

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**SUB-AÇÃO PARA TRANSFORMAÇÕES  
UNIDIMENSIONAIS**

por

**FLÁVIA MALTA BRANCO**

Porto Alegre, dezembro de 2003.

Tese submetida por Flávia Malta Branco\* como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:

Prof. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:

Prof. Jaime Bruck Ripoll

Prof. Luiz Fernando Carvalho da Rocha

Prof. Jorge Joaquim Delgado Gomes

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro

Data da Defesa: 18 de dezembro de 2003.

---

\*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior  
- CAPES.

*“Se as coisas são inatingíveis . . . Ora!*

*Não é motivo para não querê-las . . .*

*Que tristes os caminhos, se não fora*

*A presença distante das estrelas.”*

Mário Quintana

*Aos meus avós*  
*Ademar e Olga (in memoriam),*  
*Horácio e Dília.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Dilson e Zair, pelo amor, pelo apoio e principalmente por seus exemplos de vida. Ao Rogério, a Gislene, ao Dilsinho, a tia Zadir e a Carolina por nunca me deixarem desanimar, pela preocupação constante comigo e com o meu trabalho e sobretudo pelo amor incondicional. E ao Guilherme por ter colocado muito mais alegria nas nossas vidas.

Agradeço ao Alexandre pelo amor, pela convivência, por compreender as minhas ausências, pelo apoio incondicional e principalmente por estar ao meu lado compartilhando os momentos de alegria e de angústia. Sem a tua presença teria sido muito mais difícil.

Ao meu orientador, Artur Lopes, pelo apoio, pela disponibilidade, pelo exemplo como profissional e por sempre acreditar em mim, algumas vezes até mais que eu mesma.

Aos amigos Lisandra, Giovanni, Simone, Bárbara e Graciela pelos momentos de alegria, pela amizade e pela torcida.

A Virgínia, ao Cleber e a todos os colegas da pós-graduação pela convivência sempre agradável, pela amizade e pelas boas conversas durante os cafés!

E a Rosane, secretária da pós, pela atenção e amizade durante esses anos.

# Resumo

Consideramos um potencial  $A$   $\alpha$ -Hölder e uma função  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $C^2$  e de grau 2 tal que a origem é um ponto crítico ( $f'(0) = 0$ ) e  $f$  é uniformemente expansiva a menos de um intervalo  $[0, a + \varepsilon)$ . Neste trabalho mostramos que, para um potencial genérico  $A$ , a medida invariante para  $f$  que maximiza a ação dada por

$$\int A d\mu$$

é única e unicamente ergódica no seu suporte.

Estimamos também o comportamento assintótico de integrais que dependem de um parâmetro  $\xi \in \mathbb{R}$  determinando cotas superiores para o limite

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\xi \Psi(x)} d\mu_\xi(x),$$

onde  $\mu_\xi$  é o estado de equilíbrio para o potencial  $\xi A$  e as funções  $A$  e  $\Psi$  são  $\alpha$ -Hölder.

# Abstract

We consider an  $\alpha$ -Hölder potential  $A$  and a  $C^2$  function  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  of degree 2 such that the origin is a critical point ( $f'(0) = 0$ ) and  $f$  is uniformly expansive except for the interval  $[0, a + \varepsilon)$ . In this work we show that, for a generic potential  $A$ , the  $f$ -invariant measure that maximizes the action given by

$$\int Ad\mu$$

is unique and uniquely ergodic on its support.

We also estimate the asymptotic behavior of some integrals depending on a parameter  $\xi \in \mathbb{R}$  giving upper bounds for the limit

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi(x),$$

where  $\mu_\xi$  is the equilibrium state for the potential  $\xi A$ , with  $A$  and  $\Psi$  being  $\alpha$ -Hölder functions.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1</b> $f$ COM PONTO CRÍTICO NA ORIGEM	<b>4</b>
1.1 INTRODUÇÃO . . . . .	4
1.2 AS FUNÇÕES $f$ . . . . .	5
1.3 POTENCIAL $A(x) = \log f'(x) $ . . . . .	7
1.4 POTENCIAL $A$ $\alpha$ -HÖLDER . . . . .	17
<b>2</b> APLICAÇÕES PARA A FUNÇÃO SUB-AÇÃO	<b>32</b>
2.1 INTRODUÇÃO . . . . .	32
2.2 DEFININDO SUB-AÇÕES . . . . .	32
2.3 ESTIMANDO COMPORTAMENTOS ASSINTÓTICOS . . . . .	36
<b>Referências</b>	<b>42</b>



# Introdução

A ação clássica surgiu na mecânica e é definida como a função que a cada curva diferenciável  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  associa a integral

$$S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \gamma', t) dt$$

onde  $M$  é uma variedade e  $L: TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota um lagrangiano. As curvas  $\gamma$  que minimizam a ação têm um interesse especial porque são aquelas que satisfazem a equação de Euler-Lagrange. Esta equação pode ser vista como a generalização da Lei de Newton, pois para o lagrangiano  $L = \frac{m}{2}v^2 - U(x)$  esta equação recai em  $F = m a$ .

Mather definiu uma nova forma para uma ação tomando-a não mais sobre curvas diferenciáveis mas sobre medidas invariantes para o fluxo lagrangiano:

$$S(\mu) = \int_{TM \times \mathbb{S}^1} L d\mu.$$

Usando esta definição Mañé mostrou em [Ma2] que, genericamente nos lagrangianos, a medida que minimiza a ação é única e unicamente ergódica.

Partindo desta definição é natural pensar em uma ação não mais a tempo contínuo mas a tempo discreto. Para tanto fixamos uma função  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que nos dá a dinâmica e tomamos  $\mu$  variando no conjunto das medidas invariantes para  $f$ . Dessa forma a ação é definida por

$$S(\mu) = \int A d\mu$$

onde o potencial  $A$  toma valores reais:  $A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Considerando-se  $f$  uma função expansiva de grau  $d$  e  $A$  um potencial  $\alpha$ -Hölder, Contreras, Lopes e Thieullen provaram em [CLT] a versão discreta do teorema de Mañé, respondendo também a uma questão levantada por ele sobre o suporte dessas medidas. Este resultado assegura que para um potencial  $A$  genérico a medida que maximiza a ação é única e tem suporte em órbitas periódicas. A principal ferramenta usada na prova deste resultado é a existência de uma função sub-ação para o potencial  $A$  e para a função  $f$ .

Lopes e Thieullen mostram em [LT] a existência de sub-ações para os difeomorfismos de Anosov e com isto também mostram que para um potencial

A  $\alpha$ -Hölder genérico e  $f$  um difeomorfismo de Anosov transitivo e de classe  $C^2$  a medida maximizante é única e tem suporte em uma órbita periódica. Eles também provam, em [LT2], a existência de uma sub-ação para o fluxo de Anosov e para um potencial Hölder.

Já em [LT3] eles mostram uma relação interessante entre medidas de Mather para o fluxo geodésico em superfícies de curvatura constante negativa e medidas minimizantes para a ação da forma definida acima. A aplicação unidimensional  $f$  age no bordo do disco de Poincaré.

Estes trabalhos mostram que nos casos hiperbólicos é possível provar resultados sobre a existência de sub-ações e sobre a unicidade da medida que maximiza a ação. Uma pergunta natural é se esses resultados continuam valendo se a função  $f$  que define a dinâmica deixa de ser expansiva (hiperbólica).

Neste trabalho abordamos, no primeiro capítulo, o caso em que a dinâmica é dada por uma função  $f$  com um ponto crítico na origem. Inicialmente consideramos  $A$  sendo o potencial  $A(x) = \log |f'(x)|$ , que é importante porque a ação tomada sobre ele nos dá o expoente de Lyapunov de  $f$ , e mostramos a existência de uma sub-ação Lipschitz. Depois tomamos  $A$  um potencial na classe dos  $\alpha$ -Hölder. Mostramos que existe uma função sub-ação para  $f$  e  $A$  e que esta função também é  $\alpha$ -Hölder. Com este resultado provamos que genericamente em  $A$  a medida maximizante é única e unicamente ergódica. Destacamos que a sub-ação está definida em todo o intervalo de definição de  $f$ . Isto é útil para análise de resultados sobre grandes desvios.

No segundo capítulo mostramos uma aplicação para as sub-ações, utilizando-as para estimar o valor assintótico de integrais que dependem de um parâmetro  $\xi$  que tende ao infinito determinando cotas superiores para o limite

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\xi \Psi(x)} d\mu_\xi(x),$$

onde  $\mu_\xi$  é o estado de equilíbrio para o potencial  $\xi A$  e as funções  $A$  e  $\Psi$  são  $\alpha$ -Hölder.

# 1

## $f$ COM PONTO CRÍTICO NA ORIGEM

### 1.1 INTRODUÇÃO

Nesta parte do trabalho vamos estar considerando o espaço  $\mathcal{F}$  de funções  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  que são de grau 2, de classe  $C^2$  quando restritas a cada ramo injetivo, têm  $x = 0$  como ponto crítico e que são uniformemente expansivas a menos de um intervalo  $[0, a + \varepsilon)$  contido no primeiro ramo injetivo de  $f$ . Na seção 1.2 vamos detalhar melhor esta classe de funções, explorando suas propriedades e vendo exemplos.

Em um primeiro momento vamos fixar uma função  $f \in \mathcal{F}$  e o potencial  $A = \log |f'|$ , que é de grande interesse pois nos dá o expoente de Lyapunov de  $f$ . Este potencial pode não ser contínuo porque não exigimos que  $f'$  seja contínua no ponto em que há a mudança dos ramos injetivos. Além disso, como  $f$  tem ponto crítico,  $A$  tende a  $-\infty$  quando  $x$  se aproxima de zero.

Definindo

$$m(A, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \int A d\mu,$$

onde  $\mathcal{M}(f)$  é o conjunto das probabilidades invariantes por  $f$ , mostraremos que, mesmo  $A$  tendo tais propriedades, é possível determinar uma função cobordo  $V_A: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $A$  seja sub-cohomóloga à constante  $m(A, f)$ , isto é, que  $A \leq V_A \circ f - V_A - A + m(A, f)$ . E mais, mostraremos que  $V_A$  é Lipschitz. Mais precisamente:

**Teorema A.** *Seja  $f \in \mathcal{F}$  e  $A = \log |f'|$ . Então existe uma função  $V_A: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz tal que:*

$$A \leq V_A \circ f - V_A + m(A, f).$$

*Em particular, vale a igualdade no suporte de qualquer medida  $\mu$  que maximize  $m(A, f)$ , isto é,  $A$  é cohomóloga a  $m(A, f)$  no suporte de  $\mu$ .*

Esta função  $V_A$  é dita uma sub-ação para  $(A, f)$  e é importante porque nos possibilita mostrar que, se o potencial  $A$  admite uma única medida  $\mu$

maximizante para  $m(A, f)$ , isto é, se  $\mu$  é a única medida em  $\mathcal{M}(f)$  tal que  $m(A, f) = \int A d\mu$ , então  $f$  é unicamente ergódica no suporte de  $\mu$ .

Em um segundo momento vamos novamente fixar uma função  $f \in \mathcal{F}$  mas vamos trabalhar com potenciais  $A: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  pertencentes a  $\mathcal{C}^\alpha$ , conjunto das funções  $\alpha$ -Hölder. Como agora o potencial tem mais regularidade podemos mostrar resultados mais fortes.

Inicialmente mostraremos o teorema A adaptado à nova escolha do potencial, isto é:

**Teorema A'.** *Seja  $f \in \mathcal{F}$  e  $A \in \mathcal{C}^\alpha$ . Então existe uma função  $V_A: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  também  $\alpha$ -Hölder tal que  $A \leq V_A \circ f - V_A + m(A, f)$ . Em particular,  $A$  é cohomóloga a  $m(A, f)$  no suporte de qualquer medida maximizante.*

Em seguida, usando o teorema A' e um resultado de análise mostraremos que, genericamente em  $\mathcal{C}^\alpha$ , existe uma única medida maximizante para uma função  $f \in \mathcal{F}$  fixada.

**Teorema B.** *Seja  $f \in \mathcal{F}$  e  $\alpha > 0$ . Então o conjunto das funções  $\alpha$ -Hölder que possuem uma única medida maximizante para  $(A, f)$  é genérico em  $\mathcal{C}^\alpha$ . Além disso, para tais funções  $A$ , temos  $f$  unicamente ergódica no suporte de tal medida maximizante.*

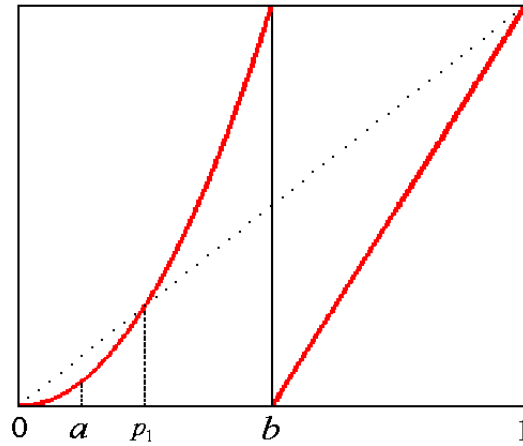
## 1.2 AS FUNÇÕES $f$

Nesta seção vamos detalhar melhor as funções  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  que formam o espaço  $\mathcal{F}$  que estamos considerando. Como já dissemos, tais funções  $f$  são de grau 2 e de classe  $C^2$  quando restritas a cada ramo injetivo, respectivamente  $\bar{0} = [0, b)$  e  $\bar{1} = [b, 1)$ , onde  $b$  é o ponto onde há a troca dos ramos injetivos. Consideramos também que:

- $f(0) = f'(0) = 0$ ;
- $f'$  é monótona crescente no intervalo  $[0, a]$ , onde  $a \in \bar{0}$  é tal que  $f'(a) = 1$ ;
- $f|_{[a+\varepsilon, 1)}$  é uniformemente expansiva, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f'(x)| > 1 + \delta$  se  $x \geq a + \varepsilon$ , para  $0 < \varepsilon < b - a$  fixado;
- $p_1 > a + \varepsilon$  é o único ponto fixo não nulo em  $\bar{0}$ .

Na figura 1.1 temos o gráfico de uma função  $f$  que satisfaz estas condições.

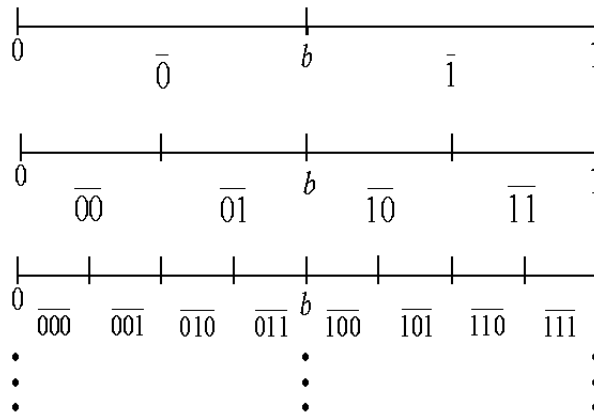
Seguindo a notação de  $\bar{0}$  para o ramo injetivo à esquerda e de  $\bar{1}$  para o ramo injetivo à direita e como trabalharemos com pré-imagens, vamos denotar:



**Figura 1.1:** Função  $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \overline{00} &= f^{-1}|_{\overline{0}}(\overline{0}) & \overline{01} &= f^{-1}|_{\overline{0}}(\overline{1}) \\ \overline{10} &= f^{-1}|_{\overline{1}}(\overline{0}) & \overline{11} &= f^{-1}|_{\overline{1}}(\overline{1}) \end{aligned}$$

e assim sucessivamente, como vemos na figura 1.2. Tais intervalos serão chamados de cilindros.



**Figura 1.2:** Cilindros

Lembrando que  $b$  é o ponto tal que  $\overline{0} = [0, b)$  e  $\overline{1} = [b, 1)$ , observamos que  $f^{-n}|_{\overline{0}}(b) > p_1$  para  $n \geq 0$  pois  $p_1 < b$  e  $p_1$  é ponto atrator para  $f^{-1}|_{\overline{0}}$ . Sendo

assim, como para todo  $n \geq 0$

$$\underbrace{\overline{00 \dots 00}}_{(n+1) \text{ vezes}} = [0, f^{-n}|_{\bar{0}}(b)) \supset [0, a + \varepsilon],$$

temos que o intervalo onde  $f$  não é expansiva está sempre contido nos cilindros dessa forma.

Note que, se  $z \in \overline{10001}$  temos que  $z, f(z), f^2(z), f^3(z)$  e  $f^4(z)$  estão no intervalo onde  $f$  é expansiva pois nenhum destes pontos está em um cilindro formado só por zeros. Por outro lado, se  $z \in \overline{01100}$ , então  $z, f(z)$  e  $f^2(z)$  estão no intervalo onde  $f$  é expansiva, mas  $f^3(z)$  e  $f^4(z)$  estão em cilindros só de zeros e portanto podem estar no intervalo onde  $f$  não é expansiva.

### 1.3 POTENCIAL $A(x) = \log|f'(x)|$

Como já foi dito, esta escolha particular para o potencial  $A$  é de grande interesse porque encontrar a medida que maximiza  $\int A d\mu$  significa determinar a medida que maximiza o expoente de Lyapunov.

Para fixarmos notação salientamos que, quando ficar claro quais função  $f$  e potencial  $A$  estamos considerando, denotaremos  $m(A, f)$  apenas por  $m$ . Ainda antes de prosseguirmos vamos a algumas definições.

**Definição 1.1.** Dados uma função  $f$  e um potencial  $A$ , dizemos que uma função  $W$  é uma sub-ação para  $(A, f)$  se satisfaz a equação de sub-cohomologia  $W \circ f - W \geq A - m$ .

**Definição 1.2.** Dizemos que uma aplicação  $f$  é unicamente ergódica se existe uma única medida  $\mu$  invariante por tal  $f$ .

Estamos agora em condições de definir a sub-ação  $V_A$  para  $(A, f)$ . Vamos utilizar a mesma função  $V_A$  definida em [CLT]:

$$V_A(x) := \sup_{\substack{n \geq 0 \\ y | f^n(y) = x}} \sum_{i=0}^{n-1} [\log|f'(f^i y)| - m], \quad (1.1)$$

ou seja, para cada ramo com  $n$  pré-imagens de  $x - n$  qualquer - tomamos a soma de  $\log|f'(\cdot)| - m$  aplicada em cada ponto de tal ramo excetuando o próprio ponto  $x$ .  $V_A$  nos dá então o supremo sobre todos esses valores.

A vantagem de a definirmos dessa maneira é que tal definição já nos garante que  $V_A$  é uma sub-ação para  $(\log|f'|, f)$ . De fato:

$$\begin{aligned} (V_A \circ f)(x) &\geq V_A(x) + \log|f'(x)| - m, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \\ &\Rightarrow V_A \circ f - V_A \geq \log|f'| - m. \end{aligned}$$

Como  $V_A$  é dada por um supremo, mostrar que esta função está bem definida significa mostrar que existe uma constante  $Q_2 > 0$  tal que

$$V_A(x) = \sup_{\substack{n \geq 0 \\ y | f^n(y)=x}} \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] < Q_2$$

para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ . Além desta limitação superior, também mostraremos que  $V_A$  é limitada inferiormente, ou seja, que existe  $Q_1 > 0$  tal que  $V_A(x) > Q_1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ . Essa última limitação uniforme vai nos garantir que, dado um ponto  $x$ , os seus ramos de pré-imagens que possuem muitos pontos na região onde  $\log |f'(\cdot)| < 0$  não vão ser considerados quando tomamos o supremo. De fato, como

$$-m \leq - \int \log |f'| d\delta_{p_1} = -\log |f'(p_1)| < 0,$$

mostraremos que a soma de  $\log |f'(\cdot)| - m$  em tais ramos será menor que  $Q_1$ .

**Proposição 1.1.** *A função  $V_A$  dada por (1.1) está bem definida, ou seja, existem constantes  $Q_1$  e  $Q_2$  em  $\mathbb{R}$  tais que*

$$Q_1 < \sup_{\substack{n \geq 0 \\ y | f^n(y)=x}} \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] < Q_2 \quad \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

Antes de provarmos esta proposição faremos algumas considerações preliminares:

- a)  $\log |f'(z)| < 0$  sempre que  $z \in [0, a)$  pois  $0 \leq f'(z) < 1$  para todo  $z$  neste intervalo;
- b) existe  $\varepsilon > 0$ , definido pela continuidade de  $\log |f'(\cdot)|$  em  $\bar{0}$ , tal que  $\log |f'(z)| < m$  se  $z \in [0, a + \varepsilon)$ , pois  $m > 0$ ;
- c)  $f^n([0, a + \varepsilon)) \subseteq [0, a + \varepsilon)$  para qualquer  $n$  pois  $x = 0$  é ponto atrator para  $f$ , isto é, uma vez que a órbita de um ponto entra neste intervalo ela não sai mais do mesmo;
- d)  $f|_{[a+\varepsilon, 1)}$  é uniformemente expansiva, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f'(x)| > 1 + \delta$  para  $x \in [a + \varepsilon, 1)$ .

É natural que ainda tenhamos a propriedade da distorção na parte das órbitas que estão no intervalo onde  $f$  é expansiva. Provamos isso no lema abaixo.

**Lema 1.2.** *Seja  $f$  como definida anteriormente. Se  $x$  e  $y$  estão no mesmo ramo injetivo de  $f^n$  e, se para  $i = 0, \dots, n-1$ , temos  $f^i(x), f^i(y) \in [a + \varepsilon, 1)$  – intervalo onde  $f$  é expansiva – então existem constantes  $C_1$  e  $C_2$  em  $\mathbb{R}$ , com  $C_2 > 0$ , tais que*

$$C_1 |f^n x - f^n y| \leq \log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \leq C_2 |f^n x - f^n y|.$$

*Prova.* Como  $f$  é de classe  $C^2$  quando restrita a cada ramo injetivo e  $f' \geq 1$  no intervalo  $[a, 1)$ , existem constantes  $\tilde{C}_1$  e  $\tilde{C}_2$  em  $\mathbb{R}$  tais que:

$$\tilde{C}_1 = \frac{\inf_{[a+\varepsilon, 1)} f''}{\sup_{[a+\varepsilon, 1)} |f'|} \leq \frac{f''(x)}{|f'(x)|} \leq \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\inf_{[a, 1)} |f'|} = \tilde{C}_2, \quad \forall x \in [a + \varepsilon, 1).$$

Observamos que  $\tilde{C}_2 > 0$  pois, como  $f'$  é monótona crescente no intervalo  $[0, a]$ , temos  $f'' > 0$  neste intervalo.

Definindo  $h: [a + \varepsilon, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h(x) := \log |f'(x)|$  temos que  $h'(x) = f''(x)/|f'(x)|$  e portanto:  $\tilde{C}_1 \leq h'(x) \leq \tilde{C}_2$ .

Por outro lado, como  $x$  e  $y$  estão no mesmo ramo injetivo de  $f^n$  e suas órbitas até  $n-1$  estão no intervalo onde  $f$  é expansiva, temos:

$$-\frac{1}{\lambda^{n-i}} |f^n x - f^n y| \leq f^i x - f^i y \leq \frac{1}{\lambda^{n-i}} |f^n x - f^n y|$$

onde  $i = 0, \dots, n-1$  e  $\lambda = \inf_{[a+\varepsilon, 1)} |f'| > 1 + \delta$ .

Sendo assim, utilizando o teorema do valor médio, obtemos:

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| &= \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(f^i x)| - \log |f'(f^i y)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h(f^i x) - h(f^i y) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} h'(z_i) (f^i x - f^i y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \leq \tilde{C}_2 |f^n x - f^n y| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{n-i}} \leq \frac{\tilde{C}_2}{1 - \frac{1}{\lambda}} |f^n x - f^n y| \\ \log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \geq \tilde{C}_1 |f^n x - f^n y| \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{1}{\lambda^{n-i}} \geq -\frac{\tilde{C}_1}{1 - \frac{1}{\lambda}} |f^n x - f^n y| \end{cases}$$

E então:

$$C_1 |f^n x - f^n y| \leq \log \left| \frac{(f^n)'(x)}{(f^n)'(y)} \right| \leq C_2 |f^n x - f^n y|$$

onde  $C_1 := -\tilde{C}_1 / (1 - \frac{1}{\lambda})$  e  $C_2 := \tilde{C}_2 / (1 - \frac{1}{\lambda}) > 0$ . □



*Prova da Proposição 1.1:* Vamos dividir esta prova em duas partes.

**Parte 1:** Existe uma constante  $Q_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $V_A(x) < Q_2$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Dados  $x$  e  $n$  quaisquer, fixamos um ramo de pré-imagens dado por  $y$  tal que  $f^n(y) = x$ . Vamos mostrar que existe uma constante  $Q_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] < Q_2$$

e assim teremos que  $V_A(x) < Q_2$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Se  $y = x$  temos um ramo periódico:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i x)| - m] &= n \int \log |f'| d\delta_{o(x)} - nm \\ &\leq nm - nm = 0 \end{aligned}$$

ou seja, já temos uma limitação superior.

Suponhamos então que  $y \neq x$ . De acordo com as observações sobre a função  $f$  feitas anteriormente, vamos separar a órbita de  $y$  até  $x$  em dois pedaços: os pontos que estão nos cilindros da forma  $\overline{0 \cdots 0}$  e os que não estão. Para tanto vamos denotar por  $f^k y$  o primeiro iterado de  $y$  que está em um cilindro só de zeros. Mais precisamente, definimos  $k := \min\{r | f^r y \in \overline{0} \forall s \geq r\}$

Dessa forma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} [\log |f'(f^i y)| - m]}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\sum_{i=k}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m]}_{\mathbf{B}}.$$

Note que, dependendo do ramo, podemos ter  $\mathbf{A} = 0$  ou  $\mathbf{B} = 0$ .

#### LIMITANDO O SOMATÓRIO $\mathbf{A}$

Como  $f^i y \in \overline{a_i a_{i+1} \cdots a_{k-1}} \neq \overline{0 \cdots 0}$ , para  $i = 0, \dots, k-1$ , temos que  $f^i(y) > f^{-k}|_{\overline{0}}(b) > a + \varepsilon$  para  $i = 0, \dots, k-1$ . Denotando por  $p$  o ponto periódico de período  $k$  que está no mesmo ramo injetivo de  $y$  para  $f^k$ , temos que  $f^i y$  e  $f^i p$  estão no intervalo  $[a + \varepsilon, 1)$  para  $i = 0, \dots, k-1$ , ou seja, estamos nas hipóteses do lema 1.2.

Então, lembrando que  $\sum_{i=0}^{k-1} [\log |f'(f^i p)| - m] < 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &< \sum_{i=0}^{k-1} [\log |f'(f^i y)| - \log |f'(f^i p)|] \\ &= \log \left| \frac{(f^k)'(y)}{(f^k)'(p)} \right| \leq C_2 |f^k y - f^k p| < C_2. \end{aligned}$$

## LIMITANDO O SOMATÓRIO **B**

Como já observamos,  $\log |f'(z)| - m < 0$  para  $z \in [0, a + \varepsilon)$  e  $p_1$  é o ponto fixo não nulo do cilindro  $\bar{0}$ . Definindo  $j := \#\{f^i y \geq a + \varepsilon, i = k, \dots, n-1\}$ , temos  $j \leq n$  e:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \sum_{f^i y \in [0, a + \varepsilon)} [\log |f'(f^i y)| - m] + \sum_{f^i y \geq a + \varepsilon} [\log |f'(f^i y)| - m] \\ &< \sum_{f^i y \geq a + \varepsilon} [\log |f'(f^i y)| - m] = \sum_{i=k}^{k+j-1} [\log |f'(f^i y)| - m] \\ &< \sum_{i=k}^{k+j-1} [\log |f'(f^i y)| - \log |f'(p_1)|] = \log \left| \frac{(f^j)'(f^k y)}{(f^j)'(p_1)} \right| \\ &\leq C_2 |f^j(f^k y) - f^j(p_1)| = C_2 |f^{j+k} y - p_1| \leq C_2 \end{aligned}$$

O lema 1.2 pôde ser utilizado porque  $f^{k+i} y$  e  $p_1$  pertencem a  $\bar{0} \setminus [0, a + \varepsilon)$ , para  $i = 0, \dots, j-1$ , e  $f^k y$  e  $p_1$  estão no mesmo ramo injetivo de  $f^j$ .

Concluimos então que, dado um ramo de  $n$  pré-imagens de  $x$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] &= \mathbf{A} + \mathbf{B} < C_2 + C_2 = 2C_2 =: Q_2 \\ &\Rightarrow V_A(x) < Q_2, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \end{aligned} \tag{1.2}$$

**Parte 2:** Existe uma constante  $Q_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $V_A(x) > Q_1$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Vamos mostrar que, dado  $x$ , existe um ramo de pré-imagens tal que a soma de  $\log |f'(\cdot)| - m$  aplicado em cada ponto de tal ramo é maior que uma constante uniforme  $Q_1$ . Dessa forma teremos que  $V_A(x) > Q_1$  para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Como vimos acima  $Q_2 > 0$ . Sejam então:

- $M_1 := M_1(Q_2) \geq 1$  tal que  $\log(\sup f') < M_1 Q_2$ ;
- $n_1 := n_1(Q_2)$  o maior inteiro tal que  $n_1 \log(\sup f') < 4M_1 Q_2$ .

Dessa forma, dado um ponto  $x$ , vamos tomar o ramo com  $n_1$  pré-imagens sendo todas escolhidas no cilindro  $\bar{1}$ . Assim, garantimos que todos os pontos deste ramo estão na parte expansiva de  $f$ .

Além disso, fixamos  $p$  como o ponto periódico de período  $n_1$  tal que  $p$  acompanha o ramo selecionado de  $x$ .

Como

$$\frac{1}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-1} \log |f'(f^i p)| = \int \log |f'| d\delta_{o(p)} \leq m,$$

existe um inteiro  $M_2 := M_2(n_1) > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{M_2}{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-1} \log |f'(f^i p)| &> m \\ \Rightarrow -n_1 m &> -M_2 \sum_{i=0}^{n_1-1} \log |f'(f^i p)| = -\log |(f^{n_1})'(p)|^{M_2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n_1-1} [\log |f'(f^i y)| - m] &= -n_1 m + \log |(f^{n_1})'(y)| \\ &> \log \frac{|(f^{n_1})'(y)|}{|(f^{n_1})'(p)|^{M_2}} = \log \frac{|(f^{n_1})'(y)|}{|(f^{n_1})'(p)|} - (M_2 - 1) \log |(f^{n_1})'(p)| \\ &> C_1 |x - p| - n_1 (M_2 - 1) \log(\sup f') \\ &> C_1 |x - p| - 4M_1 M_2 Q_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n_1-1} [\log |f'(f^i y)| - m] > \begin{cases} -4M_1 M_2 Q_2, & \text{se } C_1 \geq 0 \\ C_1 - 4M_1 M_2 Q_2, & \text{se } C_1 < 0 \end{cases}$$

Definimos assim  $Q_1 := \min \{C_1 - 4M_1 M_2 Q_2, -4M_1 M_2 Q_2\}$  e obtemos que:

$$\begin{aligned} V_A(x) &\geq \sum_{i=0}^{n_1-1} [\log |f'(f^i y)| - m] > Q_1 \\ &\Rightarrow Q_1 < V_A(x), \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Dessa forma, de (1.2) e de (1.3) obtemos que:

$$\exists Q_1, Q_2 \in \mathbb{R} \text{ tais que } Q_1 < V_A(x) < Q_2, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$$

concluindo assim a prova da proposição 1.1 □

*Observação 1.* Note que  $Q_2 := 2C_2 > 0$  pois  $C_2 > 0$ . Por outro lado, temos  $Q_1 < 0$  porque  $Q_1 \leq -4M_1 M_2 Q_2 < 0$ .

Mostramos até aqui que  $V_A$  está bem definida e que é uma sub-ação. Antes de mostrarmos que também é Lipschitz provaremos um lema auxiliar.

**Lema 1.3.** *Existe  $\gamma > 0$  tal que se  $x \in [0, \gamma)$  então qualquer ramo de pré-imagens de  $x$  que contenha o ponto  $x_1^0 := f^{-1}|_{\bar{0}}(x)$  é tal que*

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] < Q_1$$

sobre tal ramo.

*Prova.* Como  $\log |f'|$  é contínua em cada ramo injetivo de  $f$  e  $\lim_{z \rightarrow 0} \log |f'(z)| = -\infty$ , existe  $q \in [0, a]$  tal que  $\log |f'(q)| = 2Q_1 < 0$ . Definindo  $\gamma := f(q)$  observamos que:

$$x \in [0, \gamma) \Rightarrow x_1^0 = f^{-1}|_{\bar{0}}(x) \in [0, q) \Rightarrow \log |f'(x_1^0)| < 2Q_1.$$

Então, para qualquer ramo de pré-imagens de  $x$  contendo o ponto  $x_1^0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] &= \log |f'(x_1^0)| - m + \sum_{i=0}^{n-2} [\log |f'(f^i y)| - m] \\ &< 2Q_1 - m + Q_2 < 2Q_1 + Q_2 < Q_1, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de:

$$Q_1 \leq -4M_1 M_2 Q_2 < -Q_2 \Rightarrow Q_1 + Q_2 < 0. \quad \square$$

*Observação 2.* Com este lema concluímos que, se  $x \in [0, \gamma)$ , então os ramos de pré-imagens de  $x$  que serão considerados na determinação de  $V_A(x)$  são aqueles que têm  $x_1^1 := f^{-1}|_{\bar{1}}(x) \in \bar{1}$  na sua órbita. Ou seja, para tal  $x$ , só nos interessam os ramos injetivos cuja  $n$ -ésima pré-imagem esteja em um cilindro da forma  $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 \bar{1}}$  – o que significa que toda órbita de  $x$  está no intervalo onde  $f$  é expansiva.

**Proposição 1.4.**  *$V_A$  é Lipschitz, isto é, existem constantes  $C, \xi > 0$  tais que*

$$|x - x'| < \xi \Rightarrow |V_A(x) - V_A(x')| < C |x - x'|.$$

*Prova.* Dados  $x$  e  $x'$  vamos supor, sem perda de generalidade, que  $V_A(x) > V_A(x')$ . E para esse  $x$ , dado  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , fixamos um ramo de  $n$  pré-imagens dado por  $f^n(y) = x$  de forma que:

$$V_A(x) - \tilde{\varepsilon} < \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m],$$

onde o somatório é tomado sobre tal ramo.

O ramo de  $x'$  que vamos considerar é aquele que acompanha o ramo de  $x$  fixado. Ou seja,  $y$  e  $y'$ , dados de forma que  $f^n y = x$  e  $f^n y' = x'$ , estão no mesmo ramo injetivo de  $f^n$ .

Definindo  $\xi := (1/2)\gamma$ , onde  $\gamma$  é dado pelo lema 1.3, vamos analisar três possibilidades para as posições de  $x$  e  $x'$ , lembrando que estamos considerando  $|x - x'| < \xi$ .

CASO 1: ou  $x$  ou  $x'$  é menor que  $\xi$

Nessa situação temos que  $x, x' \in [0, \gamma)$ . Logo, pela observação 2, os ramos fixados de  $x$  e  $x'$  têm todos os seus pontos no intervalo onde  $f$  é expansiva. Sendo assim, pelo lema 1.2:

$$\begin{aligned} |V_A(x) - V_A(x')| &= V_A(x) - V_A(x') \\ &< \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y)| - m] - \sum_{i=0}^{n-1} [\log |f'(f^i y')| - m] \\ &< \tilde{\varepsilon} + \log \left| \frac{(f^n)'(y)}{(f^n)'(y')} \right| < \tilde{\varepsilon} + C_2 |x - x'| \end{aligned}$$

Fazendo-se  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$  obtemos:

$$|V_A(x) - V_A(x')| < C_2 |x - x'| \quad \text{para } |x - x'| < \xi.$$

CASO 2: ou  $x$  ou  $x'$  está em  $[\xi, a + \varepsilon)$  onde  $\varepsilon$  define o intervalo onde  $f$  é expansiva.

Como  $p_1$  é ponto atrator de pré-imagens em  $\bar{0}$ , existe  $n_2 > 0$ , dependendo apenas da dinâmica de  $f$ , tal que os ramos de pré-imagens de  $x$  e  $x'$  vão conter no máximo  $n_2$  pontos no intervalo  $[\xi, a + \varepsilon)$ . Os demais pontos de suas órbitas estão todos em  $[a + \varepsilon, 1)$ , isto é, na parte onde  $f$  é expansiva e, portanto, vale o lema 1.2.

Sendo assim, o que precisamos é controlar a parte das órbitas que está em  $[\xi, a + \varepsilon)$ . Para isso vamos proceder de forma análoga à prova do lema 1.2, utilizando que

$$f^i y - f^i y' \leq \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n-i}} |x - x'|, \quad \text{para } i \geq n - n_2,$$

onde  $0 < \tilde{\lambda} := \inf_{[\xi, 1)} |f'| < 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n-n_2}^{n-1} \log \left| \frac{f'(f^i y)}{f'(f^i y')} \right| &= \sum_{i=n-n_2}^{n-1} \frac{f''(z_i)}{|f'(z_i)|} (f^i y - f^i y') \\
&\leq \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}} |x - x'| \sum_{i=n-n_2}^{n-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n-i}} < \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}} |x - x'| \sum_{i=1}^{n_2} \frac{1}{\tilde{\lambda}^i} \\
&\leq \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}} |x - x'| \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n_2}}\right) \left[\tilde{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)\right]^{-1} \\
&\leq \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} - 1)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n_2}}\right) |x - x'|
\end{aligned}$$

onde  $z_i$ , dado pelo teorema do valor médio, é um ponto do intervalo aberto definido por  $f^i y$  e  $f^i y'$ .

Então:

$$\begin{aligned}
|V_A(x) - V_A(x')| &= V_A(x) - V_A(x') \\
&< \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-n_2-1} \log \left| \frac{f'(f^i y)}{f'(f^i y')} \right| + \sum_{i=n-n_2}^{n-1} \log \left| \frac{f'(f^i y)}{f'(f^i y')} \right| \\
&< \tilde{\varepsilon} + C_2 |f^{n-n_2} y - f^{n-n_2} y'| + \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} - 1)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n_2}}\right) |x - x'| \\
&< \tilde{\varepsilon} + \left[ \frac{C_2}{\tilde{\lambda}^{n_2}} + \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} - 1)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n_2}}\right) \right] |x - x'|
\end{aligned}$$

Fazendo-se  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$  e definindo-se

$$C_3 := \frac{C_2}{\tilde{\lambda}^{n_2}} + \frac{\sup_{\mathbb{S}^1} f''}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} - 1)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}^{n_2}}\right)$$

obtemos:

$$|V_A(x) - V_A(x')| < C_3 |x - x'|, \quad \text{para } |x - x'| < \xi.$$

**CASO 3:**  $x, x' \in [a + \varepsilon, 1)$

Neste caso todas as pré-imagens de  $x$  e de  $x'$  estão no intervalo onde  $f$  é expansiva. Temos portanto a mesma situação do caso 1:

$$|V_A(x) - V_A(x')| = V_A(x) - V_A(x') < \tilde{\varepsilon} + C_2 |x - x'|.$$

Ou seja, fazendo-se  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ :

$$|V_A(x) - V_A(x')| < C_2 |x - x'|, \quad \text{para } |x - x'| < \xi.$$

Concluimos assim que, definindo  $C := \max\{C_2, C_3\}$ :

$$|x - x'| < \xi \Rightarrow |V_A(x) - V_A(x')| < C |x - x'|. \quad \square$$

Seja  $\mu$  uma medida maximizante para  $(A, f)$ . Como  $V_A \circ f - V_A - A + m \geq 0$  e

$$\int (V_A \circ f - V_A - A + m) d\mu = m - \int A d\mu = 0$$

concluimos que  $V_A \circ f - V_A - A + m = 0$  no suporte de  $\mu$ . Provamos assim o teorema A enunciado na seção 1.1.

O que mostraremos no próximo lema é como a existência da sub-ação  $V_A$  nos garante que, se a medida que maximiza  $\int \log |f'| d\mu$  é única, então  $f$  é unicamente ergódica no suporte desta medida.

**Lema 1.5.** *Se  $\mu_A \in \mathcal{M}(f)$  é a única medida que maximiza  $\int A d\mu$  então  $f$  é unicamente ergódica no suporte de  $\mu_A$*

*Prova.* Como  $\mu_A$  é uma medida maximizante para  $(A, f)$  temos que  $V_A \circ f - V_A - A + m = 0$  para quase todo ponto  $x$  em relação à medida  $\mu_A$ . Lembrando que o suporte de  $\mu_A$  é o conjunto fechado definido por

$$\text{supp}(\mu_A) := \{x \in \mathbb{S}^1 \mid \forall V \text{ vizinhança de } x, \mu_A(V) > 0\},$$

temos que a equação de cohomologia vale no  $\text{supp}(\mu_A)$  a menos de um conjunto  $B \subset \text{supp}(\mu_A)$  de medida  $\mu_A$  zero.

Como  $V_A$  é contínua e o único possível ponto de descontinuidade do potencial  $A = \log |f'|$  é o ponto  $b$ , onde há a troca dos ramos injetivos de  $f$ , afirmamos que tal conjunto  $B$  ou é vazio ou  $B = \{b\}$ . De fato, supondo  $B \neq \emptyset$ , seja  $x \in B$  tal que  $x \neq b$ . Então, como  $V_A$  e  $A$  são contínuas em  $x$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $V_A \circ f - V_A - A + m \neq 0$  para todo  $y \in U$ . Sendo assim, temos que

$$U \subseteq B \Rightarrow \mu_A(U) = 0.$$

Mas pela definição de  $\text{supp}(\mu_A)$  temos que  $\mu_A(U) > 0$ . Portanto, se  $B$  é não vazio então só pode conter os pontos de descontinuidade de  $A$ , isto é,  $B = \{b\}$ .

Como o caso  $B = \emptyset$  é trivial, vamos considerar que  $B = \{b\}$ .

Seja então  $\mu$  uma probabilidade invariante para  $f$  e com suporte contido em  $\text{supp}(\mu_A)$ . Observamos que  $\mu(\{b\}) = 0$ . De fato, seja  $W$  um aberto contendo o ponto  $x = 0$ . Como este ponto é atrator temos que

$$f^{-1}|_{\bar{0}}W \supseteq W \Rightarrow \mu(f^{-1}|_{\bar{0}}W) \geq \mu(W)$$

e, como  $b = f^{-1}|_{\bar{1}}0$  temos que  $f^{-1}|_{\bar{1}}W \supseteq \{b\}$ . Dessa forma, sendo  $\mu$  invariante para  $f$ :

$$\mu(W) = \mu(f^{-1}|_{\bar{0}}W) + \mu(f^{-1}|_{\bar{1}}W) \geq \mu(W) + \mu(\{b\})$$

$$\Rightarrow \mu(\{b\}) = 0.$$

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} & \int_{\text{supp}(\mu_A)} (V_A \circ f - V_A - A + m) d\mu \\ &= \int_{\text{supp}(\mu_A) \setminus \{b\}} (V_A \circ f - V_A - A + m) d\mu + \int_{\{b\}} (V_A \circ f - V_A - A + m) d\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas por outro lado, também temos que:

$$\int_{\text{supp}(\mu_A)} (V_A \circ f - V_A - A + m) d\mu = m - \int_{\text{supp}(\mu_A)} A d\mu.$$

Portanto concluímos que

$$\int_{\text{supp}(\mu_A)} A d\mu = m.$$

Entretanto, como  $\mu_A$  é a única medida maximizante, temos que  $\mu = \mu_A$ , o que prova que  $f$  é unicamente ergódica no suporte de  $\mu_A$ .  $\square$

Concluímos, dessa maneira, a análise do caso em que o potencial é dado por  $A(x) = \log |f'(x)|$ .

## 1.4 POTENCIAL $A$ $\alpha$ -HÖLDER

Nesta seção vamos considerar um potencial mais geral pertencente ao conjunto  $\mathcal{C}^\alpha$  das funções  $\alpha$ -Hölder. Nossa estratégia é provar a existência da sub-ação  $\alpha$ -Hölder  $V_A$  (Teorema A') e usá-la como ferramenta para provarmos nosso resultado principal, o teorema B.

Observamos que o teorema B torna-se trivial quando a única medida maximizante é dada por  $\mu = \delta_0$  - medida de Dirac no ponto  $x = 0$ . De fato, se existe uma medida  $\nu$  tal que  $\text{supp}(\nu) \subseteq \text{supp}(\delta_0) = \{0\}$  então  $\nu = \delta_0$  e portanto temos que  $f$  é unicamente ergódica no suporte de  $\delta_0$ . Dessa forma, vamos desconsiderar o caso em que a medida maximizante é dada por  $\delta_0$ . Temos assim que  $A(0) < m$ . Então, como  $A$  é uma função contínua, existe  $\tilde{\delta} > 0$  tal que, para qualquer  $x \in [0, \tilde{\delta})$ :

$$A(x) < m - \frac{|A(0) - m|}{2} \Rightarrow A(x) - m < -\frac{|A(0) - m|}{2} =: -\alpha < 0. \quad (1.4)$$



Observamos que continuam valendo as características gerais de  $f$  enunciadas na seção 1.2, em particular o intervalo onde  $f$  é uniformemente expansiva. Ou seja, fixado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f'(x)| > 1 + \delta$  se  $x \in [a + \varepsilon, 1)$ .

Trabalharemos com a mesma função  $V_A$  definida anteriormente, isto é:

$$V_A(x) := \sup_{\substack{n \geq 0 \\ y | f^n(y) = x}} S_n(A - m)(y) \quad (1.5)$$

onde  $S_n(A - m)(y) := \sum_{i=0}^{n-1} [A(f^i y) - m]$ , pois tal definição já nos garante que  $V_A$  é uma sub-ação.

Vamos começar provando que, nesta situação,  $V_A$  está bem definida.

**Proposição 1.6.** *A sub-ação  $V_A$  dada por (1.5) está bem definida, ou seja, existem constantes  $Q_1$  e  $Q_2$  em  $\mathbb{R}$  tais que*

$$Q_1 < \sup_{\substack{n \geq 0 \\ y | f^n(y) = x}} S_n(A - m)(y) < Q_2, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

Observamos que tais constantes  $Q_1$  e  $Q_2$  não são necessariamente iguais às constantes que servem como cotas para  $V_A$  quando consideramos  $A = \log |f'|$ .

*Prova:* Esta prova será desenvolvida de maneira muito semelhante a prova da proposição 1.1.

**Parte 1:** Existe uma constante  $Q_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $V_A(x) < Q_2$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Para  $x$  e  $n$  quaisquer tomamos um ramo de  $n$  pré-imagens de  $x$  dado por  $y$  de forma que  $f^n y = x$ . Consideramos que  $y \neq x$  pois caso contrário teríamos um ramo periódico e, portanto, a limitação superior dada por zero.

Como fizemos na prova da proposição 1.1 vamos separar a órbita de  $y$  até  $x$  nos pontos que estão nos cilindros formados só por zeros e os pontos que não estão. Ou seja, definindo-se novamente  $k := \min\{r | f^s y \in \bar{0} \ \forall s \geq r\}$  temos:

$$S_n(A - m)(y) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} [A(f^i y) - m]}_{\mathbf{E}} + \underbrace{\sum_{i=k}^{n-1} [A(f^i y) - m]}_{\mathbf{F}}.$$

LIMITANDO **E**

Como anteriormente, observamos que  $f^i y > f^{-i}|_{\bar{0}}(b) > a + \varepsilon$  para  $i = 0, \dots, k - 1$ , isto é, tais iterados de  $y$  estão no intervalo onde  $f$  é expansiva.

Tomando  $p$  como o ponto periódico de período  $k$ , tal que  $p$  e  $y$  estão no mesmo ramo injetivo para  $f^k$ , temos que seus iterados também estão no intervalo onde  $f$  é expansiva. Temos ainda que:

$$|f^i y - f^i p| \leq \frac{1}{\lambda^{k-i}} |f^k y - p|, \quad i = 0, \dots, k-1 \quad (1.6)$$

onde  $\lambda = \inf_{[a+\varepsilon, 1)} |f'| > 1$ .

Então, como  $S_k(A - m)(p) < 0$  e denotando a constante de Hölder de  $A$  por  $H_\alpha(A)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &< \sum_{i=0}^{k-1} [A(f^i y) - A(f^i p)] < H_\alpha(A) \sum_{i=0}^{k-1} |f^i y - f^i p|^\alpha \\ &< H_\alpha(A) |f^k y - p|^\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^{\alpha(k-i)}} < H_\alpha(A) \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} =: D_1 \end{aligned}$$

onde notamos que  $D_1 > 0$ .

#### LIMITANDO $\mathbf{F}$

Lembramos que:

- a) se  $z \in [0, \tilde{\delta})$  então  $A(z) - m < -\alpha < 0$ ;
- b)  $f^n([0, p_1]) \subseteq [0, p_1]$  para qualquer  $n$ , logo quando a órbita de um ponto entra neste intervalo ela não pode mais sair;
- c)  $f|_{[a+\varepsilon, 1)}$  é uniformemente expansiva.

Além disso, sendo  $p_1$  ponto atrator de pré-imagens em  $\bar{0}$ , existe  $n_3 > 0$ , que depende apenas da dinâmica de  $f$ , tal que qualquer ramo de pré-imagens de  $x$  contém no máximo  $n_3$  pontos no intervalo  $[\tilde{\delta}, a + \varepsilon) \subset [0, p_1]$ .

Definimos  $j := \#\{f^i y \geq a + \varepsilon, i = k, \dots, n-1\}$ . Logo, adaptando (1.6) para  $i = k, \dots, k+j-1$  e como  $A(p_1) - m < 0$ , onde  $p_1$  é o ponto fixo não nulo do cilindro  $\bar{0}$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{f^i y \in [0, \tilde{\delta})} [A(f^i y) - m] + \sum_{f^i y \in [\tilde{\delta}, a+\varepsilon)} [A(f^i y) - m] + \sum_{f^i y \geq a+\varepsilon} [A(f^i y) - m] \\ &< n_3 (\|A\| - m) + \sum_{i=k}^{k+j-1} [A(f^i y) - m] \\ &< n_3 (\|A\| - m) + \sum_{i=k}^{k+j-1} [A(f^i y) - A(p_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq n_3 (\|A\| - m) + H_\alpha(A) |f^{j+k}y - p_1|^\alpha \sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda^{i\alpha}} \\ &< n_3 (\|A\| - m) + H_\alpha(A) \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} \end{aligned}$$

Sendo assim, dado um ramo qualquer de  $n$  pré-imagens de  $x$  e denotando  $D_2 := n_3 (\|A\| - m)$ , temos:

$$\begin{aligned} S_n(A - m)(y) &= \mathbf{E} + \mathbf{F} < 2D_1 + D_2 =: Q_2 \\ &\Rightarrow V_A(x) < Q_2, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Temos que  $D_2 > 0$ , pois  $m \leq \|A\|$ , e  $D_1 > 0$ . Portanto,  $Q_2 > 0$ .

*Observação 3.* Chamamos a atenção para a constante  $D_1 := H_\alpha(A) \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} > 0$  definida acima pois tal constante voltará a aparecer no texto.

**Parte 2:** Existe uma constante  $Q_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $V_A(x) > Q_1$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Mostraremos aqui que, dado qualquer  $x$ , existe um ramo de pré-imagens deste ponto tal que a soma de  $A - m$  sobre tal ramo é maior que uma constante uniforme  $Q_1$ . Segue disto que  $V_A > Q_1$ .

Como  $Q_2 > 0$ , definimos:

- $\widehat{M}_1 := \widehat{M}_1(Q_2) \geq 1$  de forma que  $\|A\| < \widehat{M}_1 Q_2$ ;
- $l_1 := l_1(Q_2) \geq 1$  como o maior inteiro tal que  $l_1 \|A\| < 4\widehat{M}_1 Q_2$ ;
- $\widehat{M}_2 := \widehat{M}_2(Q_2) \geq 1$  tal que  $\inf A > -\widehat{M}_2 Q_2$ ;
- $l_2 := l_2(Q_2) \geq 1$  tal que:
  - se  $\inf A < 0$ ,  $l_2$  é o maior inteiro que satisfaz  $l_2 \inf A > -4\widehat{M}_2 Q_2$ ;
  - se  $\inf A \geq 0$ ,  $l_2$  é igual a 1 pois neste caso a desigualdade acima sempre é satisfeita;
- $n_4 := \min\{l_1, l_2\}$ .

Pela definição de  $n_4$  temos que  $n_4 \|A\| \leq l_1 \|A\| \leq 4\widehat{M}_1 Q_2$  e  $n_4 \inf A \geq -4\widehat{M}_2 Q_2$ .

Dessa maneira, dado um ponto  $x$  vamos escolher o ramo com  $n_4$  pré-imagens sendo que todas são tomadas no cilindro  $\bar{1}$ , isto é, todos os seus pontos estão no intervalo onde  $f$  é expansiva.

Seja  $p$  o ponto periódico de período  $n_4$  de forma que tal ramo de  $p$  acompanha o ramo escolhido de  $x$ . Sabemos que

$$\frac{1}{n_4} \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i p) = \int Ad\delta_{o(p)} \leq m,$$

então existe um inteiro  $\widehat{M}_3 := \widehat{M}_3(n_4)$  tal que:

$$\frac{\widehat{M}_3}{n_4} \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i p) > m$$

e portanto temos que

$$-n_4 m > -\widehat{M}_3 \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i p).$$

Observamos que, dependendo do potencial  $A$ , podemos ter  $\widehat{M}_3 > 1$  ou  $\widehat{M}_3 < -1$ . Vamos analisar as duas situações:

a)  $\widehat{M}_3 > 1$

Utilizando a desigualdade anterior, adaptando (1.6) para  $i = 0, \dots, n_4 - 1$  e pela definição de  $n_4$  temos:

$$\begin{aligned} S_{n_4}(A - m)(y) &= -n_4 m + \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i y) \\ &> \left[ \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i y) - A(f^i p) \right] - (\widehat{M}_3 - 1) \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i p) \\ &\geq -H_\alpha(A) \left[ \sum_{i=0}^{n_4-1} |f^i y - f^i p|^\alpha \right] - n_4 (\widehat{M}_3 - 1) \|A\| \\ &\geq -H_\alpha(A) |x - p|^\alpha \sum_{i=1}^{n_4} \left( \frac{1}{\lambda^{\alpha i}} \right) - 4\widehat{M}_1 \widehat{M}_3 Q_2 \\ &> -H_\alpha(A) \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} - 4\widehat{M}_1 \widehat{M}_3 Q_2 \\ &> -D_1 - 4\widehat{M}_1 \widehat{M}_3 Q_2 \end{aligned}$$

onde observamos que  $-D_1 - 4\widehat{M}_1 \widehat{M}_3 Q_2 < 0$ .

b)  $\widehat{M}_3 < -1$

Novamente adaptando (1.6) e de acordo com as definições de  $\widehat{M}_3$  e  $n_4$  temos:

$$\begin{aligned}
S_{n_4}(A - m)(y) &= -n_4 m + \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i y) \\
&> \sum_{i=0}^{n_4-1} [A(f^i y) - A(f^i p)] - (\widehat{M}_3 - 1) \sum_{i=0}^{n_4-1} A(f^i p) \\
&\geq -D_1 - (\widehat{M}_3 - 1)n_4 \inf A \\
&\geq -D_1 + 4(\widehat{M}_3 - 1)\widehat{M}_2 Q_2
\end{aligned}$$

com  $-D_1 + 4(\widehat{M}_3 - 1)\widehat{M}_2 Q_2 < 0$  também.

Logo, definindo

$$Q_1 := \min\{-D_1 - 4\widehat{M}_1 \widehat{M}_3 Q_2, -D_1 + 4(\widehat{M}_3 - 1)\widehat{M}_2 Q_2\}$$

concluimos que  $V_A(x) \geq S_{n_4}(A - m)(y) > Q_1$ , ou seja:

$$Q_1 < V_A(x), \forall x \in \mathbb{S}^1. \quad (1.8)$$

De (1.7) e de (1.8) temos que existem constantes  $Q_1$  e  $Q_2$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $Q_1 < V_A < Q_2$ , concluindo a prova.  $\square$

Como anteriormente mostraremos agora a regularidade da sub-ação  $V_A$ .

**Proposição 1.7.** *A função  $V_A$  definida acima é  $\alpha$ -Hölder. Isto é, existem constantes  $H_\alpha(V_A)$  e  $\rho$  maiores que zero tais que:*

$$|x - x'| < \rho \Rightarrow |V_A(x) - V_A(x')| < H_\alpha(V_A)|x - x'|^\alpha.$$

A dificuldade na prova desta proposição é mostrar que  $V_A$  é  $\alpha$ -Hölder em uma vizinhança de zero, uma vez que temos  $f'(0) = 0$  e a limitação que estamos usando é dada pelo inverso da derivada.

Dessa forma vamos mostrar primeiro que  $V_A$  é  $\alpha$ -Hölder quando restrita ao intervalo  $[a + \varepsilon, 1)$  onde  $f$  é expansiva. Na seqüência provaremos também outros dois lemas que serão utilizados na prova da proposição acima.

**Lema 1.8.** *Sejam  $x$  e  $x'$  dois pontos do intervalo  $[a + \varepsilon, 1)$ . Então*

$$|V_A(x) - V_A(x')| < D_1|x - x'|^\alpha,$$

onde  $D_1$  é dada pela observação 3.

Em particular este lema nos diz que  $V_A$  restrita ao cilindro  $\bar{1}$  é  $\alpha$ -Hölder e portanto contínua.

*Prova.* Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $V_A(x) > V_A(x')$ . Assim, dado  $\tilde{\varepsilon}$ , vamos tomar um ramo de pré-imagens de  $x$  tal que  $V_A(x) - \tilde{\varepsilon} < S_n(A - m)$ . E para  $x'$ , tomamos o ramo de pré-imagens que acompanha o ramo de  $x$  já fixado.

Dessa forma, adaptando (1.6) para  $i = 0, \dots, n - 1$ , temos:

$$\begin{aligned} |V_A(x) - V_A(x')| &= V_A(x) - V_A(x') < \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-1} [A(f^i y) - A(f^i y')] \\ &\leq \tilde{\varepsilon} + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{\alpha(n-i)}} \\ &\leq \tilde{\varepsilon} + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} \\ &= \tilde{\varepsilon} + D_1 |x - x'|^\alpha \end{aligned}$$

Fazendo-se  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$  obtemos que  $|V_A(x) - V_A(x')| < D_1 |x - x'|^\alpha$ , provando o lema.  $\square$

**Lema 1.9.** *Existe um inteiro  $n_5 > 0$  tal que, se um ramo de pré-imagens de um ponto  $x$  qualquer é tal que  $S_n(A - m)(y) > Q_1$ , então tal ramo possui no máximo  $(n_5 - 1)$  pontos no intervalo  $[0, \tilde{\delta})$ , onde  $\tilde{\delta}$  é dado por (1.4).*

*Prova.* Definimos  $n_5$  como o primeiro inteiro tal que  $n_5 \alpha > Q_2 - Q_1$ . Dado um ponto  $x$  qualquer, tomamos um ramo de pré-imagens tal que  $S_n(A - m)(y) > Q_1$ .

Lembrando que se  $z \in [0, \tilde{\delta})$  então  $A(z) - m < -\alpha < 0$ , temos:

$$\begin{aligned} Q_1 < S_n(A - m)(y) &= \sum_{f^i y \in [0, \tilde{\delta})} [A(f^i y) - m] + \sum_{f^i y \geq \tilde{\delta}} [A(f^i y) - m] \\ &< \sum_{f^i y \in [0, \tilde{\delta})} [A(f^i y) - m] + Q_2 \\ &< \#\{f^i y \in [0, \tilde{\delta}), i = 0, \dots, n - 1\}(-\alpha) + Q_2 \end{aligned}$$

Temos assim que  $\#\{f^i y \in [0, \tilde{\delta}), i = 0, \dots, n - 1\}(\alpha) < Q_2 - Q_1 < n_5 \alpha$  e portanto  $\#\{f^i y \in [0, \tilde{\delta}), i = 0, \dots, n - 1\} < n_5$ . Ou seja, este ramo tem no máximo  $(n_5 - 1)$  pontos em  $[0, \tilde{\delta})$ .  $\square$

**Lema 1.10.** *Existe  $\gamma > 0$  tal que, se  $x \in [0, \gamma)$ , então os ramos de  $x$  que são considerados na determinação de  $V_A(x)$  são os que contém o ponto  $x_1^1 := f^{-1}|_{\bar{1}}(x)$ .*

Observamos que, como  $x_1^1 \in \bar{1}$ , qualquer ramo de  $x$  que contém tal ponto, independente de seu tamanho, é tal que todos os seus pontos estão no intervalo onde  $f$  é expansiva pois estão em cilindros que terminam por 1.

*Prova.* Definiremos  $\gamma$  de forma que tenhamos  $\gamma < f^{n_5}\tilde{\delta}$  onde  $n_5$  é definido pelo lema 1.9 e  $\tilde{\delta}$  é dado por (1.4). Sendo assim, dado  $x \in [0, \gamma)$ , temos que  $x < \tilde{\delta}$  porque zero é ponto atrator para  $f$  e para  $i = 1, \dots, n_5$ ,

$$x_i^0 < \tilde{\delta} \Rightarrow A(x_i^0) - m < -\alpha \quad (1.9)$$

onde  $x_i^0 := f^{-i}|_{\bar{0}}(x)$ .

Por outro lado, como estamos querendo estimar sobre quais ramos de  $x$  temos  $S_n(A - m)$  mais próximo do valor de  $V_A(x)$  vamos considerar apenas os ramos de pré-imagens tais que  $S_n(A - m) > Q_1 - cota$  inferior de  $V_A$  dada pela proposição 1.6. Então, pelo lema 1.9, temos que os ramos que vamos considerar não podem conter o ponto  $x_{n_5}^0$  porque neste caso teríamos mais que  $n_5 - 1$  pontos no intervalo  $[0, \tilde{\delta})$ . Isto significa que vamos nos restringir apenas aos  $n_5$  ramos dados a partir dos seguintes pontos:

$$\begin{array}{llll} \text{Ramo 1:} & x_1^1 & & \\ \text{Ramo 2:} & x_1^0 & x_2^1 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Ramo } n_5: & x_1^0 & x_2^0 & \cdots x_{n_5-1}^0 x_{n_5}^1 \end{array}$$

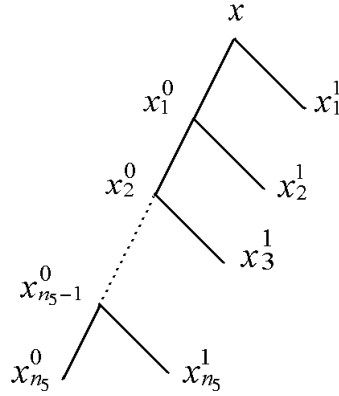
onde estamos considerando  $x_j^1 := f^{-1}|_{\bar{1}}(x_{j-1}^0)$ , com  $j = 1, \dots, n_5$ . Tais ramos estão representados na figura 1.3.

A partir deste ponto vamos considerar o índice  $i$  variando no conjunto  $\{1, \dots, n_5 - 1\}$  e o índice  $j$  variando no conjunto  $\{1, \dots, n_5\}$ .

Como  $f^{-1}|_{\bar{1}}$  é contínua e tomando-se  $c := f^{-1}|_{\bar{1}}(0)$ , afirmamos que para todo  $\xi > 0$  existe  $\tilde{\gamma} > 0$  tal que:

$$|x - 0| < f^{(n_5-1)}\tilde{\gamma} \Rightarrow |x_j^1 - c| < \xi, \quad \forall j.$$

De fato em cada ponto  $x_i^0$  a continuidade de  $f^{-1}|_{\bar{1}}$  nos dá a existência de um  $\tilde{\gamma}_i$  tal que se  $|x_i^0 - 0| = x_i^0 < \tilde{\gamma}_i$  então  $|x_j^1 - c| < \xi$  para  $j = i + 1$ . Fixamos  $\tilde{\gamma}$  como o menor destes  $\tilde{\gamma}_i$  e tomamos  $|x - 0| < f^{(n_5-1)}\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}$  pois desta forma garantimos que  $|x_i^0 - 0| = x_i^0 < \tilde{\gamma}$  para todo  $i$  e conseqüentemente  $|x_j^1 - c| < \xi$ , onde  $j = i + 1$ .



**Figura 1.3:** Ramos do ponto  $x$

Mas por outro lado temos que  $A$  é contínua e, pelo lema 1.8,  $V_A|_{\bar{I}}$  é  $\alpha$ -Hölder, portanto também contínua. Então, dado  $\tilde{\varepsilon} = \alpha/2^{n_5}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{existe } \xi_0 \text{ tal que } |x_j^1 - c| < \xi_0 \Rightarrow |A(x_j^1) - A(c)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2^{n_5}} \\ \text{existe } \xi_1 \text{ tal que } |x_j^1 - c| < \xi_1 \Rightarrow |V_A(x_j^1) - V_A(c)| < \tilde{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2^{n_5}} \end{array} \right.$$

Então, fazendo-se  $\xi := \min\{\xi_0, \xi_1\}$  fica determinado um  $\tilde{\gamma}$ . Definindo-se  $\gamma := \min\{f^{n_5}\tilde{\delta}, f^{(n_5-1)}\tilde{\gamma}\}$  temos que:

$$|x - 0| < \gamma \Rightarrow |x_j^1 - c| < \xi, \quad \forall j \Rightarrow$$

$$|A(x_j^1) - A(c)| < \frac{\alpha}{2^{n_5}} \quad (1.10)$$

e

$$|V_A(x_j^1) - V_A(c)| < \frac{\alpha}{2^{n_5}} \quad (1.11)$$

para  $j = 1, \dots, n_5 - 1$ .

Assim, quando tomamos a soma de  $A(\cdot) - m$  sobre cada um dos  $n_5$  ramos que estamos considerando até o seu primeiro iterado em  $\bar{I}$  – isto é até os pontos  $x_1^1, x_2^1, \dots$  ou  $x_{n_5}^1$  – obtemos:

*Ramo 1:* por (1.10):

$$A(x_1^1) - m > A(c) - m - \frac{\alpha}{2^{n_5}}$$



Ramo 2: por (1.9) e (1.10):

$$\begin{aligned} (A(x_1^0) - m) + (A(x_2^1) - m) &< -\alpha + A(c) - m + \frac{\alpha}{2^{n_5}} \\ &= A(c) - m - \left(1 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha \end{aligned}$$

Ramo 3: por (1.9) e (1.10):

$$\begin{aligned} (A(x_1^0) - m) + (A(x_2^0) - m) + (A(x_3^1) - m) &< -2\alpha + A(c) - m + \frac{\alpha}{2^{n_5}} \\ &= A(c) - m - \left(2 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha \\ &< A(c) - m - \left(1 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha \end{aligned}$$

E assim sucessivamente até o ramo  $n_5$ , onde temos:

Ramo  $n_5$ : novamente por (1.9) e (1.10):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_5-1} [A(x_i^0) - m] + A(x_{n_5}^1) - m &< -(n_5 - 1)\alpha + A(c) - m + \frac{\alpha}{2^{n_5}} \\ &= A(c) - m - \left(n_5 - 1 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha \\ &< A(c) - m - \left(1 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha. \end{aligned}$$

Ou seja, para  $j \geq 2$  vale que:

$$\sum_{s=1}^{j-1} [A(x_s^0) - m] + A(x_j^1) - m < A(c) - m - \left(1 - \frac{1}{2^{n_5}}\right) \alpha \quad (1.12)$$

e para  $j = 1$  vale que

$$A(x_1^1) - m > A(c) - m - \alpha/2^{n_5}. \quad (1.13)$$

Agora observamos que:

$$V_A(x) = \left[ \sum_{s=1}^{j-1} A(x_s^0) - m \right] + A(x_j^1) - m + V_A(x_j^1)$$

para algum  $j$ .

Mas por (1.11) temos:

$$V_A(x_j^1) < V_A(c) + \alpha/2^{n_5} \text{ para } j \geq 2 \quad (1.14)$$

$$V_A(x_1^1) > V_A(c) - \alpha/2^{n_5} \text{ para } j = 1. \quad (1.15)$$

Portanto, quando  $j \geq 2$ , temos por (1.12) e por (1.14) que:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{s=1}^{j-1} A(x_s^0) - m \right] + A(x_j^1) - m + V_A(x_j^1) \\ & < A(c) - m + V_A(c) - \left( 1 - \frac{1}{2^{n_5}} - \frac{1}{2^{n_5}} \right) \alpha \\ & = A(c) - m + V_A(c) - \left( 1 - \frac{1}{2^{n_5-1}} \right) \alpha \\ & \leq A(c) - m + V_A(c) - \frac{1}{2^{n_5-1}} \alpha \end{aligned}$$

e quando  $j = 1$ , temos por (1.13) e por (1.15) que:

$$\begin{aligned} A(x_1^1) - m + V_A(x_1^1) & > A(c) - m - \frac{1}{2^{n_5}} \alpha + V_A(c) - \frac{1}{2^{n_5}} \alpha \\ & = A(c) - m + V_A(c) - \frac{1}{2^{n_5-1}} \alpha \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} A(x_1^1) - m + V_A(x_1^1) & > A(c) - m + V_A(c) - \frac{1}{2^{n_5-1}} \alpha \\ & \geq \sum_{s=1}^{j-1} [A(x_s^0) - m] + A(x_j^1) - m + V_A(x_j^1), \quad j \geq 2 \\ & \Rightarrow V_A(x) = A(x_1^1) - m + V_A(x_1^1) \end{aligned}$$

ou seja, se  $x$  pertence ao intervalo  $[0, \gamma)$  então  $V_A(x)$  depende apenas dos ramos de  $x$  que têm o ponto  $x_1^1$ , o que conclui a prova.  $\square$

*Prova da Proposição 1.7:* O desenvolvimento desta prova é semelhante ao que fizemos quando provamos que  $V_A$  é Lipschitz para o potencial  $A = \log |f'|$ .

Sejam  $x$  e  $x'$  dois pontos quaisquer de  $\mathbb{S}^1$ . Sem perda de generalidade vamos supor que  $V_A(x) > V_A(x')$ . Assim, dado  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , vamos fixar um ramo de  $n$  pré-imagens para tal  $x$  de forma que tenhamos

$$V_A(x) - \tilde{\varepsilon} < S_n(A - m)(y)$$

sobre tal ramo.

Para  $x'$  vamos fixar o ramo que acompanha o ramo de  $x$  já selecionado. Temos assim que os pontos  $y$  e  $y' - n$ -ésimas pré-imagens de  $x$  e de  $x'$  - estão no mesmo ramo injetivo de  $f^n$ .

Definimos então  $\rho := (1/2)\gamma$  com  $\gamma$  dado pelo lema 1.10. Dessa forma, considerando-se que  $|x - x'| < \rho$ , vamos analisar três possíveis situações para as posições de  $x$  e  $x'$ .

CASO 1: ou  $x$  ou  $x'$  é menor que  $\rho$

Temos aqui que  $x$  e  $x'$  estão no intervalo  $[0, \gamma)$  e portanto, pelo lema 1.10, os ramos fixados de  $x$  e  $x'$  possuem os pontos  $x_1^1$  e  $(x')_1^1$  respectivamente. Isso significa que todos os pontos de tais ramos estão no intervalo onde  $f$  é expansiva.

Dessa forma, adaptando (1.6) para  $i = 0, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} |V_A(x) - V_A(x')| &= V_A(x) - V_A(x') \\ &< \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-1} [A(f^i y) - A(f^i y')] \\ &\leq \tilde{\varepsilon} + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\lambda}^{i\alpha}} \\ &< \tilde{\varepsilon} + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha - 1} \\ &= \tilde{\varepsilon} + D_1 |x - x'|^\alpha \end{aligned}$$

onde  $D_1$  é dada pela observação 3.

Fazendo-se  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$  obtemos:

$$|V_A(x) - V_A(x')| < D_1 |x - x'|^\alpha \text{ para } |x - x'| < \rho.$$

CASO 2: ou  $x$  ou  $x'$  pertence ao intervalo  $[\rho, a + \varepsilon)$ , onde  $\varepsilon$  define o intervalo onde  $f$  é expansiva.

Observamos que, sendo  $p_1$  ponto atrator de pré-imagens em  $\bar{0}$ , existe  $n_6 > 0$  dependendo apenas da dinâmica de  $f$  tal que os ramos de  $x$  e  $x'$  fixados contêm, cada um, no máximo  $n_6$  pontos no intervalo  $[\rho, a + \varepsilon)$ . Os pontos restantes estão todos no intervalo  $[a + \varepsilon, 1)$ , onde  $f$  é expansiva.

Sendo assim, considerando que

$$|f^i y - f^i y'| \leq \frac{1}{\bar{\lambda}^{(n-i)}} |x - x'|, \quad i \geq n - n_6$$

onde  $0 < \bar{\lambda} = \inf_{[\rho, 1)} |f'| < 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n-n_6}^{n-1} [A(f^i y) - A(f^i y')] &\leq H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \sum_{i=1}^{n_6} \frac{1}{\bar{\lambda}^{i\alpha}} \\ &\leq H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \frac{1}{\bar{\lambda}^\alpha - 1} \left( 1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6\alpha}} \right) \end{aligned}$$

Então, pelas desigualdades acima e adaptando (1.6) para  $i = 0, \dots, n - n_6 - 1$ :

$$\begin{aligned}
|V_A(x) - V_A(x')| &= V_A(x) - V_A(x') \\
&< \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{n-n_6-1} [A(f^i y) - A(f^i y')] + \sum_{i=n-n_6}^{n-1} [A(f^i y) - A(f^i y')] \\
&< \tilde{\varepsilon} + H_\alpha(A) |f^{n-n_6} y - f^{n-n_6} y'|^\alpha \sum_{i=1}^{n-n_6} \frac{1}{\lambda^{i\alpha}} \\
&\quad + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \frac{1}{\bar{\lambda}^\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6\alpha}}\right) \\
&< \tilde{\varepsilon} + D_1 |x - x'|^\alpha \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6}} + H_\alpha(A) |x - x'|^\alpha \frac{1}{\bar{\lambda}^\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6\alpha}}\right) \\
&< \tilde{\varepsilon} + \left[ D_1 \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6}} + H_\alpha(A) \frac{1}{\bar{\lambda}^\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6\alpha}}\right) \right] |x - x'|^\alpha
\end{aligned}$$

Como anteriormente fazemos  $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$ , definimos

$$D_3 := D_1 \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6}} + H_\alpha(A) \frac{1}{\bar{\lambda}^\alpha - 1} \left(1 - \frac{1}{\bar{\lambda}^{n_6\alpha}}\right)$$

e obtemos:

$$|V_A(x) - V_A(x')| < D_3 |x - x'|^\alpha \text{ para } |x - x'| < \rho.$$

**CASO 3:**  $x$  e  $x'$  estão no intervalo  $[a + \varepsilon, 1)$

Estamos nas hipóteses do lema 1.8, já provado. Temos portanto que:

$$|V_A(x) - V_A(x')| < D_1 |x - x'|^\alpha$$

Dessa forma, definindo-se  $H_\alpha(V_A) := \max\{D_1, D_3\}$ , concluímos que

$$|V_A(x) - V_A(x')| < H_\alpha(V_A) |x - x'|^\alpha \text{ para } |x - x'| < \rho$$

o que prova a proposição.  $\square$

Dessa forma, como para o potencial  $A \in \mathcal{C}^\alpha$  também vale que  $V_A \circ f - V_A - A + m = 0$  no suporte de qualquer medida maximizante  $\mu$ , concluímos a prova do teorema A' enunciado na seção 1.1.

Para mostrarmos que genericamente temos uma única medida maximizante vamos precisar de um resultado de análise enunciado na proposição abaixo, cuja prova pode ser encontrada por exemplo em [CLT].

**Proposição 1.11.** *Sejam  $\mathcal{K}$  um subconjunto compacto e convexo do conjunto de probabilidades em  $\mathbb{S}^1$  e  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  um espaço de Banach denso em  $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ . Então existe um conjunto residual  $\mathcal{R}$  em  $\mathcal{H}$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{R}$ , se*

$$m(A) := \max_{\mu \in \mathcal{K}} \int A d\mu \quad e \quad \mathcal{M}(A) := \left\{ \mu \in \mathcal{K} \mid \int A d\mu = m(A) \right\}$$

então  $\mathcal{M}(A)$  contém uma única medida.

Como a função  $f$  que estamos considerando é contínua em  $\mathbb{S}^1$  temos que  $\mathcal{M}(f)$  é um subconjunto compacto e convexo do conjunto de todas as probabilidades de  $\mathbb{S}^1$ . Por outro lado, denotando por  $\|A\|_{\infty}$  a norma uniforme de  $A$  e por  $\|A\|_{\alpha} = H_{\alpha}(A) + \|A\|_{\infty}$  como a norma  $\alpha$ -Hölder de  $A$ , temos que  $(\mathcal{C}^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha})$  é um espaço de Banach denso em  $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ . Então fazendo-se  $\mathcal{K} = \mathcal{M}(f)$  e  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{C}^{\alpha}, \|\cdot\|_{\alpha})$  fica provada a primeira parte do teorema B. Isto é, que o conjunto das funções  $\alpha$ -Hölder com uma única medida maximizante é genérico em  $\mathcal{C}^{\alpha}$ .

Como o lema 1.5 foi provado para  $A$  e  $V_A$  contínuas, seu resultado continua válido para o caso que estamos considerando. Logo, se  $\mu_A$  é a única medida que maximiza  $\int A d\mu$ , temos que tal medida é unicamente ergódica no seu suporte, concluindo assim a prova do teorema B.

Destacamos ainda que, se restringimos a função  $f$  a um conjunto adequado então podemos mostrar que as medidas maximizantes para um potencial genérico  $A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  são únicas, unicamente ergódicas e com suporte em órbitas periódicas.

De fato, lembrando que  $p_1$  é o único ponto fixo não nulo de  $\bar{0}$  e  $b$  é o ponto onde há a troca dos ramos injetivos da função  $f$ , definimos  $I$  como o conjunto  $I = [p_1, b] \cup [c, 1]$ , onde  $c = f^{-1}|_{\bar{1}}(p_1)$ . Podemos observar na figura 1.4, que mostra o gráfico da função  $f$ , que esta função restrita ao conjunto  $I$  é conjugada a transformação  $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

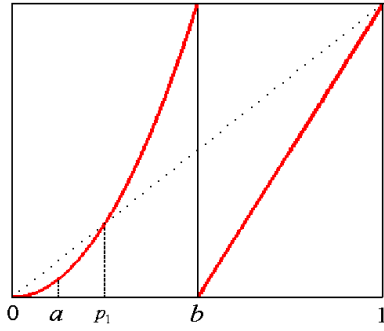
$$g(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{se } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cujos gráficos podem ser vistos na figura 1.5.

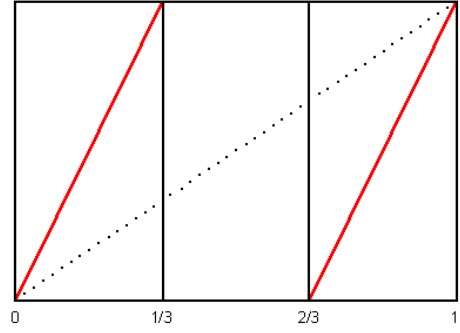
Notamos que a função  $g$  restrita ao conjunto

$$\Omega = \bigcap g^{-n} \left( \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right)$$

tem suporte no conjunto de Cantor, é expansiva e conjugada ao shift de dois símbolos. Sendo assim, é fácil mostrar que  $f$  satisfaz duas condições importantes:



**Figura 1.4:** Função  $f$



**Figura 1.5:** Função  $g$

- i) existe uma sub-ação definida em  $[p_1, 1]$ , basta tomar a sub-ação  $V_A$  restrita a este conjunto;
- ii) tem a propriedade do shadowing no intervalo  $I$ .

Dessa forma podemos aplicar um procedimento análogo ao feito em [CLT] mas agora para a função  $f|_I$ . Obtemos assim que, genericamente nos potenciais  $\alpha$ -Hölder  $A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , a medida que maximiza a ação é única, unicamente ergódica e tem suporte em órbitas periódicas.

## 2

# APLICAÇÕES PARA A FUNÇÃO SUB-AÇÃO

## 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos mostrar uma aplicação para as funções sub-ação. Existem várias maneiras de determinarmos tais funções. No primeiro capítulo encontramos as sub-ações através dos ramos de pré-imagens de um ponto  $x$  por uma função  $f$  fixada. Neste capítulo vamos usar uma outra técnica para determinarmos as sub-ações utilizando o operador de transferência de Ruelle.

As sub-ações definidas por esse método têm algumas propriedades especiais e podem ser utilizadas para estimarmos o comportamento assintótico de certas integrais que dependem de um parâmetro  $\xi$  que tende ao infinito.

Essas integrais, que serão definidas na próxima seção, aparecem de maneira natural na Teoria dos Grandes Desvios e também são de grande importância na mecânica estatística.

## 2.2 DEFININDO SUB-AÇÕES

Vamos denotar por  $\Omega$  o espaço de todas as seqüências indexadas em  $\mathbb{N}$  e tomando valores no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ .  $\Omega$  é um espaço compacto para a métrica definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^N & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

onde  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $N$  é o índice do primeiro elemento em que as seqüências  $x$  e  $y$  diferem.

Consideramos neste espaço o subshift de tipo finito  $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$  definido por  $\sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ . Temos que  $\sigma$  é topologicamente mixing.

Dada uma função  $\alpha$ -Hölder  $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , nosso objetivo é encontrar cotas superiores para

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\xi \Psi(x)} d\mu_\xi(x). \quad (2.1)$$

Dessa forma estaremos estimando o comportamento assintótico de tal integral.

Para obtermos uma cota superior vamos, primeiramente, introduzir um potencial  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz genérico e, em seguida, construiremos uma sub-ação para tal potencial. Esta nova função nos permitirá estimar o valor da integral acima quando o parâmetro  $\xi$  tende ao infinito.

Vamos abordar aqui um caso mais simples onde o potencial  $A$  depende apenas das duas primeiras coordenadas de  $x \in \Omega$ , ou seja,  $A(x) = A(x_1, x_2)$  onde  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ .

Denotando por  $\mathcal{F}$  o espaço das funções  $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que são Lipschitz com respeito a norma  $d$ , definimos o operador de Ruelle  $\mathcal{L}_{\xi A}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  por

$$\mathcal{L}_{\xi A} \phi(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\xi A(y)} \phi(y)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro positivo e  $A$  o potencial Lipschitz já fixado.

Como cada elemento da seqüência  $x \in \Omega$  toma valores de 1 a  $n$ , vamos considerar  $Q_\xi$  a matriz  $n \times n$  tal que  $(Q_\xi)_{ij} = e^{\xi A(i,j)}$ . Sendo assim, podemos reescrever o operador de Ruelle da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\xi A} \phi(x) = \sum_{i=1}^n (Q_\xi)_{ix_1} \phi(i, x)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots)$ .

Como todas as entradas da matriz  $Q_\xi$  são positivas podemos usar o lema abaixo cuja prova pode ser encontrada em [Si] (lema 5.4).

**Lema 2.1.** *Se  $Q_\xi$  é uma matriz com todas as entradas positivas então existe um único número positivo  $\lambda_\xi$  e vetores coluna  $l_\xi$  e  $r_\xi$  únicos tais que:*

- $(l_\xi)_j > 0$  e  $(r_\xi)_j > 0$  para  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;
- $\sum_{i=1}^n (l_\xi)_i (Q_\xi)_{ij} = \lambda_\xi (l_\xi)_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ;
- $\sum_{j=1}^n (Q_\xi)_{ij} (r_\xi)_j = \lambda_\xi (r_\xi)_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;
- $\sum_{i=1}^n (l_\xi)_i (r_\xi)_i = 1$ .

Seja  $\psi_\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por  $\psi_\xi(x) = (l_\xi)_{x_1}$ . Observamos que tal função só depende da primeira coordenada de  $x$ . Dessa forma, aplicando o



operador de Ruelle em  $\psi_\xi$  obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\xi A}\psi_\xi(x) &= \sum_{i=1}^n \psi_\xi(i, x)(Q_\xi)_{ix_1} \\ &= \sum_{i=1}^n (l_\xi)_i(Q_\xi)_{ix_1} = \lambda_\xi(l_\xi)_{x_1} = \lambda_\xi\psi_\xi(x).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Concluimos assim que a  $\psi_\xi$  é uma autofunção associada ao autovetor  $\lambda_\xi$  do operador  $\mathcal{L}_{\xi A}$ .

Por outro lado, podemos aplicar o Teorema de Ruelle-Perron-Frobenius (theorem 2.2 de [PP]) no potencial  $\xi A$ . Este teorema nos garante a existência de um autovalor maximal  $\widehat{\lambda}_\xi$  para os operadores  $\mathcal{L}_{\xi A}$  e  $\mathcal{L}_{\xi A}^*$ , dual do operador de Ruelle, além das correspondentes autofunção  $\varphi_\xi$ , estritamente positiva, e automedida  $\nu_\xi$  de forma que

$$\mathcal{L}_{\xi A}\varphi_\xi = \widehat{\lambda}_\xi\varphi_\xi, \quad \mathcal{L}_{\xi A}^*\nu_\xi = \widehat{\lambda}_\xi\nu_\xi \quad \text{e} \quad \int \varphi_\xi d\nu_\xi = 1.\tag{2.3}$$

Entretanto, de (2.2) temos que  $\lambda_\xi$  também é um autovalor para o operador  $\mathcal{L}_{\xi A}$ . Como  $\widehat{\lambda}_\xi$  é maximal temos que  $\lambda_\xi \leq \widehat{\lambda}_\xi$ .

Se  $\lambda_\xi < \widehat{\lambda}_\xi$  então temos que  $\psi_\xi$  está no complemento ortogonal do subespaço gerado pela autofunção  $\varphi_\xi$ , isto é:

$$\int \psi_\xi\varphi_\xi d\nu_\xi = 0.$$

Mas isto é uma contradição porque  $\psi_\xi$  e  $\varphi_\xi$  são estritamente positivas. Logo concluimos que  $\lambda_\xi = \widehat{\lambda}_\xi$ .

Desta maneira, passaremos a denotar o autovalor maximal de  $\mathcal{L}_{\xi A}$  apenas por  $\lambda_\xi$  e tomaremos como sua autofunção

$$\varphi_\xi(x) = (l_\xi)_{x_1}$$

que depende apenas da primeira coordenada de  $x$ .

Nosso objetivo agora é obter uma sub-ação para  $(A, \sigma)$ . Considerando  $V_\xi^- : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$V_\xi^-(x) = \frac{1}{\xi} \log \varphi_\xi(x) = \frac{1}{\xi} \log (l_\xi)_{x_1}$$

então, por [CLT] (proposition 29), existe uma subsequência de  $(V_{\xi_k}^-)_{\xi_k > 0}$  que converge para uma função  $V^-$ , ou seja,

$$V^-(x) = \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log \varphi_{\xi_k}(x) = \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log (l_{\xi_k})_{x_1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Esta função  $V^-$  é Lipschitz e também é uma sub-ação para  $(A, \sigma)$  uma vez que satisfaz a equação

$$V^-(x) = \max_{\sigma(y)=x} \{V^-(y) + A(y) - m(A, \sigma)\},$$

onde lembramos que  $m(A, \sigma) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\sigma)} \int A d\mu$ .

Observamos também que  $V^-(x) = V^-(x_1)$  porque  $\varphi_\xi$  depende apenas da primeira coordenada de  $x$ .

Como o potencial  $A(x)$  depende apenas das duas primeiras coordenadas de  $x$ , associamos a este potencial uma matriz  $n \times n$  dada por  $(A)_{ij} = A(i, j)$ . Da mesma forma, vamos considerar agora o dual  $A^*$  do potencial  $A$  dado pela matriz transposta de  $A$ , ou seja,  $A^*(i, j) = A(j, i)$ .

Notamos que um autovetor à esquerda de  $A$  é um autovetor à direita de  $A^*$  bem como um autovetor à direita de  $A$  é um autovetor à esquerda de  $A^*$ .

Novamente estamos interessados no potencial  $\xi A^*$  mas desta vez tomaremos apenas os parâmetros  $\xi$  da subsequência  $\xi_k$  para a qual  $(V_\xi^-)$  converge. Para simplificar a notação continuaremos a denotar o potencial por  $\xi A^*$ .

Fazendo para o operador  $\mathcal{L}_{\xi A^*}$  um procedimento análogo ao feito para  $\mathcal{L}_{\xi A}$  obtemos que

$$\mathcal{L}_{\xi A^*} \varphi_\xi^* = \lambda_\xi \varphi_\xi^* \quad \text{onde} \quad \varphi_\xi^* = (r_\xi)_{x_1}.$$

Definindo a função  $V_\xi^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V_\xi^+(x) = \frac{1}{\xi} \log \varphi_\xi^*(x) = \frac{1}{\xi} \log (r_\xi)_{x_1}$$

também temos, por [CLT] (proposition 29), que existe uma subsequência de  $(V_\xi^+)_{\xi > 0}$  que converge para uma função  $V^+$  Lipschitz dada por

$$V^+(x) = \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log \varphi_{\xi_k}^+(x) = \lim_{\xi_k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log (r_{\xi_k})_{x_1}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Asseguramos dessa forma a existência de uma sub-ação para  $(A^*, \sigma)$  pois  $V^+$  satisfaz a equação

$$V^+(x) = \max_{\sigma(y)=x} \{V^+(y) + A^*(y) - m(A^*, \sigma)\},$$

onde  $m(A^*, \sigma) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\sigma)} \int A^* d\mu$ .

Notamos que, como a sub-ação anterior,  $V^+$  também só depende da primeira coordenada de  $x \in \Omega$ . Isto nos permite escrever  $V^+(x) = V^+(x_1)$ .

Aproveitamos para observar que se o potencial  $A$  depender de um número finito de coordenadas podemos tratar de forma análoga. No caso de  $A$  depender das três primeiras coordenadas podemos definir uma matriz  $Q$  como a tomada anteriormente mas neste caso seu tamanho será  $n^2 \times n^2$  e suas linhas

terão ou os  $n$  primeiros elementos todos nulos ou os  $n$  últimos. Notamos que  $Q^2$  terá todas as entradas estritamente positivas, o que nos garante a existência de um autovalor maximal  $\beta$ . Pode-se mostrar então que  $\sqrt{\beta}$  é um autovalor para  $Q$  e dessa forma segue-se o procedimento análogo ao que foi feito anteriormente.

## 2.3 ESTIMANDO COMPORTAMENTOS ASSINTÓTICOS

Primeiramente observamos que a automedida  $\nu_\xi$ , definida em (2.3) pode não ser invariante para  $\sigma$ . Sendo assim, tomamos a medida  $\mu_\xi = \varphi_\xi \nu_\xi$  que possui tal propriedade.

Por [CLT] (proposition 29) temos que  $\mu_\xi$  converge fracamente para a medida maximizante de  $A$ , que denotaremos por  $\mu_\infty$ . Além disso, como tomamos um potencial  $A$  genérico, esta medida maximizante é única e tem suporte em órbitas periódicas.

Observamos também que, sendo  $\omega$  um ponto periódico de período  $n$  e  $\delta_\omega$  a medida invariante para  $\sigma$  sob esta órbita, temos que

$$\begin{aligned} \int A d\delta_\omega &= \frac{1}{n} (A(\omega) + A(\sigma\omega) + \cdots + A(\sigma^{n-1}\omega)) \\ &= \frac{1}{n} (A(\omega_1, \omega_2) + A(\omega_2, \omega_3) + \cdots + A(\omega_{n-1}, \omega_n) + A(\omega_n, \omega_1)) \\ &= \frac{1}{n} (A^*(\omega_2, \omega_1) + A^*(\omega_3, \omega_2) + \cdots + A^*(\omega_n, \omega_{n-1}) + A^*(\omega_1, \omega_n)) \\ &= \frac{1}{n} (A^*(\omega_1, \omega_n) + A^*(\omega_n, \omega_{n-1}) + \cdots + A^*(\omega_3, \omega_2) + A^*(\omega_2, \omega_1)) \\ &= \int A^* d\delta_{\widehat{\omega}} \end{aligned}$$

onde  $\widehat{\omega} = (\omega_1, \omega_n, \cdots, \omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega_n, \cdots)$  é um ponto periódico também de período  $n$  e  $\delta_{\widehat{\omega}}$  a medida sob sua órbita.

Dessa forma concluímos que  $m(A, \sigma) = m(A^*, \sigma)$ .

**Lema 2.2.** *Dado  $x \in \overline{a_1 a_2 \cdots a_s}$  temos que*

$$V^+(a_1) - V^+(a_s) \geq \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j x) - (s-1)m(A, \sigma).$$

*Prova.* Seja  $y \in \overline{a_s a_{s-1} \cdots a_2 a_1}$ . Lembrando que  $V^+$  é uma sub-ação para  $(A^*, \sigma)$  temos que

$$\begin{aligned} V^+(\sigma y) - V^+(y) &\geq A^*(y) - m(A^*, \sigma) \\ V^+(\sigma^2 y) - V^+(\sigma y) &\geq A^*(\sigma y) - m(A^*, \sigma) \\ \Rightarrow V^+(\sigma^2 y) - V^+(y) &\geq A^*(\sigma y) + A^*(y) - 2m(A^*, \sigma). \end{aligned}$$

Repetindo-se esse processo  $(s - 2)$  vezes e substituindo-se  $m(A^*, \sigma)$  por  $m(A, \sigma)$ , encontramos que

$$V^+(\sigma^{s-1}y) - V^+(y) \geq \sum_{j=0}^{s-2} A^*(\sigma^j y) - (s-1)m(A, \sigma).$$

Mas como

$$\begin{aligned} A^*(y) + A^*(\sigma y) + \cdots + A^*(\sigma^{s-2}y) &= A^*(a_s, a_{s-1}) + \cdots + A^*(a_2, a_1) \\ &= A(a_{s-1}, a_s) + A(a_{s-2}, a_{s-1}) + \cdots + A(a_1, a_2) \\ &= A(x) + A(\sigma x) + \cdots + A(\sigma^{s-2}x) \end{aligned}$$

obtemos que

$$\sum_{j=0}^{s-2} A^*(\sigma^j y) = \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j x).$$

E portanto,

$$V^+(a_1) - V^+(a_s) \geq \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j x) - (s-1)m(A, \sigma)$$

concluindo a prova. □

Antes de encontrarmos cotas superiores para (2.1) precisamos estimar o comportamento assintótico da medida  $\mu_\xi$  de um cilindro  $C = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_s}$ , onde  $s \geq 1$ . Para tanto, vamos definir uma matriz estocástica  $\mathcal{P}$ , também  $n \times n$ , cujos elementos são dados por

$$(\mathcal{P})_{ij} = \frac{(Q_\xi)_{ij}(r_\xi)_j}{\lambda_\xi(r_\xi)_i} = \frac{e^{\xi A(i,j)}(r_\xi)_j}{\lambda_\xi(r_\xi)_i}.$$

Tomando  $\pi_i = (r_\xi)_i(l_\xi)_i$  temos pelo lema 2.1 que  $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$  e portanto

$$\mu_\xi(C) = \mu_\xi(\overline{a_1 a_2 \cdots a_s}) = \pi_{a_1}(\mathcal{P})_{a_1 a_2}(\mathcal{P})_{a_2 a_3} \cdots (\mathcal{P})_{a_{s-1} a_s}.$$

Substituindo-se os valores da matriz  $\mathcal{P}$  nesta equação obtemos

$$\begin{aligned} \mu_\xi(C) &= (r_\xi)_{a_1} (l_\xi)_{a_1} \frac{e^{\xi A(a_1, a_2)}(r_\xi)_{a_2}}{\lambda_\xi(r_\xi)_{a_1}} \cdots \frac{e^{\xi A(a_{s-1}, a_s)}(r_\xi)_{a_s}}{\lambda_\xi(r_\xi)_{a_{s-1}}} \\ &= \frac{(l_\xi)_{a_1} (r_\xi)_{a_s}}{\lambda_\xi^{s-1}} e^{\xi \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j(x))} \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde  $x \in C = \overline{a_1 a_2 \cdots a_s}$ .

Definimos a pressão de  $\xi A$  como

$$P(\xi A) = \sup_{\mu} \left\{ h_{\mu}(\sigma) + \int \xi A d\mu \right\}$$

onde o supremo é tomado sobre todas as medidas invariantes para  $\sigma$  e  $h_\mu(\sigma)$  é a entropia métrica de  $\sigma$ . Pelo princípio variacional (theorem 3.5 de [PP])

$$P(\xi A) = h_{\mu_\xi}(\sigma) + \int \xi Ad\mu_\xi = \log \lambda_\xi$$

de forma que, para uma medida  $\mu \in \mathcal{M}(\sigma)$  qualquer temos

$$\xi \int Ad\mu \leq h(\mu) + \xi \int Ad\mu \leq h(\mu_\xi) + \xi \int Ad\mu_\xi \leq h_{top} + \xi \int Ad\mu_\xi.$$

Tomando-se o supremo sob todas as medidas invariantes para  $\sigma$  obtemos

$$\xi m(A, \sigma) \leq P(\xi A) \leq h_{top} + \xi m(A, \xi)$$

onde  $h_{top}$  é a entropia topológica. Então, dividindo-se os termos por  $\xi$  e fazendo-se o limite quando  $\xi \rightarrow \infty$  encontramos

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{P(\xi A)}{\xi} = m(A, \sigma). \quad (2.5)$$

Observamos ainda que existe uma subsequência  $\xi_k$  de  $\xi$  que define as funções  $V^+(x_1)$  e  $V^-(x_1)$ . Vamos tomar como hipótese que tais limites existem para a seqüência  $\xi$ . Esta condição não é muito restritiva uma vez que pode-se mostrar que toda subsequência convergente converge para o mesmo limite.

Estamos agora em condições de provar a proposição abaixo.

**Proposição 2.3.** *Seja  $C$  o cilindro  $\overline{a_1 a_2 \cdots a_s}$ , para um  $s$  fixado. Então,*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \mu_\xi(C) \leq V^-(a_1) + V^+(a_1).$$

*Prova.* Seja  $\xi$  uma seqüência tal que

$$V^+(x_1) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log(r_\xi)_{x_1} \quad \text{e} \quad V^-(x_1) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log(l_\xi)_{x_1}$$

então de (2.4) e de (2.5) temos

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \mu_\xi(C) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log(l_\xi)_{a_1} + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log(r_\xi)_{a_s} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j x) - \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \lambda_\xi^{s-1} \\ &= V^-(a_1) + V^+(a_s) - (s-1)m(A, \sigma) + \sum_{j=0}^{s-2} A(\sigma^j x) \end{aligned}$$

onde  $x \in C$  e  $C$  é um cilindro qualquer de tamanho  $s$  para um  $s$  fixo.

Desta forma, pelo lema 2.2 temos

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \mu_\xi(C) \leq V^-(a_1) + V^+(a_1) \quad \square$$

Antes de passarmos para a prova do teorema que estima o comportamento assintótico de integrais que dependem do parâmetro  $\xi$  faremos uma observação a respeito do sinal de  $V^-(a_i) + V^+(a_i)$ .

Primeiramente notamos que para qualquer  $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  temos

$$\begin{aligned} V^-(a_i) + V^+(a_i) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log(l_\xi)_{a_i}(r_\xi)_{a_i} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_k} \log \pi_{a_i} \end{aligned}$$

Mas pelo lema 2.1 temos que  $0 < \pi_{a_i} < 1$  para todo  $a_i$ . Então concluímos que  $V^-(a_i) + V^+(a_i) \leq 0$ .

De fato temos que  $V^-(a_i) + V^+(a_i) = 0$  para todo cilindro  $\bar{a}_i$  tal que  $\mu_\infty(\bar{a}_i) > 0$ , onde  $\mu_\infty$  é a medida maximizante para  $m(A, \sigma)$ . Isto ocorre porque  $\mu_\xi$  converge fracamente para a medida  $\mu_\infty$ , portanto

$$0 < \mu_\infty(\bar{a}_i) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mu_\xi(\bar{a}_i) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (l_\xi)_{a_i}(r_\xi)_{a_i}$$

e conseqüentemente

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log(l_\xi)_{a_i}(r_\xi)_{a_i} = V^+(a_i) + V^-(a_i) = 0$$

Vamos provar agora o teorema que nos dá cotas superiores para (2.1).

**Teorema 2.4.** *Se  $\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $\alpha$ -Hölder com constante de Hölder dada por  $H_\alpha(\Psi)$  e*

$$F(\Psi) = \sup_{x \in \Omega} \{ \Psi(x) + V^+(x_1) + V^-(x_1) \}$$

então

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\xi \Psi(x)} d\mu_\xi(x) \leq F(\Psi).$$

*Prova.* Fixado um  $s > 0$ , denotaremos os cilindros de  $\Omega$  com  $s$  símbolos por  $C_j^s$ , onde  $j = a_1 a_2 \cdots a_s$  varia entre as  $n^s$  possíveis combinações dos elementos  $a_i$ .

Definindo  $\omega_j^s$  como um elemento de  $C_j^s$  tal que  $\Psi(\omega_j^s) + V^+(\omega_j^s) + V^-(\omega_j^s) = \sup_{x \in C_j^s} \{ \Psi(x) + V^+(x) + V^-(x) \}$ , temos

$$\begin{aligned} e^{\xi \Psi(x)} &= e^{\xi (\Psi(x) - \Psi(\omega_j^s))} e^{\xi \Psi(\omega_j^s)} \\ &\leq e^{\xi H_\alpha(\Psi) d(x, \omega_j^s)^\alpha} e^{\xi \Psi(\omega_j^s)} \\ &\leq e^{\xi \left( \frac{H_\alpha(\Psi)}{3^{s\alpha}} + \Psi(\omega_j^s) \right)} \end{aligned}$$

Além disso, dado um  $\delta > 0$ , a proposição 2.3 nos garante a existência de um  $M > 0$ , independente do cilindro e do  $s$  tomados, tal que para  $\xi > M$  temos

$$\mu_\xi(C) \leq e^\xi (V^+(a_1) + V^-(a_1) + \delta)$$

Então:

$$\begin{aligned} \int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi &= \sum_j \int_{C_j^s} e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi \\ &\leq \sum_j e^{\xi \left( \frac{H_\alpha(\Psi)}{3^{s\alpha}} + \Psi(\omega_j^s) \right)} \mu_\xi(C_j^s) \\ &\leq \sum_j e^{\xi G(\Psi)} \end{aligned}$$

onde

$$G(\Psi) = \frac{H_\alpha(\Psi)}{3^{s\alpha}} + \delta + \Psi(\omega_j^s) + V^+(a_1) + V^-(a_1).$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\xi F(\Psi)}} \int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi &\leq \sum_j e^{\xi [G(\Psi) - F(\Psi)]} \\ \frac{1}{\xi} \log \left( \frac{1}{e^{\xi F(\Psi)}} \int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi \right) &\leq \frac{1}{\xi} \log \left( \sum_j e^{\xi [G(\Psi) - F(\Psi)]} \right) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \left( \frac{\int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi}{e^{\xi F(\Psi)}} \right) &\leq \left( \delta + \frac{H_\alpha(\Psi)}{3^{s\alpha}} \right) + \\ &+ \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \sum_j e^{\xi [\Psi(\omega_j^s) + V^+(a_1) + V^-(a_1) - F(\Psi)]}. \end{aligned}$$

Observamos que  $\Psi(\omega_j^s) + V^+(a_1) + V^-(a_1) - F(\Psi) \leq 0$ . Além disso, existe ao menos um  $\omega_j^s$  que realiza o supremo definido por  $F(\Psi)$  (e no máximo  $n^s$ ). Sendo assim,

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \sum_j e^{\xi [\Psi(\omega_j^s) + V^+(a_1) + V^-(a_1) - F(\Psi)]} = 0$$

e

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \left( \frac{\int e^{\xi\Psi(x)} d\mu_\xi}{e^{\xi F(\Psi)}} \right) \leq \left( \delta + \frac{H_\alpha(\Psi)}{3^{s\alpha}} \right).$$

Fazendo-se  $s \rightarrow \infty$  e  $\delta \rightarrow 0$  obtemos

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \left( \frac{\int e^{\xi \Psi(x)} d\mu_\xi}{e^{\xi F(\Psi)}} \right) \leq 0$$

e portanto

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \log \int e^{\Psi(x)} d\mu_\xi(x) \leq F(\Psi)$$

concluindo a prova do teorema. □



# Referências

- [CLT] G. Contreras, A. Lopes, Ph. Thieullen, *Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **21** (2001), 1379–1409.
- [DZ] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, Boston (1993).
- [LT] A. Lopes, Ph. Thieullen, *Sub-actions for Anosov diffeomorphisms*. Astérisque **287** (2003), 133–146.
- [LT2] A. Lopes, Ph. Thieullen, *Sub-actions for Anosov flows*. A ser publicado em Ergod. Th. & Dynam. Sys.
- [LT3] A. Lopes, Ph. Thieullen, *Mather measures and the Bowen-Series transformation*. A ser publicado no Annales de l’IHP C: Non Linear Analysis.
- [Ma] R. Mañé, *Teoria Ergódica*. Projeto Euclides, IMPA (1983).
- [Ma2] R. Mañé, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*. Nonlinearity **9** (1996), 273–310.
- [PP] W. Parry, M. Pollicott, *Zeta functions and closet orbits for hyperbolic systems*. Astérisque **187-188**, Soc. Math. de France, Paris (1990).
- [Si] Y. Sinai, *Probability Theory - An Introductory Course*. Springer-Verlag, Berlin (1992).