multiplicando por ϕ_i^T e usando a condição de ortogonalidade do sistema acoplado, tem-se:

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.45)$$

Sendo:

$$m_i = \bar{\phi}_i^T M \phi_i \quad (4.46)$$

$$k_i = \bar{\phi}_i^T K \phi_i \quad (4.47)$$

$$f_i = \bar{\phi}_i^T F \quad (4.48)$$

Considerando a força com uma excitação harmônica atuando na estrutura, a resposta u também será harmônica. Então tem-se:

$$f_s = F_s e^{j\omega t} \quad (4.49)$$

Generalizando as equações (4.49) e da análise em frequência tem-se:

$$f = F e^{j\omega t} \quad (4.50)$$

$$u = U e^{j\omega t} \quad (4.51)$$

$$q_i = Q_i e^{j\omega t} \quad (4.52)$$

Substituindo as equações (4.50), (4.51) e (4.52) nas equações (4.44) e (4.45) obtém-se:

$$U = \sum_{i=1}^n \phi_i Q_i \quad (4.53)$$

Onde:

$$Q_i = \phi_i \left(\frac{1}{\lambda_i - \omega^2} \right) \bar{\phi}_i^T F \quad (4.54)$$

A grande vantagem da superposição modal é incluir apenas um número limitado de modos no cálculo, normalmente bem inferior ao número de graus de liberdade do sistema, desta forma diminuindo drasticamente o custo computacional.

A desvantagem deste método fica por conta da determinação do número de modos a ser utilizado, um número inferior ao necessário causa erros nos valores das frequências naturais encontradas, acima do necessário pode aumentar muito o tempo de processamento não compensando a substituição do método direto.

4.5 Otimização através de parâmetros

O objetivo de uma otimização paramétrica é buscar a melhor configuração de um sistema através da modificação de um conjunto de parâmetros na forma de um vetor. A melhor combinação dos parâmetros deste vetor leva ao melhor resultado possível, sendo este o menor valor possível, ou o maior valor possível de uma resposta desejada do sistema. Em muitos casos as modificações dos parâmetros estão sujeitas a certas restrições; seja na forma de restrições de igualdade onde os parâmetros devem assumir um valor determinado, seja na forma de restrições de desigualdade onde os parâmetros não podem assumir um determinado valor. Também pode existir a condição dos parâmetros adotarem valores de contorno, assumindo valores dentro de certas fronteiras com um limite inferior e/ou limite superior.

As funções e restrições descritas podem ser matematicamente expressas da seguinte forma:

Função objetivo de minimização:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n \end{aligned} \quad (4.55)$$

Restrições de igualdade:

$$h_k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.56)$$

Restrições de desigualdade:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.57)$$

Valores limites ou condições de contorno:

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1, \dots, n \quad (4.58)$$

Desta forma $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}^n$ é o vetor de parâmetros do projeto, $f(f : \mathfrak{X}^n \Rightarrow \mathfrak{R})$ é a função objetivo, $\mathbf{g}(\mathbf{g} : \mathfrak{X}^n \Rightarrow \mathfrak{R}^m)$ é o vetor de restrições de desigualdade, e $\mathbf{h}(\mathbf{h} : \mathfrak{X}^n \Rightarrow \mathfrak{R}^l)$ é o vetor de restrições de igualdade. Observa-se que um problema de maximização equivale a minimizar $-f(\mathbf{x})$.

A solução de problemas com rapidez e precisão depende de vários fatores que devem ser levados em consideração: o tamanho do problema, o número de variáveis e o número de restrições. Quanto mais variáveis, mais restrições e mais complexo a relação entre elas, mais tempo de processamento é necessário e menor tende a ser a precisão. Outro fator fundamental é se a relação entre as variáveis é linear ou não. Problemas não lineares são mais complexos de serem resolvidos. Neste trabalho as relações entre as variáveis utilizadas podem ser não lineares, logo, a função objetivo e as restrições são consideradas funções não lineares das variáveis de projeto. A solução de problemas não lineares normalmente envolve processos iterativos para estabelecer uma direção de procura. Uma maneira de se conseguir isto é através de uma programação quadrática (*Quadratic Programming* – QP). Um problema QP envolve a solução de uma função objetivo quadrática linearmente restrita.

4.6 Otimização através de Programação Quadrática Sequencial.

Na otimização restrita, o objetivo geral é transformar o problema em um subproblema mais simples que pode logo ser resolvido e utilizado como a base de um processo iterativo. Um dos métodos empregados para este tipo de simplificação utiliza as equações de Karush-Khun-Tuker (KKT). As equações KKT são condições necessárias para otimalidade num problema de otimização restrita. Se o problema é um assim chamado problema de programação convexa, de forma que $f(\mathbf{x})$ e $g_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, m$, são funções convexas, então as equações KKT são ambas necessárias e suficientes para um ponto de solução global. Desta forma as equações (4.55) e (4.58) são estabelecidas através das equações de KKT como:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m v_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

$$v_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.60)$$

$$v_i^* \geq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.61)$$

A equação (4.59) descreve o cancelamento dos gradientes entre a função objetivo e as restrições ativas no ponto de solução \mathbf{x}^* . Para os gradientes serem cancelados, os multiplicadores de Lagrange $v_i^*, i = 1, \dots, m$, são necessários para balancear os desvios em magnitude dos gradientes da função objetivo e dos gradientes das restrições. As restrições inativas não estão incluídas na operação de cancelamento e, portanto são atribuídos para eles valores nulos dos multiplicadores de Lagrange. Isto está estabelecido implicitamente nas equações (4.60) e (4.61).

A solução das equações de KKT é o ponto de partida de muitos algoritmos de programação não linear. Os métodos quase-Newton garantem convergência superlinear, ao acumular informação de segunda ordem com relação às equações KKT, utilizando para isso um procedimento de atualização quase-Newton. Esses métodos são comumente denominados de métodos de Programação Quadrática Sequencial (*Sequential Quadratic Programming – SQP*), porquanto um subproblema QP é resolvido em cada interação principal. O processo SQP é amplamente utilizado em resolução de problemas não lineares em diversas áreas, pois é um dos métodos que oferece as melhores eficiências e precisão.

O processo de otimização SQP possui um bom desempenho desde que o problema que se deseja otimizar não possua muitas variáveis, pois um número elevado de variáveis envolve

um consumo grande de memória aumentando muito o custo computacional. Outras condições importantes: o problema não deve ser complexo a ponto que as funções e gradientes não possam ser avaliados com uma alta precisão.

Nas iterações principais do método SQP uma aproximação da Hessiana, \mathbf{H} , da função Lagrangeana, L , é obtida utilizando um método de atualização quase-Newton. Logo a Hessiana é usada para gerar um subproblema QP cuja solução serve para formar uma direção de busca num procedimento de procura unidimensional.

Usando as equações (4.55), (4.56), (4.57) e (4.58), assumindo que as condições de contorno dadas pela equação (4.58) são de desigualdade, a formulação do subproblema QP através de uma aproximação quadrática da função Lagrangeana fica:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(\mathbf{x}) \quad (4.62)$$

Fazendo a segunda derivada da equação (4.62) acima tem-se:

$$\nabla_x^2 L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_x^2 f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla_x^2 g_i(\mathbf{x}) \quad (4.63)$$

Após definido o valor de \mathbf{x} numa iteração principal k com $\mathbf{x}^{(k)}$, a direção de procura usada para \mathbf{d} na próxima iteração $k+1$ é obtida utilizando-se uma simplificação do problema original. Para que isso seja feito um subproblema QP de otimização utilizando iterações internas envolvendo a linearização das restrições não lineares é formulado, segundo:

$$\underset{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimizar}} \left[\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d} + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} \right] \quad (4.64)$$

Sujeito a:

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e \quad (4.65)$$

$$\nabla g_i(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d} + g_i(\mathbf{x}^{(k)}) \leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.66)$$

A matriz $\mathbf{H}^{(k)}$ é uma matriz aproximada definida positiva da matriz Hessiana da função $\nabla_x^2 L(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})$. As equações (4.65) e (4.66) são resolvidas utilizando o algoritmo QP, após o qual a solução é utilizada para obter um novo ponto $\mathbf{x}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (4.67)$$

O tamanho do passo $\alpha^{(k)}$ é determinado a partir de um procedimento de procura unidimensional de forma a garantir um decréscimo suficiente numa função mérito.

4.7 Implementação do método SQP no Meflab

Para a implementação do programa SQP no programa Meflab, o algoritmo da função *fmincon* do Matlab foi usado. Esta função encontra o valor mínimo de uma função multivariável não linear restrita, $f(\mathbf{x})$, de forma que:

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } \begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \mathbf{ceq}(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq} \mathbf{x} = \mathbf{beq} \\ \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \end{cases} \quad (4.68)$$

Onde \mathbf{x} , \mathbf{b} , \mathbf{beq} , \mathbf{lb} e \mathbf{ub} são vetores, \mathbf{A} e \mathbf{Aeq} são matrizes, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{ceq}(\mathbf{x})$ são funções que retornam vetores, e $f(\mathbf{x})$ é uma função que retornar um escalar, $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{ceq}(\mathbf{x})$ podem envolver funções não lineares, do tipo aplicado neste trabalho. Também é necessário fornecer um valor inicial $\mathbf{x}(0)$ para iniciar a procura pelo melhor valor da variável. O comando *fmincon* possui diversas opções de entradas e saída de argumentos.

A função *fmincon* pode usar dois algoritmos distintos para a resolução de problemas de minimização: otimização de larga escala ou otimização de média escala.

A função *fmincon* só resolve funções e variáveis de valor real e pode apenas fornecer soluções locais. A função a ser minimizada assim como suas variáveis devem ser contínuas.

4.7.1 Algoritmo de otimização de larga escala

Este algoritmo é um método de região de confiança subespacial e é baseado no método interior-refletivo de Newton. Cada iteração envolve a solução aproximada de um grande sistema linear usando o método dos gradientes conjugados pré-condicionados (*Preconditioned Conjugate Gradients* - PCG).

Para o uso do algoritmo de otimização de larga escala é necessário ativar este método nas opções do comando *fmincon*, porquanto ele não é o método padrão, sendo necessário fornecer o gradiente da função objetivo. Quanto às restrições é possível usar apenas um tipo: Restrições de contorno inferiores (*lb*) e superiores (*ub*), ou restrições de igualdade lineares onde a matriz de restrições de igualdade *Aeq* não pode ter mais linhas que colunas. Também não é possível utilizar condições de desigualdade.

Este algoritmo é mais efetivo quando a matriz das segundas derivadas, ou seja, a matriz Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, também é informada. Porém a solução da verdadeira matriz Hessiana não é necessária.

Se uma das condições para o uso do algoritmo de otimização de larga escala não é atendida, o programa passa a usar automaticamente o algoritmo de otimização de média escala. Neste trabalho este algoritmo não foi aplicado, pois foi necessário usar ambos os tipos das restrições o que não é permitido.

4.7.2 Algoritmo de otimização de média escala

Este algoritmo utiliza o método SQP. Como já comentado o método SQP resolve um subproblema de programação quadrática QP a cada iteração. No caso da função *fmincon* uma estimativa da matriz Hessiana da função Lagrangeana é atualizada em cada iteração através da equação Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).

Uma procura linear é realizada usando uma função de mérito.

O algoritmo de otimização de média escala apresenta resultados melhores quando restrições de igualdade *Aeq* e *beq* são usadas no lugar de restrições do tipo *lb* e *ub*.

Como exemplo de visualização do caminho percorrido pelo algoritmo de otimização de média escala, a Figura 4.1 apresenta uma resolução da função não linear restrita de Rosenbrock dada pela equação (4.69).

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (4.69)$$

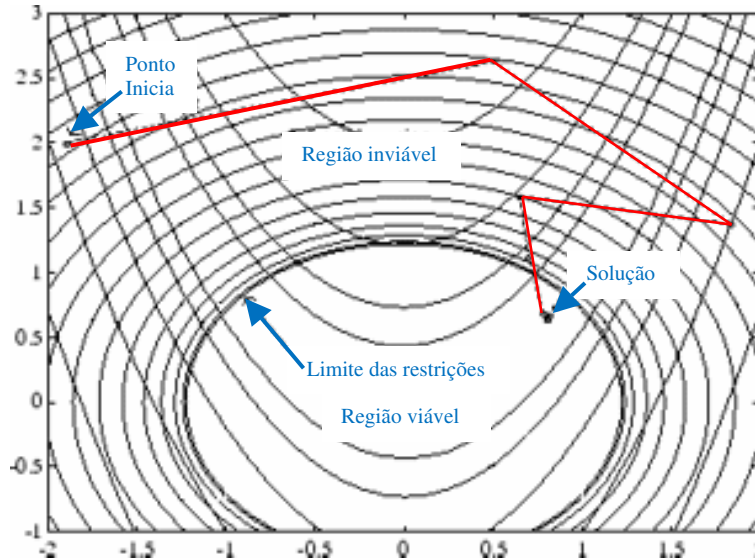


Figura 4.1 Método SQP aplicado a uma função não linear restrita de Rosenbrock.

Fonte: www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/fmincon.html.

A implementação do método SQP utilizada no comando *fmincon* consiste de três principais estágios: atualização da matriz Hessiana; solução da programação quadrática; e procura unidimensional e função mérito.

4.7.2.1 Atualização da matriz Hessiana

A cada interação principal uma aproximação positiva definida quase-Newton da Hessiana da função Lagrangeana, \mathbf{H} , é calculada usando o método BFGS, onde λ_i , $i=1, \dots, m$, é uma estimativa dos multiplicadores de Lagrange.

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{\mathbf{H}_k^T \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k} \quad (4.70)$$

Onde:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \quad (4.71)$$

$$\mathbf{q}_k = \left(\nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1}) \right) - \left(\nabla f(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla g_i(\mathbf{x}_k) \right) \quad (4.72)$$

Powell (1978), recomenda manter a Hessiana positiva definida mesmo que possa ser positiva indefinida no ponto de solução. Uma Hessiana positiva definida é obtida desde que $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$ seja positivo a cada atualização e que \mathbf{H} seja inicializada com uma matriz definida positiva. Quando $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$ não é positiva, \mathbf{q}_k é modificado elemento por elemento de forma que $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k \geq 0$. Se depois deste procedimento $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$ continua não positivo, \mathbf{q}_k é modificado adicionando um vetor \mathbf{v} multiplicado por um escalar w , de forma que:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k + w\mathbf{v} \quad (4.73)$$

Onde:

$$\begin{aligned} v_i &= \nabla g_i(\mathbf{x}_{k+1})g_i(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla g_i(\mathbf{x}_k)g_i(\mathbf{x}_k) \quad \text{se } (\mathbf{q}_k)_i w < 0 \text{ e } (\mathbf{q}_k)_i (\mathbf{s}_k)_i < 0, i = 1, \dots, m \\ v_i &= 0 \quad \text{para outra situação} \end{aligned} \quad (4.74)$$

E w é sistematicamente aumentado até $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$ se tornar positivo.

4.7.2.2 Solução da programação quadrática QP

A cada iteração principal do método SQP, um problema QP, mostrado a seguir, é resolvido, onde A_i refere-se à linha i da matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$:

$$\min \mathbf{q}(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{c}^T \mathbf{d} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{d} = \mathbf{b}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (4.76)$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{d} \leq \mathbf{b}_i \quad i = m_e + 1, \dots, m \quad (4.77)$$

O procedimento para a solução envolve duas fases. A primeira fase envolve o cálculo de um ponto viável (se ele existe). A segunda fase envolve a geração de uma sequência iterativa de pontos viáveis que convergem para uma solução. No método utilizado, um conjunto ativo, \bar{A}_k , é mantido que é uma estimativa das restrições ativas no ponto de solução.

\bar{A}_k é atualizada a cada iteração k , e isto é usado para formar uma base para a direção de procura \hat{d}_k . Restrições de igualdade sempre ficam no conjunto ativo \bar{A}_k . A notação para a variável \hat{d}_k é usada para distinguir ela de d_k , das iterações principais do método SQP. A direção de procura \hat{d}_k é calculada e minimiza a função objetivo enquanto permanece nos contornos de qualquer restrição ativa. O subespaço viável para \hat{d}_k é formado a partir de uma base Z_k onde as colunas são ortogonais ao conjunto ativo estimado \bar{A}_k , de forma que $\bar{A}_k Z_k = \mathbf{0}$. Então uma direção de procura, que é formada de uma soma linear de qualquer combinação das colunas de Z_k , permanece nos contornos das restrições ativas.

A matriz Z_k é formada das últimas $(m-l)$ colunas da decomposição QR da matriz \bar{A}_k^T , onde l é o número de restrições ativas e $l < m$. Ou seja, Z_k é dada por:

$$Z_k = Q[:, l+1 : m] \quad (4.78)$$

Onde:

$$Q^T \bar{A}_k^T = \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Uma vez que Z_k é encontrado, uma nova direção de procura \hat{d}_k é estabelecida de forma a minimizar $q(d)$ onde \hat{d}_k está em um espaço nulo das restrições ativas. Isto é, \hat{d}_k é uma combinação linear das colunas de Z_k de forma que para algum vetor p ,

$$\hat{d}_k = Z_k p \quad (4.80)$$

Vista a função quadrática como uma função de \mathbf{p} , após substituir por $\hat{\mathbf{d}}_k$, tem-se:

$$\mathbf{q}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{c}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{p} \quad (4.81)$$

Diferenciando a função anterior em relação à \mathbf{p} , resulta:

$$\nabla \mathbf{q}(\mathbf{p}) = \mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} + \mathbf{Z}_k^T \mathbf{c} \quad (4.82)$$

Onde $\mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k$ é chamada de Hessiana projetada.

O menor valor da função $\mathbf{q}(\mathbf{p})$ no subespaço definido por \mathbf{Z}_k ocorre quando:

$$\nabla \mathbf{q}(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.83)$$

A expressão anterior é a solução do sistema linear de equações:

$$\mathbf{Z}_k^T \mathbf{H} \mathbf{Z}_k \mathbf{p} = -\mathbf{Z}_k^T \mathbf{c} \quad (4.84)$$

O algoritmo SQP usa cada passo iterativo dentro dos limites das restrições. Além disso, os passos das diferenças finitas também respeitam os limites estabelecidos. Um passo pode estar exatamente sobre um contorno. Isto é interessante e benéfico quando a função objetivo ou as restrições não lineares são indefinidas ou são complexas fora da região de restrição.

Durante as iterações, o algoritmo SQP pode tentar realizar um passo que cause uma falha. Isto significa que a função objetivo ou as restrições não lineares encontraram valores infinitos, resultados numéricos indefinidos ou valores complexos. Nestes casos, o algoritmo tenta assumir um passo menor.

4.7.2.3 Procura unidimensional e função mérito

A solução do subproblema QP produz um vetor \mathbf{d}_k que é usado para formar uma nova iteração:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k \quad (4.85)$$

O tamanho de passo α é determinado de forma a produzir um decréscimo em uma função mérito. A função mérito usada em Powell (1978), e Han (1977), é aplicada neste caso, considerando um parâmetro de penalidade r_i ,

$$\Psi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m r_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=m_c+1}^m r_i \cdot \max[0, g_i(\mathbf{x})] \quad (4.86)$$

4.7.3 Rotinas de viabilização

O algoritmo SQP da função *fmincon* possui dois métodos distintos para solucionar a equação (4.75), quando as restrições não são satisfeitas:

1 – O algoritmo SQP pode combinar a função objetivo e as funções de restrição dentro de uma função mérito. O algoritmo tenta minimizar a função mérito sujeita a restrições atenuadas. Este problema modificado pode conduzir a uma solução viável. Porém, este método tem mais variáveis que o problema original, então o tamanho do problema da equação (4.75) aumenta. Este aumento pode tornar a solução do subproblema mais lento.

2 – Supondo que as restrições não lineares não são satisfeitas, e o passo usado tenha causado crescimento na violação da restrição. O algoritmo SQP tenta obter uma viabilidade usando uma aproximação de segunda ordem para as restrições. A técnica de segunda ordem pode levar a uma solução viável. Porém, esta técnica pode tornar a resolução mais lenta, pois requer mais cálculos para as funções de restrição não lineares.

4.8 Otimização através de algoritmos Genéticos.

O algoritmo de otimização Genético foi escolhido para este trabalho, pois é um algoritmo de procura global cuja eficiência já foi comprovada em diversos estudos, desta forma serve como uma excelente base de comparação para o algoritmo SQP.

Os algoritmos Genéticos apresentam um conjunto de procedimentos e técnicas baseadas e estruturadas no princípio da evolução genética dos seres vivos observados na natureza, onde os seres evoluem através da reprodução, seleção e mutação.

O algoritmo foi inicialmente desenvolvido por John Holland e sua equipe na Universidade de Michigan (1975) e posteriormente popularizada por David Goldberg, da mesma Universidade.

Para que se possa entender melhor este processo computacional, primeiramente alguns conceitos biológicos e genéticos são revisados:

Muitos organismos têm múltiplos cromossomas em cada célula e posteriormente, para

Cromossomo: Todos os organismos vivos são constituídos por células, e cada célula contém o mesmo conjunto de um ou mais cromossomos, seqüências de DNA que servem como um "modelo" para o organismo. Um cromossomo pode ser conceitualmente dividido em genes, cada um dos quais codifica uma proteína particular, Melanie (1996).

Gene: Simplificadamente, pode-se pensar um gene como algo que codifica uma característica, como cor dos olhos. Os diferentes possíveis "ajustes" para uma característica (por exemplo, azul, marrom) são chamados alelos. Cada gene está localizado em um locus específico (posição) no cromossomo, Melanie (1996).

Genótipos: A coleção completa de material genético (todos cromossomos em conjunto) é chamado genoma do organismo. O genótipo refere-se ao jogo particular dos genes contidos em um genoma. Dois indivíduos que têm genomas idênticos são ditos ter o mesmo genótipo, Melanie (1996).

Fenótipo: O fenótipo do organismo são as suas características físicas e mentais, tais como cor dos olhos, altura, tamanho do cérebro e a inteligência, Melanie (1996).

Mutações: São quando os filhos têm os nucleotídeos únicos (bits elementar de DNA) alterados em relação aos originais dos pais, alterando as características originais, Melanie (1996).

Seleção natural: Quanto maior a aptidão de um organismo de reproduzir (viabilidade), gerar filhos (fertilidade) e se adaptar ao ambiente, maior é sua chances de ter sucesso na seleção natural e se reproduzir, Melanie (1996).

Recombinação: Na natureza, a maioria das espécies que se reproduzem sexualmente são diplóides, incluindo os seres humanos, que tem 23 pares de cromossomos. Durante a recombinação, reprodução (ou *crossover*) ocorre: em cada um dos pais, os genes são trocados entre cada par de cromossomos para formar um gameta (um único cromossomo), e em seguida gâmetas provenientes de ambos os pais criam um conjunto completo de cromossomos diplóides, Melanie (1996).

Os conceitos biológicos acima são aplicados da seguinte forma na implementação computacional dos algoritmos Genéticos:

Gene: Para a programação o gene passa a ser um único bit ou um conjunto de bits posicionados lado a lado que codificam e controlam certa característica de um sistema ou estrutura, por exemplo, espessura, largura, rigidez, etc.

Cromossomos: Para a programação um cromossomo representa um conjunto de bits que caracteriza um individuo que será usado para a solução do problema.

Genótipos: Para a programação representa uma solução potencial de um problema que está codificada, ou seja, nada mais é que o valor da função objetivo na forma codificada. Neste trabalho a codificação usada para representar um cromossomo foi a binária.

Fenótipo: Para a programação representam os valores decodificados, ou reais, dos genótipos, ou seja, representam uma solução potencial com valor de base decimal da função objetivo.

Mutação: Para a programação a mutação gera variações no conjunto de genes do individuo, causam uma mudança aleatória em um bit ou conjunto de bits de um cromossomo.

Seleção natural: Na programação é a forma como os indivíduos ou cromossomos são selecionados para serem recombinados. Esta seleção é feita de forma que os indivíduos com os melhores fenótipos têm as maiores chances de se reproduzir ou serem recombinados.

Recombinação: Na programação é o processo pelo qual os indivíduos selecionados são recombinados de forma a formar um novo individuo ou cromossomo.

Os algoritmos Genéticos se diferem como outros métodos de otimização principalmente nos seguintes aspectos:

- 1 – Trabalham com parâmetros codificados, normalmente em base binária, e não diretamente com os valores destes parâmetros. Isto também faz com que estes parâmetros

assumam valores discretos e não contínuos como normalmente acontece em outros processos de otimização.

2 – Os algoritmos Genéticos utilizam um conjunto de indivíduos ou cromossomos para fazer sua busca, diferente de outros métodos que usam um valor único ou indivíduo único.

3 – A fonte de informação usada para gerar a maximização ou minimização pelo algoritmo Genético é diretamente a função objetivo. Outros métodos normalmente utilizam gradientes como fontes de informação.

4 – Os algoritmos genéticos usam regras de transição que são probabilísticas e não determinísticas.

A solução de problemas com rapidez e precisão depende de vários parâmetros que devem ser levados em consideração, o número de indivíduos ou cromossomos, a quantidade de níveis usados para codificar cada variável ou gene, e as condições de parada utilizadas. Diferente da maioria dos outros métodos iterativos, cada análise realizada com o método Genético pode convergir para diferentes respostas dependendo da configuração de parâmetros usados. Uma boa escolha faz com que o algoritmo convirja para o mesmo resultado ou para resultados muito próximos, cuja diferença não seja significativa entre as análises realizadas. Parâmetros mal selecionados levam a resultados dispersos e a um aumento no tempo de processamento.

4.9 Implementação do algoritmo Genético no Meflab

O algoritmo Genético foi implementado no Meflab através de um programa escrito pelo próprio autor usando os comandos do Matlab®, não sendo usando códigos de otimização Genético prontos do Matlab®. Este programa permite encontrar valores próximos do menor resultado possível, ou eventualmente o menor valor possível, de resposta em frequência sistemas somente estruturais ou sistemas fluido-estrutura. Os cálculos de resposta modal são realizados com rotinas já desenvolvidas com base no Capítulo 3 e nas Seções 4.2 e 4.4. A Figura 4.2 mostra a rotina de otimização do algoritmo Genético programado.

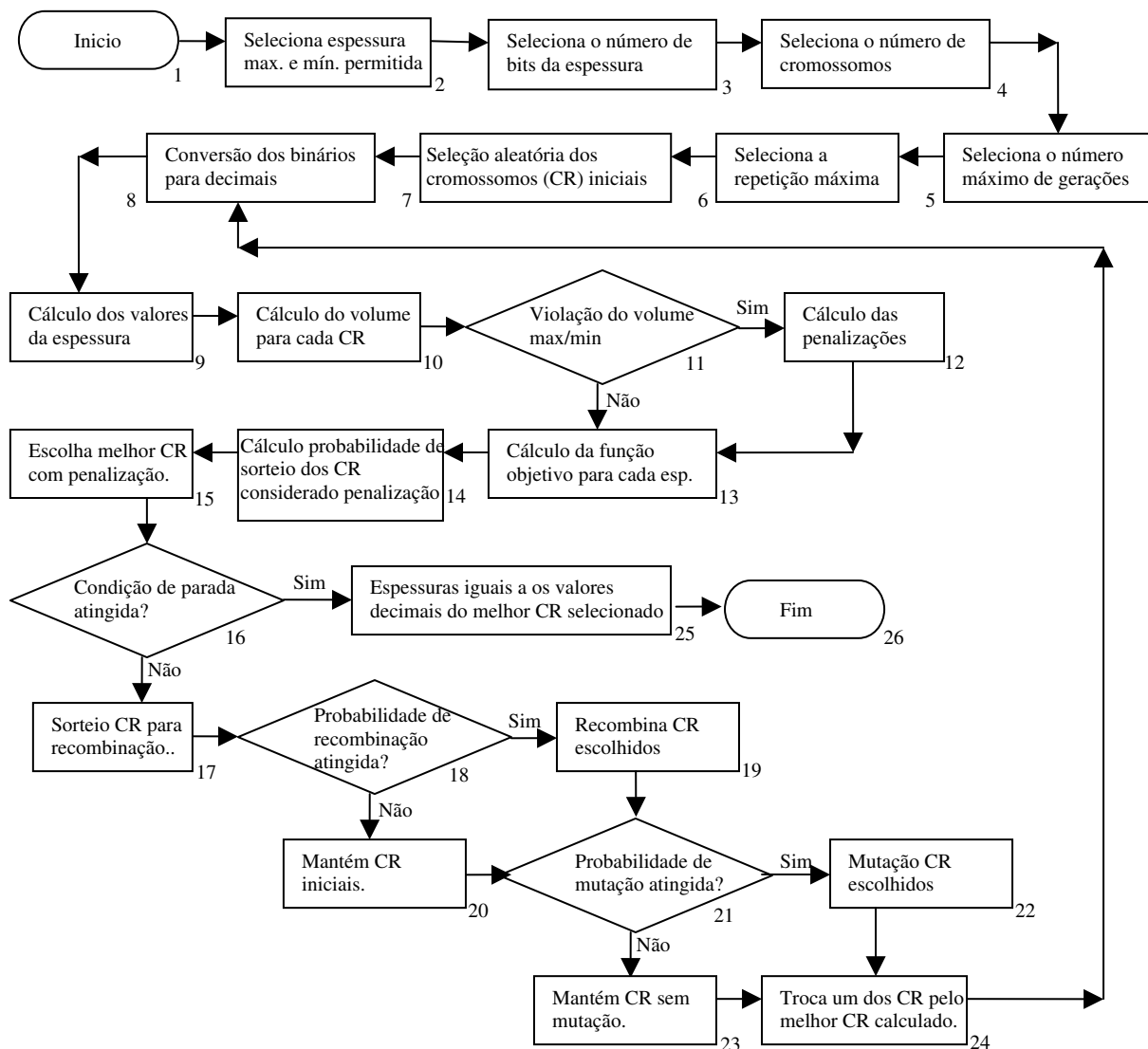


Figura 4.2 Fluxograma do processo de otimização Genética.

Onde

- 1 – Inicialização da otimização.
- 2 - Parâmetro fornecido pelo usuário. Espessura máxima e mínima permitida para os elementos finitos.
- 3 – Parâmetro fornecido pelo usuário. Número de bits que serão usados para codificar as espessuras de cada elemento finito.
- 4 – Parâmetro fornecido pelo usuário. Números de cromossomos que são usados no cálculo devem ser par devido à forma como o algoritmo foi estruturado.
- 5 – Parâmetro fornecido pelo usuário. Número máximo de gerações, ou repetições, que o algoritmo pode executar, quando este número é atingido a otimização é encerrada.

6 – Parâmetro fornecido pelo usuário. Número máximo de vezes seguidas que o mesmo valor da função objetivo do melhor cromossomo pode aparecer. Ele serve para verificar quando há convergência para um valor. Porém ele não é determinante para a parada da otimização, é necessário também que não haja violação das restrições para o cromossomo ao qual pertence o melhor valor.

7 – Escolha aleatória dos cromossomos iniciais é feita com o número definido pelo usuário no passo 4 e o número de bits que codifica cada elemento finito. A escolha aleatória é feita através de um comando interno do Matlab®, onde uma sequência binária é aleatoriamente gerada para cada cromossomo.

8 – Converte o valor de cada sequência binária que representa um elemento finito em um número real.

9 – Calcula-se o valor real da espessura de cada elemento finito através da equação:

$$Esp = Mesp_{min} + Real \frac{Esp_{max} - Esp_{min}}{2^{bits} - 1} \quad (4.87)$$

Onde:

Esp é a matriz onde cada linha representa um cromossomo, e cada termo da matriz representa a espessura de um elemento finito.

$Mesp_{min}$ matriz onde cada linha representa um cromossomo, e cada termo da matriz representa a espessura mínima de um elemento finito selecionada pelo usuário no passo 2.

$Real$ é uma matriz onde cada linha representa um cromossomo contendo o valor real para cada elemento calculada no passo 8.

Esp_{min} é a espessura mínima permitida selecionada pelo usuário no passo 2.

Esp_{max} é a espessura máxima permitida selecionada pelo usuário no passo 2.

$bits$ é o número de bits que codificam o elemento finito definido pelo usuário no passo 3.

10 – Calcula o valor do volume para cada cromossomo:

$$Vol_i = Area.Esp_i^T \quad (4.88)$$

Onde:

$Area$ é um vetor linha da área invariante de cada elemento.

$Esp(i,:)$ é um vetor linha que contém as espessuras de cada elemento finito calculado no passo 9.

11 – Verifica se os volumes calculados no passo 10 violam a restrição em relação ao volume inicial pré-determinado internamente no algoritmo:

$$0,9Vol_{inicial} \leq Vol_i \leq 1,1Vol_{inicial} \quad (4.89)$$

Se há violação da restrição do volume vai para o passo 12, caso contrário vai para o passo 13.

12 – O fator de penalização é calculado das penalizações:

$$Se \ Vol_i \leq 0,9Vol_{inicial} \quad (4.90)$$

$$P_i = \frac{Vol_{inicial}}{Vol_i} \quad (4.91)$$

$$Se \ 1,1Vol_{inicial} \leq Vol_i \quad (4.92)$$

$$P_i = \frac{Vol_i}{Vol_{inicial}} \quad (4.93)$$

13 – Cálculo da resposta f_i baseada nas funções dos itens 4.2 e 4.4.

14 – Cálculo da probabilidade de sorteio dos cromossomos:

$$Ps_i = \frac{1}{1 + f_i(P_i + 1)^n} \quad (4.94)$$

Onde f_i é o valor da função objetivo de cada individuo calculada no passo 13 e

n é um valor ajustado para cada problema a ser analisado conforme a grandeza da função objetivo de forma a ajustar o valor do fator de penalização calculado no passo 12, ele deve permitir um balanceamento adequado entre as probabilidades de sorteios dos indivíduos com e sem penalização, de forma a não prejudicar a exploração de respostas nem a convergência do algoritmo.

15 – Seleção do melhor cromossomo baseado na probabilidade de escolha calculada no passo 14. Devido ao fato de as populações de cromossomos estarem sempre se renovando, um ótimo global pode desaparecer devido à presença de muitos cromossomos próximos ao um

ótimo local, então manter o melhor cromossomo para as próximas gerações garante que isso não ocorra. Assim o indivíduo com maior PS é escolhido, ou seja, o indivíduo com a menor penalização e o menor valor da função objetivo é mantido para a próxima geração.

16 – Verifica se as condições de paradas foram atingidas. As condições de paradas são três:

1 – Número máximo de vezes seguidas que o mesmo valor da função objetivo do melhor cromossomo pode aparecer é maior que o valor estipulado no passo 6:

$$\text{Número de repetições} \geq \text{Valor Passo 6} \quad (4.95)$$

2 – O melhor cromossomo, o que possui a resposta da função objetivo mais otimizada, não viola nenhuma restrição:

$$\text{Melhor indivíduo} \rightarrow P_i = 0 \quad (4.96)$$

3 – O Número máximo de gerações é igual ao número máximo estabelecido no passo 5:

$$\text{Número Gerações} = \text{Número máximo Gerações} \quad (4.97)$$

Se as condições 1 e 2 são atingidas ao mesmo tempo o programa vai para o passo 25. Se a condição 3 é atingida o programa vai para o passo 25. Caso contrário ele vai para o passo 17.

17 – Sorteio dos cromossomos para recombinação baseado no método da roleta e na probabilidade de sorteio calculada no passo 14. Cromossomos com melhor PS , que significa estar melhor adaptados ou com menor função de custo, tem mais chances de serem escolhidos, mas não significa que serão, indivíduos menos adaptados tem menos chance de serem escolhidos e tendem a desaparecer. O número de cromossomos sorteados é igual ao número de cromossomos determinado no passo 4, porém um indivíduo pode ser selecionado mais de uma vez para o sorteio.

18 – Verifica se haverá cruzamento entre os pares de cromossomos sorteados no passo 17. Para isso um número de 0 a 1 é sorteado aleatoriamente, e se este valor for menor ou igual

a 0,9 ocorre o cruzamento e o programa vai para o passo 19, caso contrário vai para o passo 20.

19 – Recombina os cromossomos sorteados no passo 17 dois a dois, gerando dois filhos deles. Esta recombinação é feita através da escolha aleatória de um ponto dos cromossomos, estes cromossomos são divididos em dois a partir do ponto escolhido. O primeiro filho fica com a primeira parte do cromossomo 1 e a segunda parte do cromossomo 2. O segundo filho fica com a primeira parte do cromossomo 2 e a segunda parte do cromossomo 1. A Figura 4.3 mostra de forma esquematizada o processo de seleção e recombinação:

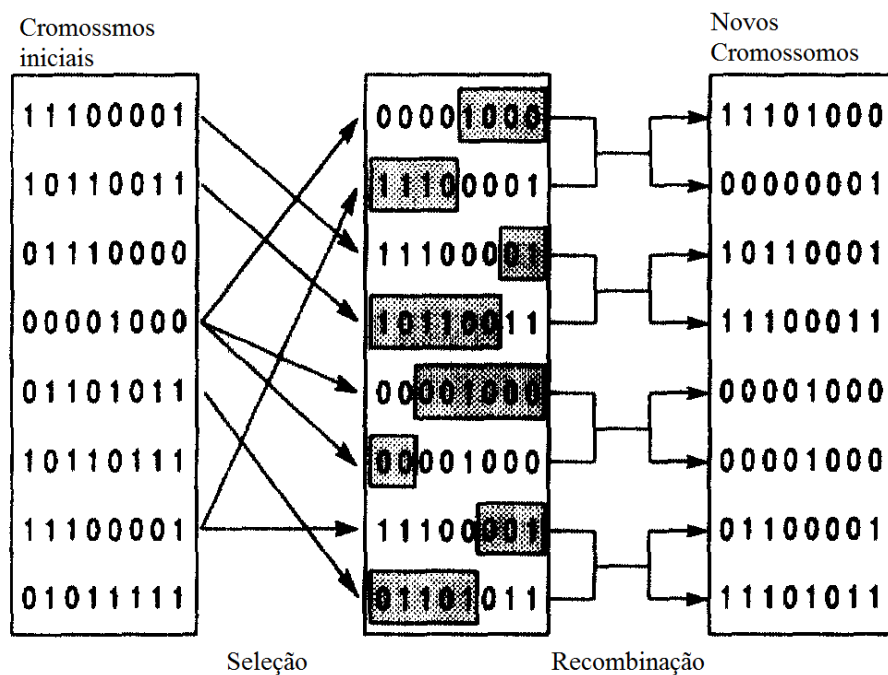


Figura 4.3 Processo de seleção e recombinação dos cromossomos

Fonte: adaptada de Leite e Topping (1998).

20 – Cromossomos pais sorteados no passo 17 são mantidos, caso a probabilidade de cruzamento não tenha sido atingida no passo 18.

21 – Verifica se haverá mutação entre os filhos gerados no passo 19 ou pais mantidos no passo 20. Para isso um número de 0 a 1 é sorteado aleatoriamente, e se este valor for menor ou igual a um valor estipulado haverá mutação, este valor varia de acordo com o número de ciclos ou gerações, inicia com um valor 0,20 e diminui até no máximo 0,1.

$$\text{Probabilidade de mutação} = 0,20 - 0,01 \times \text{Número de Gerações} \quad (4.98)$$

Se a Probabilidade de mutação $< 0,1$

$$\text{Probabilidade de mutação} = 0,1 \quad (4.99)$$

Este valor variável é o mais indicado conforme a literatura, pois garante uma grande capacidade de exploração no início da otimização e melhora a convergência no final.

22 – O indivíduo sofre uma mutação. Esta mutação consiste em inverter todos os bits do cromossomo escolhido, ou seja, os bits com valor 1 passam a ser 0 e os de valor 0 passam a ser 1.

Estas mutações servem para procurar novas respostas, caso não encontrem estes cromossomos tendem a desaparecer durante os processos de seleção, caso o valor da sua resposta seja pior que os demais, caso contrário tende a se sobrepor aos outros devido ao seu melhor valor.

23 – Mantém os cromossomos do passo 21 sem mutação.

24 – Substitui aleatoriamente um dos cromossomos pelo melhor cromossomo selecionado no passo 15 e volta para o passo 8.

25 – As espessuras dos elementos finitos da placa são estabelecidas como os valores reais do melhor cromossomo escolhido no passo 15.

26 – Finaliza otimização.

O algoritmo acima foi testado e teve seu desempenho comparado com o algoritmo SQP do Matlab® nos capítulos que seguem.

4.10 Diminuição de resposta em frequência

Sistemas mecânicos, que podem ser somente estruturais, somente acústicos ou acoplados fluidoestrutura, estão normalmente sujeitos a esforços, quando estes esforços não são constantes ao longo do tempo, uma vibração em todo o sistema será gerada. Normalmente vibrações são efeitos não desejados, pois podem levar um sistema ao colapso, podem gerar ruído ou desconforto aos usuários, por isto a minimização da vibração é sempre desejada. Uma das formas de eliminar ou minimizar os efeitos vibracionais é reduzir o deslocamento da estrutura, também chamada de resposta, a certa excitação. Os deslocamentos ou respostas tendem a se tornar mais críticos quando a frequência de excitação, a que a estrutura esta submetida, se aproxima de sua frequência natural.

Existem muitas formas de se minimizar as respostas à vibração. Podem ser adicionados dispositivos de amortecimento passivo ou ativo. Modificado as propriedades físicas dos materiais como a rigidez. Outra forma é alterando as características geométricas dos sistemas como a forma ou as dimensões. Neste trabalho optou-se pela alteração dimensional do domínio estrutural do sistema acoplado através da variação da espessura das chapas. Uma das condições de contorno adotadas é a manutenção da massa estrutural original dentro de uma pequena variação para mais ou menos para evitar que o cálculo reduza ou, principalmente, aumente em demasia a massa do sistema, o que normamente não é desejado em aplicações reais, onde se busca reduzir o consumo de matérias primas .

A resposta em frequência U_{ij} , que no caso deste trabalho é a pressão sonora, em um ponto i de medição, resultante de uma força excitatória aplicada a um ponto da estrutura, chamado de grau de liberdade de entrada ($GDLin$), com uma frequência de excitação ω_j , pode ser obtida através do método de superposição modal acoplado para n modos. Com este método é possível calcular através da equação (4.53) a resposta do sistema:

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{GDLin} \sum_{l=1}^n \phi_{il} \left(\frac{1}{\lambda_l - \omega_j^2} \right) \bar{\phi}_{kl} F_k \quad (4.100)$$

Onde ϕ_{il} é a componente i do autovetor à direita l , λ_l é o autovalor l , $\bar{\phi}_{kl}$ a componente k do autovetor à esquerda l , sendo que todas estas componentes são função da variável de projeto, no caso deste trabalho a variável dimensional espessura.

A minimização da resposta é feita através de um número discreto de frequências de excitação chamado *freq*. Neste trabalho, para sistemas acoplados a excitação é aplicada no domínio estrutural e a medição da resposta é feita no domínio acústico ou fluido, esta configuração foi escolhida, pois é a que representa os efeitos encontrados em uma cabine de um veículo, onde a excitação é transmitida da estrutura ao ar da cabine e sentida no ouvido do motorista em forma de pressão sonora (ruído), assim o ponto desejado para diminuir a pressão sonora seria o ouvido do condutor. O ponto de leitura da resposta é chamado de grau de liberdade de saída ($GDLout$).

Como exemplo para a descrição geral de otimização ou diminuição da pressão sonora neste trabalho, e considerando a espessura estrutural e como a variável de projeto, o problema de otimização considerando a função objetivo abaixo:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \sum_{j=1}^{\text{freq}} \sum_{i=1}^{\text{GDLout}} |U_{ij}(e, \omega_j)| \\ & e \in \mathfrak{R}^r \end{aligned} \quad (4.101)$$

Sujeito as restrições:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r (e_i A_i) - \vartheta = 0 \\ & e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Onde e_i e A_i são a espessura e área do elemento finito i , respectivamente, ϑ é o volume constante da estrutura, e_{\min} e e_{\max} são as espessuras mínima e máxima do elemento finito, respectivamente.

5. ANÁLISE DE RESULTADOS

5.1 Generalidades

Os objetivos deste capítulo são apresentar os resultados quanto à estabilidade segundo o tipo de elemento nas análises de frequências naturais, a resposta em frequência e otimização da resposta em frequência de sistemas estruturais, acústicos e vibroacústicos. A programação é realizada utilizando as funções do programa Matlab, dentro do ambiente de desenvolvimento do programa acadêmico de elementos finitos denominado Meflab. Uma série de casos são resolvidos e os seus resultados discutidos através da comparação com respostas analíticas, quando disponíveis, ou com resultados implementados em programas comerciais como o MSC Nastran®, quando requerido.

Os sistemas foram implementados num computador com sistema operacional Microsoft® Windows XP, processador Intel® Core™ 2 Duo T5750, frequência do CPU de 2 GHz e 3 GB de RAM. A versão 2007 do Matlab®.

5.2 Sistema estrutural I: Análise de frequências naturais de uma chapa quadrada simplesmente apoiada

Com o objetivo de verificar e analisar as formulações adotadas para o cálculo das frequências naturais da parte estrutural dos sistemas vibroacústicos utilizados pelo programa Meflab, é proposto o estudo de uma placa simplesmente apoiada nas suas quatro arestas. Este estudo mostra a eficácia das formulações modais adotadas, uma vez que elas podem ser usadas para domínios somente estrutural, somente acústico ou vibroacústico. As frequências naturais são valores fundamentais para os cálculos de otimização.

No Meflab as frequências naturais são calculadas através das formulações de elemento de placa retangular fina não conforme e conforme, variando as quantidades de elementos por malha para verificar a estabilidade das formulações adotadas. Posteriormente o mesmo problema é resolvido com o programa comercial MSC Nastran®, para este programa também são variadas as quantidades de elementos por malha para verificar a estabilidade. Todas as respostas encontradas são verificadas através da resposta analítica disponível.

Para o estudo acima é considerado o exemplo 6.6 apresentado por Petyt (1998). Este problema propõe uma placa quadrada de 2,4 m de lado e 0,03 m de espessura, Figura 5.1. O material da chapa é aço com as seguintes propriedades:

Módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

Coefficiente Poisson $\nu = 0,3$

Massa específica $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

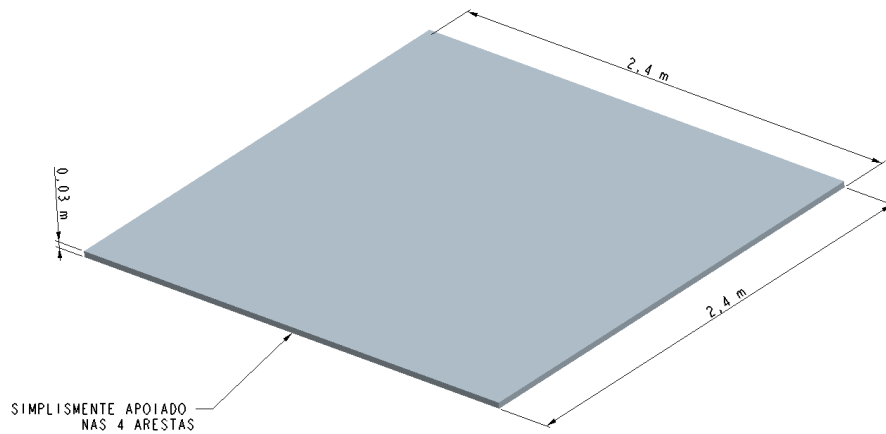


Figura 5.1 Chapa quadrada de aço.

Para verificar a estabilidade dos elementos a chapa da Figura 5.1 é dividida em 16, 64 e 144 elementos idênticos, conforme Figura 5.2, Figura 5.3 e Figura 5.4 respectivamente.

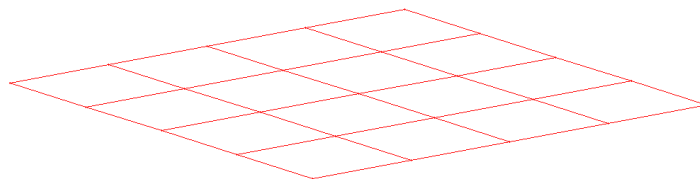


Figura 5.2 Chapa 4 x 4 – 16 elementos.

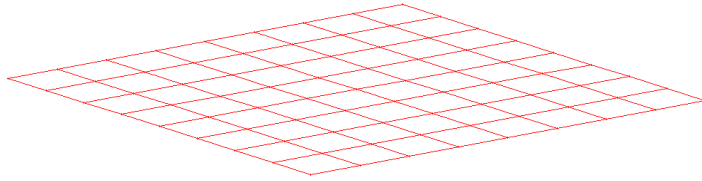


Figura 5.3 Chapa 8 x 8 – 64 elementos.

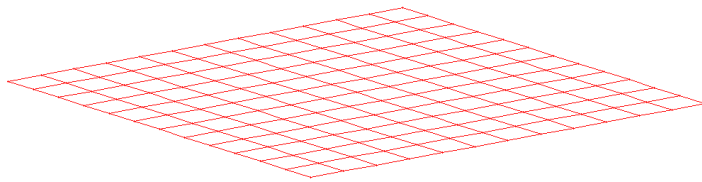


Figura 5.4 Chapa 12 x 12 – 144 elementos.

Para a análise da variação dos valores de frequências naturais com o número de elementos usados para discretizar a estrutura. São consideradas as 15 primeiras frequências naturais de vibração. Na Figura 5.5, Figura 5.6 e Figura 5.7 são apresentadas as frequências naturais em função do número de elementos da chapa para o Meflab com elementos não conformes, Meflab com elementos conformes e MSC Nastran®.

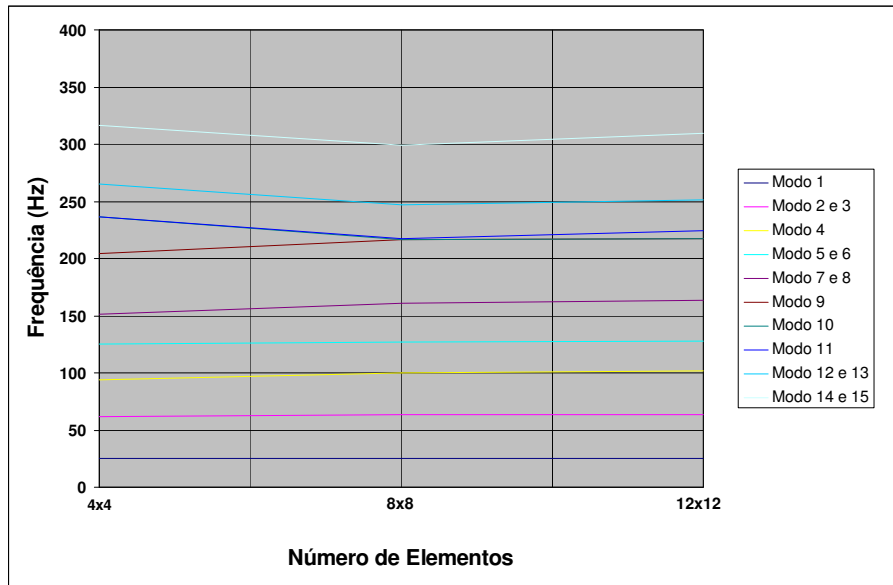


Figura 5.5 Frequência natural em função do número de elementos - MeFlab elemento não conforme

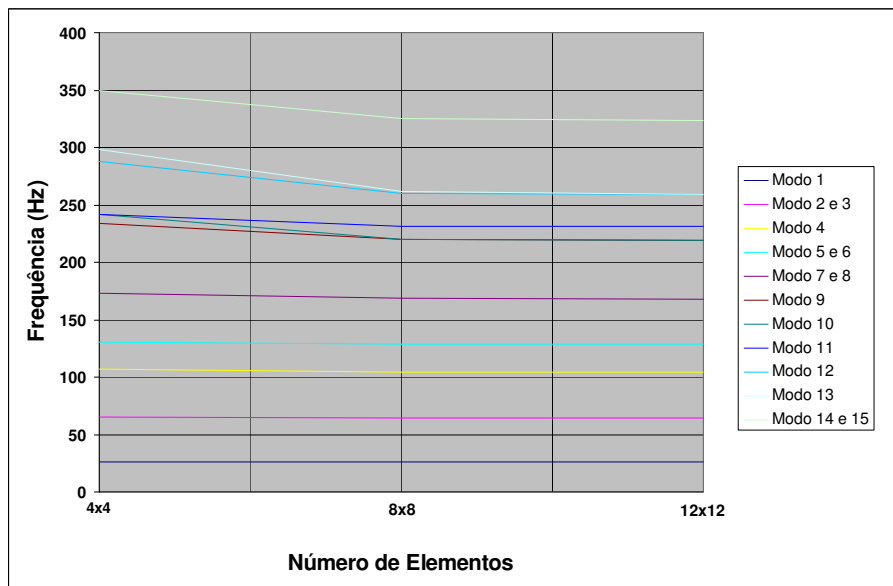


Figura 5.6 Frequência natural em função do número de elementos – MeFlab elemento conforme

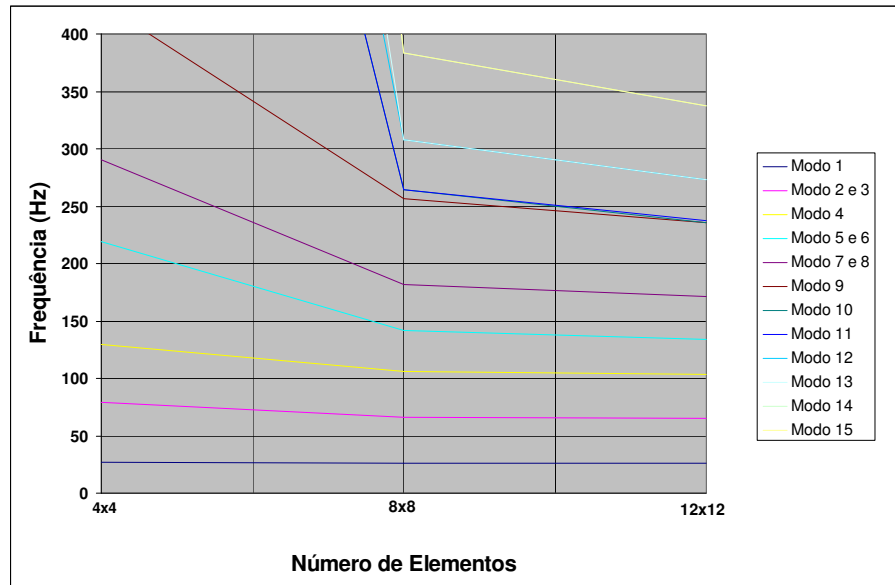


Figura 5.7 Frequência natural em função do número de elementos – MSC Nastran®

Como pode ser visto na Figura 5.5, Figura 5.6 e Figura 5.7, o Meflab com elemento conforme é a formulação que apresenta a melhor estabilidade em relação às outras formulações. Como já era previsto todas as formulações se tornam mais instáveis à medida que as frequências naturais aumentam. A formulação utilizada no MSC Nastran® necessita de um número maior de elementos para estabilizar quando comparado com o Meflab, principalmente em frequências naturais mais elevadas, por isso quando houver necessidade de comparar os resultados de ambos os programas, a necessidade da utilização de uma discretização maior para a chapa do MSC Nastran® deve ser verificada.

Outro ponto observado é que todas as formulações apresentam uma instabilidade nas frequências naturais 9 e 10, que analiticamente apresentam o mesmo valor, mas que para todas as formulações numéricas usadas apresentaram valores divergentes para a chapa de 4x4 elementos, vindo a convergir à medida que o número de elementos da chapa aumenta. É importante ressaltar que para frequências naturais repetidas e baixas 2 e 3, 5 e 6, e 7 e 8, esta divergência não ocorreu. Para as frequências naturais 12 e 13 as formulações do Meflab conforme e MSC Nastran® apresentam uma pequena divergência para a chapa com 16 elementos, porém esta diferença desaparece no MSC Nastran® para as chapas com mais elementos, mas não converge, no Meflab com elemento conforme esta divergência tende a reduzir, mas não desaparece. Para os modos 14 e 15 apenas a formulação do MSC Nastran® apresenta uma pequena divergência para a placa de 4x4 elementos, porém esta diferença desaparece, mas não converge para as chapas com mais elementos.

Para verificar a exatidão das respostas encontradas pelas formulações do elemento de chapa fina não conforme, conforme e MSC Nastran® os resultados encontrados são comparados com a formulação analítica para uma chapa simplesmente apoiada nas quatro arestas conforme proposto Blevins (1995).

$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left(\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$\lambda_{ij}^2 = \pi^2 \left(i^2 + j^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) \quad (5.2)$$

Onde:

a = lado 1 da chapa

b = lado 2 da chapa

h = espessura da chapa

γ = massa por unidade de área da chapa ou $\gamma = \rho h$.

Os resultados para as 30 primeiras frequências naturais de vibração são mostrados na Tabela 5.1. Para este cálculo é considerada a placa com 64 elementos.

Tabela 5.1 30 primeiras frequências naturais da chapa quadrada

Modo	Analítico (Hz)	Elementos não conformes (Hz)	Elementos conformes (Hz)	MSC Nastran (Hz)	Modo	Analítico (Hz)	Elementos não conformes (Hz)	Elementos conformes (Hz)	MSC Nastran (Hz)
1	25,69	25,48	25,69	25,82	1	334,00	332,79	336,88	449,26
2	64,23	63,44	64,65	66,49	2	334,00	332,79	336,88	449,26
3	64,23	63,44	64,65	66,49	3	372,54	359,62	377,58	507,61
4	102,77	99,70	104,57	106,37	4	372,54	359,62	377,58	510,53
5	128,46	126,88	128,60	141,98	5	411,07	375,30	421,55	510,53
6	128,46	126,88	128,60	141,98	6	436,77	406,78	439,11	596,55
7	167,00	160,58	168,73	181,75	7	436,77	406,78	439,11	596,55
8	167,00	160,58	168,73	181,75	8	475,30	477,05	484,09	700,06
9	218,38	216,32	219,64	256,16	9	475,30	477,05	484,09	700,06
10	218,38	216,32	219,64	264,44	10	513,84	478,14	525,24	720,59
11	231,23	217,65	231,39	264,44	11	513,84	478,14	526,81	720,59
12	256,92	246,80	260,37	308,26	12	526,69	500,94	536,30	811,85
13	256,92	246,80	261,58	308,26	13	526,69	500,94	536,30	811,85
14	321,15	299,20	325,28	383,25	14	578,07	542,37	589,81	923,38
15	321,15	299,20	325,28	383,25	15	578,07	542,37	589,81	946,72

Baseado nos dados da Tabela 5.1 é calculado a diferença RMS para as 30 primeiras frequências naturais de vibração, segundo a formulação aplicada. O cálculo RMS é feito considerando-se os valores analíticos como sendo os valores exatos de referência. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 Diferença RMS das 30 primeiras frequências naturais da chapa

Diferença	Elementos não conformes (Hz)	Elementos conformes (Hz)	MSC Nastran (Hz)
Valor RMS	19,41	6,28	157,86

Verifica-se que a formulação do elemento de placa fina conforme é o que possui a melhor exatidão quando comparado com a formulação analítica proposta. Verificando-se a diferença RMS para as frequências naturais dos 10 primeiros modos de vibração, obtém-se:

Tabela 5.3 Diferença RMS das 10 primeiras frequências naturais da chapa

Diferença	Elementos não conformes (Hz)	Elementos conformes (Hz)	MSC Nastran (Hz)
Valor RMS	1,89	0,65	12,07

Considerando apenas os 10 primeiros modos, a formulação do elemento de chapa fina conforme continua tendo o menor valor da diferença RMS, porém a diferença do elemento de chapa fina não conforme se torna menor. A diferença do MSC Nastran® para a resposta analítica continua elevado, mas como foi visto no estudo de estabilidade ele precisa de mais elementos para estabilizar, por exemplo, considerando-se uma chapa com 144 elementos para o MSC Nastran® a diferença RMS vai para 4,86 Hz.

Baseado nos dados acima é possível concluir que tanto em termos de estabilidade quanto de valores de diferença RMS a formulação do elemento de chapa fina conforme implementada no Meflab apresenta um melhor desempenho, porém a diferença entre as diferenças RMS das duas formulações fica menor conforme considera-se um número menor de frequências naturais iniciais, não justificando nesta situação o uso do elemento conforme devido ao aumento do custo computacional, preferindo-se o uso do elemento não conforme. Quando o MSC Nastran® for

usado para comparar os resultados com o Meflab, a necessidade de utilizar uma malha mais fina para a chapa deve ser analisada.

5.3 Sistema acústico I: Análise de frequências naturais de uma cavidade hexaédrica retangular

Com o objetivo de verificar e analisar as formulações adotadas para cálculo das frequências naturais da parte acústica dos sistemas vibroacústicos utilizados pelo programa Meflab é proposto o estudo de uma cavidade hexaédrica retangular com ar. Para o Meflab as frequências naturais são calculadas através das formulações de elemento sólido hexaédrico retangular. Posteriormente o mesmo problema é resolvido com o programa comercial MSC Nastran®. As respostas encontradas são verificadas através da resposta analítica disponível para este problema. Em ambos os programas são variadas as quantidades de elementos por malha para verificar a estabilidade das formulações adotadas.

Para o estudo acima é considerado um prisma de 5 m x 4 m x 3 m cheio de ar conforme mostrado na Figura 5.8. As propriedades adotadas são:

Massa específica $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$

Velocidade do som no ar $c = 343 \text{ m/s}$

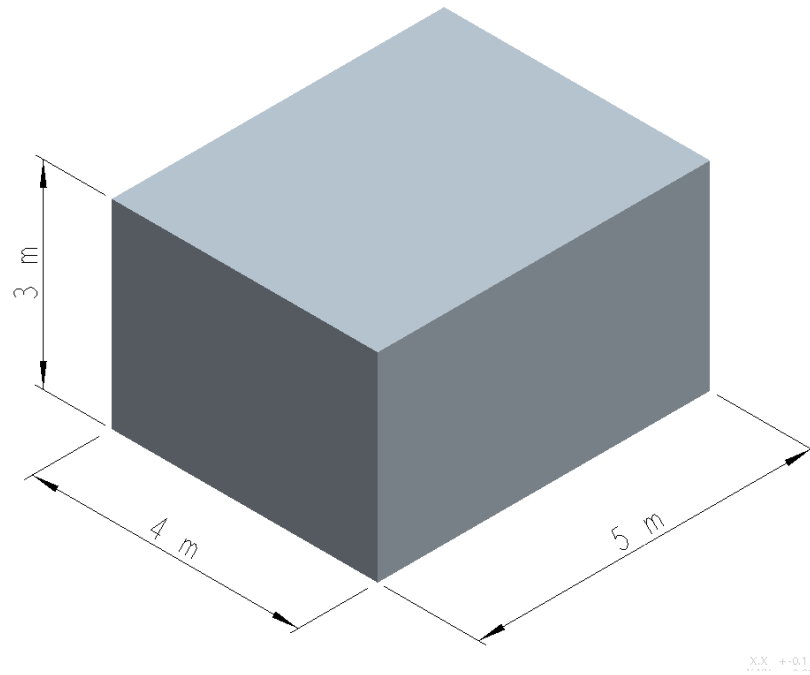


Figura 5.8 Cavidade de ar

Para a análise da variação dos valores de frequências naturais com o número de elementos usados para discretizar a estrutura dos elementos hexaédricos a Figura 5.8 é dividida em 64, 512 e 1728 elementos, conforme Figura 5.9, Figura 5.10 e Figura 5.11 respectivamente.

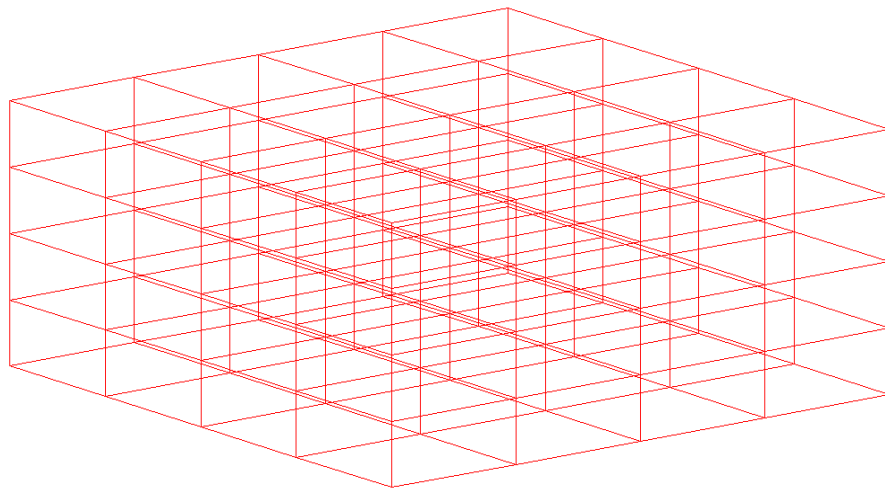


Figura 5.9 Cavidade 4 x 4 x 4 – 64 elementos.

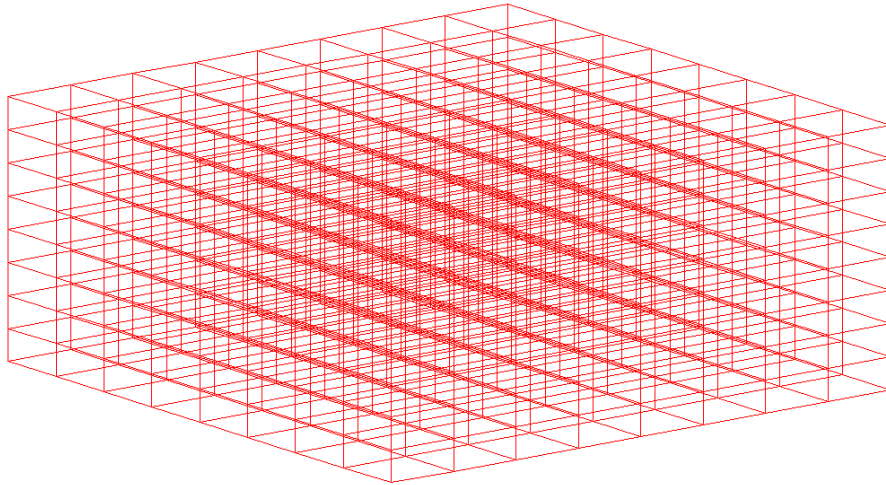


Figura 5.10 Cavidade 8 x 8 x 8 – 512 elementos.

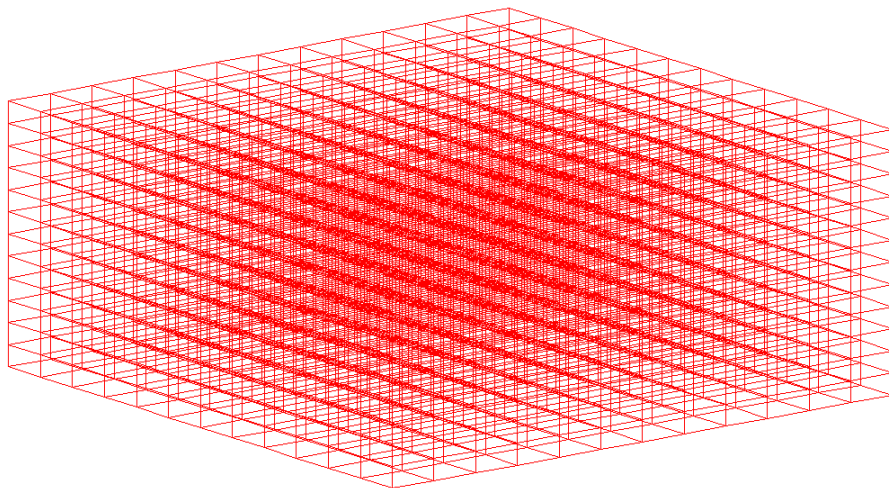


Figura 5.11 Cavidade 12 x 12 x 12 – 1728 elementos.

Para a análise de estabilidade são consideradas as primeiras 15 frequências naturais de vibração. De posse dos dados são gerados os gráficos das frequências naturais em função do número de elementos da cavidade para o Meflab e para o MSC Nastran®.

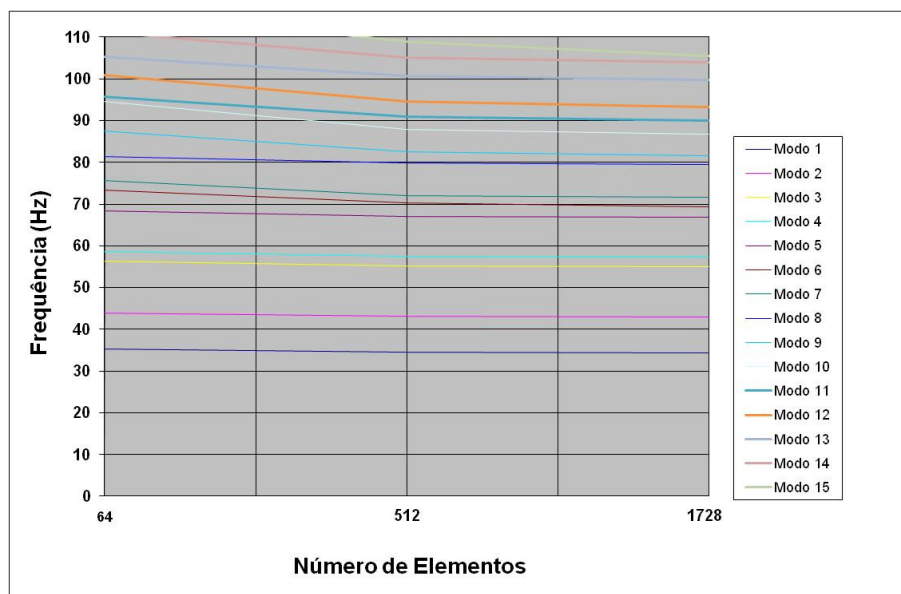


Figura 5.12 Frequência natural em função do número de elementos – Meflab

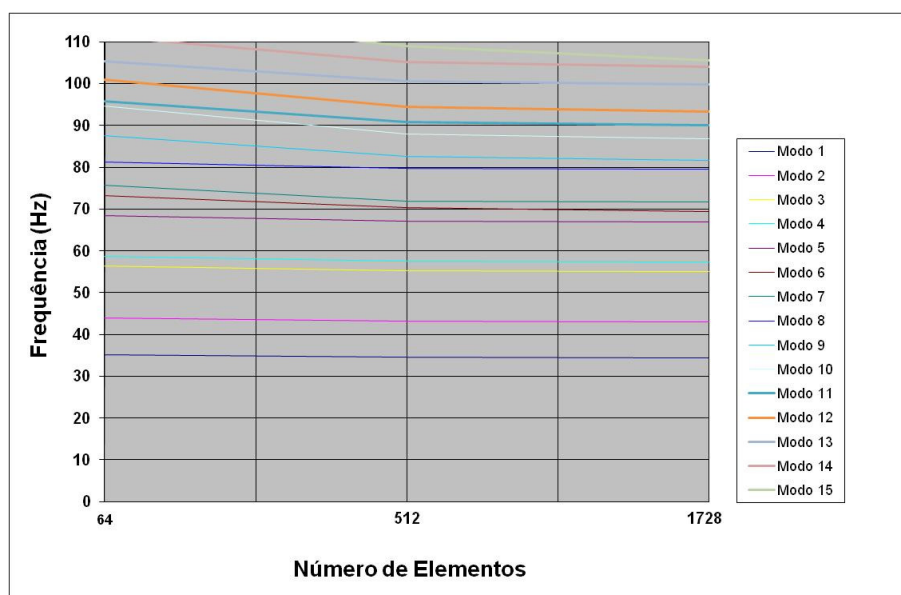


Figura 5.13 Frequência natural em função do número de elementos – MSC Nastran®.

Como pode se visto na Figura 5.12 e na Figura 5.13 o comportamento do Meflab e do MSC Nastran® são similares no que diz respeito à questão da estabilidade. Ambos já mostram uma boa estabilidade a partir de 512 elementos. Ambos os programas mostraram coincidência nos valores das frequências naturais nas 15 primeiras frequências naturais avaliadas.

Para verificar a exatidão das respostas encontradas pelas formulações do elemento de hexaédrico utilizados pelo Meflab e pelo MSC Nastran®, os resultados encontrados são comparados com a formulação analítica para uma cavidade de ar conforme Papadopoulos (2001).

$$f_{n_x n_y n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2} \quad (5.3)$$

Onde:

l_x , l_y e l_z são os comprimentos dos lados do prisma nas direções X, Y e Z respectivamente.

n_x , n_y e n_z são os números de onda do prisma nas direções X, Y e Z, respectivamente.

Neste caso considera-se:

$$n_x = 0,1,2,\dots; \quad n_y = 0,1,2,\dots; \quad n_z = 0,1,2,\dots \quad (5.4)$$

Os resultados das 30 primeiras frequências naturais de vibração são mostrados na Tabela 5.4. Para este cálculo é considerada a cavidade com 512 elementos.

Tabela 5.4 30 primeiras frequências naturais da cavidade

Modo	Analítico (Hz)	Meflab (Hz)	MSC Nastran (Hz)
1	34,30	34,52	34,52
2	42,88	43,15	43,15
3	54,91	55,26	55,26
4	57,17	57,53	57,53
5	66,67	67,10	67,10
6	68,60	70,37	70,37
7	71,46	71,92	71,92
8	79,26	79,77	79,77
9	80,90	82,55	82,55
10	85,75	87,97	87,97
11	89,30	90,90	90,90
12	92,36	94,50	94,50
13	99,06	100,62	100,62
14	102,90	105,11	105,11
15	103,06	108,90	108,90
16	108,62	110,64	110,64
17	109,81	112,65	112,65
18	111,48	117,14	117,14
19	114,33	117,29	117,29
20	117,71	122,26	122,26
21	119,37	123,16	123,16
22	122,11	124,98	124,98
23	123,80	126,50	126,50
24	125,28	129,66	129,66
25	126,83	130,51	130,51
26	128,63	136,13	136,13
27	133,12	136,78	136,78
28	133,33	139,99	139,99
29	133,95	140,43	140,43
30	137,20	143,43	143,43

Baseado nos dados da Tabela 5.4 é calculado a diferença RMS para as 30 primeiras frequências naturais de cada formulação, sendo o cálculo RMS feito considerando-se os valores analíticos como sendo os valores exatos de referência.

Tabela 5.5 Diferença RMS nas 30 primeiras frequências da cavidade

Diferença	Meflab (Hz)	MSC Nastran (Hz)
Valor RMS	3,61	3,61

Apesar dos resultados obtidos nas análises de estabilidade e exatidão feitas para a cavidade de ar ser numericamente os mesmos para os dois programas, não é possível afirmar que as formulações são iguais uma vez que a formulação utilizada pelo MSC Nastran® não está disponível para análise. De qualquer modo ambos apresentaram um bom desempenho para a cavidade dividida em 512 quanto às diferenças com relação aos resultados analíticos.

5.4 Sistema estrutural II – Análise de resposta em frequência de uma placa engastada

Com o objetivo de verificar e analisar as formulações adotadas para cálculo da resposta em frequência da parte estrutural dos sistemas vibroacústicos utilizados pelo programa Meflab é proposto o estudo de uma placa engastada em uma das suas quatro arestas. Para o Meflab as respostas são calculadas através das formulações propostas por Ma e Hagiwara (1991). Posteriormente o mesmo problema é resolvido com o programa comercial MSC Nastran®.

Para o estudo acima é considerado o problema proposto pelo MSC Nastran® para estudos de análise dinâmica. Este problema propõe uma placa engastada em uma das extremidades com 0,127 m (5 pol) de comprimento, 0,0508 m (2 pol) de largura e 0,00254 m (0,1 pol) de espessura conforme mostrado na Figura 5.14. O material da placa é aço com as seguintes propriedades:

Módulo de elasticidade $E = 206,8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ($30 \times 10^6 \text{ lbf/pol}^2$)

Coefficiente Poisson $\nu = 0,3$

Massa específica $\rho = 7805,733 \text{ kg/m}^3$ ($0,282 \text{ lbf/pol}^3$)

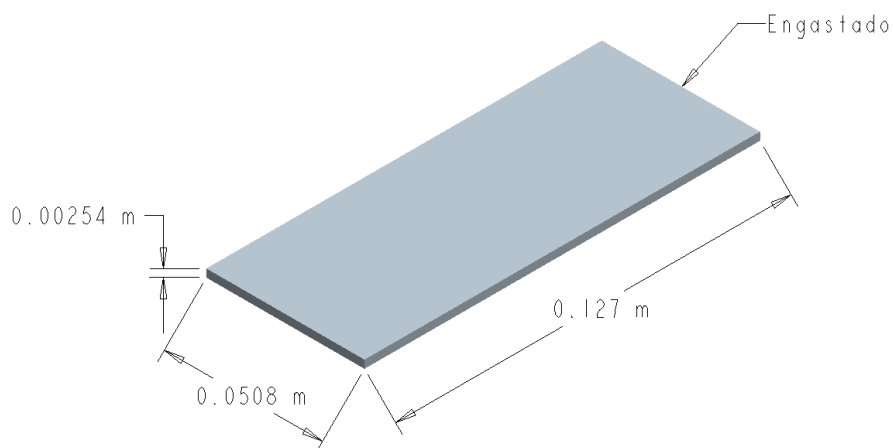


Figura 5.14 Chapa engastada.

As unidades originais do problema estavam no sistema inglês, porém para este estudo elas são convertidas para o SI.

A placa é dividida em 40 elementos de placa fina conforme mostra a Figura 5.15.

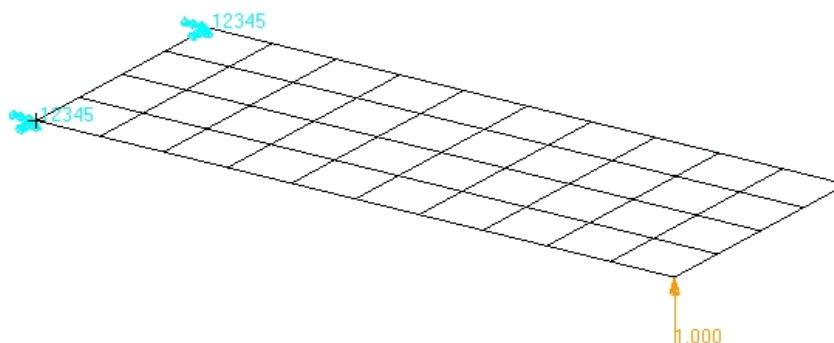


Figura 5.15 Chapa engastada 4x10 elementos

Conforme o problema proposto pelo MSC Nastran® para a análise da resposta uma força de 4,448 N (1 lbf) é aplicada no nó 11 da extremidade da placa como pode ser visto a partir da Figura 5.15. A Figura 5.16 mostra o posicionamento da numeração dos elementos finitos em preto e a numeração dos nós em vermelho. A resposta é obtida nos nós 11, 33 e 55 conforme Figura 5.16.

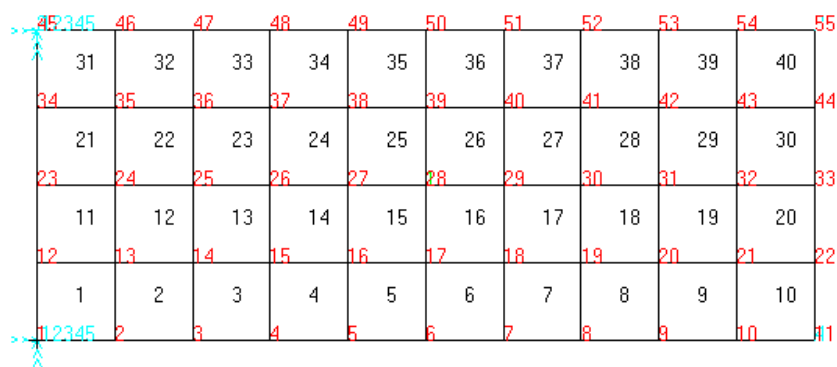


Figura 5.16 Numeração dos elementos e nós.

Os resultados para as frequências naturais dos 30 primeiros modos de vibração são mostrados na Tabela 5.6. Os resultados analíticos foram calculados conforme Blevins (1995).

Tabela 5.6 30 primeiras frequências naturais para a placa engastada

Modos	Analítico (Hz)	Meflab (Hz)	MSC Nastran (Hz)	Modos	Analítico (Hz)	Meflab (Hz)	MSC Nastran (Hz)
1	134,9	133,8	133,7	16		13501,0	15719,0
2	702,3	701,4	689,5	17		15007,8	16698,3
3	841,7	837,8	843,8	18		15225,4	16957,4
4	2243,2	2235,8	2210,5	19		16135,6	17534,8
5	2365,0	2362,7	2428,4	20		16417,4	18528,8
6	4157,7	4137,9	4159,7	21		17815,4	20142,9
7		4647,1	4930,8	22		18237,2	20496,2
8		5613,3	5880,2	23		18908,6	22480,8
9		6586,2	6845,5	24		20489,3	22755,4
10		6814,5	7056,2	25		21945,2	23727,4
11		7805,5	8655,5	26		23417,2	26744,7
12		8942,3	9317,9	27		23469,8	27711,3
13		9693,2	10603,8	28		23812,7	28017,3
14		11597,6	12400,6	29		27827,5	28369,4
15		11795,3	13732,0	30		28247,1	30290,7

Baseado nos dados da Tabela 5.6 é calculado a diferença RMS para as 6 primeiras frequência naturais de cada programa, não sendo possível comparar para todas as 30, pois só há resultados analíticos disponíveis para as 6 primeiras. O cálculo RMS é feito considerando-se os valores analíticos como sendo os valores exatos de referência. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 Diferença RMS das 6 primeiras frequências naturais da placa engastada

Diferença	Meflab	MSC Nastran
Valor RMS	3,96 Hz	13,24 Hz
Percentual	0,38 %	1,19%

Como pode ser visto pela Tabela 5.7, o MSC Nastran® apresenta uma diferença RMS maior que a encontrada para o Meflab.

Comparando todas as 30 primeiras frequências naturais do MSC Nastran® em relação ao Meflab obtemos as diferenças RMS e diferença média percentual absoluta, como indicado na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 Diferença MSC Nastran em relação ao Meflab das 30 primeiras frequências naturais

Diferença	Meflab x MSC Nastran®
RMS	1882,2 Hz
Percentual	7,6 %

A diferença média percentual absoluta foi calculada através da média aritmética dos valores absolutos das diferenças percentuais entre MSC Nastran® e Meflab para cada frequência natural.

Comparando apenas as 6 primeiras frequências naturais do MSC Nastran® em relação ao Meflab obtemos as diferenças RMS e a diferença média percentual absoluta, como indicado na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 Diferença MSC Nastran em relação ao Meflab das 6 primeiras frequências naturais

Diferença	Meflab x Nastran®
RMS	13,6 Hz
Percentual	1,2 %

Baseado nos resultados apresentados na Tabela 5.6 até a Tabela 5.9, para os próximos estudos de otimização usaremos frequências de excitação menores que 4000 Hz para evitar erros superiores a 0,4 % derivados do cálculo das frequências naturais.

Para o nó 11 os resultados do deslocamento em função da frequência são apresentados na Figura 5.17 e Figura 5.18:

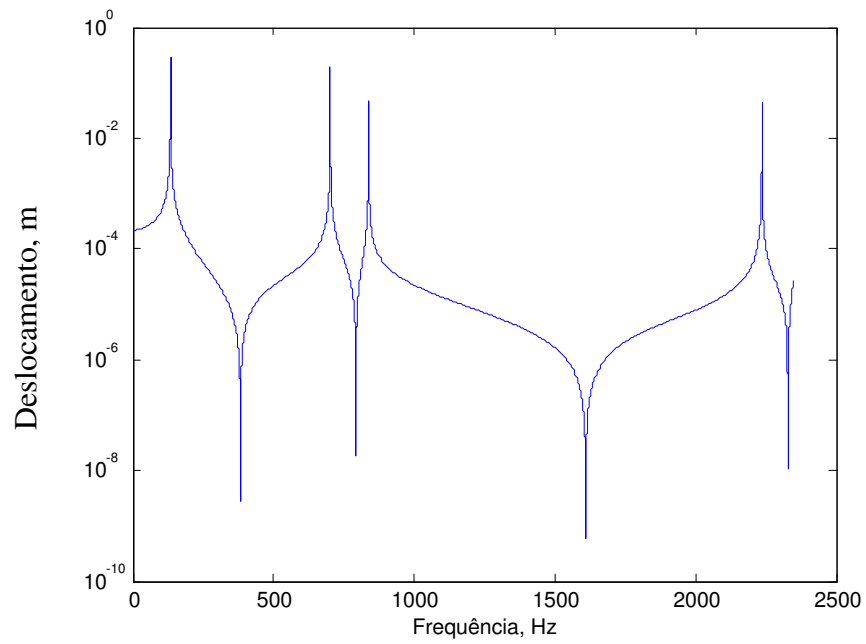


Figura 5.17 Reposta do nó 11 no MeFlab

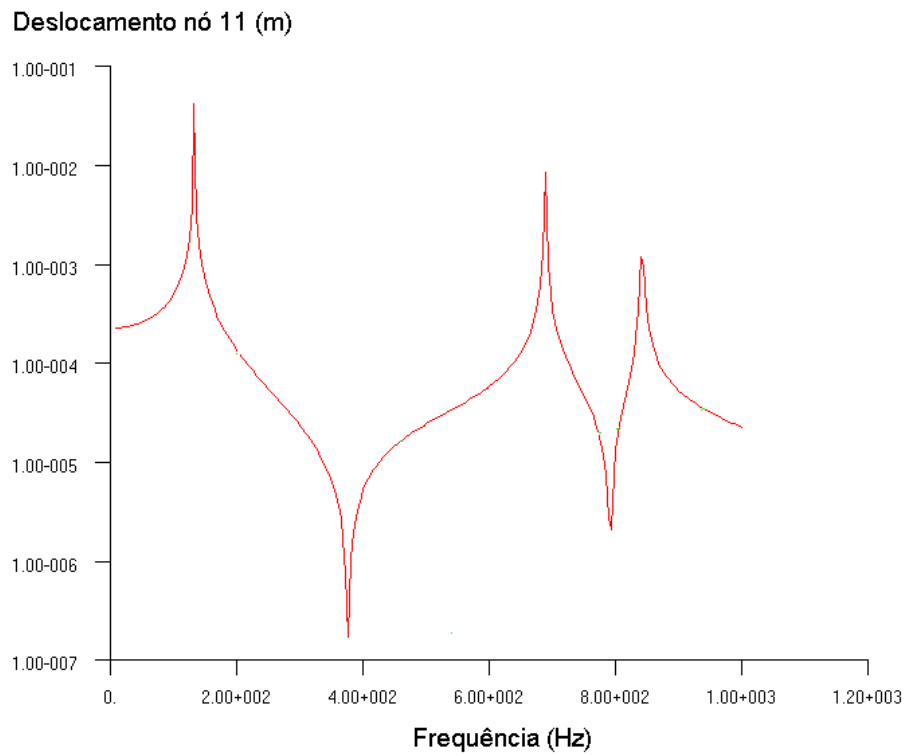


Figura 5.18 Resposta do nó 11 no MSC Nastran®

Para o nó 33 os resultados do deslocamento em função da frequência são apresentados na Figura 5.19 e Figura 5.20:

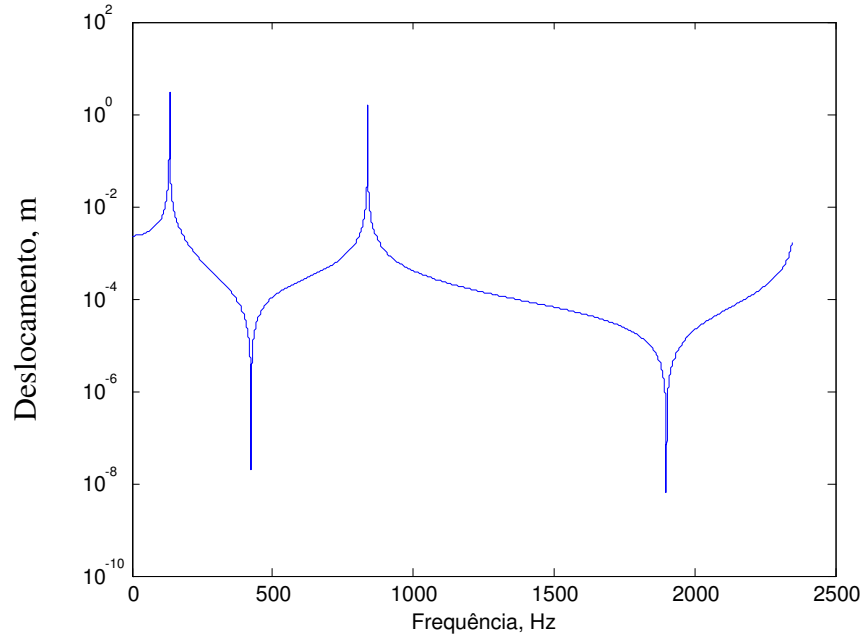


Figura 5.19 Resposta do nó 33 no MeFlab

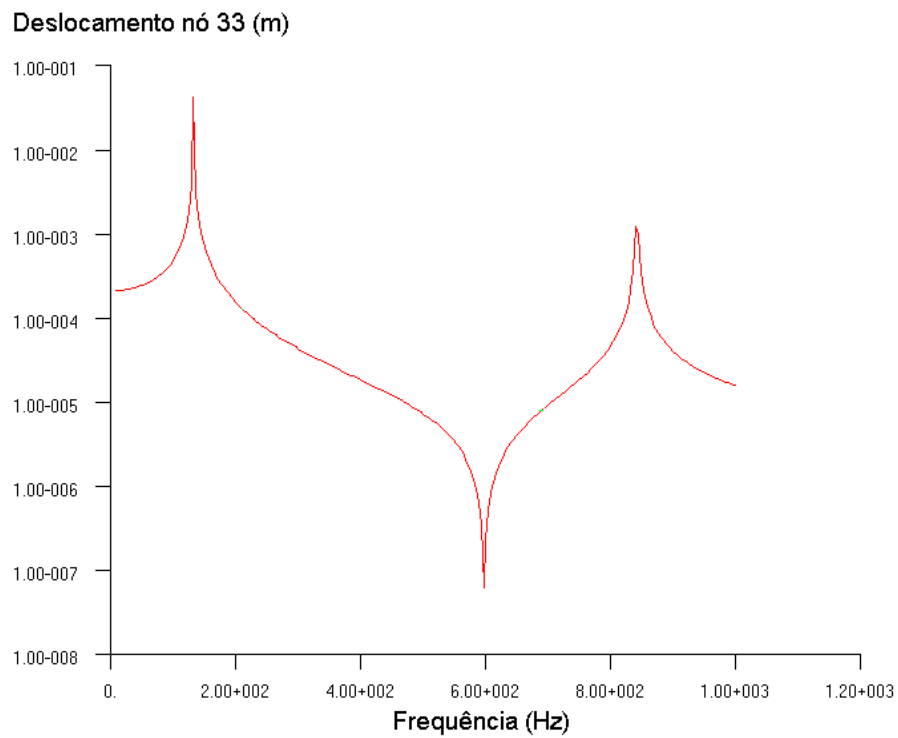


Figura 5.20 Resposta do nó 33 no MSC Nastran®

Para o nó 55 os resultados do deslocamento em função da frequência são apresentados na Figura 5.21 e Figura 5.22:

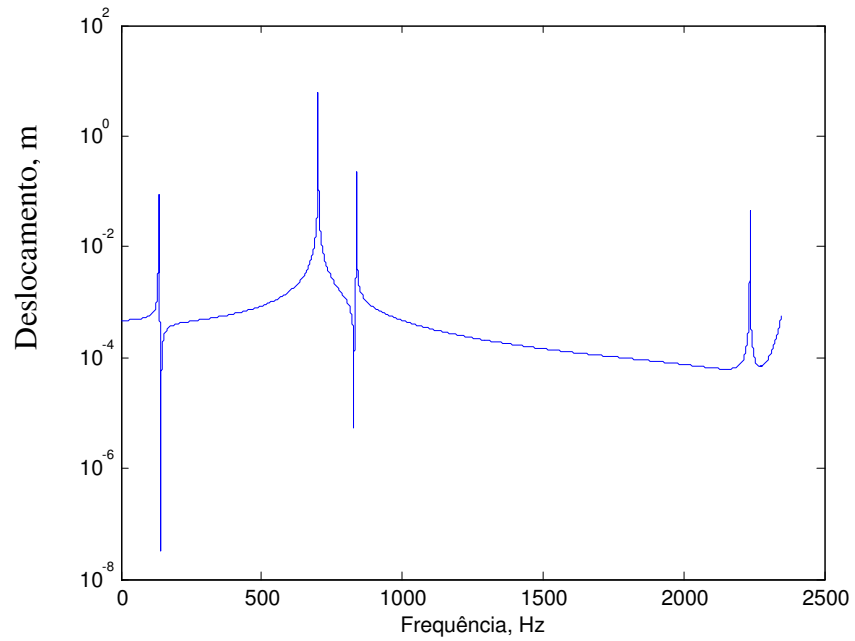


Figura 5.21 Resposta do nó 55 no Meflab

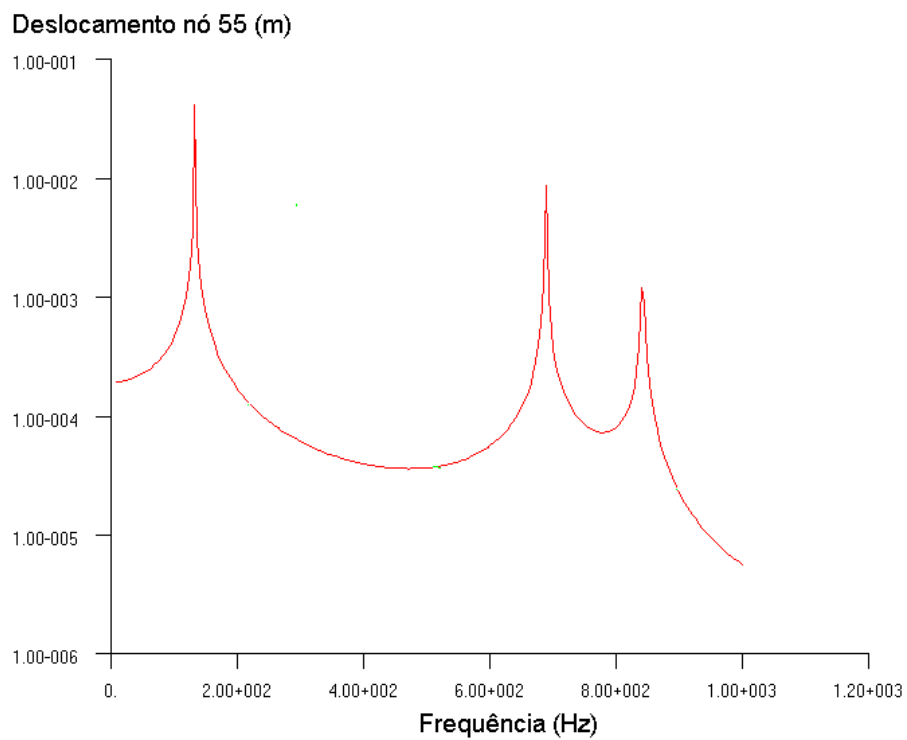


Figura 5.22 Resposta do nó 55 no MSC Nastran®

Devido às formulações utilizadas pelo Meflab e pelo MSC Nastran® não considerarem o amortecimento da placa, uma análise comparativa dos valores encontrados para as amplitudes da resposta em frequência nos dois programas não é possível. Isto se deve ao fato de que com a ausência do amortecimento a resposta tende ao infinito nas frequências de ressonância, este fenômeno não é visualizado na Figura 5.17 a Figura 5.22 devido ao passo utilizado para gerar estes gráficos, se estes passos fossem diminuídos a tendência seria as respostas aumentarem para valores cada vez maiores. Uma sugestão para próximos estudos seria a implementação no Meflab de formulações que permitam o uso de amortecimento, este tipo de formulação já está disponível no MSC Nastran®.

5.5 Sistema estrutural III – Otimização de resposta de uma chapa engastada pelo método SQP.

Considerando o sistema de placa engastada proposta no Item 5.4 e as respectivas análises de resposta em frequência, neste item é proposto a otimização do deslocamento em um ponto da placa em virtude de uma força aplicada em um ponto e submetida a um frequência de excitação. Esta otimização é feita através do método SQP conforme discutido nos Itens 4.6 e 4.7. Para esta otimização é considerado a espessura da placa como variável de projeto e o volume quase constante como função de restrição. A primeira frequência natural da placa é usada como frequência de excitação para a força aplicada, esta frequência é escolhida, pois apresenta o menor erro em Hz entre os valores encontrados para as formulações do MSC Nastran® e do Meflab quando comparado com o valor analítico no cálculo das frequências naturais como visto na Seção 5.4.

Desta forma espera-se obter uma placa com uma distribuição de espessuras não homogêneas para cada elemento finito usado, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente usada, porém sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites de especificação. Além dos dados já usados no Item 5.4 são considerados para o problema de otimização:

Nó a ser otimizada a resposta: 33 (grau de liberdade 84), este ponto é escolhido por estar próximo a força excitatória o que gera um grande deslocamento.

Frequência de excitação: 134,0 Hz.

Espessura original: 0,00254 m

Mínima espessura permitida: 0,00127

Máxima espessura permitida: 0,00508 m

Volume mínimo permitido: 90% do volume original da placa

Volume máximo permitido: 110% do volume original da placa.

Tolerância para a espessura: 10^{-4}

Tolerância da função objetivo para o término da otimização: 10^{-6}

A otimização é feita no Meflab através do comando *fmincon* disponível no Matlab® que utiliza uma programação quadrática sequencial (SQP).

Para o Meflab primeiramente é verificada a influência do número de modos utilizados na otimização da placa. Foram utilizados 1, 5, 10, 15, 20, 25 e 30 modos, em todas estas condições as distribuições de espessura encontradas são as mesmas independente da quantidade de modos utilizados nos cálculos. A Tabela 5.10 apresenta a distribuição das espessuras por elemento encontradas conforme distribuição mostrada na Figura 5.16:

Tabela 5.10 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 134 Hz

Número do elemento	Espessura (m)	Número do elemento	Espessura (m)
1	0,0013	21	0,0013
2	0,0013	22	0,0013
3	0,0013	23	0,0013
4	0,0013	24	0,0013
5	0,0013	25	0,0013
6	0,0013	26	0,0013
7	0,0051	27	0,0051
8	0,0051	28	0,0051
9	0,0051	29	0,0051
10	0,0051	30	0,0051
11	0,0013	31	0,0013
12	0,0013	32	0,0013
13	0,0013	33	0,0013
14	0,0013	34	0,0013
15	0,0013	35	0,0013
16	0,0013	36	0,0013
17	0,0051	37	0,0051
18	0,0051	38	0,0051
19	0,0051	39	0,0051
20	0,0051	40	0,0051

O programa de otimização SQP no caso estudado teve a usar as espessuras máximas permitidas e espessuras mínimas para pontos menos críticos para que a restrição de volume não seja violada.

Apesar do programa de otimização ter chegado às mesmas espessuras para cada elemento da placa, o resultado do valor do deslocamento da placa para o ponto de otimização é diferente dependendo do número de modos como pode ser visto na Tabela 5.11:

Tabela 5.11 Deslocamento em frequência para cada número de modos (m)

1 Modo	5 Modos	10 Modos	15 Modos	20 Modos	25 Modos	30 Modos
0,00120000	0,00063708	0,00063609	0,00063576	0,00063572	0,00063645	0,00063666

A razão pela qual o programa encontra o mesmo valor de espessura da placa é devido ao uso da primeira frequência natural ter sido usada como excitação, para esta frequência apenas poucos modos de vibração já encontram uma resposta modal, mas quando a frequência de excitação for maior, mais modos são necessários para construção da resposta. Para comprovar esta justificativa, os cálculos da resposta da placa engastada são realizados utilizando como excitação a quinta frequência natural, cujo valor é de 2363 Hz. Para esta situação apenas uma frequência natural se mostrou ineficiente para o cálculo de resposta e apresenta valores de espessura para cada elemento diferente dos demais, entretanto para 5, 10, 15, 20, 25 e 30 modos, os resultados encontrados para as espessuras são iguais. Os resultados para a espessura de cada elemento da placa engastada podem ser vistos na Tabela 5.12.

Tabela 5.12 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 2363 Hz

Número do elemento	Espessura 1 modo (m)	Espessura demais modos (m)	Número do elemento	Espessura 1 modo (m)	Espessura demais modos (m)
1	0,0023	0,0013	21	0,0022	0,0013
2	0,0024	0,0051	22	0,0024	0,0051
3	0,0025	0,0013	23	0,0025	0,0013
4	0,0026	0,0013	24	0,0026	0,0013
5	0,0027	0,0013	25	0,0027	0,0013
6	0,0027	0,0013	26	0,0027	0,0013
7	0,0027	0,0013	27	0,0027	0,0013
8	0,0027	0,0013	28	0,0027	0,0013
9	0,0027	0,0013	29	0,0027	0,0013
10	0,0027	0,0051	30	0,0028	0,0051
11	0,0023	0,0013	31	0,0022	0,0013
12	0,0024	0,0051	32	0,0024	0,0051
13	0,0025	0,0013	33	0,0025	0,0013
14	0,0026	0,0013	34	0,0026	0,0013
15	0,0027	0,0013	35	0,0027	0,0013
16	0,0027	0,0013	36	0,0027	0,0013
17	0,0027	0,0013	37	0,0027	0,0013
18	0,0027	0,0013	38	0,0027	0,0013
19	0,0027	0,0013	39	0,0027	0,0013
20	0,0028	0,0051	40	0,0028	0,0051

Como pode ser visto na tabela acima quanto maior o número de frequências naturais utilizados maior deve ser o número de modos utilizados para o cálculo modal, requisito já observado na literatura. A Figura 5.23 e a Figura 5.24 apresentam representações gráficas onde pode ser observada a falha do cálculo das frequências naturais com um modo em comparação, com cinco modos:

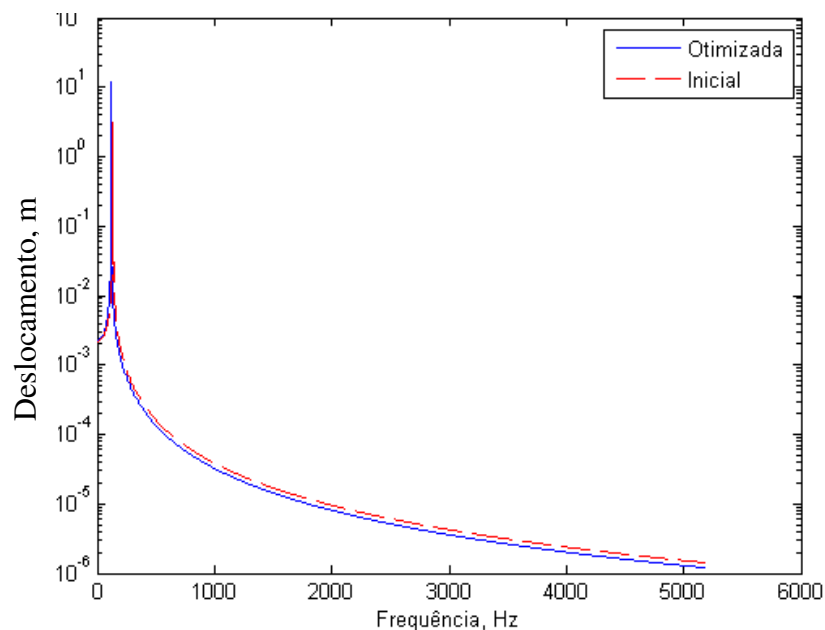


Figura 5.23 Resposta inicial e otimizada para 2363 Hz utilizando 1 modo

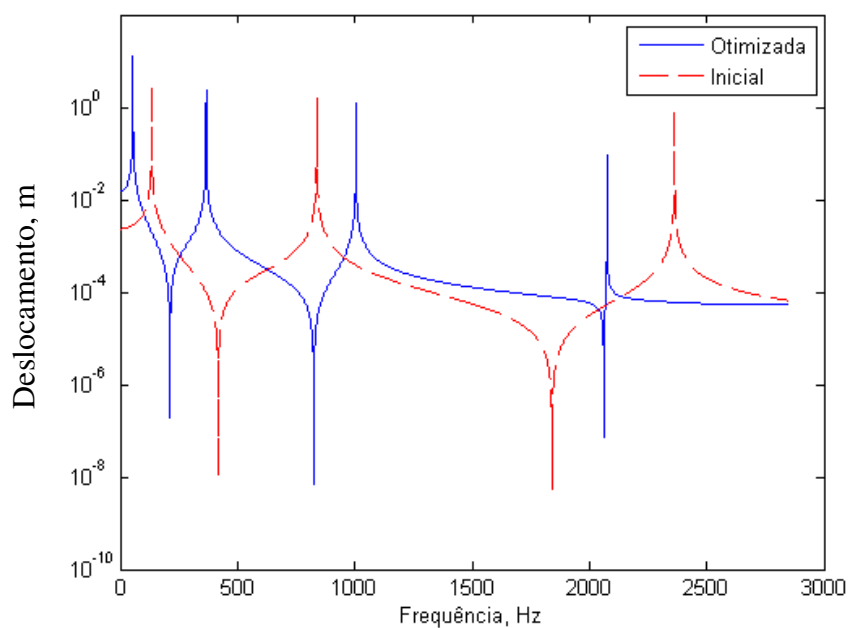


Figura 5.24 Resposta em frequência inicial e otimizada para 2363 Hz utilizando 10 modos

Como pode ser visto na Figura 5.23, o cálculo da resposta em frequência acima de 134 Hz, falha quando apenas um modo é utilizado para a análise modal. Ou seja, a escolha correta do número de modos é fundamental para a otimização e deve ser baseado no valor da frequência de excitação.

O uso entre 5 e 10 modos para a análise de otimização no Meflab já são suficientes como mostra as análises acima para os casos estudados.

5.6 Sistema estrutural III – Otimização de resposta de uma chapa engastada através de algoritmo Genético

Considerando o sistema de placa engastada proposta no Item 5.4 e as respectivas análises de resposta em frequência, neste item é proposto a otimização do deslocamento em um ponto da placa em virtude de uma força aplicada em um ponto e submetida a um frequência de excitação. Esta otimização é feita através de um algoritmo Genético conforme discutido nos Itens 4.8 e 4.9. Para esta otimização é considerado a espessura da placa como variável de projeto e o volume quase constante como função de restrição. A placa inteira representa um cromossomo e a espessura de cada elemento finito que compõe a placa representa um gene, assim cada gene codifica a espessura de um elemento. Cada gene é representado por um conjunto de bits. A primeira frequência natural da placa é usada como frequência de excitação para a força aplicada. Esta frequência foi escolhida, pois não apresenta uma diferença significativa comparando as respostas das formulações do MSC Nastran® e do Meflab no cálculo das frequências naturais como visto na Seção 5.4.

Desta forma espera-se obter uma placa com uma distribuição de espessuras não homogêneas para cada elemento finito usado, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente usado, porém sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites de especificação. Além dos dados já usados nos Itens 5.4 e 5.5 são considerados para otimização Genética:

Número de cromossomos: serão testados 10, 20 e 30.

Número de bits por elemento: serão testados 3, 4 e 5.

Número máximo de gerações: 100.

Número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo: 10 e 15.

A otimização é feita no Meflab através do algoritmo Genético programado pelo autor no Matlab®.

Para determinar a influência do número de cromossomos, bits e desvio padrão de parada no tempo de processamento e precisão do resultado encontrado, estudos prévios foram realizados para escolher a melhor combinação de parâmetros. Estes estudos encontram-se a seguir.

5.6.1 Influência do número de cromossomos na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab

Para determinar a influência do número de cromossomos usados na otimização, um estudo com um número fixo de bits por elemento e resolução fixa para o número máximo de repetições da melhor resposta, são usados no caso 4 bits e 10 repetições. Os resultados após 20 simulações realizadas para 10, 20 e 30 cromossomos podem ser vistos na Tabela 5.13.

Tabela 5.13 Resposta das simulações para a variação do número de cromossomos

Número de Indivíduos	Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
10	Média	51,6	99,61	104
	Desvio Padrão	32,1	0,21	71
	Valor Mín.	15	99,23	26
	Valor Max.	100	99,91	219
20	Média	38,8	99,67	165
	Desvio Padrão	15,5	0,12	68
	Valor Mín.	19	99,36	79
	Valor Máx.	87	99,82	364
30	Média	31,2	99,71	187
	Desvio Padrão	13,5	0,10	90
	Valor Mín.	12	99,38	67
	Valor Máx.	54	99,83	368

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na Seção 5.5 para a otimização da resposta em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, tem-se:

Tabela 5.14 Comparação variação Genético com número de cromossomos versus SQP.

Número de Indivíduos	Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
10	99,61	104	99,93	22
20	99,67	165		
30	99,71	187		

Como pode ser visto na Tabela 5.14 em nenhum momento o algoritmo Genético apresenta resultados melhores que o método SQP. Conforme pode ser observado o número de cromossomos tem impacto significativo no tempo de processamento, porém um impacto bem menor é observado na resposta.

Mesmo apresentando o menor tempo de processamento com 10 cromossomos, em 5 das 20 simulações, o processo atingiu 100 gerações e foi encerrado por este critério. Os resultados encontrados nestes casos apresentam violação nas restrições de volume, sendo este valor maior que o máximo, ou menor que o mínimo. Assim um o número de 10 cromossomos se mostra ineficiente para atingir a convergência necessária. O que pode ser observado durante as simulações com 10 cromossomos é que devido ao baixo número de indivíduos, quando o valor converge para um resultado, mesmo este violando as restrições impostas, as simulações não conseguem mudar a direção de procura. Por isso para as próximas análises são considerados apenas 20 e 30 cromossomos.

5.6.2 Influência do número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor individuo na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab

O número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor individuo, usados na otimização, é um parâmetro de parada do processo, quando este valor fica acima de um valor delimitado significa que a melhor resposta encontrada já convergiu, ou seja, não esta mais sendo maximizada ou minimizada, assim o programa genético é encerrado e o melhor individuo coletado. Para determinar a influência deste parâmetro de parada na otimização, um estudo com um número fixo de bits por elemento e um número fixo de cromossomos são usados, no caso 4 bits, 20 e 30 cromossomos. Os resultados após 20 simulações realizadas para valores de parada de 10 e 15 são apresentados na Tabela 5.15.

Tabela 5.15 Respostas das simulações para a variação do número máximo de repetições

Numero máximo repetições	Número de Indivíduos	Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
10	20	Média	38,8	99,67	165
		Desvio Padrão	15,5	0,12	68
		Valor Mín.	19	99,36	79
		Valor Máx.	87	99,82	364
	30	Média	31,2	99,71	187
		Desvio Padrão	13,5	0,10	90
		Valor Mín.	12	99,38	67
		Valor Máx.	54	99,83	368
15	20	Média	54,5	99,66	241
		Desvio Padrão	18,6	0,17	86
		Valor Mín..	20	99,08	85
		Valor Máx.	93	99,61	402
	30	Média	48,7	99,70	324
		Desvio Padrão	23,7	0,11	166
		Valor Mín.	20	99,41	122
		Valor Máx.	100	99,83	684

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na Seção 5.5 para a otimização da resposta em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.16.

Tabela 5.16 Comparação variação Genético com número máximo de repetições versus SQP.

Numero máximo repetições	Número de Indivíduos	Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
10	20	99,67	165	99,93	22
	30	99,71	187		
15	20	99,66	241		
	30	99,70	324		

Como pode ser visto na Tabela 5.16 em nenhum momento o algoritmo Genético apresenta resultados melhores que o método SQP. Conforme pode ser observado o número máximo de

repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo, tem impacto no tempo de processamento e na resposta.

Assim um aumento neste parâmetro afeta a variação das respostas, mas aumenta o tempo de processamento. Porém o aumento do tempo de processamento comparado com a melhor resposta encontrada para 15 repetições, não justifica o seu uso, por isso para as próximas simulações serão usados 10 como o número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo como critério de parada.

5.6.3 Influência do número de bits na otimização Genética da resposta em frequência do Meflab

Para determinar a influência do número de bits usados para a codificação dos genes, ou seja, a discretização da espessura de cada elemento finito que compõe a placa, usados na otimização, um estudo com um número fixo de cromossomos e resolução fixa para o número máximo de respostas repetidas seguidas são usados, no caso 20 cromossomos e 10 repetições. Os resultados após 20 simulações realizadas para 3 bits (intervalo da espessura dividido em 7 partes), 4 bits (intervalo da espessura dividido em 15 partes) e 5 bits (intervalo da espessura dividido em 31 partes) podem ser vistos na Tabela 5.17.

Tabela 5.17 Respostas das simulações para a variação do número de bits

Número de bits por elemento	Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
3	Média	54,45	99,66	241
	Desvio Padrão	18,6	0,17	86
	Valor Mín.	20	99,08	85
	Valor Máx.	93	99,81	402
4	Média	38,8	99,67	165
	Desvio Padrão	15,5	0,12	68
	Valor Mín.	19	99,36	79
	Valor Máx.	87	99,82	364
5	Média	27,3	99,62	106
	Desvio Padrão	9,9	0,11	40
	Valor Mín.	13	99,31	46
	Valor Máx.	50	99,79	195

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados no Item 5.5 para a otimização em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.18.

Tabela 5.18 Comparação variação Genético com número de bits versus SQP.

Número de bits por elemento	Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
3	99,66	241	99,93	22
4	99,67	165		
5	99,62	106		

Como pode ser visto na Tabela 5.18 em nenhum momento o algoritmo Genético apresenta resultados melhores que o método SQP. Conforme pode ser observado o número de bits tem uma influência não linear no tempo de processamento e na otimização da resposta em frequência.

Assim um aumento no número de bits não significa uma melhor resolução ou uma convergência melhor para este caso. De qualquer forma o número de bits escolhidos determina o número dos valores discretos que são analisados, aumentando o espaço de procura e permitindo que respostas mais refinadas possam ser encontradas. Porém em aplicações reais estes valores podem ser determinados a partir da capacidade de serem fabricados, por exemplo, a precisão máxima que uma espessura de chapa possa ser fabricada.

Para as próximas etapas adotamos 5 bits como resolução pelos seus melhores resultados no tempo independente de sua aplicabilidade real.

5.6.4 Resultado otimização Genética da resposta em frequência do Meflab com os melhores parâmetros

Utilizando os parâmetros selecionados nos itens 5.6.1, 5.6.2 e 5.6.3, 20 indivíduos, número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo de 10 e 5 bits para as espessuras dos elementos os resultados de 20 simulações podem ser vistos na Tabela 5.19.

Tabela 5.19 Respostas das simulações para a melhor combinação de parâmetros

Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
Média	27,3	99,62	106
Desvio Padrão	9,9	0,11	40
Valor Mín.	13	99,31	46
Valor Máx.	50	99,79	195

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na Seção 5.5 para a otimização em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.20.

Tabela 5.20 Comparação variação Genético com melhores parâmetros versus SQP

Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
99,62	106	99,93	22

Como pode ser visto a combinação de valores apresenta um balanço adequado entre tempo de processamento razoável e resultado encontrado. O gráfico representado na Figura 5.25 e Figura 5.26 apresentam a resposta em frequência do ponto antes e após a otimização, para o algoritmo Genético e SQP, respectivamente.

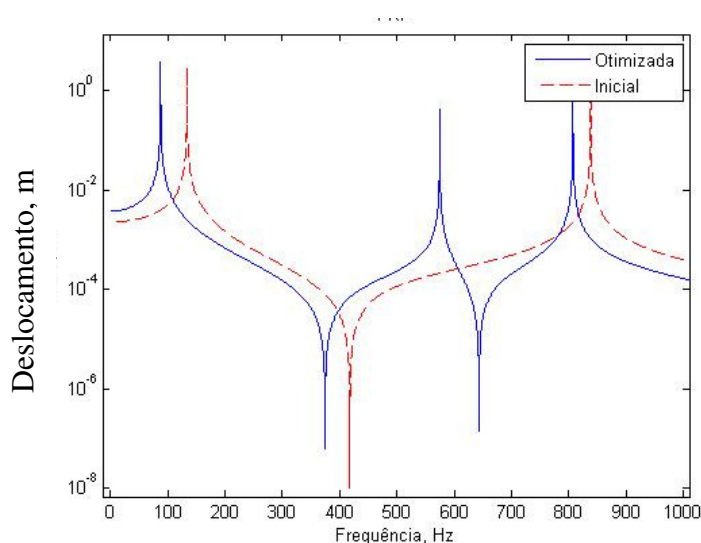


Figura 5.25 Resposta inicial e otimizada para 134 Hz algoritmo Genético

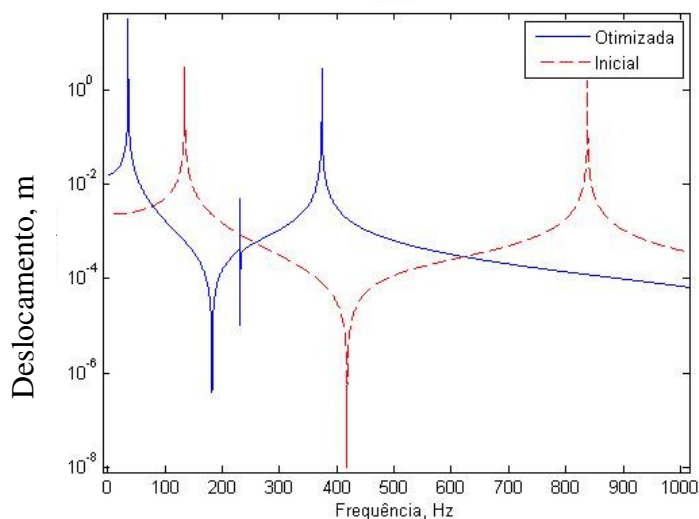


Figura 5.26 Resposta inicial e otimizada para 134 Hz algoritmo SQP

As configurações das espessuras para os elementos finitos da placa encontrada para uma das simulações Genéticas realizadas podem ser vistas na Tabela 5.21.

Tabela 5.21 Distribuição de espessuras após otimização Meflab frequência 134 Hz Genético

Número do elemento	Espessura (m)	Número do elemento	Espessura (m)
1	0,00361	21	0,00164
2	0,00287	22	0,00287
3	0,00152	23	0,00139
4	0,00139	24	0,00225
5	0,00361	25	0,00213
6	0,00410	26	0,00397
7	0,00139	27	0,00508
8	0,00373	28	0,00447
9	0,00410	29	0,00287
10	0,00447	30	0,00508
11	0,00127	31	0,00213
12	0,00127	32	0,00201
13	0,00188	33	0,00164
14	0,00127	34	0,00336
15	0,00152	35	0,00508
16	0,00164	36	0,00164
17	0,00324	37	0,00213
18	0,00299	38	0,00496
19	0,00250	39	0,00250
20	0,00127	40	0,00459

Comparando a distribuição de espessuras da otimização SQP da Tabela 5.12 com a distribuição de espessuras da otimização Genética da Tabela 5.21 observa-se uma configuração diferente entre os dois processos.

Para o caso estudado o método SQP se mostrou bem mais preciso e computacionalmente econômico, que o método Genético.

5.6.5 Melhoria do algoritmo Genético proposto para otimização da resposta em frequência do Meflab com os melhores parâmetros.

Durante as simulações observa-se que o algoritmo genético despense muito tempo procurando por respostas que não violem as restrições, este trabalho se torna mais demorado quando todos os cromossomos iniciais escolhidos aleatoriamente violam as restrições impostas e possuem alguma penalização. Por isso é implementado uma melhoria no algoritmo, que consiste na escolha aleatória de indivíduos que não violem as restrições impostas. A partir desta melhoria os resultados podem ser vistos na sequência para 20 simulações utilizando os mesmos critérios do Item 5.6.4:

Tabela 5.22 Resposta das simulações para a melhor combinação de parâmetros com algoritmo melhorado

Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
Média	21,1	99,75	82
Desvio Padrão	9,0	0,05	37
Valor Mín.	12	99,65	43
Valor Máx.	37	99,83	154

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na Seção 5.5 para a otimização em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição da do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.23:

Tabela 5.23 Comparação variação Genético com melhores parâmetros com algoritmo melhorado versus SQP

Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
99,75	82	99,93	22

Comparando a Tabela 5.19, Tabela 5.20, Tabela 5.22 e Tabela 5.23, percebe-se uma melhoria tanto no tempo de processamento quanto na resposta encontrada para o algoritmo melhorado, porém em muitos casos ele apresenta um número reduzido de gerações, em 5 casos 12 gerações, o que significa que não há uma exploração do espaço de respostas, pois em 2 gerações o melhor indivíduo foi encontrado e posteriormente repetido 10 vezes atingindo o critério de parada. Para evitar a parada prematura do programa duas soluções são propostas. A primeira é aumentar o critério de parada de 10 para 15 repetições seguidas da melhor resposta. A segunda é aumentar o número de cromossomos de 20 para 30 mantendo os critérios de parada.

Tabela 5.24 Resposta das simulações para alteração do critério de parada de 10 para 15 com algoritmo melhorado

Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
Média	33,2	99,74	140
Desvio Padrão	14,1	0,07	63
Valor Mín.	17	99,61	69
Valor Máx.	64	99,84	278

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na Seção 5.5 para a otimização em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando o valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.25.

Tabela 5.25 Comparação variação Genético com alteração do critério de parada de 10 para 15 com algoritmo melhorado versus SQP

Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
99,74	140	99,93	22

A primeira solução apresenta um tempo maior de processamento, devido ao maior número de gerações, e praticamente a mesma otimização da resposta em frequência.

Tabela 5.26 Resposta das simulações para alteração do número de cromossomos de 20 para 30 com algoritmo melhorado

Estatística	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
Média	25,2	99,77	141
Desvio Padrão	14,6	0,04	83
Valor Mín.	12	99,67	59
Valor Máx.	62	99,86	325

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados no Item 5.5 para a otimização em frequência SQP, onde o tempo total de simulação é de 22 segundos e a resposta em frequência encontrada para 10 modos conforme Tabela 5.11, considerando a valor percentual da diminuição do deslocamento original da placa devido a força de excitação, que é 0,929 m, resulta a Tabela 5.27.

Tabela 5.27 Comparação variação Genético com alteração do número de cromossomos de 20 para 30 com algoritmo melhorado versus SQP.

Diminuição resposta original Genético (%)	Tempo Genético (s)	Diminuição resposta original SQP (%)	Tempo SQP (s)
99,77	141	99,93	22

A segunda solução apresenta diminuição na resposta inicial melhor (0,03%) e um tempo maior de processamento (0,1 s). Ambas as propostas para evitar um baixo número de gerações podem ser usadas.

5.7 Sistema fluido-estrutura I. Resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada

Para determinar a influência do acoplamento dos modos acústicos e estruturais em um sistema vibroacústico, o estudo de uma cavidade hexaédrica acústica sobre uma placa quadrada é utilizada e os valores das frequências naturais acopladas são comparadas com as frequências

naturais dos sistemas estrutural e acústico desacoplados. Para esta análise são considerados os programas Meflab e MSC Nastran®.

5.7.1 Análise estrutural da placa quadrada

Para o estudo é considerada uma placa quadrada de 0,508 m (20 in) de lado e 0,00508 m (0,2 in) de espessura, simplesmente apoiada em seus quatro cantos (na intersecção das arestas da placa) conforme mostrado na Figura 5.27. O material da placa é alumínio com as seguintes propriedades:

Módulo de elasticidade $E = 68,948 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ($1,0 \times 10^7 \text{ psi}$)

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Massa específica $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ($2,54 \times 10^{-4} \text{ lb-s}^2/\text{pol}^4$)

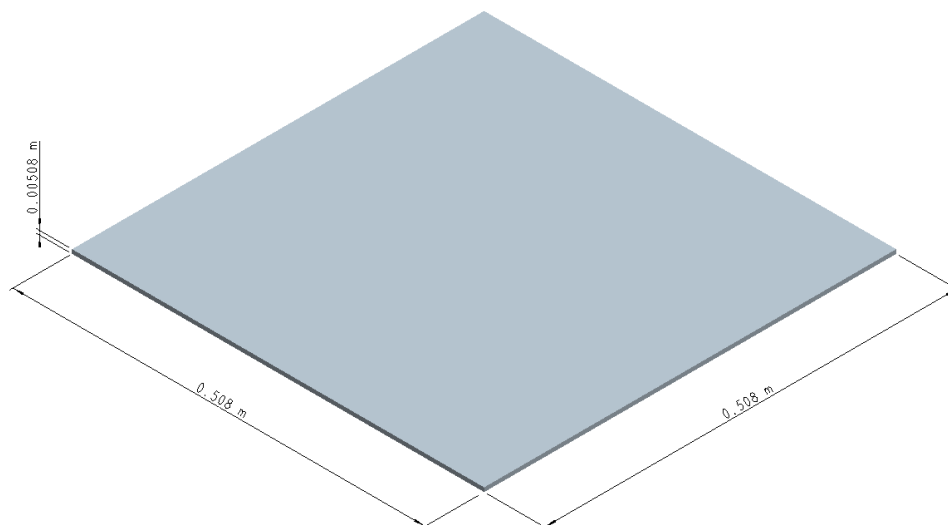


Figura 5.27 Placa quadrada de alumínio

Primeiramente são calculadas as frequências naturais da placa. Para a análise, a placa da Figura 5.27 é dividida em 64 elementos com 4 nós cada, totalizando 81 nós conforme Figura 5.28. No Meflab é escolhido o elemento de placa conforme e não conforme, para o MSC Nastran® é escolhido o elemento CQUAD4.

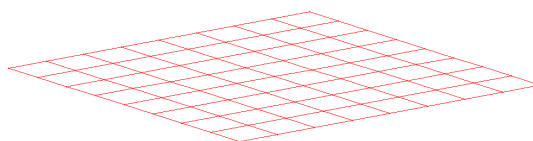


Figura 5.28 Chapa alumínio 8 x 8 – 64 elementos

Os resultados obtidos para as 30 primeiras frequências naturais de vibração da placa são mostrados na Tabela 5.28.

Tabela 5.28 Frequências naturais em Hz de uma placa quadrada suportada nos vértices

Modo	Meflab não conforme (Hz)	Meflab conforme (Hz)	MSC Nastran® (Hz)	Modo	Meflab não conforme (Hz)	Meflab conforme (Hz)	MSC Nastran® (Hz)
1	34,3	34,1	34,4	16	575,8	594,8	627,8
2	75,7	75,9	75,7	17	654,1	664,7	732,8
3	75,7	75,9	75,7	18	763,7	775,5	845,6
4	94,0	93,9	94,8	19	801,7	815,8	935,0
5	185,9	185,7	191,6	20	801,7	815,8	935,0
6	211,2	212,6	214,6	21	845,9	851,1	1011,2
7	243,7	242,8	252,8	22	965,3	979,8	1127,9
8	243,7	242,8	252,8	23	965,3	979,8	1127,9
9	332,8	336,5	343,9	24	984,6	986,6	1177,5
10	381,8	387,6	404,1	25	1078,3	1109,6	1311,7
11	381,8	387,6	404,1	26	1080,4	1111,2	1311,7
12	448,7	442,1	491,4	27	1080,4	1111,2	1318,7
13	561,7	561,8	612,7	28	1188,6	1254,0	1902,5
14	561,7	561,8	612,7	29	1331,4	1349,0	1915,6
15	565,6	562,2	626,2	30	1331,4	1349,0	2051,2

Não foi possível encontrar uma formulação analítica com número de frequências naturais suficientes que permitisse uma comparação com os cálculos realizados no Meflab e no MSC Nastran®. Então primeiramente é feita uma análise comparativa entre as respostas da formulação não conforme em relação à formulação conforme do Meflab usando a diferença RMS e a diferença média percentual absoluta, como indicado na Tabela 5.29.

Tabela 5.29 Diferença Meflab não conforme x Meflab conforme

Diferença	Meflab não conforme x Meflab conforme
Percentual	1,1 %
RMS	17,7 Hz

A diferença média percentual absoluta foi calculada através da média aritmética dos valores absolutos das diferenças percentuais entre MSC Nastran® e Meflab para cada frequência natural.

Conforme pode ser visto na Tabela 5.29 a diferença entre as formulações conforme e não conforme é cerca de 1%, desta forma o uso da formulação conforme não se justifica devido ao seu custo computacional maior, mas um ganho de 1% sobre a formulação não conforme. Neste caso a formulação não conforme é adotada para esta análise.

Agora fazendo uma análise comparativa da resposta do MSC Nastran® em relação à resposta do Meflab com a formulação não conforme, e que constam na Tabela 5.28, calcula-se a diferença RMS e a diferença média percentual absoluta, que podem ser vistos na Tabela 5.30.

Tabela 5.30 Diferença MSC Nastran® x Meflab não conforme – 30 frequências naturais

Diferença	MSC Nastran® x Meflab não conforme
Percentual	11,8 %
RMS	239,0 Hz

Como pode ser visto nos resultados apresentados na Tabela 5.30, a diferença encontrada entre as duas formulações para as 30 primeiras frequências naturais esta acima de 10%, o que acarreta em diferenças desta ordem, ou maiores para cálculos que usem estes dados. Há duas soluções possíveis para diminuir estas diferenças, uma seria aumentar o número de elementos usados no MSC Nastran® como visto no item 5.2, ou então, usar um número menor de frequências naturais para comparação. Por isto apenas são avaliadas as 15 primeiras frequências naturais, desta forma o a diferença RMS e a diferença média percentual absoluta resultam como indicado na Tabela 5.31.

Tabela 5.31 Diferença MSC Nastran® x Meflab não Conforme – 15 frequências naturais

Diferença	MSC Nastran® x Meflab não conforme
Percentual	3,1 %
RMS	20,0 Hz

Como pode ser visto na Tabela 5.31 comparando apenas os 15 primeiros modos de vibração, a diferença entre as formulações não conforme do Meflab e do MSC Nastran® ficam com um valor considerado aceitável para este para a comparação dos resultados dos sistemas acoplados.

5.7.2 Análise acústica da cavidade hexaédrica

Sobre a chapa de alumínio existe uma cavidade de ar de formato hexaédrico com 0,508 m (20 in) em cada lado da base e altura de 2,54 m (100 in) segundo mostra a Figura 5.29. A cavidade é preenchida com ar com as seguintes propriedades:

Massa específica $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ ($1,21 \times 10^{-7} \text{ lb-s}^2/\text{pol}^4$)

Velocidade do som no ar $c = 330,2 \text{ m/s}$ (13000 pol/s)

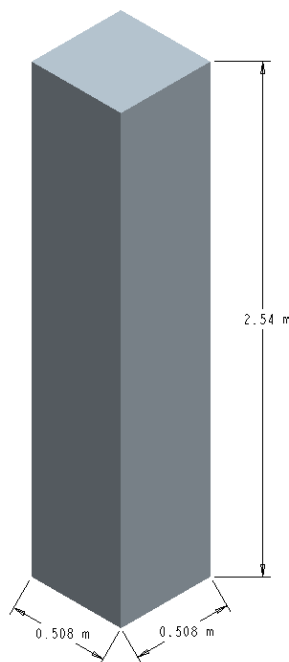


Figura 5.29 Cavidade de ar.

Foram calculadas as frequências naturais da cavidade acústica. Para a análise o hexaedro da Figura 5.29 é dividido em 512 elementos com 8 nós cada, totalizando 729 nós segundo Figura 5.30. Tanto para o Meflab quanto para o MSC Nastran® as frequências naturais são calculadas através das formulações de elemento sólido hexaédrico, no programa do MSC Nastran® este elemento chama-se CHEXA. As paredes laterais da cavidade são consideradas rígidas.

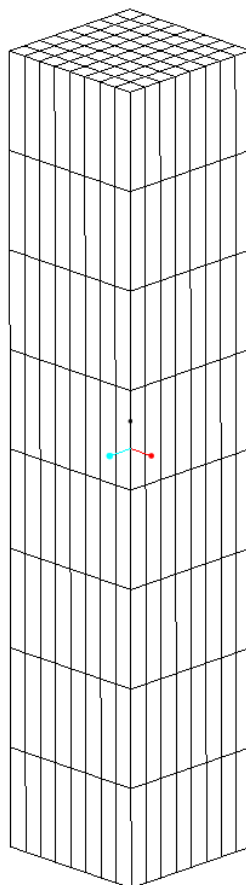


Figura 5.30 Cavidade de ar 8x8x8 – 512 elementos.

Os resultados obtidos para as 30 primeiras frequências naturais de vibração da cavidade são mostrados na Tabela 5.32, estes resultados são comparados com os resultados analíticos encontrados através das formulações propostas por Papadopoulos (2001).

Tabela 5.32 Frequências naturais da cavidade acústica

Modos	Meflab (HZ)	MSC Nastran® (Hz)	Analítico (HZ)
1	0	0	0
2	65,4	65,4	65,0
3	133,4	133,4	130,0
4	206,4	206,4	195,0
5	286,7	286,7	260,0
6	327,1	327,1	325,0
7	327,1	327,1	325,0
8	333,6	333,6	325,0
9	333,6	333,6	331,4
10	353,2	353,2	331,4
11	353,2	353,2	350,0
12	374,9	374,9	350,0
13	386,8	386,8	379,0
14	386,8	386,8	379,0
15	434,9	434,9	416,2
16	434,9	434,9	416,2
17	462,6	462,6	459,6
18	465,9	465,9	459,6
19	467,2	467,2	459,6
20	481,4	481,4	464,2
21	497,5	497,5	477,7
22	497,5	497,5	499,3
23	506,5	506,5	528,1
24	542,1	542,1	562,9
25	544,2	544,2	650,0
26	569,2	569,2	650,0
27	569,2	569,2	653,2
28	573,4	573,4	653,2
29	595,4	595,4	662,9
30	633,1	633,1	662,9

Baseado nos dados da Tabela 5.32 é calculado a diferença RMS para as 30 primeiras frequências naturais de cada formulação aplicada em relação aos resultados analíticos. O cálculo RMS é feito considerando-se os valores analíticos como sendo os valores exatos de referência. Os resultados podem ser vistos na Tabela 5.33.

Tabela 5.33 Diferença RMS 30 primeiras frequências naturais para a cavidade hexaédrica

Diferença	Meflab (Hz)	MSC Nastran® (Hz)
Valor RMS	37,0	37,0

Assim como no item 5.3 tanto o Meflab quanto o MSC Nastran® apresentam os mesmos resultados e a mesma diferença média percentual absoluta quando comparados com os resultados analíticos, esta diferença média percentual absoluta fica menor que 5. Porém fazendo uma análise um pouco mais minuciosa da tabela Tabela 5.32 pode se notar que ambos os programas não conseguem encontrar todas as frequências naturais repetidas como os encontrados na formulação analítica. Isto ocorre pela primeira vez nos modos 6, 7 e 8 onde a formulação analítica encontra três valores repetidos, mas o Meflab e o MSC Nastran® só encontram dois, esta falta de valores acaba causando uma defasagem entre os resultados encontrados. Para ilustrar melhor esta ideia a Tabela 5.34 apresenta os resultados para as 20 primeiras frequências naturais de forma alinhada, assim é possível ver em vermelho os valores perdidos pelo Meflab e pelo MSC Nastran®.

Tabela 5.34 Frequências naturais alinhadas da cavidade acústica

Modos	Meflab (HZ)	MSC Nastran® (Hz)	Analítico (HZ)
1	0,0	0,0	0,0
2	65,4	65,4	65,0
3	133,4	133,4	130,0
4	206,4	206,4	195,0
5	286,7	286,7	260,0
6	327,1	327,1	325,0
7	327,1	327,1	325,0
8			325,0
9	333,6	333,6	331,4
10	333,6	333,6	331,4
11	353,2	353,2	350,0
12	353,2	353,2	350,0
13	374,9	374,9	379,0
14			379,0
15	386,8	386,8	416,2
16	386,8	386,8	416,2
17	434,9	434,9	459,6
18	434,9	434,9	459,6
19			459,6
20	462,6	462,6	464,2

Uma possível causa para esta diferença seria que as frequências naturais calculadas pelos programas e pela formulação analítica não pertençam aos mesmos modos. Para verificar isto uma análise modal das respostas encontradas seria necessária, porém o Meflab não permite esta análise. Então para evitar erros os próximos estudos serão feitos com frequências de excitação menores que 320 Hz.

5.7.3 Análise vibroacústica da cavidade hexaédrica sobre placa quadrada

Para a análise vibroacústica a placa quadrada estudada na Seção 5.7.1 e a cavidade hexaédrica estudada na Seção 5.7.2 são agora estudadas juntas, ou seja, acopladas, de modo que as frequências naturais, os modos de vibração e a sensibilidade do sistema têm influência dos sistemas acústicos e estrutural simultaneamente. Os materiais, dimensões, apoios e condições de contorno são os mesmos das Seções 5.7.1 e 5.7.2. O sistema vibroacústico é analisado tanto no Meflab quanto no MSC Nastran® com o objetivo de comparar os resultados obtidos, uma vez que uma formulação analítica ou resultados experimentais para o sistema não estão disponíveis. No Meflab a placa quadrada foi modelada com elementos de placa não conforme, as razões da escolha deste elemento são discutidas na Seção 5.7.1, o modelamento da placa para o MSC Nastran® também é modelado conforme a Seção 5.7.1. Os modelamentos usados para a cavidade acústica hexaédrica para ambos os programas estão conforme apresentados na Seção 5.7.2.

Desta forma o sistema vibroacústico resulta em uma malha de 64 elementos de placa de 4 nós cada e 512 elementos sólidos hexaédricos de 8 nós cada, totalizando 576 elementos com 810 nós.

Os resultados encontrados para as 30 primeiras frequências naturais assim como a comparação entre os resultados são apresentados na Tabela 5.35.

Tabela 5.35 Resultados 30 primeiras frequências naturais para o sistema vibroacústico

Modo	MSC Nastran® (Hz)	Meflab (Hz)	Diferença MSC Nastran® em relação ao Meflab (%)
1	0	0	0
2	34,2	34,3	-0,12
3	67,4	64,9	3,65
4	75,2	75,7	-0,58
5	75,2	75,7	-0,58
6	94,6	93,8	0,80
7	134,2	133,2	0,75
8	190,7	185,6	2,70
9	206,7	206,4	0,14
10	214,4	210,6	1,76
11	252,2	243,2	3,56
12	252,2	243,2	3,56
13	287,2	286,6	0,23
14	327,2	327,1	0,06
15	327,2	327,1	0,06
16	333,9	332,0	0,58
17	339,9	333,5	1,89
18	343,5	333,5	2,91
19	353,6	353,2	0,11
20	353,6	353,2	0,11
21	375,4	374,8	0,16
22	387,0	381,0	1,57
23	387,0	381,0	1,57
24	403,5	386,6	4,20
25	403,5	386,6	4,20
26	435,3	434,9	0,11
27	435,3	434,9	0,11
28	462,7	447,8	3,22
29	466,3	462,6	0,80
30	467,4	465,7	0,36

Baseado nos dados da Tabela 5.35 são calculados a diferença RMS e a diferença média percentual absoluta para as 30 primeiras frequências, relativo à diferença do MSC Nastran® em relação ao Meflab (%), cujos resultados podem ser vistos na Tabela 5.36.

Tabela 5.36 Diferença sistema vibroacústico

Diferença	MSC Nastran em relação ao Meflab
Percentual	1,3 %
RMS	6,4 Hz

A diferença média percentual absoluta foi calculada através da média aritmética dos valores absolutos das diferenças percentuais entre MSC Nastran® e Meflab para cada frequência natural.

Com base na Tabela 5.35 e Tabela 5.36 pode-se verificar que os resultados para os programas MSC Nastran® e Meflab apresentam uma diferença máxima de 4,2% ou 16,9 Hz para os modos 24 e 25. Mesmo com as diferenças encontradas no item 5.7.1 elas não se propagaram para este cálculo.

5.7.4 Análise de resposta em frequência da cavidade hexaédrica sobre placa quadrada

Com o objetivo de verificar e analisar as formulações adotadas para cálculo da resposta em frequência dos sistemas vibroacústicos utilizados pelo programa Meflab, é proposto o estudo da cavidade hexaédrica sobre uma placa quadrada, simplesmente apoiada nos quatro cantos conforme estudado na Seção 5.7.3. Para o Meflab as respostas são calculadas através das formulações propostas por Ma e Hagiwara (1991). Posteriormente, o mesmo problema é resolvido com o programa MSC Nastran®.

Para a análise de resposta em frequência uma força de 4,448 N (1 lbf) é aplicada no nó 30 do domínio estrutural na placa, grau de liberdade 86, Figura 5.31. O ponto de análise é o nó 405 do domínio acústico na cavidade hexaédrica, grau de liberdade 563. O nó 30 foi escolhido por estar em uma região fora de um ponto de simetria da placa, situada em um ponto intermediário, entre a aresta exterior e o centro da placa. O nó 405 do domínio acústico foi escolhido por estar afastado do ponto de excitação 30 e em um quadrante diferente.

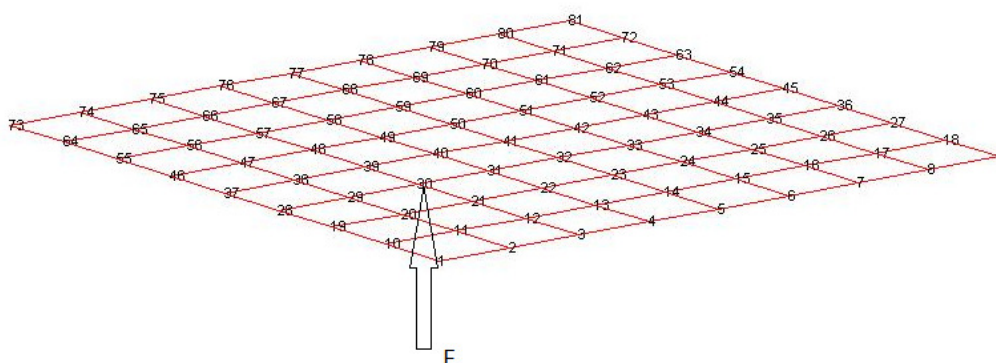


Figura 5.31 Aplicação da força no nó 30

Os valores encontrados para a pressão sonora, e para uma excitação senoidal de 0 a 225 Hz da força no Meflab podem ser vistos na Figura 5.32.

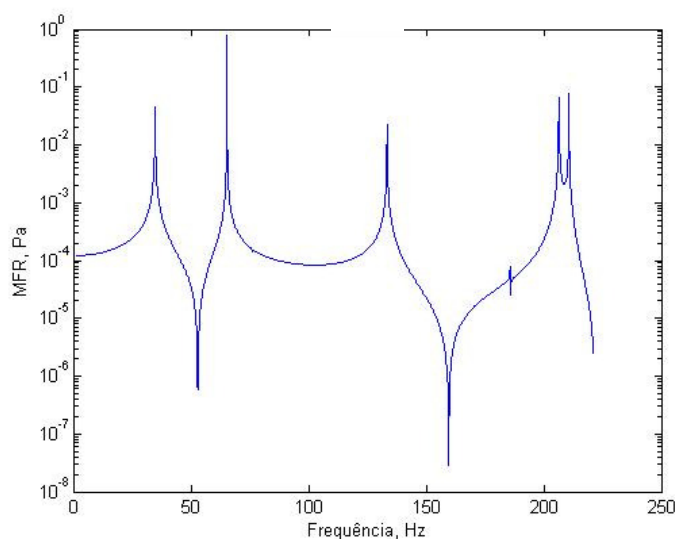


Figura 5.32 Resposta em frequência para sistema vibroacústico no Meflab

5.8 Sistema fluido-estrutura I. Otimização da resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, uma frequência de excitação e um ponto de medição

Considerando o sistema de uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada segundo Seção 5.7 e as respectivas análises de resposta em frequência, nesta Seção é proposta a otimização da pressão sonora em um ponto do fluido em uma frequência através do método SQP e Genético, conforme discutido nas Seções 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. Para esta otimização, é considerada a espessura da placa como variável de projeto e o volume da placa como função de restrição. Uma frequência natural do sistema acoplado é usada como frequência de excitação para a força aplicada, desta forma se espera obter uma placa com uma distribuição de espessuras diferentes para cada elemento finito, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente, porém sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites especificados como restrição. Além dos dados já usados na Seção 5.7 são considerados para otimização:

Nó de aplicação da força: 30, grau de liberdade 86 no domínio estrutural.

Nó de resposta para otimização: 405, grau de liberdade 563 no fluido.

Frequência de excitação: 206,7 Hz para o Meflab, esta frequência é escolhida, pois se encontra próxima da frequência natural número 9 do sistema acoplado conforme Tabela 5.35, estando influenciada predominantemente pelo domínio acústico como visto na Tabela 5.32 na

frequência de ressonância número 4 igual a 206,4 Hz, e está próxima à frequência de ressonância estrutural número 6 igual a 211,2 Hz como pode ser visto na Tabela 5.28.

Número de modos para a análise modal: 10 (simulações prévias feitas pelo autor mostraram que esta quantidade era o suficiente para a análise dos valores de frequência proposta).

Mínima espessura permitida: 0,1 pol. (0,00254 m).

Máxima espessura permitida: 0,4 pol. (0,01016 m).

Volume mínimo permitido: 90% do volume original da placa.

Volume máximo permitido: 110% do volume original da placa.

Número de cromossomos: 20.

Número de bits por elemento: 5.

Número máximo de gerações: 100.

Número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo: 15.

Tolerância para a espessura na otimização SQP: 10^{-2}

Tolerância da função objetivo para o término da otimização SQP: 10^{-5}

A otimização é feita no Meflab através do comando *fmincon* disponível no Matlab® que utiliza uma programação quadrática sequencial (SQP) e do algoritmo Genético programado pelo autor, no Matlab®.

Os resultados de 10 simulações para o algoritmo Genético podem ser vistos na Tabela 5.37.

Tabela 5.37 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa

Otimização	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
1	84	99,99	12963
2	54	99,85	8659
3	90	99,99	13510
4	43	99,92	6589
5	43	99,92	6263
6	47	99,90	7407
7	59	99,97	10002
8	43	99,92	6510
9	43	99,92	6254
10	40	99,90	6147
Média	54,6	99,93	8430
Desvio Padrão	18,1	0,05	2821
Valor Mín.	40	99,85	6147
Valor Máx.	90	99,99	13510
SQP	-	73,48	1442

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na otimização em frequência SQP com a otimização Genética, conforme Tabela 5.37, verifica-se que a pressão sonora inicial é mais minimizada no processo Genético, porém com um tempo médio maior que o tempo do processo SQP. A Figura 5.33 mostra as respostas gráficas para os processos SQP e Genético.

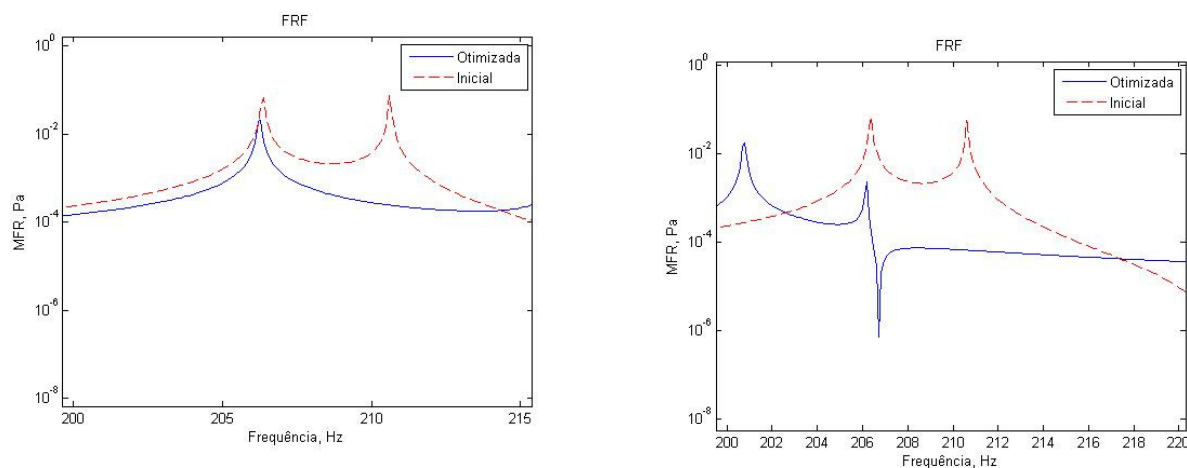


Figura 5.33 Pressão sonora inicial e otimizada para 206,7 Hz algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita)

Conforme pode ser observado na Figura 5.33, o método SQP desloca o pico de ressonância inicial para um valor mais baixo que a frequência de excitação do sistema, a otimização SQP também causa o desaparecimento do segundo pico de frequência natural observado no gráfico. O método Genético, por sua vez, causa o deslocamento dos dois picos de ressonância iniciais para frequências mais baixas além de posicionar uma antirressonância próxima da frequência de excitação.

A configuração das espessuras para os elementos finitos da placa encontrada para uma das simulações Genéticas comparada com a distribuição da placa otimizada com processo SQP, podem ser encontradas na Tabela 5.38.

Tabela 5.38 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa

Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)	Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)
1	0,32	0,28	33	0,16	0,32
2	0,26	0,11	34	0,20	0,35
3	0,19	0,22	35	0,23	0,15
4	0,16	0,18	36	0,27	0,27
5	0,17	0,22	37	0,26	0,23
6	0,20	0,10	38	0,22	0,22
7	0,24	0,35	39	0,20	0,10
8	0,26	0,11	40	0,16	0,10
9	0,26	0,10	41	0,19	0,31
10	0,24	0,10	42	0,21	0,12
11	0,21	0,10	43	0,22	0,10
12	0,19	0,23	44	0,22	0,31
13	0,20	0,19	45	0,22	0,11
14	0,21	0,16	46	0,21	0,24
15	0,23	0,40	47	0,20	0,16
16	0,24	0,25	48	0,19	0,12
17	0,20	0,14	49	0,24	0,38
18	0,23	0,17	50	0,24	0,25
19	0,23	0,35	51	0,22	0,36
20	0,23	0,18	52	0,20	0,20
21	0,26	0,22	53	0,19	0,30
22	0,22	0,17	54	0,20	0,27
23	0,22	0,25	55	0,24	0,23
24	0,20	0,19	56	0,25	0,22
25	0,16	0,30	57	0,28	0,38
26	0,20	0,28	58	0,24	0,21
27	0,24	0,19	59	0,20	0,36
28	0,28	0,27	60	0,17	0,22
29	0,26	0,29	61	0,17	0,40
30	0,23	0,28	62	0,19	0,39
31	0,20	0,21	63	0,26	0,23
32	0,17	0,11	64	0,31	0,19

Comparando a distribuição de espessuras da otimização SQP e a distribuição de espessuras da otimização Genética observa-se uma configuração bem diferente.

Para o caso estudado o método Genético reduz mais a pressão sonora inicial do que o método SQP, porém com um tempo de processamento maior.

5.9 Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, múltiplas frequências de excitação e um ponto de medição.

Considerando o sistema de uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada conforme Seção 5.7 e as respectivas análises de respostas em frequência, neste item é proposto a otimização da pressão sonora em um ponto do fluido em múltiplas frequências através do método SQP e Genético conforme discutido nos Itens 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. Para esta otimização é considerada a espessura da placa como variável de projeto e o volume da chapa como função de restrição. As frequências 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78 e 80 Hz são usadas como frequências de excitação para a força aplicada, cada frequência é aplicada separadamente e a resposta é a soma da pressão sonora para cada frequência de excitação no ponto de medição. Desta forma se espera obter uma placa com uma distribuição de espessuras diferentes para cada elemento finito, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente, porém sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites especificados como restrição. Além dos dados já usados na Seção 5.7 são considerados para otimização:

Nó de aplicação da força: 30, grau de liberdade 86 no domínio estrutural.

Nó de resposta para otimização: 405, grau de liberdade 563 no fluido.

Frequências de excitação: 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78 e 80 Hz, estas frequências são escolhidas, pois neste intervalo existem duas frequências diferentes de ressonância do sistema acoplado, conforme Tabela 5.35, uma influenciada pelo domínio fluido e outra pelo domínio estrutural.

Número de modos para a análise modal: 10 (simulações prévias feitas pelo autor mostraram que esta quantia era o suficiente para a análise dos valores de frequência proposta.)

Mínima espessura permitida: 0,1 pol. (0,00254 m)

Máxima espessura permitida: 0,4 pol. (0,01016 m)

Volume mínimo permitido: 90% do volume original da placa

Volume máximo permitido: 110% do volume original da placa.

Número de cromossomos: 20.

Número de bits por elemento: 5.

Número máximo de gerações: 100.

Número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo:

15.

Tolerância para a espessura na otimização SQP: 10^{-2}

Tolerância da função objetivo para o término da otimização SQP: 10^{-5}

A otimização é feita no Meflab através do comando *fmincon* disponível no Matlab® que utiliza uma programação quadrática sequencial (SQP) e do algoritmo Genético programado pelo autor, no Matlab®.

Os resultados de 10 simulações para o algoritmo Genético podem ser vistos abaixo na Tabela 5.39.

Tabela 5.39 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa múltiplas excitações

Otimização	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
1	100	42,8	15625
2	100	35,7	15858
3	89	54,2	15391
4	83	42,0	14280
5	41	45,2	7025
6	37	43,0	5939
7	33	31,7	5187
8	100	35,7	15562
9	100	35,7	14935
10	100	35,7	14883
Média	78,3	40,2	12468
Desvio Padrão	29,1	6,6	4473
Valor Mín.	33	31,7	5187
Valor Máx.	100	54,2	15858
SQP	-	5,1	1583

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na otimização em frequência SQP com a otimização Genética, conforme Tabela 5.39, verifica-se que a pressão sonora inicial é mais minimizada no processo Genético, mas com um tempo médio maior que o tempo do processo SQP. A Figura 5.34 mostra as respostas gráficas para os processos SQP e Genético.

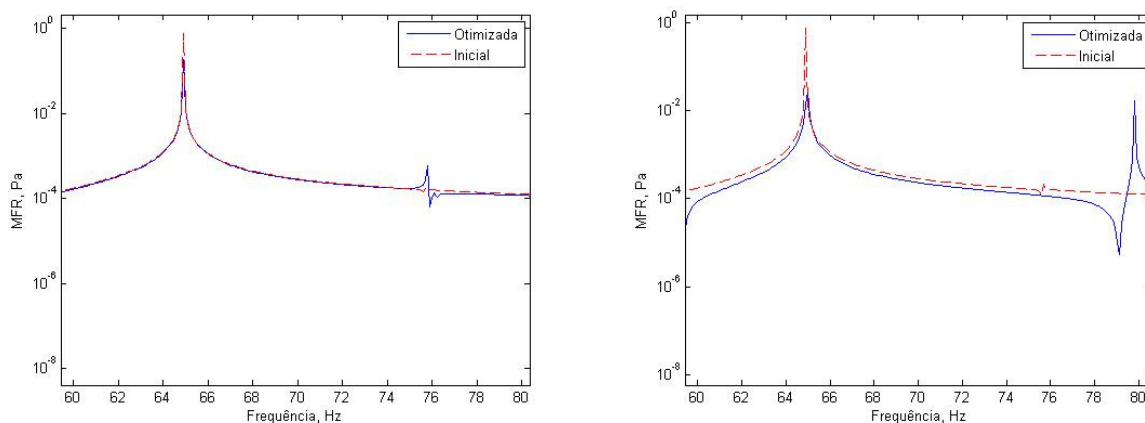


Figura 5.34 Pressão sonora inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) múltiplas excitações

Conforme pode ser observado na Figura 5.34, o método SQP visualmente não consegue um afastamento da curva inicial, apenas posiciona um ponto de ressonância e antirressonância próximo a 76 Hz, o que explica a redução da pressão sonora inicial de apenas 5%. O método Genético, por sua vez, desloca a curva de valores de pressão sonora para valores menores que os iniciais. O método também posiciona um ponto de ressonância e antirressonância, mas próximo a 79 Hz.

A configuração das espessuras para os elementos finitos da placa encontrada para uma das simulações Genéticas, comparada com a distribuição da placa otimizada com processo SQP, podem ser encontradas na Tabela 5.40.

Tabela 5.40 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa múltiplas excitações

Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)	Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)
1	0,22	0,36	33	0,20	0,16
2	0,18	0,15	34	0,25	0,17
3	0,20	0,31	35	0,20	0,23
4	0,20	0,38	36	0,18	0,24
5	0,20	0,16	37	0,20	0,21
6	0,20	0,27	38	0,18	0,31
7	0,20	0,12	39	0,20	0,16
8	0,20	0,10	40	0,17	0,18
9	0,20	0,19	41	0,20	0,15
10	0,20	0,34	42	0,20	0,24
11	0,19	0,24	43	0,19	0,11
12	0,20	0,23	44	0,20	0,12
13	0,20	0,16	45	0,20	0,28
14	0,20	0,14	46	0,20	0,20
15	0,17	0,11	47	0,20	0,16
16	0,20	0,28	48	0,20	0,11
17	0,20	0,26	49	0,20	0,32
18	0,20	0,34	50	0,20	0,26
19	0,20	0,37	51	0,20	0,36
20	0,19	0,18	52	0,18	0,31
21	0,20	0,28	53	0,20	0,22
22	0,20	0,20	54	0,20	0,13
23	0,20	0,10	55	0,20	0,18
24	0,19	0,12	56	0,20	0,14
25	0,20	0,18	57	0,20	0,19
26	0,25	0,24	58	0,20	0,24
27	0,26	0,25	59	0,25	0,17
28	0,20	0,39	60	0,20	0,10
29	0,25	0,10	61	0,20	0,24
30	0,17	0,32	62	0,20	0,10
31	0,20	0,11	63	0,20	0,31
32	0,20	0,10	64	0,20	0,14

Comparando a distribuição de espessuras da otimização SQP e a distribuição de espessuras da otimização Genética observa-se uma configuração bem diferente.

Para o caso estudado o método Genético reduz mais a pressão sonora inicial do que o método SQP, porém com um tempo de processamento maior.

5.10 Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – uma força de excitação num ponto, uma frequência de excitação e dois pontos de medição

Considerando o sistema de uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada conforme Seção 5.7 e as respectivas análises de resposta em frequência, nesta Seção é proposta a otimização da pressão sonora em dois pontos do fluido, assim a resposta é a soma da pressão sonora para cada ponto de medição na frequência de excitação. A otimização é feita em uma frequência através do método SQP e Genético conforme discutido nos Itens 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. Para esta otimização é considerada a espessura da placa como variável de projeto e o volume da placa como função de restrição. A frequência de 65 Hz é usada como excitação para a força aplicada, desta forma se espera obter uma placa com uma distribuição de espessuras diferente para cada elemento finito, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente, porém, sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites especificados como restrição. Além dos dados já usados na Seção 5.7, são considerados para otimização:

Nó de aplicação da força: 30, grau de liberdade 86 no domínio estrutural.

Nós de resposta para otimização: 247 e 405, graus de liberdade 405 e 563 no fluido respectivamente.

Frequência de excitação: 65 Hz, esta frequência é escolhida, pois está próxima de uma frequência de ressonância do sistema acoplado, a número 3 igual a 67,4, conforme Tabela 5.35.

Número de modos para a análise modal: 10 (simulações prévias feitas pelo autor mostraram que esta quantidade era o suficiente para a análise dos valores de frequência proposta.)

Mínima espessura permitida: 0,1 pol. (0,00254 m)

Máxima espessura permitida: 0,4 pol. (0,01016 m)

Volume mínimo permitido: 90% do volume original da placa

Volume máximo permitido: 110% do volume original da placa.

Número de cromossomos: 20.

Número de bits por elemento: 5.

Número máximo de gerações: 100.

Número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo:
15.

Tolerância para a espessura na otimização, SQP: 10^{-2}

Tolerância da função objetivo para o término da otimização ,SQP: 10^{-4} . Observa-se que com 10^{-5} a otimização não converge e é encerrada sem resposta após mais de 12 horas de processo.

A otimização é feita no Meflab, através do comando *fmincon* disponível no Matlab® que utiliza uma programação quadrática sequencial (SQP) e do algoritmo Genético programado pelo autor no Matlab®.

Os resultados de 10 simulações para o algoritmo Genético podem ser vistos na Tabela 5.41.

Tabela 5.41 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa dois pontos de medição

Otimização	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
1	40	86,0	6387
2	53	99,9	8159
3	47	99,9	6985
4	74	99,8	11243
5	93	98,8	13984
6	37	97,0	5871
7	52	99,4	8072
8	100	86,9	14631
9	65	85,2	9961
10	42	99,1	6605
Média	60,3	95,2	9190
Desvio Padrão	22,2	6,4	3165
Valor Mín.	37	85,2	5871
Valor Máx.	100	99,9	14631
SQP	-	57,5	7990

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na otimização em frequência SQP com a otimização Genética, conforme Tabela 5.41, verifica-se que a pressão sonora inicial, é mais minimizada no processo Genético, mas com um tempo médio maior que o tempo do processo SQP. A Figura 5.35 mostra as respostas gráficas para os processos SQP e Genético.

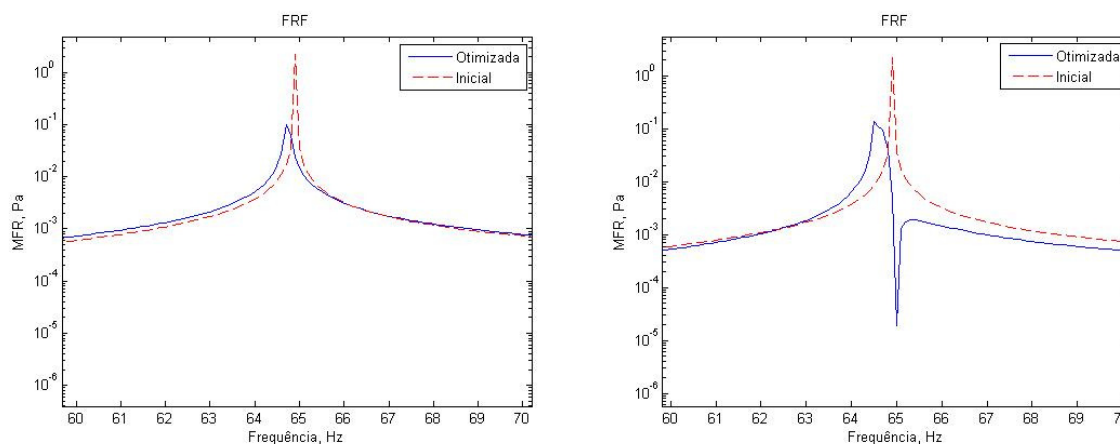


Figura 5.35 Resposta inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) dois pontos de medição (pressões sonoras somadas)

Conforme pode ser observado na Figura 5.35, o método SQP desloca o pico de ressonância inicial do sistema para uma frequência mais baixa que a frequência de excitação do sistema. O método Genético, por sua vez, causa o deslocamento do pico de ressonância inicial para uma frequência mais baixa que a frequência de excitação do sistema e também posicionar uma antirressonância próxima da frequência de excitação.

A configuração das espessuras para os elementos finitos da placa encontrada para uma das simulações Genéticas comparada com a distribuição da placa otimizada com processo SQP, podem ser encontradas na Tabela 5.42.

Tabela 5.42 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa dois pontos de medição

Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)	Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)
1	0,33	0,27	33	0,40	0,11
2	0,34	0,26	34	0,10	0,22
3	0,37	0,11	35	0,16	0,12
4	0,29	0,26	36	0,13	0,34
5	0,25	0,10	37	0,12	0,17
6	0,24	0,13	38	0,10	0,31
7	0,23	0,23	39	0,10	0,26
8	0,20	0,17	40	0,24	0,34
9	0,40	0,25	41	0,38	0,25
10	0,27	0,37	42	0,31	0,17
11	0,10	0,22	43	0,11	0,35
12	0,30	0,10	44	0,10	0,10
13	0,31	0,18	45	0,10	0,18
14	0,29	0,15	46	0,10	0,14
15	0,21	0,20	47	0,10	0,24
16	0,17	0,25	48	0,15	0,24
17	0,40	0,23	49	0,14	0,17
18	0,22	0,25	50	0,33	0,35
19	0,29	0,37	51	0,10	0,12
20	0,10	0,21	52	0,22	0,38
21	0,10	0,22	53	0,10	0,17
22	0,10	0,26	54	0,10	0,14
23	0,10	0,25	55	0,10	0,26
24	0,25	0,20	56	0,10	0,16
25	0,40	0,27	57	0,35	0,10
26	0,21	0,26	58	0,40	0,10
27	0,19	0,33	59	0,40	0,19
28	0,11	0,23	60	0,30	0,19
29	0,10	0,11	61	0,33	0,24
30	0,10	0,15	62	0,32	0,13
31	0,10	0,26	63	0,23	0,30
32	0,29	0,15	64	0,40	0,19

Comparando a distribuição de espessuras da otimização SQP e a distribuição de espessuras da otimização Genética observa-se uma configuração diferente.

Para o caso estudado o método Genético reduz mais a pressão sonora inicial do que o método SQP, porém com um tempo de processamento maior.

5.11 Sistema fluido-estrutura I. Otimização de resposta em uma cavidade acústica sobre uma placa quadrada apoiada – duas forças de excitação, uma frequência de excitação e um ponto de medição.

Considerando o sistema de uma cavidade acústica sobre uma placa retangular conforme Seção 5.7 e as respectivas análises de resposta em frequência, nesta Seção é proposta a otimização da pressão sonora em um ponto do fluido com duas forças de excitação posicionadas em partes diferentes da placa, através dos métodos SQP e Genético conforme discutido nos Itens 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9. Para esta otimização é considerada a espessura da placa como variável de projeto e o volume da placa como variável de restrição. A frequência de 65 Hz é usada como excitação para as forças aplicadas, desta forma se espera obter uma placa com uma distribuição de espessura diferente para cada elemento finito, isto é, a placa não terá uma espessura única como originalmente, porém sua massa não deve ser modificada significativamente, fora dos limites especificados como restrição. Além dos dados já usados na Seção 5.7 são considerados para otimização:

Nós de aplicação da força: 30 e 52 graus de liberdade 86 e 152 no domínio estrutural respectivamente.

Nó de resposta para otimização: 405, grau de liberdade 563 no fluido.

Frequência de excitação: 65 Hz, esta frequência é escolhida, pois está próxima de uma frequência de ressonância do sistema acoplado, a número 3 igual a 67,4, conforme Tabela 5.35.

Número de modos para a análise modal: 10 (simulações prévias feitas pelo autor mostraram que esta quantia era o suficiente para a análise dos valores de frequência proposta.)

Mínima espessura permitida: 0,1 pol. (0,00254 m)

Máxima espessura permitida: 0,4 pol. (0,01016 m)

Volume mínimo permitido: 90% do volume original da placa

Volume máximo permitido: 110% do volume original da placa.

Número de cromossomos: 20.

Número de bits por elemento: 5.

Número máximo de gerações: 100.

Número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo:
15.

Tolerância para a espessura na otimização SQP: 10^{-2}

Tolerância da função objetivo para o término da otimização SQP: 10^{-5}

A otimização é feita no Meflab através do comando *fmincon* disponível no Matlab®, que utiliza uma programação quadrática sequencial (SQP) e do algoritmo Genético programado pelo autor no Matlab®.

Os resultados de 10 simulações para o algoritmo Genético podem ser vistos na Tabela 5.43.

Tabela 5.43 Resposta das simulações Genética para cavidade acústica sobre placa duas forças

Otimização	Gerações	Diminuição resposta original (%)	Tempo de execução (s)
1	22	51,8	3445
2	44	64,3	7051
3	73	99,7	11748
4	45	95,6	6780
5	45	95,6	6761
6	45	95,6	6516
7	55	93,0	8724
8	65	25,9	10380
9	45	95,6	6759
10	55	97,5	8626
Média	49,4	81,4	7679
Desvio Padrão	13,8	25,3	2310
Valor Mín.	22	25,9	3445
Valor Máx.	73	99,7	11748
SQP	-	40,8	5851

Fazendo uma comparação com os resultados encontrados na otimização em frequência SQP, com a otimização Genética, conforme Tabela 5.43, verifica-se que a pressão sonora inicial é mais minimizada no processo Genético, mas com um tempo médio maior que o tempo do processo SQP. A Figura 5.36 mostra as respostas gráficas para os processos SQP e Genético.

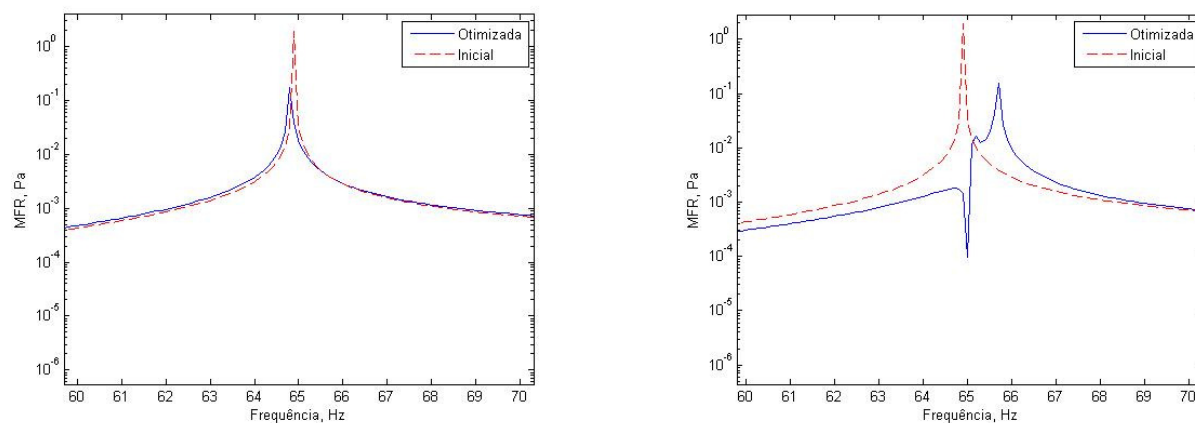


Figura 5.36 Resposta inicial e otimizada algoritmo SQP (esquerda) e Genético (direita) duas forças

Conforme pode ser observado na Figura 5.35, o método SQP desloca o pico de ressonância inicial do sistema para uma frequência mais baixa que a frequência de excitação do sistema. O método Genético, por sua vez, causa o deslocamento do pico de ressonância inicial para uma frequência mais alta que a frequência de excitação do sistema e também posicionar uma antirressonância próxima da frequência de excitação.

A configuração das espessuras para os elementos finitos da placa encontrada para uma das simulações Genéticas comparada com a distribuição da placa otimizada com processo SQP, podem ser encontradas na Tabela 5.44.

Tabela 5.44 Distribuição de espessuras após otimização Meflab cavidade acústica sobre placa
duas forças

Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)	Número do elemento	SQP Espessura (pol)	Genético Espessura (pol)
1	0,23	0,18	33	0,27	0,11
2	0,20	0,28	34	0,18	0,25
3	0,21	0,16	35	0,10	0,14
4	0,30	0,37	36	0,10	0,11
5	0,20	0,20	37	0,13	0,17
6	0,18	0,15	38	0,16	0,15
7	0,19	0,39	39	0,14	0,22
8	0,34	0,26	40	0,38	0,33
9	0,40	0,11	41	0,18	0,33
10	0,13	0,13	42	0,10	0,33
11	0,11	0,31	43	0,10	0,20
12	0,10	0,11	44	0,10	0,23
13	0,11	0,32	45	0,10	0,20
14	0,11	0,18	46	0,24	0,35
15	0,17	0,14	47	0,20	0,25
16	0,28	0,22	48	0,29	0,11
17	0,36	0,16	49	0,25	0,14
18	0,11	0,28	50	0,26	0,10
19	0,17	0,21	51	0,12	0,10
20	0,12	0,37	52	0,11	0,13
21	0,10	0,15	53	0,12	0,26
22	0,23	0,12	54	0,19	0,34
23	0,26	0,30	55	0,24	0,31
24	0,30	0,13	56	0,36	0,34
25	0,25	0,28	57	0,20	0,10
26	0,21	0,11	58	0,12	0,11
27	0,16	0,10	59	0,26	0,27
28	0,10	0,28	60	0,27	0,19
29	0,11	0,26	61	0,28	0,18
30	0,14	0,19	62	0,32	0,26
31	0,25	0,25	63	0,24	0,25
32	0,32	0,17	64	0,27	0,30

Comparando a distribuição de espessuras da otimização SQP e a distribuição de espessuras da otimização Genética observa-se uma configuração diferente.

Para o caso estudado o método Genético reduz mais a pressão sonora inicial do que o método SQP, porém com um tempo de processamento maior.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

6.1 Conclusões

A análise e otimização de resposta em frequência de sistemas acoplados fluido-estrutura é um tema de interesse das áreas de Engenharia. Desta forma este trabalho pode contribuir com alguns dados importantes com relação a esta área de estudo.

Com relação às formulações usadas no Meflab para a discretização do domínio estrutural, nos casos estudados, o elemento conforme é a formulação que apresenta a melhor estabilidade em relação às outras formulações. Todas as formulações se tornam mais instáveis à medida que as frequências naturais aumentam. As formulações também apresentaram uma instabilidade em algumas frequências naturais, que analiticamente apresentam o mesmo valor, mas nos cálculos numéricos apresentaram valores divergentes, tendendo a convergir à medida que o número de elementos usados para dividir o domínio estrutural aumenta.

A formulação do elemento de placa fina conforme é o que possui a melhor diferença quando comparado com a formulação analítica proposta para os casos estudados, porém considerando apenas as primeiras frequências naturais, a formulação do elemento de chapa fina não conforme mostra uma diferença muito próxima à formulação conforme.

Desta forma tanto para estabilidade quanto para diferença em relação a formulação analítica a formulação do elemento de chapa fina conforme implementada no Meflab apresenta um melhor desempenho, porém os valores são significativamente melhores para frequências de vibração altas. Para frequências mais baixas a formulação conforme não apresenta um valor significativamente melhor em relação ao elemento de chapa fina não conforme.

A formulação de elemento hexaédrico retangular usada no Meflab para discretizar o domínio acústico apresentou uma diferença RMS para as 30 primeiras frequências naturais de 3,61 Hz para o primeiro caso estudado e 37,0 Hz no segundo caso estudado quando comparado com respostas analíticas. Para a estabilidade a formulação apresenta bons resultados para o número de elementos usados para dividir os casos estudados, apresentando curvas com tendência horizontal. Tanto o Meflab quanto o MSC Nastran® encontram os mesmos valores de frequência natural para os casos estudados, porém apesar dos resultados numericamente iguais encontrados para os casos estudados não é possível afirmar que as formulações são iguais, uma vez que a formulação utilizada pelo MSC Nastran® não está disponível para análise.

No estudo de resposta em frequência, é observado que quanto maior o número de frequências naturais utilizadas, maiores devem ser o número de modos utilizados para o cálculo modal, isto se deve ao fato da qualidade da análise da resposta modal estar diretamente ligada a quantidade de modos usados, requisito já observado na literatura tradicional de análise de vibrações. Desta forma a escolha correta do número de modos é fundamental para a otimização de resposta em frequência usando métodos SQP e Genéticos implementados no Meflab, pois são baseados em análises modais, assim a escolha do número de modos deve considerar o valor da frequência de excitação a ser otimizada.

Na otimização de um sistema somente estrutural, o algoritmo Genético em nenhum momento apresenta resultados melhores que o método SQP.

Conforme pode ser observado na otimização Genética o número de cromossomos tem impacto no tempo de processamento, porém um impacto menor é observado na otimização da resposta. Porém um número de 10 cromossomos se mostra ineficiente para atingir a convergência necessária. O que pode ser observado durante as simulações com poucos cromossomos é que devido ao baixo número de indivíduos, quando o valor converge para um resultado, mesmo este violando as restrições impostas, as simulações não conseguem mudar a direção de procura e convergem para esta resposta.

O critério de parada da simulação usando o número máximo de repetições seguidas do valor da função objetivo do melhor indivíduo tem impacto no tempo de processamento, mas pouco impacto na resposta. Considerando 10 e 15 repetições e 30 cromossomos, nós temos um aumento de 73% no tempo de processamento médio e um ganho na diminuição da resposta inicial média de 0,3%.

O número de bits usado para discretizar a espessura da chapa no método Genético tem uma influência não linear no tempo de processamento e na otimização da resposta em frequência. Desta maneira um aumento no número de bits não significa uma melhor resolução ou uma convergência melhor.

É observado que a otimização através do algoritmo genético despense muito tempo procurando por respostas que não violem as restrições, este trabalho se torna mais demorado quando todos os cromossomos iniciais escolhidos aleatoriamente violam as restrições impostas e possuem alguma penalização. Este problema foi melhorado implementando uma alteração no algoritmo inicialmente proposto. Esta modificação consiste na escolha inicial aleatória de indivíduos que não violem as restrições impostas, assim a otimização Genética se torna mais eficiente, em um dos casos estudados o tempo de processamento do algoritmo melhorado foi de 77% do tempo do algoritmo inicialmente proposto.

Analisando as formulações usadas na análise das frequências naturais do sistema acoplado vibroacústico, os resultados encontrados para os programas MSC Nastran® e Meflab apresentam um valor de 1,2% para a diferença média percentual absoluta para as 30 primeiras frequências naturais, apesar das diferenças encontradas no item 5.7.1 de 11,8%, pois as diferenças não se propagaram para este cálculo. Infelizmente não é possível comparar estes resultados com respostas analíticas, pois nenhuma formulação analítica foi encontrada para ser usada como base de comparação nas literaturas consultadas para os casos de sistemas acoplados estudados. Porém, como ambas as formulações apresentam boa concordância com resultados analíticos para domínios somente estrutural e somente acústicos, isto serve de bom indício de que a formulação utilizada deve apresentar uma boa exatidão.

No caso da otimização de sistemas acoplados vibroacústicos o algoritmo Genético, considerando os valores médios, sempre diminui mais a pressão sonora inicial que o método SQP, porém o tempo de processamento do método SQP é sempre menor que o tempo médio de processamento do método Genético. No caso estudado no Item 5.9, por exemplo, a redução média da pressão sonora inicial do método Genético é 7,9 vezes maior que a redução encontrada pelo método SQP, porém o tempo médio de processamento do algoritmo Genético é 7,9 vezes maior que o tempo de processamento do algoritmo SQP.

Desta forma é possível concluir que o aumento da complexidade do sistema acoplado diminui a eficiência do método SQP, este método também não se mostra o mais indicado para a otimização de sistemas vibroacústicos, por ser um método de otimização local ele não é capaz de encontrar os melhores valores de otimização.

Também é possível concluir que o método Genético encontra valores médios de otimização melhores que o SQP, principalmente para sistemas acoplados com mais de uma força de excitação, uma frequência de excitação e um ponto de medição. Porém este método demanda mais tempo de processamento e devido ao fato que é aconselhável a execução de mais de uma simulação para verificação dos resultados encontrados.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para próximos trabalhos, pode-se propor:

1 – Melhoria do algoritmo Genético proposto pelo autor de forma a torná-lo mais eficiente, principalmente em termos de tempo de processamento.

2 – Implementação de um novo método determinístico em substituição ao método SQP que se mostrou ineficiente para sistemas acoplados fluído-estrutura.

3 – Aplicar a análise e otimização da pressão sonora proposta neste sistema em um prisma compostos por chapas e reforçado com barras, o que se aproxima mais de uma cabine de um veículo.

4 – Modelar uma cabine de veículo real, analisar e otimizar a mesma, usando o modelamento numérico proposto neste trabalho.

5 – Implementação de análises modasi no programa Meflab.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blevins, R. **Formulas for natural frequency and mode shape**, Krieger Publishing Company, 1st ed., 1995.

Dettemer, W.; Perié, D. A computational framework for fluid-structure interaction Finite element formulation and applications, **Journal of Computer Methods in Applied Mechanisms and Engineering**, v. 195, p. 5754-5779, 2006.

Duhring, M. B.; Jensen, J. S.; Sigmund, O. Acoustic design by topology optimization, **Journal of Sound and Vibration**, v. 317, p. 557-575, 2008.

Étienne, S.; Pelletier, D. A general approach to sensitivity analysis of fluid-structure interactions, **Journal of Fluids and Structures**, v. 21, p. 169-186, 2005.

Gerges, S. Estado da Arte para Solução dos Problemas Vibroacústica por Métodos Numéricos, **Tecniacustica**, p. 1-22, 2000.

<http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/fmincon.html>, Acesso em: 10/02/2011.

Leite, J. P. B.; Topping, B. H. V. Improved genetic operators for structural engineering optimization, **Advances in Engineering Software**, v. 29, p. 529-562, 1998.

Ma, Z.-D.; Hagiwara, I. Sensitivity Analysis for Coupled Acoustic-Structural Systems Part I: Modal Sensitivities, **AIAA Journal**, v. 29, p. 1787-1795, 1991.

Marburg, S. Developments in Structural-Acoustics Optimization for Passive Noise Control, **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 4, p. 291-370, 2002.

Marburg, S.; Beer H.-J.; Gier, J.; Hardtke, H.-J. Experimental verification of structural-acoustic modelling and design optimization, **Journal of Sound and Vibration**, v. 252, p. 591-615, 2002.

Marburg, S; Nolte, B.. Computacional Acoustic of Noise Propagation in Fluids, **Springer**, 1st ed., 2008.

Melanie, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**, A Bradford Book The MIT Press, 1st ed., 1996.

Mitra, S.; Sinhamahapatra, K.P. 2D simulation of fluid structural interaction using finite element method, **Journal of Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, p. 52-59, 2008.

Moussou, P. A kinematic method for the computation of the natural modes of Fluid-Structure Interaction systems, **Journal of Fluids and Structures**, v. 20, p. 643-658, 2005.

MSC SOFTWARE, 1996. **NAS115 - Fluid-structure analysis using MSC Nastran - Course Notes**. The MacNeal-Schwendler Corporation.

Papadopoulos, C. Redistribution of the low frequency acoustic modes of a room: a finite element-based optimization method, **Journal of Applied Acoustics**, v. 62, p. 1267-1285, 2001.

Petyt, M. **Introduction to finite element vibration analysis**, Cambridge University Press, 1st ed., 1998.

Pierro, E.; Mucchi, E.; Soria, L.; Vecchio, A. On the vibro-acoustical operacional modal analysis of a helicopter cabin, **Journal of Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, p. 1205-1217, 2009.

Powell, M.J.D., "A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations," Numerical Analysis, G.A.Watson ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Vol. 630, 1978.

Sigrist, J.; Garreau, S. Dynamic analysis of fluid-structure problems with modal methods using pressure-based fluid finite elements, **Journal of Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, p. 287-300, 2007.