

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO  
DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS NÃO  
NECESSARIAMENTE CONVEXOS

por  
ARÌ JOÃO AIOLFI

Porto Alegre, dezembro de 2003

Tese submetida por Arì João Aiolfi (<sup>1</sup>) como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Jaime Bruck Ripoll (UFRGS)

Banca Examinadora:

Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (UFRGS)

Dr. Leonardo Prange Bonorino (UFRGS)

Dr. Marcos Dajczer (IMPA)

Dra. Nedir do Espírito-Santo (UFRJ)

Data da Defesa: 17 de Dezembro de 2003.

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

\*

Ao meu pai Victorino (*in memorium*).

Àquele dia ensolarado do ano de 1975 em que me fiz a seguinte pergunta: “E se não houvesse o espaço, onde eu estaria?”

## **Agradecimentos**

A todos os professores que contribuíram para a minha formação, em especial ao professor Jaime Bruck Ripoll pelo apoio, paciência, disponibilidade e por sua valiosa orientação.

Aos professores Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, Leonardo Prange Bonorino, Marcos Dajczer e Nedir do Espírito-santo, pelo pronto aceite em participar da banca e por suas contribuições a este trabalho.

Aos colegas da Pós-Graduação em Matemática pela amizade e solidariedade, em especial a Carmem, Edson e Virgínia.

Aos atuais e ex-colegas da Unochapecó por terem “segurado a barra” enquanto estive fora.

Ao Dirceu Bagio, Ilo Dias e João Lazzarin pela amizade e companhia agradável.

A Andréa pelo carinho e apoio durante esta jornada e por ter provado que é possível amar a distância.

A Bebê, Preto, Quinho e Toio, pela alegria e companheirismo.

A Deus, apesar da dúvida quanto a sua existência.

## Resumo

Estudamos o problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em domínios limitados do plano. Provamos a existência e unicidade de gráficos mínimos sobre domínios limitados e não necessariamente convexos, com valores no bordo satisfazendo uma condição que denominamos *condição da declividade limitada generalizada* a qual, usando cilindros no lugar de planos, generaliza a condição clássica da declividade limitada. Com este resultado, dado um domínio limitado e suave qualquer do plano, conseguimos obter cotas explícitas para a norma  $C^2$  de dados no bordo deste domínio que garantem a existência de solução ao correspondente problema de Dirichlet.

## Abstract

We study the Dirichlet problem for the minimal surface equation in bounded domains of the plane. We prove the existence and uniqueness of minimal graphs over bounded and not necessarily convex domains, taking on values on the boundary satisfying a condition that we call *generalized bounded slope condition*. This condition uses cylinders instead of planes and generalizes the classical bounded slope condition. Using this result we were able to obtain explicit estimates for the  $C^2$  norm of the boundary data that guarantees the existence of a solution for the corresponding Dirichlet problem.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>A condição da declividade limitada generalizada</b>	<b>17</b>
2.1	O teorema básico . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Um teorema de existência e unicidade para gráficos mínimos compactos em domínios não necessariamente convexos em termos da norma <math>C^2</math> do dado no bordo</b>	<b>41</b>
3.1	Uma resposta parcial ao Problema 1. . . . .	65
<b>4</b>	<b>Alguns resultados de existência e unicidade para gráficos mínimos compactos com bordo em planos não necessariamente paralelos</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Apêndice</b>	<b>78</b>
5.1	O método da continuidade . . . . .	78
5.1.1	Resultados necessários . . . . .	78
5.2	Estimativas globais do gradiente a partir de estimativas no bordo . . . . .	88
5.2.1	Sub e supersoluções generalizadas . . . . .	88
5.3	O princípio da tangência . . . . .	89

# 1 Introdução

Um dos problemas mais estudados em EDP, em conexão com a Geometria Diferencial, é o Problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas em uma variedade riemanniana. A equação diferencial parcial associada a este problema pode variar muito e depender do espaço considerado e do sistema de coordenadas utilizado. A situação mais conhecida é a da equação dos gráficos cartesianos mínimos (gráficos sobre domínios planares) em  $\mathbb{R}^3$ . Embora esta situação tenha sido muito explorada ao longo do último século, ainda permanecem algumas questões naturais a serem respondidas. Uma delas diz respeito à existência e unicidade de soluções para o problema no caso de domínios planos limitados e não convexos. Em nossa tese trabalhamos precisamente nesta situação. Para melhor situar, dentro deste tema de pesquisa, os resultados que obtivemos, fazemos no que segue um breve histórico deste problema, enfatizando os aspectos e teoremas mais diretamente relacionados aos resultados da tese.

Lembramos que o Problema de Dirichlet para equação das superfícies mínimas em domínios planares do  $\mathbb{R}^3$  consiste em determinar a existência e unicidade de soluções do sistema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \\ Q_0(u) := \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad , \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{R}^2$  e  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$  é dada *a priori*. Notemos que se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)$  é solução de (1) então

$$S = \{(x, y, u(x, y)); (x, y) \in \Omega\},$$

é uma superfície mínima do  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\partial S = \operatorname{Graf}(\varphi)$ .

O primeiro resultado mais geral e, em certa medida definitivo, sobre o problema (1), foi obtido por Tibor Radó em 1930. No trabalho [RD1], Radó provou que se uma curva de Jordan  $\Gamma$  em  $\mathbb{R}^3$  admite projeção injetiva sobre uma curva plana convexa  $\gamma$ , então  $\Gamma$  é o bordo de uma única superfície mínima. Além disso, esta superfície é um gráfico sobre o domínio convexo  $\Omega$  limitado por  $\gamma$  e tem a menor área dentre todas as superfícies com bordo  $\Gamma$ . Em outras palavras, o problema (1) tem solução única se  $\Omega$  é um domínio limitado e convexo. Adicionalmente, o próprio Radó em [RD2], forneceu um exemplo de um domínio  $\Omega$  limitado por uma curva de Jordan não convexa, para o qual existe um dado contínuo no bordo onde (1) não admite solução. Este exemplo clássico, conhecido por “exemplo do tetraedro”, está descrito no apêndice. Mais tarde, já na década de sessenta, R. Finn ([FI]) mostrou que para todo domínio limitado e não convexo, existem dados contínuos no bordo para os quais o Problema de Dirichlet para a equação da superfícies mínimas não tem solução.

Com base nos resultados de Radó e Finn, pode-se concluir então que:

*O Problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas é solúvel para arbitrários dados contínuos no bordo de um domínio limitado se, e somente se, o domínio é convexo.*

Apesar deste resultado dar uma resposta bastante satisfatória ao problema (1), a seguinte questão é muito natural e não decorre dele:

**Problema 1** *Dado um domínio  $\Omega$  limitado e de classe  $C^{2,\alpha}$ , e dado  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , decorre do teorema das funções implícitas a existência de  $\delta > 0$  tal que (1) tem solução para  $t\varphi$  com  $t \in (-\delta, \delta)$ . É possível estimar*

$$T := \sup \{ |t| ; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ solução de } Q_0 = 0 \text{ em } \Omega \text{ com } u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi \}$$

*em termos de alguma norma de  $\varphi$  e da geometria de  $\Omega$ ?*

Apesar de encontrar-se na atual literatura sobre o problema (1) uma quantidade muito grande de trabalhos, não temos conhecimento de qualquer resposta, mesmo parcial, ao problema acima, a não ser o trabalho recente [EsR]. Os trabalhos existentes, mesmo os mais recentes, que temos conhecimento (por exemplo [NI2], [CK], [ET], [KT1], [KT2], [ER], [RT], [RI1], [JS1], [JS2]), tratam unicamente de domínios ilimitados ou dados infinitos no bordo. Em [EsR], os autores tratam do caso particular da existência de gráficos mínimos com bordo em planos paralelos  $z = 0$  e  $z = h$ , assumindo o valor zero em  $\gamma_1$  e  $h$  em  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , onde  $\Omega$  é um domínio multiplamente conexo tal que  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \gamma_i$ , com  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , contida no interior da região limitada por  $\gamma_1$ , com hipóteses envolvendo a distância  $h$  entre os planos paralelos, a geometria do bordo e a distância entre  $\gamma_1$  e as curvas  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

É interessante observar que a existência do número  $\delta$  mencionado no problema acima constitui um resultado de 1910, devido a A. Korn (segundo [NI1], p. 201). Korn assume que tanto o domínio quanto os dados no bordo são de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , e mostra que (1) tem solução desde que a norma  $C^{2,\alpha}$  relativa aos dados no bordo seja suficientemente pequena (porém não fornece nenhuma estimativa de quão grande pode ser esta norma).

Em nossa tese investigamos a questão acima e obtemos resultados que dão algumas respostas à mesma. No que se segue explicamos alguns resultados que obtivemos.

### **Descrição dos resultados da tese.**

Obtemos inicialmente um resultado, Teorema 4, que é básico e fundamental para os outros resultados da tese. Este teorema estabelece a existência de soluções de (1) para dados no bordo satisfazendo uma condição

que chamamos de *condição da declividade limitada generalizada*. A prova do Teorema 4 é obtida usando esta condição e aplicando uma técnica bastante conhecida de EDP's, conhecida como o método da continuidade. A seguir apresentamos e discutimos este método bem como a condição da declividade limitada generalizada.

O método da continuidade, no caso do Problema de Dirichlet para equação das superfícies mínimas sobre domínios planares do  $\mathbb{R}^3$ , pode ser expresso através do seguinte teorema.

**Teorema 2** *Sejam  $\Omega$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Seja*

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), Q_0(u_t) = 0, u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}.$$

*Suponha que exista  $M$  tal que, dado  $t \in [0, 1]$ , se  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  satisfaz  $Q_0(u) = 0$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ , tem-se*

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u| \leq M.$$

*Então  $V = [0, 1]$ . Em particular, o problema (1) tem solução para  $\varphi$ .*

Este teorema decorre de resultados conhecidos sobre operadores lineares e quase-lineares elípticos e pode ser demonstrado a partir da teoria desenvolvida em [GT], embora este enunciado não apareça lá explicitamente. Fazemos um esboço da prova deste teorema no apêndice. Uma prova mais completa pode ser vista em [RI3].

Para melhor compreender a condição da declividade limitada generalizada é importante que antes apresentemos e discutamos a noção clássica da teoria das EDP elípticas que a origina, a saber, a *condição da declividade limitada*. Esta condição foi muito utilizada nos trabalhos mais antigos relativos ao problema (1) (veja [GT], seção 12.4).

**Definição 3** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ . Dizemos que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada com constante  $M \geq 0$  se para cada ponto  $p \in \partial\Omega$  existem funções lineares afim*

$$\pi_p^-, \pi_p^+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

*tais que*

- i)  $\pi_p^\pm(p) = \varphi(p)$ ;*
- ii)  $\pi_p^-(q) \leq \varphi(q) \leq \pi_p^+(q)$  para todo  $q \in \partial\Omega$ ;*
- iii)  $|\nabla \pi_p^\pm| \leq M$ .*

Esta condição, além de ter desempenhado um papel fundamental na história da teoria de EDP elípticas relativa a superfícies mínimas, tem sido também utilizada em trabalhos recentes que investigam o problema (1) em domínios radiais, como em [FR], bem como no estudo do Problema de Dirichlet para equação das superfícies de curvatura média constante, como em [RI2].

Foi demonstrado por Hartman ([HA]) que se  $\Omega$  é um domínio de classe  $C^2$ , limitado, uniformemente convexo (isto é,  $0 < k_{\min} := \min k_{\partial\Omega}$ ) e  $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$ , então  $\varphi$  satisfaz a condição da declividade limitada com alguma constante  $M \geq 0$ . Este fato, portanto, combinado com o método da continuidade (Teorema 2) nos garante de imediato que o problema (1) tem solução em qualquer domínio limitado, uniformemente convexo, de classe  $C^{2,\alpha}$ , para qualquer dado no bordo  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  (basta notar que as funções  $\pi_p^\pm$  constituem barreiras ao problema, garantindo estimativas *a priori* para o gradiente no bordo de qualquer solução que assuma o dado  $\varphi$  no bordo).

O defeito da condição da declividade limitada é que ela só se aplica, fora situações muito especiais, a domínios convexos. Precisamente: se  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada e  $\varphi$  não é a restrição de uma

função linear afim a  $\partial\Omega$ , então  $\Omega$  é convexo (conforme [HA], p. 496).

Buscamos então uma condição mais fraca que se aplicasse a domínios mais gerais. Encontramos de fato uma maneira muito natural de generalizar a condição da declividade limitada, que se aplica a qualquer domínio e que pode ser enunciada como segue (veja Definição 6 para maiores detalhes): *seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e seja  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ . Dados  $M \geq 0$  e  $0 < R \leq \infty$ , dizemos que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M$  e raio  $R$  se para todo  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$ , existem troncos de cilindros circulares retos  $C_{p,t}^-$  de raio  $R$  e bases  $c_{p,t,1}^-$  e  $c_{p,t,2}^-$ ,  $C_{p,t}^+$  de raio  $R$  e bases  $c_{p,t,1}^+$  e  $c_{p,t,2}^+$ , tais que:*

$$i) (p, t\varphi(p)) \in c_{p,t,1}^\pm;$$

$$ii) (2) C_{p,t}^- \text{ e } C_{p,t}^+ \text{ são transversais a } C(\partial\Omega) \text{ em } (p, t\varphi(p)),$$

$$c_{p,t,1}^\pm \cap C(\Omega) = \emptyset, C_{p,t}^- \cap C(\partial\Omega) \subset [t\varphi]^- , C_{p,t}^+ \cap C(\partial\Omega) \subset [t\varphi]^+$$

e, além disso, se  $c_{p,t,2}^\pm \cap C(\overline{\Omega}) \neq \emptyset$ ,

$$\sup \{z; (q, z) \in c_{p,t,2}^- \cap C(\overline{\Omega})\} \leq \underset{\partial\Omega}{\text{tinf}} \varphi$$

e

$$\inf \{z; (q, z) \in c_{p,t,2}^+ \cap C(\overline{\Omega})\} \geq \underset{\partial\Omega}{\text{tsup}} \varphi;$$

iii) O plano  $\Pi_{p,t}^-$  tangente a  $C_{p,t}^-$  em  $(p, t\varphi(p))$  e o plano  $\Pi_{p,t}^+$  tangente a  $C_{p,t}^+$  em  $(p, t\varphi(p))$  têm declividade menor ou igual a  $M$ .

<sup>2</sup>Observamos que  $C(\Omega)$  denota o conjunto  $\Omega \times \mathbb{R}$ ,  $\varphi^-$  denota o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} ; z \leq \varphi(x, y)\}$$

e  $\varphi^+$  denota o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} ; \varphi(x, y) \leq z\}.$$

Note que quando  $R \rightarrow \infty$  a condição da declividade limitada generalizada acima dá a condição clássica da declividade limitada.

Usando a condição da declividade limitada generalizada obtivemos então o seguinte resultado:

**Teorema 4** *Sejam  $\Omega \subset \{z = 0\}$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$  e  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , satisfazendo a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M \geq 0$  e raio  $R > 0$ . Se para todo  $p \in \partial\Omega$ , os troncos de cilindros como na Definição 6 têm altura  $h_0$  tal que*

$$h_0 \leq \frac{2R}{\sinh x_0}, \quad (2)$$

onde  $x_0 \approx 1,19965$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$ , e se

$$M\sqrt{1 + M^2} \sinh x_1 < 1, \quad (3)$$

onde  $x_1$  é a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h_0}x = 0,$$

então, para todo  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução

$$u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$ . Além disso,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u_t| \leq \frac{\sqrt{\sinh^2 x_1 (M^4 + M^2 + 1) + 2M \sinh x_1 + M^2(2 + M^2)}}{1 - M \sinh x_1}.$$

Nas demais seções da tese obtemos aplicações deste teorema. Na Seção 3, provamos um resultado (Teorema 15) que estabelece condições para que um domínio limitado e dados no bordo de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , satisfaçam a condição da declividade limitada generalizada (para alguma constante  $K$

e raio  $R$ ) e as condições (2) e (3) do Teorema 4 acima, com hipóteses envolvendo a geometria do domínio e a geometria do gráfico do dado no bordo. Precisamente, o Teorema 15 se enuncia: *seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R_0 > 0$  e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2 \sinh x_0}$$

e

$$\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0} < b \leq \frac{\sqrt{4 - a^2 \sinh^2 x_0}}{a \sinh x_0},$$

onde  $x_0$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$ . Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  com  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$\omega(\varphi) = \sup \{|\varphi(p) - \varphi(q)|; p, q \in \partial\Omega\} \leq \frac{(2 - a \sinh x_0 \sqrt{1 + b^2}) R_0}{\sinh x_0 \sqrt{1 + a^2} (1 + b^2)},$$

$\sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \leq a$  e a curvatura de Graf( $t\varphi$ ) é menor ou igual a  $1/R_0$  para todo  $t \in [0, 1]$  então, para cada  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

Obtemos também corolários, a seguir enunciados, que dão cotas para a norma  $C^2$  do dado no bordo que garantem a existência de soluções de (1), contribuindo assim para uma melhor compreensão do Problema 1.

(Corolário 16): *Seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R > 0$  e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$0 \leq a \leq \min \left\{ \frac{1}{2 \sinh x_0}, \frac{\sqrt{1 - R^2 k_{\max}^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} \right\}$$

e

$$\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0} < b \leq \frac{\sqrt{4 - a^2 \sinh^2 x_0}}{a \sinh x_0},$$

onde  $x_0$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$  e  $k_{\max} = \max |k_{\partial\Omega}|$ .

Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  não negativa com  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$|\varphi|_{2,\partial\Omega} \leq \left\{ a, \frac{(2 - a\sqrt{1 + b^2} \sinh x_0) R}{\sqrt{1 + a^2} (1 + b^2) \sinh x_0} \right\},$$

então para cada  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  de  $Q = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

(Corolário 17): Seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R > 0$  e seja

$$K = \min \left\{ \frac{1}{2 \sinh x_0}, \frac{\sqrt{1 - k_{\max}^2 R^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} \right\},$$

onde  $k_{\max} = \max |k_{\partial\Omega}|$ . Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  não negativa,  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$|\varphi|_{2,\partial\Omega} \leq \frac{K^2 R (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0},$$

então, para cada  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  de  $Q = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

Na seção 4 provamos dois teoremas relativos a gráficos mínimos compactos com bordo em planos não necessariamente paralelos. No Teorema 18 supomos um domínio multiplamente conexo  $\Omega \subset \{z = 0\}$  de classe  $C^{2,\alpha}$ , tal que  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \gamma_i$ , com  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , contida no interior da região limitada por  $\gamma_1$ . Consideramos uma função linear afim  $\pi$ , cujo gráfico é um plano não necessariamente paralelo a  $z = 0$  e tal que a intersecção do gráfico de  $\pi$  com o cilindro sobre  $\gamma_1$  esteja contida em um dos semiplanos fechados determinados pelo plano  $z = 0$ . Provamos então a existência de um gráfico mínimo assumindo o valor zero em  $\gamma_1$  e  $\pi(\gamma_i)$  em  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , sob hipóteses envolvendo a distância entre a curva  $\gamma_1$  e as curvas  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , e a altura

$$h = \sup\{|\pi(p)|; p \in \cup_{i=2}^n \gamma_i\}.$$

No Teorema 19 consideramos um domínio  $\Omega$  e uma função linear afim  $\pi$  como descrito acima (retirando a hipótese de regularidade sobre  $\Omega$ ), utilizamos hipóteses e técnicas semelhantes àsquelas de [EsR] onde exigindo adicionalmente que a curva  $\gamma_1$  de  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \gamma_i$  seja convexa, para garantir a existência de um gráfico mínimo sobre  $\Omega$  assumindo o valor  $\pi(\gamma_1)$  em  $\gamma_1$  e zero em  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

## 2 A condição da declividade limitada generalizada

Nesta seção introduzimos a noção da declividade limitada generalizada e a relacionamos com a noção da declividade limitada. Provamos um resultado geral relativo ao Problema de Dirichlet para as mínimas para domínios não necessariamente convexos e dados no bordo de classe  $C^{2,\alpha}$  satisfazendo a condição da declividade limitada generalizada e, como corolário da prova desse resultado, obtemos um teorema clássico relacionado.

A noção da declividade limitada conforme encontrada em [HA], p. 495, ou [GT], p. 283 ou p. 309, é dada pela Definição 3. Observamos que, se  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada com constante  $M \geq 0$ , então  $\Omega$  e  $t\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada com constante  $M$  (de fato  $tM$ ) para todo  $t \in [0, 1]$ , ou seja, para cada ponto  $p \in \partial\Omega$  e para cada  $t \in [0, 1]$ , existem duas funções lineares afim  $\pi_{p,t}^-, \pi_{p,t}^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $\pi_{p,t}^\pm(p) = t\varphi(p)$  e  $\pi_{p,t}^-(q) \leq t\varphi(q) \leq \pi_{p,t}^+(q)$ ,  $q \in \Omega$ , com  $|\nabla\pi_{p,t}^\pm| \leq M$ .

A importância da condição da declividade limitada é que os planos  $\pi_p^\pm$  que aparecem nessa condição fornecem barreiras ao Problema de Dirichlet para a equação das superfícies mínimas associado. No entanto, como já mencionamos na introdução, é possível provar que se essa condição é satisfeita (e  $\varphi$  não é a restrição de uma função linear a  $\partial\Omega$ ) então o domínio  $\Omega$  é convexo, e isto impede que a usemos no estudo do Problema de Dirichlet relativo a domínios mais gerais.

No que segue, procuramos estabelecer uma generalização natural da noção de declividade limitada usando cilindros no lugar de planos. Esta condição permitirá a utilização de catenóides como barreiras e, como veremos, pode ser aplicada a qualquer domínio do plano. Antes de enunciá-la porém, ex-

pressamos o que entenderemos por tronco de cilindro circular reto de raio  $R$ ,  $0 < R \leq \infty$ .

**Definição 5** *Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  planos paralelos e sejam  $S_{\Pi_1}$  o semi-espaço fechado determinado por  $\Pi_1$  e que contém  $\Pi_2$  e  $S_{\Pi_2}$  o semi-espaço fechado determinado por  $\Pi_2$  e que contém  $\Pi_1$ . Dado  $0 < R \leq +\infty$ , chamamos de tronco de cilindro circular reto de raio  $R$  e bases  $c_1$  e  $c_2$ , a superfície  $C$  do  $\mathbb{R}^3$  dada por*

$$C = \mathfrak{C} \cap S_{\Pi_1} \cap S_{\Pi_2},$$

onde:

*i) se  $0 < R < +\infty$ ,  $\mathfrak{C}$  é um cilindro circular reto de raio  $R$  cujas retas geratrizes são perpendiculares a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  e, se  $R = +\infty$ ,  $\mathfrak{C}$  é um plano perpendicular a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  e entende-se por retas geratrizes de  $\mathfrak{C}$ , as retas de  $\mathfrak{C}$  perpendiculares a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .*

*ii)  $c_1 = \mathfrak{C} \cap \Pi_1$  e  $c_2 = \mathfrak{C} \cap \Pi_2$ .*

*Em particular,  $\partial C = c_1 \cup c_2$  e, se  $h$  é a distância entre  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , então  $C$  tem altura  $h$ .*

A noção de declividade limitada generalizada é dada pela definição a seguir:

**Definição 6** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e seja  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ . Dados  $M \geq 0$  e  $0 < R \leq \infty$ , dizemos que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M$  e raio  $R$  se para todo  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$ , existem troncos de cilindros circulares retos  $C_{p,t}^-$  de raio  $R$  e bases  $c_{p,t,1}^-$  e  $c_{p,t,2}^-$ ,  $C_{p,t}^+$  de raio  $R$  e bases  $c_{p,t,1}^+$  e  $c_{p,t,2}^+$ , tais que:*

*i)  $(p, t\varphi(p)) \in c_{p,t,1}^\pm$ ;*

ii)  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$  são transversais a  $C(\partial\Omega)$  em  $(p, t\varphi(p))$ ,

$$c_{p,t,1}^\pm \cap C(\Omega) = \emptyset, C_{p,t}^- \cap C(\partial\Omega) \subset [t\varphi]^- , C_{p,t}^+ \cap C(\partial\Omega) \subset [t\varphi]^+$$

e, além disso, se  $c_{p,t,2}^\pm \cap C(\overline{\Omega}) \neq \emptyset$ ,

$$\sup \{z; (q, z) \in c_{p,t,2}^- \cap C(\overline{\Omega})\} \leq \text{tinf}_{\partial\Omega} \varphi$$

e

$$\inf \{z; (q, z) \in c_{p,t,2}^+ \cap C(\overline{\Omega})\} \geq \text{tsup}_{\partial\Omega} \varphi;$$

iii) O plano  $\Pi_{p,t}^-$  tangente a  $C_{p,t}^-$  em  $(p, t\varphi(p))$  e o plano  $\Pi_{p,t}^+$  tangente a  $C_{p,t}^+$  em  $(p, t\varphi(p))$  têm declividade menor ou igual a  $M$ .

Se  $R = \infty$ , a definição acima é equivalente à condição da declividade limitada (com constante  $M$ ). Observamos que neste caso, para cada  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ ,  $C_{p,t}^-$  (respectivamente  $C_{p,t}^+$ ) é uma faixa de comprimento infinito cuja largura é igual a distância entre os planos paralelos que contém as retas  $c_{p,t,1}^-$  e  $c_{p,t,2}^-$  (respectivamente  $c_{p,t,1}^+$  e  $c_{p,t,2}^+$ ), e que está contida no plano  $\Pi_{p,t}^-$  (respectivamente  $\Pi_{p,t}^+$ ) que é gráfico de uma função linear afim  $\pi_{p,t}^-$  (respectivamente  $\pi_{p,t}^+$ ) tal que  $|\nabla \pi_{p,t}^\pm| \leq M$ , cujo domínio é o plano que contém  $\Omega$  e que satisfaz as condições descritas na Definição 3.

No que segue, supomos sempre  $\Omega \subset \{z = 0\}$  e, se  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M \geq 0$  e raio  $R$ ,  $0 < R \leq +\infty$ , para dado  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$ , usaremos  $K_{p,t}^-$  e  $K_{p,t}^+$  para denotar a tangente do ângulo que as retas geratrizes de  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$  respectivamente fazem com o plano  $z = 0$  e chamaremos  $K_{p,t}^-$ ,  $K_{p,t}^+$  de “a declividade” de  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$  respectivamente. Observamos que decorre do item iii) da Definição 6 que  $0 \leq K_{p,t}^\pm \leq M$ . Além disso, quando não houver possibilidade de confusão, se  $0 < R < \infty$ , usaremos  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$

tanto para denotar a superfície cilíndrica quanto para denotar a região do espaço limitada por cada uma destas superfícies e pelos respectivos planos que contém as suas bases.

## 2.1 O teorema básico

Para a prova do Teorema 4 faremos uso de alguns resultados auxiliares que veremos na seqüência, sendo que neles está envolvido o conceito de *tronco de catenóide*, cuja definição é a que segue.

**Definição 7** *Seja  $K \subset \mathbb{R}^3$  um catenóide e seja  $r$  seu eixo de rotação. Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  planos perpendiculares à reta  $r$ . Sejam  $c_1 = K \cap \Pi_1$ ,  $c_2 = K \cap \Pi_2$ ,  $S_{\Pi_1}$  o semi-espaço fechado determinado por  $\Pi_1$  e que contém  $\Pi_2$  e  $S_{\Pi_2}$  o semi-espaço fechado determinado por  $\Pi_2$  e que contém  $\Pi_1$ . Se  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  forem tais que  $c_1$  e  $c_2$  sejam círculos de mesmo raio, chamamos a superfície do  $\mathbb{R}^3$*

$$J = K \cap S_{\Pi_1} \cap S_{\Pi_2}$$

*de tronco do catenóide  $K$  de bases circulares  $c_1$  e  $c_2$ .*

O lema a seguir é um dos resultados necessários para a demonstração do Teorema 4. Ele estabelece condições sobre a altura e o raio de um tronco de cilindro circular reto para que seu bordo seja o bordo de um tronco de catenóide.

**Lema 8** *Seja  $C$  um tronco de cilindro circular reto de raio  $R > 0$  e altura  $2h$ . Se*

$$\frac{R}{h} \geq a_0,$$

*$a_0 = \sinh x_0$ , onde  $x_0$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$ , então existe um tronco de catenóide  $J \subset C$ , cuja interseção com  $C$  são os círculos das bases de  $C$ .*

**Prova.** Sem perda de generalidade, podemos supor que o plano  $\pi$ , equidistante dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  das bases de  $C$ , seja o plano  $\{z = 0\}$ , e que os círculos das bases sejam  $c_1 \subset \pi_1$ , com centro em  $(0, 0, h)$  e  $c_2 \subset \pi_2$  com centro em  $(0, 0, -h)$ . Lembramos que

$$z = \alpha \cosh^{-1} \left( \frac{|(x, y)|}{\alpha} \right),$$

no domínio  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \alpha^2\}$  é a equação da parte não negativa do catenóide cujo eixo de rotação é o eixo  $z$  e cuja cintura é a circunferência de raio  $\alpha$  com centro na origem do  $\mathbb{R}^3$ . Assim, se existe um tronco de catenóide cujas intersecções com  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sejam  $c_1$  e  $c_2$  respectivamente, então a cintura de tal catenóide é um círculo de raio  $r$ ,  $0 < r < R$ , com centro em  $(0, 0, 0)$ , onde  $r$  é tal que

$$\frac{R}{r} = \cosh \frac{h}{r}. \quad (4)$$

Vamos analisar quais as condições sobre  $R$  e  $h$  para que a equação acima tenha solução. Tomando  $x = h/r$ , temos  $R/r = \cosh(h/r)$  se, e somente se,

$$\frac{R}{h}x = \cosh x.$$

Consideramos as funções

$$f_a(x) = ax, \quad a \in [0, +\infty) \text{ e } g(x) = \cosh x.$$

Então é claro que se  $a$  é suficientemente grande os gráficos de  $f_a$  e de  $g$  têm dois pontos em comum. Seja  $a_0$  o menor  $a > 0$  tal que os gráficos das funções  $f_a$  e  $g$  têm ao menos um ponto em comum. Seja então  $x_0 > 0$  tal que

$$a_0 x_0 = \cosh x_0.$$

Segue-se que, para  $a > a_0$  existem exatamente duas soluções para a equação

$$ax = \cosh x, \quad (5)$$

e que  $f_{a_0}(x) = a_0x$  é a reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(x_0, g(x_0))$ .

Decorre daí que

$$\sinh x_0 = g'(x_0) = f'_a(x_0) = a_0.$$

Como  $g(x_0) = f_{a_0}(x_0)$ , segue que

$$\cosh x_0 = a_0x_0$$

e, portanto,  $\cosh x_0 = x_0 \sinh x_0$ . Logo  $x_0$  é a única raiz positiva da equação

$$\cosh x - x \sinh x = 0. \quad (6)$$

Uma aproximação numérica nos dá

$$x_0 \approx 1,1997$$

de modo que

$$a_0 = \sinh x_0 \approx 1,5089.$$

Assim, como para  $a \in [0, a_0)$  evidentemente (5) não tem solução, concluímos que (4) tem solução se, e somente se  $R/h \geq a_0$ , e isto prova o lema. ■

Se a altura do cilindro é  $h$ , então quando  $2R/h = a_0$  há somente um catenóide passando pelos círculos  $c_1$  e  $c_2$  das bases de  $C$ . Se

$$0 < 2R/h < a_0$$

não existe nenhum e se  $2R/h > a_0$  existem exatamente dois catenóides passando por  $c_1$  e  $c_2$ , sendo o mais externo estável (ver [BC]). Suponha  $2R/h > a_0$ . Seja  $x_1$  a menor solução positiva de

$$\cosh x - \frac{2R}{h}x = 0, \quad (7)$$

e seja  $r = h/2x_1$ . Como  $x_1$  é a menor solução, segue que  $r$  assim escolhido, refere-se ao raio da cintura do catenóide mais externo - portanto o catenóide mais estável - que passa por  $c_1$  e  $c_2$  (relembramos que, caso  $2R/h = a_0$ ,  $x_1$  é a única solução de (7)).

No lema a seguir levamos em conta as considerações feitas acima.

**Lema 9** *Seja  $\Pi$  um plano de declividade  $M$  e tangente a  $C_K$ , onde  $C_K \subset \mathbb{R}^3$  é um tronco de cilindro circular reto de raio  $R > 0$  e de altura  $h$  tal que  $2R/h \geq \sinh x_0$ , sendo  $K$  a tangente do ângulo que as retas geratrizes de  $C_K$  fazem com o plano  $z = 0$ . Se*

$$K\sqrt{1 + M^2} \sinh x_1 < 1,$$

onde  $x_1$  é a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h}x = 0,$$

então existe um tronco de catenóide  $J$ , com  $\partial J = c_1 \cup c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são os círculos das bases de  $C_K$ , tal que  $J$  é gráfico numa vizinhança de  $\Pi \cap J$  de uma função definida num subconjunto de  $\{z = 0\}$ .

**Prova.** Pelo Lema 8, como  $2R/h \geq \sinh x_0$ , existe um tronco de catenóide  $J$  tal que  $\partial J = c_1 \cup c_2$  e existem dois com estas propriedades se  $2R/h > a_0$ . Denotemos por  $x_1$  a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h}x = 0.$$

Pelo que já observamos anteriormente,  $h/2x_1$  é o raio do círculo da cintura do tronco de catenóide  $J$  mais externo contido em  $C_K$  (se  $2R/h > a_0$ ) tal que

$$\partial J = c_1 \cup c_2.$$

Este será o tronco de catenóide considerado. Sem perda de generalidade, consideramos  $C_K$  o tronco de cilindro obtido por uma rotação de um ângulo  $\theta$ , tal que  $\tan \theta = K$ , a partir do tronco de cilindro circular reto  $C_0$  de inclinação nula, raio  $R$  e altura  $h$ , tal que  $2R/h \geq a_0$ , cujo eixo de rotação é o eixo  $-x$  e cujas bases  $c_1$  e  $c_2$  estão sobre os planos  $\{x = h/2\}$  e  $\{x = -h/2\}$  respectivamente. Uma parametrização do tronco de catenóide contido em tal tronco de cilindro é dada por

$$\begin{aligned} J_0 &= f_0(u, v) = \\ &= \left( v, \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \cos u, \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u \right), \end{aligned}$$

onde  $-h/2 \leq v \leq h/2$  e  $u \in [0, 2\pi]$ .

Tomamos uma rotação de  $J_0$  de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $y$ , com  $0 \leq \theta < \pi/2$  e tal que  $K = \tan \theta$ . O catenóide  $J_K$  obtido com esta rotação tem uma parametrização dada por

$$\begin{aligned} f_K(u, v) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \frac{h}{2x_1} \cos \frac{2x_1}{h} v \cos u \\ \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u \end{bmatrix} = \\ &= \left( v \cos \theta - \frac{h}{2x_1} \sin \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u, \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \cos u, \right. \\ &\quad \left. v \sin \theta + \frac{h}{2x_1} \cos \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u \right). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_K}{\partial u}(u, v) &= \left( -\frac{h}{2x_1} \sin \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \cos u, -\frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u, \right. \\ &\quad \left. \frac{h}{2x_1} \cos \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \cos u \right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_K}{\partial v}(u, v) &= \left( \cos \theta - \sin \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \sin u, \sinh \frac{2x_1}{h} v \cos u, \right. \\ &\quad \left. \sin \theta + \cos \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \sin u \right). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f_K}{\partial u} \times \frac{\partial f_K}{\partial v} \right) (u, v) = \\ & = \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \left( -\cos \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v - \sin \theta \sin u, \cos u, \right. \\ & \quad \left. \cos \theta \sin u - \sin \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \right). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} N_1(f_K(u, v)) &= \left( -\cos \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v - \sin \theta \sin u, \cos u, \right. \\ & \quad \left. \cos \theta \sin u - \sin \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \right) \end{aligned}$$

é normal (exterior) a  $J_K$ . Seja  $u_0$  tal que  $f_K(u_0, h/2) = P = \Pi \cap J_K$ . Como  $0 \leq \theta < \pi/2$ , temos que a parte do catenóide  $J_K$  dada por  $u_0 \leq u \leq \pi - u_0$ ,  $-h/2 \leq v \leq h/2$  é gráfico se

$$\langle N(f_K(u, v)), e_3 \rangle \geq 0, \quad (8)$$

ou seja, se

$$\cos \theta \sin u - \sin \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \geq 0,$$

o que sempre ocorre para  $v \in [-h/2, 0]$ . Basta então verificar para  $v \in (0, h/2]$ . Para evitar confusões, denotemos por  $\Pi_M^K$  o plano de declividade  $M$  tangente a  $C_K$ . Note que, para  $\theta = 0$ ,  $\bar{u}_0$  tal que  $f_0(\bar{u}_0, h/2) = \Pi_M^0 \cap C_0$ , temos  $\tan \bar{u}_0 = 1/M$  e, para  $\theta > 0$ ,  $\tan \theta = K$  e  $u_0$  tal que

$$f_K(u_0, h/2) = \Pi_M^K \cap C_K = \Pi \cap C_K,$$

temos  $\tan u_0 \geq 1/M$ . De fato, uma parametrização de  $C_K$  é

$$\Psi_K(u, v) = (v \cos \theta - R \sin \theta \sin u, R \cos u, v \sin \theta + R \cos \theta \sin u) \quad (9)$$

$-h/2 \leq v \leq h/2$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ . Como

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}},$$

então

$$\sin \theta = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

Substituindo em (9) e calculando o vetor unitário normal a  $C_K$  em  $\Psi_K(u, v)$  obtemos que

$$N(\Psi_K(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} \left( -K \sin u, \sqrt{1 + K^2} \cos u, \sin u \right).$$

Em particular  $\Psi_K(u, h/2)$  é uma parametrização de  $c_1$ , com

$\Psi_K(u_0, h/2) = P$ . Seja  $\omega$  o ângulo entre os planos  $T_P C_K = \Pi$  e  $\{z = 0\}$ .

Então

$$\cos \omega = \langle N(\Psi_K(u_0, h/2)), e_3 \rangle = \frac{\sin u_0}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

Como  $\Pi$  tem declividade  $M$ , segue que

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}},$$

e, portanto,

$$\sin u_0 = \frac{\sqrt{1 + K^2}}{\sqrt{1 + M^2}},$$

que atinge seu menor valor em  $K = 0$  ( $u_0 = \bar{u}_0$ ) e seu maior valor em  $K = M$  ( $u_0 = \pi/2$ ). Assim, podemos afirmar que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + M^2}} \leq \sin u,$$

para todo  $u \in [u_0, \pi - u_0]$ , donde,

$$\sin u_0 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + M^2}}. \quad (10)$$

Logo, como para  $v \in (0, h/2)$  temos

$$\sinh \frac{2x_1}{h} v > 0,$$

então, de (10), para todo  $u \in [u_0, \pi - u_0]$ , (8) ocorre se

$$K = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \frac{1}{\sinh \frac{2x_1}{h} v},$$

ou seja, se

$$K \leq \frac{1}{\sqrt{1 + M^2} \sinh \frac{2x_1}{h} v}.$$

Como

$$\frac{1}{\sinh \frac{2x_1}{h} v}$$

atinge seu menor valor em  $v = h/2$ , segue que  $\langle N(\varphi(u, v)), e_3 \rangle \geq 0$  se

$$K \leq \frac{1}{\sqrt{1 + M^2} \sinh x_1}.$$

De modo análogo procede-se para o caso  $u_0 \in (\pi, 2\pi)$ . ■

Com estes resultados preliminares, podemos passar à prova do Teorema 4.

**Prova do Teorema 4:**

**Prova.** Dado  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ , como  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M \geq 0$  e raio  $R > 0$ , existem planos  $\Pi_{p,t}^-$  e  $\Pi_{p,t}^+$  de declividade  $M_{p,t}^-$  e  $M_{p,t}^+$  respectivamente,  $M_{p,t}^\pm \leq M$ , e troncos de cilindros circulares retos  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$  de raio  $R$ , tangentes a  $\Pi_{p,t}^-$  e  $\Pi_{p,t}^+$  ao longo da geratriz que contém  $x_{p,t} = (p, t\varphi(p))$ , de declividade  $K_{p,t}^-$  e  $K_{p,t}^+$  respectivamente, com  $K_{p,t}^\pm \leq M_{p,t}^\pm$ , cujos círculos das bases são  $c_{p,t,1}^+$ ,  $c_{p,t,2}^+$  e  $c_{p,t,1}^-$ ,  $c_{p,t,2}^-$  respectivamente, de altura  $h$  tal que  $h \leq 2R/a_0$ ,  $a_0 = \sinh x_0$ , e que satisfazem os itens de *i)* a *iii)* da Definição 6.

Como  $h \leq 2R/a_0$ , segue que

$$a_0 \leq \frac{2R}{h} \quad (11)$$

e, portanto, pelo Lema 8, contido em  $C_{p,t}^-$  ( $C_{p,t}^+$ ) existirá um tronco de catenóide cuja fronteira é  $c_{p,t,1}^- \cup c_{p,t,2}^-$  ( $c_{p,t,1}^+ \cup c_{p,t,2}^+$ ). Em particular, existirão dois troncos de catenóide em  $C_{p,t}^-$  ( $C_{p,t}^+$ ) se a desigualdade (11) for estrita, e neste caso, consideraremos o externo (conforme observação feita na sequência do Lema 8). Denotamos por  $J_{p,t}^-$  ( $J_{p,t}^+$ ) o tronco de catenóide mais externo contido em  $C_{p,t}^-$  ( $C_{p,t}^+$ ) tal que  $\partial J_{p,t}^- = c_{p,t,1}^- \cup c_{p,t,2}^-$  ( $\partial J_{p,t}^+ = c_{p,t,1}^+ \cup c_{p,t,2}^+$ ). Observamos que decorre do princípio da tangência (ver Teorema 28 no apêndice) que se  $M_t$  é uma superfície mínima dada como o gráfico de  $u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$ , então

$$M_t \cap J_{p,t}^\pm = \{x_{p,t}\}.$$

De fato. Suponha que  $M_t$  intercepta  $J_{p,t}^-$  em um ponto diferente de  $x_{p,t}$ . Deslocamos então  $J_{p,t}^-$  verticalmente para baixo até que exista um último ponto de contato entre  $M_t$  e  $[J_{p,t}^-]^T$  que é o tronco de catenóide  $J_{p,t}^-$  transladado. Como  $M_t$  está contida no fecho convexo de  $\text{Gra}f(t\varphi)$  e

$$\sup \{z, (x, y, z) \in c_{p,t,2}^- \cap C(\bar{\Omega})\} \leq \inf_{\partial\Omega} t\varphi,$$

segue que  $[c_{p,t,2}^-]^T \cap M_t = \emptyset$ . Além disso, decorre do fato de termos

$$c_{p,t,1}^- \cap C(\Omega) = \emptyset,$$

que  $[c_{p,t,1}^-]^T \cap M_t = \emptyset$ . Como ainda  $C_{p,t}^- \cap C(\partial\Omega) \subset \varphi^-$ , resulta que o ponto de contato entre  $M_t$  e  $[J_{p,t}^-]^T$  é necessariamente interior a ambas as superfícies. Pelo princípio da tangência segue que  $M_t \subset [J_{p,t}^-]^T$  ou  $[J_{p,t}^-]^T \subset M_t$  e ambas as situações são impossíveis. Se  $M_t$  intercepta  $J_{p,t}^+$  em um ponto diferente de

$x_{p,t}$ , com o mesmo argumento usado acima (somente que agora deslocamos  $J_{p,t}^+$  verticalmente para cima) chega-se num absurdo. Logo  $M_t \cap J_{p,t}^\pm = \{x_{p,t}\}$ . Segue do fato que

$$M\sqrt{1+M^2} \sinh x_1 < 1,$$

que  $K_{p,t}^\pm \sqrt{1+M^2} \sinh x_1 < 1$ , onde  $x_1$  é a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h}x = 0,$$

Então do Lema 9, segue que  $J_{p,t}^-$  e  $J_{p,t}^+$  podem ser representados em uma vizinhança de  $x_{p,t}$  como gráficos de funções

$$v_{p,t}^- : V_{p,t}^- \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v_{p,t}^+ : V_{p,t}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

respectivamente, onde podemos tomar  $V_{p,t}^\pm \subset \bar{\Omega}$  com  $p \in \partial\Omega$  já que  $C_{p,t}^-$  e  $C_{p,t}^+$  são transversais a  $C(\partial\Omega)$  em  $x_{p,t}$ . Portanto se  $u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $\alpha \in (0,1)$ , é solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$ , então

$$v_{p,t}^- \leq u_t \leq v_{p,t}^+$$

de modo que

$$|\nabla u_t(p)| \leq \max \{ |\nabla v_{p,t}^-(p)|, |\nabla v_{p,t}^+(p)| \}.$$

Vamos, no que se segue, obter uma estimativa por cima de  $|\nabla v_{p,t}^\pm(p)|$ , independente de  $p$ ,  $t$  e  $\pm$ .

Para tal, sem perda de generalidade, podemos supor que  $C_{p,t}^-$  seja o tronco de cilindro obtido por uma rotação de um ângulo  $\theta$  tal que  $\tan \theta = K_{p,t}^-$ , em torno da reta paralela ao eixo  $-y$  e contida no plano  $x = 0$  na altura, digamos  $z = \lambda_t$ , a partir do tronco de cilindro circular reto  $C_0$  de inclinação nula, raio  $R$  e altura  $h$ , cujo eixo de rotação é uma reta paralela ao eixo  $-x$  e contida no

plano  $y = 0$  e na altura  $z = \lambda_t$ , e cujas bases estão sobre os planos  $\{x = h/2\}$  e  $\{x = -h/2\}$ . Uma parametrização para o tronco de catenóide  $J_{p,t}^-$  relativo a  $C_{p,t}^-$  é dado por (ver Lema 9)

$$\begin{aligned} f_{p,t}(u, v) &= \\ &= \left( v \cos \theta - \frac{h}{2x_1} \sin \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u, \frac{h}{2x_1} \cosh \frac{2x_1}{h} v \cos u, \right. \\ &\quad \left. v \sin \theta + \frac{h}{2x_1} \cos \theta \cosh \frac{2x_1}{h} v \sin u + \lambda_t \right), \end{aligned}$$

onde

$$-\frac{h}{2} \leq v \leq \frac{h}{2} \text{ e } 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Segue que (ver Lema 9),

$$\begin{aligned} N_f &= \\ &= \frac{\left( -\cos \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v - \sin \theta \sin u, \cos u, \cos \theta \sin u - \sin \theta \sinh \frac{2x_1}{h} v \right)}{\sqrt{\sinh^2 \left( \frac{2x_1}{h} v \right) + 1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

é a normal unitária exterior a  $J_{p,t}^-$  em  $f_{p,t}(u, v)$ . Pondo  $K_{p,t} := K_{p,t}^-$ , então

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}}$$

e portanto

$$\sin \theta = \frac{K_{p,t}}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}}. \quad (13)$$

Assim, substituindo  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  em (12), obtemos

$$N_f =$$

$$= \frac{\left( -\sinh \frac{2x_1}{h} v - K_{p,t} \sin u, \sqrt{1 + K_{p,t}^2} \cos u, \sin u - K_{p,t} \sinh \frac{2x_1}{h} v \right)}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2} \sqrt{\sinh^2 \left( \frac{2x_1}{h} v \right) + 1}}.$$

Observamos que  $f_{p,t}(u, h/2) = \alpha_{p,t}(u)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ , é uma parametrização para  $c_{p,t,1}^-$  de  $J_{p,t}^-$  (bordo “mais alto” de  $J_{p,t}^-$ , se  $\theta > 0$ , devido a escolha da rotação). Assim o vetor unitário normal (exterior) a  $J_{p,t}^-$  no bordo  $c_{p,t,1}^- := \alpha_{p,t}([0, 2\pi])$  é dado por

$$\frac{\left( -\sinh x_1 - K_{p,t} \sin u, \sqrt{1 + K_{p,t}^2} \cos u, \sin u - K_{p,t} \sinh x_1 \right)}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2} \sqrt{\sinh^2 x_1 + 1}}.$$

Por outro lado uma parametrização para  $Graf(v_{p,t}^-)$ , é dada por

$$g_{p,t}(x, y) = (x, y, v_{p,t}^-(x, y))$$

com  $(x, y) \in V_{p,t}^-$ . Um cálculo direto nos dá

$$N_g = \frac{\left( \frac{-\partial v_{p,t}^-(x,y)}{\partial x}, \frac{-\partial v_{p,t}^-(x,y)}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{|\nabla v_{p,t}^-(x,y)|^2 + 1}},$$

que é a normal unitária (exterior) a  $Graf(v_{p,t}^-)$ . Em particular, no ponto  $x_{p,t}$  temos

$$N_f = N_g,$$

onde  $0 < u_0 < \pi$  é tal que  $f_{p,t}(u_0, h/2) = x_{p,t}$ . Logo, igualando a terceira componente obtemos

$$\frac{\sin u_0 - K_{p,t} \sinh x_1}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2} \sqrt{\sinh^2 x_1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{|\nabla v_{p,t}^-(p)|^2 + 1}}.$$

Assim

$$|\nabla v_{p,t}^-(p)|^2 = \frac{(1 + K_{p,t}^2)(\sinh^2 x_1 + 1) - (\sin u_0 - K_{p,t} \sinh x_1)^2}{(\sin u_0 - K_{p,t} \sinh x_1)^2}. \quad (14)$$

Como já mencionamos, uma parametrização de  $c_{p,t,1}^-$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{p,t}(u, h/2) &= \alpha_{p,t}(u) = \\ &= \frac{h}{2x_1\sqrt{1+K_{p,t}^2}}(x_1 - K_{p,t} \cosh x_1 \sin u, \sqrt{1+K_{p,t}^2} \cosh x_1 \cos u, \\ &\quad K_{p,t}x_1 + \cosh x_1 \sin u + 2x_1\sqrt{1+K_{p,t}^2}(\lambda_t/h)), \end{aligned}$$

$0 \leq u \leq 2\pi$ . Assim,

$$\alpha'_{p,t}(u_0) = \frac{h \cosh x_1}{2x_1\sqrt{1+K_{p,t}^2}}(-K_{p,t} \cos u_0, -\sqrt{1+K_{p,t}^2} \sin u_0, \cos u_0),$$

e, denotando por  $\rho$  a projeção ortogonal sobre o plano  $z = 0$ , segue que

$$\rho(\alpha'_{p,t}(u_0)) = \frac{h \cosh x_1}{2x_1\sqrt{1+K_{p,t}^2}}(-K_{p,t} \cos u_0, -\sqrt{1+K_{p,t}^2} \sin u_0, 0).$$

Então, a tangente do ângulo que a reta suporte de  $\alpha'_{p,t}(u_0)$  faz com o plano  $z = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\frac{h \cosh x_1}{2x_1\sqrt{1+K_{p,t}^2}} |\cos u_0|}{|\rho(\alpha'_{p,t}(u_0))|} &= \frac{|\cos u_0|}{\sqrt{K_{p,t}^2 + \sin^2 u_0}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 u_0}}{\sqrt{K_{p,t}^2 + \sin^2 u_0}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$|\nabla t \varphi(p)|^2 = \frac{1 - \sin^2 u_0}{K_{p,t}^2 + \sin^2 u_0} =: a_{p,t}^2. \quad (15)$$

Logo,

$$\sin u_0 = \sqrt{\frac{1 - K_{p,t}^2 a_{p,t}^2}{1 + a_{p,t}^2}}.$$

Uma parametrização de  $C_{p,t}^-$  (ver Lema 9) é

$$\Psi_{p,t}(u, v) = (v \cos \theta - R \sin \theta \sin u, R \cos u, v \sin \theta + R \cos \theta \sin u + \lambda_t)$$

$-h/2 \leq v \leq h/2$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ . Substituindo  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$  pelas expressões dadas em (13) e calculando o vetor unitário normal a  $C_{p,t}^-$  em  $\Psi_{p,t}(u, v)$  obtemos que

$$N(\Psi_{p,t}(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}} \left( -K_{p,t} \sin u, \sqrt{1 + K_{p,t}^2} \cos u, \sin u \right).$$

Em particular  $\Psi_{p,t}(u, h/2)$  é uma parametrização de  $c_{p,t,1}^-$ , com

$\Psi_{p,t}(u_0, h/2) = x_{p,t}$ . Seja  $\omega$  o ângulo entre os planos  $T_{x_{p,t}} C_{p,t}^- = \Pi_{p,t}^-$  e  $\{z = 0\}$ . Então

$$\cos \omega = \langle N(\Psi_{p,t}(u_0, h/2)), e_3 \rangle = \frac{\sin u_0}{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}}.$$

Como  $\Pi_{p,t}^-$  tem declividade  $M_{p,t}^-$ , segue que

$$\cos \omega = \frac{1}{\sqrt{1 + M_{p,t}^2}},$$

e, portanto,

$$\sin u_0 = \frac{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}}{\sqrt{1 + M_{p,t}^2}}. \quad (16)$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{1 + K_{p,t}^2}}{\sqrt{1 + M_{p,t}^2}} = \frac{\sqrt{1 - K_{p,t}^2 a_{p,t}^2}}{\sqrt{1 + a_{p,t}^2}},$$

donde

$$K_{p,t}^2 = \frac{M_{p,t}^2 - a_{p,t}^2}{a_{p,t}^2 (M_{p,t}^2 + 2) + 1} \quad (17)$$

Substituindo (17) em (16), obtemos

$$\begin{aligned}
\sin u_0 &= \frac{\sqrt{1 + \frac{M_{p,t}^2 - a_{p,t}^2}{a_{p,t}^2 (M_{p,t}^2 + 2) + 1}}}{\sqrt{1 + M_{p,t}^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{1 + a_{p,t}^2}}{\sqrt{a_{p,t}^2 (M_{p,t}^2 + 2) + 1}}
\end{aligned} \tag{18}$$

e, substituindo (17) e (18) em (14), obtemos

$$\begin{aligned}
|\nabla v_{p,t}^-(p)|^2 &= \\
&= \frac{(1+M_{p,t}^2)(1+a_{p,t}^2)(1+\sinh^2 x_1) - (\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M_{p,t}^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1)^2}{(\sqrt{1+a_{p,t}^2} - (\sqrt{M_{p,t}^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1))^2} \leq \\
&\leq \frac{(1+M^2)(1+a_{p,t}^2)(1+\sinh^2 x_1) - (\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1)^2}{(\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1)^2}.
\end{aligned}$$

Como  $M\sqrt{1 + M^2} \sinh x_1 < 1$ , então  $M \sinh x_1 < 1$ . Além disso,

$$0 \leq a_{p,t}^2 \leq M^2.$$

Então

$$\begin{aligned}
0 &< 1 - M \sinh x_1 \leq \sqrt{1 + a_{p,t}^2} - M \sinh x_1 = \\
&= \sqrt{1 + a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 \sinh^2 x_1} \leq \sqrt{1 + a_{p,t}^2} - \sqrt{(M^2 - a_{p,t}^2) \sinh^2 x_1} = \\
&= \sqrt{1 + a_{p,t}^2} - \sqrt{(M^2 - a_{p,t}^2)} \sinh x_1,
\end{aligned}$$

donde

$$(1 - M \sinh x_1)^2 \leq \left( \sqrt{1 + a_{p,t}^2} - \sqrt{(M^2 - a_{p,t}^2)} \sinh x_1 \right)^2.$$

Logo

$$|\nabla v_{p,t}^-(p)| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{(p,t) \in \partial\Omega \times [0,1]} \frac{\sqrt{(1+M^2)(1+a_{p,t}^2)(1+\sinh^2 x_1) - (\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1)^2}}{\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1} \leq (19) \\
&\leq \frac{\sqrt{(1+M^2)^2 (1+\sinh^2 x_1) - (1-M \sinh x_1)^2}}{1-M \sinh x_1} = \\
&= \frac{\sqrt{\sinh^2 x_1 (M^4 + M^2 + 1) + 2M \sinh x_1 + M^2 (2 + M^2)}}{1-M \sinh x_1}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Analogamente mostra-se que  $|\nabla v_{p,t}^+(p)|$  é menor que a estimativa (20). Segue-se então que se  $u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  é tal que  $Q_0(u_t) = 0$  em  $\Omega$  e  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$ , então

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla u_t|$$

pode ser estimado por (20). A prova do teorema agora é uma aplicação direta do Método da Continuidade (Teorema 2), observando que a unicidade é imediata do fato que  $Q_0$  satisfaz o princípio do máximo para a diferença de duas soluções (Teorema 26 - apêndice). ■

A noção da declividade limitada generalizada abrange de modo natural a noção de declividade limitada quando se trata de domínios e dados no bordo suaves. Tal fato pode ser deduzido da proposição a seguir.

**Proposição 10** *Sejam  $\Omega \subset \{z = 0\}$  um domínio limitado e de classe  $C^2$  e  $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$  satisfazendo a condição da declividade limitada com constante  $M \geq 0$  e suponha que  $\varphi$  não é a restrição de uma função linear a  $\partial\Omega$ . Então  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com raio  $R$  e constante  $M$ , para todo  $0 < R \leq +\infty$ . Em particular, existem  $h_0 > 0$  e  $R_0 > 0$  tais que os troncos de cilindros de raio  $R_0$  como na Definição 6 têm altura  $h_0 \leq 2R_0/\sinh x_0$ , onde  $x_0 \approx 1,19965$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$  e, além disso, pondo  $x_1$  a menor raiz de*

$$\cosh x - (2R_0/h_0)x = 0,$$

*tem-se  $M\sqrt{(1+M^2)} \sinh x_1 < 1$ .*

**Prova.** Observamos que decorre do fato que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada com constante  $M$  e do fato que  $\varphi$  não é a restrição de uma função linear a  $\partial\Omega$ , que  $\Omega$  é convexo (ver [HA], p. 496, ou [GT], p. 310) e além disso, para dado  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ , existem planos  $\Pi_{p,t}^\pm$  que são gráficos de funções lineares afins

$$\pi_{p,t}^\pm : \{z = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tais que  $|\nabla\pi_{p,t}^\pm| \leq M$ ,

$$\pi_{p,t}^-|_{\partial\Omega} \leq t\varphi \leq \pi_{p,t}^+|_{\partial\Omega} \quad (21)$$

e

$$\pi_{p,t}^-(p) = t\varphi(p) = \pi_{p,t}^+(p). \quad (22)$$

Como  $\varphi$  não é a restrição de uma função linear à  $\partial\Omega$ , resulta que  $M > 0$ . Assim, para todo  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ , em particular existem funções lineares afins  $\pi_{p,t}^\pm$  que satisfazem (21) e (22) com  $0 < |\nabla\pi_{p,t}^\pm| = M$ . Seja  $v_{p,t}$  um vetor tangente ao gráfico de  $t\varphi$  em  $x_{p,t} = (p, t\varphi(p))$  e denote por  $t_p$  a reta contida em  $\Pi_{p,t}^-$  e que é a reta suporte de  $v_{p,t}$ . Denote por  $\Pi_{p,t,1}^-$  o plano perpendicular a  $\Pi_{p,t}^-$  tal que  $\Pi_{p,t,1}^- \cap \Pi_{p,t}^- = t_p$ . Se  $\Pi_{p,t,1}^-$  não é vertical, existe uma função linear afim  $\pi_{p,t,2}^-$  definida sobre o plano  $z = 0$ , cujo gráfico é o plano  $\Pi_{p,t,2}^-$  paralelo a  $\Pi_{p,t,1}^-$ , e tal que

$$\sup_{\partial\Omega} \pi_{p,t,2}^- \leq \inf_{\partial\Omega} t\varphi,$$

(ou tal que deixa  $\text{Graf}(t\varphi)$  entre  $\Pi_{p,t,1}^-$  e  $\Pi_{p,t,2}^-$ ). Se  $\Pi_{p,t,1}^-$  é vertical, tome um plano  $\Pi_{p,t,2}^-$  paralelo a  $\Pi_{p,t,1}^-$  e que deixa  $C(\Omega)$  entre  $\Pi_{p,t,1}^-$  e  $\Pi_{p,t,2}^-$ . Considere então a reta  $r_{p,t} \subset \Pi_{p,t}^-$  que passa por  $x_{p,t}$  e é perpendicular a  $t_p$ , e tome o ponto  $q = r_{p,t} \cap \Pi_{p,t,2}^-$ . Seja  $R > 0$  arbitrário e considere o círculo  $c_{p,t,1}^-$  de raio

$R$  sobre  $\Pi_{p,t,1}^-$ , com  $x_{p,t} \in c_{p,t,1}^-$ ,  $v_{p,t} \in T_{x_{p,t}} c_{p,t,1}^-$  e tal que  $c_{p,t,1}^-$  esteja contido no semi-espaço determinado por  $\Pi_{p,t}^-$  e que não contém  $\text{Graf}(t\varphi)$  (no caso  $R = +\infty$ , tomamos  $c_{p,t,1}^- = t_p$ ). Considere agora o círculo  $c_{p,t,2}^-$  de raio  $R$  sobre  $\Pi_{p,t,2}^-$ , com  $q \in c_{p,t,2}^-$  e concêntrico a  $c_{p,t,1}^-$  (no caso  $R = +\infty$ , tomamos  $c_{p,t,2}^-$  a reta contida em  $\Pi_{p,t}^-$  paralela a  $t_p$  e que contém  $q$ ). Por construção, temos que  $c_{p,t,1}^-$  e  $c_{p,t,2}^-$  determinam um tronco de cilindro circular reto  $C_{p,t}^-$  de raio  $R$  e bases  $c_{p,t,1}^-$  e  $c_{p,t,2}^-$ , satisfazendo as condições *i*) a *iii*) da Definição 6. De maneira completamente análoga construímos um tronco de cilindro  $C_{p,t}^+$  satisfazendo as condições *i*) a *iii*) da Definição 6. Resulta que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M$  e raio  $R$  para todo  $R \in (0, +\infty]$ . Além disso, pela construção que fizemos (afastando um pouco o plano  $\Pi_{p,t,2}^+$  do plano  $\Pi_{p,t,1}^+$  se necessário), podemos tomar

$$d(\Pi_{p,t,1}^-, \Pi_{p,t,2}^-) = d(\Pi_{p,t,1}^+, \Pi_{p,t,2}^+) = h_0$$

para todo  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$  e ter satisfeitas as condições *i*) a *iii*) da Definição 6. Como também podemos tomar  $R$  arbitrário, existe  $R_0 > 0$  tal que a altura  $h_0$  dos cilindros  $C_{p,t}^\pm$  é menor ou igual a

$$\frac{2R_0}{\sinh x_0},$$

onde  $x_0$  é a menor raiz de  $\cosh x - x \sinh x = 0$ , e, além disso, pondo  $x_1$  a menor raiz de  $\cosh x - (2R_0/h_0)x = 0$ ,

$$M\sqrt{1 + M^2} \sinh x_1 < 1.$$

Observamos que a última desigualdade acima, decorre do fato que, tomando  $R$  suficientemente grande, temos  $x_1$  suficientemente pequeno. ■

Observamos que se  $\varphi$  é uma restrição de uma função linear a  $\partial\Omega$ , então  $\varphi$  satisfaz a condição da declividade limitada com constante  $M$ , que é a

declividade do plano que contém o gráfico de  $\varphi$ , porém neste caso, o domínio  $\Omega$  pode ser não convexo. Neste caso particular (desde que sob a hipótese que  $\Omega$  e  $\varphi$  são suaves),  $\Omega$  e  $\varphi$  também satisfazem a condição da declividade limitada generalizada para alguma constante  $M' \geq M$  e raio

$$0 < R < 1/\max |k_{\partial\Omega}|.$$

A prova deste fato, no entanto, como ficará bem claro, segue os mesmos passos da prova do Teorema 18 adiante.

Vamos mostrar agora que o Teorema 4 inclui como caso particular um resultado clássico sobre o Problema de Dirichlet para gráficos mínimos de declividade limitada (veja Teorema 12.7 de [GT]).

**Corolário 11** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado de classe  $C^0$  e  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$  satisfazendo a condição da declividade limitada com constante  $M \geq 0$ . Então existe uma única solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  e vale*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq M.$$

**Prova.** Consideremos inicialmente o caso em que  $\Omega$  é de classe  $C^{2,\alpha}$  e  $\phi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , para algum  $\alpha \in (0, 1)$ . Podemos assumir que  $\Omega$  é convexo, caso contrário, como  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada com constante  $M$ , o dado no bordo  $\varphi$  seria a restrição de uma função linear a  $\partial\Omega$ , e neste caso basta por  $u = \pi|_{\overline{\Omega}}$ , onde  $\pi$  é a função linear afim cujo gráfico contém o gráfico de  $\varphi$ . Segue da Proposição 10 que  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada generalizada com constante  $M$  e raio  $R$  arbitrário. Dessa proposição concluímos também que existem  $h_0 > 0$  e  $R_0 > 0$  tais que os troncos de cilindros  $C_{p,t}^{\pm}$ , para todo  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ ,

têm altura  $h_0$  tal que

$$h_0 \leq \frac{2R_0}{\sinh x_0}$$

e

$$M\sqrt{1+M^2} \sinh x_1 < 1,$$

onde  $x_1$  é a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R_0}{h_0} = 0.$$

Segue agora, do Teorema 4 que existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$  e vale (ver estimativa (19))

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{(p,t) \in \partial\Omega \times [0,1]} \frac{\sqrt{(1+M^2)(1+a_{p,t}^2)(1+\sinh^2 x_1) - (\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1)^2}}{\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_1},$$

onde  $a_{p,t}$  é como em (15). Em adição a isto, podemos tomar os troncos de cilindros  $C_{p,t}^{\pm}$  de altura  $h_0$  e raio  $R > R_0$  que estaremos nas hipóteses do Teorema 4, e então, pondo  $x_R$  a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h_0} x = 0,$$

segue que, para todo  $R > R_0$ ,

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \sup_{(p,t) \in \partial\Omega \times [0,1]} \frac{\sqrt{(1+M^2)(1+a_{p,t}^2)(1+\sinh^2 x_R) - (\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_R)^2}}{\sqrt{1+a_{p,t}^2} - \sqrt{M^2 - a_{p,t}^2} \sinh x_R}.$$

Como  $M$  e  $a_{p,t}$  permanecem fixos e  $\sinh x_R \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ , segue que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq \frac{\sqrt{(1+M^2)(1+a_{p,t}^2) - (1+a_{p,t}^2)}}{\sqrt{1+a_{p,t}^2}} = M.$$

No caso geral, em que  $\Omega$  e  $\varphi$  são apenas  $C^0$ , aproximamos  $\Omega$  e  $\varphi$  por domínios  $\Omega_n$  de classe  $C^{2,\alpha}$  e funções  $\varphi_n \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega_n)$  satisfazendo a condição da declividade limitada com constante  $M + 1/n$ . Aplicamos então o que obtivemos acima para garantir a existência de soluções  $u_n \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}_n)$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega_n$  tais que  $u_n|_{\partial\Omega_n} = \varphi_n$ . A limitação uniforme do gradiente das  $u_n$ :

$$\sup_{\Omega_n} |\nabla u_n| \leq M + \frac{1}{n}, \quad (23)$$

nos permite usar resultados conhecidos de EDP que garantem a existência de uma subsequência  $u_{n_k}$  de  $u_n$  convergindo uniformemente em compactos de  $\Omega$  a uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  de  $Q = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ . Além disso, a estimativa (23) nos permite concluir que

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| \leq M.$$

Isto conclui a prova do Corolário. ■

### 3 Um teorema de existência e unicidade para gráficos mínimos compactos em domínios não necessariamente convexos em termos da norma $C^2$ do dado no bordo

Nesta seção provamos um resultado que fornece condições para que um domínio limitado e dados no bordo de classe  $C^{2,\alpha}$  satisfaçam a condição da declividade limitada, e as condições (2) e (3) do Teorema 4 da seção anterior. Além disso, damos algumas respostas a questão colocada no Problema 1.

No próximo teorema, trabalharemos com intersecções de esferas e planos da maneira particular como está descrita no Lema 12 a seguir.

**Lema 12** *Seja  $S$  uma esfera do  $\mathbb{R}^3$  de raio  $R$  e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $0 \leq a < b$ . Considere  $c$  um meridiano qualquer de  $S$ , ou seja,  $c = S \cap \Delta$  onde  $\Delta$  é um plano perpendicular ao plano  $z = 0$  passando pelo centro de  $S$ . Seja  $P_a$  um ponto de  $c$  tal que a reta  $r_a$  tangente a  $c$  em  $P_a$  tenha declividade  $a$  com relação ao plano  $z = 0$  e seja  $\Pi$  um plano de declividade  $b$  e que contém  $r_a$ . Então  $\Pi \cap S$  é um círculo de raio*

$$r = \frac{R\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

**Prova.** Sem perda de generalidade suponhamos que  $P_a$  seja um ponto do plano  $x = 0$ ,  $P_a = (0, y_a, z_a)$ , e que o meridiano  $c$  seja a intersecção do plano  $x = 0$  com a esfera  $S$  centrada na origem e de raio  $R$ . A reta  $r_a$  tangente ao meridiano corta o eixo  $z$  num ponto  $(0, 0, n)$  e o eixo  $y$  num ponto  $(0, m, 0)$ . Por semelhança de triângulos,

$$\frac{m}{R} = \frac{R}{y_a} \text{ e } \frac{n}{R} = \frac{R}{z_a}. \quad (24)$$

Para um ponto qualquer  $(l, 0, 0)$ ,  $l \geq 0$ , considere o plano  $\Pi$  que passa pelos pontos  $(l, 0, 0)$ ,  $(0, m, 0)$  e  $(0, 0, n)$ . A equação de  $\Pi$  é

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1. \quad (25)$$

O plano  $\Pi$  corta a esfera  $S$  em um círculo de raio  $r$ . Para encontrar  $r$ , primeiramente vamos calcular a distância do plano  $\Pi$  até a origem e, para tal, vamos minimizar a função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  sobre o plano  $\Pi$ , isto é, sujeita ao vínculo

$$g(x, y, z) = \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1.$$

Este é um problema de multiplicador de Lagrange. Devemos ter  $\nabla f = \lambda \nabla g$ . Segue que

$$\begin{cases} 2x = \frac{\lambda}{l} \\ 2y = \frac{\lambda}{m} \\ 2z = \frac{\lambda}{n} \\ \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1 \end{cases},$$

donde

$$\frac{x}{l} = \frac{\lambda}{2l^2}, \quad \frac{y}{m} = \frac{\lambda}{2m^2} \text{ e } \frac{z}{n} = \frac{\lambda}{2n^2}.$$

Somando as três equações acima e utilizando (25), obtém-se

$$\frac{\lambda}{2} (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2}) = 1,$$

isto é,

$$\frac{\lambda}{2} = (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}.$$

Portanto as coordenadas do ponto do plano  $\Pi$  mais próximo da origem são

$$x = l^{-1} (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}, \quad y = m^{-1} (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}$$

e

$$z = n^{-1} (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}.$$

Seja  $d$  distância deste ponto até a origem. Então

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2}) (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-2} = \\ &= (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$r^2 = R^2 - d^2 = R^2 - (l^{-2} + m^{-2} + n^{-2})^{-1}, \quad (26)$$

e de (24) obtemos que

$$m^{-2} + n^{-2} = \frac{y_a^2}{R^4} + \frac{z_a^2}{R^4} = R^{-2}. \quad (27)$$

Combinando (26) e (27), temos que

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (R^{-2} + l^{-2})^{-1} = R^2 - \frac{1}{R^{-2} + l^{-2}} = \\ &= R^2 - \frac{R^2 l^2}{R^2 + l^2} = \frac{R^4}{R^2 + l^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$r = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + l^2}}. \quad (28)$$

Consideremos o vetor  $N = (l^{-1}, m^{-1}, n^{-1})$  que é normal ao plano  $\Pi$ . Temos

$$|N|^2 = l^{-2} + m^{-2} + n^{-2} = R^{-2} + l^{-2},$$

ou seja,

$$|N| = \frac{\sqrt{R^2 + l^2}}{Rl}.$$

Seja  $\theta$  o ângulo do plano  $\Pi$  com o plano  $z = 0$ , ou seja, o ângulo de  $N$  com  $e_3$ , então

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle N, e_3 \rangle}{|N|} = \frac{Rl}{n\sqrt{R^2 + l^2}}, \\ \sec \theta &= \frac{n\sqrt{R^2 + l^2}}{Rl},\end{aligned}$$

e, portanto

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 = \frac{n^2(R^2 + l^2)}{R^2l^2} - 1.$$

Consequentemente a declividade de  $\Pi$  é

$$b = \tan \theta = \sqrt{\frac{n^2(R^2 + l^2)}{R^2l^2} - 1}.$$

Falta apenas expressar  $r$  em função de  $a$  e  $b$ . Em (28) temos  $r$  expresso em função de  $l$ . Mas

$$b^2 = \frac{n^2(R^2 + l^2)}{R^2l^2} - 1,$$

donde

$$\frac{b^2 + 1}{n^2} = \frac{R^2 + l^2}{R^2l^2},$$

ou seja,

$$\frac{R^2(b^2 + 1)}{n^2} = \frac{R^2}{l^2} + 1.$$

Assim

$$\frac{R^2(b^2 + 1) - n^2}{n^2} = \frac{R^2}{l^2} \tag{29}$$

Por outro lado, de (27) segue que

$$m^2 + n^2 = m^2n^2R^{-2},$$

e, como de (24) obtemos que

$$a = \frac{z_a}{y_a} = \frac{n}{m},$$

isto é,  $n = am$ , então  $R^2(m^2 + a^2m^2) = a^2m^4$ , ou seja

$$R^2(1 + a^2) = n^2 \tag{30}$$

Substituindo (30) em (29), obtemos que

$$\frac{R^2(b^2 + 1) - R^2(1 + a^2)}{R^2(1 + a^2)} = \frac{R^2}{l^2},$$

isto é,

$$\frac{b^2 - a^2}{1 + a^2} = \frac{R^2}{l^2}.$$

Então

$$\frac{1 + a^2}{b^2 - a^2} = \frac{l^2}{R^2},$$

donde

$$\frac{1 + a^2}{b^2 - a^2} + 1 = \frac{l^2 + R^2}{R^2} = \frac{R^2}{r^2},$$

ou seja,

$$\frac{1 + b^2}{b^2 - a^2} = \frac{R^2}{r^2}$$

e, portanto

$$r^2 = \frac{R^2(b^2 - a^2)}{1 + b^2}.$$

Finalmente,

$$r = \frac{R\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{1 + b^2}}.$$

■

**Lema 13** *Seja  $C_K \subset \mathbb{R}^3$  um tronco de cilindro circular reto de raio  $R > 0$  e de altura  $h$  tal que  $2R/h \geq \sinh x_0$ , sendo  $c_1$  e  $c_2$  os círculos das bases de  $C_K$ , onde  $K$  é a tangente do ângulo que as retas geratrizes fazem com o plano  $z = 0$ . Seja  $r_a$  uma reta de declividade  $a$  tangente a  $c_1$  em um ponto  $P_a$ . Se*

$$K \sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_1} < 1,$$

onde  $x_1$  é a menor raiz de

$$\cosh x - \frac{2R}{h}x = 0,$$

então existe um tronco de catenóide  $J$ , com  $\partial J = c_1 \cup c_2$ , tal que  $J$  é gráfico numa vizinhança de  $P_a$ , de uma função definida num subconjunto de  $\{z = 0\}$ .

**Prova.** Como  $\tan \theta = K$ , então

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}}$$

e portanto

$$\sin \theta = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}}.$$

Então, procedendo de modo análogo ao feito no Lema 9 (supondo  $C_K$  obtido por uma rotação de um ângulo  $\theta$ , a partir do cilindro  $C_0$  como descrito no referido lema), uma parametrização de  $c_1$  é dada por (ver Lema 9 ou também prova do Teorema 4)

$$\begin{aligned} f_K(u, h/2) &= \alpha(u) = \\ &= \frac{h}{2x_1 \sqrt{1 + K^2}} (x_1 - K \cosh x_1 \sin u, \sqrt{1 + K^2} \cosh x_1 \cos u, \\ &\quad Kx_1 + \cosh x_1 \sin u), \end{aligned}$$

$0 \leq u \leq 2\pi$ . Assim,

$$\alpha'(u_0) = \frac{h \cosh x_1}{2x_1 \sqrt{1+K^2}} (-K \cos u_0, -\sqrt{1+K^2} \sin u_0, \cos u_0),$$

e, denotando por  $\rho$  a projeção ortogonal sobre o plano  $z = 0$ , segue que

$$\rho(\alpha'(u_0)) = \frac{h \cosh x_1}{2x_1 \sqrt{1+K^2}} (-K \cos u_0, -\sqrt{1+K^2} \sin u_0, 0).$$

Então, a tangente do ângulo que a reta suporte de  $\alpha'(u_0)$  faz com o plano  $z = 0$  é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\frac{h \cosh x_1}{2x_1 \sqrt{1+K^2}} |\cos u_0|}{|\rho(\alpha'(u_0))|} &= \frac{|\cos u_0|}{\sqrt{K^2 + \sin^2 u_0}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 u_0}}{\sqrt{K^2 + \sin^2 u_0}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$a^2 = \frac{1 - \sin^2 u_0}{K^2 + \sin^2 u_0}.$$

Logo

$$\sin u_0 = \sqrt{\frac{1 - K^2 a^2}{1 + a^2}}.$$

Assim, para  $u_0 \in (0, \pi)$  e  $v \in (0, h/2]$ , temos

$$\sinh \frac{2x_1}{h} v > 0$$

e como

$$\sqrt{\frac{1 - K^2 a^2}{1 + a^2}} \leq \sin u$$

para todo  $u \in [u_0, \pi - u_0]$ , então (8) ocorre se

$$K = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \leq \frac{\sqrt{\frac{1 - K^2 a^2}{1 + a^2}}}{\sinh \frac{2x_1}{h} v},$$

ou seja, se

$$K^2 \sinh^2 \frac{2x_1}{h} v \leq \frac{1 - K^2 a^2}{1 + a^2}.$$

Logo

$$K \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 \frac{2x_1}{h} v}}.$$

Como

$$\frac{1}{\sinh \frac{2x_1}{h} v}$$

atinge seu menor valor em  $v = h/2$ , segue que (8) ocorre se

$$K \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_1}}.$$

e isto conclui o Lema. ■

No que segue, para um domínio  $\Omega$  limitado, entenderemos por “ exterior de  $\Omega$  ” o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \notin \overline{\Omega}\}$$

e por “ exterior de  $C(\Omega)$  ” o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) \notin C(\overline{\Omega})\}.$$

Observamos que para uma curva plana regular, fechada e simples  $\alpha$ , o fato de  $|k_\alpha| \leq 1/r$ ,  $r > 0$ , não implica que em cada ponto  $p$  do traço de  $\alpha$  exista um círculo de raio  $r$  tangente a  $\alpha$  em  $p$  e contido no fecho da região limitada por  $\alpha$  (o mesmo acontecendo em relação a um círculo de raio  $r$  tangente ao traço de  $\alpha$  em  $p$  e contido no fecho do exterior da região limitada por  $\alpha$ ). No próximo teorema que demonstraremos no entanto, faz-se necessário a existência de tais círculos. Relacionado com este fato está o próximo conceito.

**Definição 14** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado no plano  $z = 0$ . Dizemos que  $\Omega$  satisfaz a condição do círculo interior com raio  $r_1 > 0$  se para todo  $p \in \partial\Omega$  existe um círculo de raio  $r_1$  contendo  $p$  e contido em  $\bar{\Omega}$ . Dizemos que  $\Omega$  satisfaz a condição do círculo exterior com raio  $0 < r_2 \leq \infty$  se para todo  $p \in \partial\Omega$  existe um círculo de raio  $r_2$  contendo  $p$  e contido no fecho do exterior de  $\Omega$ . Assim,  $r_2 = \infty$  se, e somente se,  $\partial\Omega$  é uma curva de Jordan e convexa.*

Agora estamos em condição de enunciar e demonstrar um teorema que fornece as condições para que um domínio  $\Omega$  e dados no bordo  $\varphi$  satisfaçam a condição da declividade limitada generalizada e também as condições (2) e (3) do Teorema 4.

**Teorema 15** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R_0 > 0$  e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2 \sinh x_0}$$

e

$$\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0} < b \leq \frac{\sqrt{4 - a^2 \sinh^2 x_0}}{a \sinh x_0},$$

onde  $x_0$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$ . Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  com  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$\omega(\varphi) = \sup \{ |\varphi(p) - \varphi(q)|; p, q \in \partial\Omega \} \leq \frac{(2 - a \sinh x_0 \sqrt{1 + b^2}) R_0}{\sinh x_0 \sqrt{1 + a^2} (1 + b^2)}, \quad (31)$$

$\sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \leq a$  e a curvatura de Graf ( $t\varphi$ ) é menor ou igual a  $1/R_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ , então para cada  $t \in [0, 1]$  existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

**Prova.** Dado  $p \in \partial\Omega$ , ponha  $x_p = (p, \varphi(p))$  e considere  $v_p$  um vetor não nulo tangente ao gráfico de  $\varphi$  em  $x_p$ . Considere o vetor  $n_p$ , unitário, normal

a  $C(\partial\Omega)$  em  $x_p$  apontando para o exterior de  $C(\Omega)$ . Como

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \leq a \quad (32)$$

e  $a < b$  ( $a \leq 1/2 \sinh x_0$  e  $b > \sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0}$ ), podemos tomar um plano  $\Pi_{p,1}$  de declividade  $b$  e que contém a reta suporte de  $v_p$  e tal que  $\langle N, n_p \rangle \geq 0$ , onde  $N$  é o vetor unitário normal a  $\Pi_{p,1}$  com  $\langle N, e_3 \rangle \geq 0$ . O plano  $\Pi_{p,1}$  é transversal a  $C(\partial\Omega)$  em  $x_p$  pois obviamente  $b < \infty$ . Além disso,

$$\frac{1}{b} \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| < 1$$

devido a (32) e ao fato que  $a < 1 < \sinh x_0 < b$ . Segue que a reta normal a  $\Pi_{p,1}$  em  $x_p$ , que tem declividade  $1/b$  em relação ao plano  $z = 0$ , não é ortogonal a  $n_p$ . Assim ela passa do exterior de  $C(\Omega)$  para o interior de  $C(\Omega)$  em uma vizinhança de  $x_p$ . Considere agora o círculo  $c_{R_0}$  de raio

$$R_0 = \min \{r_1, r_2\},$$

tangente a  $\partial\Omega$  em  $p$  e contido no fecho do exterior de  $\Omega$ . Como  $\Pi_{p,1}$  é transversal a  $C(\partial\Omega)$  em  $x_p$ , então  $\Pi_{p,1}$  é transversal a  $C(c_{R_0})$  em  $x_p$ . Então

$$\xi_p := \Pi_{p,1} \cap C(c_{R_0})$$

é uma elipse que está contida no fecho do exterior de  $C(\Omega)$ , com  $x_p \in \xi_p$ .

Além disso

$$k = \max k_{\xi_p} = \frac{\sqrt{1 + b^2}}{R_0}.$$

De fato,  $\xi_p$  é congruente com a elipse  $\xi$  obtida pela intersecção de um plano  $\pi$  de declividade  $b$  que contém o eixo- $y$  com o cilindro  $C(\bar{c}_{R_0})$ , onde  $\bar{c}_{R_0}$  é o círculo dado por  $x^2 + y^2 = R_0^2$  no plano  $z = 0$ . Pondo  $\theta_0$  o ângulo que  $\pi$

faz com  $z = 0$ , temos  $\tan \theta_0 = b$  e, portanto,  $\cos \theta_0 = 1/\sqrt{1+b^2}$ . Segue que o eixo maior de  $\xi$  é

$$2\frac{R_0}{\cos \theta_0} = 2R_0\sqrt{1+b^2}.$$

Como o eixo menor da elipse  $\xi$  tem medida  $2R_0$ , temos  $\xi$ , e portanto  $\xi_p$ , congruente a elipse de equação

$$\frac{x^2}{R_0^2} + \frac{y^2}{R_0^2(1+b^2)} = 1$$

no plano  $z = 0$ , que, como é fácil verificar, tem curvatura máxima

$$k = \frac{\sqrt{1+b^2}}{R_0}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor  $\varphi$  não negativa com

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi = 0.$$

Neste caso a condição (31) é equivalente a

$$\sup_{\partial\Omega} \varphi \leq \frac{(2 - a \sinh x_0 \sqrt{1+b^2}) R_0}{\sinh x_0 \sqrt{1+a^2} (1+b^2)}.$$

Considere agora o círculo  $c_{p,1} \subset \Pi_{p,1}$ , de raio  $r = 1/k$ , tangente a  $\xi_p$  em  $x_p$  e contido no fecho da região limitada por  $\xi_p$ . Seja  $q_{p,1} = (x_q^1, y_q^1, z_q^1) \in c_{p,1}$ , onde

$$z_q^1 = \sup \{z; (x, y, z) \in c_{p,1}\},$$

e seja  $\tau_p$  o segmento de reta perpendicular a  $\Pi_{p,1}$ , com um extremo em  $q_{p,1}$  e outro em  $q_{p,2} \in \{z = 0\}$ . Observamos que  $\tau_p$  tem declividade  $1/b$  em relação ao plano  $z = 0$ . Considere agora o tronco de cilindro  $C_p$  de raio  $r = 1/k$  cujas bases são  $c_{p,1}$  e  $c_{p,2}$ , onde  $c_{p,2}$  é um círculo concêntrico a  $c_{p,1}$  sobre o plano  $\Pi_{p,2}$  paralelo a  $\Pi_{p,1}$ , que dista

$$h = \frac{2}{k \sinh x_0}$$

de  $\Pi_{p,1}$  e é tal que  $\pi_{p,2}(x) \leq \pi_{p,1}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ , sendo  $\pi_{p,1}$  e  $\pi_{p,2}$  as funções lineares afins cujos gráficos são os planos  $\Pi_{p,1}$  e  $\Pi_{p,2}$  respectivamente.

Por construção, temos que:

i)  $C_p$  tem declividade  $1/b$  e raio medindo  $r = 1/k$ ;

ii)  $x_p \in c_{1,p}$ ;

iii)  $C_p$  é transversal a  $C(\partial\Omega)$  em  $x_p$ .

Além disso:

iv)  $q_{p,2} \in C_p$ , ou seja,  $d(q_{p,1}, q_{p,2}) \leq 2/k \sinh x_0$ .

Para ver isso, observamos primeiramente que a distância entre os planos  $z = \varphi(p)$  e  $z = z_q^1$  é menor ou igual a

$$\frac{ra}{\sqrt{1+a^2}}.$$

De fato, como a reta suporte de  $v_p$  tem declividade  $0 \leq a_p \leq a$  e  $a < b$ , rotacionando o plano  $\Pi_{p,1}$  em torno da reta suporte de  $v_p$  de um ângulo conveniente, é possível obter o plano  $\tilde{\Pi}_{p,1}$  de declividade  $a_p$  (note que existe um único plano de declividade  $a_p$  e que contém a reta suporte de  $v_p$ , que no caso é  $\tilde{\Pi}_{p,1}$ ). Denotamos por  $\bar{c}_{p,1}$  o círculo sobre  $\tilde{\Pi}_{p,1}$  correspondente a rotação de  $c_{p,1}$ . Então  $v_p \in T_{x_p}c_{p,1}$  e  $v_p \in T_{x_p}\bar{c}_{p,1}$  e, pondo  $\bar{q}_{p,1} = (\bar{x}_q^1, \bar{y}_q^1, \bar{z}_q^1)$  o ponto de  $\bar{c}_{p,1}$  tal que

$$\bar{z}_q^1 = \sup \{z; (x, y, z) \in \bar{c}_{p,1}\},$$

é imediato ver que  $z_q^1 \leq \bar{z}_q^1$ . Seja  $\theta_p$  o ângulo que  $\tilde{\Pi}_{p,1}$  faz com o plano  $z = 0$ . Então  $\tan \theta_p = a_p$ ,  $\cos \theta_p = 1/\sqrt{1+a_p^2}$  e conseqüentemente,

$$\sin \theta_p = \frac{a_p}{\sqrt{1+a_p^2}}.$$

Assim,

$$\bar{z}_q^1 - \varphi(p) \leq \frac{ra_p}{\sqrt{1+a_p^2}} \leq \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Logo

$$0 \leq z_q^1 - \varphi(p) \leq \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}}$$

como afirmamos. Portanto

$$\begin{aligned} z_q^1 &\leq \varphi(p) + \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} \leq \\ &\leq \left( \frac{(2 - a \sinh x_0 \sqrt{1+b^2}) R_0}{\sinh x_0 \sqrt{1+a^2} (1+b^2)} \right) + \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \left( \frac{2 - a \sinh x_0 \sqrt{1+b^2}}{k \sinh x_0 \sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2}} \right) + \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \left( \frac{2r}{\sinh x_0 \sqrt{1+b^2}} - \frac{ar}{\sqrt{1+a^2}} \right) + \frac{ra}{\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \frac{2r}{\sinh x_0 \sqrt{1+b^2}} = \frac{2}{k \sinh x_0 \sqrt{1+b^2}}. \end{aligned}$$

Como a declividade de  $C_p$  é  $1/b = \tan \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo que as geratrizes de  $C_p$  fazem com o plano  $z = 0$ , segue que  $\cos \theta = b/\sqrt{1+b^2}$ , e portanto

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} d(q_{p,1}, q_{p,2}) &= \frac{z_q^1}{\sin \theta} \leq \left( \frac{2}{k \sinh x_0 \sqrt{1+b^2}} \right) \sqrt{1+b^2} = \\ &= \frac{2}{k \sinh x_0}, \end{aligned}$$

e isso conclui a prova de *iv*).

*v*) Já que  $\varphi$  é não negativa, resulta de *iv*) que

$$\sup \{z; (x, y, z) \in c_{p,2}\} \leq \inf_{\partial\Omega} \varphi.$$

*vi*) A intersecção de  $C_p$  com o cilindro sobre a fronteira de  $\Omega$  está contida no conjunto

$$\{(x, y, z) \in R^3; (x, y, 0) \in \partial\Omega \text{ e } z \leq \varphi(x, y)\} = \varphi^-,$$

ou seja,  $C_p \cap C(\partial\Omega) \subset \varphi^-$ .

Considere a esfera  $\varepsilon_p$  centrada em um ponto  $O \in T_{x_p}C(\partial\Omega)$ , tal que  $O$  está “abaixo” da reta tangente a  $Graf(\varphi)$  em  $x_p$ , de raio

$$R = \frac{\sqrt{1+b^2} \sinh x_0}{k\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}}$$

e tal que  $x_p \in \varepsilon_p$  e  $v_p \in T_{x_p}\varepsilon_p$ . Denote por  $c$  o meridiano de  $\varepsilon_p$  que está contido em  $T_{x_p}C(\partial\Omega)$ . Então  $x_p \in c$  e  $v_p \in T_{x_p}c$ . Como a reta suporte de  $v_p$  tem declividade  $a_p$ ,  $0 \leq a_p \leq a < b$  e o plano  $\Pi_{p,1}$  de declividade  $b$  contém a reta suporte de  $v_p$ , segue do Lema 12 que o raio  $r_p$  do círculo  $\Pi_{p,1} \cap \varepsilon_p$  é

$$r_p = R \frac{\sqrt{b^2 - a_p^2}}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Afirmamos que  $r_p \geq 1/k$ . De fato, como  $\sqrt{a^2 + (1+a^2)\sinh^2 x_0} < b$ , então  $\sinh^2 x_0 < b^2$ . Além disso temos  $a^2 \leq 1/\sinh^2 x_0$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\sinh^4 x_0 - 1}{\sinh^2 x_0} &= \sinh^2 x_0 - \frac{1}{\sinh^2 x_0} < \\ &< b^2 - \frac{1}{\sinh^2 x_0} \leq b^2 - a^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}}{\sinh x_0} < \sqrt{b^2 - a^2}$$

e, portanto,

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{1+b^2}}{k\sqrt{b^2 - a^2}} < \frac{\sqrt{1+b^2} \sinh x_0}{k\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} = R.$$

Como

$$\bar{R} \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{k} \leq \bar{R} \frac{\sqrt{b^2 - a_p^2}}{\sqrt{1+b^2}}$$

já que  $\sqrt{b^2 - a^2} \leq \sqrt{b^2 - a_p^2}$  e, como  $\bar{R} < R$ , segue que  $r_p \geq 1/k$  como afirmamos. Assim,  $\Pi_{p,1} \cap \varepsilon_p$  é um círculo de raio  $r_p \geq 1/k$ . Logo  $c_{p,1}$  está

contido no fecho da região limitada por  $\Pi_{p,1} \cap \varepsilon_p$ . Seja  $C$  o tronco de cilindro circular reto cuja base é o círculo  $\Pi_{p,1} \cap \varepsilon_p$  e de maior altura que está contido no fecho da região do espaço limitada por  $\varepsilon_p$ . Então  $C$  tem declividade  $1/b$  e  $C_p$  é tangente interior a  $C$ . Vamos mostrar que a altura de  $C_p$  é menor que a altura de  $C$ . Seja  $d$  um diâmetro de  $\Pi_{p,1} \cap \varepsilon_p$  e seja  $\pi_d$  o plano que contém  $d$  e a origem  $O$  de  $\varepsilon_p$ . Então  $\pi_d \cap C$  é um retângulo com um dos lados medindo  $d$  e diagonal medindo  $2R$ . Denotamos por  $h_0$  a medida do outro lado do retângulo que é então a altura de  $C$ . Como

$$\begin{aligned} d &= 2r_p = 2R \frac{\sqrt{b^2 - a_p^2}}{\sqrt{1 + b^2}} = 2 \frac{\sqrt{1 + b^2} \sinh x_0}{k \sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} \frac{\sqrt{b^2 - a_p^2}}{\sqrt{1 + b^2}} = \\ &= \frac{2 \sinh x_0 \sqrt{b^2 - a_p^2}}{k \sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} h_0^2 &= 4R^2 - d^2 = \\ &= \frac{4(1 + b^2) \sinh^2 x_0}{k^2 (\sinh^4 x_0 - 1)} - \frac{4 \sinh^2 x_0 (b^2 - a_p^2)}{k^2 (\sinh^4 x_0 - 1)} = \\ &= \frac{4 \sinh^2 x_0 (1 + a_p^2)}{k^2 (\sinh^4 x_0 - 1)}, \end{aligned}$$

donde

$$h_0 = \frac{2 \sinh x_0 \sqrt{1 + a_p^2}}{k \sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}}.$$

Como  $0 \leq a_p \leq a$  e  $a < 1/2 \sinh x_0$ , segue que

$$\frac{\sinh x_0 \sqrt{1 + a_p^2}}{\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} > \frac{1}{\sinh x_0}.$$

Portanto

$$h_0 > \frac{2}{k \sinh x_0}.$$

Logo a altura de  $C$  é maior que a altura de  $C_p$ . Então  $C_p$  está contido no fecho da região do espaço limitada por  $\varepsilon_p$ . Por outro lado, o raio da esfera  $\varepsilon_p$  é menor que  $R_0 = \min \{r_1, r_2\}$ . De fato, como  $k = (\sqrt{1+b^2})/R_0$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sqrt{1+b^2} \sinh x_0}{k \sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} = \frac{R_0 \sqrt{1+b^2} \sinh x_0}{\sqrt{1+b^2} \sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} = \\ &= R_0 \frac{\sinh x_0}{\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} < R_0 \end{aligned}$$

já que

$$\frac{\sinh x_0}{\sqrt{\sinh^4 x_0 - 1}} \approx 0,73769 < 1.$$

Afirmamos que a intersecção de  $Graf(\varphi)$  com  $\varepsilon_p$  é o ponto  $x_p$ . Para tal, denotamos por  $\gamma$  a componente conexa de  $Graf(\varphi)$  que contém  $x_p$ , e supomos sem perda de generalidade que  $\gamma$  e  $x_p$  pertencente ao traço de  $\gamma$  são tais que  $\varepsilon_p$  é a esfera de raio  $R$  centrada na origem  $O$  do  $\mathbb{R}^3$ . Denotamos por  $D$  o disco aberto

$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < R^2\}$$

e por  $\Gamma$  a curva  $\varepsilon_p^+ \cap C(\alpha \cap D)$ , onde  $\varepsilon_p^+$  é o hemisfério norte de  $\varepsilon_p$  e  $\alpha$  é a componente conexa de  $\partial\Omega$  que contém  $p$ . Observamos que  $\alpha \cap D = \partial\Omega \cap D$  e isso se deve ao fato que  $\partial\Omega$  satisfaz a condição do círculo exterior e interior de raio  $R_0$  e  $R < R_0$ . Pelo mesmo argumento,  $\alpha \cap D$  tem uma só componente conexa. Inicialmente observamos que existe  $\delta > 0$  tal que  $|\gamma(s)| > R$  para todos  $s \neq s_p$  em  $(s_p - \delta, s_p + \delta)$ , onde  $\gamma(s_p) = x_p$ . De fato, pondo  $g(s) = |\gamma(s)|$ , temos

$$g'(s) = \frac{\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle}{|\gamma(s)|}$$

e

$$g''(s) = \frac{|\gamma(s)|^2 (|\gamma'(s)|^2 + \langle \gamma(s), \gamma''(s) \rangle) - \langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle^2}{|\gamma(s)|^3}.$$

Como  $\gamma(s_p)$  é ortogonal a  $\gamma'(s_p)$  já que  $\varepsilon_p$  está centrada na origem, segue que  $g'(s_p) = 0$  e portanto

$$\begin{aligned} g''(s_p) &= \frac{|\gamma'(s_p)|^2 + \langle \gamma(s_p), \gamma''(s_p) \rangle}{|\gamma(s_p)|} = \\ &= \frac{1}{R} \left( |\gamma'(s_p)|^2 + \langle \gamma(s_p), \gamma''(s_p) \rangle \right). \end{aligned}$$

Como

$$\langle \gamma(s_p), \gamma''(s_p) \rangle \leq |\langle \gamma(s_p), \gamma''(s_p) \rangle| \leq |\gamma(s_p)| |\gamma''(s_p)| = R |\gamma''(s_p)|,$$

segue que

$$\begin{aligned} |\gamma'(s_p)|^2 + \langle \gamma(s_p), \gamma''(s_p) \rangle &\geq |\gamma'(s_p)|^2 - |\gamma(s_p)| |\gamma''(s_p)| = \\ &= |\gamma'(s_p)|^2 - R |\gamma''(s_p)| = \\ &= |\gamma'(s_p)|^2 \left( 1 - \frac{R |\gamma''(s_p)|}{|\gamma'(s_p)|^2} \right). \end{aligned}$$

Supondo sem perda de generalidade  $\gamma$  parametrizada por comprimento de arco, e lembrando que

$$\max k_\gamma \leq \frac{1}{R_0} < \frac{1}{R},$$

temos

$$\begin{aligned} g''(s_p) &\geq \frac{1}{R} |\gamma'(s_p)|^2 \left( 1 - \frac{R |\gamma''(s_p)|}{|\gamma'(s_p)|^2} \right) = \\ &= \frac{1}{R} |\gamma'(s_p)|^2 (1 - R |\gamma''(s_p)|) \geq \frac{1}{R} |\gamma'(s_p)|^2 (1 - R \max k_\gamma) > 0, \end{aligned}$$

donde  $s_p$  é um ponto de mínimo local de  $g$ , de modo que podemos concluir que existe  $\delta > 0$  tal que  $|\gamma(s)| > R$  para todos  $s \neq s_p$  em  $(s_p - \delta, s_p + \delta)$ .

No que segue, supomos  $\alpha$  parametrizada por comprimento de arco,

$$\alpha(s) = (x(s), y(s))$$

com  $\alpha(s_p) = p$  e consideramos as parametrizações de  $\gamma$  e  $\Gamma$  dadas por

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \varphi(\alpha(s))), \Gamma(s) = (\alpha(s), z(\alpha(s)))$$

respectivamente, onde

$$z(\alpha(s)) = \sqrt{R^2 - \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} = \sqrt{R^2 - |\alpha(s)|^2}.$$

Suponha agora que exista  $s_1 \neq s_p$  tal que  $\gamma(s_1) = \Gamma(s_1)$ . Sem perda de generalidade supomos  $s_1 > s_p$  e que  $s_1$  seja o primeiro ponto  $s > s_p$  onde tal fato aconteça. Ponha  $\varphi(s) = (\varphi \circ \alpha)(s)$  e  $z(s) = (z \circ \alpha)(s)$ . Então

$$\gamma'(s) = (\alpha'(s), \varphi'(s))$$

e

$$\gamma''(s) = (\alpha''(s), \varphi''(s)).$$

Considere a função  $f(s) = |\gamma(s) - \Gamma(s)|$ . Temos

$$f' = \frac{\langle \gamma' - \Gamma', \gamma - \Gamma \rangle}{|\gamma - \Gamma|}$$

e

$$f'' = \frac{[\langle \gamma'' - \Gamma'', \gamma - \Gamma \rangle + |\gamma' - \Gamma'|^2] |\gamma - \Gamma|^2 - \langle \gamma' - \Gamma', \gamma - \Gamma \rangle^2}{|\gamma - \Gamma|^3}. \quad (33)$$

Como  $f(s_p) = 0 = f(s_1)$ , e  $f$  é positiva em  $(s_p, s_1)$ , então  $f$  possui um ponto de máximo  $s_0 \in (s_p, s_1)$ . Segue que em  $s_0$ ,

$$\langle \gamma' - \Gamma', \gamma - \Gamma \rangle = (\varphi' - z')(\varphi - z) = 0$$

e, como  $\varphi(s_0) - z(s_0) > 0$ , resulta que  $\varphi'(s_0) = z'(s_0)$ . Assim em  $s_0$ , temos também  $|\gamma' - \Gamma'| = 0$ . Por outro lado,  $f''(s_0) \leq 0$ , donde de (33) obtemos que em  $s_0$

$$\langle \gamma'' - \Gamma'', \gamma - \Gamma \rangle \leq 0,$$

Mas

$$\langle \gamma'' - \Gamma'', \gamma - \Gamma \rangle (s_0) = (\varphi''(s_0) - z''(s_0))(\varphi(s_0) - z(s_0)) \leq 0,$$

e como  $\varphi(s_0) - z(s_0) > 0$  segue que  $\varphi''(s_0) \leq z''(s_0)$ . Afirmamos ainda que

$z''(s_0) \leq 0$ . Com efeito, para todo  $s \in (s_p, s_1)$ , como

$$z(s) = \sqrt{R^2 - \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle},$$

$$z' = \frac{-\langle \alpha, \alpha' \rangle}{\sqrt{R^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle}}$$

e

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{-\langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \alpha, \alpha'' \rangle (R^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle) - \langle \alpha, \alpha' \rangle^2}{(R^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle)^{3/2}} = \\ &= \frac{-R^2 + \langle \alpha, \alpha \rangle - R^2 \langle \alpha, \alpha'' \rangle + \langle \alpha, \alpha \rangle \langle \alpha, \alpha'' \rangle - \langle \alpha, \alpha' \rangle^2}{(R^2 - \langle \alpha, \alpha \rangle)^{3/2}} = \\ &= \frac{(|\alpha|^2 - R^2)(1 + \langle \alpha, \alpha'' \rangle)}{(R^2 - |\alpha|^2)^{3/2}} \leq 0 \end{aligned}$$

já que

$$1 + \langle \alpha, \alpha'' \rangle \geq 1 - |\alpha| |\alpha''| \geq 1 - R \frac{1}{R_0} > 0$$

(lembramos que  $|\alpha|^2 \leq R^2$  pois  $\alpha[(s_p, s_1)] \subset D$  e  $1/R_0 < 1/R$ ). Logo

$z''(s_0) \leq 0$ . Por outro lado,

$$\gamma' \times \gamma'' = (\varphi''y' - \varphi'y'', \varphi'x'' - \varphi''x', x'y'' - x''y')$$

e, portanto

$$\begin{aligned} |\gamma' \times \gamma''| &= \\ &= ((\varphi'')^2 [(x')^2 + (y')^2] + (\varphi')^2 [(x'')^2 + (y'')^2] - \\ &\quad - 2\varphi''\varphi'(x'x'' + y'y'') + (x'y'' - x''y')^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  está parametrizada por comprimento de arco, segue  $x'x'' + y'y'' = 0$ ,  $(x')^2 + (y')^2 = 1$  e  $(x'')^2 + (y'')^2 = k_\alpha^2$ . Além disso, como  $\alpha$  é uma curva plana, a curvatura de  $\alpha$  é dada por

$$k_\alpha = \left| \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \right| = |x'y'' - x''y'|,$$

e portanto,

$$k_\alpha^2 = (x'y'' - x''y')^2.$$

Segue que

$$|\gamma' \times \gamma''| = \sqrt{(\varphi'')^2 + (\varphi')^2 k_\alpha^2 + k_\alpha^2} = \sqrt{(\varphi'')^2 + k_\alpha^2 (1 + (\varphi')^2)}$$

Logo, a curvatura de  $\gamma$  em  $s$  é dada por

$$k_\gamma = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3} = \frac{\sqrt{(\varphi'')^2 + k_\alpha^2 (1 + (\varphi')^2)}}{(1 + (\varphi')^2)^{3/2}}.$$

Analogamente, a curvatura de  $\Gamma$  em  $s$  é dada por

$$k_\Gamma = \frac{\sqrt{(z'')^2 + k_\alpha^2 (1 + (z')^2)}}{(1 + (z')^2)^{3/2}}.$$

Como

$$\varphi''(s_0) \leq z''(s_0) \leq 0,$$

então  $|z''(s_0)| \leq |\varphi''(s_0)|$  e, portanto,  $(z''(s_0))^2 \leq (\varphi''(s_0))^2$ . Decorre então do fato de termos  $\varphi'(s_0) = z'(s_0)$  e  $(z''(s_0))^2 \leq (\varphi''(s_0))^2$  que

$$\begin{aligned} k_\Gamma^2(s_0) &= \frac{(z'')^2 + k_\alpha (1 + (z')^2)}{(1 + (z')^2)^3} = \frac{(z'')^2 + k_\alpha (1 + (\varphi')^2)}{(1 + (\varphi')^2)^3} \leq \\ &\leq \frac{(\varphi'')^2 + k_\alpha (1 + (\varphi')^2)}{(1 + (\varphi')^2)^3} = k_\gamma^2(s_0). \end{aligned}$$

Como  $\Gamma$  está sobre a esfera  $\varepsilon_p$  de raio  $R$ , segue que  $k_\Gamma(s) \geq 1/R$  para todo  $s \in (s_p, s_1)$ . Assim, como  $R < R_0$ , resulta que

$$\frac{1}{R_0} < \frac{1}{R} \leq k_\Gamma(s_0) \leq k_\gamma(s_0)$$

o que contradiz a hipótese que  $k_{Graf(\varphi)} \leq \frac{1}{R_0}$ . Logo a intersecção do  $Graf(\varphi)$  com  $\varepsilon_p$  é o ponto  $x_p$ . Segue então que

$$\varepsilon_p \cap C(\partial\Omega) = \varepsilon_p \cap C(\alpha) \subset \varphi^-$$

e, portanto,  $C_p \cap C(\partial\Omega) \subset \varphi^-$ , e isto conclui a prova de *vi*).

Analogamente pode-se mostrar que existe um tronco de cilindro  $C_p^+$  de raio  $r = 1/k$  e declividade  $1/b$  que satisfaz as respectivas condições de *i*) a *vi*) como acima. Além disso, para todo  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla t\varphi| \leq \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi|,$$

$\omega(t\varphi) \leq \omega(\varphi)$  e, por hipótese

$$k_{Graf(t\varphi)} \leq \frac{1}{R_0},$$

segue do exposto acima que para todo  $t \in [0, 1]$ , existem troncos de cilindros circulares retos  $C_{p,t}^\pm$  de raio  $r = 1/k$  e declividade  $1/b$  que satisfazem os itens de *i*) a *vi*) acima. O teorema agora segue do Teorema 4 (observe que para este caso,  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazem a condição da declividade limitada para uma constante  $M$  tal que

$$M \geq \frac{a^2(2+b^2)+1}{b^2-a^2}$$

o que pode ser deduzido diretamente de (17)). ■

**Corolário 16** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R > 0$  e sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que*

$$0 \leq a \leq \min \left\{ \frac{1}{2 \sinh x_0}, \frac{\sqrt{1 - R^2 k_{\max}^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} \right\} \quad (34)$$

e

$$\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0} < b \leq \frac{\sqrt{4 - a^2 \sinh^2 x_0}}{a \sinh x_0},$$

onde  $x_0$  é a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$  e  $k_{\max} = \max |k_{\partial\Omega}|$ .

Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  não negativa com  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$|\varphi|_{2,\partial\Omega} \leq \left\{ a, \frac{(2 - a\sqrt{1 + b^2} \sinh x_0) R}{\sqrt{1 + a^2} (1 + b^2) \sinh x_0} \right\}, \quad (35)$$

então para cada  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

**Prova.** Decorre do fato que  $\partial\Omega$  é unidimensional que

$$|\varphi|_{2,\partial\Omega} = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| + \sup_{\partial\Omega} |D^2\varphi|.$$

Então de (35) segue que

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \leq a$$

e

$$\sup_{\partial\Omega} \varphi \leq \frac{(2 - a \sinh x_0 \sqrt{1 + b^2}) R}{\sinh x_0 \sqrt{1 + a^2} (1 + b^2)}.$$

Dado  $p \in \partial\Omega$ , considere  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  uma parametrização da componente conexa de  $\partial\Omega$  que contém  $p$ , com  $\alpha(s_p) = p$ , e que supomos sem perda de generalidade parametrizada por comprimento de arco, e

$$\gamma_t(s) = (\alpha(s), t\varphi(s)),$$

$\varphi(s) := (\varphi \circ \alpha)(s)$ , uma parametrização da componente conexa de gráfico de  $t\varphi$  que contém o ponto  $x_{p,t} = (p, t\varphi(p))$ , para  $t \in [0, 1]$ . Procedendo

de modo análogo ao executado para a obtenção de  $k_{\gamma_1} := k_\gamma$  no teorema anterior, obtemos que a curvatura de  $\gamma_t$  em  $s$  é dada por

$$k_{\gamma_t} = \frac{|\gamma'_t \times \gamma''_t|}{|\gamma'_t|^3} = \frac{\sqrt{t^2 [(\varphi'')^2 + k_\alpha^2 (\varphi')^2] + k_\alpha^2}}{(1 + t^2 (\varphi')^2)^{3/2}}.$$

Consequentemente, para todo  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} (k_{\gamma_t})^2 &\leq t^2 [(\varphi'')^2 + k_\alpha^2 (\varphi')^2] + k_\alpha^2 \leq (\varphi'')^2 + k_\alpha^2 (\varphi')^2 + k_\alpha^2 \leq \\ &\leq \left( \sup_{\partial\Omega} |D^2\varphi| \right)^2 + k_{\max}^2 \left( \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \right)^2 + k_{\max}^2 \leq \\ &\leq a^2 + a^2 k_{\max}^2 + k_{\max}^2 \leq \\ &\leq \frac{1 - R^2 k_{\max}^2}{R^2 (1 + k_{\max}^2)} + \left( \frac{1 - R^2 k_{\max}^2}{R^2 (1 + k_{\max}^2)} \right) k_{\max}^2 + k_{\max}^2 = \\ &= \frac{1 - R^2 k_{\max}^2 + k_{\max}^2 - R^2 k_{\max}^4 + R^2 k_{\max}^2 + R^2 k_{\max}^4}{R^2 (1 + k_{\max}^2)} = \frac{1}{R^2}, \end{aligned}$$

donde

$$k_{\gamma_t} \leq \frac{1}{R}$$

Segue então que

$$k_{\text{Graf}(t\varphi)} \leq \frac{1}{R},$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . O resultado decorre agora do Teorema 15. ■

**Corolário 17** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R > 0$  e seja*

$$K = \min \left\{ \frac{1}{2 \sinh x_0}, \frac{\sqrt{1 - k_{\max}^2 R^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} \right\}, \quad (36)$$

onde  $k_{\max} = \max |k_{\partial\Omega}|$ . Dada  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  não negativa,  $\alpha \in (0, 1)$ , se

$$|\varphi|_{2;\partial\Omega} \leq \frac{K^2 R (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0}, \quad (37)$$

então, para cada  $t \in [0, 1]$ , existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

**Prova.** Se  $K = 0$  então  $\varphi \equiv 0$  e, neste caso,  $u \equiv 0$  é a única solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ . Suponha então  $K > 0$ . Temos

$$\sqrt{K^2 + (1 + K^2) \sinh^2 x_0} < \frac{1}{K} < \frac{\sqrt{4 - K^2 \sinh^2 x_0}}{K \sinh x_0}.$$

Assim, tomando  $a = K$  e  $b = 1/K$ , segue que

$$0 < a < \frac{1}{2 \sinh x_0}$$

e

$$\sqrt{a^2 + (1 + a^2) \sinh^2 x_0} < b < \frac{\sqrt{4 - a^2 \sinh^2 x_0}}{a \sinh x_0}.$$

Além disso, como

$$|\varphi|_{2;\partial\Omega} = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| + \sup_{\partial\Omega} |D^2\varphi|,$$

segue de (37) e do fato que  $\varphi$  é não negativa, que

$$\begin{aligned} \sup_{\partial\Omega} \varphi &\leq \frac{K^2 R (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0} = \frac{R (2 - K \sqrt{1 + \frac{1}{K^2}} \sinh x_0)}{(1 + \frac{1}{K^2}) \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0} \leq \\ &\leq R \frac{(2 - a \sqrt{1 + b^2} \sinh x_0)}{(1 + b^2) \sqrt{1 + a^2} \sinh x_0}. \end{aligned}$$

Ainda, como

$$\frac{2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0} \leq \frac{2 - \sinh x_0}{\sinh x_0} < 0,3255 < 1,$$

e  $K < 1/R$  já que

$$\frac{\sqrt{1 - k_{\max}^2 R^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} < \frac{1}{R},$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{K^2 R (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0} &\leq \frac{K (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{(1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0} \leq \quad (38) \\ &\leq K \left( \frac{2 - \sinh x_0}{\sinh x_0} \right) < K = a, \end{aligned}$$

de modo que de (37) concluímos que

$$\sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \leq K = a.$$

Por outro lado, dado  $p \in \partial\Omega$ , denotando por  $\alpha$  a componente conexa de  $\partial\Omega$  que contém  $p$  e supondo  $\alpha$  parametrizada por comprimento de arco, temos

$$k_{\gamma_t}(s) = \frac{\sqrt{t^2 \{[\varphi''(s)]^2 + [\varphi'(s)]^2 k_\alpha^2(s)\} + k_\alpha^2(s)}}{(1 + t^2 [\varphi'(s)]^2)^{3/2}}$$

onde  $\gamma_t(s) = (\alpha(s), t\varphi(\alpha(s))) := (\alpha(s), t\varphi(s))$  (ver dedução da fórmula acima no teorema anterior). Então, de (37) e de (38) obtemos

$$\begin{aligned} k_{\gamma_t}^2(s) &\leq [\varphi''(s)]^2 + (1 + [\varphi'(s)]^2) k_\alpha^2(s) \leq \\ &\leq \left[ \sup_{\partial\Omega} |D^2\varphi| \right]^2 + \left( 1 + \left[ \sup_{\partial\Omega} |\nabla\varphi| \right]^2 \right) k_{\max}^2 \leq \\ &\leq K^2 + (1 + K^2) k_{\max}^2, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, 1]$ , de modo que de (36) obtemos

$$\begin{aligned} k_{\gamma_t}^2(s) &\leq K^2 + (1 + K^2) k_{\max}^2 \leq \\ &\leq \frac{1 - k_{\max}^2 R^2}{R^2(1 + k_{\max}^2)} + k_{\max}^2 + k_{\max}^2 \left( \frac{1 - k_{\max}^2 R^2}{R^2(1 + k_{\max}^2)} \right) = \frac{1}{R^2}, \end{aligned}$$

donde  $k_{\gamma_t}(s) \leq 1/R$ . Logo, como  $p$  é qualquer, então

$$k_{\text{Graf}(t\varphi)} \leq \frac{1}{R}$$

para todo  $t \in [0, 1]$ . O resultado segue agora diretamente do Teorema 15. ■

### 3.1 Uma resposta parcial ao Problema 1.

Com o que obtivemos até agora podemos dar uma resposta parcial ao Problema 1:

Seja  $\Omega$  é um domínio limitado satisfazendo a condição do círculo interior e exterior para algum raio  $R > 0$  e

$$K = \min \left\{ \frac{1}{2 \sinh x_0}, \frac{\sqrt{1 - k_{\max}^2 R^2}}{R \sqrt{1 + k_{\max}^2}} \right\},$$

onde  $k_{\max} = \max |k_{\partial\Omega}|$  e seja  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ . Então, para todo  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$|t| \leq \frac{K^2 R (2 - \sqrt{1 + K^2} \sinh x_0)}{|\varphi|_{2;\partial\Omega} (1 + K^2)^{3/2} \sinh x_0},$$

existe  $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$ .

Uma estimativa mais geral para  $|t|$ , pode ser obtida diretamente a partir do Corolário 16. Assim, damos alguma contribuição em relação ao Problema 1 relatado na introdução.

## 4 Alguns resultados de existência e unicidade para gráficos mínimos compactos com bordo em planos não necessariamente paralelos

Para um domínio multiplamente conexo  $\Omega$  de classe  $C^{2,\alpha}$ , tal que  $\partial\Omega = \cup_{i=1}^n \gamma_i$ , com  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  contida no interior da região limitada por  $\gamma_1$ , provamos nesta seção a existência de um gráfico mínimo assumindo o valor zero em  $\gamma_1$  e  $\pi(\gamma_i)$  em  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , onde  $\pi$  é uma função linear afim cujo gráfico é um plano  $\Pi$  tal que  $\Pi \cap C(\Omega)$  esteja contida em um dos semiplanos fechados determinados pelo plano  $z = 0$ . As hipóteses presentes envolvem a distância  $d$  entre a curva  $\gamma_1$  e as curvas  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  e a altura

$$h = \sup\{|\pi(p)|; p \in \cup_{i=2}^n \gamma_i\}.$$

Além disso, se a curva  $\gamma_1$  é convexa, provamos a existência de um gráfico mínimo sobre  $\Omega$  assumindo o valor  $\pi(\gamma_1)$  em  $\gamma_1$  e zero em  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , com hipóteses semelhantes àsquelas usadas em [EsR]. Em [EsR], os autores consideram  $\Pi$  um plano paralelo a  $z = 0$ , a uma distância  $h$ , e provam que se  $\gamma_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , satisfaz a condição do círculo interior com raio  $r_1 > 0$  e  $\gamma_1$  satisfaz a condição do círculo exterior com raio  $0 < r_2 \leq \infty$ , tal gráfico mínimo existe se

$$h \leq r \cosh^{-1} \frac{r_j + d}{r_j}, j = 1, 2.$$

Com hipóteses semelhantes a estas, supondo adicionalmente que a curva  $\gamma_1$  seja convexa, e com a mesma técnica, provamos o Teorema 19. No teorema a seguir, no entanto, a prova se baseia no fato que, sob certas hipótese

envolvendo  $h$  e  $d$ , pondo  $\varphi : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\varphi(p) = \begin{cases} \pi(p), & \text{se } p \in \gamma_i, i = 2, \dots, n \\ 0 & \text{se } p \in \gamma_1 \end{cases},$$

temos  $\Omega$  e  $\varphi$  satisfazendo a condição da declividade limitada generalizada com alguma constante  $M \geq 0$  e raio  $R > 0$  e, além disso, as condições (2) e (3) do Teorema 4.

**Teorema 18** *Sejam  $\gamma$  uma curva de Jordan de classe  $C^{2,\alpha}$  no plano  $\{z = 0\}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , satisfazendo a condição do círculo exterior para algum raio  $0 < R_1 \leq \infty$  e  $\Pi$  um plano de declividade  $0 \leq M < \infty$  tal que a curva  $c = \Pi \cap C(\gamma)$  esteja contida em um dos semi-espacos fechados determinados por  $\{z = 0\}$ . Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  curvas de Jordan de classe  $C^{2,\alpha}$  no plano  $\{z = 0\}$  tais que cada curva  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , esteja contida no interior da região limitada por  $\gamma$  e satisfaça a condição do círculo interior para algum raio  $R_2 > 0$ . Suponha ainda que os conjuntos fechados limitados pelas curvas  $\gamma_i$  sejam dois a dois disjuntos. Denote por  $\Omega$  o domínio multiplamente conexo limitado por  $\gamma$ ,  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\pi$  a função linear afim cujo gráfico é o plano  $\Pi$ , e por  $h$  o número real*

$$h = \sup\{|\pi(p)|; p \in \cup_{i=1}^n \gamma_i\}.$$

*Pondo*

$$\begin{aligned} d &= d(\cup_{i=1}^n \gamma_i, \gamma) = \\ &= \inf\{|p_1 - p_2|; p_1 \in \cup_{i=1}^n \gamma_i, p_2 \in \gamma\}, \end{aligned}$$

*$x_0$  a única raiz positiva de  $\cosh x - x \sinh x = 0$  e  $R = \min\{R_1, R_2\}$ , dado  $\mu > 1$ , se para  $h \neq 0$ ,*

$$\frac{h^2 + \sigma^2}{Rh} \leq \frac{2}{\sinh x_0}$$

e

$$\frac{h}{\sigma} < \frac{1}{\sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}}$$

onde  $\sigma = \min \left\{ d, \mu h \sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0} \right\}$ , então existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_\gamma = 0$  e  $u|_{\gamma_i} = \pi|_{\gamma_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Prova.** Considere  $\varphi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi|_\gamma = 0$  e  $\varphi|_{\gamma_i} = \pi|_{\gamma_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Se  $h = 0$  então  $u \equiv 0$  é a única solução. Suponha então  $h > 0$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $c = \Pi \cap C(\gamma)$  esteja contido no conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\}.$$

Dado  $i \in \{1, \dots, n\}$  e dado  $p \in \gamma_i$ , considere o ponto  $x_p = (p, \varphi|_{\gamma_i}(p))$ . Seja  $v_p$  um vetor não nulo tangente ao gráfico de  $\varphi$  em  $x_p$  e seja  $n_p$  o vetor unitário normal a  $C(\gamma_i)$  em  $x_p$  e que aponta para o interior de  $C(\Omega_i)$ , onde  $\Omega_i$  é a região do plano  $z = 0$  limitada por  $\gamma_i$ . Seja  $\Pi_p^1$  o plano passando por  $x_p$  e contendo  $v_p$ , cujo vetor normal  $N$ ,  $\langle N, e_3 \rangle > 0$ , tem declividade  $h/\sigma$  e é tal que  $\langle N, n_p \rangle \geq 0$ . Temos que  $\Pi_p^1$  é transversal a  $C(\gamma_i)$  em  $x_p$  pois  $h/\sigma > 0$  e, como

$$\frac{h}{\sigma} < \frac{1}{M},$$

já que  $M < \sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}$ , segue que

$$\frac{h}{\sigma} M < 1$$

e, portanto,  $N$  não é ortogonal a  $n_p$ . Assim, a reta suporte de  $N$  passa do interior para o exterior de  $C(\Omega_i)$  em  $x_p$ . Como  $\Pi_p^1$  é transversal a  $C(\gamma_i)$ , temos que

$$\beta_p^1 := \Pi_p^1 \cap C(\gamma_i)$$

é uma curva fechada simples passando por  $x_p$  e que divide  $\Pi_p^1$  em duas componentes conexas, uma delas limitada que chamaremos de  $U_p$ . Como  $\gamma_i$  satisfaz a condição do círculo interior com raio  $R_2 > 0$ , temos que  $\beta_p^1$  satisfaz a condição do círculo interior com raio igual a  $1/k$ , onde

$$k = \max k_\xi = \frac{\sqrt{h^2 + \sigma^2}}{hR},$$

sendo  $\xi$  a elipse obtida pela intersecção de  $\Pi_p^1$  (que tem declividade  $\sigma/h$ ) com  $C(c_R)$ , onde  $c_R$  é o círculo de raio  $R = \min\{R_1, R_2\}$  sobre  $\{z = 0\}$ , contido no fecho de  $\Omega_i$  e tangente a  $\gamma_i$  em  $p$ . Note que  $\xi$  é congruente a elipse de equação

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{h^2 y^2}{R^2(h^2 + \sigma^2)} = 1 \quad (39)$$

no plano  $z = 0$ . Assim, existe um círculo  $c_{p,1}^-$  de raio  $1/k$  contido em  $\bar{U}_p$  e passando por  $x_p$  com  $v_p \in T_{x_p} c_{p,1}^-$ . Além disso,

$$c_{p,1}^- \subset \{(x, y, z) ; z \leq \pi(x, y)\} \quad (40)$$

devido a escolha do plano  $\Pi_p^1$ . Seja  $a_1$  o ponto de  $c_{p,1}^-$  tal que  $a_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , onde

$$z_1 = \sup \{z ; (x, y, z) \in c_{p,1}^-\},$$

e seja  $a_2$  o ponto de  $\{z = 0\}$  que é a intersecção da reta perpendicular a  $\Pi_p^1$  que passa por  $a_1$  com  $\{z = 0\}$ . Considere agora o tronco de cilindro circular reto  $C_p^-$  de raio  $r = 1/k$  cujas bases são  $c_{p,1}^-$  e  $c_{p,2}^-$ , onde  $c_{p,2}^-$  é um círculo concêntrico a  $c_{p,1}^-$  e sobre o plano  $\Pi_p^2$  paralelo a  $\Pi_p^1$ , que dista

$$h_0 = \frac{2}{k \sinh x_0}$$

de  $\Pi_p^1$  e é tal que  $\pi_{p,2} \leq \pi_{p,1}$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $\pi_{p,2}$  e  $\pi_{p,1}$  são as funções lineares afins cujos gráficos são os planos  $\Pi_p^2$  e  $\Pi_p^1$  respectivamente. Por construção  $C_p^-$  é tal que:

a) o círculo  $c_{p,1}^-$  está contido em  $C(\overline{\Omega}_i)$ ;

b) a declividade de  $C_p^-$  é menor ou igual a  $1/\sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}$ , já que a declividade de  $C_p^-$  é igual a  $h/\sigma$  e por hipótese

$$\frac{h}{\sigma} < \frac{1}{\sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}};$$

c) o ponto  $a_2$  pertence a  $C_p^-$ , ou seja  $d(a_1, a_2) \leq 2/k \sinh x_0$ .

De fato, suponha que o ponto  $a_1$  dista  $h_p$  do plano  $z = 0$ . Note que  $h_p > 0$ . Temos  $h_p \leq h$  e isto decorre de (40). Seja  $d_p$  a distância entre  $a_2$  e o pé da perpendicular em  $\{z = 0\}$  tomada por  $a_1$ . Como o ângulo que as geratrizes de  $C_p^-$  fazem com o plano  $\{z = 0\}$  tem tangente  $h/\sigma$ , segue que a reta  $\overrightarrow{a_1 a_2}$  tem inclinação  $h/\sigma$  com o plano  $\{z = 0\}$ . Assim

$$\frac{h}{\sigma} = \frac{h_p}{d_p}$$

e, como  $h_p \leq h$ , resulta que  $d_p \leq \sigma$ . Pondo  $h_0$  a distância entre  $a_1$  e  $a_2$  temos

$$h_0 = \sqrt{h_p^2 + d_p^2} \leq \sqrt{h^2 + \sigma^2}.$$

Como por hipótese

$$\frac{h^2 + \sigma^2}{hR} \leq \frac{2}{\sinh x_0},$$

segue

$$h^2 + \sigma^2 \leq \frac{2hR}{\sinh x_0},$$

e portanto

$$\sqrt{h^2 + \sigma^2} \leq \frac{2hR}{\sqrt{h^2 + \sigma^2} \sinh x_0} = \frac{2}{k \sinh x_0},$$

donde  $a_2 \in C_p^-$ .

d) Segue imediato de c) e do fato que  $\varphi$  é não negativa que

$$\sup \{z; (x, y, z) \in c_{p,2}^- \cap C(\overline{\Omega})\} \leq \inf_{\partial\Omega} \varphi.$$

e) Por último, observamos que  $C_p^- \cap C(\partial\Omega) \subset \varphi^-$ . Para tal, note inicialmente que

$$C_p^- \cap C(\gamma_i) \subset (\varphi|_{\gamma_i})^-$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ , pois

$$M \leq \frac{h}{\sigma}.$$

(note que  $M \leq h/\sigma$  em virtude de  $c = \Pi \cap C(\gamma)$  estar contido em um dos semi-espacos fechados determinado por  $\{z = 0\}$ ). Vamos mostrar agora que  $C_p^- \cap C(\gamma) \subset (\varphi|_{\gamma})^-$ . Pelo que vimos no item c), o fato de  $h_p$  ser menor ou igual a  $h$  implica que  $d_p \leq \sigma$ . Observamos que o pé da perpendicular por  $a_1$  em  $\{z = 0\}$  está contida em  $\overline{\Omega}_i$  e, como  $d_p \leq \sigma$ , segue-se que  $a_2$  está contido no fecho da região limitada por  $\gamma$ . Raciocínio análogo nos diz que todo ponto de  $C_p^- \cap \{z = 0\}$  está contido no fecho da região limitada por  $\gamma$ , de modo que  $C_p^- \cap C(\gamma) \subset (\varphi|_{\gamma})^-$ .

De maneira análoga mostra-se que existe um tronco de cilindro  $C_p^+$  de raio  $1/k$  e declividade  $h/\sigma$  transversal a  $C(\gamma_i)$  em  $x_p$  e satisfazendo a) a e) como acima (condições respectivas - conforme Definição 6). Note que basta considerar o plano  $z = h$  no lugar do plano  $z = 0$  e proceder de modo completamente análogo ao exposto acima.

Seja agora  $p \in \gamma$ , e  $\eta_p$  o vetor unitário normal a  $T_p\gamma$ ,  $\langle \eta_p, e_3 \rangle = 0$  e que aponta para o interior de  $\Omega$ . Seja  $w_p$  um vetor ortogonal a  $T_p\gamma$ ,  $\langle w_p, e_3 \rangle > 0$ , tal que  $\langle w_p, \eta_p \rangle > 0$  e tal que, denotando por  $r_p$  a reta  $p + tw_p$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tenhamos  $r_p \cap \{z = h\} = \{b_2\}$  tal que  $|\rho(b_2) - p| = \sigma$ , onde  $\rho$  é a projeção ortogonal sobre  $\{z = 0\}$ . Note que tal reta existe já que  $T_p\gamma \subset \{z = 0\}$ .

Considere o plano  $\alpha_p$  determinado por  $T_p\gamma$  e por  $r_p$ . Note que tal plano tem declividade  $h/\sigma$ . Considere agora o plano  $\alpha_p^1$  perpendicular a  $\alpha_p$  e contendo  $T_p\gamma$  (e portanto, tal plano tem declividade  $\sigma/h$ , cuja reta normal  $N$  em  $p$  tem declividade  $h/\sigma$ ). Como  $\gamma$  satisfaz a condição do círculo exterior de raio  $0 < R_1 \leq \infty$ , considere o círculo  $C_R$  de raio  $R = \min \{R_1, R_2\}$  tangente a  $p$  e contido no fecho do exterior de  $\Omega_\gamma$ , onde  $\Omega_\gamma$  é a região limitada por  $\gamma$ . Temos então que existe um círculo  $c_{p,1}^+$  de raio  $1/k$  tangente a  $p$  e que é interior a elipse

$$\alpha_p^1 \cap C(c_R),$$

sendo esta elipse, por construção, congruente a elipse dada em (39). Considere agora o plano  $\alpha_p^2$  paralelo a  $\alpha_p^1$  e passando por  $b_2$  e  $c_{p,2}^+$  o círculo de raio  $1/k$ , concêntrico a  $c_{p,1}^+$  e contido em  $\alpha_p^2$ . Denotamos por  $C_p^+$  o tronco cilíndrico de bases  $c_{p,1}^+$  e  $c_{p,2}^+$ . Temos:

- a)  $c_{p,1}^+ \cap C(\Omega_\gamma) = \emptyset$  por construção;
- b)  $\inf \{z; (x, y, z) \in c_{p,2}^+ \cap C(\overline{\Omega})\} \geq \sup_{\partial\Omega} \varphi$  por construção;
- c)  $C_p^+ \cap C(\partial\Omega) \subset \varphi^+$  e isto decorre imediato do fato de  $|\rho(b_2) - p| = \sigma$ ;
- d) a declividade de  $C_p^+$  por construção é  $h/\sigma$ ;
- e) a altura  $h_0$  de  $C_p^+$  é menor ou igual a  $2/k \sinh x_0$ .

De fato, como  $b_2 \in \{z = h\}$  e  $|\rho(b_2) - p| = \sigma$ , segue que

$$h_0 = \sqrt{h^2 + \sigma^2},$$

e a afirmação segue agora diretamente da hipótese

$$\frac{h^2 + \sigma^2}{hR} \leq \frac{2}{\sinh x_0}.$$

Por outro lado, é evidente que para todo  $p \in \gamma$ , existem cilindros  $C_p^-$  de bases  $c_{p,1}^-$  e  $c_{p,2}^-$  de declividade  $h/\sigma$  e raio  $1/k$  que satisfazem a) a e) acima

(condições respectivas). Além disso, para todo  $t \in [0, 1]$ , como  $tM < M$ , segue que

$$\frac{h}{\sigma} < \frac{1}{\sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 M^2 + (1 + t^2 M^2) \sinh^2 x_0}}.$$

Assim, para

$$t\varphi|_{\gamma_i} = t\pi|_{\gamma_i}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{e} \quad t\varphi|_{\gamma} = 0,$$

procedendo de modo análogo ao acima exposto, segue que para todo  $p \in \partial\Omega$  e para todo  $t \in [0, 1]$ , existem troncos de cilindros circulares  $C_{p,t}^{\pm}$  de raio  $R = 1/k$  e declividade  $h/\sigma$  satisfazendo as condições de a) a e) como acima respectivamente. Portanto, os cilindros  $C_{p,t}^{\pm}$  como na Definição 6 têm raio  $1/k$ , declividade  $K = h/\sigma$  com

$$K < \frac{1}{\sqrt{M^2 + (1 + M^2) \sinh^2 x_0}}$$

cuja altura é menor ou igual a  $2/k \sinh x_0$  para todo  $p \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$ . Além disso,  $\Omega$  e  $\varphi$  são de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , já que  $\gamma$ ,  $\gamma_i$ , e  $\pi|_{\gamma}$ ,  $\pi|_{\gamma_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , o são. Segue agora do Teorema 4 que existe uma única solução  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ , ou seja,

$$u|_{\gamma} = 0,$$

e

$$u|_{\gamma_i} = \pi|_{\gamma_i}$$

$i = 1, \dots, k$ . ■

Se supormos a curva  $\gamma$  no teorema acima convexa, podemos em contrapartida retirar a exigência da regularidade das curvas  $\gamma$  e  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e obter um resultado na mesma direção. Neste caso, para a construção de

barreiras no entanto, não mais usamos a técnica do resultado acima, mas sim adotamos um procedimento similar àquele usado em [EsR].

**Teorema 19** *Sejam  $\gamma$  uma curva de Jordan convexa no plano  $z = 0$  e  $\Pi$  um plano transversal ao cilindro  $C = C(\gamma)$  e tal que a curva  $c = \Pi \cap C$  esteja contida em um dos semi-espacos fechados determinados por  $z = 0$ . Sejam  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  curvas fechadas no plano  $z = 0$  tais que cada curva  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , esteja contida no interior da região limitada por  $\gamma$  e satisfaça a condição do círculo interior com algum raio  $R_1 > 0$ . Suponha ainda que os conjuntos fechados limitados pelas curvas  $\gamma_i$  sejam dois a dois disjuntos. Denote por  $\Omega$  o domínio multiplamente conexo limitado por  $\gamma, \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\pi$  a função linear afim cujo gráfico é o plano  $\Pi$ , e por  $h$  o número real*

$$h = \sup \{ |\pi(p)| ; p \in \gamma \}.$$

*Pondo*

$$d = d(\cup_{i=1}^k \gamma_i, \gamma) = \inf \{ |p_1 - p_2| ; p_1 \in \cup_{i=1}^k \gamma_i \text{ e } p_2 \in \gamma \}, \quad (41)$$

*se  $h$  é tal que*

$$\cosh \frac{h}{R_1} \leq \frac{R_1 + d}{R_1} \quad (42)$$

*então existe  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  tal que*

$$u|_{\gamma} = \pi|_{\gamma} \text{ e } u|_{\gamma_i} = 0,$$

*$i = 1, \dots, k$ .*

**Prova.** Sem perda de generalidade supomos  $c \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z \geq 0\}$ .

Dado  $p \in \partial\Omega$ , provaremos a existência de sub e supersoluções generalizadas  $v_p, w_p \in C^0(\overline{\Omega})$  para o operador  $Q_0$  em  $\Omega$  tais que

$$0 \leq v_p(q) \leq w_p(q) \leq \pi(q)$$

para todo  $q \in \overline{\Omega}$ , com

$$0 = v_p(p) = w_p(p)$$

se  $p \in \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  e, se  $p \in \gamma$ ,

$$v_p(p) = w_p(p) = \pi(p).$$

Para um dado  $p \in \gamma$ , nós definimos uma subsolução  $v_p$  de  $Q_0$  em  $\Omega$  como segue: consideramos uma curva convexa  $\alpha$  contida em  $\Omega$  e que limita uma região que contém  $\cup_{i=1}^k \gamma_i$  (sempre possível já que  $\gamma$  é convexa). Consideremos agora a reta  $l_p \subset \Pi$  que é tangente a  $c$  em  $(p, \pi(p))$ . Como  $\gamma$  é convexa,  $c$  é também convexa e, portanto,  $l_p$  divide o plano  $\Pi$  em dois semiplanos fechados, um deles contendo  $c$ . Seja  $\Pi_p$  um plano contendo  $l_p$  e interceptando o plano  $z = 0$  em uma reta  $L_p$  tal que  $L_p \cap \alpha \neq \emptyset$  e tal que uma das componentes conexas fechadas de  $\{z = 0\} \setminus L_p$  contenha  $\alpha$  (sempre possível pois  $\alpha$  é convexa). Temos que  $\Pi_p$  é o gráfico de uma função linear  $u_p$  já que  $\alpha$  está contida no interior da região limitada por  $\gamma$ . Denotemos também por  $u_p$  sua restrição ao domínio  $\Omega$ . Defina

$$v_p := \max \{u_p, 0\}.$$

Então  $v_p$  é uma subsolução de  $Q_0$  em  $\Omega$  satisfazendo  $0 \leq v_p(q) \leq \pi(q)$  para todo  $q \in \overline{\Omega}$  e  $v_p(p) = \pi(p)$ . Caso  $p \in \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , nós definimos simplesmente  $v_p = 0$  em  $\overline{\Omega}$ .

Agora, para um dado  $p \in \gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , nós definimos uma supersolução  $w_p$  de  $Q_0$  em  $\Omega$  como segue: seja  $c_p$  o centro do círculo  $C_p$  de raio  $R_1$  contido no fecho da região limitada por  $\gamma_i$  no plano  $z = 0$  e tangente a  $\gamma_i$  em  $p$ . Nós observamos que o pedaço  $J_p$  do catenóide

$$J_p(x) = R_1 \cosh^{-1} \left[ \frac{|x - c_p|}{R_1} \right],$$

com

$$R_1 \leq |x - c_p| \leq R_1 \cosh \frac{h}{R_1},$$

tem como bordo dois círculos:  $C_p$  (quando  $|x - c_p| = R_1$ ) e  $C_{p,h}$  (quando  $|x - c_p| = R_1 \cosh h/R_1$ ), sendo que  $C_{p,h}$  está no plano  $z = h$  e, em vista da condição (42), está contido na região limitada por  $\gamma + he_3$ . Consequentemente, a curva

$$c' = J_p \cap \Pi$$

está contida na região do plano  $\Pi$  limitada por  $c$ . Seja  $\beta$  a projeção ortogonal de  $c'$  sobre  $z = 0$ . Nós definimos a supersolução  $w_p$  para o operador  $Q_0$  no domínio  $\Omega$  pondo

$$w_p(q) = \begin{cases} J_p(q) & \text{se } q \text{ está entre } \beta \text{ e } \gamma_i \\ \pi(q) & \text{caso contrário, } q \in \Omega \end{cases}.$$

Temos então  $0 \leq w_p(q) \leq \pi(q)$  para todo  $q \in \bar{\Omega}$  e  $w_p(p) = 0$ . No caso em que  $p \in \gamma$ , nós simplesmente definimos  $w_p = \pi|_{\bar{\Omega}}$ .

Segue agora do método de Perron, que a função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$u(p) := \sup \{s(p) ; s \text{ é subsolução de } Q_0, 0 \leq s \leq \pi\}$$

é de classe  $C^2$ , satisfaz a equação  $Q_0 u = 0$  em  $\Omega$  e, em vista das barreiras construídas em cada ponto  $p \in \partial\Omega$ ,  $u$  satisfaz as condições no bordo

$$u|_{\gamma} = \pi|_{\gamma} \quad \text{e} \quad u|_{\gamma_i} = 0$$

para todo  $i = 1, \dots, k$ . ■

## 5 Apêndice

Neste apêndice tratamos da demonstração do Teorema 2. Apresentamos as linhas gerais da demonstração, indicando os teoremas de [GT] diretamente envolvidos.

Em nosso trabalho basicamente trabalhamos com o Problema de Dirichlet (1) para a equação das superfícies mínimas em domínios suaves e limitados do plano e dados no bordo de classe  $C^{2,\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Para investigarmos a existência de soluções neste caso, empregamos o *método da continuidade*.

### 5.1 O método da continuidade

O método da continuidade aplicado ao problema (1) para o caso de domínios e dados no bordo de classe  $C^{2,\alpha}$ , pode ser expresso pelo Teorema 2. A seguir expomos os principais resultados que permitem concluir que, sob as hipóteses consideradas no referido teorema, o conjunto

$$V = \{t \in [0, 1] ; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ solução de } Q_0 = 0 \text{ em } \Omega \text{ com } u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

coincide com  $[0, 1]$ .

A idéia para mostrarmos que  $V = [0, 1]$  é a usual, ou seja, mostrarmos que  $V$  é não vazio, aberto e fechado em  $[0, 1]$ . Que  $V$  é diferente de vazio é imediato, já que  $t = 0 \in V$  ( $u_0 \equiv 0$ ). Temos que mostrar então que  $V$  é aberto e fechado.

#### 5.1.1 Resultados necessários

A abertura de  $V$ , como veremos, será uma consequência do Teorema da Função Implícita. Também veremos que a abertura de  $V$  é válida em qualquer situação, isto é, seja qual for o domínio  $\Omega$  de classe  $C^{2,\alpha}$  e seja qual

for o dado no bordo  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ . No que segue, consideremos  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  o conjunto das funções  $h \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $h|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Lema 20** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio de classe  $C^{2,\alpha}$ . Então o operador*

$$Q_0 : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

*dado por*

$$Q_0(u) = \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

*é de classe  $C^1$ . Além disso, dada  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , o linearizado*

$$L_u : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$$

*de  $Q_0$  em  $u$ , a saber,*

$$L_u(h) = d(Q_0)_u(h),$$

*é um homeomorfismo linear de  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  sobre  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ .*

**Prova.** A prova que  $Q_0$  é de classe  $C^1$  é feita diretamente a partir da definição de derivada. Vamos provar então que

$$L := L_u|_{C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

é um homeomorfismo linear. Inicialmente mostraremos que  $L$  é um operador fortemente elíptico.

Temos

$$L(h) = \frac{d}{ds} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla(u + sh)}{\sqrt{1 + |\nabla(u + sh)|^2}} \right)_{s=0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \{2h_x u_x u_{yy} + (1 + u_x^2) h_{yy} - 2h_x u_y u_{xy} - 2h_y u_x u_{xy} - 2h_{xy} u_x u_y + \\
&\quad + 2h_y u_y u_{xx} + (1 + u_y^2) h_{xx}\} (1 + |\nabla u|^2)^{-3/2} - 3\{(1 + u_x^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + \\
&\quad + (1 + u_y^2) u_{xx}\} (1 + |\nabla u|^2)^{-3/2} (u_x h_x + u_y h_y) (1 + |\nabla u|^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Como

$$\{(1 + u_x^2) u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2) u_{xx}\} (1 + |\nabla u|^2)^{-3/2} = Q_0(u) = 0,$$

segue que

$$\begin{aligned}
L(h) &= \\
&= \{2h_x u_x u_{yy} + (1 + u_x^2) h_{yy} - 2h_x u_y u_{xy} - 2h_y u_x u_{xy} - 2h_{xy} u_x u_y + \\
&\quad + 2h_y u_y u_{xx} + (1 + u_y^2) h_{xx}\} (1 + |\nabla u|^2)^{-3/2},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
L(h) &= \\
&= \frac{(1 + u_y^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{xx} - \frac{2u_x u_y}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{xy} + \frac{(1 + u_x^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{yy} + \\
&\quad + \frac{2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_x + \frac{2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_y. \tag{43}
\end{aligned}$$

Decorre de (43) que a matriz dos coeficientes principais de  $L$  é dada por

$$[a_{ij}] = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} 1 + u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1 + u_x^2 \end{bmatrix}.$$

Notemos então que  $\det(A - \lambda I) = 0$  se, e somente se

$$\lambda^2 - \frac{(2 + |\nabla u|^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \lambda - \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^2} = 0,$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}}$$

são os autovalores mínimo e máximo de  $[a_{ij}]$  respectivamente. Como  $\Omega$  é limitado e  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$c = \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla u|.$$

Pondo  $\delta = 1/(1 + c^2)^{3/2}$ , temos que  $0 < \delta \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$ , donde podemos concluir que  $L$  é fortemente elíptico.

i)  $L$  é contínua.

Da desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |L(h)|_{\alpha;\bar{\Omega}} &= \left| \frac{(1 + u_y^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{xx} \right|_{\alpha;\bar{\Omega}} + \left| \frac{2u_x u_y}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{xy} \right|_{\alpha;\bar{\Omega}} + \\ &+ \left| \frac{(1 + u_x^2)}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_{yy} \right|_{\alpha;\bar{\Omega}} + \left| \frac{2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_x \right|_{\alpha;\bar{\Omega}} + \\ &+ \left| \frac{2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} h_y \right|_{\alpha;\bar{\Omega}}. \end{aligned}$$

Como  $\bar{\Omega}$  é compacto e  $u_x, u_y$  são contínuas, existem constantes  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , tal que

$$\begin{aligned} c_1 &= \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{1 + u_y^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right|, \quad c_2 = \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{2u_x u_y}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right|, \\ c_3 &= \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{1 + u_x^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right|, \quad c_4 = \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{2(u_x u_{yy} - u_y u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right| \\ & \quad c_5 = \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right| \end{aligned}$$

e

$$c_5 = \sup_{\bar{\Omega}} \left| \frac{2(u_y u_{xx} - u_x u_{xy})}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} \right|.$$

Logo

$$|L(h)|_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq c_1 |h_{xx}|_{\alpha; \bar{\Omega}} + c_2 |h_{xy}|_{\alpha; \bar{\Omega}} + c_3 |h_{yy}|_{\alpha; \bar{\Omega}} + c_4 |h_x|_{\alpha; \bar{\Omega}} + c_5 |h_y|_{\alpha; \bar{\Omega}}.$$

Da definição de norma  $C^{2,\alpha}$  e  $C^\alpha$  obtemos

$$|h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}} \leq \sup_{\bar{\Omega}} |h| + \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla h| + \sup_{\bar{\Omega}} |D^2 h| + [D^2 h]_{\alpha; \bar{\Omega}}$$

e

$$|h_{xx}|_{\alpha; \bar{\Omega}} = |h_{xx}|_{0,\alpha; \bar{\Omega}} = \sup_{\bar{\Omega}} |h_{xx}| + [h_{xx}]_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}}.$$

Analogamente, vemos que  $|h_{xy}|_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}}$  e  $|h_{yy}|_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}}$ . Afirmamos que  $|h_x|_{\alpha; \bar{\Omega}}, |h_y|_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}}$ . De fato, como  $L$  é fortemente elíptico, podemos aplicar o Lema 6.35 de [GT]. Tomando no referido lema  $j = 0, \beta = \alpha$  e  $k = 1$ , temos  $j + \beta < k + \alpha$ . Como  $\Omega$  é de classe  $C^{2,\alpha}$  e  $h \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , temos  $h_x$  e  $h_y$  em  $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Então, do referido lema, segue que para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C = C(\epsilon, j, k, \Omega) = C(\epsilon, 0, 1, \Omega)$  tal que

$$|h_x|_{0,\alpha; \bar{\Omega}} \leq C |h_x|_{0; \bar{\Omega}} + \epsilon |h_x|_{1,\alpha; \bar{\Omega}}.$$

Como

$$|h_x|_{0; \bar{\Omega}} = \sup_{\bar{\Omega}} |h_x| \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}}$$

e

$$|h_x|_{1,\alpha; \bar{\Omega}} = \sup_{\bar{\Omega}} |h_x| + \sup_{\bar{\Omega}} |\nabla h_x| + [Dh_x]_{\alpha; \bar{\Omega}} \leq |h|_{2,\alpha; \bar{\Omega}},$$

segue que  $|h_x|_{0,\alpha;\bar{\Omega}} \leq (C + \epsilon) |h|_{2,\alpha;\bar{\Omega}}$ . Analogamente,

$$|h_y|_{0,\alpha;\bar{\Omega}} \leq (C' + \epsilon') |h|_{2,\alpha;\bar{\Omega}},$$

concluindo a afirmação. Portanto, existe  $\tilde{C} = \tilde{C}(\epsilon, \epsilon', 0, 1, |u|_{2,\alpha;\bar{\Omega}})$  tal que

$$|L(h)|_{\alpha;\bar{\Omega}} \leq \tilde{C} |h|_{2,\alpha;\bar{\Omega}},$$

donde concluimos que  $L$  é contínua.

ii)  $L$  é injetora.

Lembramos que a forma geral de um operador linear elíptico é

$$\tilde{L}(u) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^2 b_i D_i u + cu. \quad (44)$$

De (43) vemos que  $L$  é um operador linear elíptico em  $\Omega$  com  $c = 0$ . Dados  $h_1$  e  $h_2$  pertencentes a  $C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , temos que se  $L(h_1) = L(h_2)$  então  $L(h_1 - h_2) = 0$ . Como  $(h_1 - h_2)|_{\partial\Omega} = 0$ , pelo Teorema 3.3 de [GT] temos que  $h_1 = h_2$  em  $\Omega$ , donde concluimos que  $L$  é injetora.

iii)  $L$  é sobrejetora.

Como  $L$  é estritamente elíptico (já que é fortemente elíptico) em  $\Omega$ , com  $c = 0$  e os coeficientes de  $L$  pertencem a  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ , pelo Teorema 6.14 de [GT] concluimos que dada  $g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , existe um único  $h \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $L(h) = g$ , donde  $L$  é sobrejetora.

iv)  $L^{-1}$  é contínua.

Sejam  $g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $h \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $L(h) = g$ . Como  $L$  é elíptico e  $c = 0$ , aplicando o Teorema 3.7 de [GT], obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |h| &\leq \sup_{\partial\Omega} |h| + c \sup_{\Omega} \frac{|g|}{\delta_0} \leq \\ &\leq \sup_{\Omega} |h| + \frac{c}{\delta_0} |g|_{0;\Omega}, \end{aligned}$$

onde  $c = c(\Omega, \beta)$ , sendo  $\beta = \frac{1}{\delta} \sup |b_i|$ ,  $b_i$  com o mesmo sentido que em (44).

Logo, como  $h|_{\partial\Omega} = 0$ , segue que

$$|h|_{0;\bar{\Omega}} \leq c |g|_{\alpha;\bar{\Omega}}. \quad (45)$$

Como  $g \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $L$  é estritamente elíptico, pelo Teorema 6.6 de [GT], temos

$$|h|_{2,\alpha;\bar{\Omega}} \leq c' \left( |h|_{0;\bar{\Omega}} + |g|_{\alpha;\bar{\Omega}} \right), \quad (46)$$

onde  $c' = c'(\alpha, \Omega, k_1, k_2)$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes positivas. Substituindo (45) em (46), obtemos

$$|h|_{2,\alpha;\bar{\Omega}} \leq C |g|_{\alpha;\bar{\Omega}},$$

onde  $C = C(\alpha, \beta, k_1, k_2, \Omega)$ . Logo  $L^{-1}$  é contínua.

Concluimos então que  $L$  é um homeomorfismo linear. ■

Decorre do lema anterior e do teorema das funções implícitas, o seguinte resultado:

**Teorema 21** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitado e de classe  $C^{2,\alpha}$ , e seja  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Suponha que exista  $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  tal que  $u_{t_0}|_{\partial\Omega} = t_0\varphi|_{\partial\Omega}$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$ , existe  $u_t \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  tal que  $Q_0(u_t) = 0$  com  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi|_{\partial\Omega}$ .*

**Prova.** Seja

$$T : \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}),$$

dada por  $T(t, w) = Q_0(w + t\varphi)$ . Se  $w_{t_0} = u_{t_0} - t_0\varphi$  então  $w_{t_0} \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  e

$$T(t_0, w_{t_0}) = Q_0(u_{t_0}) = 0.$$

Pelo Lema 20,  $T$  é de classe  $C^1$  e

$$\begin{aligned} D_2T(t_0, w_{t_0})(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t_0, w_{t_0} + th) - T(t_0, w_{t_0})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q_0(w_{t_0} + \varphi_{t_0} + th) - Q_0(w_{t_0} + \varphi_{t_0})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q_0(u_{t_0} + th) - Q_0(u_{t_0})}{t} = d(Q_0)_{u_{t_0}}(h), \end{aligned}$$

é um homeomorfismo linear.

A prova agora é consequência imediata do Teorema da Função Implícita.

■

Com o teorema acima podemos imediatamente concluir que  $V$  é aberto.

Vamos tratar agora do fechamento de  $V$ . Começamos com o seguinte resultado:

**Lema 22** *Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado e de classe  $C^{2,\alpha}$ , seja*

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

*solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$ , com  $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$  e tal que*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| < \infty,$$

*sendo  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Então  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .*

A prova deste Lema, com todos os detalhes, está feita em [EsFR].

Um outro resultado geral que necessitamos é o que segue:

**Teorema 23** *Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio limitado de classe  $C^{2,\alpha}$  e*

*$\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Seja  $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ ,  $t_n \rightarrow t_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , tal que para cada  $n$  existe  $u_{t_n} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u_{t_n}|_{\partial\Omega} = t_n\varphi|_{\partial\Omega}$ . Se  $\sup_{\Omega} |\nabla u_{t_n}| \leq M_1$  então  $\{u_{t_n}\}$  contém uma subsequência convergindo uniformemente a  $u_{t_0} \in C^2(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u_{t_0}|_{\partial\Omega} = t_0\varphi|_{\partial\Omega}$  e  $\sup_{\Omega} |\nabla u_{t_0}| \leq M_1$ .*

**Prova.** Defina, para cada  $n$ ,

$$L_n(h) := (1 + (u_{t_n})_x^2) h_{yy} - 2 (u_{t_n})_x (u_{t_n})_y h_{xy} + (1 + (u_{t_n})_y^2) h_{xx}.$$

Temos  $L_n$  um operador fortemente elíptico. Com efeito, a matriz

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + (u_{t_n})_x^2 & - (u_{t_n})_x (u_{t_n})_y \\ - (u_{t_n})_x (u_{t_n})_y & 1 + (u_{t_n})_y^2 \end{bmatrix},$$

possui autovalores  $\lambda_{n,1} = 1$  e  $\lambda_{n,2} = 1 + |\nabla u_{t_n}|^2$ . Como por hipótese  $\sup_{\Omega} |\nabla u_{t_n}| \leq M_1$ , tomando  $\Delta_0 = 1 + M_1^2$ , temos que para todo  $n$ ,

$$0 < 1 = \lambda_{n,1} \leq \lambda_{n,2} \leq \Delta_0.$$

Como estamos nas hipóteses do Teorema 12.4 de [GT] (estimativas de Hölder para o gradiente), decorre do referido teorema que existem  $\beta = \beta(\Omega, 1, M_1) \in (0, 1]$  e  $M_2 = M_2(\Omega, 1, M_1) \in \mathbb{R}$ , tal que  $|u_{t_n}|_{1,\beta;\Omega} \leq M_2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, pondo  $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ , vem que  $|u_{t_n}|_{1,\gamma;\Omega} \leq M_3$  para uma certa  $M_3 \in \mathbb{R}$ . Pelo Teorema 6.6 de [GT], segue-se que existe  $C = C(\Omega, 1, M_1, \gamma)$  tal que

$$|u_{t_n}|_{2,\gamma;\Omega} \leq C \left( \sup_{\Omega} |u_{t_n}| + |t_n \varphi|_{2,\gamma;\Omega} + M_3 \right).$$

Como  $\{t_n\}$  é limitada, existe  $M_4^1 \in \mathbb{R}$  tal que  $|t_n| \leq M_4^1$  para todo  $n$ . Como  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , existe  $M_4^2$  tal  $|\varphi|_{2,\gamma;\Omega} \leq M_4^2$ . Logo

$$|t_n \varphi|_{2,\gamma;\Omega} = |t_n| |\varphi|_{2,\gamma;\Omega} \leq M_4^1 M_4^2 := M_4.$$

Assim,  $M_4$  independe de  $t$ . Pela desigualdade do valor médio, dado  $p_0 \in \partial\Omega$ , para todo  $p \in \overline{\Omega}$ ,

$$|u_{t_n}(p) - u_{t_n}(p_0)| \leq \sup_{\Omega} |\nabla u_{t_n}| |p - p_0| \leq M_1 d,$$

onde  $d = \sup \{|p - q|; p, q \in \overline{\Omega}\}$ . Assim,  $|u_{t_n}(p)| \leq M_1 d + |u_{t_n}(p_0)|$ , donde

$$\sup_{\Omega} |u_{t_n}| \leq M_1 d + \sup_{\partial\Omega} \varphi = M_5.$$

Logo

$$|u_{t_n}|_{2,\gamma;\Omega} \leq C(M_3 + M_4 + M_5).$$

Por Arzelá-Ascoli,  $\{u_{t_n}\}$  possui subsequência  $\{u_{n_k}\}$  convergindo uniformemente na norma  $C^2$  para  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Como  $Q_0$  é contínuo, temos  $Q_0(u) = 0$  em  $\Omega$  com  $u|_{\partial\Omega} = t_0\varphi|_{\partial\Omega}$  e  $\sup_{\overline{\Omega}} |\nabla u| \leq M_1$ . ■

**Teorema 24** *Seja  $\Omega$  um domínio de classe  $C^{2,\alpha}$  e limitado e seja  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ . Suponha que exista  $G$  tal que se  $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  é uma solução de  $Q_0 = 0$  com  $u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi$  então  $|\nabla u_t| \leq G$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . Então*

$$V = \{t \in [0, 1]; \exists u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ solução de } Q_0 = 0 \text{ em } \Omega, \text{ com } u_t|_{\partial\Omega} = t\varphi\}$$

*é fechado.*

**Prova.** Seja  $\{t_n\} \subset V$ , tal que  $t_n \rightarrow t_0 \in [0, 1]$ . Então, para cada  $n$ , existe  $u_{t_n} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  tal que  $Q_0(u_{t_n}) = 0$  e  $u_{t_n}|_{\partial\Omega} = t_n\varphi$ . Seja  $\Psi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  uma extensão de  $\varphi$  a  $\overline{\Omega}$ . Então  $\Psi|_{\partial\Omega} = \varphi$ . Pelo Teorema 23,  $\{u_{t_n}\}$  contém uma subsequência convergindo uniformemente a  $u_{t_0} \in C^2(\overline{\Omega})$  solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  com  $u_{t_0}|_{\partial\Omega} = t_0\Psi|_{\partial\Omega} = t_0\varphi$  e  $\sup_{\Omega} |\nabla u_{t_0}| \leq M_1$ . Pelo Lema 22 temos que  $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , o que nos garante que  $t_0 \in V$ , provando o Teorema. ■

Observamos ainda que operador quase linear elíptico  $Q_0$  satisfaz o princípio do máximo para o gradiente. Precisamente:

**Teorema 25** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio e seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  uma solução de  $Q_0 = 0$ . Então*

$$\sup_{\Omega} |\nabla u| = \sup_{\partial\Omega} |\nabla u|.$$

A demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [GT], seção 15.1 e 15.2, sendo que lá estão resultados que se aplicam a uma ampla classe de operadores quase lineares elípticos além do operador  $Q_0$ .

Juntando todos os resultados acima temos o Teorema 2.

## 5.2 Estimativas globais do gradiente a partir de estimativas no bordo

Com o Teorema 25 acima, podemos reduzir estimativas globais do gradiente a estimativas no bordo. Todavia ainda se faz necessário obter estimativas *a priori* do gradiente de uma solução no bordo. A técnica usada para tal, fundamenta-se no *princípio do máximo para a diferença de duas soluções* que é satisfeito pelo operador  $Q_0$ .

**Teorema 26** *Sejam  $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  duas soluções de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  e suponha que  $u|_{\partial\Omega} \geq v|_{\partial\Omega}$ . Então  $u \geq v$  em  $\Omega$ .*

Note que é imediato do teorema acima a unicidade do problema (1).

### 5.2.1 Sub e supersoluções generalizadas

Observamos que se quisermos estimar o gradiente no bordo de uma solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  que coincide em  $\partial\Omega$  com  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ , então dado  $p \in \partial\Omega$ , é suficiente encontrar funções  $\Psi_p^-$  e  $\Psi_p^+$  pertencentes a  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  tal que:

- a)  $\Psi_p^- \leq \varphi \leq \Psi_p^+$ , com  $\Psi_p^-(p) = \varphi(p) = \Psi_p^+(p)$ ;
- b) existem soluções  $u_p^-, u_p^+ \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  de  $Q_0 = 0$  em  $\Omega$  tal que  $u_p^-|_{\partial\Omega} = \Psi_p^-$  e  $u_p^+|_{\partial\Omega} = \Psi_p^+$ ;

c) existe  $M \geq 0$  tal que

$$\sup_{\partial\Omega} \max \{ |\nabla u_p^-(p)|, |\nabla u_p^+(p)| \} \leq M.$$

Porém, de qualquer maneira temos que saber resolver o Problema de Dirichlet (1) para  $\Psi_p^\pm$ , embora agora tenhamos grande liberdade na escolha das  $\Psi_p^\pm$ . Este problema pode ser grandemente facilitado utilizando-se a noção de barreira generalizada, ou de sub e supersolução generalizada.

**Definição 27** Dizemos que uma função  $s \in C^0(\bar{\Omega})$  é uma subsolução generalizada para o operador quase linear elíptico  $Q_0$  em  $\Omega$  se, dado  $p \in \bar{\Omega}$  e dado um domínio suave  $\Lambda \subset \Omega$  com  $p \in \bar{\Lambda}$ , se  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Lambda})$  é uma solução de  $Q_0 = 0$  em  $\Lambda$  e se  $u|_{\partial\Lambda} = s|_{\partial\Lambda}$  então  $u \geq s$  em  $\Lambda$ .

Para definir supersolução generalizada basta trocar  $\geq$  por  $\leq$  na definição acima.

Assim, por exemplo, para obter estimativas do gradiente de soluções do problema (1) no bordo, podemos usar barreiras generalizadas no lugar de barreiras, desde que exijamos que no ponto  $p \in \partial\Omega$ , ou seja, no ponto onde queremos estimar o gradiente da solução, as sub e supersoluções generalizadas sejam deriváveis.

### 5.3 O princípio da tangência

O próximo teorema é conhecido como *princípio da tangência*.

**Teorema 28** Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies de curvatura média constante do  $\mathbb{R}^3$  e seja  $p \in S_1 \cap S_2$  um ponto de tangência entre  $S_1$  e  $S_2$  ( $T_p S_1 = T_p S_2$ ). Sejam  $N_1, N_2$  campos unitários e normais a  $S_1$  e  $S_2$  e tais que  $N_1(p) = N_2(p)$ . Suponha que  $S_1$  e  $S_2$  tenham curvaturas médias  $H_1$  e  $H_2$ , respectivamente,

com relação aos campos  $N_1$  e  $N_2$ . Suponha que  $S_2$  esteja acima de  $S_1$  em uma vizinhança de  $p$  com relação ao vetor normal  $N_1(p)$ . Então  $H_2 \geq H_1$  e vale a igualdade se e somente se  $S_1$  e  $S_2$  coincidem em uma vizinhança de  $p$ . Se  $S_1$  e  $S_2$  são completas (ou “completas até o bordo” e com o mesmo bordo), conexas, e  $H_1 = H_2$ , então  $S_1 = S_2$ .

### O exemplo do tetraedro

O exemplo fornecido por Radó em [RD2], conforme comentado na introdução, pode ser expresso como segue:

Considere um tetraedro regular de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , cujo triângulo  $ABD$  está contido no plano  $z = 0$ . Tome a curva contínua  $\Gamma$  dada pela seguinte união de arestas do tetraedro:

$$\Gamma := AB \cup BC \cup CD \cup DA.$$

Seja  $C'$  a projeção ortogonal do ponto  $C$  sobre o plano  $z = 0$ . Então a curva

$$\gamma := AB \cup BC' \cup C'D \cup DA$$

é a projeção ortogonal (injetiva) de  $\Gamma$  sobre o plano  $z = 0$ . Denotando por  $\Omega$  o aberto do plano limitado por  $\gamma$  e por  $\varphi$  a função contínua definida sobre  $\gamma$  e cujo gráfico é  $\Gamma$ , Radó mostrou como uma aplicação do seu teorema de unicidade (ou seja, se  $u$  e  $v$  são soluções de (1) as quais coincidem com  $\varphi$  em  $\partial\Omega$ , então  $u \equiv v$  em  $\Omega$ ), que o problema (1) não tem solução para tal  $\Omega$  e dado no bordo  $\varphi$ .

## Referências

- [BC] Barbosa, J. L. and do Carmo, M. P.: *On the size of a stable minimal surface in  $\mathbb{R}^3$* , American Journal of Mathematics **98**(2) (1976), 515-528.
- [CK] Collin, P. and Krust, R.: *Le problème de Dirichlet pour l'équation des surfaces minimales sur de domaines non bornés*, Bull. Soc. Math. de France **119** (1991), 443-462.
- [ER] Earp, R. S. and Rosenberg, H.: *The Dirichlet problem for the minimal surface equation on unbounded planar domains*, Journal de Math. Pures et Appl. **68** (1989), 163-183.
- [ET] Earp, R. S. and Toubiana, E.: *Some applications of maximum principle to hypersurface theory in euclidian and hyperbolic space*, preprint.
- [EsR] Espírito-Santo, N. and Ripoll, J. B.: *Some existence and non existence theorems for compact graphs of constant mean curvature with boundary in parallel planes*, Journal of Geometric Analysis **11** (4) (2001), 601-617.
- [EsFR] Espírito-Santo, N. Frensel, K. and Ripoll, J. B.: *Some existence and characterization results for the Dirichlet Problem for the constant mean curvature surface equation on unbounded domains*, preprint
- [FI] Finn, R.: *Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of prescribed mean curvature*, J. d'Analy. Math. **14** (1965), 139-160.
- [FR] Fusieger, P. and Ripoll, J. B.: *Radial graphs of constant mean curvature and doubly connected minimal surfaces with prescribed boundary*, Ann. of Global Analysis and Geometry **23** (2003), 373-400.

- [GT] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, reimpressão da 2<sup>a</sup> ed., Springer-Verlag, New York, 2001.
- [HA] Hartman, P.: *On the bounded slope condition*, Pacific Journal of Mathematics **18**(3) (1966), 495-511.
- [JS1] Jenkin, H and Serrin, J.: *Variational problems of minimal surface type, II. Boundary value problems for the minimal surfaces equation*, Arch. Rational Mech. Analysis **21** (1963), 321-342.
- [JS2] Jenkin, H and Serrin, J.: *Variational problems of minimal surface type, III. The Dirichlet problem with infinite data*, Arch. Rational Mech. Analysis **29** (1968), 304-322.
- [KT1] Kutev, N. and Tomi, F.: *Nonexistence and instability in the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation in the plane*, Pacific Journal of Math. **170** (2) (1995), 535-542.
- [KT2] Kutev, N and Tomi, F.: *Existence and nonexistence in the exterior Dirichlet problem for the minimal surface equation in the plane*, Journal of Diff. and Int. Equation **11** (6) (1998) 917-928.
- [NI1] Nitsche, J. C. C.: *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 195-270.
- [NI2] Nitsche, J. C. C.: *Lectures on Minimal Surfaces*, vol. I, Cambridge University Press, 1989.
- [RD1] Radó, T.: *The problem of least area and the problem of Plateau*, Math. Z. **32** (1930), 763-796.

- [RD2] Radó, T.: *Contributions to the theory of minimal surfaces*, Acta Litt. Sci. Univ. Szeged **6** (1932), 1-20.
- [RI1] Ripoll, J. B.: *Some characterization, uniqueness and existence results for Euclidean graphs of constants mean curvature with planar boundary*, Pacific J. Math. **198** (1) (2001), 175-196.
- [RI2] Ripoll, J. B.: *Some existence results and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains*, Journal of Differential Equations **181** (2002), 230-241.
- [RI3] Ripoll, J. B.: *Um guia para resolver EDP's elípticas de segunda ordem em dimensão dois*, preprint.
- [RT] Ripoll, J. B. and Tomi, F.: *Some existence theorems for minimal graphs over nonconvex planar domains*, preprint.