

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ROBERTO PAAZ

**ESTUDO E ANÁLISE DE TÉCNICAS
PARA UM SISTEMA DE
POSICIONAMENTO ATRAVÉS DA
CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO
MAGNÉTICO**

Porto Alegre
2010

ROBERTO PAAZ

**ESTUDO E ANÁLISE DE TÉCNICAS
PARA UM SISTEMA DE
POSICIONAMENTO ATRAVÉS DA
CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO
MAGNÉTICO**

Projeto de Diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alexandre Balbinot

Porto Alegre
2010

ROBERTO PAAZ

**ESTUDO E ANÁLISE DE TÉCNICAS
PARA UM SISTEMA DE
POSICIONAMENTO ATRAVÉS DA
CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO
MAGNÉTICO**

Este Projeto foi julgado adequado para a obtenção dos créditos da Disciplina Projeto de Diplomação do Departamento de Engenharia Elétrica e aprovado em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____

Prof. Dr. Alexandre Balbinot, Microsoft

Doutor pela Brandeis University – Waltham, EUA

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alceu Heinke Frigeri,

Prof. Dr. Alexandre Balbinot,

Prof. Dr. Álvaro Augusto Almeida de Salles,

Chefe do DELET: _____

Prof. Dr. Alberto Bastos do Canto Filho

Porto Alegre, dezembro de 2010.

RESUMO

Este é um trabalho que tem o objetivo de analisar a geração de campos magnéticos gerados a partir de uma bobina. Uma modelagem matemática é realizada e ensaios são realizados para verificar os campos obtidos. Ao final, é discutida a possibilidade de uma implementação de um sistema de posicionamento baseado no experimento. Pelos resultados obtidos através da medição do campo magnético gerado a partir de uma bobina construída sobre uma plataforma de ensaios constituída por transladores e um braço de madeira, pode-se verificar que a construção de um sistema de posicionamento é possível com algumas melhorias a partir dos ensaios realizados.

Palavras-chave: Bobina, sensor Hall, campo magnético, sistema de posicionamento.

RESUMO

This is a work whose objective is to analyse the generation of magnetic field produced by coils. A mathematical modelling is prepared and experiments are done in order to verify the fields obtained. In the end, a discussion is made about the construction of a positioning system. Accordingly to the results obtained from the measurement of the magnetic field generated by the coil constructed over a platform, the construction of a positioning system is possible if some improvements are done based on the tests performed.

Palavras-chave: coil, Hall sensor, magnetic field, positioning system.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1:	Exemplos de antenas de quadro.	17
Figura 3.1:	Sistema de coordenadas para a bobina utilizada.	26
Figura 3.2:	Sistema de coordenadas para uma espira de ordem m	26
Figura 3.3:	Sistema de coordenadas para sensor.	28
Figura 3.4:	Posicionador tridimensional utilizado.	30
Figura 3.5:	Foto do posicionamento do sensor (a) e foto da montagem da estrutura de medição com a bobina (b).	31
Figura 3.6:	Diagramas em blocos do circuito de recebimento do sinal do sensor.	32
Figura 3.7:	Diagrama da cadeia de medidas do experimento.	32
Figura 3.8:	Diagrama do circuito de compensação.	32
Figura 3.9:	Diagrama do circuito de amplificação.	37
Figura 3.10:	Diagrama do circuito de filtro.	38
Figura 3.11:	Núcleos de ferrite disponíveis.	39
Figura 3.12:	Carretel adquirido.	40
Figura 3.13:	Núcleo de ferrite com fio enrolado, formando a bobina.	41
Figura 3.14:	Parafusos de latão (a) e inox (b) utilizados na fixação do experimento.	42
Figura 3.15:	Fios blindados utilizados nos circuitos.	43
Figura 3.16:	Capacitores de aterramento no circuito de compensação e amplificação.	43
Figura 3.17:	Layout das placas com malha de terra em torno do circuito. placa do sensor Hall (a), placa da fonte de alimentação (b) e placa do condicionador (c).	44
Figura 3.18:	Interface do programa para aquisição da série temporal.	45
Figura 4.1:	Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de $1,5\text{cm}$	47
Figura 4.2:	Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de 1cm	48
Figura 4.3:	Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de $0,5\text{cm}$	49
Figura 4.4:	Erro percentual das componentes radial e angular de acordo com a Equação (4.1) para uma espira simples de fio AWG 31.	51
Figura 4.5:	Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para um conjunto de espiras enroladas num núcleo de ferrite de 5cm de comprimento.	52
Figura 4.6:	Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente alternada.	54

Figura 4.7:	Saída teórica de tensão da variação do eixo x com corrente alternada. . .	55
Figura 4.8:	Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente alternada. . .	56
Figura 4.9:	Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente constante. . .	57
Figura 4.10:	Saída teórica obtida da variação do eixo x com corrente constante. . . .	58
Figura 4.11:	Implementação do sensor Hall em uma mão.	59
Figura 4.12:	Resposta para a aproximação do sensor implementado na mão.	60

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1:	Tabelas de fios AWG analisados	34
Tabela 3.2:	Parâmetros de construção do estágio de amplificação.	35
Tabela 4.1:	Valores máximos de densidade de fluxo magnético para uma espira com corrente senoidal.	50
Tabela 4.2:	Número de voltas para os diferentes comprimentos de núcleos.	53

LISTA DE SÍMBOLOS

\vec{e}_i	vetor unitário genérico na direção i ;
\vec{v}	vetor genérico $\vec{v} = \vec{e}_x v_x + \vec{e}_y v_y + \vec{e}_z v_z$ onde v_x , v_y e v_z são as componentes cartesianas do vetor em coordenadas retangulares;
$ \vec{v} $	Módulo do vetor \vec{v} , $ \vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$;
$\vec{\mathcal{E}}$	Campo elétrico dependente da posição e do tempo, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$;
$\vec{\mathcal{B}}$	Densidade de fluxo magnético dependente da posição e do tempo, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$;
$\vec{\mathcal{D}}$	Densidade de fluxo elétrico dependente da posição e do tempo, $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$;
$\vec{\mathcal{H}}$	Campo magnético dependente da posição e do tempo, $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$;
Φ	Potencial elétrico dependente da posição e do tempo, $\Phi(\vec{r}, t)$;
$\vec{\mathcal{A}}$	Potencial magnético dependente da posição e do tempo, $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$;
\vec{E}	Campo elétrico dependente da posição, $\vec{E}(\vec{r})$;
\vec{B}	Densidade de fluxo magnético dependente da posição, $\vec{B}(\vec{r})$;
\vec{D}	Densidade de fluxo elétrico dependente da posição, $\vec{D}(\vec{r})$;
\vec{H}	Campo magnético dependente da posição, $\vec{H}(\vec{r})$;
ϕ	Potencial elétrico dependente da posição, $\phi(\vec{r})$;
\vec{A}	Potencial magnético dependente da posição, $\vec{A}(\vec{r})$;
$\vec{\nabla} \cdot$	Operador Divergente, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$;
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente, $\vec{\nabla} u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$;
∇^2	Operador Laplaciano, $\nabla^2 \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$;
$n!!$	2.4.6.8.(n-2).n
C_{esp}	Constante da espira $\frac{1}{4} \mu a^2 I_\phi$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Conceitos sobre modelagem do campo magnético para bobinas	13
2.1.1	Equações de Maxwell	13
2.1.2	Potencial vetorial para uma fonte de corrente elétrica	14
2.2	Equação do potencial de uma espira	16
2.3	Cálculo do campo magnético por expansão em série de Maclaurin	18
2.4	Cálculo do Campo para corrente constante	20
2.5	Cálculo do campo magnético pelo método exato	21
3	SISTEMA DE POSICIONAMENTO ESPACIAL	23
3.1	Resultados das Equações de campo	23
3.1.1	Equações de campo para uma espira simples	23
3.2	Expressão numérica para um conjunto de espiras	25
3.3	Características de sistemas de posicionamento magnético	27
3.4	Montagem do sistema de medição	29
3.5	Estágio de tratamento do sinal	30
3.6	Parâmetros construtivos	33
3.6.1	Parâmetros construtivos das bobinas	34
3.6.2	Considerações de construção dos circuitos	35
3.6.3	Considerações de construção do sistema de ensaio	35
4	RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	46
4.1	Simulação de densidade de fluxo magnético para uma espira com corrente senoidal	46
4.2	Simulação de densidade de fluxo magnético para o agrupamento de espiras	50
4.3	Resultados experimentais e comparação com valores teóricos	53
4.3.1	Resultados experimentais com corrente AC	54
4.3.2	Resultados experimentais com corrente DC	57
4.4	Teste do sensor em uma mão	58
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	61
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	63
ANEXO A	Expansão em série do integrando da função potencial de uma espira	65

ANEXO B	Cálculo da expressão da densidade de fluxo magnético pelo método da expansão	68
ANEXO C	Cálculo da expressão da densidade de fluxo magético pelo método exato	72
C.1	Cálculo da primeira componente	72
C.2	Cálculo da segunda componente	76

1 INTRODUÇÃO

Em 1865, J. C. Maxwell [1] reuniu os resultados obtidos por Coulomb, Ampere e Faraday em um conjunto compacto de equações diferenciais que descreviam os campos elétrico e magnético em qualquer ponto do espaço, desde que antes fossem definidas as condições de contorno, distribuição de cargas e/ou domínios magnéticos na região de interesse. Esse conjunto é apresentado pelas Equações de Maxwell e, desde então, inúmeros campos de pesquisa surgiram e muitos fenômenos foram explicados. Hoje, disciplinas de introdução à Teoria Eletromagnética constituem uma das bases fundamentais em muitos cursos de Ciências Exatas e muitos cursos tem suas bases nessa teoria que continua em desenvolvimento, como a Teoria de Antenas, Teoria de Transmissão, Teoria Eletromagnética Quântica, Mecânica Quântica Relativística e muitas outras.

Em especial, o estudo de antenas foi um dos sub-produtos da Teoria Eletromagnética. É errado se dizer que atualmente existe um grande interesse nessa área, o mais correto é se afirmar que está ocorrendo uma demanda cujo crescimento é exponencial ao longo dos anos. Desde o início da comprovação de que era possível se transmitir dados na forma de telegrafo, houve essa necessidade de se conhecer e aprimorar essa área.

Em uma definição clássica [2], uma antena é uma *estrutura intermediária entre o espaço livre e o dispositivo de guiamento*. Nada mais são do que estruturas cuja finalidade é o de transportar e/ou receber informação. A maneira como essa informação é captada é um dos objetivos deste trabalho, mais especificadamente, a modelagem do campo proveniente de uma determinada estrutura com o intuito de obter uma resposta da posição onde o sensor se encontra, dado que se conhece a expressão exata do campo em qualquer posição do espaço.

Por sua vez, o estudo e análise de tratamentos médicos têm atraído cada vez mais interesse das áreas de pesquisa relacionadas à engenharia. A simples possibilidade de obter-se um sistema de visualização através do escaneamento de sensores de tal maneira que seja possível obter-se um diagnóstico de modo menos intrusivo possível tem justificado a construção de sistemas com sensores acoplados a modelos biológicos com o objetivo de se mapear o movimento e a detecção de possíveis doenças [3].

Nesse trabalho, tem-se o objetivo de medir a densidade de fluxo magnético \vec{B} gerada a partir de um conjunto de bobinas cujo campo magnético é modelado através das equações de Maxwell. A caracterização dos campos e verificação dos valores medidos, de acordo com a teoria, podem possibilitar muitos outros trabalhos futuros. Por exemplo, Sensores Hall, posicionados então em uma mão, indicarão a posição de cada parte dessa mão de acordo com a variação de tensão.

Sistemas de posicionamento usando campos magnéticos já foram usados com relativo sucesso em trabalhos anteriores para sistemas médicos [3, 4]. O conceito de se usar tal metodologia tem como vantagem uma relativa portabilidade e rápido diagnóstico clínico,

uma vez que os sensores fornecem de maneira rápida a visualização dos tremores e limitações de movimento.

O primeiro objetivo então desse trabalho é o de caracterizar o campo magnético para uma bobina formada para um núcleo de ferrite, enrolada com fios de categoria AWG. Pretende-se realizar estimativas numéricas para tal sistema, analisando-se a melhor configuração possível dentro dos limites de tempo, disponibilidade de materiais e custo. Em seguida, a meta a ser alcançada é a construção de um sistema de medição para a bobina montada de maneira a verificar como se comporta o sistema na prática. Por final, deseja-se analisar a possibilidade de construção de um sistema de posicionamento baseado no sistema construído, analisando-se possibilidades de melhoria.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Conceitos sobre modelagem do campo magnético para bobinas

Nesse capítulo, tratar-se-á da modelagem do campo magnético para um conjunto de espiras que possuem uma corrente circulando por elas. Para tanto, apresenta-se inicialmente as equações de Maxwell, analisando a construção dos potenciais para facilitar o cálculo. Parte-se então de modelos simples de espiras para obter uma estimativa da densidade de fluxo magnético.

2.1.1 Equações de Maxwell

Em 1865, J. C. Maxwell [1] reuniu os resultados obtidos por Coulomb, Ampere e Faraday em um conjunto compacto de equações diferenciais que descreviam os campos elétrico e magnético em qualquer ponto do espaço, desde que antes fossem definidas as condições de contorno, distribuição de cargas e/ou domínios magnéticos na região de interesse. Esse conjunto é apresentado pelas equações (2.1a) a (2.1d):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t); \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t); \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t); \quad (2.1d)$$

onde $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$ é a *Densidade de Fluxo Elétrico*, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$ é a *Densidade de Fluxo Magnético*, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ é o *Campo Elétrico*, $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$ é o *Campo Magnético*, $\rho(\vec{r}, t)$ é a *Densidade de Carga Elétrica* e $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t)$ é a *Densidade de Corrente Elétrica*,

Uma vez combinadas com a equação da força de Lorentz e a segunda lei de Newton do movimento, essas equações fornecem uma descrição completa da dinâmica clássica de partículas carregadas eletricamente e dos campos eletromagnéticos [5].

Pretende-se, nesse trabalho, trabalhar com a propagação em meios lineares, isotrópicos e homogêneos, por hipótese [6], podendo-se relacionar o Campo Magnético $\vec{\mathcal{H}}$ e a Densidade de Fluxo magnético como $\vec{\mathcal{B}}$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \mu \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) \quad (2.2)$$

onde μ é a *permeabilidade magnética*.

Similarmente, pode-se relacionar o campo elétrico $\vec{\mathcal{E}}$ com o vetor densidade de fluxo elétrico $\vec{\mathcal{D}}$ como:

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

onde ϵ é a constante dielétrica do meio.

Aplicando-se então as relações (2.2) e (2.3) às Equações de Maxwell (2.1), obtém-se um conjunto de equações mensuráveis:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\vec{r}, t); \quad (2.4a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.4b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t); \quad (2.4c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \mu \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t); \quad (2.4d)$$

Esse conjunto de equações será usado daqui por diante para calcular o campo magnético para o sistema de posicionamento previsto neste trabalho.

2.1.2 Potencial vetorial para uma fonte de corrente elétrica

Funções potenciais são úteis para cálculos analíticos uma vez que as integrais resultantes são mais fáceis de se trabalhar. Admite-se inicialmente que deseja-se obter o campo elétrico e magnético em uma certa região do espaço onde exista apenas uma densidade de corrente elétrica $\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t)$. Das equações de Maxwell, é possível analisar a equação da inexistência dos monopolos magnéticos (2.1b):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.5)$$

Do cálculo avançado [7], sabe-se que quando o divergente de uma função vetorial é nulo, essa função pode ser expressa na forma de um rotacional como:

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t). \quad (2.6)$$

Substituindo-se esse resultado na equação de Maxwell para o rotacional do campo elétrico (2.1c), obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right]. \quad (2.7)$$

ou seja:

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right] = 0. \quad (2.8)$$

Lembrando agora que todo rotacional, quando aplicado sobre o gradiente de uma função escalar, tem como resultado zero, conforme a fórmula do apêndice [apêndice], pode-se escrever a função vetorial na qual é aplicado o rotacional na Equação (2.8) como:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t) \quad (2.9)$$

onde $\Phi(\vec{r}, t)$ pode ser uma função potencial escalar qualquer, ou seja, tem-se

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t). \quad (2.10)$$

Agora, aplicando-se o rotacional nos dois lados da Equação (2.6):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right]; \quad (2.11)$$

e usando-se identidades vetoriais, obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right] - \nabla^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t). \quad (2.12)$$

Substituindo-se o resultado da aplicação desse rotacional na equação de Maxwell (2.1d):

$$\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right] - \nabla^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \mu \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) - \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t). \quad (2.13)$$

Usando a relação da Equação (2.10), obtém-se após algumas manipulações algébricas a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) \right] \\ + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) \Big] = -\mu \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (2.15)$$

Nesse ponto, pode-se notar que não foi realizada nenhuma escolha a respeito da atuação do operador gradiente no operador do potencial vetor magnético $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t)$. Uma vez analisada a Equação (2.14), pode-se fazer a escolha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t). \quad (2.16)$$

conhecida como *Condição de Lorentz*. Aplicando-se então a condição (2.16) na relação (2.14), obtém-se finalmente a equação da onda para o potencial vetor magnético:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = -\mu \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t). \quad (2.17)$$

A solução dessa equação pode ser obtida por vários métodos. Um deles envolve o uso da função de Green e o uso da transformada de Fourier temporal e espacial [7]. A solução obtida, assumindo-se que a função de onda (nesse caso, o potencial vetor) seja nulo no limite em que $|\vec{r}| \rightarrow \infty$

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{r}' \int_{\mathbb{R}} dt' \vec{\mathcal{J}}(\vec{r}', t') |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \delta \left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v} \right) \right). \quad (2.18)$$

Aqui, vale lembrar a notação estabelecida no início do trabalho. O ponto no espaço indicado por \vec{r}' localiza a distribuição de cargas. A integral em t' é tomada de maneira a levar em conta o tempo de propagação da radiação da fonte no instante t' de maneira a obter o valor no instante t . A diferença temporal

$$t - t' = \frac{1}{v} |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (2.19)$$

leva o potencial a ter o conceito de *Potencial Retardado*. Fica estabelecido também que sempre deve-se ter

$$t - t' > 0. \quad (2.20)$$

2.2 Equação do potencial de uma espira

Considerando-se a Equação (2.18) para uma espira que possui uma corrente elétrica I constante no espaço e raio a e admitir que o raio do fio seja muito pequeno, quando comparado com o raio da espira. Tal topologia pode ser interpretada como uma *antena de quadro* [2], que podem assumir diferentes formas, como, por exemplo, retângulos, elipses, círculos entre outras, conforme pode-se observar na figuras 2.1 [8]. O quadro circular é o mais simples de se analisar, servindo bem ao propósito de posicionamento magnético e; portanto, ao objetivo deste trabalho.

A corrente elétrica, apesar da suposição de que seu valor não dependerá da posição ao longo da espira, terá uma dependência temporal com o tempo na forma de uma senóide. A fim de facilitar a notação para os cálculos, será utilizada a notação exponencial:

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = \vec{J}_0(\vec{r}) e^{j\omega t}; \quad (2.21)$$

e basta separar a parte real da imaginária com relação à parte temporal, quando tornar-se necessário. Substituindo-se essa expressão da corrente elétrica na integral, obtém-se então como resultado para a integral (2.18) (usando a propriedade da Delta de Dirac):

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \vec{J}_0(\vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} e^{-j(k|\vec{r} - \vec{r}'| + \omega t)}; \quad (2.22)$$

onde foi definido o *número de onda* k

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad (2.23)$$

e sendo λ [m] o comprimento de onda.

Escrevendo-se o potencial magnético como uma parte espacial e outra temporal a fim de facilitar os cálculos futuros, pode ser estabelecido que:

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{-j\omega t}. \quad (2.24)$$

Aplicando-se esse resultado na Equação (2.22):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \vec{J}_0(\vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.25)$$

A densidade de corrente elétrica, sendo limitada a circular na espira cujo raio foi desprezado, $\vec{J}_0(\vec{r}, t)$ poderá ser indicado como:

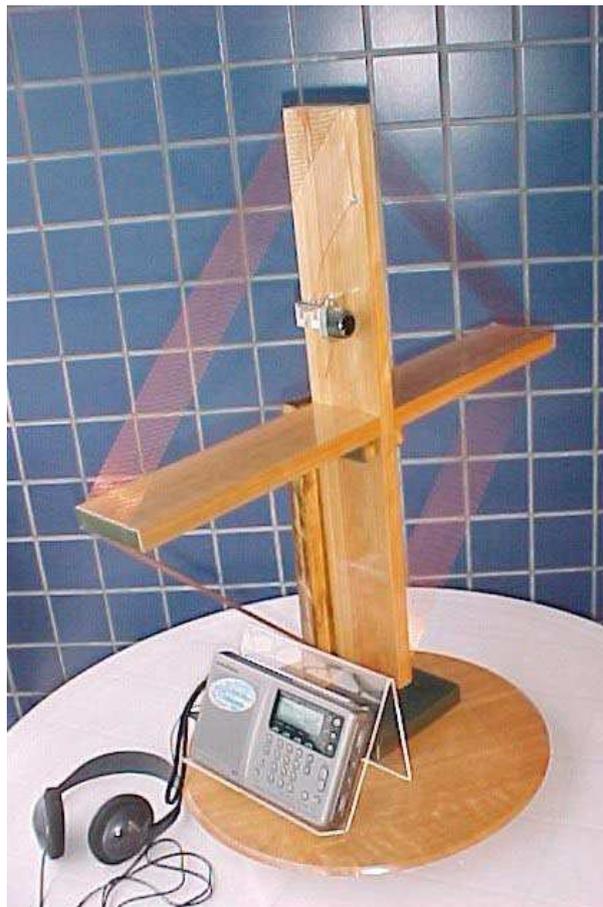
$$\vec{J}_0(\vec{r}) = \vec{I}(\vec{r}) \sin\theta' \delta(\cos\theta) \delta(r' - a). \quad (2.26)$$

Obtém-se então, para a integral da Equação (2.25):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \vec{I}_0(\vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.27)$$

Pela definição do módulo de um vetor:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \\ &= r^2 + a^2 - 2ra \sin\theta \cos(\phi - \phi'); \end{aligned} \quad (2.28)$$



(a)



(b)

Figura 2.1: Exemplos de antenas de quadro.

e pela simetria do problema, pode-se alinhar o eixo x com o ponto a ser calculado, resultando-se na escolha de $\phi = 0$. Então, obtém-se finalmente:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi'. \quad (2.29)$$

Para a corrente, sabe-se que existe somente a componente na direção ϕ , obtendo-se:

$$\begin{aligned} \vec{I}_0(\vec{r}) &= I_x(\vec{r}) \vec{e}_x + I_y(\vec{r}) \vec{e}_y + I_z(\vec{r}) \vec{e}_z \\ &= -I_\phi(\vec{r}) \sin \phi \vec{e}_x + I_\phi(\vec{r}) \sin \phi \vec{e}_y \\ &= -I_\phi(\vec{r}) \sin \phi [\sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi] \\ &\quad + I_\phi(\vec{r}) \sin \phi (\sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi) \\ &= -I_\phi(\vec{r}) \sin \theta \sin(\phi - \phi') \vec{e}_r \\ &\quad + I_\phi(\vec{r}) \cos \theta \sin(\phi - \phi') \vec{e}_\theta \\ &\quad + I_\phi(\vec{r}) \cos(\phi - \phi') \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Novamente, usando a simetria do problema, onde o ponto de cálculo permanece sobre o eixo x , tem-se:

$$\vec{I}_0(\vec{r}) = I_\phi(\vec{r}) [-\sin \theta \sin \phi' \vec{e}_r - \cos \theta \sin \phi' \vec{e}_\theta + \cos \phi' \vec{e}_\phi]. \quad (2.31)$$

Assim, aplicando na integral (2.25) os resultados apresentados pelos resultados (2.29) e (2.31), resta apenas a componente em ϕ devido à paridade do integrando. Ao final:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu a I_\phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi' \frac{e^{-jk[r^2+a^2-2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}}}{[r^2+a^2-2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}} \vec{e}_\phi. \quad (2.32)$$

Nas próximas três seções, serão apresentados métodos para o cálculo dessa integral, conforme pode-se observar na literatura [2, 9]. Vale notar aqui que considera-se a corrente como que tendo o mesmo valor em amplitude ao longo de toda espira, num dado instante fixo de tempo. Isso é válido para comprimentos de onda muito maiores que o comprimento do aro. Usando-se uma forma de onda senoidal, pode-se controlar a sua frequência de tal maneira que obtenha-se essa aproximação, conforme será visto nos capítulos a seguir.

Caso o comprimento de onda não seja grande o suficiente, teríamos que admitir que a forma de onda da corrente elétrica sobre o aro teria um formato senoidal, podendo ser escrita como

$$I(\phi') = I_0 + 2 \sum_{n=1}^M \cos(n\phi') \quad (2.33)$$

Tal tratamento do campo elétrico pode ser encontrado na literatura correspondente [10].

2.3 Cálculo do campo magnético por expansão em série de Maclaurin

Uma maneira simples de se obter o campo magnético produzido por uma espira é se admitir que a dimensão da espira [2] é muito pequena com relação às dimensões de onde se deseja calcular o campo. Inicialmente, será analisado o integrando da equação (2.32)

$$f(\vec{r}) = \frac{e^{-jk[r^2+a^2-2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}}}{[r^2+a^2-2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}} \quad (2.34)$$

Pode-se expandir essa função numa série de Maclaurin

$$f(\vec{r}) = f(0) + a \left[\frac{\partial}{\partial a} f(\vec{r}) \right] \Big|_{a=0} + \frac{a^2}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(\vec{r}) \right] \Big|_{a=0} + \dots \quad (2.35)$$

e tem-se então para os termos da série, conforme é mostrado no anexo A

$$f(0) = r^{-1} e^{-jkr} \quad (2.36)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} f(\vec{r}) \right] \Big|_{a=0} = r^{-1} e^{-jkr} (r^{-1} + jk) \sin \theta \cos \phi' \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(\vec{r}) \right] \Big|_{a=0} &= e^{-jkr} \left[- (r^{-3} + jk r^{-2}) \right. \\ &\quad \left. + (3r^{-5} + 3jk r^{-4} - k^2 r^{-3}) (r \sin \theta \cos \phi')^2 \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^3}{\partial a^3} f(\vec{r}) \right] \Big|_{a=0} &= -e^{-jkr} \left[(9r^{-4} + 9jk r^{-3} - k^2 r^{-2}) \sin \theta \cos \phi' \right. \\ &\quad \left. + (-15r^{-4} - 15jk r^{-3} + 6k^2 r^{-2} + jk^3 r^{-1}) \cdot \right. \\ &\quad \left. (\sin \theta \cos \phi')^3 \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pode-se substituir então os resultados no integrando de (2.32), obtendo-se

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} \left\{ a^2 (r^{-2} + jkr^{-1}) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + a^4 \left[\left(\frac{3}{2} r^{-4} + \frac{3}{2} jkr^{-3} - \frac{1}{2} k^2 r^{-2} \right) \sin \theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a^4 \left(-\frac{15}{8} r^{-4} + \frac{15}{8} jkr^{-3} + \frac{3}{4} k^2 r^{-2} + \frac{1}{8} jk^3 r^{-1} \right) \sin^3 \theta \right] \right\} \vec{e}_\phi \quad (2.40) \end{aligned}$$

O campo magnético pode então ser calculado pela expressão do rotacional da Equação (2.6). Ao final, obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu a^2 I_\phi}{4} e^{-j(kr - \omega t)} \left[2 (r^{-3} + jkr^{-2}) \cos \theta \vec{e}_r \right. \\ &\quad \left. + (-r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \vec{e}_\theta \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

sendo que tal aproximação é válida para antenas de quadro de raio a pequeno, quando comparado com o comprimento de onda λ . Note-se aqui que foi designado o termo $\vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}$ para indicar a expressão para a série de Maclaurin até o primeiro termo.

Uma outra aproximação importante é a de campo distante, onde considera-se apenas termos de ordem r^{-1} , desprezando-se termos de ordem maior. Assim, pode-se obter ao final

$$\vec{\mathcal{B}}^{(cd)}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu a^2 k^2 I_\phi}{4} e^{-j(kr - \omega t)} r^{-1} \vec{e}_\theta. \quad (2.42)$$

2.4 Cálculo do Campo para corrente constante

Quando a corrente elétrica circulando no aro é constante, é possível realizar uma simples aproximação para a antena de quadro [2], ou seja, basta considerar $r \gg a$ e escrever o módulo (2.29) na forma

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2} \\ &\approx (r^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2} \\ &= r \left(1 - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi'\right)^{1/2} \\ &\approx r - a \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

Para os termos que determinam a amplitude da expressão, será considerado apenas o termo r , e para termos de fase (da exponencial), serão considerados apenas termos com $\sin \theta$. Então, pode-se escrever a integral (2.32) na forma

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu a I_\phi}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{2\pi} d\phi' \sin \phi' e^{jka \sin \theta \cos \phi'} \vec{e}_\phi \quad (2.44)$$

Separando em duas integrais:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu a I_\phi}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\int_0^\pi d\phi' \sin \phi' e^{jka \sin \theta \cos \phi'} \right. \\ &\quad \left. + \int_\pi^{2\pi} d\phi' \sin \phi' e^{jka \sin \theta \cos \phi'} \right] \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Trocando a variável na segunda integral como $\phi' = \phi'' + \pi$, tem-se como

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu a I_\phi}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\int_0^\pi d\phi' \sin \phi' e^{jka \sin \theta \cos \phi'} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi d\phi'' \sin \phi'' e^{-jka \sin \theta \cos \phi''} \right] \vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Sabendo-se que a função de Bessel de primeira espécie é definida pela integral

$$\pi j J_1(z) = \int_0^\pi dx \cos x e^{jz \cos x}; \quad (2.47)$$

obtem-se então a seguinte expressão para o potencial magnético

$$\vec{A}(\vec{r}) = j \frac{a \mu I_0}{4} \frac{e^{-jkr}}{r} [J_1(ka \sin \theta) - J_1(-ka \sin \theta)] \vec{e}_\phi. \quad (2.48)$$

Agora, usando-se uma das propriedades da função de Bessel que estabelece que

$$J_1(-x) = -J_1(x). \quad (2.49)$$

obtem-se, pela substituição de (2.49) em (2.48)

$$\vec{A}(\vec{r}) = j \frac{a \mu I_0}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(ka \sin \theta) \vec{e}_\phi. \quad (2.50)$$

Aqui, a função de Bessel é definida como

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}. \quad (2.51)$$

e obtém-se seguinte função para o potencial magnético

$$\vec{A}(\vec{r}) = j \frac{a \mu I_0}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right)^{2n+1} \vec{e}_\phi. \quad (2.52)$$

Resta então calcular o campo densidade de fluxo magnético, obtendo-se, ao final

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \frac{a \mu I_0}{2} \frac{e^{-j(kr-\omega t)}}{r} \left(\frac{j}{r \tan \theta} \vec{e}_r - k \vec{e}_\phi \right) J_1(ka \sin \theta) \quad (2.53)$$

2.5 Cálculo do campo magnético pelo método exato

É possível obter uma expressão exata na forma de uma série de potências para a antena de quadro circular, conforme foi demonstrado no artigo [9]. Novamente, para a equação (2.29):

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)^{1/2}; \quad (2.54)$$

e pode-se estabelecer que:

$$\sigma \equiv 1 + \frac{a^2}{r^2} \quad (2.55a)$$

$$\tau \equiv 2 \frac{a}{r} \sin \theta \quad (2.55b)$$

Obtém-se então uma notação mais simplificada, tal que

$$\cos \phi' = \frac{1}{\tau} \left[\sigma - \frac{1}{r^2} |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \right]. \quad (2.56)$$

A fim de facilitar os cálculos, foi estabelecido uma nova variável de integração z , definida por:

$$\frac{1}{r} |\vec{r} - \vec{r}'| \equiv z \quad (2.57)$$

e então pode-se definir a nova variável de integração

$$\cos \phi' = \frac{1}{\tau} [\sigma - z^2]. \quad (2.58)$$

Aplicando esse resultado à integral do potencial Magnético (2.32), obtém-se:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{a \sin \theta} \int_{z_1}^{z_2} dz e^{-jkrz} \frac{\sigma - z^2}{[(z^2 - z_1^2)(z_2^2 - z^2)]^{1/2}} \vec{e}_\phi. \quad (2.59)$$

onde

$$z_1 = (\sigma - \tau)^{1/2} = \frac{1}{r} |\vec{r} - \vec{r}'|; \quad (2.60a)$$

$$z_2 = (\sigma + \tau)^{1/2} = \frac{1}{r} |\vec{r} + \vec{r}'|. \quad (2.60b)$$

Pode-se expandir a exponencial complexa em termos reais e complexos, obtendo-se a seguinte expressão

$$e^{-jkrz} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{(krz)^{2n}}{(2n)!} + j \frac{(krz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]. \quad (2.61)$$

Substituindo-se esse resultado na integral (2.59), pode-se escrever

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{a \sin \theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (kr)^{2n} \left[\frac{1}{(2n)!} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) L_{2n} - j \frac{kr}{(2n+1)!} L_{2n+1} \right] \vec{e}_\phi. \quad (2.62)$$

onde é possível definir as integrais

$$L_n \equiv \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{z^n}{[(z^2 - z_1^2)(z_2^2 - z^2)]^{1/2}}. \quad (2.63)$$

Integrais elípticas que podem ser encontradas em tabelas de integrais [11, 12], podendo-se obter uma expressão em série exata para a solução do problema da antena de quadro. É apresentada no apêndice C uma metodologia para o cálculo da expressão da densidade de fluxo de campo que servirá para verificar os resultados a serem obtidos.

3 SISTEMA DE POSICIONAMENTO ESPACIAL

3.1 Resultados das Equações de campo

Apresenta-se nessa seção um resumo dos dos métodos discutidos no capítulo 2 e sua aplicação para um conjunto de bobinas.

3.1.1 Equações de campo para uma espira simples

Pretende-se, nesse momento, reunir todas as equações a fim de se obter estimativas numéricas para o campo gerado por uma bobina. Tem-se, inicialmente, a expressão do campo pelo método da expansão em série de Maclaurin para o campo distante fornecida pela Equação (2.42) e que é apresentada aqui novamente:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}, t) = C_{esp} e^{-j(kr-\omega t)} & \left[2(r^{-3} + jkr^{-2}) \cos \theta \vec{e}_r \right. \\ & \left. + (-r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \vec{e}_\theta \right]; \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde definiu-se a constante da espira

$$C_{esp} \equiv \frac{1}{4} \mu a^2 I_\phi; \quad (3.2)$$

tal que μ é a permeabilidade magnética, a o raio da espira e I_ϕ o valor eficaz da corrente circulando na espira.

Pode-se então dividir a Equação (3.1) nas suas componentes radial $\mathcal{B}_r^{(mc1)}(\vec{r}, t)$ e angular $\mathcal{B}_\theta^{(mc1)}(\vec{r}, t)$, de tal maneira que se possa escrever

$$\vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}, t) = \mathcal{B}_r^{(mc1)}(\vec{r}, t) \vec{e}_r + \mathcal{B}_\theta^{(mc1)}(\vec{r}, t) \vec{e}_\theta; \quad (3.3)$$

onde tem-se para a parte radial

$$\mathcal{B}_r^{(mc1)}(\vec{r}, t) = 2 C_{esp} e^{-j(kr-\omega t)} (r^{-3} + jkr^{-2}) \cos \theta; \quad (3.4)$$

e, para a parte angular

$$\mathcal{B}_\theta^{(mc1)}(\vec{r}, t) = C_{esp} e^{-j(kr-\omega t)} [(r^{-3} - k^2 r^{-1}) + jkr^{-2}] \sin \theta. \quad (3.5)$$

A fim de se analisar os valores de cada componente, pode-se calcular os módulos de cada componente, tal que

$$|\mathcal{B}_r^{(mc1)}| = 2 C_{esp} (r^{-6} + k^2 r^{-4})^{1/2} \cos \theta; \quad (3.6)$$

e

$$\left| \mathcal{B}_\theta^{(mc1)} \right| = C_{esp} (r^{-6} - k^2 r^{-4} + k^4 r^{-2})^{1/2} \sin \theta. \quad (3.7)$$

Uma outra maneira de se verificar essa aproximação é calcular mais alguns termos da série, obtendo-se uma expressão mais exata, conforme é demonstrado no Apêndice B, obtendo-se ao final:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{B}}^{(mc2)}(\vec{r}, t) = & \frac{\mu I \phi}{4} e^{-j(kr - \omega t)} \left\{ \left[a^2 (2r^{-3} + 2jkr^{-2}) \cos \theta \right. \right. \\ & + a^4 (3r^{-5} + 3jkr^{-4} - k^2 r^{-3}) \cos \theta \\ & + a^4 \left(-\frac{15}{2} r^{-5} + \frac{15}{2} jkr^{-4} + 4k^2 r^{-3} + \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \left. \right] \vec{e}_r \\ & + \left[a^2 (r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \right. \\ & + a^4 \left(\frac{9}{2} r^{-5} + \frac{9}{2} jkr^{-4} - 2k^2 r^{-3} - \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin \theta \\ & + a^4 \left(-\frac{45}{8} r^{-5} - \frac{15}{8} jkr^{-4} - \frac{3}{4} k^2 r^{-3} \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{4} jk^3 r^{-2} - \frac{1}{8} k^4 r^{-1} \right) \sin^3 \theta \right] \vec{e}_\theta \left. \right\} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Repetindo-se a separação entre componentes, ter-se-á:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{B}_r^{(mc2)}(\vec{r}, t) \right| = & C_{esp} \left\{ \left[2r^{-3} \cos \theta + a^2 (3r^{-5} - k^2 r^{-3}) \cos \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + a^2 \left(-\frac{15}{2} r^{-5} + 4k^2 r^{-3} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right]^2 \right. \\ & + \left[2kr^{-2} \cos \theta + 3a^2 kr^{-4} \cos \theta \right. \\ & \left. \left. + a^2 \left(\frac{15}{2} kr^{-4} + \frac{1}{2} k^3 r^{-2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{B}_\theta^{(mc2)}(\vec{r}, t) \right| = C_{esp} & \left\{ \left[(r^{-3} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \right. \right. \\ & + a^2 \left(\frac{9}{2} r^{-5} - 2k^2 r^{-3} \right) \sin \theta \\ & \left. \left. + a^2 \left(-\frac{45}{8} r^{-5} - \frac{3}{4} k^2 r^{-3} - \frac{1}{8} k^4 r^{-1} \right) \sin^3 \theta \right]^2 \right. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & + \left[kr^{-2} \sin \theta + a^2 \left(\frac{9}{2} kr^{-4} - \frac{1}{2} k^3 r^{-2} \right) \sin \theta \right. \\ & \left. \left. + a^2 \left(-\frac{15}{8} kr^{-4} + \frac{3}{4} k^3 r^{-2} \right) \sin^3 \theta \right]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por fim, foi encontrada a expressão exata, deduzida no Apêndice C, tal que uma resolução numérica requer uma maior análise.

3.2 Expressão numérica para um conjunto de espiras

Uma maneira de se aumentar o campo magnético gerado é o de se agrupar várias espiras em um núcleo de ferrite, tendo-se então um conjunto de N espiras enroladas. A fim de facilitar a modelagem do campo, considerar-se-á que tal número seja ímpar. Note-se que não é perdida nenhuma generalidade nessa escolha uma vez que pode-se simplesmente sempre deixar uma espira a menos no ato de enrolamento. Para se ter uma idéia, a bobina obtida para o experimento se encontra na Figura 2.1 (b).

Tendo-se então um número ímpar de espiras sobre um núcleo, uma espira será a espira central, e nela será tomado a origem do sistema cartesiano, conforme pode-se observar na Figura 3.1. Restarão então $(N - 1) / 2$ espiras acima da central e $(N - 1) / 2$ espiras abaixo da central. Admite-se que cada espira tenha um diâmetro d , sendo então que uma espira qualquer m estará situada a uma distância md acima (ou abaixo) da espira central.

Usando a Equação (3.1) e analisando-se a distância r do ponto de medida, com um ângulo θ , conforme estabelecido pelas seções anteriores, tem-se a expressão para a densidade de fluxo magnético da espira central:

$$\vec{\mathcal{B}}_0(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}, t) \quad (3.12)$$

Para cada espira m , um novo sistema de coordenadas terá de ser levado em conta, tal que, para a espira de ordem m , o campo será

$$\vec{\mathcal{B}}_m(\vec{r}_m, t) = \vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}_m, t) \quad (3.13)$$

onde o vetor \vec{r}_m pode ser observada na Figura 3.2 no plano xz .

Torna-se necessário também dividir os cálculos para a metade superior e a metade inferior do sistema uma vez que a contração dos ângulos θ_m será ligeiramente diferente, dada a escolha do sistema de coordenadas. Daqui por diante, então, usar-se-á o sobrescrito ^(s) para variáveis correspondentes à metade superior (acima da espira central) e o sobescrito ⁽ⁱ⁾ para indicar variáveis da metade inferior (abaixo da espira central).

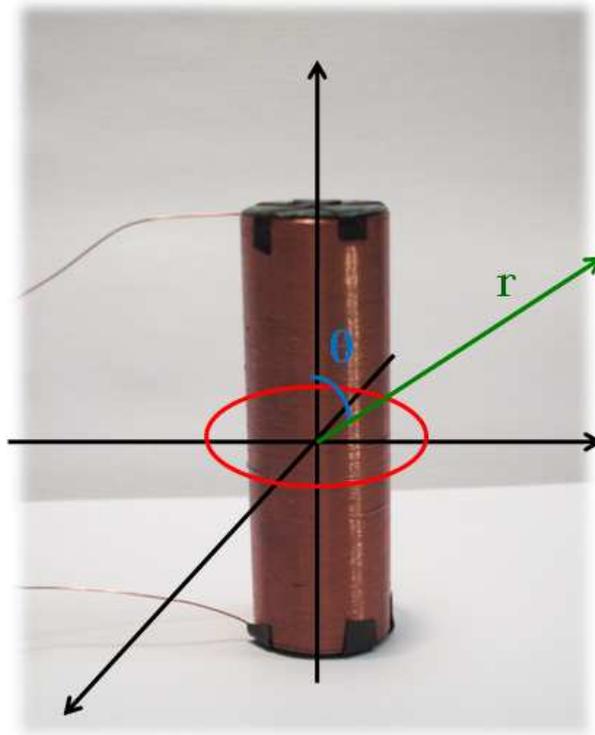


Figura 3.1: Sistema de coordenadas para a bobina utilizada.

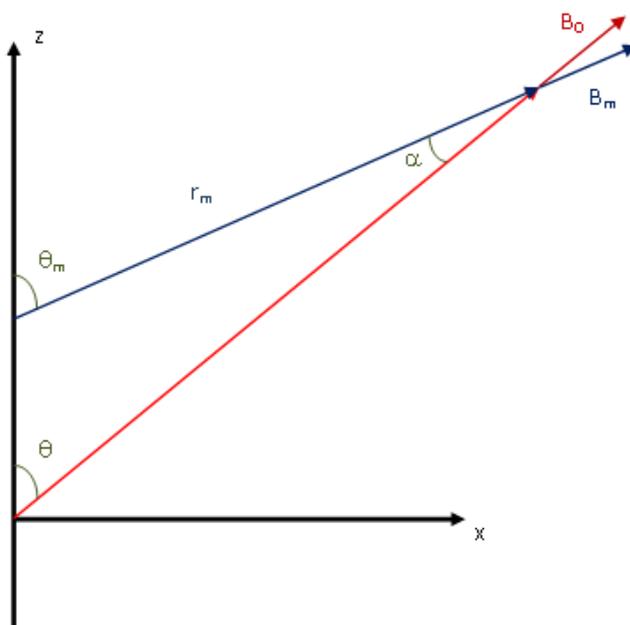


Figura 3.2: Sistema de coordenadas para uma espira de ordem m .

Tem-se então como a densidade de fluxo magnético total $\vec{\mathcal{B}}_T(\vec{r}, t)$

$$\vec{\mathcal{B}}_T(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{B}}_0^{(mc1)}(\vec{r}, t) + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} \left[\vec{\mathcal{B}}_m^{(mc1)}(\vec{r}_m^{(s)}, t) \cos \alpha_m^{(s)} + \vec{\mathcal{B}}_m^{(mc1)}(\vec{r}_m^{(i)}, t) \cos \alpha_m^{(i)} \right]. \quad (3.14)$$

O objetivo torna-se então o cálculo das funções do novo sistema cartesiano, r_m e θ_m , em função das variáveis conhecidas usadas na espira central, r e θ . Usando-se relações trigonométricas de seno e cosseno para um triângulo, expressões para as variáveis r_m e θ_m de cada espira podem ser deduzidas na forma

$$r_m^{(s)} = [r^2 + (md)^2 - 2rmd \cos \theta]^{1/2}; \quad (3.15)$$

e

$$\theta_m^{(s)} = \sin^{-1} \left(\frac{r}{[r^2 + (md)^2 - 2rmd \cos \theta]^{1/2}} \sin \theta \right); \quad (3.16)$$

para as espiras superiores; e, para as espiras inferiores

$$r_m^{(i)} = [r^2 + (md)^2 + 2rmd \cos \theta]^{1/2}; \quad (3.17)$$

e

$$\theta_m^{(i)} = \sin^{-1} \left(\frac{r}{[r^2 + (md)^2 + 2rmd \cos \theta]^{1/2}} \sin \theta \right). \quad (3.18)$$

Analisando-se a geometria do problema, para a componente radial, cada espira terá uma contribuição para a resultante, formando um ângulo α_m com a componente central. A componente perpendicular à componente radial da espiral central ficará anulada com a contribuição da espira na extremidade oposta. Novamente, usando-se as leis de seno e cosseno, o cosseno de α_m será

$$\cos \alpha_m = \frac{r - (md) \cos \theta}{[r^2 + (md)^2 - 2rmd \cos \theta]^{1/2}}. \quad (3.19)$$

Torna-se possível então o cálculo do valor do campo para um conjunto de espiras. Note-se aqui que foram usadas as expressões para a aproximação com 1 termo da série de Maclaurin, mas que as mesmas podem ser substituídas por uma expressão mais exata.

3.3 Características de sistemas de posicionamento magnético

Um sistema de posicionamento magnético necessita de três componentes básicos: um sistema de geração de campos magnéticos, um método de se medir tais campos e um algoritmo que use o valor do campo para a conversão num sistema de posicionamento.

A geração de campos foi discutida no capítulo 2 e as equações campo resumidas na seção 3.2 anterior. Nessa seção, discutir-se-á a modelagem do campo aplicada num sistema real. Parte-se do princípio que um sistema de medição terá um sensor que dará a resposta do campo na forma de tensão, como será visto a seguir.

Um ponto inicial a ser considerado é o fato de que a tensão induzida no sensor dependerá das três coordenadas cartesianas, x , y e z , e, levando-se em conta o fato de que o

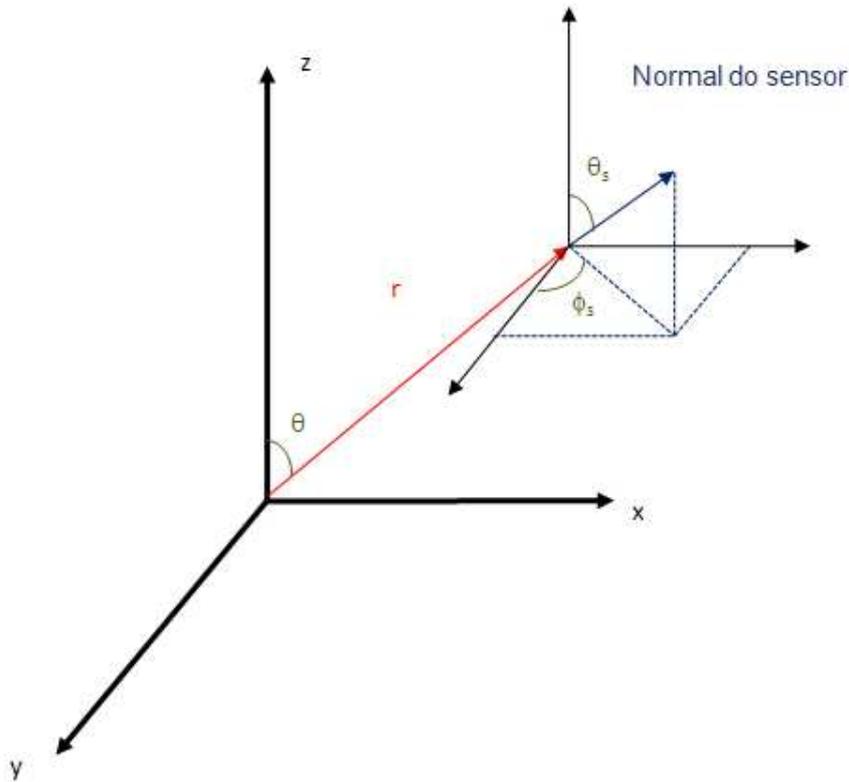


Figura 3.3: Sistema de coordenadas para sensor.

sensor terá apenas uma área útil onde o campo atravessará, haverá também uma dependência dos ângulos θ_S e ϕ_S em que ocorre a medida do campo pelo sensor. Essa relação de dependência das variáveis pode ser melhor compreendida analisando-se a Figura 3.3.

Matematicamente, pode-se expressar a tensão de saída V_S do sensor na forma:

$$V_S = f(x, y, z, \theta_S, \phi_S). \quad (3.20)$$

Sabe-se que a tensão induzida no sensor, pelo campo magnético, é proporcional ao módulo do campo. Da seção 3.2, pode-se escrever:

$$\vec{\mathcal{B}}_T(\vec{r}, t) = \mathcal{B}_r(\vec{r}, t) \vec{e}_r + \mathcal{B}_\theta(\vec{r}, t) \vec{e}_\theta. \quad (3.21)$$

onde deixa-se independente, por enquanto, a escolha da aproximação usada.

A direção na qual o sensor é influenciado pelo fluxo será expressa por

$$\vec{e}_S = \sin \theta_S \cos \phi_S \vec{e}_x + \sin \theta_S \sin \phi_S \vec{e}_y + \cos \theta_S \vec{e}_z. \quad (3.22)$$

Uma vez que

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z. \quad (3.23)$$

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z. \quad (3.24)$$

pode-se realizar a multiplicação escalar:

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_S = \sin \theta \cos \phi \sin \theta_S \cos \phi_S + \sin \theta \sin \phi \sin \theta_S \sin \phi_S + \cos \theta \cos \theta_S. \quad (3.25)$$

e, similarmente

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_S = \cos \theta \cos \phi \sin \theta_S \cos \phi_S + \cos \theta \sin \phi \sin \theta_S \sin \phi_S - \sin \theta \cos \theta_S. \quad (3.26)$$

Nesse ponto, pode-se expressar então os ângulos θ e ϕ nas coordenadas cartesianas, tal que

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (3.27)$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad (3.28)$$

para o ângulo θ e

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (3.29)$$

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (3.30)$$

para o ângulo ϕ .

Pode-se então juntar os resultados das multiplicações escalares dos vetores das Equações (3.25) e (3.26) de maneira a se obter as componentes cartesianas da densidade de fluxo magnético.

3.4 Montagem do sistema de medição

Com o objetivo de se verificar o campo gerado por uma bobina, tornou-se necessário a implementação de um sistema no qual fosse possível medir o campo magnético gerado por uma bobina de tal maneira que o sensor pudesse ter, em um primeiro momento, seus três eixos alternados de maneira conhecida. A solução encontrada foi o uso de dois transladores e uma mesa elevadora adquiridos da empresa Optron [13].

Inicialmente, a base da estrutura seria uma grande tábua de MDF compensado, ficando de um lado os transladores. Com os dois transladores verticais e a mesa elevador, foi possível construir um translador de três eixos, conforme pode-se observar na Figura 3.4. Sobre a mesa elevadora, foi montada uma barra de madeira com o intuito de se colocar o sensor em uma ponta. Essa distância foi necessária para isolar a área do sensor e da bobina para que a quantidade de metais ferromagnéticos próximos à área de medição fosse a menor possível.

O sensor Hall usado foi o do modelo SS94A2, da empresa Honeywell [14]. Ele foi escolhido devido a trabalhar em uma grande faixa de valores de densidade de fluxo magnético (0 a 400Gauss) e à sua fácil disponibilidade no mercado brasileiro. Sua sensibilidade é de $5mV/Gauss$ e sua resposta, para um fluxo magnético, é da forma

$$V_S = \kappa_S \left| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \right| + V_{\text{off}}. \quad (3.31)$$

onde κ_S é a sensibilidade do sensor e V_{off} é a tensão de *offset* do sensor, de valor 4V e inerente ao dispositivo. Note-se então que, na construção de um estágio de amplificação, surge a necessidade de se adicionar uma compensação antes de se amplificar o sinal de resposta do sensor.

A montagem do sensor sobre o braço de madeira se encontra na Figura 3.5 (a). A montagem final da estrutura, com o sensor, se encontra na Figura 3.5 (b).

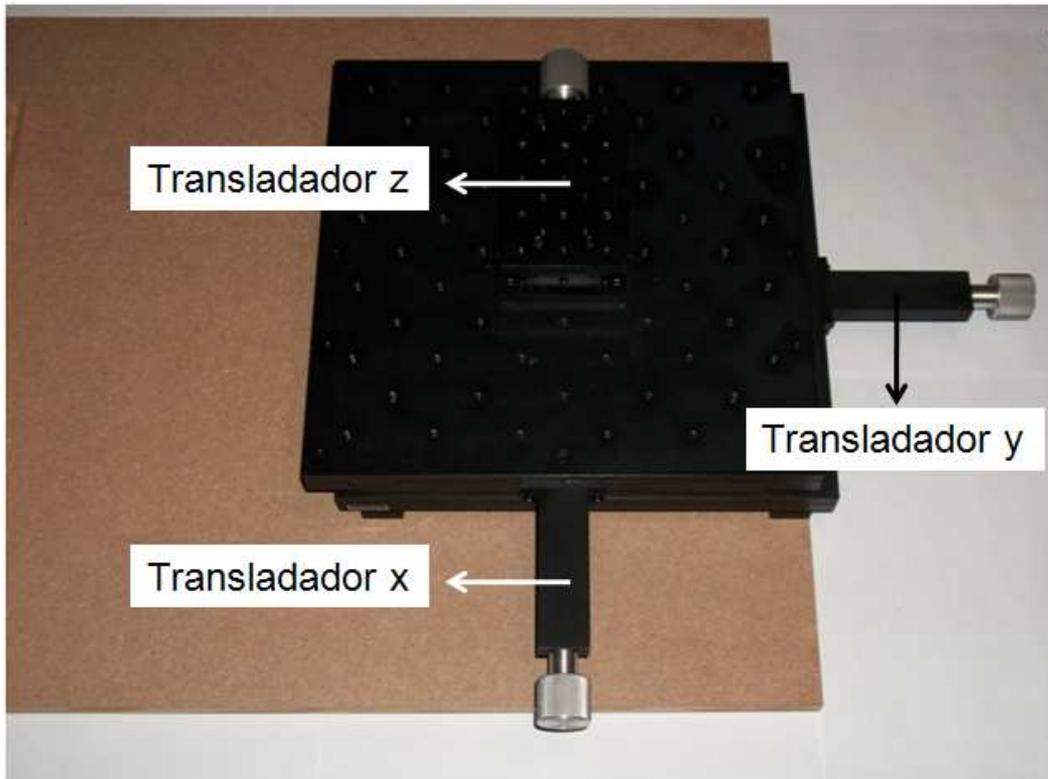


Figura 3.4: Posicionador tridimensional utilizado.

3.5 Estágio de tratamento do sinal

Nessa seção, demonstra-se os circuitos utilizados Com base na equação 3.31, pode-se estabelecer três estágios para os circuitos:

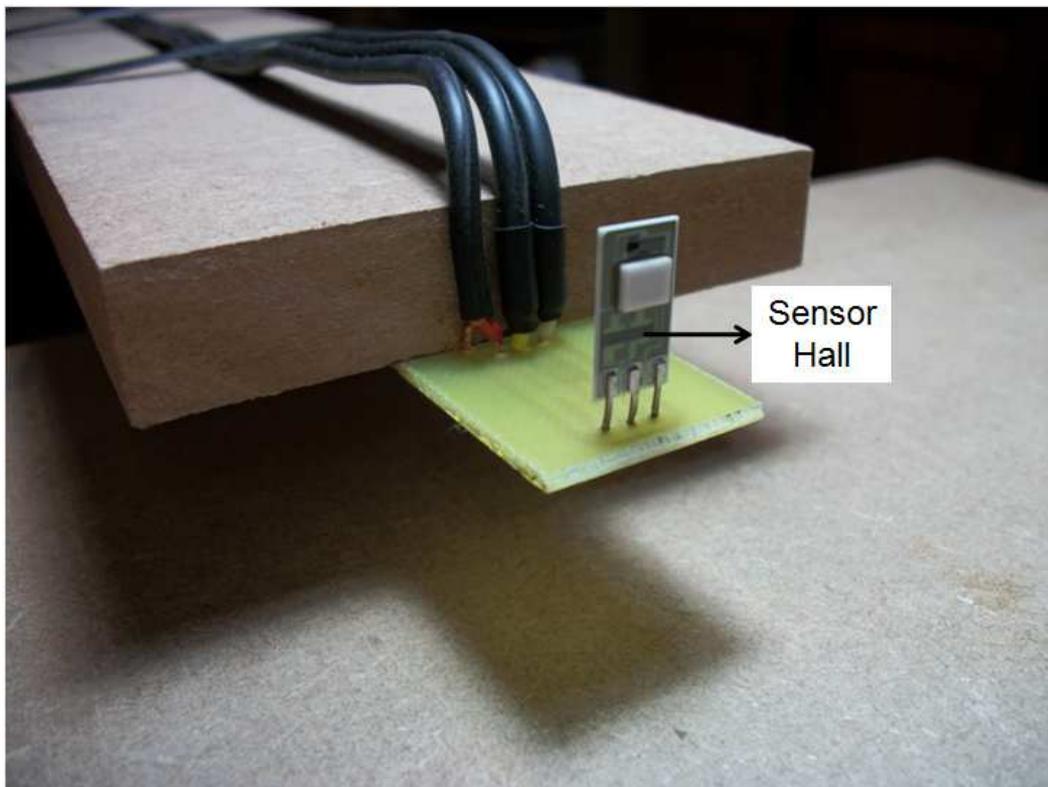
- (a) compensação do ajuste da tensão de *offset*, V_{off} ;
- (b) estágio de amplificação;
- (c) filtragem do sinal.

Esquemáticamente, um diagrama em blocos para esse sistema é apresentado na Figura 3.6. A seguir, serão detalhados os blocos em separado.

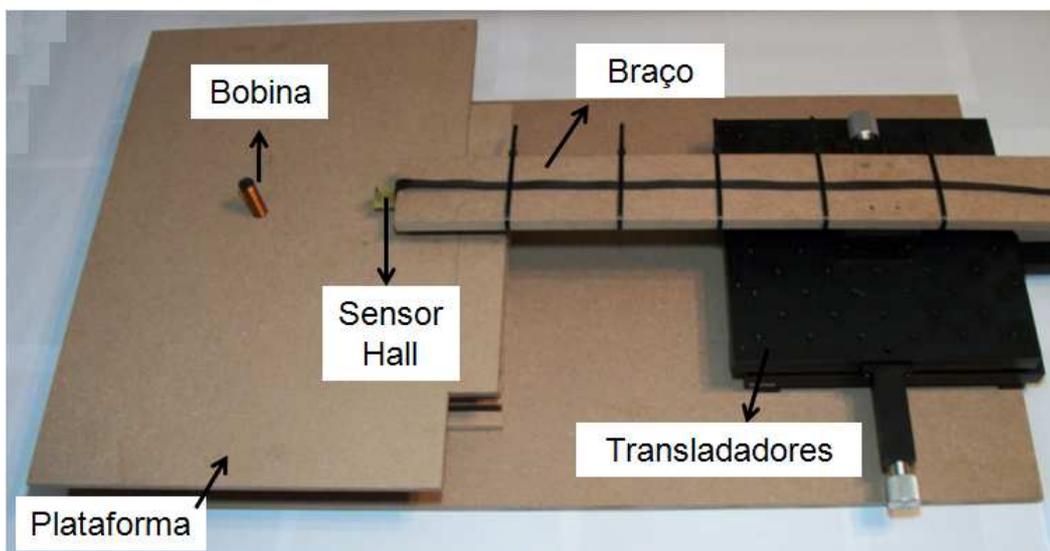
O estágio de tratamento de sinal é baseado na cadeia de medidas do experimento completo, tratando desde a resposta do sensor Hall até o estágio de filtragem. Esquemáticamente, pode-se representar a cadeia de medidas como demonstrado na Figura 3.7.

O objetivo do circuito de compensação é o de eliminar a tensão de *offset* do sensor, mais especificadamente, a idéia seria obter uma tensão de $4V$ estável que serviria para a subtração da tensão do sensor. Foi utilizado então um regulador REF01 conectado a um conjunto de resistores em série com um potenciômetro no meio de maneira a obter-se um melhor ajuste do ponto de $4V$. O regulador REF01 foi escolhido devido à sua alta estabilidade de tensão de saída ($10V$) e forte imunidade a alterações de temperatura. Nesse circuito, V_{in} é a tensão de saída do sensor Hall.

Adicionalmente, foram utilizados *buffers* para o isolamento da tensão de compensação e do próprio sinal de saída do sensor Hall. Os modelos de operacional usados em todos os



(a)



(b)

Figura 3.5: Foto do posicionamento do sensor (a) e foto da montagem da estrutura de medição com a bobina (b).

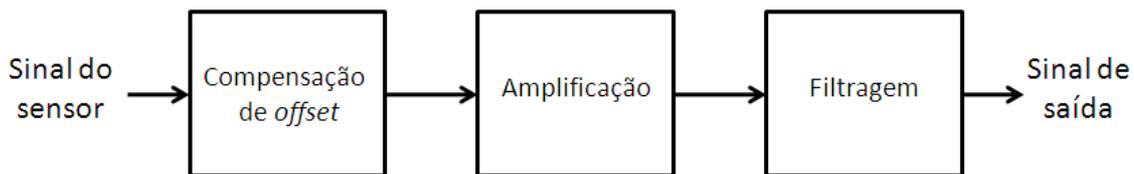


Figura 3.6: Diagramas em blocos do circuito de recebimento do sinal do sensor.

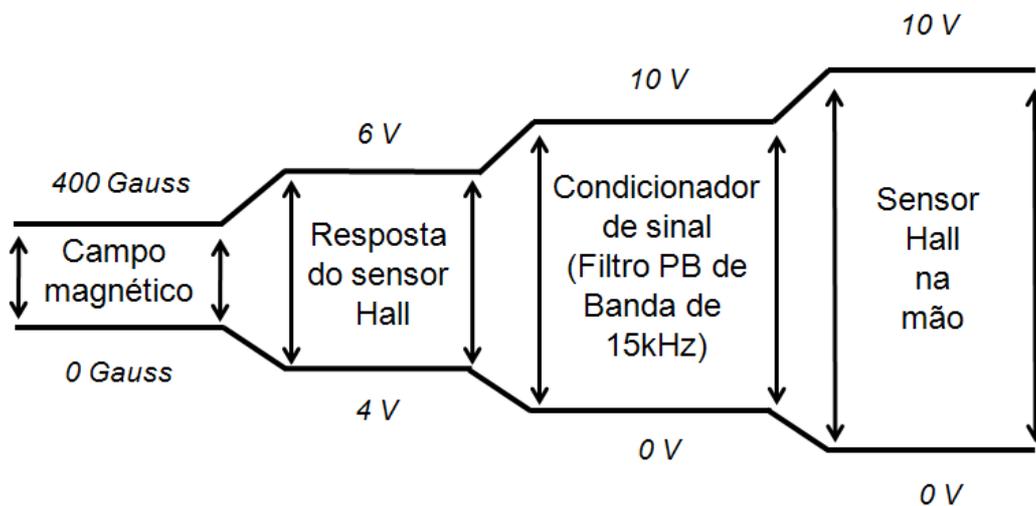


Figura 3.7: Diagrama da cadeia de medidas do experimento.

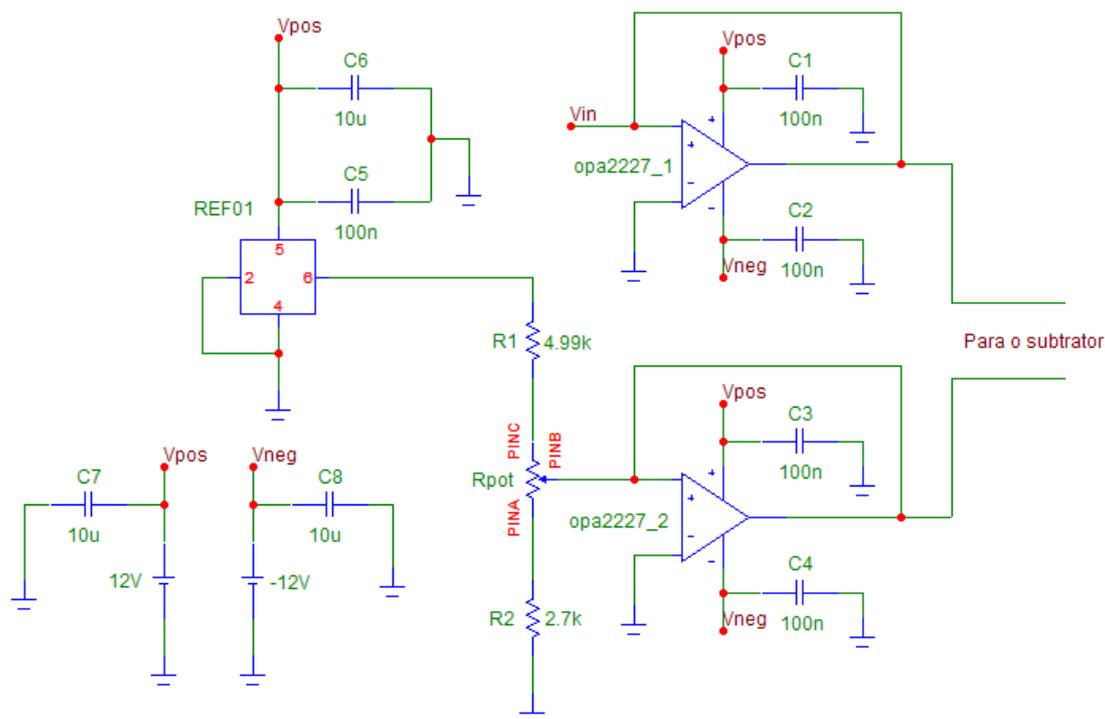


Figura 3.8: Diagrama do circuito de compensação.

circuitos foram o OPA2227 devido ao seu baixo *offset* de saída e boa estabilidade térmica. Um diagrama do circuito de compensação é apresentado na Figura 3.8.

Em seguida, os sinais de saída do circuito de compensação são subtraídos um do outro através de um amplificador de instrumentação INA101. Esse dispositivo é um subtrator de boa precisão cujas principais características são o baixo erro de operação, baixo *offset* de saída, alta estabilidade térmica e a opção de ajuste de ganho por meio de resistores acoplados aos seus terminais. A expressão para o sinal de saída do subtrator pode ser expressa então como

$$V_{\text{subt}} = -G_{\text{subt}} \left(\kappa_S \left| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \right| + V_{\text{off}} - V_{\text{adj}} \right) ; \quad (3.32)$$

onde o sinal negativo vem da montagem do circuito onde foi posto o sinal de tensão do sensor Hall na entrada negativa e a tensão de compensação V_{adj} na entrada positiva. O ganho G_{subt} é controlado por um resistor R_G externo para ajuste de ganho na forma:

$$G_{\text{subt}} = 1 + \frac{40k\Omega}{R_G} . \quad (3.33)$$

À saída desse subtrator, foi então acoplado um sistema de ganho composto por dois *buffers* e dois amplificadores com ganho maior do que 1, conforme pode-se observar na Figura 3.9, cuja entrada V'_{in} é a tensão de saída do subtrator INA101.

A resposta de saída pode ser escrita na forma final como:

$$V_{\text{subt}} = G_{\text{subt}} \frac{R_{g1}}{R_{g2}} \left(1 + \frac{R_{g3}}{R_{g4}} \right) \left(\kappa_S \left| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \right| + V_{\text{off}} - V_{\text{adj}} \right) . \quad (3.34)$$

Pode-se, nesse instante, escrever a Equação (3.34) de ganho da forma

$$V_{\text{subt}} = G_{\text{amp}} \left(\kappa_S \left| \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) \right| + V_{\text{off}} - V_{\text{adj}} \right) ; \quad (3.35)$$

onde foi estabelecido que

$$G_{\text{amp}} \equiv G_{\text{subt}} \frac{R_{g1}}{R_{g2}} \left(1 + \frac{R_{g3}}{R_{g4}} \right) . \quad (3.36)$$

Finalmente, chega-se no estágio de filtragem. O procedimento para a construção de um filtro foi obtido no livro de Sérgio Franco [15]. Basicamente, busca-se construir um filtro KRC (também conhecido como Sallen-Key) a partir de tabelas já estabelecidas e conhecidas para tipos de filtros padrão. Deseja-se apenas um filtro do tipo passa-baixa de Butterworth. Num procedimento inicial, a ordem 2 do filtro pode ser um bom começo. Sabendo-se que o circuito do filtro passa-baixa KRC é da forma apresentada na Figura 3.10. Pode-se então cascatear dois desses filtros ou mais a fim de se obter ao final um filtro de ordem maior.

3.6 Parâmetros construtivos

Nessa seção apresenta-se os detalhes construtivos utilizados para a realização do experimento.

3.6.1 Parâmetros construtivos das bobinas

Com o objetivo de se analisar o campo magnético produzido por um conjunto de espiras para a construção de um sistema de posicionamento, foi necessário estabelecer alguns parâmetros iniciais de construção das bobinas com o intuito de se obter uma estimativa numérica dos campos gerados. Inicialmente, estabeleceu-se que:

- (a) corrente de cada espira igual ao valor máximo suportado pelo fio utilizado, de acordo com a Tabela 3.6.1 ;
- (b) diâmetro dos núcleos de ferrite disponíveis $0,5\text{cm}$, 1cm e $1,5\text{cm}$;
- (c) permeabilidade magnética do material ferromagnético $\mu = 2000 \mu_0$;
- (d) frequência da onda do gerador $f_c = 10\text{kHz}$.

Para a utilização dos núcleos de ferrite, adquiriu-se os mesmos da empresa Thornton Eletrônica [16] alguns modelos para análise de diferentes comprimentos e diâmetros. Dessa maneira, uma análise numérica prévia poderia fornecer estimativas do campo gerado antes da montagem final, sendo o valor da permeabilidade magnética obtido do catálogo da mesma empresa. Pode-se observar alguns dos diferentes modelos de ferrite na Figura 3.11.

Em seguida, torna-se necessário a definição de que fio de cobre utilizar. Nesse trabalho, foi dada prioridade a bobinas com fios de cobre esmaltados, da série AWG pelo fato de este ser o padrão mais comum de se usar. Apresenta-se na Tabela 3.6.1 (obtida em [17]) uma parte parcial de tais fios, com seus parâmetros de interesse. É importante se levar em conta o diâmetro de tais fios uma vez que eles podem ser enrolados em diferentes núcleos de ferrite, obtendo-se diferentes números de voltas em cada configuração.

Tabela 3.1: Tabelas de fios AWG analisados

Fios AWG		
Bitola	Diâmetro (mm)	Corrente Máxima(A)
31	0.2298	0.110
32	0.2019	0.090
33	0.1798	0.072
35	0.1426	0.045
37	0.1131	0.028
39	0.0897	0.017
41	0.0711	0.011
43	0.0564	0.009
45	0.0445	0.007

Essa variedade de fios serviu também para a análise numérica do campo gerados pelas bobinas, sempre com o objetivo de se obter o maior campo possível dentro de limites de corrente disponível pelos componentes e custo de produção. Adiantando-se um pouco,

pela análise teórica do capítulo 4, quanto maior a corrente, maior o campo gerado. De acordo com a disponibilidade de componentes, optou-se pelo fio AWG 32, adquirindo-se um carretel de tal bitola conforme pode-se observar na Figura 3.12

Inicialmente, foi analisado o campo produzido por uma espira simples, a fim de se obter um comportamento inicial do campo. Logo em seguida, aproximações para conjuntos de espiras foram realizadas, conforme demonstrado na seção 3.2. O resultado final do enrolamento do núcleo de ferrite de 1,5cm de diâmetro e 5cm de raio pode ser observado na Figura 3.13.

Por fim, à bobina montada foi aplicado um verniz de fios para protegê-la e assegurar que as espiras de suas extremidades não escapassem da estruturas quando manipulados (como na soldagem dos fios ou mesmo na colocação sobre a plataforma).

3.6.2 Considerações de construção dos circuitos

Nessa seção, são estabelecidos os parâmetros de construção dos circuitos. Apresenta-se inicialmente na Tabela 3.6.2 os valores dos resistores usados para o estágio de tratamento de sinais e outros dados pertinentes.

Tabela 3.2: Parâmetros de construção do estágio de amplificação.

Parâmetro	Valor
R_{g1}	$10k\Omega$
R_{g2}	$100k\Omega$
R_{g3}	$10k\Omega$
R_{g4}	$10k\Omega$
R_G	$10k\Omega$
V_{off}	$4V$
V_{adj}	$4V$
κ_S	$5mV/Gauss$

Com tais valores, o ganho do subtrator, baseado na equação (3.33), foi determinado

$$G_{subt} = 1 + \frac{40k\Omega}{R_G} = 1 + \frac{40k\Omega}{10k\Omega} = 5, \quad (3.37)$$

onde foi estabelecido um ganho pequeno devido à pequena amplitude do sinal trabalhado, deixando-se um ganho maior para o estágio de amplificação. Ao final, com os valores de resistores utilizados, obtém-se

$$G_{amp} \equiv 5 \frac{R_{g1}}{R_{g2}} \left(1 + \frac{R_{g3}}{R_{g4}} \right) = 100. \quad (3.38)$$

Para o estágio de filtragem, nenhum ganho é estabelecido a fim de facilitar a montagem. Estabelece-se apenas que o filtro passa-baixa tenha um frequência de corte em $15kHz$. Usando-se valores padrão de capacitores e resistores de 1%, foi desenvolvido um filtro que atenda relativamente às necessidades impostas.

3.6.3 Considerações de construção do sistema de ensaio

Por fim, lista-se alguns detalhes técnicos na construção do sistema de ensaio:

- (a) para a fixação dos transladores, foram usados parafusos de inox por esse se tratar de um material não ferromagnético, diminuindo assim a influência nos campos gerados pela bobina, conforme pode-se observar na Figura 3.14;
- (b) os transladores são feitos de alumínio, um material também não ferromagnético, pouco influenciando na geração dos campos;
- (c) os fios do sensor Hall são todos blindados a fim de evitar influências entre eles bem como seu grande comprimento poderia levar a captar ruídos indesejáveis, como pode ser observado na Figura 3.15. Outras partes do circuito também utilizaram os mesmos fios, como na energização da bobina;
- (d) em todos os circuitos, utiliza-se uma malha de terra em volta de toda a placa a fim de proteger os sinais, inclusive na pequena placa do sensor Hall, conforme pode-se observar na Figura 3.17;
- (e) todos integrados de amplificadores operacionais tem próximos aos seus pinos de alimentação capacitores de $100nF$ para desacoplamento da fonte. Integrados com dois ou mais AOPs possuem um capacitor de $10\mu F$ acoplado também aos pinos de alimentação, conforme pode-se observar na Figura 3.16;
- (f) núcleos de ferrite foram utilizados na alimentação das fontes de tensão dos circuitos a fim de evitar a influência de picos de energia da rede elétrica.

Para a verificação dos valores de tensão e do ajuste do valor $0V$ na saída do subtrator INA101, foi utilizado um multímetro digital da Minipa, modelo ET-2930 [18]. Trata-se de um multímetro categoria IV 600V de segurança, precisão básica de 0,02% de segurança, display de 5 4/5 dígitos e interface com o PC. Para as medidas, utilizou-se portanto a interface com o PC que permitia a gravação da série temporal adquirida. Na Figura 3.18 pode-se observar a interface com o PC na qual foram adquiridos os dados experimentais.

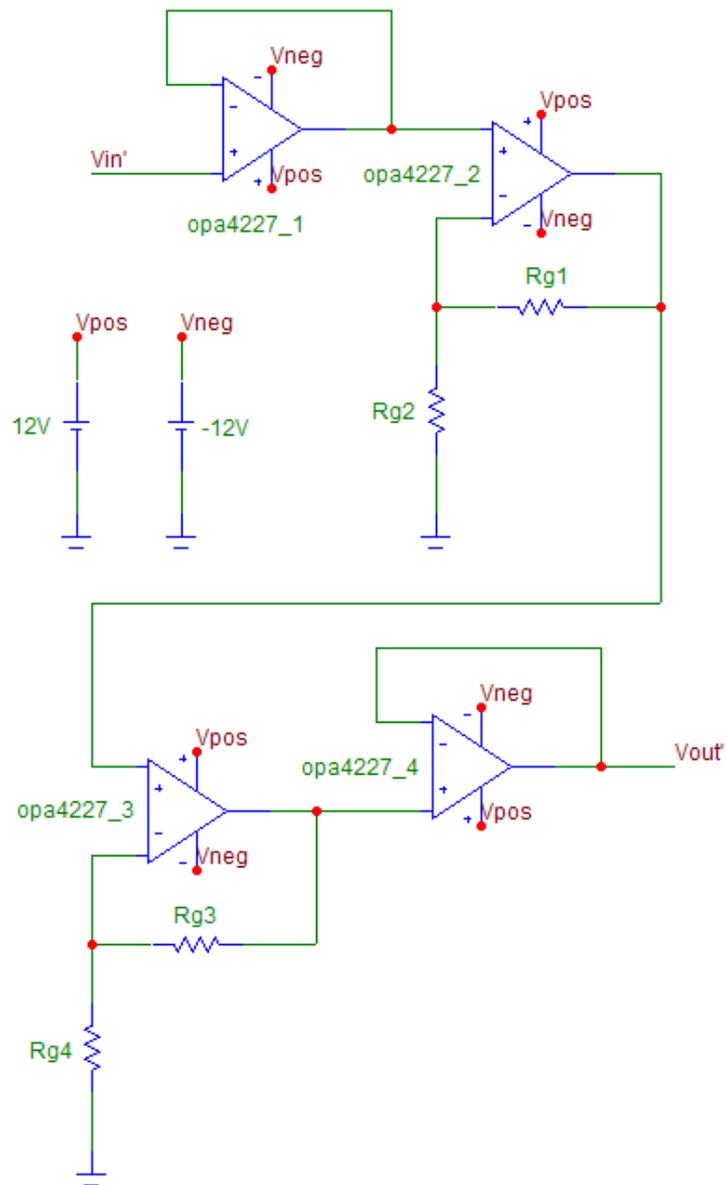


Figura 3.9: Diagrama do circuito de amplificação.

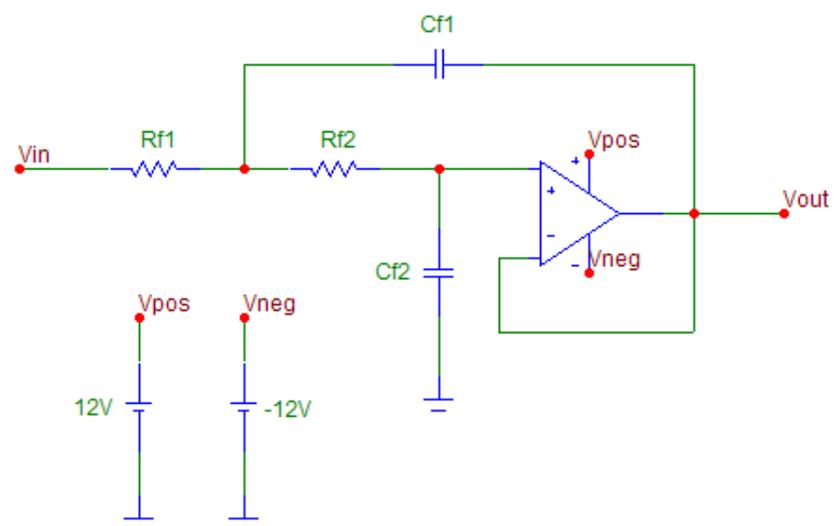


Figura 3.10: Diagrama do circuito de filtro.



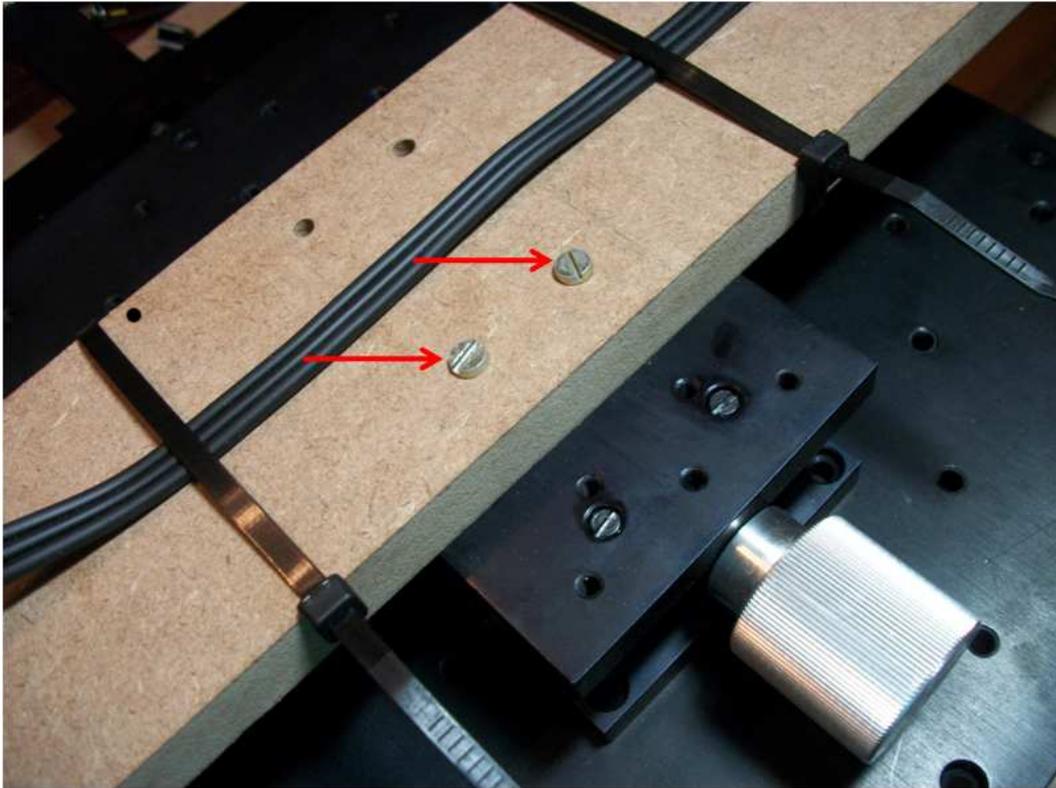
Figura 3.11: Núcleos de ferrite disponíveis.



Figura 3.12: Carretel adquirido.



Figura 3.13: Núcleo de ferrite com fio enrolado, formando a bobina.

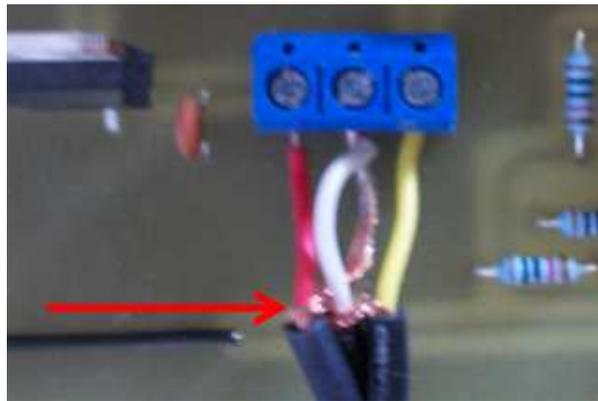


(a)

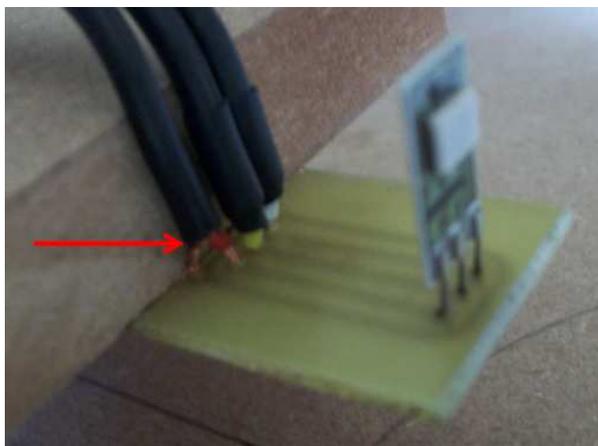


(b)

Figura 3.14: Parafusos de latão (a) e inox (b) utilizados na fixação do experimento.



(a)



(b)

Figura 3.15: Fios blindados utilizados nos circuitos.

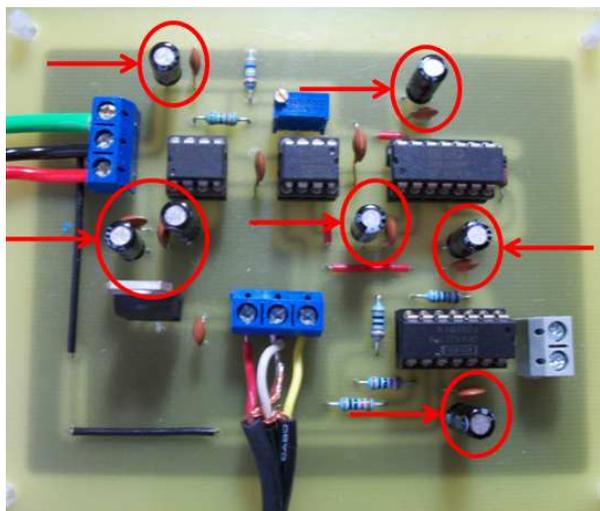
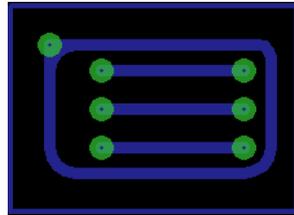
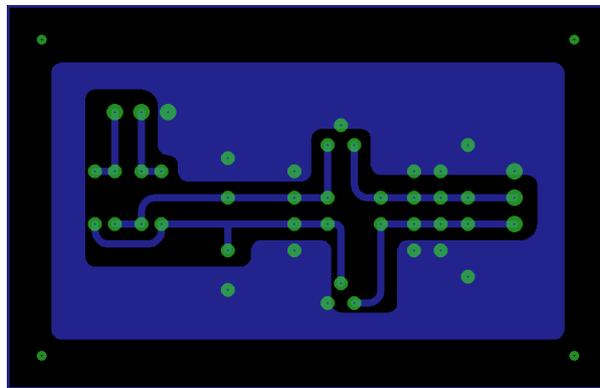


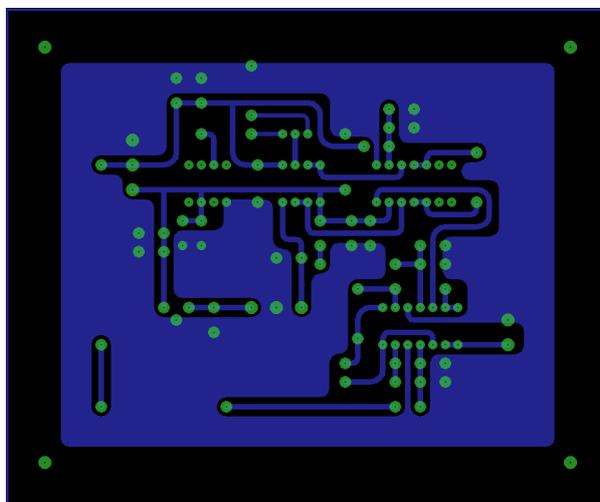
Figura 3.16: Capacitores de aterramento no circuito de compensação e amplificação.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.17: Layout das placas com malha de terra em torno do circuito. placa do sensor Hall (a), placa da fonte de alimentação (b) e placa do condicionador (c).

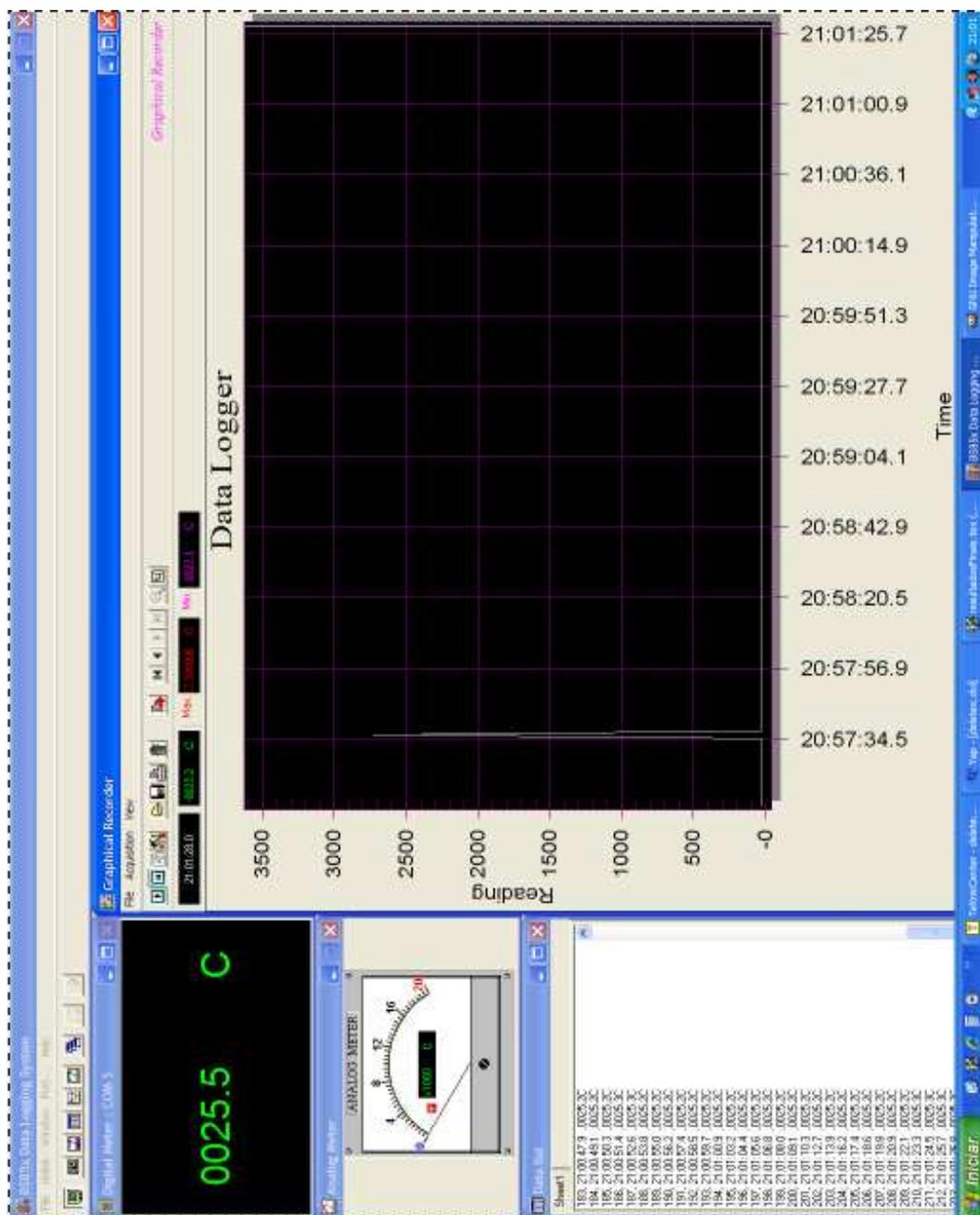


Figura 3.18: Interface do programa para aquisição da série temporal.

4 RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

Apresenta-se nesse capítulo os resultados das simulações numéricas das densidade de fluxo magnético apresentadas pelas equações de campo nos capítulos anteriores. Logo após, os resultados dos experimentos envolvendo a construção das bobinas são apresentados e do sistema de posicionamento baseado no sensor Hall.

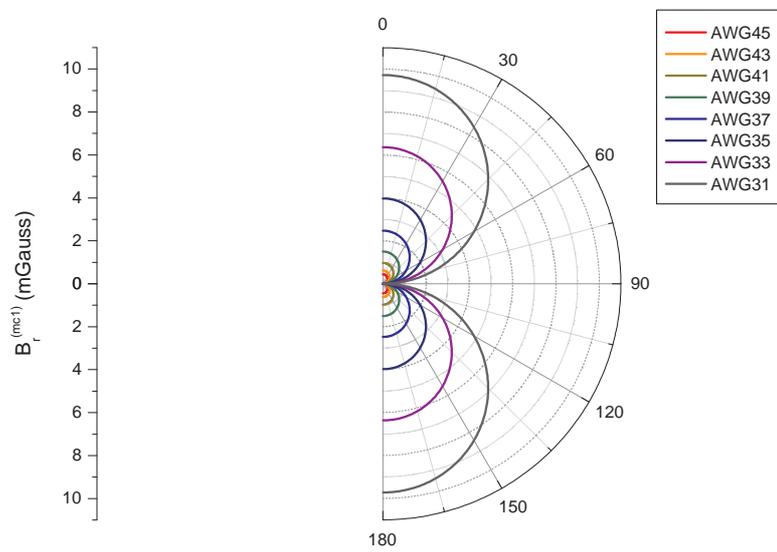
A simulação numérica teve o objetivo de validar as aproximações realizadas com as equações do potencial vetorial magnético e também de oferecer a ordem de grandeza do campo a ser medido, possibilitando a escolha do sensor. Todas as simulações foram realizadas em Linguagem C.

4.1 Simulação de densidade de fluxo magnético para uma espira com corrente senoidal

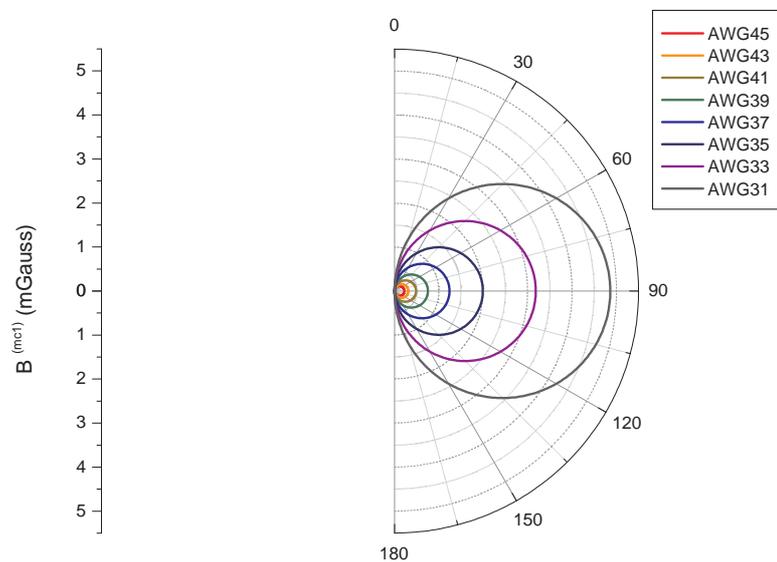
Esse capítulo apresenta os resultados e a análise do campo gerado por uma simples bobina a partir dos resultados para a densidade de campo magnético. Utilizando-se, da Tabela 3.6.1, of fios AWG de numeração ímpar, entre 45 e 31, pode-se obter uma estimativa das componentes radial e angular do campo magnético. Os resultados para núcleos de ferrite de diâmetro de $1,5\text{cm}$, 1cm e $0,5\text{cm}$ encontram-se nos gráficos das Figuras 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente.

Todos os campos gerados por uma única espira nos gráficos de 4.1 até 4.3 tiveram seus valores de corrente tomados a partir da Tabela 3.6.1, ou seja, considerando-se uma situação ideal onde a corrente máxima nominal é aplicada. Considerou-se que essa é uma aproximação razoável num primeiro momento dado que o que se deseja apenas é uma estimativa do campo gerado para verificar-se a possibilidade de se medir o campo com os recursos disponíveis.

Pode-se, então, se construir uma tabela onde apresenta-se os valores máximos de densidade de fluxo para cada um dos casos, conforme é demonstrado na Tabela 4.1. Como é de se esperar, quanto maior a corrente circulante na espira, maior o módulo da densidade de fluxo magnético. Comparando-se também os resultados para diferentes valores de diâmetros de núcleo de ferrite, o maior diâmetro corresponde à maior densidade de fluxo magnético. Esse é um resultado esperado uma vez que, conforme os resultado teórico da Equação (3.1), a densidade de fluxo magnético é diretamente proporcional a estas duas quantidades.



(a)



(b)

Figura 4.1: Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de $1,5\text{cm}$.

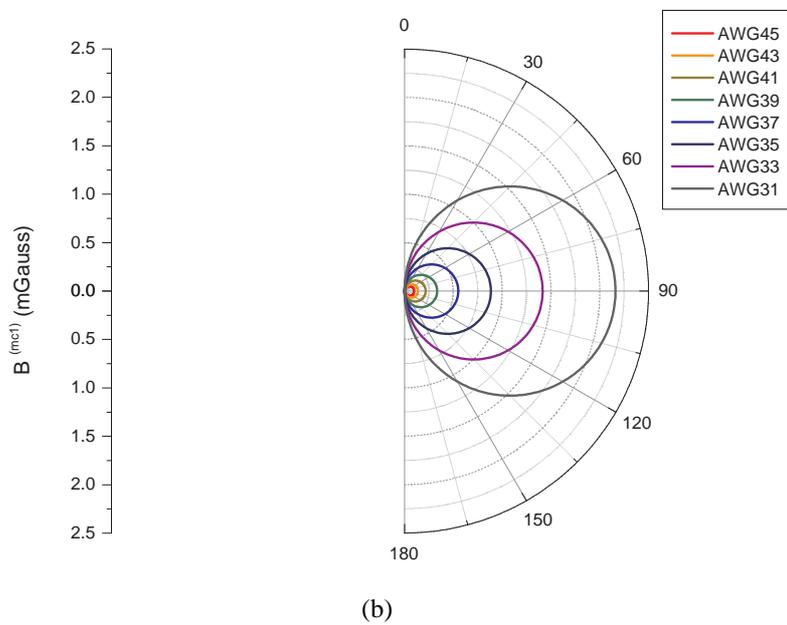
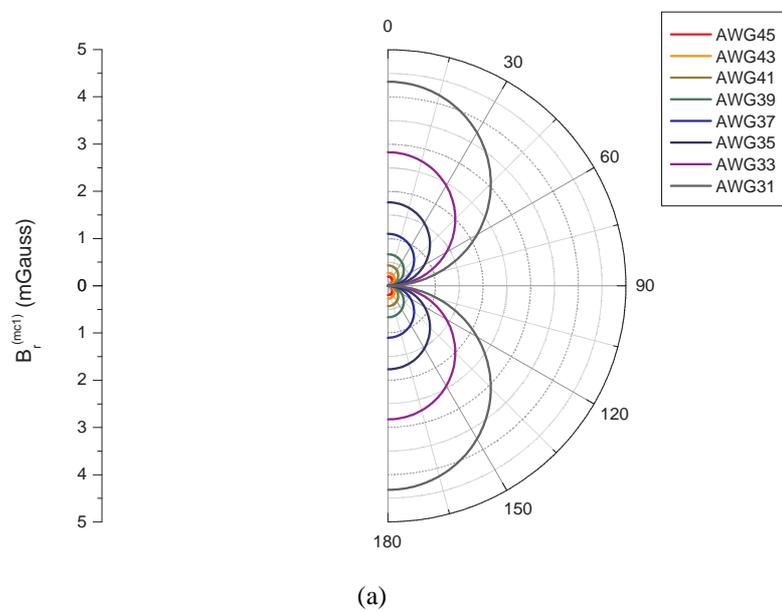
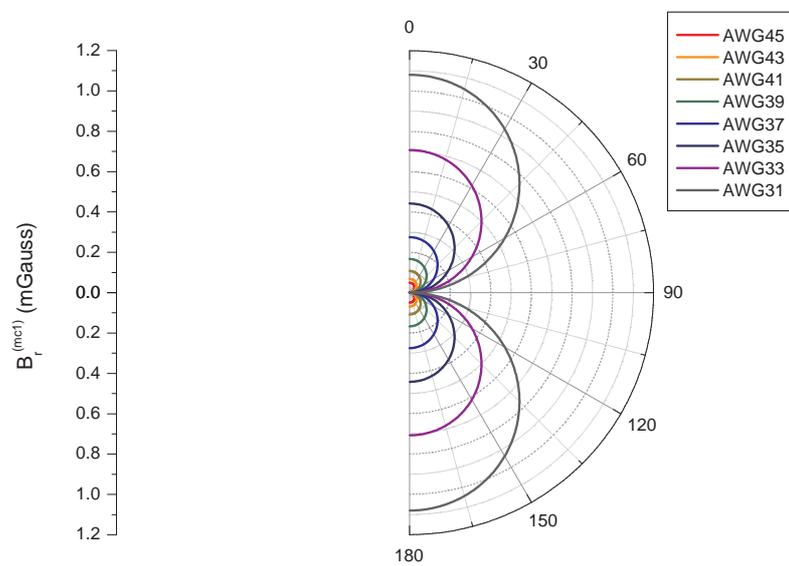
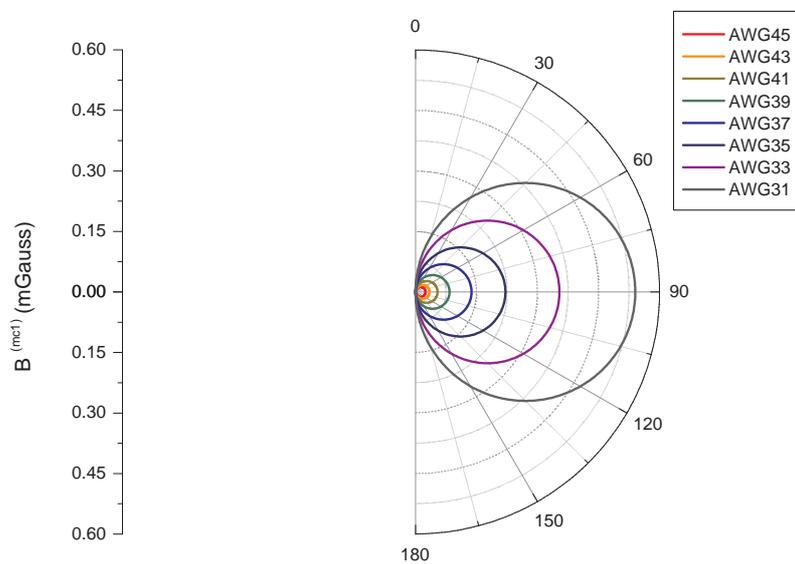


Figura 4.2: Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de $1cm$.



(a)



(b)

Figura 4.3: Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para uma espira de diâmetro de $0,5\text{cm}$.

Tabela 4.1: Valores máximos de densidade de fluxo magnético para uma espira com corrente senoidal.

Fio	0,5cm		1cm		1,5cm	
AWG	$ \vec{\mathcal{B}}_r(\vec{r}, t) $ (mGauss)	$ \vec{\mathcal{B}}_\theta(\vec{r}, t) $ (mGauss)	$ \vec{\mathcal{B}}_r(\vec{r}, t) $ (mGauss)	$ \vec{\mathcal{B}}_\theta(\vec{r}, t) $ (mGauss)	$ \vec{\mathcal{B}}_r(\vec{r}, t) $ (mGauss)	$ \vec{\mathcal{B}}_\theta(\vec{r}, t) $ (mGauss)
45	4.91E-3	2.45E-3	0.19	9.82E-2	0.44	0.22
43	6.87E-2	3.44E-2	0.27	0.14	0.62	0.31
41	0.108	5.39E-2	0.43	0.22	0.97	0.48
39	0.169	8.34E-2	0.67	0.33	1.50	0.75
37	0.27	0.14	1.10	0.50	2.47	1.24
35	0.44	0.22	1.77	0.88	3.98	1.99
33	0.71	3.53	2.83	1.41	6.36	3.18
31	1.08	0.54	4.31	2.16	9.72	4.86

Uma maneira de se verificar se a aproximação com expansão de Maclaurin, considerando-se apenas 1 termo ($\vec{\mathcal{B}}^{(mc1)}(\vec{r}, t)$), é calcular o erro a partir das expressões com o cálculo de um termo a mais ($\vec{\mathcal{B}}^{(mc2)}(\vec{r}, t)$), conforme descrito no capítulo anterior. O erro percentual será então definido como

$$\text{Erro} \equiv \left| \frac{\vec{\mathcal{B}}^{(mc1)} - \vec{\mathcal{B}}^{(mc2)}}{\vec{\mathcal{B}}^{(mc2)}} \right| \times 100\% . \quad (4.1)$$

Pode-se então realizar simulações numéricas para obter-se o erro percentual, sendo este resultado apresentado no gráfico da Figura 4.4 para uma espira de diâmetro de 1,5cm com fio AWG 35. Para outros fios, os resultados do erro percentual situam-se na mesma ordem de grandeza. Portanto, pode-se observar então que a aproximação do campo com a expansão de Maclaurin até o primeiro termo é uma boa aproximação, nesse primeiro momento. Usar-se-á, portanto, tal aproximação no cálculo do campo para um conjunto de espiras, conforme poderá ser observado na próxima seção.

4.2 Simulação de densidade de fluxo magnético para o agrupamento de espiras

Tendo-se núcleos de ferrite de comprimento de 5cm, 3cm, 2cm e 1cm, pode-se analisar, juntamente com a tabela de fios AWG analisados 4.2, os números de voltas para cada comprimento de núcleo. Considera-se, a partir de agora, que o diâmetro dos núcleos será sempre de 1,5cm por obter-se sempre um campo maior. É possível observar então que o número de voltas se alterará bastante conforme o comprimento escolhido.

Dado que o objetivo é sempre obter-se o maior campo possível, escolhe-se os núcleos de ferrite de 5cm de comprimento uma vez que obter-se-á a maior densidade de fluxo disponível, conforme a Equação (3.14) da seção 3.2 prediz.

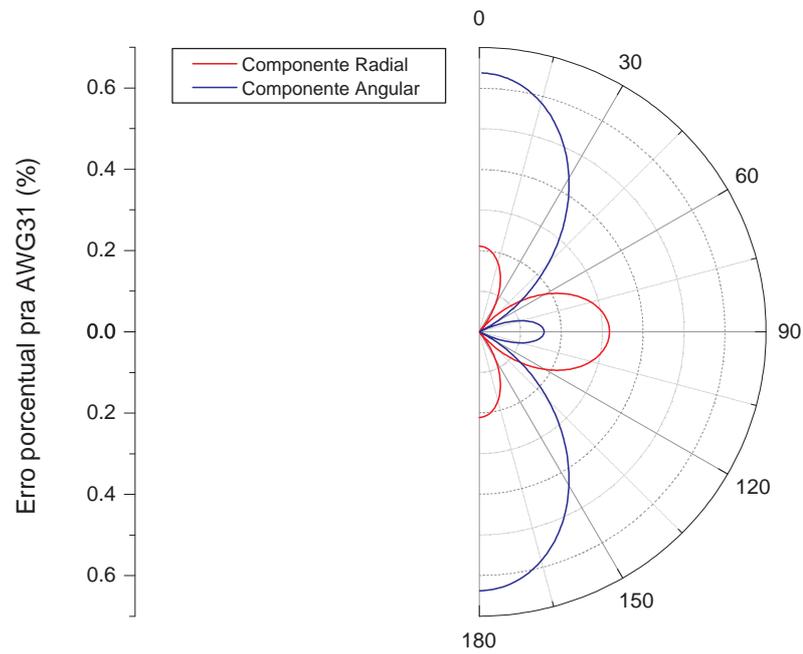
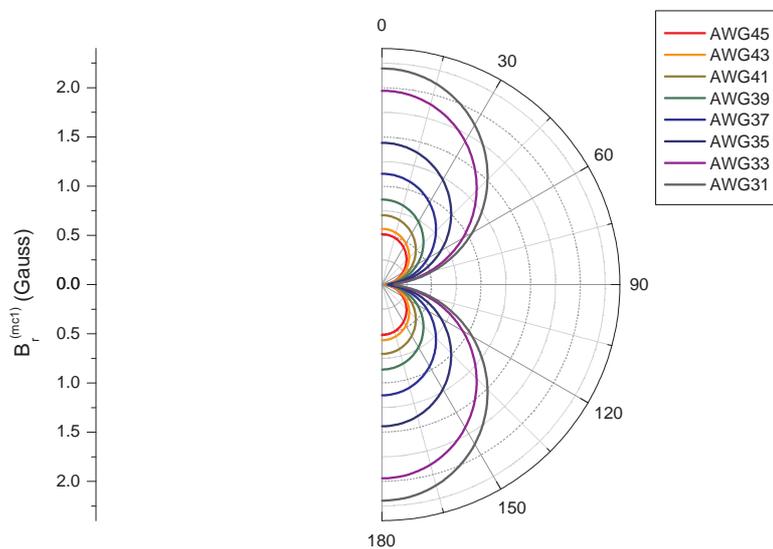
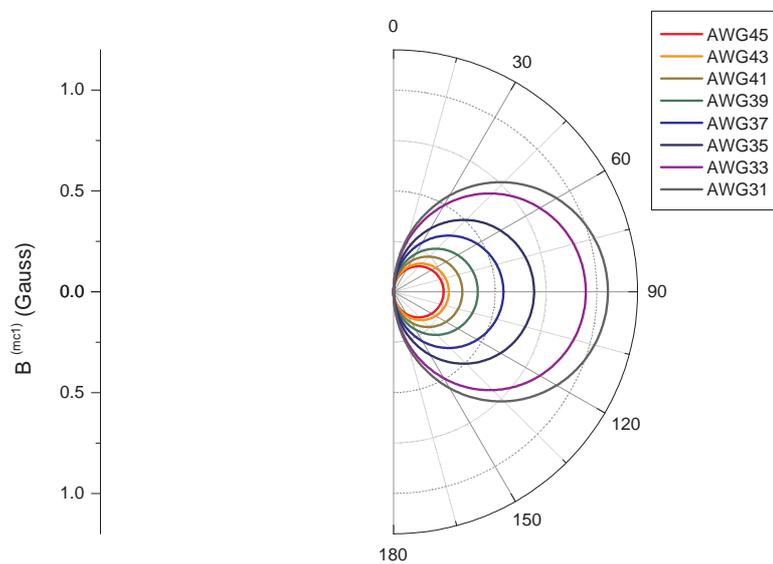


Figura 4.4: Erro percentual das componentes radial e angular de acordo com a Equação (4.1) para uma espira simples de fio AWG 31.

Nesse ponto, escolhe-se os núcleos toroidais de 5cm de comprimento e realiza-se simulações numéricas para as componentes radial e angular, conforme foi feito na seção anterior. Os resultados são apresentados nos gráficos das Figura 4.5



(a)



(b)

Figura 4.5: Módulos das componentes radial e angular da densidade de fluxo magnético (unidades Gaussianas). Cálculos para um conjunto de espiras enroladas num núcleo de ferrite de 5cm de comprimento.

Tabela 4.2: Número de voltas para os diferentes comprimentos de núcleos.

Fios		Número de voltas			
Bitola	Diâmetro do fio (<i>mm</i>)	5 <i>mm</i>	3 <i>mm</i>	2 <i>mm</i>	1 <i>mm</i>
31	0.22680	219	131	87	43
32	0.20190	247	149	99	49
33	0.17980	277	167	111	55
34	0.16010	311	187	125	61
35	0.14260	351	209	139	69
36	0.12700	393	235	157	79
37	0.11310	441	265	177	87
38	0.10070	497	297	199	99
39	0.08970	557	333	223	111
40	0.07990	625	375	249	125
41	0.07110	703	421	281	141
42	0.06330	789	473	315	157
43	0.05640	887	531	355	177
44	0.05030	993	595	397	199
45	0.04450	1123	673	449	225

Conforme pode-se observar nos gráficos da Figura 4.5, a resposta da densidade fluxo magnético é tanto maior quanto maior a bitola do fio AWG. Mesmo que se use um fio de diâmetro menor, o número de voltas não consegue compensar a perda de corrente uma vez que a capacidade de corrente aumenta numa taxa maior do que o aumento do diâmetro. Portanto, nos ensaios, pretende-se usar um fio AWG que suporte a maior corrente possível de se fornecer, sempre considerando-se os materiais disponíveis e a segurança pessoal uma vez que os valores nominais de corrente são dificilmente atingíveis por problemas como aquecimento no fio.

4.3 Resultados experimentais e comparação com valores teóricos

Apresenta-se nessa seção uma discussão sobre os resultados experimentais obtidos a partir dos ensaios realizados, conforme foi descrito na seção 3.6. Ao realizar-se tais ensaios, aplicou-se na bobina tanto uma corrente senoidal, gerada a partir de um gerador de sinais, quanto uma corrente constante, gerada a partir de um regulador de tensão 7805 com um resistor de potência.

Dado que se dispunha de um conjunto de transladores conforme descrito na seção 3.3, os ensaios ocorreram mudando-se apenas uma direção escalar, e não uma direção de coordenada esférica como apresentado nas simulações da seção 4.2, o que de nenhuma forma implica em perda de generalidade, apenas leva a simulações onde uma variável escalar é variada, e não o ângulo conforme foi analisado. Portanto, apresentar-se-á resultados teóricos correspondentes às medidas experimentais nas próximas seções. Os resultados teóricos obtidos nas seções 4.1 e 4.2 cumpriram o propósito de fornecer uma idéia da magnitude da densidade de fluxo magnético gerada pelas bobinas, dado o material que se dispunha para realizar os ensaios.

Para um melhor ensaio, os valores de tensão obtido foram capturados diretamente da saída do subtrator INA101 (cujo ganho seria de 5, conforme estabelecido na seção 3.5).

Após a filtragem do sinal, os valores eram obtidos pela interface gráfica do multímetro e salvos em arquivos para posterior análise. Antes de cada ensaio, era verificado o valor de saída do subtrator INA101, ajustando-se para o mais próximo de $0V$.

4.3.1 Resultados experimentais com corrente AC

Para o procedimento de medições, inicialmente, posicionou-se a bobina sobre a plataforma e posicionou-se o sensor Hall de maneira a estar alinhado com o eixo z da bobinas, obtendo-se assim o maior campo mensurável sobre a direção radial. Portanto, não ocorreria nenhuma influência do ângulo ϕ_S da direção do sensor. Esse fato foi escolhido para se obter o maior campo mensurável e para facilitar as simulações numéricas, sem se perder a generalidade do ensaio.

Estabeleceu-se que a altura para os ensaios, a partir do centro geométrico da bobina, como $z = 3,8cm$. Alterou-se então a distância da bobina ao longo do eixo x ; portanto, afastando-se da bobina, e observando-se a estabilidade dos valores ao longo do tempo. Essa análise é importante devido ao fato da necessidade de que flutuações no sistema não acarretem mudanças quando se usar como um sistema de posicionamento real pois a posição do objeto a ser medido poderia ser informada de maneira errônea. No gráfico da Figura 4.6 apresenta-se os resultados da medição ao longo de aproximadamente 200s.

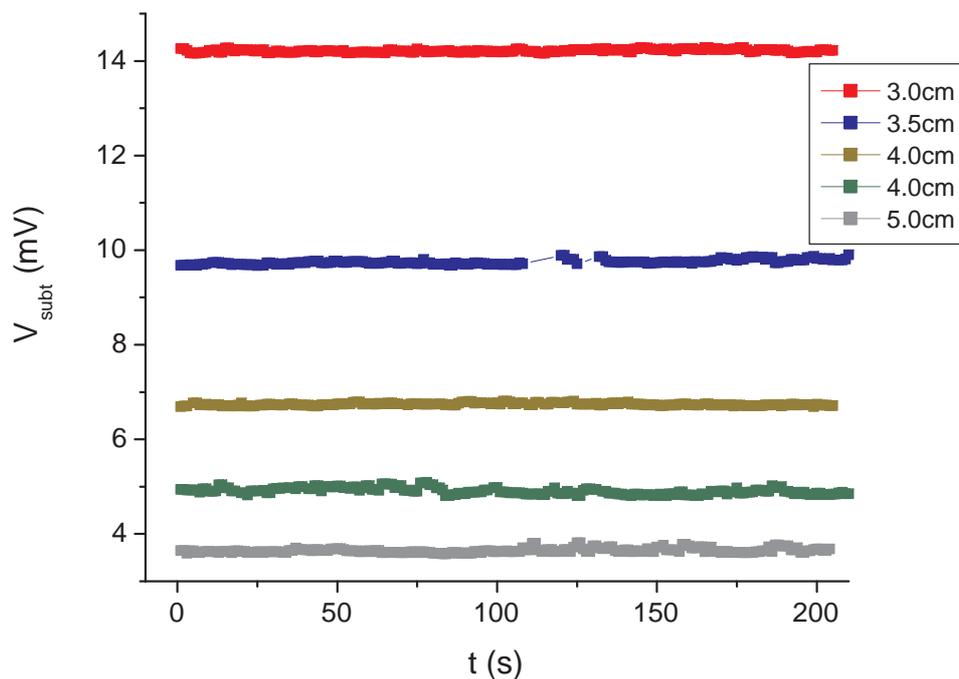


Figura 4.6: Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente alternada.

Pode-se observar então que os valores permanecem dentro de suas respectivas faixas, permanecendo estáveis a ponto de garantir sua confiabilidade quando usados num sistema de posicionamento.

O próximo passo é então obter-se uma estimativa numérica para a densidade de fluxo magnético. O valor eficaz da corrente da bobina foi obtido medindo-se diretamente sobre

o gerador de sinais, obtendo-se $36,2\text{mA}$. Com base nesse resultado, simulou-se a densidade de campo magnético para a variação da distância x , obtendo-se o gráfico apresentado na Figura 4.10.

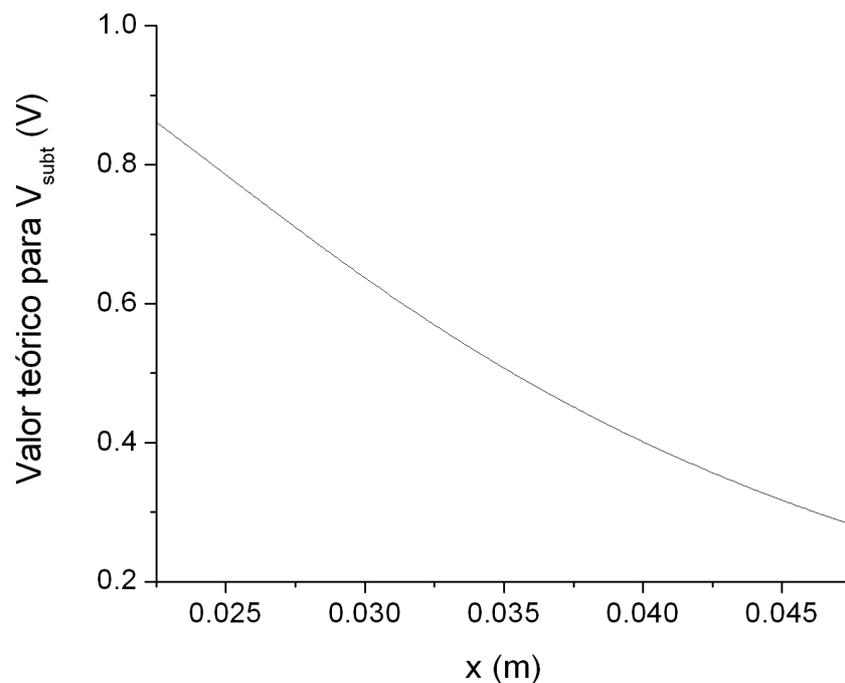


Figura 4.7: Saída teórica de tensão da variação do eixo x com corrente alternada.

Realizando-se os ensaios, uma média de cada uma séries obtidas da Figura 4.6 foi calculada e o resultado, com a variação da distância x , é apresentado na Figura 4.8.

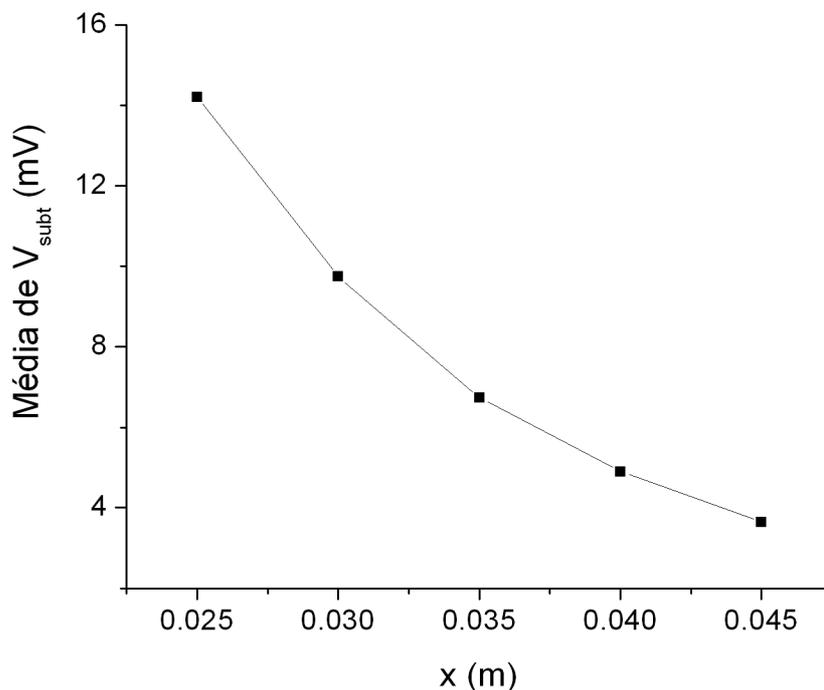


Figura 4.8: Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente alternada.

Comparando-se o resultado experimental com os valores teóricos, observa-se uma grande atenuação da densidade de fluxo magnético perante ao valor experimental teórico. Após uma extensa revisão do programa que calcula a densidade de fluxo magnético, não foi encontrado nenhum erro no que se refere à metodologia utilizada. Partiu-se então para uma análise do experimento e das possíveis causas da perda de magnitude.

Um ponto a se considerar é o efeito de borda das espiras que se localizam nas extremidades do núcleos da bobina. A interação do campo gerado por elas com o núcleo de ferrite não é a mesma que o de uma espira localizada próximo ao centro do núcleos de ferrite, o que leva a um enfraquecimento do campo. Outro fato pendente é a própria influência de campos externos dado que nenhuma blindagem foi implementada para proteger a região de ensaio. Uma parede de material não-ferromagnético poderia ajudar na ausência de influências externas ao experimento.

Adicionalmente, a corrente elétrica aplicada sobre a bobina foi menor do que se esperava uma vez que o fio AWG de número 32 utilizado suportava uma maior corrente; entretanto, a corrente foi limitada para proteger o gerador de sinais utilizado. Uma densidade de fluxo maior ofereceria uma segurança maior nas medidas uma vez que campos externos teriam seu peso diminuído na soma total dos campos. Um objeto de dúvida é o próprio verniz utilizado para proteger as bobinas, dado que trata-se de um líquido utilizado em transformadores para proteger os fios, apesar desse último fator provavelmente pouco influenciar. Um ponto final a se considerar é a própria propagação da onda uma vez que a permeabilidade magnética do ar é muito menor do que o núcleo de ferrite. Portanto, uma modelagem maior nesse sentido torna-se necessária para explicar a grande perda da intensidade do sinal, considerando-se então a transposição dos meios.

Apesar da grande perda de densidade de fluxo, pode-se também observar pelas Fig-

uras 4.7 e 4.8 que o comportamento assintótico de ambas é semelhante, o que se leva a crer que decaimento do campo com a distância pode ser utilizado para um sistema de posicionamento cuja resposta fique em função da densidade de campo medido, desde que bem analisada a resposta do campo perante a variações de deslocamento.

Uma análise mais profunda do comportamento assintótico deve então ser realizada, analisando-se a possibilidade de se levar em conta uma aproximação mais simples para o campo magnético, levando-se em conta aproximações com os termos de apenas r^{-3} . Tal aproximação poderá se alcançada com o aumento da corrente na bobina e/ou variação da frequência da onda senoidal aplicada na bobina.

4.3.2 Resultados experimentais com corrente DC

Numa tentativa de se verificar uma outra maneira de analisar a densidade de fluxo magnético, aplicou-se uma corrente constante sobre a bobina e repetiu-se o ensaio da seção 4.3.1. Obteve-se uma corrente constante de $81,42mA$ aplicada sobre a bobina, e todos os demais parâmetros permaneceram os mesmos, com a diferença de que o número de onda k seria nulo dado que a corrente não varia mais no tempo. Para a média temporal dos valores obtidos, tem-se o gráfico da Figura 4.9. Já o resultado teórico é apresentado na Figura 4.10.

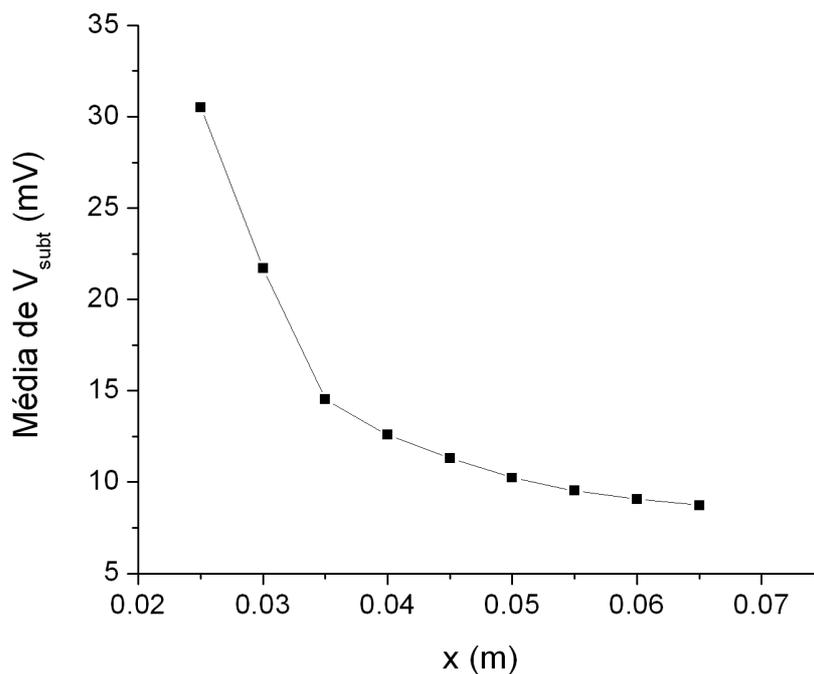


Figura 4.9: Série temporal obtida da variação do eixo x com corrente constante.

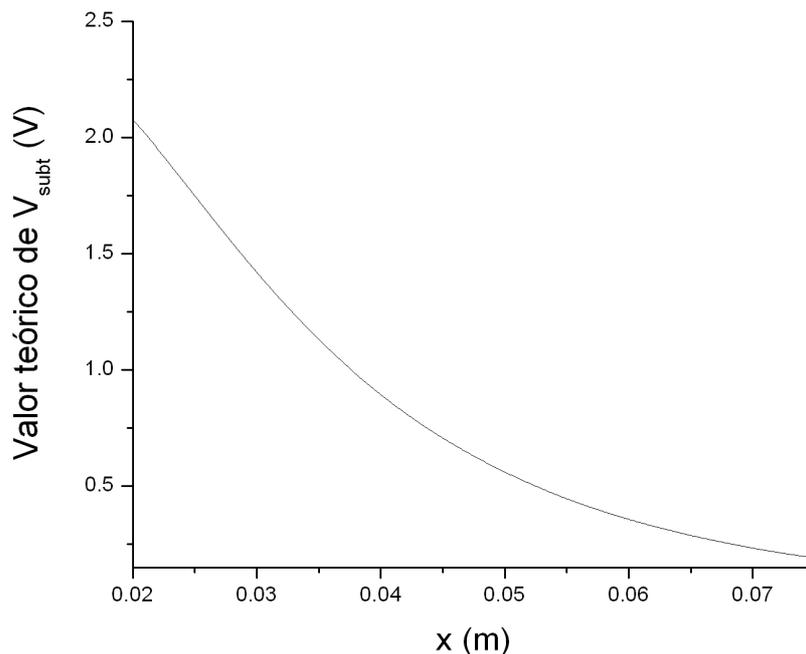


Figura 4.10: Saída tórica obtida da variação do eixo x com corrente constante.

Novamente, as observações apontadas para a grande perda da densidade fluxo magnético apresentadas na seção 4.3.1 continuam válidas. Esses resultados levam uma vez mais a crer que uma análise teórica mais profunda torna-se necessária. Contudo, o comportamento assintótico também é observado que se leva a crer que o modelo, ao menos no que se refere ao decaimento do campo com a distância, corresponde às expectativas no que se refere à utilização como um sistema de posicionamento.

4.4 Teste do sensor em uma mão

Por fim, posicionou-se o sensor Hall em um dedo de uma mão para se verificar a possibilidade de medição de campos, levando a um sistema de posicionamento com os recursos que se dispunha ao longo do trabalho. O resultado da implementação do sensor é apresentado na Figura 4.11.

Aplicando-se uma corrente senoidal na bobina conforme descrito na seção 4.3.2, observou-se uma pequena variação de tensão como resposta do sensor Hall, dentro do intervalo de tensões da Figura 4.9, conforme era de se esperar. O resultado é apresentado na Figura 4.12 onde a tensão foi amplificada com o uso dos amplificadores operacionais.

Esse foi o resultado de uma aproximação e posterior afastamento do sensor implementado na mão. Apesar da resposta lenta do sistema de captação de sinais (cerca de 1s, aproximadamente), foi possível observar uma variação de tensão, conforme era de se esperar, mas que muitos fatores externos poderiam atrapalhar. Apesar do baixo campo obtido, alterações podem ser realizadas para se aumentar a resolução do sistema, levando-se a responder mais precisas. Uma discussão a respeito das melhorias é feita no capítulo de conclusão do trabalho.

Pode-se então estender esse conceito apresentado para um sistema de triangulação



Figura 4.11: Implementação do sensor Hall em uma mão.

onde a posição exata de um sensor poderá ser determinada. Três bobinas então deverão ser utilizadas para a captação dos sinais e algoritmos de localização poderão ser implementados para a localização.

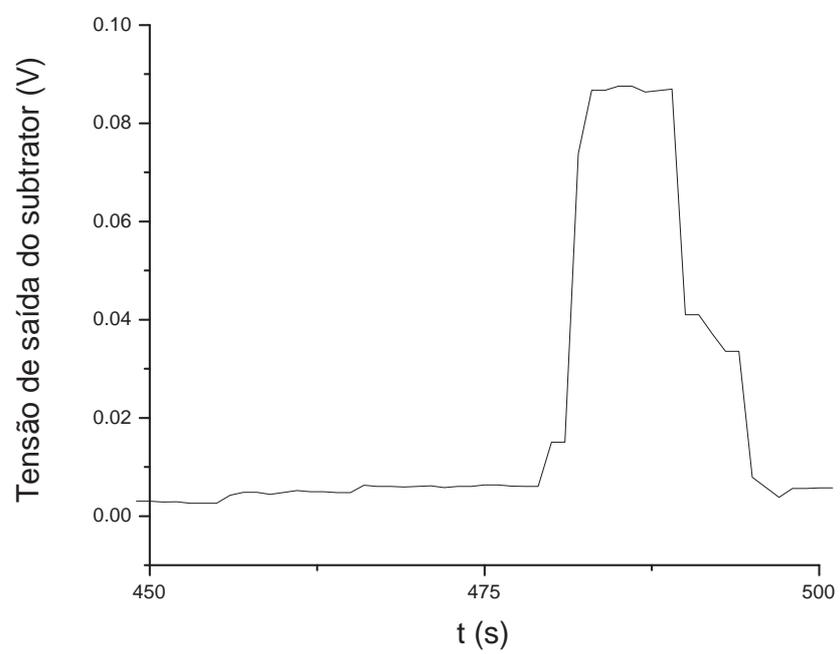


Figura 4.12: Resposta para a aproximação do sensor implementado na mão.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esse foi um trabalho que começou na disciplina de Instrumentação do Curso de Engenharia Elétrica onde se procurava medir a densidade de fluxo magnético de um grande solenóide (cerca de 68cm), caracterizando-se a densidade de fluxo magnético com base em equações previamente conhecidas. A idéia de se construir e caracterizar um sistema de posicionamento com bobinas pequenas foi uma proposta de Trabalho de Conclusão de Curso baseada em trabalhos já realizados [3] com o objetivo de se obter uma caracterização do campo e a verificação da possibilidade de estender a análise do campo.

Iniciando-se os estudos com o início da cadeira de TCC, procedeu-se a um grande estudo sobre a modelagem de campo magnéticos e a pesquisa de como se escolher fios e núcleos de ferrite para a montagem do sistema de ensaios. Os transladores foram emprestados pelo laboratório de Laser e Óptica do Instituto de Física da UFRGS e todos os outros componentes foram adquiridos ou emprestados pelo IEE. No decorrer do presente semestre, todas as simulações e montagens foram então realizadas.

Os resultados teóricos mostraram que a densidade de fluxo magnético obtida com os núcleos de ferrite disponíveis não seria muito grande de fato, mas que permitiria a medição do campo de maneira razoável para um estudo inicial e verificação do comportamento do sistema. Montou-se então o sistema completo e se realizou ensaios, obtendo-se os dados conforme demonstrado na seção 4.3, analisando-se também teoricamente o valor do campo obtido.

Houve uma certa divergência entre os valores medidos e os valores esperados, o que pode indicar uma necessidade de se analisar os efeitos de borda das bobinas e do efeito de influências externas como campos de outras fontes. No entanto, o comportamento assintótico parece corresponder às expectativas, e uma análise mais profunda indica que, na comparação entre os valores teóricos e as medidas experimentais, existe um fator de proporcionalidade de 50 vezes (isto é, o campo teórico é cerca de 50 vezes maior em módulo que o campo experimental obtido). Um estudo mais detalhado sobre os efeitos de borda provavelmente possa explicar os efeitos bem como o isolamento do sistema possa diminuir consideravelmente os efeitos de outras fontes. Uma consideração maior sobre a propagação do campo sobre os arredores do ensaio, como o decaimento da intensidade do campo, pode trazer melhores resultados teóricos. Para a caracterização de um sistema de posicionamento sobre uma mão, foi possível obter-se uma resposta razoável quando posicionou-se o sensor sobre a mão, nos arredores próximos da bobina, o que torna possível, com algumas melhorias, um sistema de posicionamento magnético.

Como sugestões de melhoria, a utilização de *buffers* para o aumento da corrente aplicada sobre a bobina acarretará em um significativo aumento de campo, possibilitando uma resolução maior para a captação de imagens. A utilização de amplificadores do tipo push-pull foi considerada, mas sua não-linearidade na região de cruzamento por zero acar-

retaria em geração de frequências além da utilizada, podendo complicar mais a análise teórica. Uma solução poderia ser a utilização de *buffers* como o LT1010 que possuem a capacidade de fornecer uma grande corrente de saída [19]. Existem também famílias de amplificadores operacionais que podem ser pesquisadas em fabricante de componentes conhecidos, como a National, Texas e LT (Linear Technologies).

Outra sugestão fica a cargo da calibração do campo magnético. Ao invés de se obter uma resposta exatamente igual ao valor teórico, pode-se simplesmente obter a função de transferência da bobina, medindo-se o campo magnético para a bobina em diferentes pontos do sistema cartesiano. Nessa análise, uma alteração da frequência da onda senoidal aplicada deverá ser realizada, permitindo uma aproximação mais simples da equação do campo magnético, com termos apenas da distância de maior ordem.

O próximo passo para a continuação desse trabalho, após as melhorias discutidas no parágrafo anterior serem realizadas, é a implementação um sistema de captação digital que transforme os dados obtidos do sensor Hall em informação que possa ser mapeada e traduzida com o objetivo de se poder identificar movimentos de corpos. Essa evolução será possível com alguns refinamento da técnica usada nesse trabalho. Concomitantemente a esse trabalho, um sistema de triangulação deverá ser montado e algoritmos de localização deverão ser analisados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] J. CLERK MAXWELL. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume 2, pages 68–73. Clarendon, Oxford, 3rd edition, 1892.
- [2] CONSTANTINE A. BALANIS. *Teoria de Antenas*. LTC, Rio de Janeiro, 3rd edition, 2009.
- [3] Y. SU, D. GENG, . R. ALLEN, D. BURN, G. D. BELL, and R. ROWLAND. Three-dimensional motion system (data-gloves): Application for parkinson disease and essential tremors. *IEEE Int. Workshp on virtual and intelligent Measurement Systems*, pages 28–33, May. 2001.
- [4] YU SU, MARK H. FISHER, ANDZERJ WOLCZOWSKI, G. DUNCAN BELL, DAVID J. BURN, and ROBERT X. GAO. Towards and emg-controlled prosthetic hand using a 3-d electromagnetic positioning system. *IEEE Trans. on Inst. and Meas.*, 56(1), Fev. 2007.
- [5] JOHN D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. Wiley, Berkeley, 3rd edition, 1998.
- [6] FAWWAZ T. ULABY. *Eletromagnetismo para Engenheiros*. Bookman, São Paulo, 3rd edition, 2007.
- [7] PHILIP M. MORSE and HERMAN FESHBACH. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 3rd edition, 1953.
- [8] Sarmiento Campos. Rádioescuta dx: Navegue nas ondas rádio, 2010. Disponível em: <<http://www.sarmiento.eng.br/LoopQuadroOM.htm>>. Acesso em: dezembro 2010.
- [9] P. L. OVERFELT. Near fields of the current constant thin circular loop antenna of arbitrary radius. *IEEE Trans. on Ant. and Prop.*, 44:166–170, Fev. 1996.
- [10] DOUGLAS H. WERNER. An exact integration procedure for vector potentials of thion circular antennas. *IEEE Trans. on Ant. and Prog.*, 44(2), Fev. 1996.
- [11] I. S. GRADSHTEYN and D. RYZHIK. *Table Of Integrals, Series And Products*. Elsevier - Academic Press, San Diego, 7rd edition, 2007.
- [12] HERBERT B. DWIGHT. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*. The MacMillanCompany, New York, 4rd edition, 1972.

- [13] OPTRON. Optron micromecânica Ltda., 2010. Disponível em: <<http://www.optron.com.br/>>. Acesso em: novembro 2010.
- [14] HONEYWELL. Honeywell, 2010. Disponível em: <<http://www51.honeywell.com/honeywell/>>. Acesso em: novembro 2010.
- [15] SERGIO FRANCO. *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits*. McGraw Hill, New York, 3rd edition, 1995.
- [16] Thornton. Thornton eletrônica Ltda., 2010. Disponível em: <<http://www.thornton.com.br/>>. Acesso em: novembro 2010.
- [17] RST. Rádio sociedade técnica, 2010. Disponível em: <<http://www.rst.qsl.br/>>. Acesso em: dezembro 2010.
- [18] MINIPA. Minipa, 2010. Disponível em: <<http://www.minipa.com.br/Produtos/DetailsProduct.aspx?id=353>>. Acesso em: dezembro 2010.
- [19] PAUL HOROWITZ and WINFIELD FIELD. *The art of electronics*. McGraw Hill, New York, 2nd edition, 1995.

ANEXO A Expansão em série do integrando da função potencial de uma espira

Nesse anexo, apresentaremos os cálculos dos termos da série de Maclaurin para o integrando da equação (2.32)

$$f(\vec{r}') = \frac{e^{-jk[r^2+a^2-2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}}}{[r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi']^{1/2}} \quad (\text{A.1})$$

Podemos expandir essa função numa série de Maclaurin

$$f(\vec{r}') = f(0) + a \left[\frac{\partial}{\partial a} f(\vec{r}') \right] \Big|_{a=0} + \frac{a^2}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(\vec{r}') \right] \Big|_{a=0} + \dots \quad (\text{A.2})$$

Vamos então definir a variável R

$$R \equiv (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

e a variável A

$$A \equiv a - r \sin \theta \cos \phi' \quad (\text{A.4})$$

Poderemos escrever então a função (A.1) na forma

$$f(\vec{r}') = R^{-1} e^{-jkR} \quad (\text{A.5})$$

Notemos aqui que quando $a = 0$, obteremos

$$R \Big|_{a=0} = r \quad (\text{A.6a})$$

$$A \Big|_{a=0} = -r \sin \theta \cos \phi' \quad (\text{A.6b})$$

Obteremos para as derivadas dos termos em relação à variável a (diâmetro da espira)

$$\frac{\partial}{\partial a} R = (a - r \sin \theta \cos \phi') R^{-1} = A R^{-1} \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial}{\partial a} R^{-1} = -R^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial a} R \right) = -A R^{-3} \quad (\text{A.7b})$$

$$\frac{\partial}{\partial a} e^{-jkR} = -jk \left(\frac{\partial}{\partial a} R \right) e^{-jkR} = -jk A R^{-1} e^{-jkR} \quad (\text{A.7c})$$

Então, para a primeira derivada da série de Maclaurin, obteremos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a} R^{-1} e^{-jkR} &= \left(\frac{\partial}{\partial a} R^{-1} \right) e^{-jkR} + R^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{-jkR} \right) \\
 &= -AR^{-3} e^{-jkR} - jk A R^{-2} e^{-jkR} \\
 &= -AR^{-2} e^{-jkR} (R^{-1} + jk)
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Para $a = 0$, obteremos então

$$\frac{\partial}{\partial a} f(R) = \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \sin \theta \cos \phi' \tag{A.9}$$

Para a derivada segunda, teremos então

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(R) &= \frac{\partial}{\partial a} [-A e^{-jkr} (R^{-3} + jk R^{-2})] \\
 &= - \left[\frac{\partial}{\partial a} A \right] e^{-jkr} (R^{-3} + jk R^{-2}) \\
 &\quad - A \left[\frac{\partial}{\partial a} e^{-jkr} \right] (R^{-3} + jk R^{-2}) \\
 &\quad - A e^{-jkr} \left[\frac{\partial}{\partial a} (R^{-3} + jk R^{-2}) \right] \\
 &= -e^{-jkr} (R^{-3} + jk R^{-2}) \\
 &\quad - A [-jk A R^{-1} e^{-jkr}] (R^{-3} + jk R^{-2}) \\
 &\quad - A e^{-jkr} (-3 R^{-4} - 2jk R^{-3}) \left[\frac{\partial}{\partial a} R \right] \\
 &= -e^{-jkr} (R^{-3} + jk R^{-2}) \\
 &\quad + jk A^2 e^{-jkr} (R^{-4} + jk R^{-3}) \\
 &\quad + A^2 e^{-jkr} (3 R^{-5} + 2jk R^{-4})
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Ou seja, teremos então a seguinte derivada

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(R) = e^{-jkr} [- (R^{-3} + jk R^{-2}) + A^2 (3R^{-5} + 3jk R^{-4} - k^2 R^{-3})] \tag{A.11}$$

Para $a = 0$, obteremos finalmente o termo para a segunda derivada

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(R) \Big|_{r=a} &= e^{-jkr} \left[- (r^{-3} + jk r^{-2}) \right. \\
 &\quad \left. + (3r^{-5} + 3jk r^{-4} - k^2 r^{-3}) (r \sin \theta \cos \phi')^2 \right]
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Podemos agora calcular a derivada terceira

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3}{\partial a^3} f(R) &= e^{-jkr} \left[A (9 R^{-5} + 8jk R^{-4} - k^2 R^{-3}) \right. \\
 &\quad \left. + A^3 (-15 R^{-7} - 15jk R^{-6} + 12k^2 R^{-5} + jk^3 R^{-4}) \right]
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Para a quarta derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial a^4} f(R) &= \frac{\partial}{\partial a} \left\{ e^{-jkR} \left[A (9R^{-5} + 8jkR^{-4} - k^2R^{-3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A^3 (-15R^{-7} - 15jkR^{-6} + 12k^2R^{-5} + jk^3R^{-4}) \right] \right\} \\
&= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{-jkR} \right) \left[A (9R^{-5} + 8jkR^{-4} - k^2R^{-3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A^3 (-15R^{-7} - 15jkR^{-6} + 12k^2R^{-5} + jk^3R^{-4}) \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{-jkR} \frac{\partial}{\partial a} \left[A (9R^{-5} + 8jkR^{-4} - k^2R^{-3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A^3 (-15R^{-7} - 15jkR^{-6} + 12k^2R^{-5} + jk^3R^{-4}) \right] \right\} \\
&= \left\{ (-jkAR^{-1} e^{-jkR}) \left[A (9R^{-5} + 8jkR^{-4} - k^2R^{-3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A^3 (-15R^{-7} - 15jkR^{-6} + 12k^2R^{-5} + jk^3R^{-4}) \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{-jkR} \left[(9R^{-5} + 8jkR^{-4} - k^2R^{-3}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{-jkR} \left[A (-40R^{-6} - 32jkR^{-5} + 3k^2R^{-4}) \frac{\partial R}{\partial a} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3A^2 (-15R^{-7} - 15jkR^{-6} + 12k^2R^{-5} + jk^3R^{-4}) \right] \right\} \\
&\quad \left. + A^3 (105R^{-8} + 90jkR^{-7} - 60k^2R^{-6} - 4jk^3R^{-5}) \frac{\partial R}{\partial a} \right\}
\end{aligned}$$

Fazendo-se $a = 0$, obteremos ao final

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3}{\partial a^3} f(R) \Big|_{a=0} &= -e^{-jkr} \left[\sin \theta \cos \phi' (9r^{-4} + 9jk r^{-3} - k^2 r^{-2}) \right. \\
&\quad \left. (\sin \theta \cos \phi')^3 \right. \\
&\quad \left. + (-15r^{-4} - 15jk r^{-3} + 6k^2 r^{-2} + jk^3 r^{-1}) \right] \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

ANEXO B Cálculo da expressão da densidade de fluxo magnético pelo método da expansão

Nesse anexo apresentaremos os cálculos para a expressão da densidade de fluxo de uma espira pelo método da expansão em série. Vamos escrever a expressão (2.40) na forma

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} [a^2 R_1(r) \sin \theta + a^4 R_2(r) \sin \theta + a^4 R_3(r) \sin^3 \theta] \vec{e}_\phi \quad (\text{B.1})$$

onde

$$R_1(r) = r^{-2} + jkr^{-1} \quad (\text{B.2})$$

$$R_2(r) = \frac{3}{2}r^{-4} + \frac{3}{2}jkr^{-3} - \frac{1}{2}k^2r^{-2} \quad (\text{B.3})$$

$$R_3(r) = -\frac{15}{8}r^{-4} + \frac{15}{8}jkr^{-3} + \frac{3}{4}k^2r^{-2} + \frac{1}{8}jk^3r^{-1} \quad (\text{B.4})$$

As componentes de campo poderão então ser calculadas pela definição do rotacional do potencial (2.6). Uma vez que temos somente a componente ϕ , o cálculo da expressão do campo fica simplificado de tal maneira que obtem-se somente as componentes nas direções r e θ , sendo

$$B_r(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \quad (\text{B.5a})$$

$$B_\theta(\vec{r}) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \quad (\text{B.5b})$$

A derivada em θ segue naturalmente, obtendo-se

$$\begin{aligned} B_r(\vec{r}) &= \frac{\mu I_\phi e^{-jkr}}{4 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ [a^2 R_1(r) + a^4 R_2(r)] \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + a^4 R_3(r) \sin^4 \theta \right\} \\ &= \frac{\mu I_\phi e^{-jkr}}{4 r \sin \theta} \left\{ 2 [a^2 R_1(r) + a^4 R_2(r)] \sin \theta \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + 4a^4 R_3(r) \sin^3 \theta \cos \theta \right\} \\ &= \frac{\mu I_\phi e^{-jkr}}{4} \left\{ 2 [a^2 r^{-1} R_1(r) + a^4 r^{-1} R_2(r)] \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + 4a^4 r^{-1} R_3(r) \sin^2 \theta \cos \theta \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Substituindo-se as expressões para $R_i(r)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
B_r(\vec{r}) &= \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} \left[2a^2 r^{-1} (r^{-2} + jkr^{-1}) \right. \\
&\quad + 2a^4 r^{-1} \left(\frac{3}{2} r^{-4} + \frac{3}{2} jkr^{-3} - \frac{1}{2} k^2 r^{-2} \right) \cos \theta \\
&\quad + 4a^4 r^{-1} \left(-\frac{15}{8} r^{-4} + \frac{15}{8} jkr^{-3} + \frac{3}{4} k^2 r^{-2} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{8} jk^3 r^{-1} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right] \\
&= \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} \left[a^2 (2r^{-3} + 2jkr^{-2}) \cos \theta \right. \\
&\quad + a^4 (3r^{-5} + 3jkr^{-4} - k^2 r^{-3}) \cos \theta \\
&\quad \left. + a^4 \left(-\frac{15}{2} r^{-5} + \frac{15}{2} jkr^{-4} + 4k^2 r^{-3} + \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right] \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

Para a derivada em r , seja inicialmente realizada a multiplicação

$$rR_1(r) = r^{-1} + jk \quad (\text{B.8})$$

$$rR_2(r) = \frac{3}{2} r^{-3} + \frac{3}{2} jkr^{-2} - \frac{1}{2} k^2 r^{-1} \quad (\text{B.9})$$

$$rR_3(r) = -\frac{15}{8} r^{-3} + \frac{15}{8} jkr^{-2} + \frac{3}{4} k^2 r^{-1} + \frac{1}{8} jk^3 \quad (\text{B.10})$$

e então realiza-se a derivação para $R_1(r)$

$$\begin{aligned}
-r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} [rR_1(r) e^{-jkr}] &= -r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} [(r^{-1} + jk) e^{-jkr}] \\
&= -r^{-1} [r^{-2} e^{-jkr} + (r^{-1} + jk) (-jk) e^{-jkr}] \\
&= -[r^{-3} + (-jkr^{-2} + k^2 r^{-1})] e^{-jkr} \\
&= (-r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) e^{-jkr} \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Ja para $R_2(r)$

$$\begin{aligned}
-r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} [rR_2(r)] &= -r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{3}{2}r^{-3} + \frac{3}{2}jkr^{-2} - \frac{1}{2}k^2r^{-1} \right) e^{-jkr} \right] \\
&= -r^{-1} \left[\left(-\frac{9}{2}r^{-4} - 3jkr^{-3} + \frac{1}{2}k^2r^{-2} \right) e^{-jkr} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{2}r^{-3} + \frac{3}{2}jkr^{-2} - \frac{1}{2}k^2r^{-1} \right) (-jk) e^{-jkr} \right] \\
&= \left[\left(\frac{9}{2}r^{-5} + 3jkr^{-4} - \frac{1}{2}k^2r^{-3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{2}r^{-4} + \frac{3}{2}jkr^{-3} - \frac{1}{2}k^2r^{-2} \right) (jk) \right] e^{-jkr} \\
&= \left[\left(\frac{9}{2}r^{-5} + 3jkr^{-4} - \frac{1}{2}k^2r^{-3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{2}jkr^{-4} - \frac{3}{2}k^2r^{-3} - \frac{1}{2}jk^3r^{-2} \right) \right] e^{-jkr} \\
&= \left(\frac{9}{2}r^{-5} + \frac{9}{2}jkr^{-4} - 2k^2r^{-3} - \frac{1}{2}jk^3r^{-2} \right) e^{-jkr} \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

E, por fim, para $R_3(r)$

$$\begin{aligned}
-r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} [rR_3(r)] &= -r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(-\frac{15}{8}r^{-3} + \frac{15}{8}jkr^{-2} + \frac{3}{4}k^2r^{-1} + \frac{1}{8}jk^3 \right) e^{-jkr} \right] \\
&= -r^{-1} \left[\left(\frac{45}{8}r^{-4} - \frac{15}{4}jkr^{-3} - \frac{3}{4}k^2r^{-2} \right) e^{-jkr} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{15}{8}r^{-3} + \frac{15}{8}jkr^{-2} + \frac{3}{4}k^2r^{-1} + \frac{1}{8}jk^3 \right) (-jk) e^{-jkr} \right] \\
&= \left[-\frac{45}{8}r^{-5} + \frac{15}{4}jkr^{-4} + \frac{3}{4}k^2r^{-3} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{15}{8}jkr^{-4} - \frac{15}{8}k^2r^{-3} + \frac{3}{4}jk^3r^{-2} - \frac{1}{8}k^4r^{-1} \right) \right] e^{-jkr} \\
&= \left(-\frac{45}{8}r^{-5} - \frac{15}{8}jkr^{-4} - \frac{3}{4}k^2r^{-3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4}jk^3r^{-2} - \frac{1}{8}k^4r^{-1} \right) e^{-jkr} \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Juntando todos os termos, obtem-se a expressão para $B_\theta(\vec{r})$

$$\begin{aligned}
B_\theta(\vec{r}) = & \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} \left\{ a^2 (-r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \right. \\
& + a^4 \left(\frac{9}{2} r^{-5} + \frac{9}{2} jkr^{-4} - 2k^2 r^{-3} - \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin \theta \\
& + a^4 \left(-\frac{45}{8} r^{-5} - \frac{15}{8} jkr^{-4} - \frac{3}{4} k^2 r^{-3} \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{4} jk^3 r^{-2} - \frac{1}{8} k^4 r^{-1} \right) \sin^3 \theta \right\} \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

Por fim, juntando-se os dois resultados para a parte radial (B.7) e angular (B.14), obtém-se a expressão para a densidade de fluxo magnético

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) = & \frac{\mu I_\phi}{4} e^{-jkr} \left\{ \left[a^2 (2r^{-3} + 2jkr^{-2}) \cos \theta \right. \right. \\
& + a^4 (3r^{-5} + 3jkr^{-4} - k^2 r^{-3}) \cos \theta \\
& \left. \left. + a^4 \left(-\frac{15}{2} r^{-5} + \frac{15}{2} jkr^{-4} + 4k^2 r^{-3} + \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \right] \vec{e}_r \right. \\
& + \left[a^2 (-r^{-3} + jkr^{-2} - k^2 r^{-1}) \sin \theta \right. \\
& + a^4 \left(\frac{9}{2} r^{-5} + \frac{9}{2} jkr^{-4} - 2k^2 r^{-3} - \frac{1}{2} jk^3 r^{-2} \right) \sin \theta \\
& + a^4 \left(-\frac{45}{8} r^{-5} - \frac{15}{8} jkr^{-4} - \frac{3}{4} k^2 r^{-3} \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{4} jk^3 r^{-2} - \frac{1}{8} k^4 r^{-1} \right) \sin^3 \theta \right] \vec{e}_\theta \left. \right\} \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

ANEXO C Cálculo da expressão da densidade de fluxo magnético pelo método exato

Nesse anexo apresenta-se os cálculos para a expressão da densidade de fluxo de uma espira pelo método da exato em série. Sabe-se que a expansão em série da integral do potencial apresentada pela Equação (2.62):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{2\pi \sin \theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-jkr)^n}{n!} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) L_n - L_{n+2} \right] \vec{e}_\phi. \quad (\text{C.1})$$

Pode-se escrever numa forma compacta de somatório:

$$\vec{A}(\vec{r}) = A^{(0)}(\vec{r}) \vec{e}_\phi + A^{(1)}(\vec{r}) \vec{e}_\phi + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{(n)}(\vec{r}) \vec{e}_\phi; \quad (\text{C.2})$$

restando analisar-se os termos do somatório.

C.1 Cálculo da primeira componente

Para $n = 0$, tem-se

$$A^{(0)}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{2\pi \sin \theta} \left(\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) L_0 - L_2 \right). \quad (\text{C.3})$$

Aqui, definiu-se a integral L_0 como

$$L_0 = \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{1}{[(z^2 - z_1^2)(z_2^2 - z^2)]^{1/2}}. \quad (\text{C.4})$$

que é uma integral elíptica completa de primeira ordem [11, 12]

$$\int_b^u dx \frac{1}{[(a^2 - x_1^2)(x_2^2 - b^2)]^{1/2}} = \frac{1}{a} F(\kappa, q), \quad a \geq u > b > 0. \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\kappa = \arcsin \left(\frac{a}{u} \sqrt{\frac{u^2 - b^2}{a^2 - b^2}} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$q = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (\text{C.7})$$

Notando que $a = u = z_2$ e $b = z_1$, obtém-se

$$\kappa = \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.8})$$

$$q = \sqrt{\frac{4ar \sin \theta}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta}}. \quad (\text{C.9})$$

A solução da integral elíptica é da forma

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{z_2} F(\kappa, q) \\ &= \frac{\pi}{2z_2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 q^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 q^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 q^6 + \dots \right] \\ &= \frac{\pi}{2z_2} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n q^n = \frac{\pi}{2z_2} S_{L_0}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Usando as variáveis r e θ , obteremos

$$L_0 = \frac{\pi}{2} \frac{r}{[r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta]^{1/2}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 q^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 q^4 + \dots \right]. \quad (\text{C.11})$$

Já para L_2 , tem-se

$$L_2 = \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{z^2}{[(z^2 - z_1^2)(z_2^2 - z^2)]^{1/2}}; \quad (\text{C.12})$$

que é uma integral elíptica completa de primeira ordem [11, 12]

$$\int_b^u dx \frac{x^2}{[(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)]^{1/2}} = \frac{1}{a} E(\kappa, q) - \frac{1}{u} \sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)} \quad (\text{C.13})$$

$$a \geq u > b > 0.$$

onde κ e q foram fornecidos pelas equações (C.8) e (C.9).

A solução da integral elíptica é da forma

$$L_2 = z_2 E(\kappa, q) = \frac{\pi}{2} z_2 \left[1 - \frac{1}{2^2} q^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} q^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} q^6 - \dots \right]. \quad (\text{C.14})$$

Novamente, usando-se as variáveis r e θ , obtém-se

$$L_2 = \frac{\pi}{2} \frac{[r^2 + a^2 + 2ra \sin \theta]^{1/2}}{r} \left[1 - \frac{1}{2^2} q^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} q^4 - \dots \right]. \quad (\text{C.15})$$

Usando-se novamente a fórmula do rotacional em coordenadas esféricas, a componente radial da densidade de fluxo magnético será

$$\begin{aligned}
B_r^{(0)}(\vec{r}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta A_\phi^{(0)}(\vec{r}) \right] \\
&= \frac{\mu I_\phi}{2\pi r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) L_0 + L_2 \right] \\
&= \frac{\mu I_\phi}{2\pi r \sin \theta} \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{\partial}{\partial \theta} L_0 + \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 \right]. \tag{C.16}
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} L_0 &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{ar^2 \cos \theta}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{3/2}} S_{L_0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_0} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} \left[-\frac{ar^2 \cos \theta}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} S_{L_0} \right. \\
&\quad \left. + r \frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_0} \right]. \tag{C.17}
\end{aligned}$$

pode-se calcular a derivada do somatório tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_0} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (1 + \alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^4 + \alpha_3 q^6 + \dots) \\
&= (2\alpha_1 q + 4\alpha_2 q^3 + 6\alpha_3 q^5 + \dots) \frac{\partial q}{\partial \theta} \\
&= (2\alpha_1 q + 4\alpha_2 q^3 + 6\alpha_3 q^5 + \dots) \left[\frac{1}{2 \tan \theta} \left(q - \frac{1}{2} q^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\tan \theta} \left(q - \frac{1}{2} q^3 \right) (\alpha_1 q + 2\alpha_2 q^3 + 3\alpha_3 q^5 + \dots) \\
&= \frac{1}{\tan \theta} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n q^{2n} \tag{C.18}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{1}{2 \tan \theta} \left(q - \frac{1}{2} q^3 \right). \tag{C.19}$$

Substituindo-se o resultado expresso pela Equação (C.18) na Equação (C.17):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} L_0 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} \left[\right. \\
&\quad \left. - \frac{ar^2 \cos \theta}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n q^{2n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{\tan \theta} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n q^{2n} \right] \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Para a derivada de L_2 , tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} L_2 &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{a \cos \theta}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} S_{L_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_2} \right] \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} \left[-ar S_{L_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_2} \right]. \tag{C.21}
\end{aligned}$$

pode-se calcular a derivada do somatório S_{L_2} como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} S_{L_2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \beta_1 q^2 - \beta_2 q^4 - \beta_3 q^6 + \dots) \\
&= (-2\beta_1 q - 4\beta_2 q^3 - 6\beta_3 q^5 + \dots) \frac{\partial q}{\partial \theta} \\
&= (-2\beta_1 q - 4\beta_2 q^3 - 6\beta_3 q^5 + \dots) \left[\frac{1}{2 \tan \theta} \left(q - \frac{1}{2} q^3 \right) \right] \\
&= \frac{1}{\tan \theta} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \right) (-\beta_1 q^2 - 2\beta_2 q^4 - 3\beta_3 q^6 + \dots) \\
&= -\frac{1}{\tan \theta} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n q^{2n}. \tag{C.22}
\end{aligned}$$

Substituindo-se o resultado expresso pela Equação (C.22) na Equação (C.21):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} L_2 &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta)^{1/2}} \left[-ar \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n q^{2n} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\tan \theta} \left(1 - \frac{1}{2} q^2 \right) \left(\frac{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta}{r} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n q^{2n} \right]. \tag{C.23}
\end{aligned}$$

Já para a componente angular, pode-se escrever o potencial magnético na forma:

$$\begin{aligned}
B_\theta^{(0)}(\vec{r}) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi^{(0)}) \\
&= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\mu I_\phi}{2\pi \sin \theta} \left[\left(r + \frac{a^2}{r} \right) L_0 + r L_2 \right] \right\} \\
&= -\frac{\mu I_\phi}{2\pi r \sin \theta} \left[\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) L_0 + r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} L_0 \right. \\
&\quad \left. + L_2 + r \frac{\partial}{\partial r} L_2 \right]. \tag{C.24}
\end{aligned}$$

Para a derivada de L_0 com relação à r , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} L_0 = \frac{\pi}{2} \frac{q}{(4ar \sin \theta)^{1/2}} \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta} \right) S_{L_0} + r \frac{\partial}{\partial r} S_{L_0} \right]. \tag{C.25}$$

Para a derivada de S_{L_0} com relação à r , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial r} S_{L_0} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{a \sin \theta} \right) q^2 \right] \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n q^{2n}. \quad (\text{C.26})$$

Substituindo-se o resultado da derivada da Equação (C.26) na Equação (C.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} L_0 = & \frac{\pi}{2} \frac{q}{(4ar \sin \theta)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n q^{2n} \right. \\ & \left. + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{a \sin \theta} \right) q^2 \right] \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n q^{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

De maneira semelhante, pode-se calcular a derivada de L_2 como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} L_2 = & \frac{\pi}{2} \frac{(4ar \sin \theta)^{1/2}}{q} \left\{ - \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r}{a \sin \theta} \right) q^2 \right] \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n q^{2n} \right) \right. \\ & \left. + \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{a \sin \theta} \right) q^2 \right] \sum_{n=1}^{+\infty} n \beta_n q^{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

C.2 Cálculo da segunda componente

Tem-se para $n = 1$

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu I_\phi}{2\pi \sin \theta} \left[-jkr \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) L_1 - L_3 \right]. \quad (\text{C.29})$$

Tem-se, aqui, a integral L_1 como

$$L_1 = \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{z}{[(z^2 - z_1^2)(z_2^2 - z^2)]^{1/2}}. \quad (\text{C.30})$$

É possível resolver essa integral facilmente com a substituição $z \equiv y^2$, obtendo-se uma integral algébrica facilmente encontrada em tabelas de integrais. O resultado será:

$$L_1 = \int_{y_1^2}^{y_2^2} dz \frac{y}{[\tau - (\sigma - y)^2]^{1/2}} = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{C.31})$$

A integral L_3 seguirá um procedimento semelhante, dando 0 como resultado. Ao final, a expressão para $\vec{A}^{(1)}$ será

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{\mu I_\phi k}{4 \sin \theta} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (\text{C.32})$$

Usando-se novamente a fórmula do rotacional para o potencial vetor, tem-se:

$$\begin{aligned} B_r^{(1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta A_\phi^{(1)}(\vec{r}) \right] \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{\mu I_\phi k}{4} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Para a componente angular

$$\begin{aligned}
 B_{\theta}^{(1)}(\vec{r}) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r A_{\phi}^{(1)} \right) \\
 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{\mu I_{\phi} k}{4 \sin \theta} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \right] \\
 &= \frac{\mu I_{\phi} k}{4r \sin \theta} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right).
 \end{aligned} \tag{C.34}$$