PAULO DM CARUSO

PROFESSOR DE MATEMÁTICA:
transmissão de conhecimento ou construção de significados?

TESE DE DOUTORADO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ORIENTAÇÃO: PROF. DR. FERNANDO BECKER

PORTO ALEGRE
2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO

PROFESSOR DE MATEMÁTICA:
transmissão de conhecimento ou construção de significados?

PAULO DM CARUSO

ORIENTADOR: FERNANDO BECKER (Mestre em Educação (UFRGS), Doutor em Psicologia Escolar (USP), professor titular do Departamento de Estudos Básicos da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul)
LINHA DE PESQUISA: EDUCAÇÃO E CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO

PORTO ALEGRE

2002

Dados de catalogação na fonte:
Zilda M. Franz Gomes CRB-10/741

C331p Caruso, Paulo DM
Professor de matemática: transmissão de conhecimento ou construção de significados? / Paulo DM Caruso; orientador Fernando Becker. -- Porto Alegre, 2002.
311f.

Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação. Faculdade de Educação. Universidade Feral do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2002.

1.Professores-Formação profissional.2.Construção do conhecimento.3.Conhecimento lógico-matemático. 4.Epistemologia genética.I.Becker, Fernando, orient.II.t.
CDD 370.71
510.07

Por que motivo as crianças, de modo geral, são poetas e, com o tempo, deixam de sê-lo? Será a poesia um estado de infância relacionado com a necessidade do jogo, a ausência de conhecimento livresco, a despreocupação com os mandamentos práticos do viver – estado de pureza da mente, em suma?

...

Mas, se o adulto, na maioria dos casos, perde essa comunhão com a poesia, não estará na escola, mais do que em qualquer outra instituição social o elemento corrosivo do instinto poético da infância, que vai fenecendo à proporção que o estudo sistemático se desenvolve, até desaparecer no homem feito e preparado supostamente para a vida?

Receio que sim.

A escola enche o menino de matemática, de geografia, de linguagem, sem, via de regra, fazê-lo através da poesia da matemática, da geografia, da linguagem. A escola não repara em seu ser poético, não o entende em sua capacidade de viver poeticamente o conhecimento do mundo.[1]

---

[1] A educação do ser poético. Jornal Arte e Educação, n. 15, outubro, 1974.

(Carlos Drummond de Andrade)

RESUMO

Esta tese expõe minhas reflexões sobre a prática docente de matemática em classes de ensino fundamental. Tem como referencial básico a teoria da abstração reflexionante, como proposta por Jean Piaget, complementada por reflexões sobre a formação do juízo moral e sobre conseqüências pedagógicas pensadas a partir da Epistemologia Genética.

Para a coleta de dados foram entrevistados professores, matriculados no Curso de Especialização em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Católica de Pelotas. As entrevistas, desenvolvidas segundo o método clínico piagetiano, buscaram elucidar como se desenvolve o trabalho do professor com o ensino de matemática, enfocando suas concepções de matemática, assim como sua compreensão do processo de ensinar e de aprender.

Para o professor, a matemática pode ser descrita como uma ferramenta que descreve quantitativamente idéias a respeito do mundo; ou como um sistema independente, abstrato, fixo, lógico e livre de contradições ou ainda como uma disciplina rígida, cheia de definições, teoremas e procedimentos de caráter absoluto. Em todos os casos cabe ao professor transmitir informações e conduzir os alunos em direção a objetivos pré-definidos, além de exercer a autoridade e o controle disciplinar da turma, permanecendo a aprendizagem como uma decorrência direta do ato de ensinar exercido pelo professor.

Considerando minha história de vida como professor, a análise do processo evolutivo do pensamento matemático, as falas dos professores entrevistados e os posicionamentos teóricos colhidos na epistemologia genética proponho, ao final, um conjunto de ações que entendo serem indispensáveis para o desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem

de matemática que assegurem a condição de sujeito de seu fazer tanto ao professor quanto ao aluno.

ABSTRACT

This thesis presents my reflections about the teaching practice of Mathematics in elementary school classes. It has Jean Piaget's theory of reflexive abstraction as its basic framework, and is complemented by reflections about the formation of moral judgment and about the pedagogical consequences as conceived based on the Genetic Epistemology.

Data were collected through interviewing teachers attending the Course of Specialization in Mathematical Education at the Catholic University of Pelotas. The interviews, developed according to the piagetian clinical method, have searched to elucidate how teacher's work with Math teaching is developed, focusing on their conceptions of Mathematics as well as on their understanding of the teaching and learning process.

For the teacher, Mathematics may be portrayed as a tool which quantitatively describes her/his ideas about the world; or as an independent, abstract, fixed, logical system, free of contradictions; or still as a rigid subject, full of definitions, theorems, and absolute procedures. In all these cases, it is up to the teacher to convey information and to lead the students to wards objectives defined before-hand, as well as to exercise authority and disciplinary control over his/her class, learning being a direct consequence of the act of teaching performed by the teacher.

Considering my history of life as a teacher; the analysis of the evolutionary process of mathematical thinking; the discourse of the teachers interviewed; and the theoretical positions gathered in the genetic epistemology, I offer for consideration, in the end, a set of actions I repute indispensable for the development of teaching-learning practices which ensure both to the teacher and to the student the condition of subjects of their practices.

RESUMEN

Esta tesis expone mis reflexiones sobre la práctica docente de matemática en clases de enseñanza fundamental. Tiene como referencial básico la teoría de la abstracción reflexionante, como propuesta por Jean Piaget, complementada por reflexiones sobre la formación del juicio moral y sobre consecuencias pedagógicas pensadas a partir de la Epistemología Genética.

Para la obtención de los datos fueron entrevistados profesores, matriculados en el Curso de Especialización en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad Católica de Pelotas. Las entrevista, desarrolladas según el método clínico piagetiano, buscaron elucidar como se desarrolla el trabajo del profesor con la enseñanza de matemáticas, poniendo de manifiesto sus concepciones de matemática, así como su comprensión del proceso de enseñar y de aprender.

Para el profesor, la matemática puede ser descrita como una herramienta que describe cuantitativamente ideas a respecto del mundo; o como un sistema independiente, abstracto, fijo, lógico y libre de contradicciones o aún como una disciplina rígida, llena de definiciones, teoremas y procedimientos de carácter absoluto. En todos casos cabe al profesor transmitir informaciones y conducir los alumnos en dirección a objetivos predefinidos, además de ejercer la autoridad y el control disciplinario de la clase, permaneciendo el aprendizaje como un acontecimiento directo del acto de enseñar ejercido por el profesor.

Considerando mi historia de vida como profesor, el análisis del proceso evolutivo del pensamiento matemático, las hablas de los profesores entrevistados y los posicionamientos teóricos recogidos en la epistemología genética propongo, al final, un conjunto de acciones que entiendo ser

indispensables para el desarrollo de prácticas de enseñanza y aprendizaje de matemática que establezcan la condición de sujeto de su hacer tanto al profesor cuanto al alumno.

SUMÁRIO

DOS FIOS DE MINHA HISTÓRIA

> *[...] para mim, a educação consiste em fazer criadores, mesmo se não existem muitos, mesmo se as criações de um são limitadas em relação àquelas do outro. Mas é preciso fazer inventores, inovadores, não conformistas.*[2]
> (Jean Piaget)

Ensinar! Aprender!

Ensinar, aprender matemática!

Como ensinar matemática? Como aprender matemática?

Existem palavras que assumem importância tão significativa em nossa história pessoal que acabam por integrar-se a nosso cotidiano e passam a fazer parte de nosso mundo de interesses, de nossa vida enfim. Hoje, após décadas de prática profissional, atuando na área de ensino de matemática, posso afirmar com convicção que tal fenômeno ocorreu comigo, na medida em que *ensinar* e *aprender* tornaram-se termos matrizes, geradores de

[2] BRINGUIER, Jean-Claude. *Conversando com Jean Piaget*, 1978, p. 183.

conceitos fundamentais em minha vida de professor. Ao refletir sobre minha trajetória percebo quanto o binômio *ensinar-aprender* – complementado pelo termo *matemática* – têm sido presença constante em minhas experiências de apaixonado aprendiz das *coisas* da educação.

Por inumeráveis períodos letivos tenho exercido a profissão de professor e formador de professores de matemática. Mágica profissão que em cada novo ciclo de aulas me oferece uma nova plêiade de seres que adentram meu mundo, e de alunos tornam-se referência para minha vida e – em muitos casos – inesquecíveis amigos. No entanto, se a execução repetitiva de uma prática pode tornar seu executor um exímio apresentador, somente a reflexão sobre essa prática pode favorecer a mudança, a evolução de apresentador a sujeito consciente de suas ações.

Refletir sobre o existir, refletir sobre o fazer!

Meu desejo primordial ao planejar, desenvolver e finalmente propor a presente tese é apresentar e discutir minhas reflexões sobre o ensinar e o aprender matemática, expondo-as não como síntese episódica de possível fim de uma caminhada, mas como registro de um conjunto de idéias que ao serem escritas se libertam para o mundo em busca de novas experiências e de novas parcerias!

Mas para que minhas reflexões não ficassem restritas ao contexto de minhas próprias experiências, procurei estabelecer diálogos com colegas professores, prioritariamente com aqueles que trabalham com matemática no ensino fundamental. De um modo geral, são professores desse nível de ensino que mais propiciam diálogos e mais questionam a prática escolar de matemática. Em outros níveis – médio ou superior – as dificuldades apresentadas pelos alunos são tão gritantes que acabam por ser consideradas como a raiz do problema e... ponto final!

Como fruto de minhas observações tenho constatado que, rotineiramente, o evento aula de matemática reduz-se à exposição oral feita pelo professor de um conteúdo, por ele escolhido, a ser vencido em um tempo pré-definido. O mestre usa, em sua preleção, técnicas e procedimentos padrões, seguindo quase que religiosamente, isto é, sem questionar o que é disposto no livro texto. E, mais importante do que tudo, direciona seu trabalho para um aluno padrão por ele imaginado, que não coincide com o aluno real que está sentado à sua frente.

A precariedade da comunicação professor-aluno é tão gritante que já faz parte do anedotário escolar o típico professor de matemática que entra em aula, virado para o quadro, sem prestar atenção em quem está presente. Conta-se que em certa greve, um professor de matemática teria dado aula para a sala vazia. A preocupação do professor com o cumprimento do conteúdo e com o próprio desempenho pode leva-lo a experimentar situações embaraçosas, como a que faço referência a seguir, extraído do relato de um dos sujeitos de minha pesquisa de campo. O professor, com certa dose de candura em sua expressão quase ingênua, relata que ao tentar fazer com que determinado aluno (adolescente de 16 anos em sexta série) atendesse a seus desígnios e se interessasse pelo que estava sendo feito em aula, disse: - *"Olha que vou chamar a tua mãe!"* Procedimento que repetiu por várias aulas, até que ficou sabendo que o aluno estava vivendo um profundo drama existencial, pois a pouco tempo havia perdido a mãe e, logo a seguir, um irmão.

O ambiente de uma aula de matemática, como de resto o ambiente de qualquer aula, pode vir a ser o cadinho onde se mesclam os elementos necessários para o desenvolvimento de capacidades que cada sujeito (aluno/professor – criança/adulto) necessita em sua vida, pois em classe estão presentes diferentes autores/atores. Autor que tem uma história; ator que pode viver a sua história. E o viver acontece através de ações: ações que se mesclam em sala de aula, como por exemplo: ensinar + aprender + ser curioso (curiosidade) + ter interesse + criar (criatividade) + inventar + descobrir. Atores que se dispõem a tal fim: professor (conjunto de experiências) e crianças (expectativa de novas possibilidades além de suas experiências).

Quando me refiro a autor-ator, faço referência à existência do sujeito que é cada um de nós, isto é, ao sujeito que sou eu (que neste momento escrevo), que és tu (que neste momento me lês) e que pensamos (penso, logo existo?!). De qualquer forma, refiro-me ao eu pensante que é cada um de nós (ou que existe em cada um de nós!). Não como um ser que tem um potencial (no sentido aristotélico do termo – a bolota é o carvalho em potencial, a menina é a mãe de amanhã, o menino de rua é o trombadinha de nossos pesadelos, etc.) – mas um ser pleno de possibilidades que, ao serem realizadas, geram novas possibilidades a seu realizador.

O ambiente *sala de aula* de matemática pode possibilitar a todos que dele participam, oportunidades de realização e crescimento pessoal. A não realização, a falta de possibilidades já é por si só negativa, pois como afirma Becker: "não existe aula neutra, não existe aquilo que muitos professores ousam dizer: – Eu vou lá e mando fazer qualquer coisa, pois se bem não faço, mal também não!"[3] Em verdade, uma aula mal direcionada ou

[3] Seminário Avançado: *Aprendizagem humana: processo de construção*. Programa de Pós-Graduação em Educação (PPGEDU) - UFRGS, 2º sem. 1999.

mal proposta produz seus efeitos negativos imediatamente, pois no mínimo é tempo de produção e oportunidade de crescimento desperdiçados.

Se eu sei que existe um pote de ouro ao final do arco-íris (que pode me proporcionar fortuna e felicidade, mas que certamente me proporcionará novas e interessantes experiências) e sei que para alcançá-lo é preciso seguir o arco-íris, não basta dizer: – "Sigam o arco-íris". Para segui-lo é indispensável enxergá-lo e, além disso, desenvolver mecanismos que me permitam percorrê-lo, sem perde-lo de vista.

Ações como as de enxergar, usar os sentidos, assim como caminhar são ações individuais. Eu não posso enxergar ou caminhar pelo outro! É indispensável que ele (dialeticamente eu) – sujeito de minha atenção neste momento – enxergue, por si próprio, o arco-íris e mais do que isso encontre um ponto de partida (início), sem perder de vista o arco-íris, para poder segui-lo.

Aprender é encontrar um ponto de partida, sem perder de vista a estrada a ser seguida!

Uma aula, um conteúdo a ser trabalhado, um conhecimento a ser construído pode ser um objetivo, um fim (um pote de ouro), mas certamente é um caminho (um arco-íris).

É esse meu propósito, é esse meu objetivo: buscar elementos para propor uma prática de aula de matemática que não apenas descreva as maravilhas ao fim do arco-íris, mas que forneça subsídios para que professor e alunos, artífices de seus fazeres, construam seus próprios arco-íris e mais do que tudo aprendam a desenvolver ferramentas para percorre-los sempre e sempre.

Os diálogos, apresentados neste trabalho, foram propostos na forma de entrevistas individuais com um roteiro bastante flexível e tiveram a finalidade de permitir que o professor pudesse expressar, da forma mais natural possível, suas idéias, pareceres e opiniões a respeito da matemática e de seu ensino. Centrei meu foco de atenção na elucidação de alguns pontos que considero relevantes para meu estudo e que incluem, entre outros, o papel que o professor entende desempenhar diante dos alunos; o que ele pensa sobre o ato de ensinar e sobre o ato de aprender matemática; os interesses que ele mais observa entre os alunos; o que ele pensa sobre acertos, erros e punições em matemática, etc.

As interlocuções mantidas com os professores me propiciaram elementos fundamentais para rever e reorganizar minhas reflexões, fruto de tantos questionamentos e envolvimentos com o ensinar/aprender matemática. Quero, ao anunciar a forma como organizei o presente documento, declarar o meu mais profundo agradecimento a todos os colegas professores que se dispuseram a estabelecer as entrevistas comigo, doando assim parte de seus preciosos tempos de vida a alguém cujo interesse comum é entender melhor os *meandros* de uma aula de matemática.

A organização do presente documento, como uma seqüência de capítulos, é apenas uma escolha pessoal que reconheço estar vinculada à forma como organizo meus estudos e, por conseqüência, meu conhecimento. É uma opção que de alguma maneira reflete – como diante de um espelho – o meu jeito de ser. Para que a leitura de meu texto fique mais clara, apresento a seguir uma síntese dos conteúdos que estarei tratando em cada capítulo deste documento.

Capítulo 1: Das malhas de minha rede. Em uma tentativa de rastrear o fio condutor que constituiu e continua a constituir as malhas de minha rede conceitual, busco refazer minha história pessoal como professor, permeando-a com elementos de minha memória – registro de minha história ou daquilo que dela restou. Neste sentido recordo as aulas de matemática de minha infância; as primeiras pequenas-grandes questões; as primeiras grandes-pequenas soluções. Pequenas questões para o professor que não concebia como coisas tão simples não cabiam em nossas ineptas cabecinhas, mas grandes para nós que não conseguíamos decifra-las! Grandes soluções para aqueles que conseguiam entende-las, mesmo sendo constituídas por idéias pequenas.

Refaço com minha história uma visita ao paradigma científico que dava suporte à prática educativa, principalmente no que se refere ao tema "ensino escolar de matemática". Revejo minhas primeiras experiências docentes e recordo antigas soluções – produto de uma prática docente amadora – que, como tal, se construía despida de qualquer tipo de pré-conceito ou preocupação que não fosse a de encontrar formas melhores (mais eficientes) de cumprir com o que nos era proposto.

Uma descrição sumária de minha formação profissional dá ensejo a que possa recordar e apontar alguns questionamentos de caráter pedagógico que resultaram de observações próprias ou de observações feitas por outros professores, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de matemática.

Capítulo 2: O tecido matemático. Neste capítulo apresento uma seqüência evolutiva do pensamento matemático, organizada a partir de idéias apresentadas por Piaget em diversas obras[4]. Nesta exposição procuro recuperar alguns elementos e conceitos que apesar de sua antiguidade, continuam a fazer parte do currículo escolar de matemática. Uma breve discussão sobre a filosofia do pensamento matemático é incluída, assim como uma listagem de matemáticos cujas obras, em meu ponto de vista, têm relação com minhas idéias e opiniões sobre ensinar e aprender matemática.

Capítulo 3: Da construção de malhas: subsídios teóricos. Como referencial teórico para minhas reflexões, elegi a Epistemologia Genética exposta por Jean Piaget em sua imensa produção científica e que em grande parte está voltada para a compreensão do processo de criação e aprendizagem da matemática. Os trabalhos teórico-práticos desenvolvidos por Piaget assim como os da imensa plêiade de renomados estudiosos que vêm desenvolvendo pesquisas, sob a luz da Epistemologia Genética, têm objetivado explicar como o indivíduo, enquanto sujeito de suas ações, estrutura e desenvolve seu conhecimento.

Ao adentrar a obra piagetiana e percorrer alguns dos caminhos palmilhados por Piaget, pude constatar o processo evolutivo que a teoria por ele proposta foi apresentando ao longo do tempo. Penso que, de certa forma, acompanhar a obra de Piaget é acompanhar um processo de transformação de idéias que se modificam à medida que se confrontam com a própria vida.

Em meu ponto de vista, Piaget demonstra em sua obra um processo de evolução de idéias que em muito se assemelha ao crescimento dos níveis de compreensão de uma criança, cujo conhecimento evolui ao longo do tempo. E assim foi minha leitura de Piaget: evolutiva. A ela faço referência no

---

[4] Ver, por exemplo, *Psicogênese e história da ciência*, 1987.

capítulo 3.

Capítulo 4: Entrelaçando redes: diálogos com professores. Neste capítulo apresento o problema investigado e a metodologia de pesquisa que possibilitará o tratamento do problema de acordo com o quadro teórico eleito para a investigação. Aqui, a voz do professor se faz ouvir, suas experiências, suas opiniões, seus valores. São estas falas que servirão de sinalizador para a revisão de minhas idéias e sua formulação final. Procurei organizar as respostas dos professores de acordo com algumas categorias principais que me interessa discutir. O uso de uma codificação concorre para o sigilo necessário.

Capítulo 5: A criança e sua rede: a construção do sujeito. Neste capítulo faço uma apresentação de como, a partir de idéias e conceitos encontrados na obra de Piaget, a criança se faz sujeito. Para isto faço uma descrição do processo evolutivo da criança, particularmente no período em que ela está freqüentando os ambientes escolares. Enfocando mais profundamente o ensino escolar de matemática, teço considerações sobre a matemática escolar e a questão dos diferentes sentidos que a linguagem matemática pode ter e acaba tendo para diferentes crianças. Finalmente apresento considerações a respeito do erro em matemática e as conseqüências afetivas que tais erros acabam gerando.

Capítulo 6. Novas malhas, novas redes. Neste capítulo, a partir das considerações apresentadas pelos professores nas entrevistas, procuro dar destaque aos posicionamentos que mais me chamaram a atenção e que, em meu ponto de vista, esclarecem a forma como o professor desenvolve sua prática de sala de aula. Finalmente, apoiado em idéias de Jean Piaget –

colhidas nas obras deste autor que tive a oportunidade de estudar – apresento um conjunto de ações que entendo indispensáveis para o desenvolvimento de relações de ensino e aprendizagem de matemática verdadeiramente criativas e eficazes em sala de aula.

Três apêndices completam, a presente tese: (i) um conjunto de técnicas para a realização de 'cálculos aritméticos' (antigos cálculos mentais), que tem a finalidade de resgatar tais técnicas e deixa-las registradas para possível uso por algum professor interessado; (ii) um vocabulário de termos piagetianos com a finalidade principal de permitir compreensões mais precisas sobre o significado de cada conceito empregado, a partir de uma visão piagetiana e (iii) o roteiro de perguntas utilizadas nas entrevistas e que foram subdivididas em seis blocos temáticos, de acordo com os assuntos a serem pesquisados. Em cada bloco, as questões são classificadas em dois níveis, a saber: principal (A1, por exemplo) e auxiliar (A11, por exemplo), sendo estas utilizadas sempre que se fizer necessário algum esclarecimento ou aprofundamento.

As referências bibliográficas, listadas ao final, foram divididas em dois grupos visando indicar os textos fundamentais para meu trabalho, assim como aqueles textos de apoio, tão importantes e indispensáveis para uma análise mais profunda como requer um estudo desenvolvido em um ambiente acadêmico que se mantém atualizado e atuante.

Para manter a continuidade de leitura do texto desta tese, optei por colocar as referências consideradas necessárias e cabíveis na forma de 'notas de rodapé', ao final da página correspondente e constituídas na seguinte seqüência de informações:

- *sobrenome do autor, título principal da obra, data, página original.*

Traduções livres, de minha autoria, são acompanhadas do texto em idioma original transcrito como notas de rodapé.

1 DAS MALHAS DE MINHA REDE

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente Matemática acabem tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o ato de atingir a meta.
(Carl Friederich Gauss)

1.1 O fio condutor

Sempre imaginei que uma tese – considerada como conjunto de idéias a ser apresentadas – deveria estar intimamente relacionada com a história de vida de seu autor. Talvez esta seja uma maneira de expressar o que entendo por coerência teoria-prática, resumindo neste binômio conceitual a preocupação com os efeitos – sobre meus alunos – de minha ação profissional como professor ou formador de professores. É neste sentido que me atrevo a afirmar que o conglomerado de idéias que compõem a presente tese está profundamente vinculado à minha história de vida como professor de uma forma geral e em especial com minhas práticas e reflexões sobre o ensino, a aprendizagem e o estudo da matemática em cursos de formação ou de atualização de professores.

Refletindo sobre minha história pessoal e buscando recordar os caminhos que constituíram a trajetória profissional que venho desenvolvendo posso perceber que, desde quando minha memória me permite lembrar, tenho estado envolvido com ambientes escolares, com salas de aulas e mais precisamente com salas de aula de matemática. Trabalhando com ensino de matemática, com educação e principalmente com educação matemática, venho acompanhando a caminhada de dezenas e dezenas de colegas em busca de suas formações acadêmicas, de respostas a suas ansiedades intelectuais, de satisfação de seus desejos profissionais, da construção enfim de um ser professor e mais especificamente ser professor de matemática.

1.1.1 A sociedade organizada e o ensino de matemática

Revendo a história da humanidade, pelo menos no que se refere à expansão do ocidente nos últimos séculos, podemos observar que tanto o ensino de matemática quanto o ensino de língua materna são presenças constantes em todos os povos e em todos os níveis da escolaridade pré-profissional. A língua materna para atender necessidades fundamentais de comunicação e transmissão da cultura e hábitos locais. E a matemática, para quê? A busca de explicações para sua presença inquestionável nos currículos básicos leva-nos ao encontro de afirmações do tipo: *a matemática ensina a pensar; a matemática desenvolve o raciocínio, etc.*, confirmando a expressão que já faz parte da cultura popular:

Saber matemática significa ser inteligente!

O saber matemático, no imaginário humano, proporciona um poder característico e impar a seu portador. Assim como o saber médico – no senso comum – determina o poder sobre a *vida e a morte*, o saber matemático disponibiliza o poder sobre a *inteligência*. É muito comum ouvirmos manifestações do tipo: – *Fulaninho rodou em história. Ah! ele é malandro!* – *Fulaninha rodou em geografia. Ela não gosta de ler!* No entanto, quando se trata de matemática: – *Beltrano rodou em matemática! Puxa, mas como esse cara é burro!*

Ao referir-me a tal expressão que vincula, pejorativamente, uma estreita capacidade intelectual a certa espécie animal, cuja qualidade maior é a força bruta e o trabalho estafante, lembro afirmações de antigo mestre, que dizia haver na humanidade dois epítetos com os quais ninguém gosta de ser relacionado, a saber: 'a burrice' e 'a feiúra'. Em suas palavras: *Diante do espelho do ego, o ser humano sempre encontra algum tipo de beleza; por outro lado, segundo a avaliação individual, a burrice é característica do outro*.

Deixando de lado o fator beleza por sua subjetividade e por não fazer parte de minha preocupação pelo menos no momento – apesar de que para a expressiva maioria de seus aficcionados, a matemática tem belezas próprias indescritíveis aos olhos leigos e que somente podem ser apreciadas por aqueles que adentram seus espaços e compartilham suas intimidades – é interessante destacar que em todos os lugares, em todas as sociedades onde se possa encontrar, por incipiente que seja, alguma preocupação com a educação básica da população, ensina-se matemática!

1.1.2 A escola, o professor e o ensino de matemática

O universo escolar, como parte dos espaços formais constituídos pelas sociedades humanas – ditas organizadas – reveste-se de características peculiares que lhe possibilitam uma identidade própria e auto-sustentável. Todo Estado que se deseja atuante e permanente necessita dispor de um *aparelho*[5] que prepare as novas gerações para sua inserção no contexto planejado pelos poderes constituídos e, nesse sentido, a Escola tem servido aos propósitos de manutenção da ordem e do *estado-de-direito* nos termos delineados pelos cartórios da burocracia estatal, em todas as épocas.

Sem sombra de dúvidas a atuação docente tem se constituído em uma forte componente contestadora das definições oficiais no âmbito educacional e pode-se observar, com freqüência crescente, o surgimento de pesquisas com o propósito de questionar o desenvolvimento do processo de *dar* aulas. O professor, de antigo cumpridor dos desígnios estatais, torna-se cada vez mais e mais, um questionador de seu fazer, buscando sentido para o que está ocorrendo em sala de aula, seja consigo próprio, seja com seus alunos, com seus desejos, suas vidas. Se antigas questões, próprias do imediatismo da juventude, sobre a importância e a aplicabilidade de determinado conteúdo, continuam a permear o dia-a-dia da realidade da sala de aula, agora tais questionamentos encontram eco na cabeça do professor que busca re-significar aquilo que faz, que afirma, que vive. E mesmo, quando em situações corriqueiras, o professor não encontra elementos para responder às

[5] Aparelho no sentido atribuído por ALTHUSSER. *Aparelhos ideológicos de estado,* 1983, p. 77.

indagações discentes sobre a finalidade de determinado assunto ou conteúdo, tais dúvidas o acompanham fora de aula e fazem com que ele próprio se questione em busca de respostas e explicações que justifiquem o envolvimento com o tema estudado.

Dúvidas sobre finalidades, objetivos, aplicabilidade ou utilidade prática; questionamentos sobre a organização da seqüência curricular, sobre a necessidade da dedicação de tão longo tempo ao estudo da matemática fazem parte do cotidiano do professor. E são tantas e tão freqüentes as indagações que elas acabam por ultrapassar a fronteira dos muros escolares, adentrando os espaços sociais, como as tiras humorísticas dos jornais, por exemplo,

FIG. 1[6]

E, se o professor tem dúvidas, os efeitos perversos da falta de respostas não se fazem esperar, pois é muito comum a adoção de práticas docentes que menosprezam e até mesmo deturpam a importância da correta construção do conhecimento matemático por parte do aluno. Apenas como rápidos exemplos, lembro o caso de professores de séries iniciais que, justificados pela preocupação com a *alfabetização*, postergam o trabalho com

---

[6] Laerte. Jornal Zero Hora. Porto Alegre.

a matemática para o final do ano, se sobrar tempo; ou do professor de quarta série do ensino fundamental que ensina a adição de frações, com denominadores diferentes, antes de trabalhar com o conceito de frações equivalentes, tratado como conteúdo independente, ou ainda do professor de ensino médio que não consegue explicar o *fenômeno* que acontece com o *logaritmo* que transforma produtos em somas, divisões em subtrações, etc.

Os exemplos citados, que não esgotam o tema, são trazidos apenas como forma de ressaltar minha preocupação com o contexto de ensino de matemática e que, esclarecendo desde já, não é apenas uma questão de domínio de conteúdo, pois em minhas observações tenho verificado que a busca pela competência nos domínios do saber matemático não implica em saber trabalhar com o ensino de matemática. Lembrando palavras de Piaget,

> Coisa assaz surpreendente, de fato, é a convicção generalizada (em decorrência de uma tradição pela qual não se pode responsabilizar as autoridades escolares e nem os professores, mas que pesa terrivelmente sobre a totalidade do ensino) de que, para ensinar corretamente a matemática, basta o conhecimento da mesma, dispensando-se a preocupação com a maneira como as noções se constroem efetivamente no pensamento da criança[7].

Se o professor não compreende como as noções são construídas no pensamento do aluno; como ocorre a formação do conhecimento matemático; que compreensão ou entendimento o aluno está tendo de sua exposição, de sua fala: – como poderá ter certeza de que seu aluno efetivamente está aprendendo? – O quanto realmente, está aprendendo? Se o mestre não tem clareza sobre o que está acontecendo com seu discípulo, em termos de seu

---

[7] *Para onde vai a educação*, 1998, p. 56.

desenvolvimento e aprendizagem, como poderá avaliá-lo? Como poderá avaliar seu próprio trabalho?

Percalços no estudo da matemática são aceitos com tanta naturalidade que é fato comum optar-se por uma área profissional que não exija matemática, o que tem direcionado inúmeros alunos para o magistério, por exemplo. Por outro lado, a necessidade de questionar que conteúdos trabalhar e com que profundidade e mais do que isto, que ensino de matemática desenvolver em classe, nunca foi tão importante como agora, quando diversas universidades têm optado por realizar o concurso vestibular composto por questões, denominadas *interdisciplinares*, onde a matemática exigida não passa de conhecimentos fundamentais sobre operações aritméticas e noções elementares de percentagem, tratadas no ensino fundamental. Tal movimento de mudança no concurso vestibular, pelo menos, pode ser entendido como um sinalizador para os responsáveis pela organização do ensino fundamental e do ensino médio, pois a continuar nessa direção, no mínimo a matemática desenvolvida no ensino médio, enquanto conteúdo, será totalmente dispensável e dispensada para quem se habilitar a um expressivo leque de cursos universitários.

Entre professores existe uma forte tendência a aceitar que ambientes de ensino de matemática são, necessariamente, espaços por onde permeia a impossibilidade, o erro, a incapacidade e o impedimento cognitivo. E, de um modo geral, ex-alunos agora colegas-professores mantém uma convivência, de certa forma "pacífica", embora angustiante, com reprovações em massa, incompreensões, medos e temores explícitos nas falas, nas expressões, no comportamento da quase totalidade de seus alunos e, passivamente, passam a confirmar tais situações e a admiti-las como reais, verdadeiras e até mesmo imutáveis.

O próprio professor, licenciado em matemática ou não, ao ser questionado sobre sua condição de aluno e ao apelar para lembranças dos tempos escolares, confirma ter vivenciado, nas aulas de matemática, o medo: *– Lembro de todo o medo que eu tive da matemática e o quanto ela fez com que eu repetisse a mesma série no primeiro grau*; o terror: *– A matemática para mim tanto no primeiro como no segundo grau foi um terror, sempre foi a pedra no meu sapato*; ou mesmo o obstáculo: *– Até hoje a matemática me assusta um pouco quando me deparo com situações difíceis, isso dá uma sensação de incapacidade diante dela*,[8] como se tais manifestações fossem características necessárias dos ambientes de ensino dessa disciplina.

Tal forma de encarar o cotidiano do ambiente de aula, se reflete em suas próprias atitudes, pois o professor acaba repetindo a trajetória que experimentara durante sua formação, quando seus antigos mestres se manifestavam como portadores exclusivos do conhecimento perante alunos passivos e receptores, o que caracterizava a aula de matemática como verdadeira *hora do espanto*[9] com um comprometimento mais trágico ainda do que na ficção, pois se na ficção ao final o *bem* é vencedor, na realidade da aula de matemática, a reprovação é, em grande número de casos, uma certeza *inexorável*.

A vida lá fora é tão desafiadora e instigante! Na escola, o saber é

---

[8] Extraído das respostas ao questionário proposto em aula da disciplina Metodologia do Ensino da Matemática. Curso de Pedagogia: Habilitação em Séries Iniciais. Faculdade de Educação. Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

[9] Referência à série de filmes do gênero terror (enlatados americanos) de grande sucesso junto às crianças e adolescentes.

tão complicado, tão inatingível!

A matemática é um enorme enigma!

Como *achar a correta* resposta *única* do professor? É acertar e *ser vencedor* ou errar e *ser reprovado*. É *viver ou morrer*... intelectualmente!

Piaget ao referir-se às contradições que se estabelecem entre o cotidiano escolar e o desenvolvimento psicológico da criança, afirma:

> [...] ao se estudar psicologicamente o desenvolvimento da inteligência matemática espontânea da criança e do adolescente, pode-se fazer uma série de observações importantes para o ensino. Em primeiro lugar, quando os problemas são levantados sem que a criança se aperceba de que se trata da Matemática [...] são resolvidos pelos alunos em função de sua inteligência geral, e não devido a aptidões individuais especiais.
> [...] É particularmente freqüente aparecerem alunos, medíocres nas aulas de cálculo, que evidenciam um espírito compreensivo e mesmo inventivo quando os problemas são levantados em função de uma atividade qualquer do interesse de quem é argüido. Permanecendo passivos e muitas vezes mesmo bloqueados na situação escolar que consiste em resolver problemas em abstrato, [...] persuadidos, sobretudo da sua deficiência, e, por conseguinte renunciando de antemão e dando-se por vencidos interiormente, os alunos reputados fracos em Matemática assumem uma atitude totalmente diferente quando o problema emana de uma situação concreta e tem a ver com outros interesses: a criança é bem sucedida, então, em função de sua inteligência pessoal como se se tratasse de uma questão apenas de inteligência[10].

Fora da sala de aula, em situações práticas e até mesmo teóricas da vida de todo ser humano existem alternativas, escolhas ou possibilidades; na aula de matemática, não. Na prova de matemática: dúvidas? Nem pensar! Em

---

[10]*Para onde vai a educação*, 1998b, pp. 56-7.

manifesta contradição com a surpreendente e criativa *realidade* do universo infantil e até mesmo do universo adolescente, a matemática da *escola real* é cheia de definições (que nem sempre esclarecem: – *conjunto é... coleção*); de nomes (como requer a educação verbalista nossa de cada dia); e regras, propostas na forma de leis, que nem sempre são verdadeiras: – *somar é acrescentar, crescer! Veja, 2 + 2 = 4*; afirma o professor. No entanto, estupefato observa o aluno: *2 + 0 = 2. Não cresceu!*

Em livro de terceira série do ensino fundamental (*Ah! escritores de livros didáticos que... nunca deram aulas!!!*) já na página quatro, ao *apresentar* o conjunto dos números naturais o autor, solenemente, sentencia:

$$\aleph = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$$

e, em salto secular, vai do zero ao infinito em quatro singelas páginas, sem considerar que as modernas civilizações ocidentais viveram vários séculos para começar a trabalhar com o zero, ou seja, com um sistema de numeração posicional. Por outro lado, abre-se a questão: com que objetivo apresentar o conceito de infinito após quatro páginas de um livro de matemática de terceira série? E como se tivesse algum sentido *medir* o infinito, pergunta o livro texto:

Qual é o comprimento do cordão do teu balão
para que ele encoste no céu?

E o aluno não entende mais nada; nem o professor; nem ninguém! Questionamentos, intermináveis questionamentos de quem tem a sala de aula como sua possibilidade profissional e os professores como pares na luta pela realização pessoal de cada um e de todos.

1.2 Reflexões sobre o *velho* paradigma[11]

Em sua prática pedagógica, o professor repete, costumeiramente, os passos que desenvolveu na construção de seu próprio conhecimento. Criados e formados sob os desígnios de uma *ciência mecanicista*[12] segundo a qual o Universo, como um grande sistema mecânico, funciona de acordo com leis imutáveis da Física e da Matemática, vivemos sob a égide de um paradigma científico que tem demonstrado, fartamente, nos mais diversos setores da vida sua falência e insustentabilidade para responder às indagações humanas.

A ciência oficial reconhece somente resultados decorrentes da experimentação científica e que apresentem caráter de *neutralidade*, como se tal fosse possível. Os experimentos científicos são realizados com o propósito de que sejam alcançadas conclusões gerais, a serem testadas – via método indutivo – em novos experimentos, mas sempre de forma independente do sujeito, de sua história, valores, intuições ou experiências pessoais.

Para esta proposta de ciência conhecer significa quantificar; conhecer significa dividir e classificar, pois segundo Santos nesse paradigma,

> [...] o rigor científico afere-se pelo rigor das medições. As qualidades intrínsecas do objeto são [...] desqualificadas e em seu lugar passam a imperar as quantidades em que eventualmente se podem traduzir. O que não é quantificável é cientificamente

[11] Paradigma, entendido como conjunto de "realizações científicas universalmente reconhecidas que, durante algum tempo, fornecem problemas e soluções modelares para uma comunidade de praticantes de uma ciência" (KUHN. *A estrutura das revoluções científicas*, 1982, p. 13).

[12] Refere-se ao termo "filosofia mecanicista" criado pelo químico Robert Boyle (GLEISER. *A Dança do Universo*, 1997, p. 167).

> irrelevante. [...] Conhecer significa dividir e classificar para depois poder determinar relações sistemáticas entre o que se separou.[13]

Visões de ciência que conduziram os destinos do homem nos últimos cinco séculos e que desembocaram no alarmante estado de desequilíbrio em que se encontra nossa nave planetária: a Terra e sua tripulação: a Humanidade.

No âmbito da educação, a prática educativa tradicional tem se caracterizado pela *transmissão* de conhecimentos. O currículo escolar, construído e compreendido como seqüência linear, é apresentado da parte para o todo, numa visão fragmentária e fragmentada da realidade, com ênfase em aptidões básicas: ler, escrever, calcular, memorizar. Ler é juntar letras; escrever é copiar letrinhas; calcular é armar e efetuar; memorizar é decorar regras e fórmulas. Numa relação verticalizada de poder, professor e aluno submetem-se a pautas curriculares *oficiais* geradas em gabinetes administrativos, estabelecidas como seqüências distribuídas linearmente no tempo e dessa forma passam a cumprir "programas e métodos ditados pela administração escolar ou pelos órgãos estatais da educação. Tais órgãos são constituídos por cavalheiros que, se algum dia chegaram a lecionar em sala de aula, dela escaparam o mais rápido possível[14]."

As atividades curriculares são pautadas em livros-texto, folhas mimeografadas, cadernos de cópias, exercícios de repetição e *xerox* de fragmentos de livros, em geral de autoria e origem desconhecidas do aluno e, em não raras vezes, do próprio professor. A metodologia desenvolvida valoriza a cópia da cópia e estimula a dependência intelectual do aluno ao

---

[13] SANTOS. *Um discurso sobre as ciências*, 2001, p. 15.

saber exposto, oralmente, pelo professor e a saberes *alienígenas*, expressos em textos oriundos de realidades estranhas e, geralmente, produzidos em locais distantes. Alertando para os problemas que a prática da cópia traz para ambientes de aprendizagem, afirma Becker:

> Daí o equívoco profundo de um processo de ensino ou de aprendizagem que pretenda prolongar indefinidamente a imitação como modalidade hegemônica de desenvolvimento. Pode-se imaginar o quanto um modelo imitativo de aprendizagem obstrui o desenvolvimento.[15]

O aluno copia passivamente, usando alguns sentidos físicos – em geral a visão, para enxergar o quadro e o tato, para segurar o lápis – numa verdadeira *ligação direta* olho-mão, sem participar, sem construir, sem compreender o que está ocorrendo nesse suposto ato de ensino-aprendizagem. Em tal contexto o aluno é um mero receptor, verdadeira *tabula rasa*, e nele as informações são gravadas como subproduto da repetitiva fala do professor. O trabalho do aluno em classe é, em princípio, individual e a ele compete repetir, sem questionar, sem refletir, as informações que o professor, a escola e os *cartórios da administração educacional* lhe fornecem. Cada aluno trabalha para si: "a classe escuta o professor e, em seguida, cada um deve mostrar no decorrer de seus trabalhos e de provas apropriadas o que reteve das lições ou das leituras em casa[16]." Exige-se o modelo, o padrão a ser seguido, a ser reproduzido em condições estabelecidas pelo professor ou pelo livro-texto. O errado se opõe ao certo, que é valorizado como bom e verdadeiro, enquanto o erro é algo ruim que deve ser evitado e punido.

---

[14] PULASKI. *Compreendendo Piaget*, 1986, p. 203.
[15] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 67.
[16] PIAGET. *Sobre a Pedagogia*, 1998, p. 44.

Por outro lado, nas relações com o conhecimento a prática escolar privilegia apenas alguns aspectos das manifestações *cognitivas* do aluno. Outras possíveis capacidades, habilidades ou qualidades que ele venha a possuir ou desenvolver, não têm espaço para serem utilizadas ou valorizadas nas relações escolares tradicionais. Questões referentes à *afetividade*[17], por exemplo, não são, no cotidiano das relações acadêmicas, devidamente tratadas ou consideradas. Afetividade que não é apenas uma dimensão do ser humano mas que se constitui na sua energética, na mola propulsora do comportamento, pois segundo Piaget e Inhelder: "o aspecto cognitivo das condutas consiste na sua estruturação e o aspecto afetivo na sua energética. Esses dois aspectos são, ao mesmo tempo, irredutíveis, indissociáveis e complementares[18]."

Entre professores é comum encontrarmos aqueles para os quais a matemática é um sistema independente, abstrato, fixo, lógico e livre de contradições; para outros é uma disciplina rígida, cheia de definições, teoremas e procedimentos absolutos e para outros ainda é uma ferramenta que proporciona descrições quantitativas das idéias do mundo físico. Em todos os casos, parece ser senso comum que ao professor compete transmitir informações e conduzir os alunos em direção a objetivos que lhes são externos. Deve também exercer a autoridade e o controle da turma, buscando respostas corretas para validar a *aprendizagem* do aluno. O professor exerce um forte poder de censura e da sua caneta, de cor vermelha, surge a felicidade

---

[17] Afetividade entendida como os sentimentos propriamente ditos e, em particular, as emoções; as diversas tendências, aí compreendidas as 'tendências superiores' e, particularmente, a vontade (in BATTRO. *Dicionário terminológico de Jean Piaget,* 1978, p. 25).
[18] *A Psicologia da criança*, 1998, p. 24.

do certo ou a desgraça eterna do errado, marcada com um grande X sobre o trabalho do aluno.

A avaliação é considerada em separado de todo processo desenvolvido pelo aluno e ocorre, quase que exclusivamente, por intermédio de testes. Notas classificatórias e seletivas funcionam, na escola – e na sociedade – como definidoras de níveis de aquisição do patrimônio cultural. Prêmios e punições incentivam a competição, comprometendo gravemente a auto-estima e a autoconfiança do aluno. E, ao final, o diploma: símbolo máximo da consagração de todo um ciclo de estudos estáticos, indicando que seu portador subiu mais um degrau na infinita e interminável escala da ascensão social em uma sociedade que clama por mudanças estruturais e organizacionais na direção do resgate da condição humana e da realização pessoal de cada um e de todos.

1.3 De minhas lembranças dos tempos de aluno

1.3.1 As aulas de matemática

Sempre me pareceu estranho – e isto me levava a profundos questionamentos – o fato de que, ano após ano, meu professor de matemática empenhado no desiderato fundamental de expor conteúdos chegava em aula e costumeiramente, quase automaticamente, sem dirigir palavras à turma, voltava-se para o quadro-negro e sobre ele depositava alguma expressão ou fórmula. Devo enfatizar que a denominação *quadro-negro*, além de ser a mais pura expressão da verdade na medida em que os quadros de giz eram pintados de preto, exprime também a metafórica escuridão que se abria diante de nossos olhos, como se olhássemos, através da janela de nosso imaginário infantil, para dentro da escuridão de uma não muito amistosa e profundamente desconhecida noite de nossos pesadelos. Sobre o quadro o professor, circunspeto, escrevia uma fórmula, uma definição ou um teorema o qual, na seqüência, era *demonstrado* com todos os detalhes e rigor que o pensamento matemático, em cada época, exige, pronunciando-se através de obscura fala que mais se assemelhava à estranha reza de desconhecido povo alienígena. No caso de uma definição, após seu registro no quadro, seguia-se *interminável* listagem de propriedades a ela relacionadas.

E na seqüência, como num ritual hermético, o professor resolvia um exercício numérico o que sempre transcorria com o acompanhamento de sua fala, em voz vigorosa, atitude que parecia ter a finalidade de corroborar suas afirmações anteriores. Posteriormente apresentava outro exercício para a turma resolver, ao que se seguia um vazio e um silêncio quase tangíveis, pois poucos eram aqueles que se arriscavam a esboçar qualquer tipo de reação que confirmasse a expectativa docente de entendimento ou compreensão do tema apresentado.

Por que a expressiva maioria da turma, composta por alunos vivamente atentos aos chamamentos do mundo e da vida não conseguia entender as repetidas explicações, em volume crescente de voz, que o professor nos oferecia? Por que a grande maioria dentre nós, ligados nos mais atualizados apelos da mídia contemporânea, chegávamos a cada nova prova com a expectativa do fracasso estampada em nossos semblantes?

Por que não entendíamos? Não seria possível explicar de forma diferente? Será que o raciocínio diferente que o colega da classe ao lado havia usado não tinha efetivamente valor? Será, em última análise, que o *raciocínio lógico* apresentado pelo professor era o único possível e, nesse caso, por que tantos dentre nós, medianamente inteligentes, não alcançávamos tal compreensão? Será que o êxtase demonstrado pelo professor, em suas expressões de um *prazer* estranho e inatingível, era prerrogativa de apenas alguns iluminados?

1.3.2 Minhas primeiras experiências docentes

Minhas primeiras experiências como docente *amador* surgiram como respostas a duas necessidades fundamentais: aquela de buscar alternativas para a explicação do assunto estudado e a conseqüente compreensão do mesmo, seja por mim, seja pelo colega interessado, aliada à necessidade precoce de manutenção financeira em um grupo familiar de baixa classe média constituído por cinco filhos, dentre os quais eu era o mais velho, com todas as conseqüências que tal situação pode acarretar e efetivamente sempre acarreta.

Incontáveis são os exemplos de temas tratados em classe e que fizeram parte de minhas incipientes e *amadorísticas* experiências como precoce professor *particular* – daqueles de ir de casa em casa, acompanhado apenas por esparsas anotações, muita curiosidade e uma enorme vontade de descobrir novas formas de fazer matemática. Lembro, por exemplo, as propriedades das operações aritméticas, que ecoavam em nossas memórias como estranha ladainha de caráter religioso ou secreto: *a adição é comutativa e associativa*; *a multiplicação é comutativa, associativa e distributiva em* *relação à adição*; o estranho contato com a noção de fração como parte do inteiro e que repentinamente ultrapassava o próprio inteiro e o surgimento de letras que representavam números (constantes) e que, no entanto, podiam variar.

Talvez o fato de sermos curiosos, talvez o desejo de fazer diferente, talvez o desejo de ser alguém capaz em um grupo em que a condição econômica a todos homogeneizava socialmente, talvez por qualquer outro fator isolado ou em conjunto, em verdade, havia uma disposição – que a partir de determinado momento tornou-se uma pré-disposição, para ouvir a explanação do professor, seguir seus passos e posteriormente *inventar* formas alternativas de tratar o mesmo tema.

1.3.3 Lembrando antigas questões e... situações práticas

Inúmeras são as situações vividas, envolvendo conteúdos fundamentais de matemática, que demandaram o uso de artifícios ou de propostas alternativas com o fim de conseguir que meus primeiros alunos particulares pudessem alcançar alguma compreensão daquilo que era apresentado na escola. Lembro algumas situações - mais como uma forma ilustrativa do que propriamente como demonstração de criatividade ou de surtos *iluminatórios* em que novas formas de trabalhar surgiam de nossas *amadorísticas* discussões.

Recordo certa tarde, após uma prova de matemática, isto lá pela terceira ou quarta série ginasial, reunidos em pequeno grupo eu e alguns colegas discutíamos sobre a necessidade de saber *decor* as tabuadas e o sufoco (‘stress’, diríamos hoje, pois naquela época, penso eu, ainda não nos havíamos norte-americanizados tanto quanto agora) e o sufoco, repito, que tal memorização significava, como de resto continua sendo até hoje. E era justamente nas provas (sabatinas) que a falta da tabuada mais se fazia notar quando, por exemplo, tínhamos que realizar multiplicações por dezenas, centenas, milhares, etc. (e as maquininhas de calcular ainda não haviam sido inventadas), ou ainda no cumprimento dos famosos ‘temas-para-casa’, com continhas do tipo ‘arme e efetue’, como já acontecera no primário. Nesta época eu já tinha alguns alunos particulares, apesar da falta de experiência profissional (que obviamente só pode ser adquirida praticando). Dessas aulas, alguns episódios ficaram mais profundamente gravados em minha memória. Talvez não sejam os mais significativos, talvez nenhum deles tenha efetivamente algum significado especial que merecesse ser lembrado em particular, mas de qualquer maneira quem tem condições de esclarecer os meandros de nossa memória? Assim vamos às lembranças!

1.3.3.1 Sobre o multiplicar por 5, 50, 500, ...

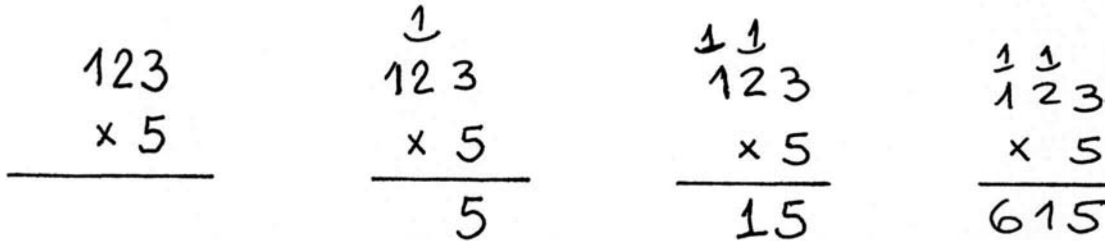
Em uma dessas aulas, ao observar meu aluno particular (mais cobaia do que propriamente aluno) realizando a multiplicação de uma centena qualquer por 5, exclamei: – “já te deste conta de que para multiplicar por 5, basta a gente saber dividir por 2?” Ao que espantado o colega respondeu: – “Hein???” É, disse eu, incontinenti, vê bem (e eis meu empirismo à tona):

Vamos pegar o teu exercício: 123 x 5 (não lembro se era 123, mas também isso não altera o final da história).

- "Fizeste a conta, assim, não é? 5 x 3 é 15. Colocaste o **5** e vai 1, (a).

Depois: 5 x 2 é 10, mais 1, dá 11. Escreveste o **1** e vai 1, (b).

Finalmente 5 x 1 é 5, mais 1, dá **6**. Logo o resultado é 615, (c). Certo?"



(a) (b) (c)

Agora observa o seguinte: sabemos que 5 é a metade de 10, certo? Para calcular 123 x 5, basta acrescentar um zero ao 123 (123 x 10) e dividir este resultado por 2 (1230 : 2 = 615).

$$123\text{x}5 = \frac{123\text{x}10}{2} = \frac{1.230}{2} = 615$$

em um procedimento bastante mais rápido e de fácil execução, pois calcular a metade é sempre mais fácil!

Talvez minha surpresa tenha sido tão grande quanto a de meu aluno (ou até mesmo maior), mas em verdade era muito satisfatório *inventar* uma forma alternativa de realizar uma tarefa tão enfadonha, mesmo que para um caso tão particular, como o de multiplicar por 5.

E será que a *regra* valia para outros casos? Em que casos? Uma extensão imediata seria multiplicar por 50. Por exemplo, como calcular 123x50?

Neste caso, bastaria acrescentar dois zeros ao (fator) 123 e dividir o resultado por 2, pois:

$$123x50 = \frac{123x100}{2} = \frac{12.300}{2} = 6.150$$

E eis uma generalização possível, pois para efetuar 123 x 500, de forma semelhante, bastaria acrescentar três zeros e dividir por 2:

$$123x500 = \frac{123x1.000}{2} = \frac{123.000}{2} = 61.500$$

A descoberta dessa *regra prática*, que a escola havia omitido, seja por ser muito simples, seja por não estar no currículo, seja por falta de tempo – pois o currículo era muito extenso e precisava ser cumprido – em verdade constituiu-se em um momento de grande euforia, pois nos permitiu descortinar algumas facilidades (belezas?) que até então pareciam estar muito distantes de nós a-lunos, que na acepção original do termo éramos os próprios *seres sem luz*.

1.3.3.2 A multiplicação é distributiva em relação à adição. É?

Em outra oportunidade talvez posterior à citada anteriormente, estudávamos as *propriedades operatórias da multiplicação*. Digo estudávamos, pois minha intenção não era a de apenas decorar e assim pretendia que, através de exemplos numéricos, a propriedade pudesse ficar *entendida* e dessa forma *gravada* na cabeça de meu aluno. Aliás, sobre querer memorizar propriedades operatórias da multiplicação, lembro experiência tragi-cômica que ocorreu com um dos meus filhos. Em uma viagem de casa à escola, observei que ele falava baixinho, como se estivesse rezando. Curioso, perguntei o que fazia, ao que ele me respondeu: - "tenho prova de matemática hoje, por isso estou decorando as propriedades da multiplicação". Ao que se seguiu a ladainha: – "comutativa, associativa e distributiva em relação a soma, comutativa...” No dia seguinte ao indagar sobre o sucesso na prova, ele me respondeu, desolado: – “Errei todas”. Mas, como? – “Ela (a professora) trocou a ordem!”

Pois bem, voltando ao exemplo de aplicação de propriedades da multiplicação, meu aluno estava realizando certa multiplicação. Novamente os números são fictícios, mas o que interessa era a forma como estávamos utilizando uma *ferramenta* que apesar de ser fornecida pela escola estava completamente enferrujada pela total falta de uso.

Assim vejamos: meu aluno precisava efetuar, por exemplo, a multiplicação: **51 x 17**. Depois de armar a conta e toda aquela ladainha de ‘tanto vezes tanto igual a tanto’ e ‘vai tanto’, olhando no livro a expressão literal da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

surgiu a idéia de decompor um dos fatores (o 51, neste exemplo) e obter:

$$51 \times 17 = (50 + 1) \times 17$$

Aqui é preciso lembrar a função do parêntese, como indicador da precedência da multiplicação sobre a adição.

o que é uma forma abreviada de escrever:

$$51 \times 17 = (50 \times 17) + (1 \times 17)$$

Prosseguindo: para multiplicar um número (17) por 50, basta acrescentar-lhe dois zeros (1700) e dividir o resultado por 2, (como já vimos no episódio 1 e por isso penso que aquele precedeu este no tempo).

E, assim temos como resultado final:

$$51 \times 17 = 850 + 17 = 867$$

Tal técnica, além de facilitar a obtenção do resultado desejado, demonstrava na prática alguma utilidade para aquelas afirmações sobre as propriedades operatórias que pouco ou quase nada nos diziam.

1.3.3.3 Sobre outras técnicas de multiplicar

Já que estou lembrando de propriedades da multiplicação, recordo a insatisfação que surgia sempre que tínhamos que efetuar tal operação usando o algoritmo tradicional: multiplicando sobre multiplicador e tanto vezes tanto, dá tanto e vai tanto, etc., até porque ainda não havia sido inventada a calculadora e como sempre havia o tema para casa.

Não recordo precisamente quando foi que a *técnica* que apresento a seguir foi usada pela primeira vez por um de nós – talvez seja uma conseqüência da aplicação da propriedade citada no item anterior – mas, em verdade facilitava as coisas sobremaneira. Por exemplo, vamos calcular 52x17.

Nossa descoberta foi a seguinte, por sinal muito simples: bastava multiplicar cada algarismo de um número pelos algarismos do outro, considerando suas posições relativas dentro do número:

5, no primeiro número é 50 e 1 no segundo é 10:	50 x 10 = 500
50 no primeiro número e 7 unidades no segundo:	50 x 7 = 350
2 unidades no primeiro e 10 no segundo:	2 x 10 = 20
2 unidades no primeiro e 7 no segundo:	2 x 7 = 14
E basta somar, para obter o resultado:	884

Portanto 52x17 = 884.

A *descoberta* de técnicas alternativas para resolver problemas e questões do cotidiano escolar começava a surtir efeitos positivos, pois criava, pelo menos entre alguns de nós, uma nova forma de encararmos a aula de matemática. Com relação à operação de multiplicação, lembro que alguém surgiu no grupo com uma técnica de fazer multiplicação que afirmava ser utilizada por *camponeses russos* (na época, entre os adolescentes contestadores, era moda *copiar* ou seguir idéias oriundas dos russos). O processo era simples, apesar de extenso e se baseava em reiterados cálculos de *metades e dobros*. Vejamos, por exemplo, o cálculo de 36x17.

Escrevemos os dois fatores, lado a lado, e um pouco afastados:

36	17

Calcula-se a metade do primeiro fator e o dobro do segundo, escrevendo os resultados sob os fatores correspondentes:

36	17
18	34

Repetimos o procedimento com os resultados obtidos, isto é, escrevemos a metade do primeiro e o dobro do segundo:

36	17
18	34
9	68

O processo continua sendo repetido (metade do primeiro e dobro do segundo). No entanto como chegamos a um número impar (9), para dar continuidade ao cálculo, devemos subtrair uma unidade e tomar a metade do resultado. Assim, de 9 tirando 1, fica 8, cuja metade é 4. E assim continuamos a calcular até chegarmos à unidade (1), na coluna da esquerda.

Temos, portanto:

36	17	
18	34	
9	68	(x)
4	136	
2	272	
1	544	(x)

Finalmente, somamos os números da coluna à direita que estão marcados com um (x): 68 + 544 = 612, que é o produto desejado 36x17.

Sem dúvidas esse *processo dos camponeses russos* era uma estranha curiosidade matemática, certamente mais demorada do que o algoritmo tradicional usado na escola, mas tinha um sabor especial de coisa inventada e... proibida!

1.3.3.4 Sobre divisões aproximadas

Uma outra situação interessante surgira quando necessitávamos determinar o quociente aproximado de dois números inteiros, sem nos preocuparmos com o resto da divisão, ou seja, determinar quantas vezes um número (inteiro) *cabia* dentro de outro maior. Por exemplo, quantas vezes 18 cabe em 108, o que equivale a perguntar, qual é o quociente (inteiro) de 108 por 18?

Dividir por 18 é equivalente a dividir por 2 e depois por 9, por exemplo, pois 18 = 2 x 9.

Assim podemos começar o cálculo:

$$108 \div 2 = 54 \ (100 \div 2 = 50; 8 \div 2 = 4).$$

A seguir calcula-se o quociente $54 \div 9$ e chegamos ao resultado: 6. Portanto, o quociente inteiro de $108 \div 18 = 6$.

Pode-se observar que a decomposição do divisor (18 neste exemplo) não é única, ou seja, poderíamos ter utilizado 18 = 3 x 6 e começar dividindo 108 por 3, obtendo 36 e, em seguida, 36 por 6, obtendo novamente 6 como quociente.

1.3.3.5 Sobre números relativos

Outra situação, dentre tantas que poderiam ser citadas, também profundamente obscura e desencadeadora de muitos temores e *fantasmas,* se estabelecia a partir do surgimento dos números negativos (ditos números relativos), particularmente quando se tratava de realizar multiplicações (ou divisões) entre tais números. Se a técnica de empregar fichas de cores distintas (azuis para os positivos e vermelhas para os negativos, por exemplo) usando a idéia de formação de pares (cada azul anulando uma vermelha) facilitava a compreensão da adição, o mesmo não acontecia com a multiplicação (ou divisão), pois o que justificaria o famoso: 'menos vezes menos' dá 'mais'?

Não lembro mais o que surgiu primeiro, mas uma idéia levou à outra: talvez a idéia de ordem dos números inteiros, talvez a leitura de Lewis Carrol[19] com seu *Alice no país dos espelhos* e a possibilidade de *enxergar as coisas ao contrário*, uma ou outra idéia, ou ambas, tenham sido a causa da solução que apresentarei a seguir e que muito nos ajudou na compreensão do *fenômeno* dos sinais da multiplicação.

Assim vejamos: é facilmente compreensível o uso da expressão 2 < 5, indicando que '2 é menor do que 5'. De forma semelhante se pode compreender (ou justificar com tranqüilidade) a expressão - 5 < - 2, para indicar que 'menos 5 é menor do que menos 2'.

Dispondo os quatro números sobre um eixo horizontal teremos:

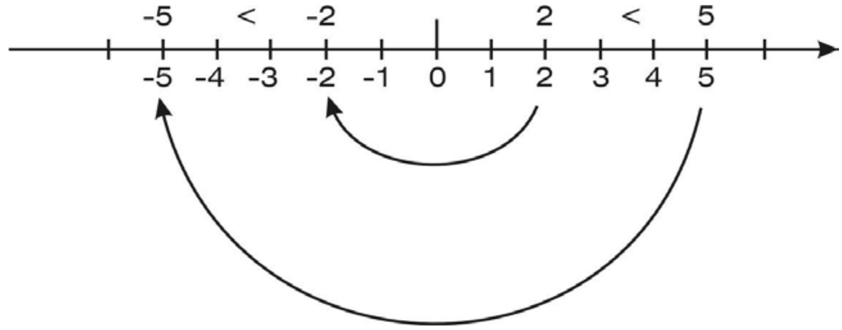


FIG. 2

onde se pode perceber o número zero (origem) funcionando como um espelho entre os lados positivo e negativo do eixo, pois o número que está a esquerda da desigualdade de um lado passa a ocupar a direita do outro lado, como se ocorresse uma rotação em torno da origem ou como acontece diante de um espelho (o que está perto, se reflete perto e o que está longe, se reflete longe).

A idéia da rotação levou à idéia de que o sinal menos indicaria uma inversão de sentido (como se fosse um vetor), ou seja, cada vez que um sinal negativo surgisse na multiplicação indicaria uma inversão no sinal do resultado. Assim,

(+ 2) x (+ 5) = + 10, resultado trivial, (sem inversão).

(- 2) x (+ 5) = - 10, pois o sinal negativo inverte o sinal do resultado 10.

(+ 2) x (- 5) = - 10, idem, pois o sinal negativo inverte o sinal do resultado.

(- 2) x (- 5) = + 10, pois o duplo sinal negativo inverte duas vezes o sinal do resultado, o que equivale a voltar ao estado inicial.

Entendo que *construções* como as anteriormente citadas e outras

---

[19] Pseudônimo adotado pelo Revdo. Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) autor de obras didáticas sobre matemática e lógica e mundialmente conhecido pelo best seller *Alice no país das maravilhas*.

tantas que poderiam ser lembradas e que funcionaram como estratégias interessantes de descoberta de caminhos alternativos para alcançar o que era proposto pelo professor, influíram decisivamente no direcionamento de minhas escolhas e opções profissionais. Ao final deste trabalho, estarei anexando um conjunto de técnicas, que a semelhança das que acima lembrei, servem como alternativas para a resolução de cálculos aritméticos. E se não tiverem outra serventia, penso que poderão servir como modelo para o desenvolvimento de outras técnicas semelhantes que o professor poderá, em conjunto com seus alunos, desenvolver em aula de matemática. Penso que servirão também como alternativa para a resolução interessante de cálculos em provas como as do concurso vestibular, por exemplo, onde o uso de máquinas de calcular continua proibido.

1.4 Minha formação profissional e primeiras inquietações pedagógicas

1.4.1 Um ponto de partida

Como opção profissional, a escolha pela área das ciências exatas foi uma tomada de decisão tranqüila considerando meu precoce envolvimento com as *coisas* da matemática e a dicotomia engenharia ou medicina que se oferecia como porta de acesso à profissionalização e a uma possível independência econômica no *País do milagre* e da *revolução pacífica de 64.* Já no início do período de formação de engenheiro tive a oportunidade de começar a desempenhar a profissão 'regular' de professor, ao aceitar o convite para ministrar aulas de desenho técnico industrial para alunos de primeiro grau em uma escola profissional[20] destinada à formação de técnicos de nível elementar. Lembro o cuidado em bem organizar e planejar as aulas semanais, que se estendiam por tardes inteiras e o árduo trabalho de preparar, de três em três com papel carbono, em máquina de escrever Remington (daquelas pretas), a primeira prova da turma. A seguir, dobra-las e grampeá-las, uma a uma, com dois grampos, para que ninguém pudesse ler, enquanto eu – o professor – não mandasse abrir. Prova aplicada. Fracasso retumbante: nota máxima 2,0! Reprovação total. E então, minha surpresa, mescla de espanto e terror: o que eu fizera! Eu, que me pensara médico, não passava de um monstro, aquele mesmo de meus pesadelos discentes.

E novamente ressurgiam os antigos questionamentos, mas agora ocupando o outro lado da relação, o lado do professor: – Como reverter a situação? Como encontrar alternativas para ensinar, de forma que meus alunos pudessem aprender? Aliás, o que efetivamente significava aprender? O que significava saber? Incipientes questionamentos de alguém que se queria professor e que ao tempo em que se formava engenheiro – do jeito mais convencional possível – buscava indicadores que me levassem a subverter o processo de ensino de tal forma que, eles – os alunos – pudessem aprender.

Engenharia: primeiro emprego em fábrica de latas para conservas alimentícias.[21] O primeiro engenheiro contratado por uma instituição de prática familiar que, por sucessivas décadas, vinha cumprindo suas tarefas *da mesma forma original.* Desempenhei as funções de engenheiro, naquela empresa por não mais do que dois anos, pois logo cedo me percebi completamente incompatibilizado com as *soluções* propostas pela

[20] Escola Senai João Simplício (Rio Grande – RS).
[21] Metalúrgica Guerreiro Ltda (Pelotas – RS).

organização social vigente, de ampla e profunda exploração do esforço humano, e que já apontava os caminhos da privatização de capitais e a globalização de interesses econômicos e que acabou por se confirmar nas últimas décadas do século XX.

Como alternativa, busquei envolver-me novamente com *aquilo* que mais me motivava como ser humano: trabalhar em sala de aula, o que aconteceu logo em seguida. Pude dessa forma voltar a desempenhar a função de professor, agora de matemática *superior*, mais precisamente professor de cálculo integral em uma instituição de ensino superior privada.[22]

O trabalho com o cálculo possibilitou-me o contato com alunos dos cursos de licenciatura em matemática e em física, futuros professores de ensino médio e universitário assim como a experiência, agora oficial, de viver a situação de ser aquele professor que eu próprio tanto questionara e sentir-me então diante da velha situação das notas baixas e da reprovação em massa. Que estranho fenômeno era esse da reprovação inexplicavelmente alta, que ressurgia sempre e sempre: mesmo diante de uma aula supostamente *bem dada*, de temas coerentes e, para mim, *bem explicados* e de uma matéria *apaixonante*!

É falta de pré-requisitos! Afirmava o senso comum que vagava pelos corredores universitários e fazia morada na sala dos professores. *Os alunos chegam na universidade sem saber nada de matemática básica!* Alertavam os próceres da *área pedagógica* e os organizadores das grades curriculares, buscando formas de justificar um *status quo* que mais parecia uma reapresentação de cenas de um filme visto reiteradas vezes.

[22] Faculdade de Educação da Universidade Católica de Pelotas (RS).

Talvez uma formação específica, pensava eu, a qual seria alcançada através da licenciatura em matemática, pudesse me fornecer as respostas que teimavam em não aparecer. Ser professor, a partir de então com formação específica permitir-me-ia o contato formal com as disciplinas pedagógicas e o acesso ao trabalho com alunos do ensino médio, aquele mesmo nível de ensino que não *estaria fornecendo* os pré-requisitos indispensáveis ao ensino superior. Assim nova formação, nova graduação: licenciatura em matemática e a prática em escola de nível médio. No entanto, o trabalho com ciências exatas no ensino médio - em uma escola cujo conceito como entidade de formação profissional, ultrapassava os limites da municipalidade onde se inseria -, voltava a reapresentar características semelhantes de reprovação em massa e de explicações ou justificativas só encontráveis na falta de pré-condições não fornecidas pelo ensino fundamental.

Estranhamente minha caminhada pedagógica e a busca de respostas a minhas inquietações estava me dirigindo, sem que disso pudesse ter consciência muito clara, para o trabalho com o ensino fundamental e nesse nível, mais especificamente com professores das séries iniciais ou ainda com cursos de formação de professores daquelas séries. E lá, nas séries iniciais, nas escolas de ensino fundamental, de alfabetização e dos primeiros contatos da criança com o mundo *letrado* pude encontrar, novamente, o aluno reprovado, o temor pela matemática e a falta de *pré-requisitos*, mas dessa vez sem saber onde mais buscá-los.

Se as respostas a minhas inquietações não estavam no ano escolar anterior, nem no nível escolar anterior, onde encontrá-las? Se tanto eu quanto meus colegas professores tentávamos cumprir nosso papel, pelo menos da forma como aprendêramos, seguindo os passos de nossos antigos mestres, onde estava o equívoco, ou melhor, onde encontrar a solução do problema?

1.4.2 Lembrando observações práticas

De tanto buscar respostas e testar alternativas, acabei me tornando um observador contumaz de minha prática assim como da prática de meus colegas, principalmente daqueles estagiários de licenciatura ou de pedagogia, que às vésperas da colação de grau manifestavam, em sua expressiva maioria, um desejo muito grande de assumir suas opções profissionais e assim poder realizar o sonho mágico de *dar* uma aula perfeita, em que tudo pudesse finalmente ser esclarecido e aonde todos viessem a aprender, sonho dourado de todo mestre educador.

Sem a preocupação de seguir qualquer tipo de ordem ou seqüência seja com relação a uma possível hierarquia de graus de dificuldade ou proximidade no tempo, relato a seguir observações que colhi em aulas por mim coordenadas ou em observações de estágio, obviamente relatadas a partir de minha memória e de acordo com a importância que atribuí a cada detalhe em cada situação.

1.4.2.1 Observação 1

Manhã de junho; sala de aula de 2ª série de ensino fundamental; escola da rede municipal situada na periferia da cidade; estagiária de Pedagogia; trinta e poucos alunos e o professor orientador da estagiária.

Tarefa exposta no quadro:

Efetue cada 'continha', colocando o resultado no quadrinho:

12 17

$$\begin{array}{r} +\ 13 \\ \hline \boxed{} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} +\ 15 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Demonstrando preocupação com o cumprimento da ordem dada, a professora, em voz alta, afirma de forma incisiva: – 'não esqueçam: a gente começa pela direita, pelo fundo'.

Próximo ao observador, M, uma pequena aluna que acompanhava atenta os movimentos da professora, copia rapidamente e imediatamente, usando os dedos da mão esquerda, diz para si mesmo: – '1 mais 1, 2' e escreve logo a seguir:

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 13 \\ \boxed{2} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 17 \\ +\ 15 \\ \boxed{} \end{array}$$

Na seqüência, comportando-se como quem não ouvira as palavras da professora sobre posição, direita, etc., usando novamente os dedos, sussurra: – 'dois mais três ... dois, três, quatro, cinco' e completa:

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 13 \\ \boxed{25} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 17 \\ +\ 15 \\ \boxed{} \end{array}$$

A rapidez e a espontaneidade de M, parecem demonstrar uma confiança própria de quem não tem nada a temer e, logo passa a resolver a 'conta' seguinte, escrevendo: 1 + 1 = 2 e a seguir, dizendo: – 'sete', recita, usando os dedos: - 'oito, nove, dez, onze, doze', escreve:

$$12 \qquad\qquad 15$$

$$\begin{array}{r} +\ 13 \\ \boxed{25} \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 17 \\ \boxed{212} \end{array}$$

Posteriormente, analisando o episódio, a professora atribuiu o 'erro' ao fato de ter M começado pela 'esquerda' e não pela 'direita' como havia mandado (muito embora tal procedimento não tenha sido por ela observado enquanto M trabalhava). M, ao ser questionada sobre seu procedimento, afirmou: – 'a gente soma de carreirinha, não é', numa firme referência à disposição dos números no algoritmo apresentado, com um número acima do outro. E o que é mais significativo, a hipótese de M, que havia funcionado no primeiro caso, deixara de funcionar no segundo. Onde estaria o erro, pelo menos na cabeça de M?

1.4.2.2 Observação 2

Em semestre recente, como professor da disciplina *Informática Aplicada à Pedagogia*, oferecida a alunos do *Curso de Pedagogia*[23], propus uma série de desafios que permitissem verificar como os alunos, futuros professores, trabalhariam com alguns conceitos matemáticos fundamentais. Como ambiente de trabalho utilizei a linguagem LOGO[24] cujo objetivo principal, sem a preocupação de ensinar computação, foi analisar *como os alunos respondiam a alguns desafios envolvendo conhecimentos matemáticos elementares*.[25]

---

[23] Curso de Pedagogia: Habilitação em Séries Iniciais. Faculdade de Educação. UFPel.

[24] Linguagem criada por Seymour Papert, pesquisador do MIT, co-autor de diversos trabalhos em parceria com Jean Piaget.

[25] Projeto de pesquisa: *A Linguagem Logo como Ferramenta para a Re-construção de Conceitos Matemáticos Fundamentais por Alunos do Terceiro Grau*. Curso de Pedagogia. Faculdade de Educação. UFPel, 1995.

Inicialmente, os alunos (dez alunas, no caso em estudo) foram distribuídos em cinco duplas, diante de computadores. Sem maiores explicações (sobre *hardware*, gerações de computadores, etc.), apresentei a tela do vídeo como um plano cartesiano onde o ponto de referência – cursor (uma tartaruga estilizada) – tinha apenas dois movimentos possíveis:

1. deslocamento (translação) usando o comando **PF xx** (xx = número inteiro);
2. giro em torno de si mesmo (rotação) usando o comando **PD xx**.[26]

Observe-se que, neste primeiro contato nada mais foi apresentado sobre o ambiente, nem informações sobre o significado das letras **PF** (para a frente, indicando o sentido do deslocamento do cursor) e **PD** (para a direita, indicando o sentido da rotação do cursor).

Na seqüência foi proposta a seguinte questão: – Vocês sabem o que é um quadrado? – Imaginem um quadrado! – Pois bem, mandem a tartaruga desenhar um quadrado.

Vencida a situação inicial de que algumas duplas colocavam um número muito pequeno de passos, (PF 5), e não conseguiam observar o deslocamento da tartaruga (de comprimento maior do que 5 passos), em geral, todos rapidamente conseguiram construir o primeiro lado (vertical) do quadrado (FIG. 3).

FIG. 3

E surge o primeiro grande problema do sentido matemático, ou seja: é preciso que a tartaruga vire (gire) para o lado e se desloque na

[26] A linguagem LOGO dispõe de mais dois comandos de deslocamento, a saber **PT xx** (para trás) e **PE xx** (para a esquerda). Tais comandos foram omitidos para evitar possíveis confusões que poderiam surgir com tantas novidades, para um grupo de alunas que desconhecia totalmente a linguagem e quase que totalmente o computador.

horizontal. – E a noção de rotação? – Onde ficou? E, mais importante: – girar quanto?

Foi constatado que duplas de alunos que usaram o comando **PF 50** para construir o primeiro lado (vertical) do quadrado, usavam na seqüência o comando **PD 50**. Espantados, observavam que o "bichinho" ficava atravessado! (FIG. 4). E, ao repetir mais **PD 50**, constatavam que a tartaruga passava do ponto desejado! (FIG. 5).

Questionados sobre o que acontecera, respondiam: – *Não sei! – Não sabemos!* Perguntados sobre o que pretendiam fazer, os alunos, lançando mão do dedo indicador (da mão direita) e tocando na tela, exclamavam: – *Eu queria que ela fosse prá lá!* (Indicando a direção horizontal, ao final do primeiro lado).

FIG. 4

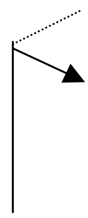


FIG. 5

Ressurgem os questionamentos: – Onde está (ficou) a noção de ângulo? – E ângulo reto, o que é mesmo? Aliás, – qual é o significado de ângulo?

1.4.2.3 Observação 3

Outra situação que me leva a questionar o fazer do professor de matemática é a absoluta convicção de que os *problemas* apresentados no livro-texto adotado têm sempre uma única resposta e que ela coincide com sua própria versão de resposta, que geralmente é a resposta escrita em vermelho, no livro do professor fornecido gratuitamente pela editora.

O exemplo[27] apresentado a seguir foi proposto a alunos em classes de ensino fundamental e, posteriormente, a professores em simpósios ou cursos sobre Educação Matemática.

A aparente simplicidade e unicidade (certeza) da solução, como em geral expressam professores entrevistados, não se evidencia quando o mesmo exercício é proposto aos alunos.

Para os professores o exercício não passa de uma brincadeira trivial com uma resposta imediata, que *coincide* com a resposta do livro-texto – o objeto que não pertence ao conjunto é o *lápis*, pois é o único que não começa com *B*.

Ao aplicar o exercício aos alunos, de forma surpreendente, além da resposta esperada, outras respostas surgem, como por exemplo:

FIG. 6[28]

– *A banana, porque é a única* (palavra) *trissílaba*;

– *Tem duas coisas: o lápis e o chapéu* (referindo-se à figura do boné);

– *As bananas, porque é a única* (figura) *que tem três coisas*;

– *A banana, porque é a única coisa "feita" por Deus*.

É interessante destacar que, invariavelmente, a resposta apresentada pelos professores coincide com a resposta esperada (resposta do livro) e, mais importante, é a única resposta possível: – *O lápis*, pois é o único que não começa por *B*.

[27] Extraído do trabalho final apresentado ao Seminário Avançado: *A formação da função semiótica*: um estudo de fundamentação, conduzido pelo Prof. Dr. Fernando Becker. PPGEDU FACED/UFRGS, 2º sem 1998.

[28] Maurício de Souza. Almanacão da Mônica.

Num segundo momento (com os professores) experimento usar a seguinte técnica: – Agora vocês são crianças. São meus alunos. Uma criança da outra turma deu outra resposta. Vejam se vocês descobrem!

A partir do desafio, começam a surgir respostas alternativas, como as anteriores respostas das crianças e outras (mais) criativas como, por exemplo: – *Ah, eu tirava o lápis, por que a gente não leva lápis num piquenique*.

Esta atividade é um exemplo de como a criança pensa de forma diferente e está aberta a possibilidades que, normalmente, o professor não se permite alcançar. Outro aspecto interessante, e que merece ser analisado com mais profundidade, é a mudança de comportamento e, mais do que isso, a mudança de *percepção (interpretação)* que ocorre com o professor quando ele se permite *ser criança*.

1.5 A linguagem matemática e a questão de sentido

Inúmeros são os casos e exemplos de situações, que reiteradamente surgem em aula de matemática, envolvendo a interpretação de determinado conceito e seus diferentes significados (sentidos), seja como conteúdo (significado matemático), seja para o professor, seja para o aluno. Apenas para exemplificar, uma grande fonte de distorções e desentendimentos surge com o conceito de *conjunto* a partir da adoção da teoria dos conjuntos (subproduto da dita *matemática moderna*). Sabe-se que a teoria dos conjuntos é uma teoria axiomática e como tal construída a partir de conceitos fundamentais, a saber: *conjunto, elemento e relação de pertinência.* Talvez a necessidade de exemplificar *conjunto* como coleção tenha sido a causa de tantos desentendimentos e contradições surgidas já no início da aprendizagem da teoria dos conjuntos.

Baruk relata um episódio ocorrido em uma sala de aula por ela observada. Diz a autora:

> A professora [...] depois de ter dado a noção de número (hoje o cardinal), outrora obtido por varas, réguas, pérolas, dados, etc., e hoje através de ações prévias de classificação, de ordenação com pauzinhos, réguas, blocos lógicos, etc., *depois* por correspondências termo a termo entre os conjuntos de florzinhas, de animais, de quadrados, de triângulos, de galinhas ou de perus; MF (a professora), preparava-se, pois para abordar a adição. Tinha reproduzido no quadro um desenho do livro e, depois dos preliminares em que se assegurava que fora adquirido que o cardinal do conjunto de maçãs era quatro e o do conjunto das nozes era três, perguntava com um ar divertido qual era a questão que se colocava.

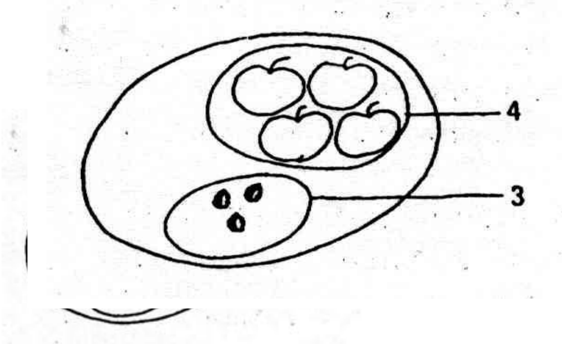


FIG. 7

> Silêncio. Aparentemente não existia nenhuma questão.
> MF insiste:
> – Então vejamos, temos um conjunto de maçãs cujo cardinal é ...
> – Quatro! Respondia o coro das crianças.
> – E um conjunto de nozes cujo cardinal é...
> – Três! Respondia o coro das crianças.
> – Então, poder-se-ia dizer...
> ...
> – Vejamos, tu, JP, o que é que tu podes dizer?
> – Que há *dois* conjuntos?

> A resposta de JP desencadeou opiniões.
> – Que há mais maçãs!
> – Que há menos nozes!
> – Que não há tantas maçãs como nozes!
> Desorientada MF procura conter a corrente:
> – Sim, é certo. Mas vamos procurar achar o que seria possível fazer...
> – Vejamos! Unir através de flechas as maçãs e as nozes!
> Com as faces vermelhas devido à confusão, a pobre MF completamente invadida de sugestões nenhuma delas mencionando a adição e com razão – todas as respostas eram, bem entendido, sugeridas pelas atividades anteriores – foi obrigada para não *perder* a lição, propor *ela própria* que se 'procurasse o cardinal do novo conjunto formado pelas maçãs e as nozes'.
> Mal acabara de enunciar a sua sugestão, quando toda a classe gritou em coro:
> – Sete! Sete! [29]

O episódio acima, em que se pode aquilatar o mal-estar que a professora deveria estar sentindo, me faz lembrar uma manifestação de Piaget quando interpelado sobre as razões e motivos que, em seus trabalhos, poucas referências são feitas ao conceito de *conjunto*, ao que ele esclarece:

> [...] a noção de conjunto própria aos matemáticos surge tarde na criança e apresenta-se sob uma forma totalmente outra: quando lhes falamos de conjuntos, elas pensam simplesmente em coleções, em indivíduos considerados coletivamente. Nesse caso, eu não falaria de conjuntos, mas de *classes.*
> O que é primitivo são as relações e as classes, mas sempre acreditei (o que talvez se deva à minha incompetência matemática) que haveria um conjunto apenas a partir do momento em que se pudesse fazer uma correspondência cardinal não qualitativa entre uma coleção e outra.
>
> É possível fazer correspondências: por exemplo, apresentamos um quadrado, uma forma redonda, uma estrela, um losango etc., e a

---

[29] *Insucesso e matemáticas*, 1996, pp. 60-1.

> criança colocará na frente de um quadrado um outro quadrado, na frente de uma forma redonda uma outra forma redonda etc. Eu não falaria de conjunto nesse caso: são duas classes colocadas em isomorfismo e em correspondência. Há correspondência qualitativa e não a correspondência que nos meus escritos sempre denominei de *qualquer*.
>
> Este talvez seja um termo abusivo, mas pretendo com isso fazer abstração das qualidades e que cada elemento seja tomado como uma unidade. Então, ao quadrado poderá corresponder uma forma redonda, à estrela um losango, pouco importa. A criança concluirá que há uma mesma quantidade, pois há correspondência. Isto é um *conjunto.* Assim, a meu ver, *o conjunto supõe a construção do número e, sobretudo, a conservação do número*. (grifei) [30]

Antigos questionamentos, dos tempos de aluno, ressurgem das cinzas do passado nas dúvidas de meus alunos, que por sua vez também são professores: – O que é o zero? – O que significa o signo "10"? – O que é uma fração? – Como ocorre a gênese e qual é o significado do conceito de número? – Como acontece a passagem do discreto ao contínuo? – Como ocorre a generalização do pensamento na fronteira aritmética-álgebra? Estas e muitas outras são questões em aberto, a demonstrar e a comprovar que nem mesmo o próprio professor conseguiu construir sua rede de conhecimentos matemáticos de uma forma contínua, integral e integrada.

1.6 De volta a minhas questões

Por tudo que descrevi até aqui e como produto de minha prática, busco compreender como ocorre o fazer pedagógico do professor, como ele percebe o processo de construção de seu conhecimento, assim como o de seu

[30] PIAGET. *Sobre a Pedagogia*, 1998, pp. 224-5.

aluno e, a partir desse entendimento, propor, construir, junto com ele, novas possibilidades de interação com o saber matemático. Não mais uma matemática entronizada na alta torre de marfim de uma sabedoria encastelada, inatingível, incompreensível, inútil para a vida, mas sim um fazer matemático que se entrelace com "o cotidiano, com atividades criativas, espontâneas, respeitando-se a história de vida dos sujeitos envolvidos no processo de construção de aprendizagem.[31]"

A longa caminhada profissional que me conduziu da engenharia à licenciatura em matemática, à pós-graduação em matemática da computação, ao trabalho com formação de professores de séries iniciais e à formação de pós-graduados em educação matemática, tem sido constantemente iluminada por questionamentos que, reiteradamente, teimam em surgir no dia-a-dia das salas de aulas, na inter-relação com meus alunos e colegas profissionais de educação.

Após tantos anos de prática, de sucessivas observações, de reiteradas manifestações e constatações de problemas de toda ordem, principalmente aqueles que concorrem para a exclusão de tão expressivo número de alunos que se sentem incapazes diante da matemática escolar, pensei: é hora de buscar subsídios teóricos. Iluminar minha prática e observações com uma teoria consistente que se apresentasse capaz de explicar o que acontece diante do intrincado enigma que acaba se tornando o ato de ensinar/aprender matemática. Foi nessa direção que estabeleci meus primeiros contatos com Constance Kamii em *A criança e o número*, e outros trabalhos sobre o ensino de aritmética (ver bibliografia). A leitura de Kamii, uma

---

[31] Extraído de questionário por mim aplicado no curso *Construtivismo Aplicado à Matemática*: Desmistificando o Medo. II Congresso Nacional de Educação Física, Pedagogia e Psicologia. Maio, 1997,

pesquisadora que participou de várias obras coletivas organizadas por Jean Piaget foi, de certa forma, a chave que me abriu a porta de acesso para o universo das idéias piagetianas e, por conseqüência, para ingresso em seu mundo de questionamentos, principalmente no que se refere à construção do conhecimento matemático.

Por reiteradas vezes busquei parcerias para discutir-vivenciar-experienciar minhas idéias sobre o processo de ensinar matemática. Nessas viagens-vida deparei-me com colegas adeptos do *construtivismo* que, segundo diziam, seguiam idéias de Piaget. É oportuno lembrar certas afirmações muito comuns em setores menos preparados da academia, e que já fazem parte do folclore escolar: – *É muito difícil ler Piaget! – É impossível estudar Piaget, sozinho! – Para entender Piaget, a gente tem que começar a ler pelo fim!*

Mas difícil ou não, lancei-me na leitura de Piaget, o que fiz participando em pequeno grupo de estudos onde estudávamos *A gênese do número na criança* de Piaget e Szeminska. Para melhor compreender a terminologia empregada por Piaget, líamos em paralelo a obra *Piaget em sala de aula* de Hans G. Furth, que nos forneceu enormes subsídios para adentrarmos o mundo piagetiano e por conseqüência começarmos a estabelecer alguns balizamentos teóricos para compreender o que acontecia em nossas salas de aulas.

Para dar continuidade a minha viagem pelo conjunto de minhas memórias e encaminhar a apresentação do trabalho de campo com os professores pretendo, na seqüência, fazer uma revisão – mesmo que sumária – sobre a organização da matemática enquanto ciência, assim como uma revisão

---

Terezina (Piauí). Universidade Estadual do Piauí / CEITEC - Florianópolis (SC).

sobre minhas leituras da obra piagetiana. Assim sendo, no próximo capítulo passo a fazer uma abordagem sobre desenvolvimento do pensamento matemático, para o que utilizo idéias apresentadas por Piaget em sua obra *Psicogênese e História das Ciências* e em seu artigo *Criatividade*[32] e logo a seguir desenvolvo algumas considerações sobre a organização filosófica da matemática, a partir de idéias que – muito embora desarticuladas, convivem na sala de aula de matemática. Posteriormente no capítulo seguinte refaço o percurso de minhas leituras da obra de Piaget – pelo menos a parte mais significativa desse processo – enfocando transformações conceituais que experimentei ao longo das leituras que, a bem da verdade, continuam sendo feitas.

[32] Piaget, Jean. Criatividade. In: VASCONCELOS (org.). *Criatividade*, 2001.

2 O TECIDO MATEMÁTICO

L'univers n'est connu qu'au travers de la logique et des mathématiques, produits de son esprit, mais il ne peut comprendre comment il a construit les mathématiques et la logique qu'en s'estudiant luimême sychologiquement et biologiquement, c'est à dire, en fonction de l'univers entier[33]
(Jean Piaget)

2.1 Por um caminho evolutivo do pensamento matemático

Conteúdo básico e obrigatório dos sistemas educacionais, especialmente no ensino fundamental, a matemática – *rainha das ciências* no dizer popular ou *fundamento do conhecimento científico* no dizer acadêmico – manifesta-se, em geral, como a enigmática esfinge do *decifra-me ou te devoro* ou o próprio 'bicho-papão' que à semelhança de fantasmas dos pesadelos infantis, ameaça o sono de muitos daqueles que dela se aproximam. E, mesmo

[33] O universo não é conhecido senão através da lógica e das matemáticas, produtos de seu espírito, mas ele não pode compreender como construiu as matemáticas e a lógica a não ser estudando-se a si próprio psicológica e biologicamente, isto é, em função de todo o universo. In: CERUTTI. *A dança que cria*, 1995, p. 57.

para aqueles poucos que se aventuram por seus caminhos, a matemática, em muitos casos reserva surpresas e mistérios cujas soluções nem sempre são facilmente encontráveis, quando o são.

Sem sombra de dúvidas é possível rastrearmos profundas e significativas vinculações entre o desenvolvimento do pensamento científico, como característica própria da humanidade e a ampliação ou aprofundamento do conhecimento matemático, enquanto produção humana. Sem nos preocuparmos em detectar o que é causa ou o que é conseqüência, podemos verificar que em todos os tempos da evolução científica da humanidade, o conhecimento matemático se expande, se especializa e se aprofunda.

Do ponto de vista de seu desenvolvimento histórico, pode-se observar que o pensamento matemático passa por etapas ou períodos bem definidos caracterizados pela forma de pensar, de criar, de fazer ciência adotadas pelo homem em cada época da humanidade. Piaget, por exemplo, ao afirmar que a matemática, como produto da capacidade humana, é uma manifestação primordial de criatividade[34] e um modelo de sistema de transformações destaca três períodos que caracterizam marcadamente o processo evolutivo do pensamento matemático na história da humanidade, a saber um período grego, um segundo período a partir do século XVII, com o desenvolvimento da álgebra e um terceiro período a partir do século XIX.

2.1.1 O período grego

Indiscutivelmente a civilização grega desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do Ocidente, em todas as áreas, e particularmente na filosofia e na matemática.[35] A era grega, como denominou Piaget, ou heróica no dizer de Boyer,[36] é profundamente rica em pensadores criativos, como Pitágoras, Tales, Platão, Aristóteles, entre outros, cujas obras produzem efeitos até os dias de hoje. Com relação ao pensamento matemático, o período grego se caracteriza como uma época em que a matemática estava intimamente relacionada aos objetos e, por conseqüência, totalmente desvinculada do sujeito.

A Grécia era formada por cidades independentes, que se mantinham em constantes conflitos, cada uma buscando hegemonia e afirmação como centro cultural e pólo de desenvolvimento comercial na sociedade da época; disputas e conflitos que de alguma forma podem ser considerados como característica dos humanos, sempre que se agrupam e se organizam, mesmo que em micro-sociedades. Tal forma de organização das cidades gregas não demandava profundas necessidades educacionais comparáveis às do Egito, Babilônia e China, por exemplo, cujos ecos de organização mais consistente como nações, nos chegam através de excertos recolhidos ao longo da história da antiguidade. E mesmo se o comércio, a agricultura ou a navegação exigissem algum conhecimento matemático, as cidades gregas pouca importância destinavam à formação intelectual e técnica (artesanal) das crianças e jovens, sendo a educação uma preocupação de âmbito familiar ou privado.

As escolas gregas – que em alguns casos se tornaram famosas – resultaram sempre de iniciativas particulares. É o caso, por exemplo, da

---

[34] PIAGET. Criatividade. In: VASCONCELLOS (org.). *Criatividade*, 2001, p. 11-20.
[35] A palavra 'matemática' tem origem grega, no verbo 'conhecer, aprender'. Antes de ter o atual sentido de ramo da ciência, o termo grego *mathema* (= o que é ensinado), significava todas as formas de conhecimento.
[36] BOYER. *História da Matemática*, 1974, p. 47.

escola que se desenvolve em torno de Pitágoras em Crotona, de profundas conotações filosófico-religiosas, assim como em Atenas, as escolas de Isócrates – voltada para a prática da retórica (com finalidades políticas) e a de Platão destinada à filosofia.

Para Pitágoras (séc. VI a.C.) o 'Número', como entidade supra-natural, definia a existência do mundo sensível, ou seja, o mundo – na concepção pitagórica –, existe na medida em que é reflexo do número. É célebre e fartamente citado em todo e qualquer compêndio de matemática fundamental o famoso teorema de Pitágoras, que segundo consta, já seria conhecido de povos orientais, muito antes daquele pensador.

Apenas para recordar, o teorema de Pitágoras afirma uma relação entre os lados de qualquer triângulo retângulo (triângulo que tem um ângulo reto, isto é, igual a 90^o), dizendo: '*o quadrado da hipotenusa* (lado oposto ao ângulo reto) *é equivalente à soma dos quadrados dos catetos* (lados que compõem o ângulo reto).'

A importância do teorema de Pitágoras é facilmente detectável em várias áreas do conhecimento matemático, como por exemplo, na relação fundamental da trigonometria: $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ou na determinação da diagonal, d, de um retângulo de lados a, b: $a^2 + b^2 = d^2$ e especialmente como ferramenta para a resolução de questões e problemas matemáticos escolares, inclusive da prova de matemática do concurso vestibular.

Com relação à Escola de Pitágoras, é famoso o quadrívio iniciático que constava de estudos de aritmética, geometria, música e cosmologia. É graças a Platão e a Isócrates que se tem notícias do modo de organização do pensamento matemático adotado pela cultura geral da época helenística, que no sistema educacional da Idade Média passa a ser conhecido como *quadrivium pitagórico*.

A astronomia podia representar tanto os conhecimentos elementares sobre o nascimento e o ocaso dos astros, o calendário e as estações, como as noções de maior complexidade matemática, relativas aos movimentos reais e aparentes do Sol, da Lua e dos planetas. À parte estritamente matemática da astronomia dava-se o nome de "Esférica", devido às hipóteses da esfericidade da Terra e do Cosmo formuladas a partir do século V a.C. Com relação à música, ela era desenvolvida como uma teoria de intervalos musicais, em particular a determinação numérica dos intervalos harmônicos ou consonantes e por isso denominada "Canônica".

De acordo com relatos históricos, tudo leva a crer que Pitágoras e seus discípulos tenham sistematizado a aritmética grega – decimal e nominativa.[37] Sua teoria numérica estava estruturada a partir da idéia de organizar os números em *categorias* determinadas em função de uma forma comum, em claro prenúncio das modernas *classes numéricas*. Por exemplo, como o número 10 (década) tem, na escola pitagórica uma importância fundamental, os números eram escritos em função do 10. Assim, 11 = 10 + 1; 12 = 10 + 2; 20 = 2 x 10; 37 = 3 x 10 + 7, etc. E dessa forma todos os números (= inteiros positivos) para os pitagóricos são divididos em 10 classes: a primeira classe contendo os números que deixam 1 como resto, quando os dividimos por 10; a segunda classe, todos os que deixam 2 como resto, e assim por diante, até a décima classe, a da *década*, que contém todos os números naturais sem resto (resto zero), quando divididos por 10.

---

[37] A numeração dos caldeus, por exemplo, era sexagesimal (base 60) e posicional.

A partir dessa organização em classes, os pitagóricos subdividiam os números (cuja essência é a *unidade*), de acordo com a *dualidade* constitutiva do impar (*perissós*) e do par (*artiós*). Os ímpares (machos), são para Pitágoras, limitados, finitos e determinados, ao passo que os pares (fêmeas) são ilimitados, infinitos e indeterminados. Esta classificação, em par e ímpar, tinha um objetivo estreitamente ligado à questão de gênero, pois um *macho* (ímpar) não poderia ser repartido (em partes iguais) por uma *fêmea* (o 'dois', por exemplo), posto que um número impar dividido por dois produz um resto (½) que não é inteiro.

Por seu turno, um macho, isto é um impar, poderia ser decomposto em partes, tomando como base uma unidade central (não esquecer o *significado supra-natural* atribuído à unidade, o Uno). Assim, por exemplo,

3 = 1 + **1** + 1;

5 = 2 + **1** + 2;

7 = 3 + **1** + 3; etc.,

demonstrando que no ímpar (macho) predomina a unidade (central), muito embora o Uno não fosse, para os pitagóricos, nem ímpar, nem par, posto que a unidade é o princípio que gera as duas classes de números e não está submetida à multiplicidade numérica.

A importância da *década* – imagem da perfeição universal na escola pitagórica –, pode ser aquilatada a partir do símbolo identificador de seus membros (FIG. 8), que constituía em uma estrela de 5 pontas (pentagrama), inscrita em um pentágono regular (portanto uma figura de 10 lados).[38]

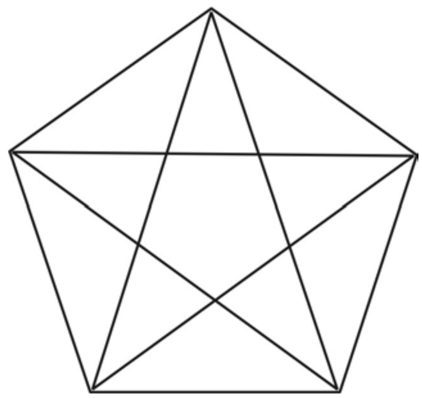


FIG. 8

Entre os discípulos da escola pitagórica era comum o uso de números figurados, ou seja, números criados a partir de determinado padrão de contagem. Tal prática poderia ser vinculada à sua predileção pela questão da forma que é a principal característica do período grego da matemática.

Como exemplo, podemos construir a seqüência de números triangulares. São triangulares, os números obtidos a partir da unidade, pelo acréscimo do número seguinte (sucessor). Assim, o primeiro número triangular é 1. O segundo será: 1 + 2 = 3. O terceiro triangular, será: 1 + 2 + 3 = 6, etc.

[38] Sobre a importância do Cinco ou pêntada, na escola pitagórica, vejamos: **1º** - o dodecaedro gerado por 12 pentágonos é a representação do *cosmos*. **2º** – a estrela de cinco pontas (pentagrama) traçada sobre o pentágono, é o sinal de reconhecimento entre seus membros. **3º** – a verificação do teorema de Pitágoras parte do triângulo de lados 3, 4 e 5. **4º** – o silêncio imposto aos não iniciados (noviços) durava cinco anos. **5º** – na música, a quinta é o intervalo dominante da gama de Pitágoras e como tal é seu princípio de construção. MATTÉI. *Pitágoras e os pitagóricos*, 2000, p. 141-2.

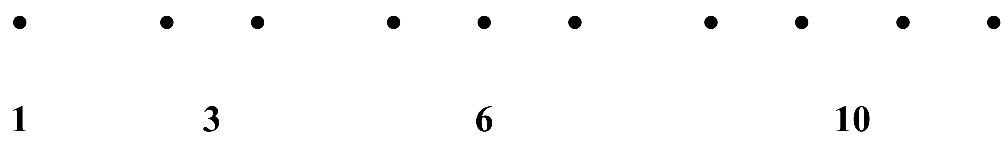


FIG. 9

O quarto triangular será: 1 + 2 + 3 + 4 = 10, que é a década pitagórica, que tem uma importância mística fundamental nos preceitos dessa escola iniciática.

Outro conjunto de números figurados que apresenta uma propriedade interessante é o que se obtém a partir de sucessivas adições de números ímpares, o que pode ser representado pela equação (igualdade):

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

constituindo a seqüência de números quadrados, graficamente representados por:

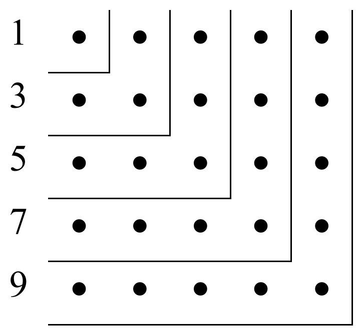


FIG. 10

Observe que através de reiteradas somas de números ímpares, surgem os números quadrados, pois:

$1 = (1)^2$

$1 + 3 = 4 = (2)^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = (3)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = (4)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = (5)^2$, etc.

Várias propriedades numéricas já conhecidas na Escola de Pitágoras perduram até os dias de hoje no ensino escolar de matemática, como é o caso dos números quadrados já apresentados, os números retangulares, os números amigos, os números perfeitos, etc.

Os números, ditos retangulares, são formados a partir do 'Dois' primitivo, por somas sucessivas de números pares, segundo a equação

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n.(n + 1)$$

ou graficamente,

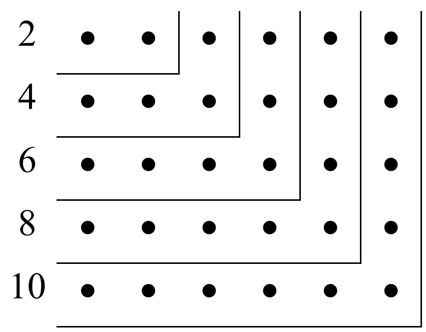


FIG. 11

$2 = 1 \times 2$

$2 + 4 = 6 = 2 \times 3$

$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4$

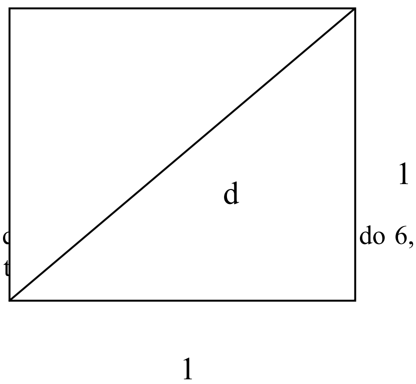
$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \times 5$, etc.

Outro grupo de números 'interessantes' é formado pelos *números amigos*, considerados aos pares. Explicando: dois números são amigos (ou amigáveis) sempre que cada um deles é igual à soma dos fatores próprios do outro número. Por exemplo, 220 e 284 são amigos, pois os fatores de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 que somados resultam em 220, enquanto que 220 tem os fatores 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 cuja soma resulta em 284.

Por outro lado havia o conjunto dos números perfeitos. É perfeito todo número que coincide com a soma de seus divisores próprios[39]. São exemplos de números perfeitos o 6, pois 6 = 1+ 2 + 3; o 28, pois 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Outros exemplos de números perfeitos, são: 496; 8.128; 2.096.128, como é fácil verificar.

Afora as perseguições políticas a que foram submetidos os pitagóricos, com o extermínio de sua escola, principalmente por suas idéias de reformas sociais e de adoção de valores morais contrários aos interesses dos poderes organizados da época, consta que a aplicação do teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo isósceles teria sido o estopim da derrocada dos princípios pitagóricos.

Apenas para deixar registrado, diz o folclore da matemática antiga que certo discípulo, em meio a suas reflexões de fim de dia – costume rotineiro naquela escola – estaria rabiscando na areia, com um pedaço de galho de árvore e – sem intenção deliberada – teria desenhado um quadrado (de lado unitário, como pediam os princípios escolásticos) e a seguir desenhou uma de suas diagonais, obtendo assim a figura abaixo:



[39] São próprios os divisores menores do ... do 6, por exemplo, seus divisores são 1, 2, 3 e 6. Excluindo-se o número 6 , t...

FIG. 12

E curioso, pensou o discípulo (atitude que, tudo leva a crer, lhe custou a vida): – que número será aquele que representa o ‘d’? (Não podemos esquecer que para os pitagóricos, ‘número’ era inteiro).

Bem, a imediata aplicação do teorema, leva ao seguinte resultado:

$$d^2 = (1)^2 + (1)^2$$

$$d^2 = 2$$

$$d = \sqrt{2}$$

que é um número irracional. Como a escola pitagórica considerava que toda realidade é produzida por unidades numéricas organizadas em certa ordem e quantidade, a descoberta de um número que não podia ser representado por tais unidades, trouxe uma crise filosófica, pois esse fato inseria uma ‘irracionalidade’ segundo o pensamento pitagórico, na própria essência da realidade.

De forma semelhante em Platão (427-347 a.C.) e seus discípulos vamos encontrar profundas ligações com o pensamento matemático, pois a matemática como instrumento propício ao desenvolvimento intelectual era uma excelente fonte de disciplina e concentração para os ritos e trabalhos de iniciação em sua escola filosófica (idealismo platônico).

Segundo Platão, tudo o que vemos, tudo o que percebemos por meio dos sentidos físicos, nada mais é que aparência da verdadeira realidade: as *Formas* ou as *Idéias,* modelos ideais dos objetos do mundo físico ou das situações ideais que o homem, por seu esforço próprio, deveria atingir.

A palavra grega *Eidos* (= idéia, tem o sentido de *original, primitivo*, ou seja, aquilo que não é cópia de outro, o modelo e a norma para todas as cópias)[40].

Em Platão, o mundo das *Formas*, distinto do mundo perceptivo só pode ser captado pela razão (razão especulativa) e, portanto a matemática como *Forma*, existiria independentemente da mente humana e comprovações empíricas. Por seu turno, o matemático, como um explorador, por meio de ilações mentais, adentraria e percorreria esse mundo harmônico, perfeito, de relações puras – mundo das *Formas* – e assim descobriria as relações que expressam verdades absolutas (tautologias), cujo valor de verdade independe do homem assim como do mundo empírico.

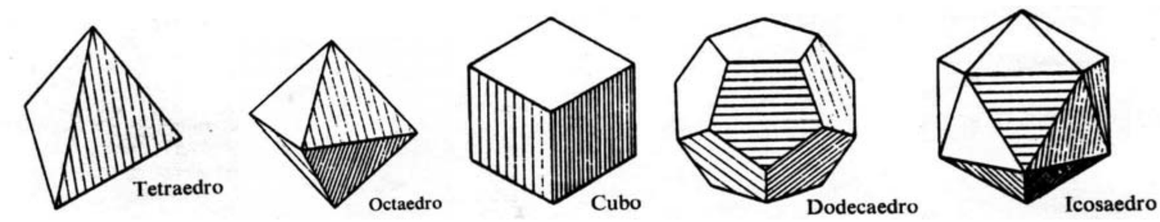
Na atualidade, podemos afirmar que os matemáticos que se consideram descobridores de verdades – reveladas de um mundo onde os entes matemáticos têm existência objetiva e como tal prescindem de qualquer ato preliminar de construção – encontram nas idéias de Platão (platonismo) a matriz básica de suas concepções.

É em Platão que vamos encontrar a primeira sistematização de

---

[40] Eidos (idéia) = a espécie única intuível numa multiplicidade de objetos. Para Platão existem três classes de objetos: **1º** Objetos dos quais com certeza existem idéias, que são: *a) os objetos matemáticos*: igualdade, um, muitos, etc.; *b) os valores*: o belo, o justo, o bem, etc.; **2º** Objetos dos quais é duvidoso que existam idéias: as coisas naturais, o fogo, a água ou o homem; **3º** Objetos dos quais com certeza não há idéia, que são as coisas vis ou geralmente as que não têm valor (ABBAGNANO, p. 524-5).

poliedros regulares – cujas faces são polígonos regulares – dos quais apenas cinco podem ser construídos em nosso espaço tridimensional: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Tais corpos geométricos conhecidos como *corpos platônicos* ou *sólidos de Platão*, são construídos a partir de triângulos elementares (tríade, número do todo completo), quadrados (tétrade, progressão da tríade) e pentágonos (pêntade, perfeição).[41]



	Tetraedro	Octaedro	Icosaedro	Cubo	Dedecaedro
Figuras	Triângulos	Triângulos	Triângulos	Quadrados	Pentágonos
Faces	4	8	20	6	12
Ângulos por ápices	3 de 60º	4 de 60º	5 de 60º	3 de 90º	5 de 108º
Ápices	4	6	12	8	20
Arestas	6	12	30	12	30
Elementos	FOGO	AR	ÁGUA	TERRA	MUNDO

FIG. 13

[41] A atribuição dos quatro primeiros poliedros aos quatro elementos e o papel original atribuído pelo *Timeu* ao dodecaedro, para materializar a esfera do *Todo*, constitui-se numa das questões mais controvertidas da antiga filosofia grega. Ver MATTÉI. *Pitagoras e os pitagóricos*, p. 121.

Como curiosidade é interessante registrar que a versão de Kepler do sistema solar consistia em sólidos platônicos encaixados, relacionando os raios de esferas concêntricas que intervinham com as órbitas dos planetas (FIG. 14).

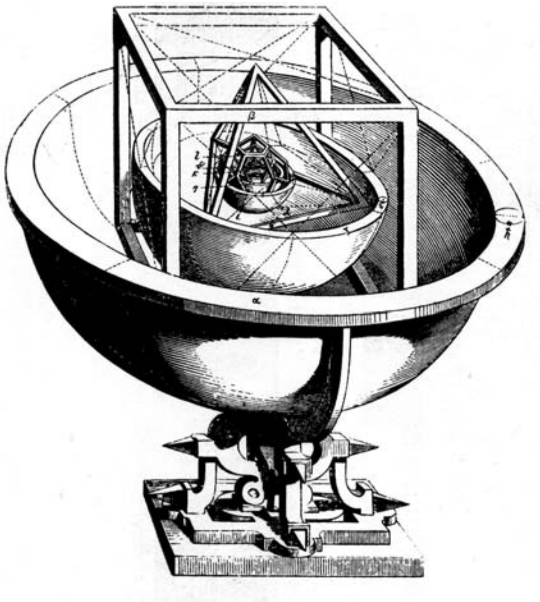


FIG. 14[42]

Outro pensador que tem significativa influência na organização do pensamento científico, em todas as épocas, foi Aristóteles, para quem a forma ou a essência de um objeto (empírico) é parte do mesmo tanto quanto sua matéria. Do ponto de vista aristotélico, a matemática seria produto das abstrações matemáticas elaboradas pelos matemáticos como resultado de suas ações sobre os objetos materiais (do mundo sensível).

Se para Platão enunciados matemáticos são verdadeiros na medida em que descrevem formas ou relações entre formas matemáticas, Aristóteles reabilita o mundo empírico, assim como o trabalho do matemático. É a partir de Aristóteles que se estabelecem os fundamentos da descrição lógica do pensamento humano, e se organizam as primeiras estruturas lógicas das teorias matemáticas e dos sistemas de proposições.

> Em resumo, poderíamos dizer que a posição de Aristóteles no que se refere à relação da Matemática com a realidade pode ser situada, simultaneamente, na origem tanto do realismo como do idealismo moderno, na medida em que, por um lado, reabilita o mundo empírico e, por outro, o trabalho do matemático que deixa de ser um mero caçador de borboletas no perfeito mundo das Formas, vislumbrando a possibilidade de ser ele mesmo um 'fabricante' de borboletas.[43]

Para Aristóteles, a matemática se ocupa do estudo das propriedades que podem ser *abstraídas* dos objetos do mundo físico e, como ciência demonstrativa, baseia-se em princípios fundamentais, de modo que uma ciência pode pressupor outra, estar subordinada a outra, por exemplo, a ótica, que na Antiguidade era parte da matemática, estaria subordinada à geometria. Nesse sentido existe uma hierarquia das ciências, que é de ordem lógica. Para Aristóteles e seguidores, a matemática podia ser tratada como *inteligível* e *sensível*. No primeiro grupo estavam a aritmética e a geometria, enquanto que no segundo, encontravam-se a mecânica, a astronomia, a geodésia, a ótica, a canônica (música) e a logística.

2.1.2 O período da álgebra

O segundo período no desenvolvimento do pensamento matemático se pode caracterizar a partir do século XVII, com o desenvolvimento da

---

[42] LAWOR, Robert. *Geometria Sagrada*. Madrid (Espanha): Edições del Prado, 1996, p. 106.

álgebra e o início da tomada de consciência da contribuição do próprio sujeito para a matemática. Muito embora os árabes já tivessem alcançado alguns avanços no desenvolvimento do pensamento algébrico, é partir de Viète e Descartes que tais evoluções mais de definem e destacam, no ocidente.

François Viète (1540-1603), membro do parlamento da Bretanha e do conselho do rei, tendo servido na corte de Henrique III e na de Henrique IV, não era um matemático por vocação. Foi ao servir Henrique IV que Viète se destacou como exímio decifrador de códigos secretos espanhóis. Consta que os espanhóis teriam levantado suspeitas de ligações de Viète com forças demoníacas, tal era sua capacidade de decifração das mensagens mais intrincadas. E apesar de dedicar à matemática apenas suas horas de lazer, Viète produziu inúmeras contribuições para a aritmética, trigonometria, geometria e álgebra. É na álgebra que se pode encontrar suas contribuições mais significativas, pois é a partir de seus trabalhos que se constituem os fundamentos da álgebra moderna.

É por meio de trabalhos de Viète que a matemática alcança a transição do conceito de *arithmos* para o conceito de *símbolos*, sobre os quais se construirá a álgebra, considerada como disciplina independente, o que esse estudioso alcança através de uma síntese entre a *análise geométrica* de Pappus e os *métodos aritméticos* de Diofanto.

Devemos observar que muito embora os conceitos de *transformação* e de *invariante* ainda não estivessem *tematizados* na época de Viète, eles desempenharam um papel fundamental em seus trabalhos, na medida em que é graças a eles que se torna possível a passagem do conceito

---

[43] MACHADO. *Matemática e realidade,* p. 22.

de *símbolo*, utilizado até então para *representar de um modo geral um número concreto*, ao conceito de *símbolo geral* enquanto *forma representando um número qualquer*[44].

Por seu turno René Descartes (1596-1650) vai dar uma inestimável contribuição com a produção de *La géometrie* um dos três apêndices[45] do *Discours de la méthode* onde ele busca dar exemplos de seu método filosófico geral. *La géometrie* contém os fundamentos da área que irá se constituir como a Geometria Analítica, cujo escopo é a possibilidade de fazer o estudo de entes geométricos (pontos, curvas, superfícies) através de suas representações algébricas e como tal permitirá: (1) por meio de processos algébricos libertar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Outro expoente, definidor do início do segundo período foi Isaac Newton (1642-1727) cuja obra que se centraliza na criação do cálculo infinitesimal (cálculo diferencial e integral) traz como conseqüência a possibilidade da generalização ao infinito das operações até então limitadas em dimensões finitas. A possibilidade de construir modelos matemáticos representativos da realidade imediata e, em paralelo, a mecanização da mão de obra, com sua conseqüente e paulatina substituição por mecanismos cujo desempenho se mostrava, surpreendentemente mais eficiente e econômico do que o labor humano faz com que a humanidade desemboque em um novo paradigma científico, conhecido em termos gerais como *mecanicismo*.

Mas, apesar de reconhecer a profunda evolução que tal período

---

[44] Ver PIAGET et all. *Psicogênese e história das ciências*, 1987, p. 159.

consegue produzir, em termos de possibilidades e aplicações da matemática, os matemáticos dessa época ainda não estavam conscientes das ligações possíveis entre as operações a partir da sua organização em grupos estruturados ou em estruturas, mais propriamente.

2.1.3 O período estrutural

A organização do pensamento matemático em estruturas caracteriza o terceiro período, a partir do séc. XIX, com Evarist Galois (1811-1832) e a Teoria dos Grupos. Galois foi morto aos 21 anos em um duelo na manhã de 30 de maio de 1832. Segundo a história de sua breve vida, Galois passou a noite de 29 para 30 de maio escrevendo febrilmente, como se seus minutos estivessem contados, como efetivamente estavam. Os escritos, daquela noite, apresentam estudos sobre as condições de resolução das equações algébricas de qualquer grau, por meio de radicais. Segundo sua própria expressão, fez "a análise da análise matemática", em outras palavras, "substituiu os cálculos pelas idéias". É a partir das idéias apresentadas por esse pensador que se estabelecem generalizações em todas as áreas da matemática com o surgimento do conceito de estruturas matemáticas. É em idéias de Galois que Piaget se inspira ao propor a estrutura *agrupamento* como modelo descritivo do pensamento infantil.

Ao tempo em que Piaget desenvolvia seus primeiros estudos sobre o pensamento da criança, Poincaré (1854-1912) propunha o *grupo dos deslocamentos* como a estrutura mais primitiva do pensamento, Piaget vai

[45] Os outros dois apêndices eram *La dioptrique*, contendo a primeira publicação da lei da refração e *Les météores* que continha a primeira explicação satisfatória do fenômeno conhecido como *arco-íris.* BOYER. *História da matemática*, 1974, p. 247.

demonstrar que para alcançar tal estrutura a criança já deveria ter construído outra estrutura mais fundamental o *agrupamento*.

Apenas para encerrar este rápido percurso histórico e fazendo um resumo deste rápido passeio histórico e usando as palavras de Piaget

> Considero esses três estágios muito interessantes. Todos são criativos, mas no primeiro a ignorância do papel do próprio matemático na criação da matemática representou a sua esterilização. O segundo estágio revelou o papel do sujeito nas operações, e o terceiro colocou as operações em estruturas. Em cada momento o progresso foi um progresso em reflexão, isto é, uma *abstração reflexionante*[46] dos avanços feitos no estágio anterior[47].

2.2 Sobre as estruturas matemáticas fundamentais

Para tratarmos do agrupamento, conforme a proposta da epistemologia genética, vamos considerar inicialmente as estruturas algébricas fundamentais da matemática contemporânea, para o que necessitamos de alguns símbolos cujos significados, sempre que necessário, serão acrescentados no texto.

E :	conjunto;
x, y, z ...	elementos de **E**;
$\varnothing$:	conjunto vazio;
$\in$:	relação de pertinência entre elemento e conjunto;
$\forall$:	para todo ou qualquer que seja (referindo-se a um elemento de um conjunto).

[46] Adotei a denominação abstração reflexionante (e não reflexiva como traduzido), de acordo com a tradução de Fernando Becker, da obra: PIAGET. *Abstração Reflexionante*, 1995.
[47] PIAGET. Criatividade. In: VASCONCELLOS (org.). *Criatividade*, 2002, p. 19.

Inicialmente consideremos um conjunto **E** $\neq \emptyset$, alguns elementos de **E**, e definamos nesse conjunto a operação ✶ como segue:

$$\begin{aligned} \star : \mathbf{E} \times \mathbf{E} &\longrightarrow \mathbf{E} \\ (x, y) &\longmapsto x \star y = z \end{aligned}$$

A operação ✶ (ou lei de composição interna) quando aplicada a dois elementos (quaisquer) do conjunto **E**, gera um terceiro elemento também pertencente a **E**.

2.2.1 Grupóide

Seja **E**, conjunto não vazio, para o qual está definida a operação ✶. Neste caso, a operação ✶ dota o conjunto **E** de uma estrutura matemática conhecida como **grupóide**, e se escreve: [**E**, ✶] é um grupóide.

Por exemplo,

> O conjunto N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }, dos números naturais, munido da operação de adição, +, tem a estrutura de grupóide, pois
> $\forall a \in N, \forall b \in N \Rightarrow \quad a + b \in N$.

É fácil verificar que a operação de adição aplicada ao conjunto N, de números naturais dota-o de uma estrutura de grupóide, portanto, indicamos que [N, +] é um **grupóide aditivo**.

2.2.2 Semigrupo

Seja o conjunto **E** $\neq \emptyset$ e considere alguns elementos x, y, z $\in$ E. A operação ✶ será **associativa** em **E** sempre que ocorrer a igualdade:

$$x \ast (y \ast z) = (x \ast y) \ast z$$

Se, sobre o conjunto **E** se definiu uma operação $\ast$ associativa, dizemos que o grupóide [E, $\ast$] está dotado da estrutura de **semigrupo**.

Exemplo,

O grupóide aditivo dos números naturais, [N, +], é um semigrupo, pois $\forall$a, b, c $\in$ N temos: a + (b + c) = (a + b) + c.

Definição: dado um conjunto **E** $\neq \varnothing$ e uma operação $\ast$, definida em **E** chama-se **elemento neutro**, ao elemento e $\in$ E, tal que

$$e \ast x = x \ast e = x \qquad \forall x \in E.$$

2.2.3 Monóide

Denomina-se **monóide** a todo semigrupo cuja operação $\ast$ admite elemento neutro.

Um monóide é representado como segue: [**E,** $\ast$, e].

Exemplos,

1. O conjunto [N, +, 0], dos números naturais, acrescido do zero e munido da operação de adição tem estrutura de monóide, pois a + 0 = 0 + a = a, $\forall$a $\in$ N.
2. O conjunto Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}, dos números inteiros, munido da operação de adição, [Z, +, 0] tem estrutura de monóide.

Definição: Em um monóide [E, $\ast$], diz-se que o elemento x $\in$ E é **simetrizável**, se existir x' $\in$ E, tal que

$$x \ast x' = x' \ast x = e$$

2.2.4 Grupo

Denomina-se **grupo** a todo monóide simetrizável. Dito de outra forma um conjunto **E**, não vazio para o qual está definida uma lei de composição interna, $\ast$, que tenha elemento neutro e cujos elementos sejam simetrizáveis é um grupo.

Um grupo pode ser representado como [**E**, $\ast$, =], onde **E** é um conjunto não-vazio, '$\ast$' uma operação em E, '=' *uma relação de equivalência*[48] e tal que, $\forall$ x, y, z $\in$ E:

(G1) $x \ast (y \ast z) = (x \ast y) \ast z$

(G2) $\exists\, e \in E$, tal que $e \ast x = x = x \ast e$

(G3) $\exists\, x' \in E$, tal que $x' \ast x = e = x \ast x'$

Se, além disso:

(G4) $x \ast y = y \ast x$

diremos que o grupo é **comutativo** ou **abeliano**[49].

Por exemplo,

> [Z, +] tem estrutura de grupo (aditivo), pois $\forall a, b, c \in Z$, temos:
>
> $a + b \in Z$
>
> $a + (b + c) = (a + b) + c$
>
> $\exists\, 0 \in Z$, tal que $\forall\, a \in Z$, tem-se $a + 0 = 0 + a = a$
>
> $\forall\, a \in Z, \exists\, (- a) \in Z$, tal que tem-se $a + (- a) = (- a) + a = a - a = 0$.

[48] É toda relação simétrica, reflexiva e transitiva.

[49] Homenagem ao matemático Niels-Henrik Abel (1802 - 1829).

A propriedade mais importante de um grupo é a existência de um elemento inverso, x', associado a qualquer elemento, x, de E, assim como a definição da operação inversa. Por seu intermédio, encontra-se garantida a possibilidade de um regresso ao ponto de partida, com uma certa coerência interna. Cumpre observar que, psicologicamente, trata-se de bastante mais do que da certeza de poder *apagar* os erros. Se construímos z a partir de x e de y, podemos sempre reencontrar x a partir de z e de y, e y a partir de z e de x:

$$x \ast y = z \Rightarrow \quad x' \ast z = y \qquad \text{e} \quad z \ast y' = x$$

Para clarificar o que estamos dizendo, observe o exemplo a seguir com o grupo abeliano [Z, +].

Por exemplo, vamos efetuar a soma: 13 + 51.

13 + 51 = 64

É possível retornar ao número 13?

Sim, pois sabemos que -51 $\in$ Z e desta forma, podemos calcular:

13 + 51 + (-51) = 64 + (-51) = 64 – 51 = 13

De forma semelhante, é possível retornar ao número 51?

Sim, pois também sabemos que -13 $\in$ Z e também podemos calcular:

(-13) + 13 + 51 = (- 13) + 64 = -13 + 64 = 51

2.2.5 Reticulado

Um conjunto **E** não vazio, para o qual estão definidas duas operações $\oplus$ e $\otimes$ é um **reticulado**, e se escreve [**E**, $\oplus$, $\otimes$], se e somente se, para quaisquer elementos x, y, z pertencentes ao conjunto **E**, valem as propriedades:

(R1) $x \oplus y = y \oplus x$ — comutativa em relação à operação $\oplus$

(R2) $x \otimes y = y \otimes x$ — comutativa em relação à operação $\otimes$

(R3)	$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$	associativa em relação à operação $\oplus$
(R4)	$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$	associativa em relação à operação $\otimes$
(R5)	$x \oplus x = x$	idempotente em relação à operação $\oplus$
(R6)	$x \otimes x = x$	idempotente em relação à operação $\otimes$
(R7)	$x \oplus (x \otimes y) = x$	distributiva da operação $\oplus$ em relação à $\otimes$
(R8)	$x \otimes (x \oplus y) = x$	distributiva da operação $\otimes$ em relação à $\oplus$

Em um reticulado existem elementos importantes, denominados supremo (mínimo comum majorante) e ínfimo (máximo comum minorante).

Dizemos que sup é o supremo de x e y, e se escreve, sup (x, y), se:

i) $x \leq \sup(x, y)$ $\quad y \leq \sup(x, y)$

ii) $x \leq \sup'(x, y)$ $\quad y \leq \sup'(x, y)$ $\quad \rightarrow \quad \sup(x, y) \leq \sup'(x, y)$

Dizemos que inf é o ínfimo de x e y, e se escreve, inf (x, y), se:

i) $\inf(x, y) \leq x$ $\quad \inf(x, y) \leq y$

ii) $\inf'(x, y) \leq x$ $\quad \inf'(x, y) \leq y$ $\quad \rightarrow \quad \inf'(x, y) \leq \inf(x, y)$

2.3 O agrupamento piagetiano

Nos estudos de epistemologia genética Piaget busca desenvolver uma lógica operatória com a finalidade principal de determinar modelos algébricos adequados para dar conta das estruturas cognitivas relativas aos diferentes estágios de desenvolvimento em que a criança se encontre. Piaget, assessorado principalmente pelo lógico Jean-Blaise Grize, propôs duas estruturas principais com o objetivo de explicar logicamente o desenvolvimento da criança.

A primeira estrutura algébrica que denominou **agrupamento,** apesar de não ser identificável com nenhuma outra estrutura matemática conhecida, guarda com elas algumas relações, principalmente com a estrutura de grupo, sendo, no entanto mais fraca do que ela. Mas, "é precisamente esta fraqueza... que a torna interessante do ponto de vista psicológico, porquanto revela as lacunas do pensamento ao nível [concreto] (relativamente aos desenvolvimentos sucessivos)[50]".

A segunda estrutura é o grupo INRC que dá conta do desenvolvimento da criança no nível hipotético-dedutivo. Dos modelos lógicos piagetianos e suas propriedades, trataremos no próximo capítulo.

2.4 A matemática: algumas definições e enfoques

Ao longo da história do desenvolvimento das ciências em geral e do pensamento matemático, em particular, diversas têm sido as tentativas de estabelecer uma definição única e ampla para a matemática. Mas, de um modo geral, tais tentativas têm se mostrado ineficientes seja pela parcialidade do enfoque adotado por seu autor, seja como efeito das cotidianas ampliações e evoluções que a própria matemática acaba alcançando.

Se apenas como exercício especulativo formos aos dicionários, encontraremos diferentes definições, com amplitudes mais ou menos abrangentes, como podemos observar na consideração da matemática como *ciência das formas e grandezas, no que elas têm de calculável e mensurável*[51], como a *ciência que trata das medidas, propriedades e relações de*

---

[50] CERUTTI. *A dança que cria*, 1995, p. 182.
[51] *Dicionário Globo de matemática*. Porto Alegre (RS): Globo, 1972, p. 141.

quantidades e grandezas[52], ou ainda como *ciência que estuda objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles, procedendo por método dedutivo*[53].

Do ponto de vista filosófico a matemática pode ser interpretada a partir de quatro enfoques, considerando-a seja como *ciência da quantidade; ciência das relações, ciência do possível ou ciência das construções possíveis.*

2.4.1 Matemática como ciência da quantidade

Em termos históricos podemos verificar que a primeira concepção de matemática, no ocidente, é como *ciência da quantidade*, pois tal forma de interpreta-la já está implícita nas considerações de Platão sobre a aritmética e a geometria que tendiam sobre tudo a evidenciar a diferença entre as grandezas percebidas pelos sentidos e aquelas ideais, como seriam os objetos matemáticos, nos termos de uma interpretação platônica.

Para Platão *a aritmética tem o efeito de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o numero abstrato* e o matemático:

> constrói sua teoria por meio da abstração, prescindindo de todas as qualidades sensíveis, como o peso e a leveza, a dureza e seu oposto, o calor e o frio, e as outras qualidades opostas e limita-se a considerar somente a quantidade e a continuidade, em uma, duas ou em três dimensões.[54]

Nesta primitiva forma de conceber a matemática, que vai perdurar

---

[52] *Dicionário Brasileiro Mirador*. São Paulo: Melhoramentos, 1980, p. 1110.
[53] *Dicionário Houaiss*, 2001, p. 1867.

ao longo de muitos séculos, já se pode perceber ligações entre a contagem e algum instrumento de contar, como por exemplo os dedos das mãos, para o caso de grandezas discretas e a medição e alguma unidade de medida, como o palmo, o braço, etc., para o caso de grandezas contínuas, como a distância entre dois pontos em um terreno, por exemplo.

2.4.2 Matemática como ciência das relações

Em segundo lugar, a matemática concebida como *ciência das relações* é profundamente associada com a sistematização dos princípios que de-finem a lógica matemática (logicismo). Esta forma de pensar a matemática se pode encontrar na obra de Boole, Russel, Frege, Peirce, Wittgenstein, Poincaré, entre outros. Para Henri Poincaré, por exemplo, *é somente nas relações que deve ser procurada a objetividade e de nada adiantaria procurá-la nos seres considerados como isolados uns dos outros*. Bertrand Russel (1872-1970) compartilhou desta concepção de matemática que via sua identidade ou coincidência com a lógica justamente no âmbito das relações e assim *julgava que o tema comum de suas ciência fosse a forma dos enunciados, definida como aquilo que permanece invariável quando todos os componentes do enunciado são substituídos por outros*. É de sua lavra a afirmação

> A matemática e a lógica, historicamente falando, têm sido consideradas distintas. A matemática achava-se relacionada com as ciên-cias e, a lógica, com o pensamento. Todavia ambas se

[54] PLATÃO. *A República*, livro VII.

> desenvolveram na época atual. A lógica tornou-se mais matemática e a matemática, mais lógica. Em conseqüência é impossível agora, traçar uma linha divisória entre ambas: são, de fato, uma só disciplina.[55]

Também para Ludwig Wittgenstein (1889-1951) a matemática é um método lógico. As proposições da matemática são equações e como tais são pseudoproposições, pois "a proposição da matemática não exprime pensamento. Na vida, a proposição matemática nunca é aquilo de que precisamos, mas utilizamos a proposição matemática apenas para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem à matemática[56]".

Muito embora para Charles Peirce (1839-1914) – o pai da semiótica – poderíamos estabelecer diferenciações entre lógica e matemática, na medida em que esta é ciência que produz conclusões necessárias enquanto a lógica é a ciência do modo pelo qual as conclusões são originadas.

A tese logicista da matemática pode ser apresentada em dois princípios, a saber:

1º – toda idéia matemática pode ser definida por intermédio de conceitos lógicos;

2º – todo enunciado matemático verdadeiro pode ser demonstrado a partir de princípios lógicos, mediante raciocínios puramente lógicos.

Apenas para ilustrar, cito a seguir exemplos de princípios lógicos:

Princípio da identidade [A é A, ou ainda, 'todo ser é igual a si próprio'].

---

55 RUSSEL. *Misticismo e lógica*, 1957.
56 WITTGNSTEIN. *Tractatus lógico-philosophicus*. 2 ed. São Paulo: EDUSP, 1994.

Princípio da não-contradição [dadas duas proposições[57] contraditórias, uma delas é sempre falsa, ou *uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa*].

Princípio do terceiro excluído [de duas proposições contraditórias, uma é verdadeira, ou *toda proposição ou é verdadeira ou é falsa*, isto é, *verifica-se sempre um dentre esses dois casos e nunca um terceiro*].

É bastante conhecida, no meio matemático, a crise da concepção logicista da matemática com o surgimento de contradições (antinomias) que se estabelecem quando em matemática se trabalha com um atributo (*propriedade de um elemento*) como se fosse o próprio elemento. Assim, por exemplo, afirmações como *todos os elementos x têm o atributo X* não apresentam dificuldades para serem tratadas pelo logicismo, no entanto, *todos os atributos X têm o atributo Y* conduzem a dificuldades (contradições) lógicas.

A título de exemplo, podemos lembrar a célebre contradição que se estabelece na proposição: *o barbeiro de uma ilha é definido como o homem que barbeia todos os homens que (eles mesmos) não se barbeiam*. Pode o barbeiro, barbear-se?

2.4.3 Matemática como ciência do possível

Uma terceira forma de conceber a matemática é como *ciência do possível*, entendendo-se possível *tudo o que não implica em contradição*. É própria dos pensadores que compõem a escola formalista, para a qual a matemática não é parte da lógica, nem a pressupõe.

[57] Proposição = conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

Para os formalistas, os conceitos matemáticos não são redutíveis a conceitos lógicos e, além disto, expressivo número das *dificuldades lógicas* surgidas no logicismo nenhuma ligação teriam com a matemática, pois ela como ciência da estruturação dos objetos pode ser construída como um simples cálculo, sem exigir interpretação de qualquer ordem. Para David Hilbert (1862-1943), criador e principal representante da corrente formalista, a matemática é um sistema axiomático, segundo o qual:

1º – todos os conceitos fundamentais, assim como todas as relações fundamentais, são enumerados completamente e todo conceito derivado pode ser decomposto em função dos conceitos e relações primitivas;

2º – os axiomas são enumerados completamente e a partir destes, todo e qualquer enunciado pode ser expresso em função das relações fundamentais.

Segundo a corrente formalista *o matemático pode estudar qualquer sistema simbólico, admitindo-se que o sistema não encerre contradições, ou seja, que no sistema não se possa provar uma proposição e, simultaneamente, sua negação.* Assim concebida a matemática, a liberdade do matemático é completa: *basta provar a consistência de uma teoria matemática, para torna-la inteiramente válida*.

Um exemplo de construção axiomática é a formulada em 1899 por Giuseppe Peano (1858-1932) para a aritmética. Peano, a partir de três conceitos primitivos: zero; número (inteiro não negativo) e a relação '*é sucessor de'* propôs a seguinte axiomatização da aritmética:

P1 Zero é um número.

P2 O sucessor de um número é um número.

P3 Zero não é sucessor de um número.

P4 Dois números cujos sucessores são iguais, são eles próprios iguais.

P5 Se um conjunto **S** de números contém o zero e também o sucessor de todo número de **S**, então todo número está em **S**.

Com David Hilbert (1862-1943) surge a meta-matemática, ou a teoria da demonstração, a partir do que a consistência de uma teoria matemática poderia ser verificada por meio da axiomatização, da formalização e da demonstração.

O fim do paraíso sonhado pelos formalistas ocorre em 1931, a partir da demonstração, desenvolvida por Kurt Gödel (1888-?) de que *toda axiomática consistente é incompleta* ou ainda que é impossível formalizar uma prova de consistência de qualquer axiomática de um sistema **S**, tendo por base tão somente essa mesma axiomática.

De tudo que apresentei neste breve resumo sobre o pensamento matemático, pode-se observar uma diuturna preocupação, daqueles que se envolvem com a matemática, em compreende-la e estabelecer contornos abrangentes para poder domina-la. No entanto, ela como a infinita fonte de rebeldes e fugazes coriscos, mantém-se impune e soberana a toda e qualquer tentativa de domínio, por mais ampla e definitiva que esta se possa apresentar.

2.5 Matemáticos na história

Com relação à construção do pensamento matemático ao longo da história do desenvolvimento do pensamento científico, é interessante destacar que, de um modo geral, o professor de matemática desconhece completamente a história de vida dos matemáticos, assim como pouco ou quase nada sabe sobre o processo evolutivo do próprio pensamento matemático.

O professor, por exemplo, desconhece quão árduo e demorado foi o processo de desenvolvimento de determinados conceitos ou idéias fundamentais para a evolução do pensamento como, por exemplo, a questão da passagem ao limite de grandezas contínuas, a organização dos conjuntos numéricos, etc.

Com relação aos matemáticos que trabalharam na construção do conhecimento matemático, ao longo dos tempos, me parece oportuno apresentar um elenco de tais pensadores, com o propósito de deixar algum registro, mesmo que sumário, de suas obras e épocas em que viveram. Para isto, passo a registrar a seguir, em ordem alfabética, uma pequena relação de matemáticos que influenciaram profundamente o pensamento matemático e o seu desenvolvimento.

ABEL, Niels Henrik Norueguês (1802-1829)	Seu estudo sobre a teoria dos grupos é fundamental. Hermite disse dele: "Deixou aos matemáticos do que se ocupar durante 500 anos".
AL-KHOWARISMI, Mohamed Ibu-Musa Árabe (~800-850)	Matemático e astrônomo, autor de uma obra sobre a arte indu de calcular, onde apresenta o sistema de numeração hindu que passa para o ocidente como sistema de numeração hindu-arábico. É de sua autoria a obra *Aljabr wa'l muqabalah*, precursora da palavra álgebra.
ARQUIMEDES Grego (287-212 a.C.)	Um dos maiores espíritos da Antiguidade. Inventor da primeira lei da hidrostática (os corpos flutuantes), também lhe devemos, em mecânica, a polia móvel e as rodas dentadas. Sua contribuição à matemática foi uma das mais originais de seu tempo. Encontrou as fórmulas que permitiam medir a superfície do cilindro e da esfera.
BABBAGE, Charles Inglês (1792-1871)	Inventor das primeiras máquinas de calcular (calculating engines) utilizadas para a definição de padrões de tecelagem em máquinas para a produção industrial de

	tecidos.
BERNOULLI, Jacques Suíço (1654-1705)	Desenvolveu grande parte do nosso atual cálculo das probabilidades e impôs um método que deveria se tornar o protótipo do cálculo das variações.
BERNOULLI, Jean, Suíço (1667-1748)	Irmão de Jacques, amigo de Leibniz e professor de Euler. Foi quem descobriu a solução do braquistócrono, exemplo magnífico de analogia matemática.
BOOLE, George Inglês (1815–1864)	Seu tratado de 82 páginas sobre a "análise matemática da lógica" está na base da lógica moderna.
BOURBAKI, Nicolas Surgido na França, em 1933	Como pseudônimo de um grupo de matemáticos cujo número não era conhecido e que desejavam conservar o anonimato. Sua obra, em 35 volumes, teve como objetivo reestruturar e unificar a matemática.
CANTOR, Georf Ferdinand Alemão (1845-1918)	Criador da teoria dos conjuntos. Pouco conhecido e severamente criticado, morreu num hospital psiquiátrico. Hilbert disse dele: "Do Paraíso que Cantor nos criou ninguém tem o direito de nos expulsar."
CARTAN, Elie Francês (1869-1951)	É o "arquiteto da matemática moderna". Filho de um ferreiro, contribuiu decisivamente para a classificação da teoria de Lie. A ele devemos a teoria da estrutura dos grupos contínuos e infinitos, a teoria dos espaços generalizados e, enfim, a concepção do espaço de paralelismo absoluto, espaço sem curvatura, que Einstein redescobriu em 1926.
CARTAN, Henri Francês (1904-)	Filho de Elie Cartan. Um dos fundadores do grupo Bourbaki. Animador, de 1940 a 1965, do famoso seminário da Escola Normal.
CAUCHY, Augustin Francês (1789-1857)	Introduziu o rigor na análise matemática. E desse rigor nasceu a matemática moderna. Cauchy foi um dos que lançaram as primeiras bases da teoria dos grupos. Foi engenheiro militar de Napoleão. Aos 53 anos, aprendeu o hebraico a fim de estudar o sistema métrico bíblico. Autor de 789 publicações.
CAYLEY, Arthur Inglês (1821-1895)	Iniciador dos estudos de Geometria Analítica em espaços n-dimensionais, usando determinantes como base de calculo.
COHEN, Paul Americano (1934-)	Considerado atualmente o maior matemático dos EUA. Membro da Mathematics Society. Autor de brilhantes trabalhos sobre a análise harmônica, é um continuador das idéias de Cantor.
DE MORGAN, Augustus Indú (1806-1871)	Autor da lei lógica da dualidade: para toda proposição envolvendo adição e multiplicação lógicas, existe uma proposição correspondente em que as palavras adição e multiplicação são permutadas.
DEDEKIND, Julius	Foi o criador da noção moderna de número e edificou a

Alemão (1831-1916)	teoria dos conjuntos.
DESCARTES, René Francês (1596-1650)	Filósofo e físico, inventou a geometria analítica, em colaboração com Fermat. Contribuiu para melhorar a álgebra, o método dos coeficientes indeterminados e a regra dos sinais. Seu teorema sobre os poliedros antecipou o de Euler.
DIEUDONNÉ, Jean Francês (Nascido em 1906)	Um dos fundadores do grupo Bourbaki e deão da Faculdade de Ciências de Nice. Autor de trabalhos sobre topologia, espaços vetoriais topológicos, grupos clássicos, geometria formal e história da matemática. Autor do tratado sobre 'os elementos de geometria algébrica', em colaboração com Alexander Grothendieck.
EUCLIDES Grego (300 aC.)	Fundou uma escola em Alexandria, sob o reinado de Ptolomeu I. A grande obra de Euclides se intitula **Os Elementos** e compreende 13 livros, contendo seu famoso postulado. É a primeira obra axiomática escrita no mundo.
EULER, Leonhard Suíço (1707-1783)	Foi o mais prolífico matemático da história: 885 obras, das quais poderiam ser constituídos 80 grossos livros. Publicou dois trabalhos fundamentais de análise matemática: introdução à análise dos infinitamente pequenos e as instituições do cálculo diferencial. Várias gerações de matemáticos seguiram o conselho de Laplace: 'Leiam Euler, o mestre de todos nós.'
ERDÖS, Paul Húngaro (1913-1996)	Autor de 1475 artigos científicos, muitos deles monumentais e todos eles substanciais. Segundo uma afirmação sua: 'um matemático é uma máquina de transforma café em teoremas'.
FERMAT, Pierre-Simon de Francês (1601-1665)	Filho de um comerciante de couros de Toulouse, contemporâneo de Descartes. Alto funcionário real, tinha um passatempo favorito: a matemática pura. A ele devemos a criação da teoria dos números e do cálculo das probabilidades.
FIBONACCI, Leonardo Italiano (1170-1240)	Também conhecido como Leonardo de Pisa, foi o primeiro grande matemático da Europa cristã medieval. Autor do Líber Abacci (livro do ábaco, 1202). Esse tratado, em aritmética e álgebra elementar, introduziu o sistema hindu-árabe moderno de números usando dez símbolos.
GALILEU, Galilei Italiano (1564-1642)	É o primeiro pesquisador a utilizar a matemática como linguagem para a ciência. É de sua autoria os primeiros estudos sobre a queda dos corpos provando, ao contrário da teoria aristotélica, que fossem leves ou pesados, levavam precisamente o mesmo tempo para chegar ao chão.

GALOIS, Evariste Francês (1811-1832)	Morto aos 20 anos num duelo, legou a seus sucessores o próprio espírito da matemática moderna. Sua concepção do “grupo de operações” foi a grande inspiradora da teoria atual das funções algébricas
GAUSS, Carl Friedrich Alemão (1777-1855)	O “Príncipe dos matemáticos”. Dotado de prodigiosa memória, que lhe permitia resolver mentalmente os cálculos mais complexos, dispensando as tábuas de logaritmos. Seu tratado sobre a teoria dos números foi considerado de primeira ordem. Foi igualmente o primeiro a descobrir a geometria não-euclidiana hiperbólica.
GODEL, Kurt Austríaco (1906-)	Especialista em lógica matemática, vive nos Estados Unidos. Doutor pela Universidade de Harvard, conquistou em 1952 o Prêmio Einstein. Um dos maiores lógicos de todos os tempos.
GROTHENDIECK, Alexander (Nascido em 1928, à margem do Báltico)	Apátrida, vive na França, onde é reconhecido como um dos gênios do nosso século. Especialista na teoria dos espaços vetoriais topológicos e dos espaços nucleares, ele se consagra desde 1957 à geometria algébrica. Conquistou a Medalha Field em 1966.
GUELFAN, Israel Moiseievitch Russo (1913-)	É um dos mais eminentes representantes soviéticos da análise funcional. É um dos criadores da teoria das distribuições. Prêmio Stalin de 1951.
HAMILTON, William Rowan Irlandês (1805-1865)	É o maior sábio de seu país. Concebeu um método geral que permite a substituição dos longos cálculos exigidos pela análise. Muito dotado para línguas, aos 13 anos já falava 13 idiomas.
HENSEL, Kurt Russo (1861-1941)	Criador dos números *p-adic*, uma teoria algébrica que se demonstrou importante em aplicações matemáticas mais recentes. Os números p-adic podem ser considerados como uma conclusão dos números racionais, de um modo diferente da conclusão habitual que conduz aos números reais.
HILBERT, David Alemão (1862-1943)	Professor em Gottingen. Foi um dos primeiros grandes matemáticos do século XIX. Um dos fundadores do método axiomático moderno e da lógica matemática.
KHINTCHIN, Aleksandr Yakovlevitch Russo (1894-1959)	Um dos criadores da escola soviética da teoria das probabilidades, em que obteve notáveis resultados. Laureado com o Prêmio Stalin de 1941.
KOLMOGOROV, Andrei Nicolaevitch Russo (1903-)	Deão da Faculdade de Mecânica e Matemática da Universidade de Moscou desde 1931. É o fundador da teoria axiomática do cálculo das probabilidades.
KRONECKER, Léopold Alemão (1823-1891)	Contribuiu largamente para o desenvolvimento da teoria dos números algébricos. Para ele, os números inteiros

	eram deuses e seu grande desejo em “aritmetizar” toda a matemática.
LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm Alemão (1646-1716)	Geógrafo, filósofo e historiador. Leibniz aperfeiçoou o cálculo diferencial e publicou o **Novo Método Para a Determinação das Máximas e das Mínimas**, que mantém as principais linhas do cálculo infinitesimal.
LERAY, Jean Francês (1906-)	É o pai da moderna teoria topológica dos feixes. Atualmente dá aulas no Collège de France.
LICHNEROWICZ, André Francês (1915-)	Professor do Collège de France. Em 1967 foi nomeado presidente da comissão encarregada de reformular o ensino da matemática.
LIE, Marius Sophus Norueguês (1824-1899)	Foi o criador da teoria que hoje é ainda chamada “teoria dos grupos Lie”.
LOBATCHEVSKI Russo (1792-1856)	Foi o “Copérnico da geometria”. Ingressou na Universidade aos 14 anos e aos 21 já era professor. A obra de sua vida é a **Pangeometria**. Foi o primeiro a inventar uma geometria não-euclidiana. Não fez mais que redescobrir certos resultados que Gauss deixara de publicar.
NEWTON, Isaac Inglês (1642-1727)	Célebre físico conhecido por sua teoria da gravitação universal, Newton foi também notável matemático. Com a idade de 23 anos, descobriu o cálculo infinitesimal e, mais tarde, escreveu um tratado sobre a quadratura das curvas.
NOETHER, Emmy Alemã (1882-1935)	Filha do matemático Max Noether, era freqüentemente designada apenas pelo nome de família e, por isso, muita gente supunha tratar-se de um homem. Exerceu profunda influência sobre o desenvolvimento da topologia e da álgebra moderna.
PASCAL, Blaise Francês (1623-1662)	Filósofo, escritor e matemático notável. Demonstrou, sozinho aos 12 anos, que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Aos 16 anos, escreveu um ensaio sobre as cônicas que representou decisiva contribuição à geometria descritiva. Aos 18, inventou uma máquina de calcular. Sua obra mais original é a criação, em colaboração com Fermat, da teoria matemática das probabilidades.
PICARD, Émile Francês (1856-1941)	Um dos mais eminentes analistas da primeira metade do século XX. Contribuiu para o desenvolvimento da geometria algébrica.
POINCARÉ, Henri Francês (1854-1912)	Sábio de renome universal, autor de 491 trabalhos sobre todos os domínios da matemática. Foi um dos fundadores da topologia moderna. Fez progredir imensamente a mecânica celeste.
PITÁGORAS	A tradição lhe atribui a paternidade do teorema do

Grego (580 a.C.)	triângulo retângulo e a tábua da multiplicação. O pitagorismo deu origem às pesquisas geométricas, aritméticas, astronômicas e físicas. Seus seguidores demonstraram a incomensurabilidade da diagonal para com o lado do quadrado. Estudaram igualmente as estruturas dos números e das progressões matemáticas, procurando definir os números "perfeitos".
RIEMANN, Bernhard Alemão (1826-1866)	Seus trabalhos sobre as relações entre a teoria das funções e a teoria das superfícies podem ser considerados como as primeiras bases da topologia. Suas obras mais conhecidas são: *As Integrais, A Função Riemann-Voltenna, A Equação P de Riemann e O Teorema Riemann-Roch.*
RUSSEL, Bertrand Inglês (1872-1970)	Co-autor da obra *Principia mathematica* (3 volumes) escrita em parceria com Alfred North Whitehead, a mais elaborada tentativa de desenvolver as noções fundamentais da aritmética a partir de um conjunto preciso de axiomas.
SCHWARTZ, Laurent Francês (1915-)	Professor da Escola Politécnica. Colecionador de borboletas e político, colaborou no grupo Bourbaki. É o inventor da famosa teoria das distribuições, em 1945. Em 1950, recebeu a Medalha Field e, em 1964, o grande prêmio de ciências físicas e matemáticas da Academia das Ciências de Paris.
SERRE, Jean-Pierre Francês (1926-)	Com a idade de 28 anos, recebeu a Medalha Field, que consagra os grandes matemáticos, por seus trabalhos de topologia e de geometria algébrica. Foi o professor que até hoje ingressou mais jovem na congregação do Collège de France. É um dos mais eminentes colaboradores do grupo Bourbaki.
SMALE, Steven Norte Americano (1930-)	Um dos especialistas da geometria algébrica em sua pátria. Recebeu a Medalha Field, no congresso de 1966, em Moscou, ao mesmo tempo que Grothendieck.
TAHAN, Malba Brasileiro (1895-1974)	Pseudônimo de Júlio César de Mello e Souza, autor de dezenas de livros: A sombra do arco-íris; Lendas do deserto; Céu de Allah e o famoso *O homem que calculava* com 42 edições no Brasil. Além de produzir vasta obra literária, Mello e Souza encontrou tempo para escrever vários livros sobre matemática e didática da matemática.
THOM, René Francês (Nascido em 1923)	Professor do Instituto de Altos Estudos Científicos, René Thom é um dos chefes de fila da escola francesa de topologia. Conquistou a Medalha Field em 1958.
WEIERSTRASS, Karl Alemão (1815-1897)	Um dos principais elementos da escola de analistas que empreenderam a revisão sistemática de diversos setores

	da análise matemática: teoria da função das variáveis complexas, funções abelianas, cálculo das variações.
WEIL, André Francês (Nascido em 1906)	É um dos fundadores do grupo Bourbaki, professor na Universidade de Princeton, nos Estados Unidos. Irmão de Simone Weil. Nos numerosos ramos da matemática, sua contribuição é capital, especialmente no campo da teoria dos números.
ZARISKI, Oscar Norte-americano (Nascido em 1889)	Um dos mestres da geometria algébrica. Antes de se radicar nos Estados Unidos, onde se naturalizou, foi professor na Universidade de Kiev e de Roma.

No próximo capítulo, pretendo encetar uma viagem pela teoria piagetiana, buscando nela retratar minha leitura das obras de Piaget, destacando os conceitos e os textos mais significativos em meu estudo. Posteriormente, no capítulo seguinte, estabelecerei diálogos com professores de matemática com o objetivo de ouvir seus argumentos e pareceres sobre o processo de desenvolvimento de uma aula de matemática, enfocando alguns aspectos de meu interesse.

3 DA CONSTRUÇÃO DE MALHAS: SUBSÍDIOS TEÓRICOS

[...] *o conhecimento adquirido por aprendizagem não é jamais nem puro registro, nem cópia, mas o resultado de uma organização na qual intervém em graus diversos o sistema total dos esquemas que o sujeito dispõe.*[58]
(Jean Piaget)

3.1 Em busca de um aporte teórico

Como acontece o conhecimento? Como ocorre a passagem de determinado conhecimento para outro de nível mais elaborado? Como o sujeito aprende? Se dermos atenção ao senso comum, inclusive ao que vaga pelos corredores dos ambientes acadêmicos, encontraremos como resposta o entendimento de que o conhecimento é produto da sensação ou da percepção[59]. No entanto, como fruto de uma análise um pouco mais cuidadosa, podemos constatar que nem os sentidos, nem a percepção humana

---

[58] *Aprendizagem e conhecimento*, 1974, p. 69.
[59] BECKER, *Educação e construção do conhecimento*, 2001, p. 45.

possuem elementos suficientes para garantir a formação do conhecimento humano.

Em termos de Epistemologia Genética e nas palavras de Piaget,

> [...] o conhecimento não procede ... nem de um sujeito consciente de si mesmo nem de objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que se lhe imporiam: [mas resulta] de interações que se produzem a meio caminho entre sujeito e objeto, e que dependem, portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em virtude de uma indiferenciação completa e não de trocas entre formas distintas. Por outro lado, e por conseqüência, se não existe no começo nem sujeito, no sentido epistêmico do termo, nem objetos concebidos como tais, nem, sobretudo, instrumentos invariantes de troca, o problema inicial do conhecimento será, portanto, o de construir tais mediadores: partindo da zona de contato entre o próprio corpo e as coisas, eles progredirão então, cada vez mais, nas duas direções complementares do exterior e do interior, e é dessa dupla construção progressiva que depende a elaboração do sujeito e dos objetos.[60]

E ainda mais, o caráter próprio da Epistemologia Genética é buscar as "raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas formas mais elementares, e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive, o pensamento científico.[61]" O próprio desenvolvimento da obra de Piaget, como um verdadeiro reflexo de sua proposta conceitual, demonstra o processo evolutivo que o pesquisador percorreu no sentido de entender como o sujeito constitui seu conhecimento, do que tratarei a seguir.

Jean Piaget demonstra de forma prática, em sua obra, como funciona um processo dialético de análise e síntese teóricas na medida em

---

60 *Epistemologia genética*, 1990, p. 7-8.
61 PIAGET. *Idem*, Ibidem, p. 3.

que, periodicamente, re-significa idéias e conceitos anteriormente apresentados, sempre com um novo enfoque, uma nova abordagem, como se estivesse em um novo e mais complexo patamar teórico, usando elementos retirados de suas reflexões anteriores. Tais re-significações periódicas podem ser consideradas como momentos de reavaliação teórica ou de mudança de patamar teórico. Segundo alguns autores, estudiosos da obra piagetiana, como Montangero *et alii* (1998), Inhelder[62] ou Ferreiro (2001) por exemplo, é possível caracterizar momentos significativos, verdadeiros *divisores de águas* em sua obra, como um todo.

Com o intuito de fazer uma rápida viagem por dentro da obra de Piaget, buscando principalmente destacar aqueles textos mais significativos em minhas leituras, passo a fazer considerações a respeito da *evolução* de sua produção, dividindo-a em ciclos, sem me preocupar em seguir à risca alguma divisão proposta pelos autores anteriormente citados.

3.2 Sobre a organização da obra piagetiana

Poderíamos indicar como primeiro ciclo da produção teórica de Piaget o período em que o autor se envolve com o estudo da mentalidade infantil e a socialização progressiva do pensamento e que abrange os anos 20 e o começo dos anos 30. São deste ciclo as cinco obras: *Le langage et la pensée chez l'enfant* (1923); *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (1924); *La représentation du monde chez l'enfant* (1926); *La causalité physique chez l'enfant* (1927); *Le jugement moral chez l'enfant* (1932).

Este primeiro ciclo pode ser subdividido em dois períodos: o

[62] Prefácio da obra *Psicogênese e história das ciências*, 1987.

primeiro representado pelas duas primeiras obras e que corresponde à época em que Piaget pretendia estudar o pensamento através da linguagem e o segundo período, constituído pelas três últimas no qual Piaget utiliza o método clínico para inquirir as crianças sobre suas idéias a respeito de fenômenos físicos próximos ou remotos como o ar, o vento, a respiração, os astros, o movimento das nuvens, a flutuação dos barcos, as sombras, as máquinas construídas pelo homem, etc. Além disso, questiona também fenômenos biológicos como, por exemplo, o conceito de vida, a origem das árvores, entre outros e alguns fenômenos psicológicos e sociais: a moral, a noção de justiça, os sonhos, o pensamento, etc.

Se pudéssemos caracterizar o primeiro ciclo teórico piagetiano através de conceitos fundamentais, estes seriam o *egocentrismo* e a *cooperação*.[63] Deste primeiro período, a obra que mais forneceu subsídios para meus estudos e revisão de minhas idéias foi *O juízo moral na criança*, sobre a qual farei referência posteriormente.

O segundo ciclo da obra piagetiana, que abrange meados dos anos 30 até meados dos anos 40 é composto principalmente pela trilogia: *La naissance de l'intelligence chez l'enfant* (1936); *La construction du réel chez l'enfant* (1937); *La formation du symbole chez l'enfant* (1945). Estas obras apresentam relatos de observações desenvolvidas com os próprios filhos do autor e é com estes estudos sobre formas da inteligência que precedem a linguagem que o autor fundamenta sua concepção básica de que "o pensamento procede da ação e as estruturas do pensamento expressam apenas

[63] *Piaget ou a inteligência em evolução*, 1998, p. 63.

as características mais gerais da organização das ações.[64]"

Deste ciclo, que de acordo com Montangero *et alii*, pode ser caracterizado pelo conceito *adaptação*, todas as obras citadas foram importantes em meus estudos, principalmente *A formação do símbolo na criança*.

O terceiro ciclo que abrange o final dos anos 30 ao final dos anos 50 constitui o cerne da obra piagetiana no que se refere à organização das categorias físicas e lógico-matemáticas na criança até ao adolescente. São desse período seus estudos sobre as categorias principais do pensamento, como o número: *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941); os invariantes físicos elementares, como a quantidade de substância e peso: *Le développment des quantités physiques chez l'enfant* (1941); as noções de tempo, movimento e velocidade: *Le développment de la notion de temps chez l'enfant* (1946); *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant* (1946); a representação do espaço e as concepções geométricas elementares: *La représentation de l'espace chez l'enfant* (1948); *La géometrie spontanée de l'enfant* (1948); a gênese da idéia de acaso: *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant* (1951); a gênese do pensamento formal: *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent* (1955); as origens da lógica de classes e de relações: *La genèse des structures logiques élémentaires* (1959). São 10 obras cuja importância psicológica é tão evidente e significativa quanto sua significação pedagógica e sua relevância epistemológica.

Como afirma Ferreiro:

---

[64] FERREIRO. *Atualidade de Jean Piaget,* 2001, p. 131.

> Pode-se dizer que esse terceiro ciclo constitui o pôr à prova experimental as categorias kantianas; Piaget responde aos *a priori* invocados por Kant com a prova dos fatos: as categorias imutáveis da razão não são nada mais que produto de uma construção psicogenética; o intemporal (enquanto evidências lógicas necessárias) é um produto da história.[65]

De acordo com Montangero *et alii* este ciclo da obra piagetiana pode ser caracterizado por meio do conceito de *estruturas operatórias*.

O quarto ciclo, constituído por obras que buscam explicar o progresso do conhecimento, pode ser caracterizado pela proposição da Epistemologia Genética que se materializa através da monumental obra: *Introduction à l'epistémologie génétique* (1950), em 3 volumes. É desse período a publicação da coleção de textos, denominada *Estudos de Epistemologia Genética*, com a colaboração de inúmeros cientistas e pesquisadores das mais diversas origens e linhas de pensamento.

Na seqüência passo a fazer referência às leituras e análises que realizei a partir das obras que considero fundamentais para o desenvolvimento de meu trabalho.

3.3 De minhas leituras da obra de Piaget

Adotando a idéia de revisões teóricas periódicas, poderíamos considerar 1977 como o ano em que ocorreu uma das últimas, senão a derradeira e mais significativa revisão teórica da obra piagetiana, quando são lançados os textos *Recherches sur l'abstraction réfléchissante: l'abstraction des relations logico-aritmétiques* e *Recherches sur l'abstraction*

[65] *Atualidade de Jean Piaget*, 2001, p. 132.

réfléchissante: l'abstraction de l'ordre des relations spatiales, traduzidas no Brasil e publicadas em português, em 1995, em um só tomo, sob o título: *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*.[66]

Referindo-se à produção de Piaget, nos anos 70, como o quarto período da obra piagetiana, Montangero *et alii* afirmam que:

> Os textos desse período não têm unidade do ponto de vista das condutas estudadas e não se referem a um modelo dominante compreendendo um pequeno número de conceitos explicativos. O ponto comum da maior parte desses textos é a preocupação de explicar como conhecimentos realmente novos podem aparecer sem serem nem predeterminados no espírito do sujeito nem retirados tais quais do meio. O acento é colocado nos processos de construção de estruturas de preferência às próprias estruturas cognitivas.
>
> À parte essa preocupação, os trabalhos do quarto período caracterizam-se pela multiplicidade dos conceitos explicativos do progresso. Esse é visto como uma equilibração gradual de atividades cognitivas, mas também, como um processo de abstração reflexionante a partir dessas atividades, acompanhada de abstrações empíricas tiradas dos objetos. Piaget não se limita a recorrer a tais conceitos. Ele analisa também a extensão dos conhecimentos em termos de tomada de consciência, de abertura para novos possíveis e de generalização.
>
> De modo geral, os escritos desse período revelam uma concepção mais claramente interaciononista e dialética [...] ainda que esses dois aspectos tenham sempre feito parte do ponto de vista piagetiano. O retorno à inspiração biológica tem como conseqüência uma certa colocação em relevo da dupla direção da interação cognitiva: a que vai do sujeito ao objeto de conhecimento e os efeitos da acomodação devido ao meio. As constatações que o

---

[66] Tradução de Fernando Becker e Petronilha da Silva.

> sujeito pode fazer na realidade às vezes provocam perturbações cognitivas que ativam o mecanismo de equilibração majorante. Uma tal dialética pode ter lugar no interior mesmo do espírito do sujeito, entre diversos domínios ou subsistemas de conhecimento[67].

Penso que ao propor a teoria da abstração reflexionante Piaget organiza uma nova síntese de suas propostas teóricas anteriores integrando, então, as teorias da adaptação, da equilibração e da generalização.

A teoria da adaptação, centrada em torno de um conceito que Piaget busca na biologia, é desenvolvida muito cedo, surgindo nos primeiros trabalhos do autor e visa explicar como ocorre o progresso (evolução) e o funcionamento cognitivos do ser humano, enfatizando as relações profundas entre os planos biológico e psicológico. A adaptação, de estrito caráter ativo, é um processo dinâmico que se estabelece a partir de dois mecanismos constituintes: a assimilação e a acomodação. Por outro lado devemos registrar que, para Piaget, a função de adaptação é inseparável da função de organização.

Mais tarde, ao desenvolver a teoria da equilibração, ficam evidentes os liames existentes entre adaptação e equilibração, na medida em que "a equilibração resulta de duas tendências fundamentais de todo sistema cognitivo [...] a de se alimentar (assimilação) e a de modificar-se para se acomodar aos elementos assimilados (acomodação). Segue-se um estabelecimento de equilíbrio progressivo entre a tendência assimiladora e a tendência acomodadora[68]."

Finalmente, a teoria da generalização, surge como um *contra-ponto* dialético à teoria da abstração reflexionante. Ao tratar da generalização, o

---

[67] *Piaget ou a Inteligência em Evolução*, 1998, p. 68-69.

autor evidencia a existência de duas formas principais, a saber, a generalização indutiva e a generalização construtiva.

É indutiva toda generalização que o sujeito alcança a partir dos observáveis, isto é, como produto de ações desenvolvidas sobre os objetos propriamente ditos. Uma generalização indutiva possibilita ao sujeito: a verificação da validade das relações observadas; o estabelecimento de seu grau de generalidade assim como a fazer ou organizar previsões ulteriores. Por outro lado, são construtivas as generalizações que se apóiam ou ocorrem a partir de operações executadas pelo sujeito ou dos resultados de tais operações. Generalizações construtivas são, simultaneamente, de natureza compreensiva e extensiva possibilitando que sejam produzidas novas formas e até mesmo novos conteúdos.[69]

O estudo que passo a desenvolver na seqüência deste texto, está dividido em dois enfoques principais. Em primeiro lugar desenvolvo uma análise da evolução da proposta piagetiana do ponto de vista funcional, indo da teoria da adaptação até alcançar a abstração reflexionante; posteriormente enfoco as idéias de Piaget do ponto de vista estrutural, descrevendo os elementos lógicos que o autor propôs para compreender o pensamento da criança até o adolescente.

3.4 A teoria piagetiana do ponto de vista funcional

3.4.1 A teoria da adaptação e a função de organização

---

[68] MONTANGERO et alii. *Piaget ou a Inteligência em Evolução*, 1998, p. 156.
[69] PIAGET. *Recherches sur la généralisation*, 1978.

Para Piaget, a inteligência não nasce com o surgimento da linguagem organizada, mas é fruto de um processo de desenvolvimento que a precede e cujas bases fundamentais para a sua formação e consolidação podem ser encontradas na prévia organização biológica e psicológica do ser, pois para o autor:

> ... a inteligência constitui uma atividade organizadora cujo funcionamento prolonga o da organização biológica e o supera, graças à elaboração de novas estruturas [e] se as sucessivas estruturas devidas à atividade intelectual diferem qualitativamente entre elas, nunca deixam de obedecer às mesmas leis funcionais.[70]

Isto posto, com Piaget podemos afirmar que "a inteligência é uma adaptação", ou ainda, uma organização cuja função "consiste em estruturar o universo tal como o organismo estrutura o meio imediato[71]."

De um ponto de vista inteiramente formal, o processo de adaptação e seus componentes pode ser apresentado, nas palavras do autor, como segue:

> O organismo é um ciclo de processos físico-químicos e cinéticos que, em relação constante com o meio, engendram-se mutuamente. Sejam *a*, *b*, *c* etc. os elementos dessa totalidade organizada e *x*, *y*, *z* etc. os elementos correspondentes do meio ambiente. O esquema da organização é, pois, o seguinte:
>
> 1) $a + x \rightarrow b$;
> 2) $b + y \rightarrow c$;
> 3) $c + z \rightarrow a$ etc.
>
> Os processos 1), 2), etc. tanto podem consistir em reações químicas (quando o organismo ingere substâncias *x* que ele transformará em substâncias *b* que fazem parte da sua estrutura), como em

---

[70] PIAGET. *Nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 379.
[71] *Idem.* Ibidem, p. 15.

> transformações físicas quaisquer ou, enfim, de um modo particular, em comportamentos sensório-motores (quando um ciclo de movimentos corporais *a* combinados com os movimentos exteriores *x* chega a um resultado *b* que participa igualmente no ciclo de organização). A relação que une os elementos organizados *a*, *b*, *c* etc. aos elementos do meio *x*, *y*, *z* etc. constitui, portanto, uma relação de *assimilação*, quer dizer, o funcionamento do organismo não destrói, mas conserva o ciclo de organização e coordena os dados do meio de modo a incorpora-los neste ciclo. Suponhamos, pois, que se produz no meio uma variação que transforma *x* em *x'*. Ou o organismo não se adapta e há uma ruptura do ciclo, ou há adaptação, o que significa que o ciclo organizado se modificou ao fechar-se sobre si mesmo.
>
> $a + x' \rightarrow b'$;
> $b' + y \rightarrow c$;
> $c + z \rightarrow a$.
>
> Se denominarmos *acomodação* esse resultado das pressões exercidas pelo meio (transformação de *b* em *b'*), poderemos dizer, portanto, que a *adaptação é um equilíbrio entre a assimilação e a acomodação*[72].

Sempre que o organismo se transforma em função do meio, dizemos que há uma adaptação, cujo efeito se manifesta como um incremento do intercâmbio entre o meio e o organismo propriamente dito, ocorrendo de forma a favorecer sua conservação (do organismo). Assim como o organismo adapta-se ao meio, construindo materialmente novas formas, a inteligência prolonga tal criação construindo, mentalmente, as estruturas suscetíveis de se aplicarem às do meio.

Portanto podemos afirmar que inteligência é

---

[72] PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 15-16.

> [...] *assimilação* na medida em que incorpora nos seus quadros todo e qualquer dado da experiência. Quer se trate do pensamento que, graças ao juízo faz ingressar o novo no conhecido e reduz assim o universo às suas noções próprias, quer se trate da inteligência sensório-motora que estrutura igualmente as coisas percebidas, integrando-as nos seus esquemas, a adaptação intelectual comporta, em qualquer dos casos, um elemento de assimilação, isto é, de estruturação por incorporação da realidade exterior a formas devidas à atividade do sujeito[73].

Ao passo que vida mental é

> [...] *acomodação* ao meio ambiente. A assimilação nunca pode ser pura, visto que, ao incorporar os novos elementos nos esquemas anteriores, a inteligência modifica incessantemente os últimos para ajustá-los aos novos dados. Mas, inversamente, as coisas nunca são conhecidas em si mesmas, porquanto esse trabalho de acomodação só é possível em função do processo inverso de assimilação[74].

Em resumo, a adaptação é a busca e o estabelecimento de *patamares* de equilíbrios progressivos entre mecanismos assimiladores, que o sujeito dispõe, e as acomodações correspondentes. E, em todos os casos, "a adaptação só se considera realizada quando atinge um sistema estável, isto é, quando existe equilíbrio entre a acomodação e a assimilação[75]."

Portanto, como vimos, a ação do sujeito sobre o meio ocorre através do processo de adaptação, enquanto que internamente, do ponto de vista biológico, o sujeito ao adaptar-se, mantém sua organização.

Como afirma o autor, adaptação e organização

---

73 Idem, ibidem, p. 17.
74 PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 18.
75 *Idem*. Ibidem, p. 18.

> [...] são os dois processos complementares de um mecanismo único, sendo o primeiro aspecto interno do ciclo do qual a adaptação constitui o aspecto exterior. Ora, no tocante à inteligência, tanto sob a sua forma reflexiva como prática, vamos reencontrar esse duplo fenômeno da totalidade funcional e da interdependência entre a organização e a adaptação. No que diz respeito às relações entre as partes e o todo, que definem a organização, é sabido que cada operação intelectual é sempre relativa a todas as outras e que os seus elementos próprios são regidos por essa mesma lei. [...] A 'concordância do pensamento com as coisas' e a 'concordância do pensamento consigo mesmo' exprimem essa dupla invariante funcional da adaptação e da organização. Ora, esse dois aspectos do pensamento são indissociáveis: é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas[76].

Como afirma Piaget "a organização, enquanto funcionamento, não é transmitida hereditariamente, conforme se dá com um caráter qualquer como a forma, a cor, etc. A organização continua e prossegue, por conseguinte, enquanto funcionamento, na qualidade de *condição necessária de toda transmissão e não na qualidade de conteúdo* transmitido[77]."

Em síntese, a organização entendida como a característica fundamental de todos os seres vivos: (i) é uma função de conservação; (ii) possibilita a interação das partes, mantendo a totalidade; (iii) tem seu conteúdo renovado continuamente por reconstrução.

Nas palavras de Piaget:

> 1) O primeiro caráter desta função de organização é [...] ser uma função de conservação. Enquanto um corpo químico se decompõe quando se combina com outro, só se conservando os elementos, o

---

[76] PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 18-9.
[77] PIAGET. *Biologia e conhecimento*, 1973, p. 174.

> caráter distintivo da reação de todo ser organizado é conservar o essencial de sua forma total e continuar a existir como totalidade. Mas esta conservação nada tem a ver com a inércia. Se, a propósito da continuidade desse funcionamento, chegamos a empregar expressões tais como "prossegue", etc., "se prolonga", etc., é somente com relação à constatação do resultado. O fato essencial é, ao contrário, haver de modo contínuo atividades e transformações, e a conservação é pois a de um invariante através das covariações e das transformações. Sem dúvida, este invariante é aproximado e não rigoroso, mas nem por isso deixa de existir a título de tendência fundamental.
>
> 2) A totalidade que se conserva é [...] uma totalidade relacional. Isto significa que em toda organização existem processos parciais, mas essencialmente relativos uns aos outros, isto é, só se manifestando por suas composições. [...] O segundo caráter da função de organização é portanto a interação das partes diferenciadas. Sem partes ou processos parciais diferenciados não haveria organização, mas uma totalidade homogênea que se conservaria por inércia. Sem interação ou solidariedade das composições também não haveria organização, mas simples reunião de elementos atomísticos.
>
> 3) O terceiro carácter da função de organização é o [...] fato fundamental de o conteúdo da organização renovar-se incessantemente pela reconstrução (metabolismo). Isto quer dizer que a conservação do todo é a conservação de uma forma, e não de seu conteúdo, e que os processos em interação admitem uma alimentação energética proveniente de fontes exteriores ao sistema. Noutras palavras [...] a função e a organização consistem em conservar a forma de um sistema de interação através de um fluxo contínuo de transformações, cujo conteúdo se renova incessantemente por trocas com o exterior[78].

A *organização* é indissociável da *adaptação*, definida em termos da *estabilidade* das trocas entre um sistema organizado e o seu ambiente. Na

---

[78] PIAGET. *Biologia e conhecimento*, 1973, p. 174-5.

obra *Biologia e Conhecimento*, Piaget afirma que a função de *organização* se confunde com a própria *vida*, salientando a continuidade do funcionamento organizador em relação à grande variedade das formas estruturais de organização. E mais, a adaptação de um sistema vivo, refere-se à conservação do fecho do ciclo que define a organização do próprio sistema o que, na teoria piagetiana ocorre mediante a conservação de um equilíbrio entre as duas condições funcionais do processo de adaptação: a assimilação e a acomodação.

3.4.2 A teoria da equilibração

A intenção de melhor se situar no meio assim como de melhor atuar sobre tal meio leva o indivíduo, enquanto sujeito de seu fazer, a buscar condições mais favoráveis à sua localização ou atuação nesse meio, o que a teoria piagetiana explica por intermédio da teoria da equilibração[79].

Como afirma Piaget, “a idéia originária é banal”, pois

> por mais diversos que sejam os fins perseguidos pela ação e pelo pensamento (modificar os objetos inanimados, os vivos e a si próprio, ou simplesmente compreendê-los), o sujeito procura evitar a incoerência e tende, pois, sempre na direção de certas formas de equilíbrio, mas sem jamais atingi-las, senão às vezes a título de etapas provisórias; mesmo no que concerne às estruturas lógico-

[79] Esta teoria, de 1975, inspira-se em concepções biológicas e subssume a teoria da adaptação. Uma das novidades reside no fato de que as regulações não são apenas compensações (retornos negativos), mas ainda reforçamentos (retornos positivos) decorrentes, por exemplo, do sentimento de lacuna. Logo a seguir, no entanto, Piaget busca outros tipos de explicação do progresso, e propõe a teoria da abstração reflexionante.

> matemáticas cujo fechamento assegura a estabilidade local, este acabamento se abre, constantemente, sobre novos problemas devidos às operações virtuais que ele torna possível construir sobre os precedentes. A ciência mais elaborada permanece, assim, num vir-a-ser contínuo e, em todos os domínios, o desequilíbrio desempenha papel funcional de primeira importância enquanto necessitando de reequilibrações[80].

As ações do sujeito são então desenvolvidas com o objetivo de que seja alcançada uma melhor situação, um equilíbrio possível, mesmo que instável ou temporário. E prossegue o autor:

> O conceito central que nos parece impor-se na explicação do desenvolvimento cognitivo [...] é, pois, o de um melhoramento das formas de equilíbrio, ou seja, de uma "equilibração majorante". Nosso esforço consistiu em procurar-lhes os mecanismos, constituindo o problema em explicar suas duas dimensões inseparáveis: a compensação das perturbações responsáveis pelo desequilíbrio motivador da pesquisa e a construção das novidades que caracterizam a majoração[81].

Assim entendido o processo de equilibração é resultante de duas tendências fundamentais de todo sistema cognitivo, a saber: a de se alimentar (assimilação) e a de modificar-se para se acomodar aos elementos assimilados (acomodação). De uma forma bastante concisa poderíamos apresentar o modelo de equilibração proposto por Piaget como segue:

> As perturbações cognitivas provocam um desequilíbrio (causa ou desencadeador da equilibração) que engendra regulações (meios pelos quais a equilibração se realiza). As regulações visam a

---

[80] PIAGET. *A equilibração das estruturas cognitivas*, 1976, p. 156.
[81] PIAGET. *A equilibração das estruturas cognitivas*, 1976, p. 156.

> compensar as perturbações, mas, fazendo isso, geram novas construções[82].

Em resumo, a equilibração cumpre o papel de representar a síntese dos aspectos principais na construção do conhecimento: por um lado, as vinculações biológicas, pois se trata de um processo próprio ao ser vivo (que se desenvolve no plano do organismo); por outro lado, a questão da coerência lógica que o sujeito alcança em virtude da superação das contradições.

> A noção de equilibração ilustra e sustenta as perspectivas piagetianas fundamentais, em particular o construtivismo, que atribui um papel estruturante às atividades do sujeito na dialética entre o sujeito e o objeto do conhecimento[83].

3.4.3 A teoria da abstração reflexionante

Entre os matemáticos é comum ouvir-se afirmações que colocam o conceito de abstração no cerne da produção matemática propriamente dita, pois como afirma Paul Dirac, "A matemática é a ferramenta especialmente apropriada para lidar com conceitos abstratos de qualquer tipo. Não há limites a seus poderes, neste campo[84]".

---

[82] MONTANGERO et alii. *Piaget ou a inteligência em evolução,* 1998, p. 156.
[83] *Idem.* Ibidem, p. 158.
[84] DAVIS e HERSCH, *A experiência matemática*, 1985, p. 142.

Nos estudos desenvolvidos por Piaget, a partir da proposta da abstração reflexionante, o autor afirma ser ela "um dos motores do desenvolvimento cognitivo e [...] um dos aspectos dos processos mais gerais da equilibração[85]." Para compreender o conceito de abstração na teoria piagetiana é interessante considerar, primeiramente, o significado de abstração para o autor, pois o conceito clássico de abstração, assim como o entende a filosofia e a psicologia do conhecimento, é qualificado por Piaget como *abstração empírica* (ou simples).

O sentido da abstração em Piaget é sempre de reconstituição da *ação* ou ações anteriormente realizadas. Ação é toda conduta observável, desenvolvida por um sujeito, visando atingir determinado objetivo. O essencial da ação está na modificação imposta ao objeto, isto é, na assimilação deste aos esquemas do sujeito. Portanto, cada ação subentende a existência de esquemas já desenvolvidos pelo sujeito.

Esquema é a estrutura[86] de uma ação, ou ainda, é aquilo que, numa ação, *"*é transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação à seguinte*",* ou dito de outro modo*, "*o que há de comum nas diversas repetições ou aplicações da mesma ação[87]".

Ao refletir sobre suas ações, buscando reconstitui-las ou apropriar-se delas, o sujeito realiza 'abstrações'. Ocorre uma abstração sempre que o sujeito 'debruça-se' sobre uma ação anterior tornando-a objeto de sua atual ação. Na epistemologia genética, como propõe Piaget, o conceito de

---

[85] PIAGET. *A Abstração reflexionante*, 1995, p. 274.
[86] Uma **estrutura** é um sistema de transformações que comporta leis, enquanto sistema e que se conserva ou se enriquece pelo jogo mesmo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou invoquem elementos exteriores (PIAGET in Montangero et alii, 1998, p. 177).
[87] PIAGET. *Biologia e conhecimento*, 1973, p. 16.

'abstração' deve ser analisado considerando dois enfoques distintos, a saber: o das abstrações empíricas (ou simples) e o das abstrações reflexionantes.

$$\text{Abstração} \begin{cases} \text{empírica} \\ \\ \text{reflexionante} \end{cases}$$

É empírica toda abstração que se apóia sobre os objetos físicos, propriamente ditos, ou sobre características observáveis da própria ação, permitindo ao sujeito retirar informações dos objetos, retendo certas propriedades, que lhe interessam, com a exclusão de outras, para as quais o sujeito não dá maior atenção, naquele momento, seja por não ser de seu interesse, seja por não dispor de elementos que o capacitem a apreender o objeto de forma mais completa (faltam-lhe as estruturas de assimilação necessárias).

Fazendo uma abstração empírica, o sujeito colhe suas informações a partir do objeto, por exemplo: – "a gente pega os mesmos, a gente tem a mesma coisa de tijolos[88]", ou a partir das ações que ele executa sobre as características materiais do objeto: – "eu coloco assim, as três de uma só vez[89]". Trata-se, portanto de uma abstração realizada sobre a materialidade da ação, como a que ocorre, por exemplo, num jogo de tabuleiro, em que se pode expressar *concretamente* o raciocínio utilizado ou em um ábaco para a construção do sistema decimal e a compreensão do princípio aditivo na

---

88 PIAGET. *A Abstração reflexionante*, 1995, p. 13 (cf. protocolo de DUC (6;3)).

aprendizagem da operação de adição.

Por seu turno, a abstração reflexionante se desenvolve a partir das coordenações das ações que o sujeito exerce sobre os objetos (e não a partir dos objetos propriamente ditos), ou das operações realizadas pelo sujeito. É um processo de formação de conhecimento de natureza endógena e como tal conduz à construção de novas formas do conhecimento que são alcançadas, seja a partir de saberes (teóricos) que o sujeito já possuía, seja a partir de seus conhecimentos práticos (saber-fazer).

3.4.3.1 A abstração reflexionante

O processo de abstração reflexionante, para fins de análise, pode ser decomposto de acordo com o seguinte esquema:

$$\text{Abstração reflexionante} \quad \begin{cases} \text{Pseudo-empírica} \\ \\ \text{Refletida} \end{cases}$$

É pseudo-empírica toda abstração reflexionante que decorre das ações que o sujeito realiza sobre o objeto. Ao agir sobre o objeto, o sujeito se apropria de propriedades que decorrem das coordenações de suas ações. Por exemplo, é pseudo-empírica a abstração que resulta da ordenação de elementos de um conjunto. Para proceder a uma ordenação – na presença dos elementos de um conjunto –, o sujeito precisa ter construído para si algum procedimento ordenador. A ordenação não é uma propriedade inerente às peças do conjunto, portanto não decorre de abstrações empíricas, mas é

[89] *Idem*. Ibidem, p. 31 (cf. Protocolo de NAT (4;6)).

colocada entre os elementos do conjunto pelo sujeito que procede à ordenação. Por abstrações pseudo-empíricas, o sujeito retira dos observáveis, o que de fato colocou neles previamente, ou seja, apropria-se das relações que ele próprio coloca nos objetos ou entre objetos; apropria-se de qualidades de suas ações.

Por outro lado, é refletida toda abstração reflexionante que decorre de um processo de *tomada de consciência*, ou ainda, que é produto da apropriação dos mecanismos da ação, por parte do sujeito. Nas palavras de Becker:

> Tomar consciência implica ação praticada. Sem ação praticada não é possível tomada de consciência; só com a ação praticada, porém, também não é possível a tomada de consciência. Tomada de consciência é uma ação de segunda potência com relação à coordenação das ações sobre a qual ela se dá – isto significa que ela não pode ocorrer a não ser a partir de ações praticadas previamente, não importa de que nível. [...] Tomada de consciência significa apropriar-se dos mecanismos da própria ação, ou seja, o avanço do sujeito na direção do objeto, a possibilidade de o sujeito avançar no sentido de apreender o mundo, de construir o mundo, de transformar o mundo que está aí, se dá na precisa medida que ele apreende a si mesmo como sujeito, que ele apreende a sua prática, a sua ação[90].

Enquanto a abstração empírica é fruto de ações com ou sobre objetos (observáveis), a abstração refletida, decorre dos não-observáveis, ou seja, das relações que o sujeito acrescenta aos objetos. Por exemplo, ocorre uma abstração refletida quando uma criança se apropria de propriedades comuns à operação de adição e compreende, como resultado de suas ações

---

[90] *Educação e construção do conhecimento*, 2001, p. 40-42.

concretas, que 2 + 5 = 5 + 2 (comutatividade da adição).

A abstração reflexionante é um processo dinâmico que se desenvolve através de sucessivos patamares que, para fins de entendimento, podem ser subdivididos em dois momentos: (i) o reflexionamento; (ii) a reflexão.

Denomina-se reflexionamento à projeção, sobre um plano de conhecimento superior, daquilo que foi alcançado (retido pelo sujeito) em um patamar inferior e reflexão à forma de reconstrução e reorganização no novo plano daquilo que o sujeito conseguiu se apropriar em antigo patamar. É interessante buscarmos elementos para entender o processo reflexionamento-reflexão, que constitui a abstração refletida, característica principal da abstração reflexionante e de importância fundamental no conhecimento matemático; o que faremos a seguir.

3.4.3.2 A abstração refletida

Comecemos a análise desse processo pelo reflexionamento, decompondo-o, para fins de apresentação, em diversos patamares ou graus. Podemos constatar um primeiro patamar de reflexionamento quando o sujeito consegue representar as ações, por ele, desenvolvidas. Por exemplo, ao ordenar fichas coloridas, o sujeito afirma "primeiro uma amarela, depois uma azul, depois ainda uma amarela...[91]". Um segundo patamar de reflexionamento pode ser caracterizado a partir da possibilidade de reconstituição (com ou sem verbalização) da seqüência de ações desenvolvidas, do início ao fim, reunindo, desse modo, as representações em um todo coordenado, como se pode observar na expressão: – "Ah! Consegui,

---

[91] PIAGET. *A Abstração reflexionante*, 1995, p. 151 (cf. protocolo de MAS (6;0)).

1, 2, 3, 4 é a lei das cifras: a gente coloca, cada vez, um a mais[92]".

Um terceiro patamar de reflexionamento se constata quando o sujeito consegue estabelecer comparações, em que a ação total desenvolvida é reconstituída e comparada a outras, análogas ou diferentes, por exemplo: – "A gente tem que sempre colocar um A (azul) entre dois M (amarelos) [...] como o outro a lei é a mesma[93]". Ao estabelecer comparações o sujeito consegue apropriar-se das estruturas, comuns ou não, presentes no processo que está sendo analisado o que leva a um quarto patamar e, depois, a novos patamares de reflexionamento.

Tais patamares são "caracterizados por 'reflexões' sobre as reflexões precedentes", possibilitando que sejam alcançados "vários graus de 'meta-reflexão' ou de pensamento reflexivo[94]".

Em síntese, a abstração reflexionante é

> fonte contínua de novidades, porque atinge novas "reflexões" sobre cada um dos planos sucessivos do "reflexionamento" e estes se engendram sem que sua seqüência seja jamais acabada. Assim, da ação à representação e desta às narrações (resumos), a seguir, às comparações e, enfim, ao pensamento reflexivo [...], há continuidade de engendração, e, sobre cada patamar, a "reflexão" reorganiza um novo sistema, com progresso da coerência e da integração, até a apreensão da "razão" das estruturas elaboradas anteriormente (a qual se apoiará ulteriormente sobre muitas outras razões, mas nos estágios que ultrapassam os nossos, portanto, em níveis meta-reflexivos, cada vez mais elevados)[95].

Na sucessão: reflexionamento, reflexão, "... cada nova reflexão

---

92 *Idem*, Ibidem, p. 155 (cf. protoloco de OLI (8;1)).
93 PIAGET. *A Abstração reflexionante*, 1995, p. 155 (cf. protocolo de GAV (11;4)).
94 *Idem*, Ibidem, p. 275.

supõe a formação de um patamar superior de 'reflexionamento', onde o que permeia no patamar inferior, como instrumento a serviço do pensamento em seu processo, torna-se um objeto de pensamento e é, portanto, tematizado, em lugar de permanecer no estado instrumental ou de operação[96]". Por exemplo, quando uma criança pensa (reflete) sobre a operação de adição, depois de ter realizado sucessivas *continhas*, e diz: - 'quando a gente sabe uma soma, sabe todas', transforma o processo aditivo em um novo objeto de pensamento.

3.4.3.3 A espiral da abstração reflexionante

A abstração reflexionante se desenvolve como um processo em espiral ascendente com raio crescente, com uma alternância ininterrupta de reflexionamentos e reflexões. "Todo reflexionamento de conteúdos (observáveis) supõe a intervenção de uma forma (reflexão), e os conteúdos assim transferidos exigem a construção de novas formas devido à reflexão". De outra maneira poderíamos descrever o processo de abstração reflexionante como uma alternância "conteúdos → formas → conteúdos reelaborados → novas formas, etc., de domínios cada vez mais amplos, sem fim e, sobretudo, sem começo absoluto[97]".

Por meio de reflexionamentos e reflexões vão se formando novos patamares (de conhecimento) que comportam diferenças qualitativas assim como diferenças quantitativas (diferenças de grau); ou seja, por efeito de uma abstração reflexionante, um antigo esquema que o sujeito possui é reorganizado em um novo esquema, por incorporação de novos elementos em seu ciclo, tornando-se aquele um caso particular deste. É o que ocorre, por

---

[95] PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 205.
[96] Idem, ibidem, p. 275.
[97] PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 276-277.

exemplo, quando surge a necessidade da operação de subtração, **n – n’**, (inversa da adição) entre dois números naturais (N)**,** cujo funcionamento é garantido, em um mesmo patamar, enquanto n > n’. Abstraindo-se a subtração de tais situações para aplicá-la às situações n < n’, surge a necessidade da criação dos números negativos e a conseqüente ampliação dos naturais, N, para o conjunto dos números inteiros (Z).

O exemplo anterior nos auxilia a compreender um atributo fundamental da abstração reflexionante, quando consegue depreender formas suficientemente dissociadas dos conteúdos, que é o seguinte: a *compreensão* de uma estrutura torna-se proporcional à *extensão* dos conteúdos que ela permite gerar, (no caso de abstrações empíricas, a proporção é inversa). No exemplo em questão, a ampliação de N, gera a classe de números inteiros, Z, mais rica em extensão do que os inteiros positivos e, além disso, portadora de uma estrutura total, igualmente mais rica em compreensão.[98]

De tudo que vimos, podemos concluir que o processo de abstração reflexionante fornece subsídios para compreendermos como o sujeito, por intermédio de suas ações, consegue elaborar e ampliar seu próprio conhecimento (conteúdo, forma, conteúdo reelaborado reiteradamente).

3.5 A teoria piagetiana do ponto de vista estrutural

No item anterior descrevemos a teoria piagetiana, do ponto de vista funcional, com o intuito de explicar como ocorre o desenvolvimento da inteligência humana e a conseqüente construção do conhecimento por parte do sujeito. A seguir faremos a apresentação da teoria do ponto de vista estrutural, apresentando os elementos da lógica operatória desenvolvida ao longo da Epistemologia Genética e cuja finalidade principal é determinar modelos algébricos adequados para dar conta das estruturas cognitivas relativas aos estágios das operações concretas e das operações formais.

Com relação ao estágio das operações concretas Piaget, assessorado principalmente por Jean-Blaise Grize, propôs uma estrutura algébrica que denominou *agrupamento*. Esta estrutura, apesar de não ser identificável com nenhuma outra estrutura matemática conhecida (das quais trataremos na seqüência), guarda com elas algumas relações, principalmente com a estrutura de grupo, sendo, no entanto mais fraca do que ela. Mas, "é precisamente esta fraqueza [...] que a torna interessante do ponto de vista psicológico, porquanto revela as lacunas do pensamento ao nível considerado [concreto] (relativamente aos desenvolvimentos sucessivos), quer aos seus traços específicos, positivos e normativamente autônomos[99]."

Por outro lado, para o estágio das operações formais, Piaget considera que o modelo adequado é constituído por uma estrutura algébrica que possui simultaneamente as propriedades de um grupo e de um reticulado, o que significa que neste estágio o sujeito desenvolve as condições operatórias que o tornam capaz de utilizar a lógica proposicional.

3.5.1 O agrupamento piagetiano

Formalmente, um agrupamento pode ser descrito como a *quádrupla* [**E**, $\oplus$, $\ominus$, $\leq$], onde **E** é um conjunto finito de elementos, $\oplus$ e $\ominus$ duas leis de

---

[98] Enquanto Z admite uma estrutura de grupo, N é somente um monóide.
[99] CERUTTI, *A dança que cria*, [1995], p. 182.

composição interna (operações binárias) entre tais elementos, e $\leq$ uma relação de ordem.[100]

Observe que a relação $\leq$ pode ser interpretada como a relação de inclusão '$\subset$' no caso em que o agrupamento seja considerado como uma classe (elementos considerados em termos de classificação), ou como a relação 'menor ou igual', se o agrupamento for tratado como uma série (elementos considerados em termos de relação).

3.5.1.1 Propriedades de um agrupamento

Em um agrupamento ocorrem as seguintes propriedades fundamentais:

(1) **Composição**. A operação $\oplus$ é definida entre elementos de **E**, de forma tal que a partir de dois elementos quaisquer x, y $\in$ **E**, a operação $\oplus$ gera um terceiro elemento, x $\oplus$ y, também pertencente a **E**.

$$x, y \in \mathbf{E} \rightarrow x \oplus y \in \mathbf{E}$$

Como o terceiro elemento, x$\oplus$y, também pertence ao conjunto **E**, diz-se que tal conjunto é fechado em relação à operação $\oplus$. É nesse sentido que Piaget alerta para o fato de que o **fechamento** é a principal característica de uma estrutura. E essa propriedade será construída pela criança, o que acontecerá isomorficamente à aquisição das conservações.

Um exemplo de aplicação desse agrupamento se obtém com a classificação de animais domésticos em indivíduos, espécies, gêneros, ordens, etc. Seja, por exemplo, A, a classe dos cães perdigueiros; A' o conjunto das demais classes de cães domésticos; B, a classe de todos os cães domésticos;

---

[100] Relação transitiva, reflexiva e anti-simétrica.

B', a classe dos cães não domésticos; C, a classe de todos os cães (união de B e B'); C', a classe dos demais animais domésticos; etc.

$A \oplus A' = B$ perdigueiros e outros cães são cães domésticos;

$B \oplus B' = C$ cães domésticos e cães do mato são cães; etc.

Devemos observar que a composição $\oplus$ só é possível em alguns casos, a saber: (i) ' x ' seja imediatamente anterior a ' y ' pela relação $\leq$ (ou o inverso); (ii) exista uma seqüência de elementos ' $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ' tais que

$$x \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y \text{ (ou o inverso)}$$

Em outras palavras, isto significa que a operação $\oplus$ só pode se efetuar de modo gradual.

(2) **Associatividade**. A composição, $\oplus$, entre três ou mais elementos de E pode ser realizada por diversos caminhos, sempre se obtendo o mesmo resultado.

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$$

A criança operatório-concreta tem condições de compreender que o resultado de composições, $\oplus$, e decomposições, $\ominus$, de classes não se altera pela seqüência dos passos seguidos nessas operações: Por exemplo:

$\{(B \ominus A' = A) \oplus (C - B' = B)\} \oplus (D - C' = C) =$

$D - C' - B' - A' = A$

$(B \ominus A' = A) \oplus \{(C - B' = B)\} \oplus (D - C' = C)\} =$

(3) **Reversibilidade**. O que significa afirmar que em um agrupamento existe $\ominus$, operação inversa da operação $\oplus$, de forma tal que o resultado de uma

composição de dois (ou mais) elementos pode ser revertido, retornando-se aos elementos originais, através de uma decomposição.

$$A \oplus A' = B \quad \rightarrow \quad A = B \ominus A' \quad \text{ou} \quad A' = B \ominus A$$

Por exemplo, se meu conjunto de materiais escolares é composto por lápis e livros, ao retirar os livros, ficam os lápis ou vice-versa.

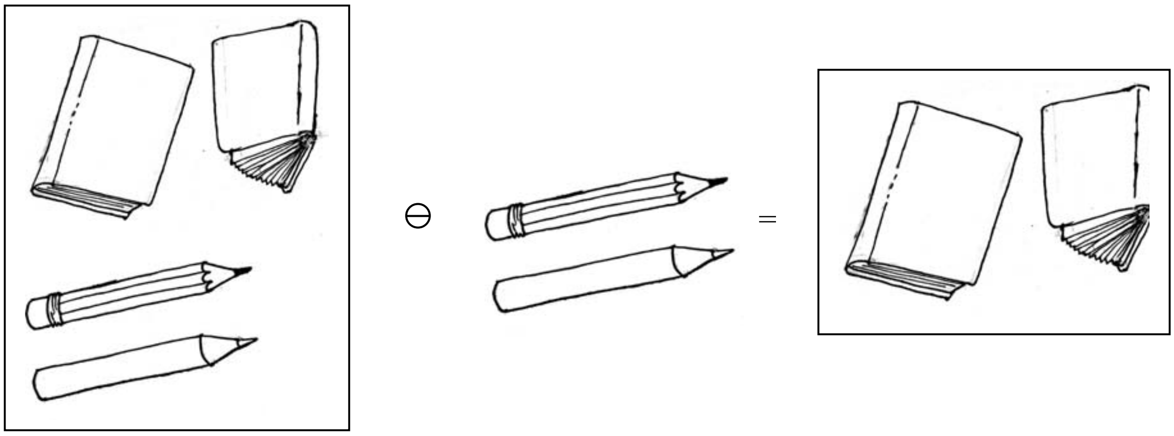


FIG. 15

(4) **Elemento neutro**. Existe um elemento neutro, 0, tal que, qualquer que seja $x \in \mathbf{E}$, temos

$$x \oplus 0 = x = 0 \oplus x$$

É o caso do zero (0) no conjunto dos números naturais, com a operação de adição, por exemplo.

(5) **Idempotência**. A operação $\oplus$ é idempotente, ou seja, qualquer que seja $x \in \mathbf{E}$, tem-se:

$$x \oplus x = x$$

Por exemplo, ao agregar rosas a um conjunto de rosas, continua existindo um conjunto de rosas.

(6) **Mínimo comum majorante**. A operação $\oplus$ é tal que, se $x \leq y$, então $x \oplus y = y$, isto é, para a operação $\oplus$ existe um mínimo comum majorante (sup).

No exemplo dos cães, a reunião de perdigueiros e cães domésticos, tem como mínimo majorante o próprio conjunto de cães domésticos.

De tudo que apresentamos, a estrutura de agrupamento, como propõe Piaget, possui propriedades de um grupo matemático (1; 2; 3 e 4), assim como propriedades de um reticulado (5 e 6). No entanto, o agrupamento não é um grupo porque lhe falta a possibilidade de efetuar a composição entre dois elementos quaisquer para produzir um terceiro, atuando diretamente sobre tais elementos, ou seja, sem recorrer a intermediários, ou ainda em "completa liberdade".

A estrutura de agrupamento é portadora de uma característica importante, a saber: a reversibilidade. Como sabemos, todo *estado de equilíbrio*[101] pode ser reconhecido por uma (certa forma de) *reversibilidade* (= possibilidade, permanente, de retorno ao ponto de partida).

---

[101] Um sistema está em equilíbrio quando é portador de uma estrutura tal que suas operações admitem reversibilidade quer seja por inversão estrita ou negação, quer seja por reciprocidade.

3.5.2 Tipos de agrupamentos

Os agrupamentos que se referem às operações de classificação e de seriação, podem ser encontrados em oito tipos principais, a saber: adição primária de classes; adição secundária de classes; multiplicação biunívoca de classes; multiplicação co-unívoca de classes; adição de relações assimétricas; adição de relações simétricas; multiplicação bi-unívoca de relações; multiplicação co-unívoca de relações. Vejamos as características principais de cada um deles.

3.5.2.1 Agrupamento I: adição primária de classes

Este agrupamento se refere às classificações simples que se caracterizam por reconhecer inclusões hierárquicas e relações de contigüidade. É o modelo lógico da forma como a criança compreende, por exemplo, que a classe *A* dos *carrinhos da Fiat* está incluída na classe *B* dos *carrinhos* que está incluída na classe *C* dos *veículos com rodas*, etc.

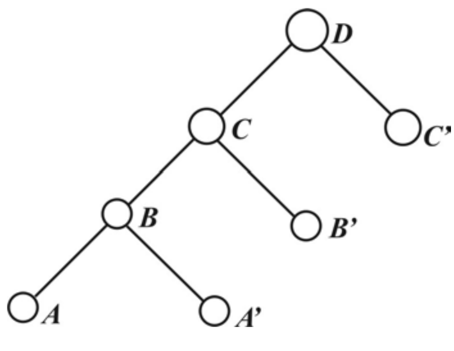


FIG. 16[102]

Conforme Piaget enfatiza,

> [...] o principal interesse teórico deste agrupamento I é o de colocar em evidência a diferença entre a enumeração e a numeração, quer dizer, entre uma seqüência de classes encaixadas $A \subset B \subset C \subset D$ ... e a seqüência dos números inteiros $1 < 2 < 3 < 4$ ... [103]

O fato de estabelecer essa distinção é de extrema importância para esclarecer as limitações da proposta logicista para a matemática que, como sabemos, considerava o número (cardinal) como um subproduto das classes. Sem dúvidas, se reduzirmos as classes elementares A, A', B', ... a classes singulares, como se todas fossem de mesmo nível, verificaríamos que a composição, ⊕, corresponde à adição + 1, e dessa forma, teríamos o quadro:

$0 \oplus A = A$; $A \oplus A' = B$; $B \oplus B' = C$; $C \oplus C' = D$; etc.

$0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4$; etc.

Mas, entre as duas seqüências existem distinções que as propriedades do agrupamento conseguem explicitar:

> 1º O elemento lógico qualificado não pode ser adicionado a ele mesmo, a não ser de modo tautológico: $A \oplus A = A$. [Exemplificando, juntar rosas a um conjunto de rosas, gera o mesmo conjunto de rosas]. Ao contrário, a adição da unidade aritmética é iterável: $1 + 1 = 2$. [Por exemplo, uma rosa mais uma rosa são duas rosas]. Donde a presença das idênticas[104] (sic) especiais no agrupamento aditivo das classes e sua ausência no grupo aditivo dos números inteiros.
>
> 2º As classes elementares A; A'; B'; etc., só são logicamente equivalentes entre elas relativamente às classes primárias que elas encaixam.

---

[102] PIAGET. *Ensaio de lógica operatória*, 1976, p. 89.
[103] PIAGET. *Ensaio de lógica operatória*, 1976, p. 104.
[104] No lugar de idênticas leia-se *identidades*.

> Ao contrário, a operação aritmética +1 exprime uma equivalência generalizada entre todas as classes elementares:
>
> $$A = A' = B' = C = ... = 1$$
>
> 3º As composições do agrupamento só podem se efetuar de modo *contíguo*, quer dizer, relativamente às complementaridades dicotômicas que constituem sua estrutura, enquanto a composição dos números inteiros é indefinidamente móvel e independente dos encaixes. Esta terceira diferença, que implica as duas outras, exprime do modo mais geral a diferença que separa os agrupamentos dos grupos numéricos: os primeiro só se referem às relações de parte ao todo, com exclusão das conexões diretas entre as partes de um mesmo todo.[105]

3.5.2.2 Agrupamento II: adição secundária de classes (vicariância)

Este agrupamento possibilita a decomposição que o agrupamento anterior não permitia, pois na *adição primária de classes*

> ... eu posso ter A + A = A e A + B = B, mas não posso decompor as classes secundárias A', B', C', etc. em seus elementos. Quando se raciocina conforme as vicariâncias, ou seja, as substituições complementares, essa decomposição se torna possível. Assim não tenho só brasileiros e não brasileiros constituindo os sul-americanos, mas posso referir-me aos estrangeiros ao Brasil e aos estrangeiros à Argentina. Deste modo, tenho duas classes complementares que se interpenetram, e que portanto não resultam na formalização A + A = B nem A + B = B.[106]

---

[105] PIAGET. *Ensaio de lógica operatória*, 1976, p. 105.
[106] FRANCO. *Lógica operatória e lógica das significações em adultos do meio rural*, 1999, p. 84-5.

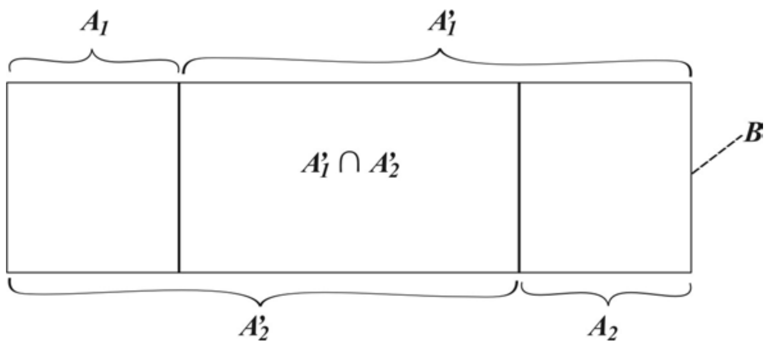


FIG. 17[107]

Por exemplo, vamos considerar uma caixa com peças de madeira entre as quais existem triângulos, quadrados e círculos. A vicariância refere-se à compreensão pela criança de que, a classe dos triângulos mais a classe dos não-triângulos é equivalente à classe dos quadrados mais a classe dos não-quadrados, assim como é equivalente à classe dos círculos mais a classe dos não círculos. Desta forma, a criança (no estágio das operações concretas) é capaz de classificar uma certa coleção de objetos de várias maneiras diferentes. Estas reclassificações resultam em equações vicariantes ou equações de substituições complementares, ou seja, B (a coleção total) = A_1 + A_1' (uma classificação contida em B) = A_2 + A_2' (uma segunda classificação contida em B) = A_3 + A_3', etc.[108]

3.5.2.3 Agrupamento III: multiplicação co-unívoca de classes

Este agrupamento refere-se à possibilidade de a criança compreender uma estrutura com ramificações, isto é, que estabelece correspondências do todo com suas partes do tipo *um a muitos*. É o caso, por

[107] PIAGET. Op. cit., p. 107.

[108] Estudos demonstram que a criança em idade escolar passa por um processo de compreensão crescente das classes secundárias (A' = tudo que está contido em B que não seja A). No entanto, existe entre classes complementares uma relação que lembra o Agrupamento II, mas que requer a compreensão de operações formais. É o caso, por exemplo, *se a classe A é uma subclasse da classe B, então o não-A restante no universo B é maior do que o restante não-B*. FLAVELL. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*, 2001, p. 195-6.

exemplo, da compreensão de um mapa em que cidades de um mesmo estado, a ele estão ligadas; diferentes estados estão ligados a uma nação; diferentes nações a um continente, etc.

Um outro exemplo onde se encontra este tipo de agrupamento é na organização de árvores genealógicas, onde temos as classes de filhos do mesmo pai, de netos do mesmo avô, bisnetos do mesmo bisavô, etc.[109]

Este tipo de agrupamento será de fundamental importância na compreensão de propriedades operatórias da multiplicação, por exemplo, quando da decomposição de cada fator em função da base do sistema (milhar, centena, dezena, unidade).

3.5.2.4 Agrupamento IV: multiplicação bi-unívoca de classes

Este agrupamento refere-se à possibilidade de a criança classificar objetos segundo dois ou mais critérios simultâneos. É o caso de tabelas de dupla entrada, ... n-entradas.

Na figura a seguir, a classe B_1 é constituída pela reunião das duas colunas verticais A_1 e A_1'; a classe C_2 é formada pelas três faixas horizontais superpostas A_2, A_2' e B_2'.

		A_1	A_1'	$A_1 \oplus A_1' = B_1$
	A_2	$A_1\ A_2$	$A_1'\ A_2$	
$A_2 \oplus A_2' \oplus B_2' = C_2$	A_2'	$A_1\ A_2'$	$A_1'\ A_2'$	
	B_2'	$A_1\ B_2'$	$A_1'\ B_2'$	

O agrupamento IV é o mais geral dos agrupamentos de classes, no

[109] Franco. *Lógica operatória e lógica das significações*, 1999, p. 86.

sentido de que cada um dos três agrupamentos anteriores pode ser derivado deste, sem que a recíproca seja verdadeira. Em resumo, "o agrupamento IV marca, ao mesmo tempo, o acabamento da lógica das classes e o ponto de início da lógica das proposições e da lógica dos conjuntos – esta última consistindo numa lógica das classes esvaziada de seu conteúdo qualitativo e admitindo ... uma série de operações novas[110]."

Os modelos de agrupamentos apresentados até aqui mantêm uma característica essencial que se refere à forma da reversibilidade, que se constitui na *negação* ou *inversão*, para os quais a reversibilidade funciona como supressão de elementos (ou de classes).

Na seqüência passamos a tratar dos modelos de agrupamentos que se estruturam a partir de relações (e não mais sobre classificações).

3.5.2.5 Agrupamento V: adição de relações assimétricas

Este agrupamento descreve o encadeamento de relações assimétricas transitivas o que permitirá a estruturação da série, organizada sobre diferenças e não mais sobre semelhanças ou igualdades.

A operação fundamental deste agrupamento é a operação de seriação, ou seja, a disposição de elementos numa série transitiva, assimétrica (por exemplo, $A < B < C < D < E < E$, etc., numa série de bastões de comprimentos crescentes). Crianças que ainda não atingiram o estágio operatório apresentam dificuldades consideráveis para compor séries ordenadas[111]. A explicação para tais dificuldades, segundo Piaget, é encontrada na incapacidade que a criança pré-operacional tem de perceber

---

110 *Ensaio de lógica operatória*, 1976, p. 117.

111 Ver PIAGET e SZEMINSKA. *A gênese do número na criança*, 1981, cap. VI.

cada elemento, em uma série assimétrica, envolvido em duas relações, uma direta (<) e outra inversa (>): o elemento B, para ser inserido entre os elementos A e C, na série, deverá ser percebido, simultaneamente como maior do que A e menor do que C.

Um procedimento comum em crianças que ainda não atingiram o estágio operatório-concreto é concluir que $B < C$, por exemplo, a partir de $A < C$ e $A < B$ (comparando particular com particular). Por não ter ainda capacidade de criar e manipular séries assimétricas, a criança neste estágio, não consegue concluir que $A < C$, a partir de $A < B$ e $B < C$ (transitividade).

3.5.2.6 Agrupamento VI: adição de relações simétricas

Este agrupamento descreve o encadeamento de relações simétricas o que permitirá a estruturação da série, organizada sobre correspondências (e não mais em diferenças, como no caso anterior).

Relações simétricas possuem a relação de simetria: de $A \leftrightarrow B$, segue-se necessariamente que $B \leftrightarrow A$ (a operação inversa neste agrupamento). Crianças pré-operatórias não consideram *irmão de, inimigo de* como relações simétricas. Por exemplo, ela é capaz de afirmar que *x é seu irmão*, mas nega que *x tenha um irmão*.

De posse desse agrupamento, a criança compreende que se A_1 é irmão de A_2, eles têm o mesmo pai (P). Se B_1 e B_2 são irmãos e primos-irmãos de B_3, eles têm o mesmo avô (P).

3.5.2.7 Agrupamento VII: multiplicação co-unívoca de relações

À semelhança do que na multiplicação co-unívoca de classes (agrupamento III), este agrupamento refere-se a correspondências do tipo *um* *a muitos*. Desta forma este agrupamento trata de multiplicar relações assimétricas transitivas.

Piaget e Inhelder[112] apresentaram a 52 sujeitos (crianças na faixa etária de 5;5 a 8;6 anos) 49 desenhos de folhas de árvore recortadas em cartolina, que podem ser ordenadas segundo uma ordem de grandeza crescente (sete tamanhos distintos, de A a G) e segundo suas tonalidades, cada vez mais acentuadas (do amarelo esverdeado até o verde escuro), numeradas de 1 a 7. Cada sujeito pode ordena-las como achar melhor e a seguir é questionado sobre o arranjo que fez, etc.

Crianças operacionais concretas conseguem ordenar esses 49 elementos segundo uma matriz de dupla entrada, como por exemplo:

tonalidade crescente →

tamanho crescente ↓				
	A_1	A_2	A_3	etc.
	B_1	B_2	B_3	etc.
	C_1	C_2	C_3	etc.
	etc.	etc.	etc.	

FIG. 18

Penso ser interessante observar que tarefas como, por exemplo, o transvasamento de líquidos, utilizada em estudos de *conservação* de matéria, podem ser explicadas a partir da *multiplicação de relações*.

Apresenta-se à criança dois recipientes altos e estreitos A e A’, com a mesma quantidade de líquido. A seguir o conteúdo de A’ é vertido num recipiente baixo e largo B. Então se pergunta à criança: - ‘ainda há a mesma

[112] *A gênese das estruturas lógicas elementares*, 1983, cap. X.

quantidade de líquido em A e B?

A solução correta deste problema é facilitada pela capacidade de multiplicar as relações '*menor do que*' e '*mais largo do que*', isto é, *a coluna de líquido em B é mais curta do que em A, mas também (vezes) mais larga* e, portanto, as quantidades são iguais.

$$(A \rightarrow B) \text{ x } (A \uparrow B) = \rightarrow\uparrow B$$

3.5.2.8 Agrupamento VIII: multiplicação bi-unívoca de relações

Expressa a possibilidade de trabalhar ao mesmo tempo com duas séries, buscando a correspondência segundo uma ou duas relações.

Este agrupamento mantém profundas semelhanças com o agrupamento IV das classes – tabelas de dupla entrada – (aqui com relações) e com o agrupamento V (onde a relação era operada com uma única série aditivamente, ao passo que aqui são processadas duas ou mais séries, multiplicativamente).

Por exemplo, sejam A_1; A'_1; B'_1; etc., classes de objetos de pesos crescentes de uma classe à outra (mas de pesos iguais no interior de cada classe). Por outro lado sejam A_2; A'_2; B'_2; etc., classes de objetos de volumes crescentes de uma classe à outra (mas de volumes iguais no interior de cada classe). A criança pode então construir, por meio destas classes, uma tabela de dupla entrada, semelhante à tabela do agrupamento IV, mas com a diferença de que cada interseção A_1A_2; A'_1A_2; $A_1A'_2$; etc., será constituída por uma classe singular.

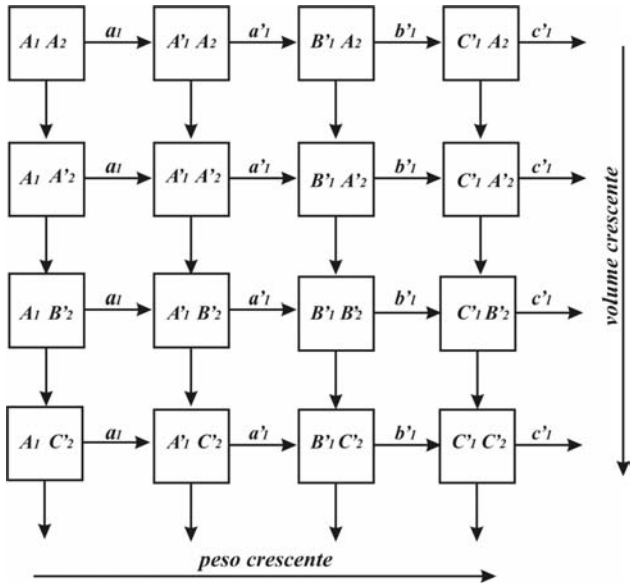


FIG. 19

> O agrupamento VIII reúne, em um só todo, três espécies de operações: a multiplicação de duas seqüências uma pela outra (operação que pode se prolongar com novas seqüências); a adição de novas relações assimétricas segundo cada uma das séries consideradas (duplo ou tríplice encaixe, etc.) e o estabelecimento de correspondência segundo relações simétricas de equivalência multiplicativa (correspondência biunívoca e recíproca).[113]

À medida que vai desenvolvendo estruturas de agrupamento, como as apresentadas acima, a criança vai se tornando apta a construir o conceito de número assim como das operações que envolvem a construção do espaço e a construção do tempo.

3.5.3 As operações formais

Em torno de 11 a 12 anos de idade, a criança alcança o estágio das operações formais, tendo como ponto de equilíbrio a idade de 14 a 15 anos.

Nesse quarto estágio a criança além de raciocinar e de deduzir com o auxílio de objetos manipuláveis (concretos) se torna capaz também de elaborar raciocínios dedutivos, pensando sobre hipóteses ou sobre proposições.

Como afirma Piaget

> [...] o que falta às estruturas concretas de agrupamento é a combinatória intríseca à construção do *conjunto das partes*, ou, o que é a mesma, é a utilização de operações proposicionais (implicação, etc.) ou isomórficas destas últimas, pois as operações interproposicionais repousam sobre a estrutura desse *conjunto de partes*.[114]

Logo que ingressa no caminho da coordenação dos agrupamentos concretos num sistema único (na segunda potência), o pensamento se torna formal porque se refere às *combinações possíveis* e não mais aos objetos em si mesmos.

Por mais *tateantes* e incompletas que sejam as primeiras tentativas do pensamento no início do estágio operatório-formal, ele se orienta para uma nova forma de equilíbrio caracterizado por uma estrutura de conjunto que deriva ao mesmo tempo do grupo e do reticulado.

Uma atitude característica deste estágio é o sujeito, ao ver-se diante de uma associação de dois fatores, por exemplo, afastar um deles para estudar o outro, sem interferências perturbadoras e reciprocamente. Portanto, a necessidade de excluir um fator para fazer variar o outro, nasce de uma inversão de sentido na construção das correspondências, tendendo a abstrair ou a dissociar, em vez de multiplicar ou associar.

---

[113] PIAGET. *Ensaio de lógica operatória*, 1976, p. 165.
[114] PIAGET e INHELDER. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*, 1976, p. 209.

A dissociação dos fatores introduz uma reversibilidade por reciprocidade e outra por inversão que ao serem utilizadas de maneira paralela tornam-se funcionalmente equivalentes. Vemos a importância deste fato no que se refere à construção das estruturas de conjunto, características do estágio operatório-formal e a conseqüente constituição de uma combinatória.[115]

Em resumo, podemos afirmar que, as duas criações características do início do estágio operatório-formal decorrem do fato de que: (i) o sujeito consegue *dissociar fatores* seja por *neutralização*, seja por *exclusão*; (ii) é preciso afastar um fator, não somente para analisar sua ação, mas ainda para mostrar a de outros fatores presentes.

Com o ingresso no estágio operatório-formal, a relação do sujeito com o mundo muda completamente, pois a partir de então consegue organizar pensamentos, elaborar raciocínios que ultrapassam o plano do real (realidade), alcançando o nível do *possível* (possibilidades), mas numa inversão de sentido notável, pois ao invés do possível ser apenas um prolongamento do real ou das ações executadas sobre a realidade, é o real que se subordina ao possível.

A grande novidade trazida pela passagem à inteligência operatória formal parece ser, pois, efetivamente, a inversão de sentido entre o possível e o real, pois nesse estágio o sujeito raciocina segundo os possíveis e assim consegue desenvolver hipóteses.

Do ponto de vista formal, o acesso ao pensamento hipotético-dedutivo se traduz pela estrutura de grupo INRC que combina, num sistema único, as duas formas de reversibilidade: inversão e reciprocidade, ainda

---

[115] PIAGET e INHELDER. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*, 1976, p. 215.

separadas no estágio das operações concretas. Por seu turno, do ponto de vista das estruturas, tudo parece repousar numa lógica interproposicional, cujo tipo mais simples é a *lógica bivalente.*

3.6 Sobre a lógica bivalente

Como sabemos na lógica bivalente cada *proposição simples*[116] admite dois valores lógicos: a verdade (V) ou a falsidade (F).

As proposições simples são, geralmente, designadas por letras minúsculas: p, q, r, ...

Por exemplo, considere uma proposição p.

Seus valores lógicos podem ser apresentados em uma tabela denominada *tabela verdade*:

p
V
F

Os valores lógicos de uma proposição podem ser *negados*. Assim, dada uma proposição p, denomina-se *negação de p* (não p) à proposição $\bar{p}$ que tem valores lógicos, respectivamente, opostos aos de p:

p	$\bar{p}$
V	F
F	V

[116] Proposição simples é toda sentença declarativa que exprime um pensamento de sentido completo.

Sejam as proposições simples ‘p’ e ‘q’.

Podemos relacioná-las e constituir *proposições compostas*, através de conetivos lógicos, cujas tabelas-verdade podem ser resumidas como segue:

p	q	Conjunção (•) p e q	Disjunção ($\vee$) p ou q	Disj. exclusiva (∇) ou p ou q	Condicional ($\rightarrow$) se p então q	Bicondicional ($\leftrightarrow$) p se e somente se q
V	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Como exemplo[117], vamos considerar as proposições:

p: chove

q: faz frio

Por volta dos 12 anos, a criança procederá a inferências dedutivas (experiência lógico-matemática) não extraídas da experiência (física) do tipo:

Chove **e** faz frio $p \bullet q$

Chove **ou** faz frio $p \vee q$

Ou chove **ou** faz frio $p \nabla q$

Se chove **então** faz frio $p \rightarrow q$

Chove **se e somente se** faz frio $p \leftrightarrow q$

Considerando, por exemplo, a primeira operação *chove e faz frio* a criança poderá anular ou negar (N) esta operação, o que, no nível anterior só seria possível mediante a experiência, temos então:

$N\ (p \bullet q) = \bar{p} \vee \bar{q}$ não chove ou não faz frio

Poderá operar a recíproca:

$R\ (p \bullet q) = \bar{p} \bullet \bar{q}$ não chove e não faz frio

Poderá, enfim, operar a correlativa, negando a recíproca:

$C\ (p \bullet q) = p \vee q$ chove ou faz frio

Aqui vale observar que estas operações já existiam no nível concreto. Então perguntamos: o que elas trazem de novo no nível formal?

No estágio das operações formais, o sujeito está em condições de raciocinar sobre hipóteses, o que acontece graças ao fato de as operações estarem desvinculadas de qualquer referência direta a objetos reais, incidindo pelo contrário nas relações entre as proposições. Nas inferências efetuadas pelo sujeito a este nível podemos identificar a existência de uma combinatória completa. Como vimos anteriormente, enquanto a criança do nível das operações concretas descobre os vários tipos de associações entre as classes, através da comparação dos conteúdos reais da sua experiência, o adolescente no nível das operações formais é capaz de pensar em todas as combinações possíveis (em termos de proposições) antes de qualquer observação para, só em seguida, as submeter a verificação.

O conjunto destas possibilidades hipotéticas, ou melhor, o conjunto de todas as combinações possíveis que o adolescente pode elaborar, em qualquer dada situação cognitiva, pode ser representado através das propriedades de uma estrutura de reticulado. Em outras palavras, a estrutura completa de reticulado constitui um modelo adequado da estrutura operatória

[117] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 132 e seguintes.

que dá conta das efetivas performances cognitivas combinatórias do adolescente.

Dadas duas proposições e as suas negações (p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$), o adolescente é capaz de identificar combinatoriamente as quatro associações possíveis em termos de uma operação •, que denominamos *conjunção*: p • q (p e q); p • $\bar{q}$ (p e não q); $\bar{p}$ • q (não p e q); $\bar{p}$ • $\bar{q}$ (nem p, nem q).

Estas quatro associações podem ser combinadas entre si de 16 modos possíveis:

1.	0		negação absoluta
2.	a	$p \bullet q$	conjunção
3.	b	$p \bullet \bar{q}$	não-implicação
4.	c	$\bar{p} \bullet q$	não-implicação recíproca
5.	d	$\bar{p} \bullet \bar{q}$	negação conjunta
6.	a + b	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q}$	afirmação de p
7.	a + c	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet q$	afirmação de q
8.	a + d	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	eqüivalência
9.	b + c	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q$	exclusão recíproca
10.	b + d	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	negação de q
11.	c + d	$\bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	negação de p
12.	a + b + c	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q$	disjunção
13.	a + b + d	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	implicação recíproca
14.	a + c + d	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	Implicação
15.	b + c + d	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	Incompatibilidade
16.	a + b + c + d	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	Afirmação completa

O conjunto destas dezesseis operações difere radicalmente de um agrupamento. Com efeito, pode facilmente verificar-se que o citado conjunto de operações constitui um reticulado, porquanto as duas operações (e) e (ou) estão em condições de determinar univocamente, para cada par, respectivamente, o supremo (máximo comum minorante) e o ínfimo (mínimo comum majorante.

Assim como a reversibilidade foi fixada por Piaget como critério para a inteligência operatória, aproveitou ele a estrutura do quaterno, conhecido como Grupo de Klein[118], como critério para a inteligência operatória formal.

3.7 Grupo de Klein

Para introduzir a noção de Grupo de Klein, vamos lançar mão de um exemplo, simples.

Consideremos conjunto finito K = {e, a, b, c} e a operação ✶ em K, definida pela tabela de dupla entrada abaixo:

✶	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

FIG. 20

Facilmente se pode constatar que a operação ✶ é *comutativa*,

[118] homenagem a Felix Klein, matemático alemão (1849 – 1925).

associativa e admite *elemento neutro*. Além disso todo elemento de K é *simetrizável***.**

O par [K, ✶] é um grupo finito abeliano, de ordem quatro, conhecido pelo nome de Grupo de Klein. Observe que em um grupo de Klein, o composto x ✶ x = e, $\forall$ x $\in$ K. Um caso particularmente interessante de grupos de Klein é o grupo INRC.

3.8 O Grupo INRC

Relembrando o que havíamos tratado anteriormente, no estágio das operações concretas, o sujeito ainda não consegue coordenar duas espécies de reversibilidade, o que vai caracterizar o ingresso no estágio seguinte, operatório formal. Para os sujeitos do estágio operatório formal, Piaget viu no grupo INRC o indício de que as operações podem se organizar em sistemas em que duas espécies de *reversibilidade* atuam em conjunto, ou seja, são componíveis entre si, de maneira transitiva e reversível.

Cada um dos 16 operadores possíveis entre duas proposições *p* e *q* pode ser caracterizado por um conjunto E = (*a b c d*), quatro elementos. Por convenção, consideremos que as letras *a'*, *b'*, *c'* e *d'*, representam o valor oposto ao de *a*, *b*, *c* e *d*, respectivamente.

O grupo INRC pode ser definido a partir das quatro transformações seguintes:

Transformação I $I(a\ b\ c\ d) = a\ b\ c\ d$

A transformação I faz corresponder a todo o elemento de E esse mesmo elemento. Trata-se da *transformação idêntica.* A identidade transforma uma proposição – que descreva ações materiais - em sí mesma.

Transformação N *N*(*a b c d*) = *a' b' c' d'*

A transformação N faz corresponder a todo o elemento de E seu oposto. Trata-se da *transformação inversa.* A negação é uma inversão apoiada sobre a operação (como tal).

Transformação R *R(a b c d) = d c b a*

A transformação R faz corresponder a todo o elemento de E seu recíproco. Trata-se da *transformação reciproca.* A reciprocidade é a inversão apoiada sobre a negação dos termos.

Transformação C *C(a b c d) = d' c' b' a'*

A transformação C faz corresponder a todo o elemento de E seu correlativo. Trata-se da transformação correlativa. A correlativa é por definição a transformação que nega R.

É facilmente verificável que as transformações *I, N, R, C* formam um grupo comutativo em relação à operação (aqui indicada por justaposição), e que consiste em efetuá-las uma após à outra.

Temos, com efeito, o quadro seguinte:

	I	***N***	***R***	***C***
I	*I*	*N*	*R*	*C*
N	*N*	*I*	*C*	*R*
R	*R*	*C*	*I*	*N*
C	*C*	*R*	*N*	*I*

FIG. 21

Para compor o quadro acima, basta aplicar as definições anteriormente referidas.

Exemplo:

NR(a b c d) = N (d c b a) = d’ c’ b’ a’ = C (a b c d), donde: NR = C.

Uma simples verificação mostra, que a operação aplicada a quaisquer duas das transformações, dá novamente como resultado uma transformação. Falta ainda mostrar que os axiomas que definem um grupo comutativo são satisfeitos.

Para tal fim, consideremos os elementos X, Y, Z, no conjunto, finito das transformações, T = {I, N, R, C}.

(G1) X (YZ) = (XY) Z

Bastará fazer a prova relativamente a todas as combinações possíveis.

Por exemplo: *N(RC) = NN = I* *(NR)C = CC = I*

ou ainda, outro exemplo: *N(RN) = NC = R* *(NR)N = CN = R*

(G2) Existe, em T, um elemento *I* tal que *I X = X.*

Basta verificar o quadro.

(G3) Qualquer que seja o elemento X, existe X’ tal que X’ X = I.

Observando a diagonal do quadro, vemos que X’ = X.

(G4) *X Y = Y X*

Também esta propriedade é evidente, pois o quadro é simétrico em relação à sua diagonal.

3.8.1 Uma aplicação ao caso da balança de dois braços

Vamos considerar a seguir um exemplo clássico apresentado por

Piaget como um de seus experimentos em diversas obras que tratam do estágio operatório-formal. Trata-se de uma balança de dois braços com furinhos espaçados a diferentes distâncias do ponto de apoio (fulcro), onde podem ser pendurados pequenos objetos com diferentes massas (e, portanto diferentes pesos).

Com a balança é possível verificar a forma como um sujeito operatório-formal raciocina quanto às mudanças de massa e de distância horizontal (braço de alavanca). Vamos denominar p um aumento da massa em um braço da balança e q um aumento de distância no mesmo braço; $\bar{p}$ e $\bar{q}$ as proposições que indicam uma diminuição correspondente de massa e de distância no mesmo braço da balança. As proposições p' e q' corresponderão a p e q , assim como $\overline{p'}$ e $\overline{q'}$ corresponderão a $\bar{p}$ e $\bar{q}$, mas no outro braço.

Escolhendo a operação p $\wedge$ q (conjunção) como identidade, I, teremos:

I (p $\wedge$ q) = aumentar simultaneamente massa e distância sobre um dos braços.

N ($\bar{p} \vee \bar{q}$) = (p $\wedge$ $\bar{q}$) $\vee$ ($\bar{p}$ $\wedge$ q) $\vee$ ($\bar{p}$ $\wedge$ $\bar{q}$): diminuir a distância, aumentando a massa ou diminuir a massa aumentando a distância ou diminuir ambos.

R (p' $\wedge$ q') = compensar I aumentando ao mesmo tempo, massa e distância sobre o outro braço da balança.

C ($\overline{p'} \vee \overline{q'}$) = (p' $\wedge$ $\overline{q'}$) $\vee$ (p' $\wedge$ q') $\vee$ ($\overline{p'}$ $\wedge$ $\overline{q'}$) = anular R da mesma maneira que N anula I.

Mas se R compensa a ação I, podemos escrever $\bar{p} \wedge \bar{q}$, e se C compensa a ação N, podemos escrever p $\vee$ q, donde:

I $p \wedge q$

N $\bar{p} \vee \bar{q}$

R $\bar{p} \wedge \bar{q}$

C $p \vee q$

Assim que o sujeito compreende o sistema de inversões e reciprocidades aprenderá por conseqüência, que existe uma proporcionalidade, pois todo aumento de massa ou distância num braço da balança está para o aumento simétrico no outro braço, assim como aumentar massa ou distância num braço está para a operação recíproca no outro braço, etc.

Assim é possível compor o quadro que segue:

	I	**N**	**R**	**C**
I	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$
N	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
R	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
C	$p \vee q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q$

FIG. 22

o qual pode ser representado graficamente através do conjunto de transformações:

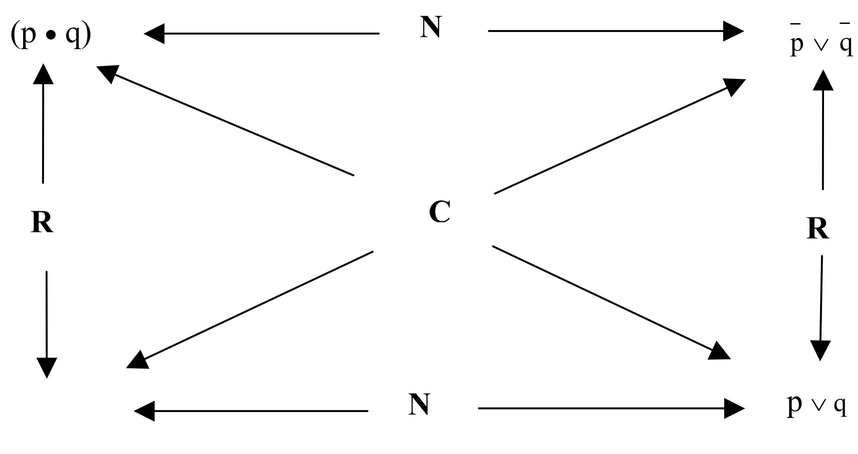


FIG. 23

No estágio operatório-formal o sujeito consegue operar de forma puramente proposicional - sem que as proposições que ele possa utilizar digam respeito à realidade imediata ou até mesmo a nenhuma realidade valendo-se, para isso, da forma hipotética, condicional ou implicativa.

Um dos traços mais marcantes das leis da lógica é o caráter de necessidade com que elas se impõem ao ser humano, a ponto de alguns pensadores as considerarem inatas. No entanto, de tudo que se pode ver esta necessidade constitui o resultado de uma longa elaboração por parte da criança.

O sujeito, no estágio das operações concretas dispõe apenas de regras *constrangedoras*, mas não de regras necessárias. Elas são constrangedoras porque é essa a natureza dos objetos sobre as quais o sujeito raciocina. Se, por exemplo, a solução de um problema lhe escapa, nada lhe permite decidir se é por falta de capacidade (estruturas) ou se o problema é impossível. O estágio seguinte das operações formais, em contrapartida, já oferece condições de que o sujeito alcance resultados necessários.

Donde provém tal necessidade? Piaget e Inhelder (1955) mostram que ela se deve precisamente à faculdade do adolescente raciocinar sobre hipóteses, independentemente dos fatos realizados ou realizáveis. Em outras palavras, juízos do tipo *isto é possível*, *isto é impossível*, *isto é necessário* justificam-se na medida em que o sujeito tem acesso ao conjunto de todos os casos compatíveis com os dados do seu problema, o que requer uma (análise) combinatória exaustiva que leve em consideração todos os casos possíveis (e imagináveis).

Nas palavras de Becker,

> Piaget distingue diversos esquemas operatórios com estrutura formal - operações combinatórias, proporções, relatividade dos movimentos e das velocidades, noção de equilíbrio mecânico, noção de probabilidade, compensações multiplicativas, formas operatórias de conservação - todos redutíveis, a seu modo, ao grupo INRC. Este grupo está para o nível formal como o ‘agrupamento’ esteve para o nível concreto, isto é, como modelo das estruturas mentais do respectivo estágio.[119]

No próximo capítulo passo a apresentar o problema investigado, a metodologia empregada no processo de pesquisa, assim como as entrevistas com os sujeitos de pesquisa, de acordo com uma organização por mim estabelecida. No capítulo seguinte retomarei idéias e princípios encontrados na epistemologia genética sobre o desenvolvimento da criança em direção à sua construção como sujeito.

---

[119] *Da ação à operação*, 1997, p. 132.

4 ENTRELAÇANDO FIOS: diálogos com professores

Nossa hipótese é, portanto a de que as supostas aptidões diferenciadas dos 'bons alunos' em matemática ou física etc., em igual nível de inteligência, consistem principalmente na sua capacidade de adaptação ao tipo de ensino que lhes é fornecido; os 'maus alunos' nessas matérias,que entretanto são bem sucedidos em outras, estão na realidade perfeitamente aptos a dominar os assuntos que parecem não compreender,contanto que estes lhes cheguem através de outros caminhos: são as 'lições' oferecidas que lhes escapam à compreensão, e não a matéria.[120]

(Jean Piaget)

4.1 Delimitando meu campo de pesquisa

A partir do ano letivo de 1997 a Universidade[121] onde trabalho tem oferecido o Curso de Especialização em Educação Matemática – CEEM. Desde sua criação, tenho exercido as funções de coordenador desse curso e de

---

[120] *Para onde vai a educação*, 1998, p. 14.

professor responsável pelas disciplinas Metodologia da Investigação Científica e Metodologia do Ensino de Matemática, além de participar dos Seminários apresentados pelos alunos do curso e de bancas de exame de trabalhos de conclusão.

O CEEM com uma duração de 18 meses é oferecido a profissionais interessados no ensino de matemática, atingindo especialmente professores do ensino fundamental e do ensino médio da região que tem a cidade de Pelotas (RS) como pólo geográfico, comercial e educacional. Em suas disciplinas e seminários o CEEM tem se caracterizado como um espaço de discussão sobre a construção do conhecimento matemático, permitindo repensar o fazer pedagógico, analisar e aprofundar aspectos da inter-relação professor-aluno-aprendizagem-conhecimento, entre outros objetivos. A clientela do CEEM é formada, principalmente, por professores que, em sua expressiva maioria, trabalham com matemática nas mais diversas séries do ensino fundamental e do ensino médio em escolas de zona urbana ou zona rural e neste caso em classes multi-seriadas.

As turmas têm se caracterizado por apresentar uma constante inquietação com o fracasso da aprendizagem de matemática, por parte de seus alunos. Pode-se constatar, nos registros obtidos em entrevistas, em diálogos em classe ou em conversas informais, uma profunda decepção e em alguns casos tristeza, com o enorme distanciamento entre as verbalizações teóricas das aulas dos cursos de graduação e as reais necessidades encontradas na vida profissional. No texto de uma colega, aluna do CEEM:

---

[121] Universidade Católica de Pelotas (UCPel).

> Nestes 4 anos em que realizei o curso de Licenciatura em Matemática (UFPel) aprendi muitos métodos de como calcular integrais, derivadas e provar vários teoremas, mas a grande maioria disso tudo eu apenas fazia, mas não sabia muito bem o porquê.

E, continua:

> Por isso o meu objetivo de realizar o curso de PGEM [122] é, de além de ser uma professora de matemática, que joga conteúdos em cima dos alunos, quero tornar-me uma educadora, ou seja, ter condições de orientar os meus alunos da melhor maneira de estudar e aprender matemática.

Outra característica das turmas do CEEM é a significativa predominância de professoras[123] (mulheres). As cinco turmas, até agora oferecidas, têm apresentado, reiteradamente, um percentual acima de 80% de professoras, fato que, se por um lado pode ser interpretado como a mais pura expressão da realidade na medida em que a profissão de professor de ensino fundamental é ocupada por mulheres em função dos baixos salários oferecidos, por outro lado, o que se observa é um intenso movimento de professoras em busca de suas especializações, pós-graduações e atualização profissional, que não se verifica entre professores (homens).

Durante o ano de 1997, em sua primeira turma, o CEEM foi freqüentado por professores de escolas públicas e privadas de Pelotas e cidades vizinhas como Arroio Grande, Jaguarão, Camaquã, Amaral Ferrador,

---

[122] A aluna refere-se ao CEEM, denominando-o de PGEM (Pós-Graduação em Educação Matemática).

[123] Adoto neste trabalho o uso do substantivo professor, com o sentido amplo, ou seja, incluindo professores e professoras. Apenas em casos em que a referência explícita ao gênero possa ser indispensável utilizarei 'professora'. Entendo que dessa forma minha escrita fica mais legível, além do que não é o simples fato de escrever professor/professora repetitivamente que estarei demonstrando minha consideração para com as colegas professoras, que a bem da verdade sempre deram sobejas demonstrações de competência e de dedicação às coisas da Educação e particularmente ao ensino de Matemática.

Sertão Santana, Piratini e outras. Dentre os 50 alunos matriculados na primeira turma, 40 eram professoras e apenas 10 professores. A segunda turma, em 1998, contou com 24 inscritos, licenciados em Matemática ou em Pedagogia, dentre os quais 20 mulheres e apenas quatro homens, todos professores trabalhando nas redes oficiais ou em escolas privadas, da região sul. Nesta turma havia também um engenheiro que, naquele ano lecionava disciplinas de formação matemática na própria Universidade onde funciona o curso.

Em 1999 o CEEM, em sua terceira edição foi oferecido para 22 alunos, sendo 19 mulheres e três homens. Na turma havia seis professoras oriundas de Santa Vitória do Palmar (300 km de Pelotas), três professoras de Pedro Osório (40 km de Pelotas), um professor de Jaguarão (170 km de Pelotas), sendo os restantes, professores que trabalhavam em Pelotas. Em 2000, em sua quarta turma, o CEEM contou com uma clientela de 30 professores que atuavam nos municípios de Canguçu, Jaguarão, Pedro Osório, Santa Vitória do Palmar, Pinheiro Machado e Pelotas. Dos 30 inscritos, 24 eram mulheres e seis homens.

Em 2001, em sua quinta edição o CEEM manteve uma turma de 26 alunos, sendo 23 professoras e três professores, todos oriundos de cidades desta região, com a participação de um professor de Montevidéu (capital do Uruguai).

Muito embora o CEEM tenha sido criado com a proposta inicial de ser oferecido apenas uma vez (turma única), a intensa e reiterada procura por espaços de discussão e estudos referentes ao ensino e a aprendizagem da matemática, levou-nos a oferecer novas turmas o que, até o presente momento, resultou no atendimento a um contingente de mais de uma centena de professores. Tais professores, em sua expressiva maioria, desenvolvem suas atividades profissionais em escolas de redes municipais e da rede estadual de ensino e lecionam matemática no ensino fundamental.

4.2 Os sujeitos de pesquisa

A convivência com os professores matriculados no CEEM acabou por influir decisivamente em minha opção por pensar/repensar o fazer cotidiano do professor de matemática e assim acabou por direcionar minhas ações no sentido de construir a presente tese. Talvez esse contato realimentado anualmente com novos colegas que buscam re-significar seu trabalho, talvez a lembrança dos antigos professores que 'se esforçavam' sobremaneira para ensinar alguma coisa (e não conseguiam, ou conseguiam muito pouco, diante de suas/nossas expectativas), talvez a lembrança do 'olhar' do aluno que frente ao professor demonstrava estar perdido na imensidão do espaço de seus desconhecimentos (pelo menos com relação àquilo que o professor tentava fazer ali na frente), talvez todos os motivos somados me fizeram pensar (e agir) na direção de utilizar os próprios professores e alunos do CEEM como campo de pesquisa e de indagação. E foi o que fiz: através de entrevistas individuais com professores escolhidos dentre o contingente de alunos do CEEM, busquei desenvolver uma análise que viesse a priorizar as concepções do professor sobre seu papel no ato de ensinar matemática; sobre a ação do aluno para aprender matemática; a influência do fator tempo na construção do conhecimento matemático; a importância do interesse do aluno no processo de aprendizagem e a influência do ‘erro’ neste processo.

O grupo de professores é composto por sujeitos portadores de título de graduação em matemática (licenciatura plena), ciências (habilitação em Matemática), História, Pedagogia e Engenharia. Todos são professores atuando em sala de aula do ensino fundamental ou do ensino médio em escolas públicas ou privadas. Em geral exercem o magistério em pelo menos duas escolas, em dois ou até mesmo três turnos de trabalho. Atuam em duas ou mais turmas simultaneamente, chegando ao extremo de um dos sujeitos lecionar oito disciplinas no mesmo semestre, obviamente em escola particular. São professores que atuam em Pelotas e comunidades limítrofes e neste caso em escolas da zona rural.

4.3 A questão de pesquisa e suas hipóteses

Meu desejo primordial nesta tese é expor minhas reflexões sobre a prática docente enfocando, prioritariamente, o desenrolar do ato de *dar aula de matemática* o que expresso, em forma sintética, por meio da seguinte indagação: **que compreensão tem o professor sobre o desenrolar do processo de ensinar ou aprender matemática?**

Para alcançar o entendimento que o professor tem sobre seu trabalho, em sala de aula, assim como sobre o lugar do aluno, alguns pontos principais nortearam meu trabalho de campo que se desenvolveu na forma de entrevistas individuais semi-estruturadas. Tais pontos foram definidos a partir de algumas hipóteses de trabalho que em resumo são:

(1) As ações desenvolvidas em classe são de competência do professor, que se dirige a um aluno padrão, por ele imaginado.

(2) O conteúdo programático é o elemento definidor do trabalho em classe.

(3) Para o professor a aprendizagem decorre de fatores exógenos ao aluno.

(4) Choques de sentidos entre a expressão oral e a expressão matemática contribuem significativamente para o fracasso discente diante da matemática.

(5) O papel de censor-disciplinador se confunde com o papel de educador do professor.

4.4 O método

Existe um conhecimento matemático, socialmente organizado, existe um ambiente, a sala de aula, onde tal conhecimento deve ser *trabalhado*, existem professor e alunos. Nesse contexto, meu interesse é desvelar que papel o professor pensa desempenhar e o papel que ele atribui ao aluno em uma aula de matemática.

Como referencial teórico, para a busca de respostas a minhas indagações, elegi a Epistemologia Genética exposta por Jean Piaget em sua imensa produção científica e que em grande parte está voltada para a compreensão do processo de criação e aprendizagem da matemática. Os trabalhos teórico-práticos desenvolvidos por Piaget assim como os da imensa plêiade de renomados estudiosos que vêm desenvolvendo pesquisas, sob a luz da Epistemologia Genética, têm objetivado explicar como o indivíduo, enquanto sujeito de suas ações, estrutura seus conhecimentos, assim como esclarecer o processo de passagem de um conhecimento mais simples para outro mais elaborado.

Para as entrevistas, organizei previamente um questionário composto de seis blocos temáticos que me serviam como roteiro para o desenvolvimento da entrevista. A partir desse conjunto básico de indagações e de acordo com as respostas apresentadas pelo sujeito da pesquisa, novas questões iam sendo propostas com o intuito de aprofundar aspectos que pudessem merecer, a meu juízo, considerações mais detalhadas. Como afirma Franco,

> O que interessa ao pesquisador piagetiano é saber o que se passa na cabeça do sujeito. Por isso, não há roteiro fixo. Serão exatamente as respostas não esperadas que vão lhe interessar. E mais ainda, a forma da resposta será o mais importante, pois o que interessa sobremaneira é como o sujeito chegou à resposta e não tanto a resposta em si.[124]

Com prévia autorização dos sujeitos de pesquisa, as entrevistas foram gravadas em fitas K7, transcritas e armazenadas como arquivos texto em computador. O conjunto de entrevistas compõe o presente documento na forma de um anexo, apresentado em separata. Para evitar a identificação dos sujeitos de pesquisa, usei a codificação s1, s2,..., s8.

Usando recursos do processador de texto Word, elaborei um quadro de freqüências (ver abaixo) com vistas a fazer uma contagem (freqüência absoluta) do número de vezes que o professor utiliza, em suas respostas, alguns termos ou expressões muito conhecidas em ambientes escolares.

Quadro de freqüência de alguns termos usados pelo professor

	Sujeitos							
Termos	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
Ensinar	3		4		2	10	1	2
Aprender	2		4	6	6	22	3	5
Entender			4	2	1	3	2	2
Desperta(r)			2	4	5		6	1
Conteúdo	6	14	10	11	20	1	17	17
Interesse		11	8	3	15	1	4	2
Motivação		3	3					
Disciplina	5	2	6	7	1	4	2	4
Erro	2	6	5	3	11	6	4	10
Dificuldade			9	3	1	5	5	4
Não querem nada			2		2			
Perturbar			1					
Interpretação			1					
Deficiência			4					

Análises e considerações dos resultados apresentados neste quadro serão feitas oportunamente. Com relação ao texto que apresento a seguir, utilizei uma forma híbrida em que a fala do professor entrevistado é grafada em itálico. A referência ao sujeito e à resposta que está sendo considerada em cada momento é feita através da indicação: [sujeito, resposta] para que, havendo interesse, se possa encontrar o texto completo no conjunto de entrevistas que segue em anexo.

4.5 Ouvindo o professor

Ao longo de minha trajetória como professor, formador de professores tenho constatado que o professor, de um modo geral, enquanto profissional, apresenta características que são muito comuns, quase universais, pelo menos entre aqueles com os quais tenho convivido e na

[124] FRANCO. *Lógica operatória e lógica das significações em adultos do meio rural*, 1999, pp. 152-3.

companhia dos quais tenho trabalhado. Tais características se expressam em seus pareceres, opiniões e pontos de vista. É a partir de idéias de professores que desenvolvi o presente trabalho.

Na seqüência passo a narrar as falas dos professores – sujeitos de pesquisa, e a tecer considerações sobre as respostas apresentadas. As questões foram propostas a partir de situações, por mim sugeridas, e posteriormente organizadas nas seguintes categorias:

- A organização da aula de matemática.
- O papel do professor de matemática.
- O que pensa o aluno sobre o professor de matemática.
- O ato de ensinar matemática.
- O ato de aprender matemática.
- Os interesses do aluno.
- O erro em matemática.
- Significados e sentidos em aula de matemática.

Inicialmente desejo entender de que forma o professor organiza seu conhecimento (seu saber matemático) para trabalhar em aula. Penso que o professor ao falar sobre a organização de seu conhecimento (e de seu material), expõe a forma como efetivamente age, mas também deixa transparecer como ele gostaria de proceder.

Ao dar início ao diálogo, esclareço meus objetivos com este trabalho e o quão importante é ouvir o posicionamento e o relato do colega professor sobre sua prática em sala de aula. Minha fala inicial objetiva esclarecer que o trabalho não tem fins avaliativos, nem pretende estabelecer comparações entre diferentes práticas ou procedimentos adotados por distintos profissionais.

Para início de conversa, proponho uma situação corriqueira na vida do professor e que se constitui através de uma encenação como, por exemplo: – "Você tem uma aula amanhã e precisa pensar no conteúdo que vai trabalhar, nos exemplos que vai resolver, nos exercícios que vai propor. Ah! E no tema para casa! Dentro desta situação quero te fazer alguns questionamentos". Pergunto, então: "Como organizas uma aula de matemática?"

4.5.1 A organização da aula de matemática

Com relação à organização é possível detectar dois grupos principais de atitudes distintas: há professores que preparam previamente a aula, enquanto outros nada fazem. Os últimos, como músicos de ofício, tocam de ouvido, ou seja, de tanto repetir aquele discurso, acabam por decorá-lo. Ouçamos ambos, começando por aqueles que preparam a próxima aula.

4.5.1.1 Professores que preparam a aula

Para esse grupo de professores, a aula é organizada em função do conteúdo a ser desenvolvido e do programa a ser cumprido. O professor, em suas respostas, não revela estar preparando aula para um grupo heterogêneo de sujeitos. Quando o aluno aparece em seu discurso, é encarado como ser genérico, e mais importante, como um aluno padrão. Os percalços e as dificuldades em aula são atribuídos àqueles que fogem ao padrão (segundo os critérios do professor).

Professores que afirmam organizar previamente o material para a próxima aula, dizem: – *A minha preocupação, sempre, antes de entrar em sala de aula, olha, não é demagogia, eu sempre preparo as minhas aulas e faço um roteiro...* [s7, p04.2]. – *Eu planejo a minha aula. Meu objetivo é esse! Então eu tenho o meu 'diário'... faço tudo bonitinho alí... tá, tá, tá... Planejo aquilo ali* [s3, p10.1].

No entanto, o planejamento esbarra na turma (o que se poderia esperar que viesse a acontecer, na medida em que o aluno não é considerado como individuo, no planejamento e sim como turma), pois... *nem sempre... aquilo que eu planejei, eu consigo trabalhar... em virtude... que nem sempre a turma andou naquele trabalho, não é?* [s3, p10.2]. E, sem questionar o modelo de planejamento que está adotando, diz o professor: – *para a próxima aula, faço o mesmo tipo de planejamento de atividades, só em uma forma diferente*. O que você faz? – *no dia seguinte eu vou planejar em cima daquilo que eu não consegui trabalhar...* [s3, p10.3].

4.5.1.2 Planejamento como segurança de desempenho

O planejamento – entre os professores que afirmam fazê-lo, parece funcionar como elemento de garantia de que ele não irá falhar, pois reconhece suas limitações ao afirmar: – *bom, primeiro assim. Eu acho que... eu não domino tudo, claro que não, não é?... e acho que domino até pouco* [s7, p04.1]. *E após esse curso que eu fiz* (Pedagogia)*, despertou mais para mim trabalhar dentro dessa forma, eu sempre vou para a aula com a aula preparada, mesmo que seja em forma de um esboço, um rascunho... Vou dar tais exercícios, vou trabalhar desta forma, vou dar tal atividade... eu sempre levo aula preparada para a sala de aula* [s7, p04.3].

Ao organizar o material o professor pode verificar o que será trabalhado em aula e com isso estabelecer roteiros de sua fala (como se representasse em um teatro), resolver previamente cada um dos exercícios que vai trabalhar, estabelecer linhas de resolução e formas de apresentá-los, pois... *eu sempre procuro olhar antes e ir, mais ou menos, preparada prá sala de aula, prá aula render. Por que se a gente não olha antes, pelo menos comigo, se eu não olho antes eu chego na sala de aula assim meio perdida. Por que tu sabes, tu sabes o conteúdo. A gente sabe... Tu queres fazer coisas diferentes e tu nunca viu coisas diferentes. E aí tu tens que ter pelo menos uma idéia. Mas eu sempre procuro olhar, selecionar, dar uma boa... pelo menos entrar com o troço na cabeça... programado* [s1, p08.5].

A força da rotina é tão forte que prepondera sobre qualquer outro valor que o professor possa pensar em adotar, pois: – *normalmente, acho que a gente entra com o conteúdo... que tem que dar... passa o conteúdo no quadro, o tempo passa e a gente usa o quadro... Esses dias o Professor L. dizendo que o quadro entrou na rotina da escola pelo século XVII, entrou na rotina da escola e nunca... que a rotina entrou, o quadro negro entrou na escola, então a rotina se instalou e nunca mais saiu e a gente... é a nossa ferramenta, a nossa arma aqui, a gente usa muito o quadro negro...* [s7, p15.4].

Nos depoimentos se pode observar a preocupação em preparar o assunto a ser trabalhado (mérito indiscutível). Mas chama a atenção o fato de que o aluno, a quem se destina a aula, quando surge nas manifestações do professor, aparece como impeditivo do pleno cumprimento da programação pré-definida, pois... *nem sempre a turma andou naquele trabalho, não é?* [s3, p10.2].

4.5.1.3 Professores que não preparam aula

Por outro lado, há professores que não fazem qualquer tipo de planejamento, principalmente entre aqueles com muitos anos de prática de sala de aula. Parece que o tempo de magistério define uma forma de trabalhar, ou seja, o professor por já ter repetido tantas vezes aquele tema, entra em aula, confiando em sua memória (ou no que conseguiu memorizar), dando mostras de que em nossa profissão *antiguidade também é posto*. Nas palavras de s2: *– eu não sei se pela minha experiência de tantos anos eu já não preparo mais.* E brinca com a expressão de espanto dos alunos quando indagam: *– "A senhora não vai trazer livros, a senhora não traz nada?"* E s2, buscando justificar sua postura, diz: *– Eu não sei se por tantos anos de serviço que eu já tenho que eu mesmo elaboro. Às vezes, quando eu quero uma coisa mais elaborada, uma definição toda certinha no português, aí eu sigo o modelo. Mas geralmente, não sei, acho que já estou mais acostumada com o conteúdo...* [p07].

De forma semelhante s5, discorrendo sobre o assunto, afirma: *– Bom, atualmente... com a prática assim, a tua preparação de aula já fica muito diferente. Claro, quando tu começas a trabalhar tu tens uma insegurança, mais... insegurança. Por que a gente, inseguro fica sempre, por que de repente, não é? Claro que chega uma época que tu tens mais experiência, que tu já está... mais descansado...* Mas, como é que preparas uma aula? *– Como eu preparo uma aula? Vejo os conteúdos e procuro em livros...* [p24].

4.5.1.4 Uma possível justificativa para não preparar a aula

Um aspecto interessante de ser destacado é que para quem tem muita experiência, *muitos anos de prática*, o planejamento funcionaria como um fator impeditivo para a eclosão da *criatividade* ou da *espontaneidade* durante o desenvolvimento da aula propriamente dita, por isso... *o meu* [planejamento] *vai na cabeça, por que eu nunca consegui... até inclusive um ano me exigiram no colégio que eu tivesse um diário. Eu simplesmente virei uma toupeira.* Por quê? *Porque, por exemplo, as vezes eu entro na aula com uma idéia e no meio da aula, de acordo com o que está se passando a minha idéia já muda, o tipo de exercício que eu vou trabalhar, eu já faço diferente e ai teve um ano: – ah, tem que ter o tal do diário. Eu simplesmente não conseguia bolar mais um exercício na aula que não estivesse no meu diário. Então eu me senti completamente amarrada naquilo. Eu disse, então agora no dia em que eu não conseguir preparar uma aula de véspera, eu não consigo mais dar aula porque eu vou chegar na aula e não vou saber mais o que fazer. Ai aboli o tal do planejamento diário, nunca mais tive, na verdade nunca tenho* [s5, p27].

S4, que além de lecionar simultaneamente oito disciplinas, entre as quais didática da matemática para o Magistério, ao manifestar-se sobre a forma como o professor de matemática prepara sua aula, diz: *–com o livro. Caderno? Nenhum... a maioria não tem. Não planeja aula, pesquisa exercício. Pra maioria, está tudo aqui, ó,* [s4 aponta para sua cabeça], *eles se acham o dono do saber. A maioria se acha o dono do saber, sabe Matemática, sabe a fórmula, quadro... aluno, vira pra frente, copia, fulano copia, fulano, pa, pa, pa. Tu não quer nada com nada. Tu não estuda... vai pra aula particular. A maioria é assim.* [s4, p28].

As considerações de s4 retratam um comportamento característico do professor de matemática que atua, comumente, em nossas escolas, em todos os níveis ou adiantamentos, cuja prática se reduz à seqüência: quadro, fórmula, cópia, ou variações dela.

4.5.1.5 Sobre cumprimento de conteúdos

Outra preocupação – provavelmente comum a todos os professores, de um modo geral, mas certamente muito importante para o professor de matemática – é com relação ao cumprimento do conteúdo, principalmente diante da expectativa da cobrança que poderá vir a ser feita pelo colega professor do ano seguinte: – *Eu vou pela necessidade, né? Por exemplo, eu olho tudo que tem que ser dado, até porque me é cobrado depois, então...* [s1, p07.1]... *Então... eu dou... aquilo que tem ali, até por medo de... de receio de não cumprir com o meu trabalho de... da rede municipal. Até por que a gente precisa... Mas eu seleciono e penso assim... eu sempre dou uma estudada antes e penso...* [s1, p08.3].

O professor até mesmo admite que precisa inovar, usar 'o concreto' [expressão usada por s8], mas o poder do conteúdo é tão forte que o impede de pensar em alguma mudança mais significativa: *–Olha eu trabalho assim muito em cima do conteúdo. Porque não dá... tudo bem, tem aquele lado assim que a gente fala... até que tem que trabalhar diretamente o concreto, só que tem muito a questão do tempo e muito a questão de que no ano que vem o professor não vai se lembrar se o professor trabalhou otimamente ou não. Ele quer seguir conteúdos. Eu cobro dos meus alunos o conteúdo do ano que passou.* [s8, p02.1]. Ele até tenta expressar uma certa preocupação com o fato de que o aluno precisa saber o que está acontecendo, pois, *–... claro eu... eu no início da aula faço uma reflexão, falo com eles, mas muito rapidinho.* No entanto, a necessidade de cumprimento do conteúdo é mais forte e como... –

eu tenho pouco tempo para mais exercícios é... matéria, matéria. Mais ainda no Estado, por que no Estado eu estou com 4 horas semanais. Quatro horas por semana só! De matemática, quatro aulas por semana. Então se eu ficar muito, não me deter muito a conteúdo, eles acabam vendo muito pouco [s8, p02.2].

4.5.1.6 Sobre trabalhar em escola pública ou em escola privada

Por último, merece destaque o fato de que o professor altera a forma de organizar seu trabalho, dependendo se estiver trabalhando em escola pública ou em escola privada, pois... *na escola particular eles vêem se chegou no fim do ano, se eu terminei o livro. Eu tenho que terminar aquele livro, eu tenho que dar todos aqueles conteúdos, eu tenho que... tudo, não é?* [s5, p26.2], enquanto que na escola pública... *eu faço o meu planejamento bimestral, mas se por acaso eu não conseguir vencer, inclusive nessa turma mesmo que eu estou te falando, eu trabalho diferente e... eles tem conhecimento de que eu faço isso e... não tem esse tipo de problema...* [s5, p26.3]. E na escola particular? – *Ah, agora, por exemplo, na escola particular até o pai vai lá: Ah, a professora não terminou o livro, não viu todo o conteúdo, ta pulando tal coisa, não ta trabalhando não sei o que... entende? Então a... não é que... eu não trabalho de forma diferente de uma escola pra outra.* É que na escola pública, afirma s5: – *eu tenho... mais liberdade de trabalhar. Mais flexibilidade de conteúdo, se por acaso chegar lá no fim do ano, eu não conseguir vencer todo aquele programa, aquilo não... não vai me... causar... grandes coisas, eu posso, eu tenho essa flexibilidade, eu tenho essa liberdade de trabalhar* [s5, p26.4].

Pelo conjunto de respostas apresentadas neste bloco pode-se constatar que o professor de matemática age em função do conteúdo a ser trabalhado. Preocupa-se em se manter ativo, pois deve falar, mostrar, riscar no quadro, falar sobre o ontem (assuntos já estudados), justificar o que vai ser apresentado e falar sobre o amanhã (assuntos que serão estudados na próxima aula, no próximo mês, no próximo ano, etc.). Para ele, o conjunto de alunos (turma) é uma platéia homogênea e passiva. Por outro lado, o tempo de magistério leva-o a um suposto domínio sobre o conteúdo, o que lhe permite repetir aulas 'dadas' usando exclusivamente a memória.

Na seqüência do diálogo, tenho interesse em esclarecer o que pensa o professor sobre seu próprio trabalho, ou seja, sobre o papel que ele desempenha ou imagina desempenhar, diante dos alunos, durante uma aula de matemática. Para isso proponho a seguinte questão:

4.5.2 O principal papel do professor de matemática

Ao referir-se a seu papel ou ainda sobre a realização prática de seu trabalho em classe, o professor lança mão de alguns verbos como, por exemplo, *transmitir*, *mostrar*, *incentivar*, *dar*, muito comuns entre aqueles cuja prática tem cunho empirista. Para melhor acompanhar as posições adotadas pelo professor, fiz uma subdivisão entre as respostas, procurando separa-las de acordo com semelhanças de significados.

4.5.2.1 Professor deve... mostrar, transmitir

Apesar de todas as críticas que se tem ouvido com relação à forte influência dos meios visuais de comunicação (televisão, vídeo games, computadores, cinema, etc.), o professor admite como sua a função de mostrar, de transmitir, de incentivar e fazer com que o aluno possa ver, enxergar, mesmo que tais ações estejam mescladas com idéias de que o aluno deve *raciocinar*: – *o principal papel... do professor de Matemática, prá mim, é ensinar o aluno... é* ***mostrar meios*** *dele raciocinar...* ***incentivar o raciocínio lógico*** *do aluno e não treinar eles feito um bichinho... faz isso, faz aquilo... faz isso, faz aquilo que daqui a uma semana eles não sabem mais nada. Ensinar o raciocínio...* ***fazer com que eles acreditem*** *no seu raciocínio... O primeiro raciocínio que vem na mente, desenvolver... Esse é o papel do professor* [s1, p18].

Mas a força do professor que tem a capacidade de mostrar é muito presente: – *... ah, eu acho que é* ***mostrar os caminhos****, não é, tentar..., sei lá, a idéia que a gente tem, mas não é realmente na prática. A gente está até olhando agora, resolvendo uns exercícios sobre resolução de problemas* (s2 faz referência a atividades desenvolvidas em disciplina do CEEM, onde é aluna) [s2, p04.1]. E imediatamente afirma: – *quantas vezes a gente deve deixar o aluno descobrir o problema e a gente vai atrás, já resolve antes,* ***já mostra tudo*** *antes, não é... Eu acho que o papel do professor na verdade é orientar o aluno para chegar à resolução dos seus problemas* [s2, p04.2].

Nas manifestações do professor é evidente a adoção de uma prática embasada em uma epistemologia empirista, para a qual o conhecimento acontece por força dos sentidos. O professor fala (prega), o aluno ouve; o mestre mostra, o discípulo vê. E por ouvir e enxergar, aprende! Aprende? Aprender, no sentido piagetiano do termo é proceder a uma síntese dinâmica de ações, coordenações de ações, equilibrações e abstrações reflexionantes.

Onde estão as ações do aluno?

Tentativas de expressar a convicção de que o aluno deve alcançar suas conclusões, acabam atreladas ao professor *transmissor*: – *Eu acho que é* ***transmitir****... conhecimento para o aluno, não é?* [s3, p03.1]. *E deixar com que ele, então... como é que eu vou dizer... tu lança, tu lança a questão e deixa ele trabalhar, chegar a sua própria conclusão...* E como o professor é a referência de conhecimento: – *Tu vai ver se a conclusão dele vai ser a mesma do professor... entendeu? Não sei se eu me fiz entender...* [s3, p03.2]. *Tu lança a questão e aí... tu lança a proposta de trabalho... e deixa ele ali... deixa ele trabalhar... e vai auxiliando no que ele precisar. Mas deixa ele chegar na resposta* [s3, p03.3].

Fica sempre implícita a idéia de que o professor é a referência a que o aluno deve chegar. No entanto, nada revela como o aluno vai *chegar lá*, em que *lugar* o professor está (que lugar é esse?).

Há um lugar no conhecimento, que não é um local geográfico onde o aluno deveria chegar, talvez porque lá o professor está – uma vez que ele é a referência. No entanto não há percurso! Não há estrada! – *Tu lança a questão e... deixa ele ali...* como se o professor, em uma pescaria, lançasse a isca (cuidado com o anzol) e... aguardasse o aluno... morder.

4.5.2.2 O professor deve... despertar

A metáfora do *relógio despertador* está presente na fala do professor: – *... eu acho que o papel do professor é* ***despertar no aluno*** *a vontade de aprender.* E o aluno *despertado* é quem deve ir atrás, pois: – *é ir atrás do conhecimento, é despertar mesmo, mas e porquê? E por que isto está acontecendo?* No entanto, a ação do professor que desencadeará tal *despertar* não aparece em sua fala, pois é o aluno que como um maratonista *deve correr atrás* do conhecimento: – *Vão atrás, vão descobrir, vão na Biblioteca, vão ler, vão no jornal, vão se informar, perguntem pro pai, perguntem pra mãe.* E continua com entusiasmo relatando experiência recente: – *Eu até agora eu fiz um trabalho de Didática Geral, com o Magistério... de eles fazerem uma linha de tempo de todos os educadores que têm influência e que tiveram influência na educação, desde o tempo antes de Cristo até agora. Eles quase enlouqueceram, porque eles andaram por tudo quanto é Biblioteca, dei a bibliografia e agora vocês vão me colocar as idéias de cada um e comparar a idéia de um e outro* [s4, p04.1]. Sem dúvida a proposta apresentada tem reconhecidos méritos pedagógicos e educacionais na medida em que lança mão do vetor da história que, sem sombra de dúvidas, é um excelente elemento contextualizador de toda e qualquer área do conhecimento. No entanto para construir uma *linha de tempo* (sic) são indispensáveis balizamentos muito claros e uma fonte bibliográfica razoável, o que as bibliotecas escolares, em geral, não dispõem. E aos alunos só resta enlouquecer!

O professor usa, com significativa freqüência, o termo *despertar* como forma de explicar que o aluno compreendeu determinado assunto: – ... *é muito estranho... a gente está trabalhando determinado conteúdo e é um despertar, e esse despertar se dá em momentos diferentes, não é?* E parece uma coisa mágica (o Houdini de plantão é o professor), pois: – *um aluno aprende, consegue captar, consegue... colocar para fora aquilo muito rapidamente. Para outros, a caminhada é mais longa, bem mais longa* [s7, p07]. De qualquer maneira é sempre o professor despertador que age e por isso: – *eu procuro ver o que eu tenho para dar, o assunto que eu vou ter, e* *dentro desse assunto procurar estabelecer o que eu posso fazer que desperte a atenção deles em cima desse assunto* [s7, p15.2].

4.5.2.3 Ao professor compete... falar

Em todos os casos observo que o professor é o ator principal, a ele estando reservada a maior parte das ações desenvolvidas em aula e que, em sua quase totalidade, são apresentações orais, seja do conteúdo, da proposta de tarefas e atividades a serem cumpridas: – *Primeiro eu falo sobre o assunto. Falo sobre o que eles já deveriam ter aprendido sobre aquilo anteriormente e aonde a gente quer chegar. Vamos ver onde a gente quer chegar, o que a gente precisa. E até mesmo o que a gente vai ver depois disto. Então é assim: o que vocês já viram, o que a gente vai ver este ano, porque o ano que vem a gente vai continuar, então vai ter toda uma certa seqüência e aí, eu geralmente dou um exemplo de alguma coisa e depois a gente volta para o quadro, ai então eu faço eles chegar a uma conclusão. Porque assim, se eu estou fazendo uma soma de frações, então eu, eu acabo riscando. Eu risco muito no quadro primeiro.* [s8, p11.1].

O professor, na sua fala, atribui ao aluno o papel de espectador, a quem compete ‘ver’, ‘enxergar’: – *E aí, se eu quero somar uma parte com outra parte, eu preciso somar denominador se for o caso, o que eu tenho que fazer? Para eles enxergarem antes, para depois a gente concluir juntos. É mais ou menos isso. Primeiro a gente chega na conclusão e depois a gente bota no quadro juntos* [s8, p11.2]. Mas como é o mestre quem descreve o caminho, que não é uma trilha, não é a descrição de uma viagem entre dois lugares, mas sim um caminho composto por operações que a criança deve realizar em pensamento, a sua descrição acaba por se reduzir a uma mera descrição, como se ele falasse sozinho.

Na fala de s8, recordo a contradição que se estabelece quando a criança, ao somar frações de denominadores diferentes, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, lança mão de seu já conhecido algoritmo da adição (somar de *carreirinha*) e encontra $\frac{2}{5}$ (1+1 = 2 e 2+3 = 5). Ao apresentar seu resultado, recebe o veredicto fatal: Errado!

No entanto a criança utilizou hipóteses para desenvolver o processo de adição. O fato de não alcançar o resultado (produto) não pode ser tratado como um erro simplesmente, sob pena da matemática tornar-se um mistério!

Além do papel de espectador que resta para o aluno, sua ação fica reduzida a 'preencher folhinhas mimeografadas', e agora o algoz é *a falta de* tempo, pois os alunos: – c*opiam... a gente dá folhinha mimeografada... uma coisa muito, assim... a gente vê que vai perder muito tempo com eles copiando, então tu dá aquilo pronto para eles, que só trabalham em cima!* [s3, p31.2]. E, tentando justificar o uso do quadro, s3, completa: – *Mas mais, a gente utiliza mais é o quadro. Que é bom até porque usa a escrita também, que eles têm muita deficiência...* [s3, p31.3].

O professor fala, expõe, narra, afirma e tudo faz para cumprir o conteúdo apesar de que, em muitos casos, não tem clareza sobre a importância, a finalidade ou a necessidade de *trabalhar* aquele tema: – *Não que eu concorde, não concordo com aqueles programas. Acho eles enorme, extensos. Tem muita coisa que não precisa, sabe? Que fazem, que obrigam o* *aluno a perguntar: – Por que eu quero isso, onde é que eu vou estudar isso. Pelo amor de Deus porque que eu preciso disso. Então...* [s1, p08.2].

E não dispondo de elementos que o auxiliem a tomar decisões, tenta encontrar justificativas, atribuindo à sua falta de conhecimentos o não entendimento da utilidade daquilo com o que está trabalhando: – *Até porque eu creio, eu que outras pessoas mais capazes formaram aqueles temas e... de repente, tudo aquilo ali é necessário* [s1, p07.2]. Como mais capazes? – *Mais capazes assim, com mais anos de Matemática, de prática, com... mais capazes assim em termos de graduação,... cursos,... Não sei, algumas pessoas sentaram ali prá formar aquele programa, né? É pelo menos o que eu julgo que eles fizeram. Selecionaram umas pessoas prá fazer aqueles programas* [s1, p08.1].

A verbalização é uma prática tão comum que o professor ao falar sobre material concreto, imagina estar utilizando tal material: – *Eu gosto muito de usar coisa concreta na sala de aula. Eu começo sempre questionando os alunos sobre o que eles sabem daquele assunto... e depois... o que eles sabem do assunto, se eles já ouviram falar, não é, levo material que para que eles leiam alguma coisa e aí sim, não é, aí sim, eu fecho a aula com a idéia do que... eu já sei, do que eu aprendi, do que eu já li, não é?* [s4, p07.1].

4.5.2.4 O professor e a formação de hábitos

Ainda com relação à orientação, aparece a preocupação com a formação de hábitos: *O principal papel do professor, embora atualmente (ele) seja muito desgastado pela própria condição social do professor que está super desvalorizado, mas eu acho que é principalmente de orientação.*

Orientação em vários aspectos, eu acho assim, agora que a gente encampou para dentro da sala de aula, principalmente eu falo isso porque trabalho com alunos pequenos, de quarta série, por exemplo, que vêm de casa sem nem sequer a formação de hábitos. Não tem hábitos assim (de dizer) "dá licença", "faz favor", ou de bater na porta quando entra, nem isso. Então nós encampamos também para nós certos aspectos dessa formação de hábitos dos mais simples que antigamente a gente carregava pra dentro da sala de aula e o que o professor quase que não se preocupava com isso. E hoje em dia a gente além da formação de conteúdos, a gente também tem que trabalhar com a formação de hábitos [s5, p15.1].

Finalmente encontramos a idéia de que o professor deve ser um 'articulador' no processo de ensino-aprendizagem: – e*u acho que tem que ser um... um articulador, assim... um... dentro...* [s7, p11.1]. Como articulador? – *ele tem que articular mesmo, que ele tem que tornar o processo, procurar tornar o processo... não é... educacional, assim, mais prazeroso, mais aberto, mais próximo daquele aluno que está ali na tua frente... te olhando... às vezes pensando... o que é que aquele cara está fazendo lá... ou... aquela pessoa lá... aquela mulher, como eles dizem, está lá, está louca, dando aquele conteúdo que não tem nada a ver com a minha realidade... Eu acho que a gente tem que se aproximar! Eu acho que o papel principal do professor é buscar assim... é ser um articulador mesmo, dentro do processo, buscar... aí vai ter que ser um psicólogo também? Buscar entender a especificidade daquele aluno... a questão humana acho que pesa muito! É fortíssimo isso!* [s7, p11.2].

O entendimento do professor como um orientador surge na fala de vários professores, mas em geral, acompanhado da ação de 'mostrar': – *Então* *para mim o professor tem que ser um cara assim, tem que ser um orientador, ele trabalha junto com o aluno, lá, ele vai orientando, ele vai mostrando: "Olha, quem sabe esse caminho aqui é o melhor." Mas também se o cara diz esse aqui, o aluno vai lá e diz tem outro caminho. Vamos ver qual é o caminho; também serve, vamos lá, vamos fazer. Eu não tenho aquela coisa assim de fazer sempre do mesmo jeito. Eu acho que isso é a coisa mais importante no professor* [s6, p02.3].

Para completar seus posicionamentos sobre 'o papel que desempenha', desejo saber como o professor pensa realiza-lo, que elementos ele pensa que são necessários para implementar tal papel.

4.5.2.5 O professor deve dialogar... mas sem esquecer o conteúdo

O professor precisa dialogar com o aluno, afirma s7, pois, – ... *Eu acho que o primeiro passo é estabelecer esse tipo de relação em sala de aula; de diálogo. Uma relação dialógica, assim... não é, cada um falar o que está sentindo... Para mim, é o primeiro passo.* No entanto o conteúdo, não pode ser esquecido: – *Claro que eu vejo, também, que a gente não deve deixar o conteúdo de lado... Acho que não é esse aí o caminho. Essa percepção da importância do conteúdo, também vejo como fundamental. Mas, anterior a isso, creio eu, que vem a relação com o teu próximo.* [s7, p12].

A força do conteúdo é muito grande e é definidora da prática que o professor adota em seu trabalho diário. A necessidade de cumprir conteúdos aparece mesmo nos casos em que o professor não tenha clareza sobre que elementos lançar mão para desempenhar o seu papel.

4.5.2.6 Faltam elementos para a realização de seu papel

Para s1 o principal papel do professor é 'ensinar o aluno', no entanto não tem clareza sobre a forma de viabiliza-lo, pois: – ... *é isso que me tranca, por que... boa vontade... 'ai', o que não 'ai' é... é recursos... assim sabe... a gente fica meio perdida... tu te perdes.* [s1, p19]. Insisto na questão e s1 fala de sua prática, – *tem problemas que tu resolves de inúmeras maneiras... E eu acho que uma das... é tu pegar e sempre que colocar no quadro e tu vais resolver, deixar bem claro que aquilo ali é a maneira que tu estás resolvendo, que tu escolheu prá resolver... e que existem inúmeras maneiras de resolver aquilo ali e fazer com que eles procurem outra maneira de achar a resposta.* [s1, p20].

Por seu turno, s2 enfatizando o uso de exemplos, afirma: – *Eu nunca parto da definição. Eu parto sempre de exemplos, para depois a gente construir as definições, as conclusões, eu parto sempre de exemplos. Eu nunca boto esqueminha, definição,..., esqueminha assim não, eu parto de exemplos, se possível exemplos práticos, coisas práticas.* [s2, p13].

Para s5, o papel do professor é ser orientador, no entanto seu poder de transmitir conhecimento reaparece, quando fala sobre sua prática, pois: – *eu tento fazer com que... transmitir para eles certas coisas que eu tenho, mostrando para eles as diferenças... não só... a gente muda muito... Na minha aula as vezes saio fora muito da aula em si de matemática para justamente trabalhar com eles esse tipo de coisas: a comparação, como é que vive* [s5, p16.1]. E s5 envereda por uma questão de comportamento de seus alunos de escola particular: – *Eu faço isso muito na escola particular por que os alunos de escola particular, eles acham que todos vivem como eles vivem. Que chegam todos dentro da sala de aula, bem alimentados, bem vestidos, moram bem e o pai deixa de carro na porta. Eles não entendem que aquilo é a minoria*. [s5, p16.2].

4.5.3 O que pensa o aluno sobre o papel do professor

Na seqüência, indago: “Para teus alunos, qual é o papel do professor de matemática?” Meu propósito com esta questão é fazer com que o professor, assumindo a posição de aluno, fale sobre o seu papel. O professor ao expressar o que ele imagina ser a opinião do aluno, estará explicitando o que ele próprio pensa sobre o papel que o professor tem ou deveria ter, de acordo com seus critérios.

4.5.3.1 Professor sabe tudo!

Na fala do professor é forte a necessidade de ‘não errar’: – *Em primeiro lugar eles acham que o professor não erra nunca. Não tem o direito de errar. E aí até eu digo prá eles: – “o professor não erra, se engana. Nunca erra!” Mas é uma bobagem.* Assim como é clara a preocupação com o domínio do conteúdo: – *E outra coisa, eles acham que o professor não tem mais o que estudar. Que é praticamente impossível o professor de Matemática não saber alguma coisa de Matemática. E eles acham que a Matemática é só aquilo ali que eles estão vendo* [s1, p11.1]. O professor é também um repassador de informações: – *Eu creio que eles pensam que é alguém que está ali, para passar informações para eles...* [s7, p13.1]. *Informações... conteúdos! ...* [s7, p13.2] *Acho que eles entendem assim: passar. Principalmente... os nossos alunos do noturno... pessoas de uma faixa etária mais avançada...* [s7, p13.3].

4.5.3.2 Professor decodificador (explicador)

Aos olhos do professor os alunos são acomodados e por isso querem as coisas prontas: – *Ah, eles gostam muito das coisas prontas. Eu sinto isso, porque às vezes eu coloco alguns exercícios mais desafiadores pra* *ver se eles vão mais longe e um, dois, três atingem aquilo que eu estou pretendendo e o resto está me esperando lá, não é, e eu digo: – "Pessoal, vamos tentar". E eles: – "Não, vamos esperar que a senhora explique". Eles gostam muito da coisa pronta* [s2, p06.1]. E por que isso é assim? – *Ah, eu acho que isso é comodidade. Acho que eles vêem esse o nosso papel. A professora tem que estar lá na frente, explicando, explicando, explicando a matéria. Mas eu provoco, geralmente eu dou as minhas provocadas pra ver se eles deslancham, não é?* [s2, p06.2].

Em outro momento, s4 ao responder parece estar dando voz à 'mãe' que ela posteriormente revela ser: – *Hoje? Acho que hoje ele está muito exigente com o professor... eu acho... o aluno. Eu acho assim que os alunos acham que o professor tem que saber mais, que o professor tem que exigir mais, que o professor tem que dar mais, eles querem mais! Agora eles reclamam porque no fundo eles querem é mais* [s4, p05.1]. E eis a mãe surgindo: – *Eu como mãe, não é, eu tenho uma* [filha] *que está se preparando para o vestibular e ela estava na Escola Técnica e ela disse assim: – "Ah, troquei de escola por causa da greve"... e falando sobre os professores ela disse: "Mãe, os que a gente mais gosta são os que mais exigem, mais fazem a gente estudar e fazem a gente ir atrás e descobrir as coisas sozinha. É o que o aluno quer, no fundo, eles dizem que não é isso! Como é normal do ser humano. Se tu chegar agora e disser para aquela turma ali "Hoje, se vocês não fizerem em aula e quiserem levar esta folhinha para ler em casa, tudo bem..." Eu jogo que todo mundo sai de folhinha na mão e não vem na aula! Ou tu acha que vem? Não é, então o ser humano é assim! Tem que ser cobrado, tem que ser exigido, eu ainda acho que tem que ter limite. Tudo pode acontecer, mas com limite e com organização* [s4, p05.2]. Ao ser questionada sobre a questão de limite, s4 enfoca apenas a questão do tempo disponível para o cumprimento de tarefas propostas pelo professor: – *Limite até no... no... no tempo, tu dá um tempo, olha tu vai ter tantos dias para fazer tal e tal trabalho, porque se tu deixar pra fazer até... tu não faz! Acaba deixando sempre pra depois* [s4, p06].

4.5.3.3 O professor faz cálculos... contas

Ainda é forte, na cabeça do professor, a idéia de que ele, como aquele que sabe matemática, é um calculista, ou ainda, tem que ser bom de cálculo. Sobre este aspecto, assim se manifesta o professor: – *Os alunos de quinta é o primeiro ano que eu estou começando. Eu tenho mais experiência com os maiores, de sétima e oitava. Os de quinta, eles vêm aquele professor que faz contas, eu acho. Com os* [alunos] *da quinta, eu acho que é mais ou menos isso. E os da quinta está mais relacionado ainda com a vivência deles. Aí já depois da oitava sim, aí* [o aluno] *já se desperta e o aluno pergunta: – para que isso? Com os da quinta ainda não. Ainda estão... o conteúdo de quinta está mais relacionado mais ao cotidiano. Tudo, o conteúdo que a gente dá... não, isso aqui vocês podem usar aqui, com isso vocês podem fazer isso* [s8, p04.1].

No senso comum dos ambientes escolares, os saberes estão bem divididos, bem compartimentalizados, ou seja, história é para o professor de história, geografia para o de geografia, etc. Portanto, quem faz contas é o professor de matemática. E o próprio professor acaba admitindo esta divisão e assume seu papel de calculista ou passa a ser olhado com certas desconfianças sobre sua capacidade técnica.

4.5.3.4 Professor é o mantenedor da ordem (disciplinador)

Em outro momento da entrevista s1propõe a questão da manutenção da ordem (disciplina) em sala de aula e surge com um novo papel ou um novo enfoque para o papel do professor, a partir do entendimento dos alunos, pois .. *eu acho que eles... eles não pensam em aprender. Eles acham que o papel do professor é impor a ordem na sala de aula. Impor ordem, impor ordem e impor ordem* [s1, p24]. E prossegue s1: – ... *tem que ter um que mande mais do que eles prá mandar no colega deles. Já que ele não pode mandar... Então, ah professora... aquele tá fazendo isso aqui. A necessidade de ver o outro punido tem que ter alguém que puna. ... Acredito que é muito isso, por que eles reclamam muito isso. Pedem muito isso, professores mais... rígidos... severos... Não é o que eles querem, mas eles pedem. Eles não sabem nem o que estão pedindo. Não sabem nada. São tudo assim...* [s1, p25].

Por outro lado, há aquele aluno *problema* que nada motiva, pois... *a grande maioria dos alunos... a grande, não, mas... retiro o "grande", não é... Eu tenho um aluno* [com 15 anos, na quarta série] *que simplesmente, ele <u>detesta</u> o professor! ... porque ele é um aluno que ele já vem de diversas escolas... não é... um aluno... assim... com a gente classifica assim.... um problema... é um aluno que assim, que não...ele não se fixa em nada... ele não tem interesse... por nada! Tudo o que tu vai fazer para ele: – "Ah, não tou a fim, é muito trabalho..." Então, nada motiva ele a fazer as coisas. É um problema...* [s3, p07.1]. E s3 prossegue, demonstrando sua convicção de que a motivação do aluno poderia vir de fora, pois: – ... *muitas vezes eu estou querendo... querendo aproximar o conteúdo do aluno e nem assim tu consegue com que todos trabalhem... tu não consegues atingir todos, não é, que todos façam a mesma coisa... ou que cheguem àquela conclusão, não é, que cheguem... É muito dif... Eu acho assim... por que faz quatorze anos que* *eu trabalho... não é... Então, eu percebo assim, que a cada ano está mais difícil trabalhar com o aluno! Embora esteja sempre inovando, inovando, inovando, não é... E eu... eu estou achando muito difícil... Principalmente porque muitas vezes têm muitos alunos que tudo aquilo que tu faças, por melhor que tu tentes fazer para ele, para motivar o aluno, fazer com que ele fique, se concentre, nem assim tu consegue...* [s3, p07.2].

A alunos como este, s3 se refere como turistas... *são esses alunos que eu digo... que são os maiores... eles muitas vezes vêm para, para... para perturbar. Eles faltam mais do que vêm... eu digo que são os alunos turistas... e quando aparecem eles não querem nada... nada com nada! não é... estou aqui porque sou obrigado a estar aqui. Então... é difícil trabalhar! Muito difícil!* [s3, p08].

4.5.4 O ato de ensinar matemática

Na seqüência desejo saber o que pensa o professor sobre o ato de ensinar matemática. Na tabela de freqüência de termos usados nas entrevistas observo que o radical 'ensin' é muito pouco utilizado pelos professores, chegando ao extremo dos sujeitos s2 e s4 não o utilizarem em suas respostas. Com exceção de s6, sujeito que tem formação diferenciada no grupo (s6 é engenheiro), os demais sujeitos utilizam muito pouco o termo *ensinar*, o que – declaro desde já – contrariou totalmente a minha expectativa.

Termos	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
Ensinar	3		4		2	10	1	2

A partir das falas do professor, foram organizadas algumas categorias de respostas apresentadas à questão: – "O que significa *ensinar*?"

4.5.4.1 Ensinar é... dar um empurrãozinho

Ao ouvir a pergunta, s3, demonstrando certo espanto, diz: – *Aquilo que ele não sabe! Quer dizer... eu estou dizendo o que eu acho, não é?* [s3, p09.1]. Sim, mas é isso mesmo que me interessa saber, o que tu pensas sobre ensinar, ao que s3 prossegue: – *Por exemplo, eu ouço uma determinada questão ali... ele vai começar a fazer: "Professora, eu não entendi." Qual é o meu papel. Ir lá e ensinar... para ele. Fulano tu tens que fazer... começa por aqui... E deixa ele seguir... e vai sempre auxiliando no que ele faz... E não dizer: "Tu!" Não precisa dizer isso...* [s3, p09.2]. *Eu penso que é isso. Ensinar é tu... ir dando um empurrãozinho. "Tu faz isso... quem sabe tu faz aquilo." E deixa ele trabalhando sozinho, não é, e não dar pronto... Eu acho que é assim... não... ensinar... e dizer: "Tu tem que fazer isso e fazer isso e isso e dar a res... pronto para ele! Não é? Eu acho que ensinar é tu... dando... os passos que ele pode seguir para chegar... onde eu quero... onde ele... não é?*[s3, p09.3].

Em sua resposta, s5, parece não ter muito claro o sentido de 'ensinar' e ao responder, lança mão do 'interesse' e desvia o assunto para o 'aprender': – *... Eu acho assim, que o ensinar depende de uma coisa muito importante que é o interesse. Tudo aquilo que tu tens interesse, que te interessa, que tu necessitas, tu aprendes com facilidade.* [s5, p19]. Interesse de quem? – *Interesse dos alunos. No caso, por exemplo, um conteúdo de matemática é uma coisa que... os conteúdos tradicionais dificilmente despertam interesse. Agora o interesse de aprender é sempre voltado (assim)* *pra necessidade que tu tens.* [s5, p20]. Interesse, motivação são conceitos aos quais o professor lança mão para justificar sua postura majoritariamente empirista. Se o aluno não aprende é porque não tem interesse e não tem interesse porque não está motivado. No entanto, como afirma Piaget, a motivação é a dimensão energética da estrutura, portanto depende de uma construção interna do sujeito. Não está fora dele, é parte dele.

4.5.4.2 Ensinar é trocar idéias, fazer 'construir'

Ao ouvir o termo ensinar s6 afirma: – *Para mim, é assim, olha: ensinar, ensinar, no caso, eu acho que a gente ensina trocando idéias com o aluno, na realidade. Tu ensinas construindo uma coisa maior.* [p04.3]. E s6, procura exemplificar com um conteúdo trabalhado em aula: – *Então tu dizes assim: "Olha, a gente vai estudar razões e proporções. Mas eu não vou dizer para vocês o que é razão e proporção, não vou dizer nada. A gente vai construir isso aqui juntos".* Como é que tu fazes? – *Então eu coloco lá uma fração no quadro e digo: "O que vocês acham que significa isso aqui?" Isso é o que eu acho que é ensinar para o cara.* E, o que acontece? *E aí, a partir daquele momento, um vai dizer que é uma fração, outro vai achar que é um número racional, sei lá eu, vai ter mil respostas. E eu acho que a partir disso aí a gente vai pegando aquelas coisas assim e vai construindo um conceito de alguma coisa.* [s6, p04.4].

Sem dúvidas, s6 revela estar tentando superar o modelo tradicional de prática empirista, levar em consideração o que pensa o aluno, mas a forma que utiliza no exemplo citado, não dá conta das diferenças estruturais que porventura os alunos apresentem. Mas, sem dúvida, s6 demonstra preocupação em assegurar a posição do aluno, e em garantir a voz do outro: –

Então eu acho que para eu ensinar o cara lá eu tenho que fazer assim, eu tenho que fazer ele construir a coisa que ele vai aprender. E aí quando eu digo ensinar, estou ensinando para ele a aceitar a opinião do outro, saber que as pessoas têm opiniões diferentes, eu estou ensinando o cara, eu estou mostrando alguma coisa melhor para ele, para ele viver melhor, eu acho que é assim. [s6, p04.6].

4.5.4.3 Ensinar é... ser exemplo

Para s7 o ato de ensinar está atrelado a seu comportamento: – *em primeiro lugar, eu acho que se a gente ensina alguma coisa a outra pessoa, a gente ensina através do exemplo. Através do exemplo.* Ao ouvir a palavra ‘exemplo’, pensei tratar-se dos exercícios resolvidos naquelas famosas aulas ‘práticas’, onde apenas são resolvidos exercícios envolvendo cálculos e fórmulas. Mas, na seqüência de sua fala s7 esclarece sua posição: – *Não posso chegar para ti e te falar alguma coisa... e agir de outra. Em primeiro lugar, para mim, isso é básico em qualquer relação. O exemplo é muito forte. E... eu acho que, a gente não ensina... na verdade, a gente não ensina os nossos alunos... Eu acho que a gente estabelece com eles uma troca... uma troca... eu acho que a gente tem muito para oferecer, mas também recebe muito.* [s7, p14.1]. Em sua tentativa de superar o antigo conceito de ensinar, como ação unilateral exercida apenas pelo professor, s7 diz: – *Eu acho que se estabelece uma troca.* E pensando em justificar sua afirmação, pondera: – *Quando... assim... quando se passa... Aí tu vais dizer que estou sendo demagoga, mas se eu passo um conteúdo lá no quadro, um determinado conteúdo, eu tenho um trabalho para vencer. Não vai ser desenvolvendo uma expressão no quadro, ou uma equação no quadro, que eu estou ensinando...* [s7, p14.2]. Mas as dúvidas continuam aparecendo em sua fala: – *Eu acho que a gente se coloca* *muito assim, como eu sei. Eu não estou fugindo disso, eu acho que a gente se coloca. Eu procuro me policiar, mas eu acho que a gente se coloca dessa forma, a gente passa... e... vai explicar... e – Tu não entendeu, tu não conseguiu entender? E o coitado – Não, não consegui. Tem muito disso aí.* [s7, p14.3].

A partir das respostas apresentadas, observa-se que 'ensinar' enquanto conceito é uma noção difusa entre os professores. Em geral, ao referir-se a 'ensinar', o professor usa outros termos complementares e, acaba por fugir do assunto como na expressão: – *Ensinar... eu acho que é ele entender... ele questionar alguma coisa. Acho que quando tu estás ensinando, ele vai ter que te fazer alguma pergunta, porque se ele simplesmente fizer a mesma coisa, eu acho que não é exatamente ensinar. Então é trazer um questionamento. É, se fosse assim...* [s8, p07].

4.5.5 O ato de aprender matemática

Naturalmente, como eu vinha perguntando sobre 'ensinar matemática', passo a inquirir sobre o ato de aprender matemática. Sem dúvidas, de tanto falar com professores e transitar por ambientes escolares, ditos *ambientes de aprendizagem*, contava como certo que *aprender e aprendizagem* seriam termos muito presentes na fala do professor, como ocorre, por exemplo, em discursos oficiais dos escalões superiores da hierarquia educacional, onde tais termos são até banalizados. No entanto, para minha surpresa, em entrevistas de aproximadamente 60 minutos, os sujeitos de minha pesquisa utilizaram muito pouco o verbo aprender e o substantivo aprendizagem. Fazendo um recorte do quadro de freqüências de uso de alguns termos, pode-se observar com relação ao radical 'aprend' a seguinte freqüência:

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
Aprend	2		4	6	6	22	3	5

Observo que s2, por exemplo, não usa esse termo e, exceto s6, os demais professores usam no máximo seis vezes. A discrepância em s6 me leva a supor que sua formação diferenciada em área tecnológica (s6 tem formação em engenharia) venha a influir em sua forma de falar e por conseqüência nos conceitos que utiliza. Ou será que formação específica na área da educação acaba por levar o sujeito a evitar o uso de alguns termos?

Mas, deixando de lado as especulações, vamos à questão: – o que significa aprender? Das respostas encontradas, faço a seguinte classificação:

4.5.5.1 Aprender é... exercitar

Matemática se aprende exercitando, diz s3: – *Exercitando, trabalhando... eu acho que a Matemática não vai assim, só em cima da teoria que ele vai conseguir aprender alguma coisa, então tem que fazer o aluno* <u>*praticar*</u> [afirma com ênfase] ... *ele chegar à sua própria conclusão... Tu lanças, dá os toques... dá os caminhos que ele,... os prováveis caminhos que ele pode seguir e deixa ele trabalhar...* [s3, p13.1]. Mas, o que é exercitar? – *Eu, por exemplo, uso muito material concreto... esses... claro, eu tive... que... construir... tu tem muita coisa em cima dos joguinhos para conseguir entrar na cabecinha deles, porque senão eles não conseguem.* [s3, 13.2].

Na seqüência, s3 parece ter consciência de que não é possível aprender apenas pelo uso da visão, muito embora o ato de *ver* ressurja no final de sua fala, como podemos acompanhar na seqüência: – *só visualizando, a maioria das explicações eles não conseguem... então eles têm que praticar, eles têm que caminhar junto contigo para* ***ver*** *fazendo é que vão conseguir aprender...* É muito clara a força da repetição (exercício, exercício, exercício), como possível forma de garantir a aprendizagem, transformando-a naquele procedimento que eu denomino *trabalho braçal* sem dispensar, obviamente, o uso da visão.

É interessante acompanhar a narrativa de s6 que relata estar passando por mudanças na compreensão do ato de aprender. Observo que s6 começa a falar pausadamente, como quem reorganiza suas idéias: – *Eu acho que a única maneira que se aprende... eu modifiquei muito a minha maneira de pensar... eu pensava antes que era fazendo exercícios, vou te ser bem sincero. Eu achava que era assim, olha, que eu mostrasse uma teoria, depois eu fazia um exemplo, passava vários exercícios, não necessariamente iguais, mas que tivessem alguma relação com aquilo ali e era assim que a gente aprendia.*

Em sua alocução s6 demonstra estar vivendo um processo de mudança da forma de compreender o ato ensinar-aprender, apesar de suas dificuldades em expor uma proposta clara e acabada. – *A minha idéia hoje de aprender Matemática... como aprender Matemática... a Matemática a gente já tem ela intrinsicamente, a gente tem com a gente a Matemática, a gente usa no dia-a-dia, não tem... No dia-a-dia tu acordas já pensando em Matemática.* [s6, p05.1]. E continua procurando organizar suas idéias: – *Para mim a Matemática já está envolvida em tudo aquilo ali.*

Volto a insistir na questão: Sim! Mas como é que se aprende matemática? Ao que s6 afirma: – *Então eu acho que a gente aprende Matemática mesmo, construindo conceitos daquilo ali. Então, como é que a gente faz? "O que é um número racional?" Vamos supor que, eu acho que a Matemática tem muito assim... muita definição, eu acho que isso atrapalha um pouco as próprias pessoas. Porque a definição quem tem que fazer é a gente, eu acho. Então, o que é um número racional? O melhor, talvez, fosse eu mostrar primeiro o que é o sistema de numeração direitinho e propor "quem sabe a gente coloca um número sobre o outro aqui, vamos pensar o que acontece com isso aqui, tal e tal"... porque, por exemplo, não pode ter zero no denominador... Isso eu acho que é aprender Matemática. Então a pessoa saber lidar com essas coisas assim, não é, e não só com conceito.* [s6, p05.2].

4.5.5.2 Aprender é... buscar, por interesse

Uma variante da idéia apresentada no item anterior, *aprender é exercitar*, aparece na afirmação: *aprender é buscar*. Ouçamos o professor: – *eu acho que aprende... a pessoa aprende... buscando. Aprende... Têm várias maneiras. Tu aprendes com memória... Têm vários tipos de memória: visual, auditiva.* [s4, p09.1]. Explicitando o significado de *buscar*, s4 afirma com ênfase: – *mas tu aprende aquilo que te interessa pra tua vida! Aquilo que tem a ver contigo, tu aprende. Agora aquilo que não tem a ver contigo, tu estuda, tu decora, tu faz a prova, daí...* [s4, p09.2].

De forma semelhante, para s6: – *Primeiro eu acho o seguinte: a gente aprende aquilo que a gente gosta e a gente gosta daquilo que a gente acha que tem importância para alguma coisa e a gente acha que aquilo vai ter importância para alguma coisa se a pessoa que está te ajudando, está te* *instigando alguma coisa, fizer com que tu penses que aquilo tem... tu entendas que aquilo tem uma importância para ela, vai ter uma importância para ela na vida dela, porque senão a pessoa não... ela vai passar pelas coisas no caso, não é?* [s6, p13.1] E o poder de instigação, convencimento ou sedução está no professor, portanto externo ao aluno.

É o professor quem detém o poder, pois: – *Então aprender é isso, aprender é a pessoa,... é tu tentares fazer com que a pessoa pense ou entenda que aquilo ela vai... vai servir para ela para alguma coisa, no caso, não é? Ou se não for materialmente, sei lá, mas pelo menos para a cabeça dela, ela vai conseguir entender melhor as coisas, alguma coisa vai acontecer com ela ali no caso, não é? Então eu acho que a gente aprende assim. Senão a gente não aprende,* (e o aprender se mistura ao ensinar) ... *a gente fica mentindo, a gente fica lá, resolvendo umas coisinhas... passou na prova? Está... passou!* [s6, p13.2].

Gostar ou querer. O aprender acaba reduzido a uma questão de desejo sem estrutura, sem organização interna por parte do aluno: – *Primeiro... ele tem que querer aprender. Acho que é por aí. Querer aprender! Acho que... o professor é importante... o professor, ou... alguém que domine... eu não sei... eu... o professor eu vejo como importante, sim, mas ele tem que querer entender e tem que se estabelecer assim... uma troca... eu acho que tem que ter uma troca, eu não posso chegar lá e dizer: Eu sei, eu domino este conteúdo, eu vou te ensinar. Não é assim...* [s7, p38].

Insisto na questão: Mas como é que o aluno aprende? – *Olha, no momento em que eu dou uma questão para eles, com números diferentes, e eles por si, eles vão lá e... então: – 'professora, é assim...' Eu acho que é mais* *aquele aluno que diz: – 'professora, é assim'. E se fosse assim: – 'é assim'. Claro que numa prova a gente vê quem fez, quem não fez. Se bem que tem o nervosismo deles, eles ficam muito nervosos em sala de aula, numa prova... Porque a gente vê em sala de aula quem faz, quem trabalha.* [s8, p12].

4.5.5.3 Aprender é... dar o estalo

Deparo-me novamente com a justificativa antiga de que o problema se deve ao fato de que a criança não foi exigida em casa ou em séries anteriores: – *É exigida em casa e também nas séries iniciais, já. Porque no momento, assim ó, se numa 3ª série o professor... não está muito aí... o da 4ª começar a exigir muito se eles não aprenderem aí, então na 5ª e daí por diante. Então, eu acho que começa nas séries iniciais, exigir bem da 1ª para a 2ª. Com certeza, se tu passas da 1ª para a 2ª quem sabe ler bem...; meio termo:... fica. Da 2ª para 3ª, mesma coisa.*

Neste momento, s8 lembra de uma colega, estagiária em turma de quarta série: – *A Ad, ela está fazendo estágio na Federal... na quarta série, ela vai fazer pós-graduação. Ela está terminando a licenciatura na Federal... hoje de manhã ela tem uma aluna na quarta série que não sabe o processo de divisão, 10 por 2. Ela não sabe porque vai colocar o 5, que ela tem que multiplicar e depois diminuir.* O que ela não sabe? – *O processo ela não sabe. Então uma aluna de quarta série... porque da segunda para a terceira ela não foi bem trabalhada.* [s8, p18.1].

Pergunto então sua opinião sobre a causa do problema e s8 prossegue: – *Eu acho que a maioria, quando a dificuldade vem é que não foi trabalhada no início. É porque lá na 2ª ou na 1ª série não deu o estalo ou por algum problema emocional ou até mesmo de aprendizagem.* [s8, p18.2].

E pela primeira vez, no conjunto de entrevistas, aparece o velho e conhecido *estalo*, de profundas raízes aprioristas. O termo estalo está ligado a uma antiga brincadeira usada em festas em que *balas de salão* estalavam (produziam um estouro) quando puxadas pelas pontas, por duas pessoas. O estalo era o sinal de que a brincadeira tinha funcionado, por semelhança, quando uma criança aprende alguma coisa, estaria ocorrendo um estalo.

Indago então, o que significa *dar o estalo*? Ao que s8 responde: – ... *É ele enxergar, é ele ver, ele... sei lá. No caso de uma divisão... Até comento com os meus alunos: – olha, hoje estou saindo de uma recuperação paralela e que tem um aluno que disse: ah, professora, então era isso!* E s8, dando entonação de surpresa em sua fala, comenta: – *Pô, eu dei no início do bimestre... eu continuei, fiz a primeira prova, fiz a segunda prova, fiz a de recuperação hoje. Então recém hoje ele se deu conta de uma coisa que eu queria que ele tivesse se dado conta no primeiro dia. Então...* E sem encontrar elementos que justifiquem o fato do aluno não ter aprendido, apesar de todo o esforço despendido e das inúmeras chances que o mesmo teve, depois de tantas pro-vas, s8 sentencia: – *É que as turmas são grandes, a maioria...* Quantos? *Eu, nas 5ª, estou falando nas 5ª eu tenho 28... é até razoável. Eu tenho até uma de 6ª que tem 40 alunos.* [s8, p19].

Insisto um pouco mais e comento: – Falastes assim: – ‘ele não se deu conta’. O que é ‘se dar conta’? Para responder, s8 medita um pouco e modifica minha pergunta, negando-a: – *O que é não se dar conta?* E lança mão de um exemplo numérico, cujo escopo é extremamente complicado e minha pergunta se perde: – *Este não é bem o exemplo de 5ª, mas uma multiplicação de um polinômio em que ele tem que multiplicar o primeiro termo pelo primeiro número, o primeiro pelo último... o processo sabe, lá* *desde o início, ele não se deu conta que ele tem que multiplicar todos os números, que ele não vai multiplicar uma parte e deixar assim, não terminava a conta.* [s8, p20].

Volto à questão: – Mas o que esse 'se dar conta' tem a ver com aprender? Observo o esforço de s8 ao organizar suas idéias para me responder, o que fica evidente na repetição, com ênfase, da questão: – *Com aprender? <u>O que o estalo tem a ver com aprender</u>? Olha se pelo menos ele fazer algum exercício usando aquele método ele reproduzir um outro igual. Em últimos termos seria isso.* E a aprendizagem foi pelo espaço: – *Mesmo que ele não tenha aprendido, mas que seja reproduzido, então, mais ou menos.* [s8, p21].

Insisto uma vez mais: – E se tu mudares o exercício? – *Por isso mesmo, ele sabe fazer assim, aquele exemplo dado, se tu passares da fração para número decimal, quer dizer, na quinta não, ai ele já não sabe. Então eu acho assim que eles atualmente quase todos, eles meio que... é tudo uma coisa automática... multiplicam o primeiro com o primeiro, o segundo com o último, não sabendo a lógica, assim ó, se tu aprendeu a fazer com números inteiros, que diferença tem fazer com fração, se tu aprendeu fração lá adiante ou com números decimais.* [s8, p22]. Registro, neste momento, duas observações na fala de s8: em primeiro lugar, para o professor de matemática 'memorização de um algoritmo se confunde com lógica'; em segundo, o professor não percebe que há profundas diferenças em trabalhar com números inteiros e com frações ou números decimais, mesmo usando o mesmo algoritmo.

Mas s8 prossegue em sua fala, buscando justificar o porque das dificuldades dos alunos: – *Eles não sabem* ***juntar****. O maior problema é juntar as coisas. Esses da 4ª, eu trabalhei fração com eles, adição: somei duas frações, depois multiplicação. Ai botei numa conta só, primeiro uma adição, depois uma multiplicação, todo mundo disse que não sabia fazer. Então está faltando alguma coisa... eles não conseguiam juntar.* [s8, p22].

Á medida que as entrevistas vão acontecendo e as respostas vão surgindo, observo que cada vez mais o professor demonstra claramente suas dúvidas e as lacunas deixadas pela falta de uma análise teórica mais consistente. O professor não tem clareza sobre o que é aprender, não construiu o conceito *aprender*.

Continuo perseguindo o mesmo objetivo, ou seja, fazer com que o professor explicite o significado que ele tem sobre *aprender*. É óbvio que quem aprende, aprende por si e para si próprio, mesmo com a colaboração (interação) do meio e do outro. Por isso pergunto: "um aluno pode aprender matemática sozinho? Diante desta questão surgem as seguintes colocações:

4.5.5.4 Aprender é... ter interesse

Acompanhemos a fala do professor, ao responder se um aluno pode aprender matemática sozinho: – *Ah, eu acho que sim. É o que eu te digo, é o interesse dele ter, não é? Eu tive* (ato falho?) *um ex-namorado da minha filha que foi fazer vestibular para medicina, tu sabes o que tem que estudar, e tinha momentos que eu tinha a sensação que ele sabia muito mais Matemática do que eu.* (Expressão que tem a força de seus 20 anos de prática profissional). Por quê? *Claro, ele viu uma base da Matemática que todo mundo vê. Na época ele fez o que... Escola Técnica e depois foi prestar vestibular para medicina, que era o que... vinte e tantos por vaga. O guri devorava livros e* *mais livros, de tudo que era tipo de coisa. Às vezes ele estava em casa, fazendo as coisas e eu via que era uma loucura, quer dizer que isso aí eu acho que é do interesse, ir atrás, não é?* E a função do professor? – *Claro, algumas coisinhas tu tens que dar uma empurradinha, não é?* [s2, p15].

Mas, a questão gera dúvidas no professor: – *Sozinho? Depende... ah! Só aqueles... Eu acho que sozinho... acho que não.* [s3, p16,1]. Na seqüência s3, pausadamente, refletindo sobre o que dizer, e lançando mão de uma dupla negação, continua: – *Alguns, até, eu não diria que não. Até tem. Sempre têm aqueles que se destacam mais, não é?* [s3, p16,2]. E quais são os que se destacam mais? – *Ah, é aquele que... que eu digo... é o indagador, não é? Que está sempre perguntando em sala de aula. Então, aquele, para mim é o... geralmente é o que sai melhor!* [s3, p17].

O apelo à falta de interesse parece ser lugar comum: – *Pode. Muito difícil, muito difícil. Porque não é o interesse da maioria dos alunos aprender.* [s4, p12.1]. E o professor lembrando a sua própria experiência, sentencia: – *Olha, poder eu acho que pode. Eu... não aprendi geometria, então na época a gente ficava com o livro e eu ia fazendo sozinha. Muita coisa eu me dei conta disso, mas o aluno tem que querer. Os meus alunos lá sozinhos, eles não querem nada, mas eu acho que sim.* [s8, p28].

Além da falta de interesse, há o imperativo social 'ter que ir para a escola': – e*les vão pra a Escola porque tem que ir, eles estudam porque tem que estudar, não é porque gostam...* [s4, p12.2].

4.5.5.5 Aprender é... viver

Na seqüência o professor, buscando evitar a armadilha do 'interesse', demonstra estar construindo o aprender como processo: – *Eu* *acredito que sim. Bom, primeiro porque a Matemática está na vida dele. Então eu acho assim, olha, o aluno, aquele que tem... não é vontade, não vou dizer assim. A vontade é intrínseca na pessoa.* E o próprio professor se questiona: – *Como é que ele vai aprender Matemática sozinho? Ele comparando coisas. Comparando, ele já está aprendendo Matemática. Então, no momento, por exemplo, que ele... têm vários conceitos, várias coisas assim, então lá pequenininho lá, quando ele compara, vamos falar assim, olha, eu acho que é do livro da Kamii que eu acho que fala do conceito de número, que fala de uma bolacha quebrada em quatro partes e de uma bolacha inteira. Então mostra para uma criança e qual é que é o maior? Ela vai dizer que é aquela que está quebradinha em quatro partes, está! Mas a partir do momento em que ela já fez esta comparação, ela já está aprendendo... então vai passar um tempo que no conceito... lá na cabecinha dela, ela vai chegar num momento de ver que é a mesma coisa, que é só juntar ali e tal... Então ela está aprendendo Matemática, eu acho que ela consegue aprender, eu acho que não tem...*

Na continuidade de sua fala o professor se dá conta da importância da interação, lembrando o caso de sua filha de cinco anos de idade: – *Claro que tem toda uma característica, por exemplo, eu fico pensando assim, a minha filha, a gente dá uma condição para ela aprender, não é? Têm uns que vão ter muito mais dificuldade, que vão precisar de alguém... Por quê? Porque o ambiente onde ele vive não proporciona aquilo ali, não é? Mas se o ambiente que ele tiver, tiver um local direitinho, tem uma mesinha para ela fazer as coisas dela, ou deixar os recortes, deixar cadernos a riscar por cima, ela tem o lugarzinho dela ali, eu acho que ela aprende, com certeza, tem todas as condições.* [s6, p07].

E mesmo expressando sua dúvida: – *Acho que pode...* [s7, p39], assim se posiciona s7: – *Mas tem momentos que não pode, porque não tem... aquela compreensão, não é, precisa duma intervenção, precisa de um auxílio... para fazer com que repense... porque não é bem assim... tem momentos que há necessidade, eu acho, se todo aluno pudesse aprender sozinho...* [s7, p40].

Passo a abordar o tema aprendizagem de matemática, sobre outro enfoque e questiono o professor se: "Um aluno pode aprender matemática em grupo?"

Em sua fala, o professor demonstra que o uso de trabalhos em grupo (dois, três ou mais alunos) é uma prática da qual ele lança mão em alguns casos. Muito embora algumas diferenças na forma de organização dos grupos, este tipo de trabalho favorece a integração dos alunos, assim como a aprendizagem daqueles com maior nível de dificuldades. Mas, em todos os casos, o professor precisa ter controle sobre o desenrolar das atividades.

4.5.5.6 Uso esporádico de trabalhos em grupo

O trabalho em grupo parece ser uma concessão do professor: – *É... normalmente o trabalho é individual. Mas trabalho em grupo (hummm) eles se organizam da forma que eles querem, assim desde que, claro, não vai ser metade da aula, não é, vinte alunos num grupo, fica complicado dentro do espaço reduzido como a gente tem, mas procura se trabalhar... aí eles se organizam cinco, seis, às vezes duplas que se afinam melhor...* [s7, p24]. É uma prática que permite aos alunos uma aula mais leve, mais descontraída: – *Trabalhos em grupos mais ou menos como estes que eu te disse, histórias em quadrinhos, deixei eles fazerem em grupos* [referência a atividade desenvolvida em aula anterior], *qual foi a outra coisa que eu...* [s2, p19,1]. Sempre com o controle do professor, pois: – *Tem uns deitadinhos, sempre, não é? Mas agora eu, trabalho em grupo..., eu acho que tem que ser na sala de aula.* Por quê? – *Trabalho em grupo, se tu mandares o fulaninho fazer em casa, se reunir..., a gente sabe que dois, um faz e outros vão atrás.* E a necessidade da presença do professor é justificada ao responder a seu próprio questionamento: – *Mas qual é o objetivo da gente? Que eles aprendam aquilo que eles estão fazendo. Então o trabalho em grupo eu prefiro fazer em sala de aula, começar em sala de aula, nem que tenha que terminar outro dia em sala de aula.* [s2, p19,2].

Como a coordenação geral tem que ser exercida pelo professor, então: – *Depende do trabalho de grupo. O trabalho de grupo tem boas... tem... como é que eu vou te dizer, é um trabalho que dá mais trabalho, o trabalho de grupo, porque tu tens que coordenar o trabalho e ver se todo o mundo está trabalhando, porque de repente um só faz tudo e os outros conversam outras coisas e não trocam idéias,* [fico pensando: como é possível conversar e não trocar idéias? É claro que o professor está afirmando que os alunos conversam outras coisas, que não o conteúdo que ele está apresentando, mas por que não aproveitar os interesses dos alunos?] ... *não trocam experiências, porque eu acho que para o professor é uma das tarefas mais difíceis pra... pra fazer com que funcione como deve ser, pra trocar idéias, pra cada um elaborar aquilo que sabe, não é?*[s4, p11.1].

4.5.5.7 Trabalho em grupo? Sim. Mas o professor define

– *Olha, eu... como é que eu vou dizer... eu gosto muito do trabalho em grupo. Mas eu procuro colocar... Quando eu faço trabalho em grupo, tem* *uma aula que eu deixo... ele escolher... no caso, assim... eles formam grupos, eles formam com os colegas que eles quiserem, não é? Na outra aula então, eu pego aquele que... não é?, que sabe um pouquinho mais, o que eu dei... então eu faço grupo com aquele que não sabe. Então aquele ajuda, explica! Eu gosto muito de trabalhar assim com eles.* [s3, p21.1].

Na verdade, quando eu trabalho com eles em grupo, eu já aproveito para misturar os grupos, porque eles são assim, se formam... Normalmente, dentro do próprio grupo da sala de aula, se formam subgrupos, então, aqueles que só querem trabalhar juntos, ou porque um trabalha, outro se encosta, um gosta mais do outro, então eu procuro fazer essa mistura com eles. Por exemplo, chego na aula, vamos fazer grupos de três, então organizo três papeizinhos com o mesmo número, boto num saquinho, distribuo. Agora quem tem o mesmo número, ou a mesma cor... [s5, p33.1]. E eles aceitam bem isso? – *Não. Quando se misturam assim, normalmente e a mistura não cai no agrado, fazem como a gente às vezes faz com as técnicas de grupo, quando fazem reuniões de professores e às vezes tu cais num grupo que tu não estás muito a fim, tu trocas o papelzinho com outro (riso), entende?* [s5, p33.2]. A força do controle do professor é soberana: – *Então eu faço muito assim, por exemplo, se eu dou uma questão que eu quero que, pra fechar no grupo. Cada uma faz a sua, separado. Tá, agora nós vamos juntar as idéias de vocês no grupo e vamos formar uma só, do grupo, com todas. Assim eu sei que todos participam. Agora se tu dá uma questão assim e diz: Vocês, em grupo, respondam esta questão, um faz e os outros nem lêem o que os outros estão fazendo. Porque o adolescente é... deve ser uma característica do adolescente...* [s4, p11.2].

Eu acho o trabalho em grupo importante, se tu souberes direcioná-

lo. Direcionar, que eu digo assim, não precisa tu dizeres, tu seres o dono do trabalho, mas tu souber direcioná-lo. Por quê? – *Porque tem muita gente que individualmente não mostra a capacidade que tem. Que no grupo, às vezes, ela consegue se expressar... porque ela sozinha, ela não... isso vem tudo acho que de antes, da pessoa, da juventude, da própria infância, não é? Então, têm pessoas que têm uma facilidade maior de se comunicar, têm outras que tem uma dificuldade nisso aí, no caso. Então, no momento em que ela está num grupo, ela mostra às vezes a capacidade que ela tem e que às vezes tu desconheces numa pessoa. Claro que tu tens que saber direcionar direitinho, porque se tu botares num grupo, por exemplo, que uma pessoa tomou conta do grupo evidentemente que ela vai ficar com aquela mesma... então tem que fazer um trabalho de tal maneira em que todos participem, todos dêem opinião.* [s6, p08.1].

4.5.5.8 Trabalho em grupo e a questão de escolha da parceria

E como fica a questão daqueles alunos que tenham restrições para a participação em trabalhos com algum colega em particular? – *Eles sabem, eles já sabem o meu sistema, não é, eles sabem... como eu trabalho com a mesma turma eu deixo bem claro como eu gosto de trabalhar com eles, então, eles nem questionam nem nada! Eles sabem, não é? então...* [s3, p21.4].

O trabalho em grupo reconhece o professor, é uma possibilidade de troca entre pares, principalmente quando alguém se destaca: – *Então sempre tem alguém que sabe mais... então ele vai lá, explica a matéria... para o coleguinha aquele, que não sabe. Porque muitas vezes, o aluno ajudando o colega, de um colega para o outro, ele entende melhor do que no caso do professor... não é?*[s3, p21.2]. Assim também se expressa s8: – *Eu até pensei* *primeiro em trabalhar sozinho, mas em duplas um tira muitas dúvidas do outro. A conclusão que um tira passa para o outro. A conclusão que um tira passa para o outro. É bem produtivo.* [s8, p30].

De forma semelhante s2, diz: – *Eu gosto também de mesclar grupos, não é, colocar um que seja mais espertinho, para ajudar, tipo monitoramento. Então um ajuda o outro e isso aí faz bastante efeito, sabe, um ajudando o outro.* [s2, p19.3]. Mas essa prática não substitui a aula tradicional, pois... – *claro que as provas sempre tem que ter. Tu sabes que é tradicional, não é?* [s2, p19.3].

É interessante observar que o professor transfere para o aluno que 'aprendeu com mais facilidade' ou para o 'mais espertinho' a mesma possibilidade que ele professor tem de 'transmitir' ensinamentos via expressão oral, pois: – *Tu podes explicar de mil e uma forma... e não... ele ainda não entendeu! Aí, se o aluno entendeu, ele vai lá e explica... com a forma dele, não é?, com as palavrinhas dele... e ele entende! Então, eu gosto muito de trabalhar em grupo.* [s3, p21.3].

O trabalho em grupo pode vir a permitir a eclosão de capacidades individuais ainda desconhecidas, pois: – *Então por isso que eu acho importante esse trabalho, por exemplo, que eu te falo de Projetos, bom, é tu colocares uma questão que seja instigante para todos, no caso, que aquela questão ali mexa com a cabeça de todos, todos vão dar opinião. Não tem uma resposta padronizada, direitinha, não, cada um vai construir um conceito de alguma coisa. Então eu acho importante o trabalho em grupo, eu acho. Não que o trabalho individual não seja. Acho também que é importante a pessoa saber, ela mesma discernir, fazer as coisas dela. Mas acho que um trabalho* *bem direcionado, assim, nesse sentido, tu consegues fazer com que a pessoa se desenvolva até mais. Pessoas, às vezes, que tu nem dá valor às vezes, sabe? No entanto, naquele grupo ela consegue mostrar alguma coisa, não é?* [s6, p08.2].

4.5.5.9 Como respeitar o tempo de aprendizagem de cada aluno?

Normalmente, tu tens que fazer aquilo pela média; tem uns que (pssss) rapidísssimo! Tens outros que passa três dias, três dias e eles não terminam e então tu tens que ir fazendo, eu faço normalmente pela média. Quando eu vejo, porque o tempo que eu organizo muitas vezes não é suficiente ou às vezes ele é mais que suficiente para realizarem aquela tarefa, às vezes tu imagina na tua cabeça que eles vão demorar um determinado tempo e demoram menos ou demoram mais e então eu faço normalmente pela média, não é? Tu tens a maioria, tu já conheces os alunos, já sabes quais são os mais lentos, tu vês que aqueles são só os que não terminaram, a gente... [s5, p34.1]. *Eu sou flexível, inclusive eu sou muito flexível, não é, eu deixo... ah, não conseguiu hoje, ah, pode entregar amanhã? Pode entregar depois? Entende? Eu acho assim que eu até sou meio mãe, assim, sabe?*[s5, p34.2]. Quando dizes 'aqueles', a quem estás te referindo? – *Aqueles mais lentos, que não quer dizer com mais dificuldades, não quer dizer menos capazes, são aqueles que o ritmo é diferente dos outros.* [s5, p34.3].

Uma expressão muito comum na fala do professor é a que se refere aos 'interesses' dos alunos. Em geral, quando o professor fala sobre os interesses dos alunos, expressa que os mesmos têm interesses estranhos aos interesses da sala de aula e não consegue encontrar uma forma de aproveita-los em seu trabalho.

4.5.6 Sobre interesses do aluno

4.5.6.1 Interesses gerais

Os interesses que o aluno tem, são externos ao ambiente da sala de aulas, pois – *... eles gostam de ir pra festas, estar em grupo, ver um filme, não é?... Alguns beber, fumar, não é? Se divertir, é mais ou menos isso... até porque a nossa cultura é assim.* [s4, p13]. Se a sala de aulas é lugar de estudar, o professor deixa muito claro em suas respostas, a distinção entre o estudar e o brincar, ação esta não condizente com o ambiente de uma aula de matemática, pois: – *Olha, eu sinceramente... às vezes fico pensando... eu nem sei te dizer o interesse deles... é é é... Por eles, eles podiam passar a manhã toda brincando, jogando... não é?* Sim, mas tu usas isto em aula de matemática? *Bem... eu faço jogos... não é?... trabalho assim com... com tudo assim que eles possam trabalhar... em duplas, em grupos, um ajudando o outro... Então, eu trabalho dessa forma, até para ver se eu consigo... com que todos trabalhem! Não é? Então eu trabalho em cima de joguinhos! Nessa parte de motivação, assim... quer dizer... para ver até se desperta mais... o interesse deles...* [s3, p11]

Mas, a distinção (e a exclusão) entre brincar e estudar é marcante e o professor tem consciência de que a criança prefere brincar, mas não sabe como aliar a brincadeira a uma atividade 'séria', ou melhor, não sabe como transformar o aprender em uma gostosa e interessante brincadeira: – *Ah, como é que eu vou te dizer... ah, por exemplo assim ó, eles podendo estar na rua... ta bom, ta ótimo! Tendo uma bola para brincar, tá ótimo! Então... por isso que eu digo, na... Matemática, então eu levo muito pro lado dos joguinhos, coisinhas que eles podem manusear, que eles podem, não é, estão ali em* *grupinhos, estão brincando... ao mesmo tempo que eles estão brincando eles estão trabalhando, estão... adquirindo alguma coisa... não é?... é esse tipo de interesse que eles têm...* E, naturalmente o pensamento do professor se desvia para a cobrança que a família fará no final do ano, se a criança não alcançar aprovação. Então, para que tal não venha a acontecer, a solução é dar matéria atrás de matéria: – *porque ali... essa escola que eu estou... ela... ela é assim um local que tu vê... como é que eu vou te dizer... os pais não se interessam muito! Não é? Eles não querem saber como é que está o filho! Eles só vão lá no final do ano, brigar com a professora, por causa da nota!* E a justificativa é que – *o problema... dali é... uma comunidade onde tem muito, roubo... muita droga... não é, então, sei lá eu..., acho que a perspectiva de vida..., eles não têm nenhuma. Então, quando tu fala para eles: "Vamos estudar, vai fazer falta pro futuro..." Então a gente coloca várias questões para eles do... que... hoje em dia até para ser um simples... gari, tem que ter estudo... "Ah, mas o meu pai não tem estudo e faz isso!" "Ah, porque o fulano rouba, ganha muito mais do que se tivesse estudado..." não é? Quer dizer, é muito difícil! Então... tu tem que ficar... incentivando para eles fazerem alguma coisa!*

E, demonstrando não ter consciência de que a sala de aula nada ou quase nada tem a ver com os interesses do aluno, afirma o professor: – *Eles não têm interesse... eles tão vivendo uma realidade que... as pessoas não têm perspectiva de vida... até os maiores é a mesma coisa... eu trabalho com quinta e sexta e sinto que é a mesma coisa...* [s3, p22].

4.5.6.2 Influência da novidade, da TV

– Eles têm... eles gostam muito ter interesse pelo novo, novidade... interesse pelas coisas que estão passando pela TV... Por exemplo? – *Um filme*

que passou... uma série que está passando, também vejo as músicas do momento, que são... acho... Futebol? – *Futebol? Acho que tem alguns sim. Futebol, pode ser videogame, computador gostam bastante...* [s7, p33].

Esses interesses dos alunos, que estás enumerando, influem no trabalho do professor na sala de aula? – *Eu acho que eles devem ser... deve... claro que deve influenciar. O professor tem que estar atento para esses interesses.* E o professor poderia se valer deles? – *Com certeza!* De que maneira? – *Trazendo para a sala de aula este tipo... gosta de música, não é? Futebol... como trabalhar... eu acho que dá, dá para se trabalhar assim, se valer desses... Eles vão ter sugestões, certamente, belíssimas, para dar para o professor.* [s7, p34].

Os interesses do aluno são externos, pois eles gostam de... – *Futebol.., qualquer coisa assim de modismo, assim...* Por exemplo? – *Lançaram um álbum de figurinha, não sei do que. Os menores todos se interessam; os maiores é grupo de pagode, que eles gostam... Futebol é geral, desde os pequenos, todo mundo se interessa. Tanto que eu pego o jornal de manhã, o jornal é o adicional, embaixo da porta da garagem e quando saio de manhã eu pego o jornal e levo junto para o colégio. E quando chego no colégio, sempre tem um... 'Ah! Me deixa ver o jornal'. O que eles vão ler? Síntese das novelas, e horóscopo. Eu acho assim eles se interessam muito por jogo, música é uma coisa que desperta interesse, não é?, agora a música que está na moda é pagode, então a maioria dos jovens se interessam por isso.* Algo mais que tu observas? – *E a parte da informática também eu vejo que desperta bastante interesse; eles adoram ir para a Internet, e isso sim, só nos que o poder aquisitivo é melhor, não é?* [s5, p35.1].

É interessante observar que o professor resiste em pensar sobre alternativas à sua prática costumeira. Mas, sentindo-se desafiado, ele demonstra conhecer possibilidades. Assim eu continuo, indagando: tu falaste, por exemplo, no futebol. Uma aula de Matemática poderia se envolver com as coisas de futebol? – *Ah, claro, tranqüilamente! Agora mesmo nós vamos trabalhar dentro dos conteúdos de Matemática em cima da Olimpíada. É uma coisa que desperta interesse neles. Então a gente procura, claro, várias coisas dentro do futebol, que a gente pode aproveitar para aula de Matemática, muitas coisas, e hoje em dia também com esses recursos da tecnologia, a gente consegue várias coisas. Ah! Mostram a toda a hora na televisão: o fulano estava a tantos metros, a bola foi chutada com velocidade tal, não é, também se trabalha para calcular áreas...* [s5, p35.3]. O pagode poderia ser usado na sala de aula? *Eu acho que sim, não sei como, mas poderia. A música em si é Matemática não é?* [s5, p35.4]. Uma aula de Matemática poderia se apropriar desses interesses? – *Ah, eu acho que sim, tranqüilamente. Não me pergunta como que eu não sei.* [s5, p35.2].

4.5.6.3 Interesses das meninas

Em turmas em que a expressiva maioria são alunas, a discussão recai naturalmente sobre os interesses femininos, pois: – *O interesse delas, como meninas, a maioria, é elas ser independentes. Independentes financeiramente... a maioria delas não pensam, assim, em casamento...* [s4, p10]. Como assim, não tem interesse em casamento? – *É, aquele casamento tradicional, que fica só a mulher em casa... pá, pá, pá, só o homem é que sabe, na maioria das vezes só ele é que governa... então, elas... A gente conversa muito sobre isso, que nós somos iguais, que no casamento os dois têm que crescer juntos, um ajudar o outro a crescer, tanto na profissão, como* *no trabalho, pra estudar, pra tudo! E a confiança, que é uma coisa fundamental, não é? Porque tem muita coisa que eu vejo, tem muitas gurias na aula que tem namorado. "Ah, eu não vou porque o namorado não deixa eu ir. Eu não posso fazer tal coisa, porque o namorado não deixa."* E a professora repetindo sua própria fala, exclama: – *Gurias! Abram os olhos! Pelo amor de Deus! Se tu achas que o teu namorado gosta tanto de ti assim, que te impede de tu ires assim, atrás do conhecimento, de tu saber, de tu trabalhar, de tu fazer a tua vida?* E querendo justificar sua fala emocionada, afirma: – *Até porque a gente é uma escola... existe uma filosofia da Escola, não é, então é... Ainda esses dias eu li uma... que o grande problema do século agora, vai ser como que o homem vai conviver com a mulher, as dificuldades que os homens vão ter pra conviver com as mulheres.* Por quê? *Porque as mulheres avançaram muito! Avançaram muito! E a maioria dos homens, desculpa estar te falando isso, mas é o que eu li não é, mas a maioria dos homens pararam no tempo. Aquele machismo, não é, e as mulheres avançaram, as mulheres estão indo pra política, as mulheres estão indo pra rua, as mulheres estão dominando muita coisa. Até eles, não é? E eles não estão sabendo lidar com isso.* [s4, p10].

A seguir quero tratar da questão: erro em matemática. Como já referi anteriormente, o erro em matemática é carregado de significados que, em muitos casos, estigmatizam o aluno para o resto de sua vida. Em geral, a aferição do nível de entendimento por parte do aluno é feita por meio de exercícios de repetição do algoritmo apresentado pelo professor. Como os *problemas* ou *exercícios* aceitam uma única resposta numérica, a expectativa final é de que o aluno ou *acerta* ou *erra*. Além disso, como o trabalho em classe é um trabalho de resultados (produtos) e não de processos, o *acertar* acaba se tornando uma loteria e por conseqüência tal fato leva à fuga e ao afastamento do aluno das coisas da matemática.

Para começar o assunto, procuro verificar o que o professor pensa sobre os erros que ele próprio pode cometer e de um modo geral, há uma certa benevolência para consigo próprio, ou seja, o professor admite a possibilidade de errar e deseja que o aluno reconheça seu direito de errar, como veremos na seqüência.

4.5.7 O professor: seus erros e seu... perdão

Pergunto se o professor pode errar, e tenho como resposta: – *Hiii, se pode!... A gente erra toda a hora.* [s4, p18,1]. Errar ou acertar são duas posições antagônicas e muito fortes em aula de matemática. Começo então o assunto, questionando o professor sobre o que ele pensa de seus próprios erros: – "o professor de Matemática pode demonstrar ou externar as suas dúvidas?" Ao que o professor responde: – *Pode. Pode e deve, até prá sair de cima do pedestal. E quando surge a dúvida do professor, ele não tem que disfarçar. Tem professor que disfarça: – 'Ah, essa aqui a semana que vem a gente vai trabalhar'. E... claro o professor tem que ter um certo jogo de cintura, mas isso aí é essencial, mostrar pro aluno que ele também não entendeu, também ficou em dúvida com aquilo ali.* Por que, no teu entender, isto é importante? – *Prá eles não se sentirem menosprezados por não saberem alguma coisa, por que justamente o professor deles se enganou com alguma coisa. Então, é passível de qualquer ser humano se enganar. Então isso dá uma mais... massageia um pouco o ego deles, principalmente quando um aluno consegue ajudar o professor: – 'Ah, professor está ali o erro... ó'.* E continua a explicação: – *As vezes tu começas a fazer um monte de coisas no quadro, te perdes e uma coisa não dá certa, a resposta não dá certo e tu ficas perguntando: – Onde é que eu errei. Eu errei, eu errei... – Ah, a senhora errou!... Aí eu digo, – 'Ah, mas o livro pode estar errado?... As vezes pode, o autor...'* E, imitando a fala do aluno, diz o professor: – *Ah, mas como é que o autor do livro vai errar?* E ele próprio responde: – *Ué, mas todo mundo erra, não é? Vamos ver se é o autor, se é eu. Ai eu discordo, ah, tá lá... É uma maravilha, sabe. Massageia o ego deles. Então, tem que mostrar as dúvidas, tem que mostrar...* [s1, p17].

Como é que tu vês essa coisa do erro? *Eu acho que o erro serve pra gente aprender. Eu acho assim que o erro é uma coisa... eu vejo o erro... se eu sentir que eu errei, eu vejo aquilo ali como uma coisa boa, foi bom pra mim se eu errei, porque serviu pra mim melhorar e fazer diferente, fazer uma coisa melhor.* [s4, p18,2].

Em suas respostas o professor demonstra ter necessidade de que o aluno compreenda que ele, professor, também erra. Pergunto: 'O que acontece se tu errares um exercício?' – *Ah, eu seguidamente, eu boto, eu estou dizendo para eles que... hoje mesmo, como exemplo, quando eu fui dizer que as retas eram perpendiculares quando elas eram simétricas e simplesmente não botei o simétrica. Mas sempre tem aquele que está antenado "Mas a senhora não disse que era simétrica?"* Confirmando sua posição, afirma o professor: – *Mas eu assumo os meus erros, numa boa, e também se não sabe, um dia desses alguém me pediu para fazer um exercício do ENEM e eu não sabia fazer e eu digo "Olha, eu vou tentar fazer". Eu acho que nisso se tem que ter a humildade de reconhecer. Eu seguidamente faço dessas, tanto que têm erros bobos nas provas que às vezes eu desprezo.* E o professor explica: – *De* *repente o 'carinha' virou a folha lá e esqueceu de um menos, não vai ser por aquilo ali que ele vai... claro que ele não vai chegar na resposta que eu gostaria, mas ele teve o meio, ele sabia como sair dali, não é, então erro eu acho que é uma coisa que é natural, ele tem que assumir, tem que saber que a gente erra também, não é, e eles até mexem: "Ah, quer dizer que se eu errar isso aí na prova senhora vai considerar?" Considero! Por que não? O que interessa é o raciocínio, se teve uma... estruturou a coisa certa*. [s2, p12].

Questionado sobre poder ou não demonstrar suas dúvidas para o aluno, o professor insiste? – *Eu acho que pode... eu... de vez em quando me dá um branco... aí...* [s8, p34.1]. Já aconteceu contigo? – *Já aconteceu, mas parece que no último momento... baixou uma luz e... me salva.* [s8, p34.2]. O que é baixar uma luz? – *É tu fazeres uma coisa e depois tu veres que era aquilo mesmo! Tu faz! O importante é que a gente faz, pode ser que esteja errado, mas tu faz com medo. Aí depois tu vê, realmente, eu estava fazendo isso aqui e nem era... era tirar o MMC de radicais, aí, eu pô, e agora, tiro o MMC, divido pelo índice, ou primeiro pelo expoente... eu acho que é pelo índice, vou ver pelo índice, vi pelo índice, depois, realmente...* [s8, p34.3]. E se tiveres errado? – *Se eu errei, não, normalmente eu vou na hora, se estivesse errado... 'Vamos ver se... isso não é... isso...' Até cálculos, seguidamente, aí boto a resposta lá, aí um aluno "Professora, a minha não deu isso". Não? Vamos ver, a minha pode estar errada e a tua certa... Então eu estou sempre dizendo que eu posso errar... até às vezes eu digo que eu fiz errado a propósito, para ver se eles sabiam do erro que estava...* [s8, p34.4].

4.5.7.1 Erros e a questão do interesse

Quando o professor fala nos erros do aluno, em geral, o que mais se evidencia como justificativa é a falta de interesse do aluno. Por que, na tua concepção, o aluno erra? Quando tu passas um problema e afirmas: – ‘ele errou’. Por que isso acontece? – *Acho que... eles não têm interesse, eu acho que quando a gente está assim tentando explicar alguma coisa, por pior que a gente seja, é impossível não transmitir alguma coisa, não é? E eu, pelo menos eu tento, ser o mais clara possível, eu levo várias maneiras diferentes para chegar mais ou menos a um problema e... Eu acho assim que realmente quem não está interessado mesmo quando não... A matemática não é um bicho-papão. Às vezes eu estou dando aula e digo: ‘Ah, ah não, isso aí é baba’ e eles começam ‘Ah, isso aí é muito fácil’. É que eu acho que a gente já perdeu um pouco daquela idéia como essa coisa é horrorosa, que a gente tinha antigamente, não é?Eu até uma certa fase da minha vida eu tinha* [a idéia de que a matemática era horrorosa], *até que alguém me despertou. Sempre tem aquele professor que dá um clic na tua cabeça, não é, que aí eu vi que a Matemática não era difícil como a gente achava que era.* [s2, p11].

A falta de interesse é o fator determinante, pois – *Ele erra principalmente porque ele é... não por falta de condições, em absoluto, não é, eles têm condições de fazer coisas muito mais mirabolantes do que aquilo que a gente propõe que eles façam. Eu acho que eles erram justamente porque aquilo... não é uma coisa muito interessante para eles, eu vejo alunos mesmo com muitas condições que sabem fazer determinadas coisas e simplesmente não querem, não fazem, não se interessam*. [s5, p37,3].

4.5.7.2 Quando o aluno erra?

Como a referência é o próprio professor e não as possibilidades que o aluno em função das estruturas que já desenvolvera, então: – *Na verdade eu* *acho que o aluno erra quando ele não chega àquilo que tu julgasses que ele deveria chegar, não é, mas ele erra, por exemplo, se eu passar um problema para um aluno resolver e ele pensar a respeito daquele problema, ele conseguir elaborar idéias a respeito daquilo, ele pode tranqüilamente errar o cálculo... entendes? Se eu estiver interessada só no cálculo eu passo um 'arme e efetue' e não passo um problema... não é? Se eu quiser saber se ele sabe fazer uma 'conta' específica, eu não preciso passar um problema para ele, porque através de um problema eu estou avaliando ele em vários aspectos, não é?* Podes me dar um exemplo? – *Raciocinar com lógica, de saber o que ele vai... (lá venho eu com raciocínio lógico de novo)* [ri]. *Saber como ele deveria agir para resolver aquela questão, não é, e aí se eu vou avaliá-lo só pelo cálculo e no final ele montou lá, em vez de seis vezes três ele botou sete vezes três, pronto, saiu errado, coitado, entendes?* [s5, p37,2].

4.5.8 Significados e sentidos

Desejo saber o que o professor pensa sobre o conhecimento matemático, assim pergunto: 'O saber matemático que representação tem para ti?' – *Por que a gente tem um ano prá ver várias coisas e tem temas muito maçantes, que ocupam muito tempo. Dando um exemplo prático... (não estou respondendo a tua pergunta, mas peguei o finalzinho dela e estou trocando ela...). Dando um exemplo prático de expressões numéricas. Eu acho que o aluno tem que saber o que é montar uma expressão. Eu dou sempre, procuro dar um exemplo que não era prá ser feito. Isso aí era prá ser feito lá nas* *séries iniciais, bem no 'inicinho', prá ensinar o aluno a raciocinar, prá ele saber o por que daquilo ali.* E apesar de trabalhar com quinta série do ensino fundamental, s1 afirma: – *As outras séries são chatas. As melhores séries são as iniciais.* Por quê? – *Da primeira série até a quarta, onde não trocou de professor ainda. E é onde se trabalha basicamente com o concreto. Então eu dou uma idéia prá professora da quarta série, porque eu estou sofrendo um horror na quinta série: expressões numéricas: monta um bar... Eu vi isso e achei superinteressante. Tu montas um bar e começas: fulano comprou dois pacotes de arroz... prá depois ver o que vai pagar... Isso são expressões: duas vezes um saco de arroz, aí trabalha com 'x', qualquer letra, mais farinha... quanto ele vai pagar. Então isso são expressões. E eles perguntam, por quê, por quê? Então a gente não pode deixar o troço embolar. E aí, qual era a tua pergunta mesmo?* [s1, p09]. 'A representação desse saber para ti?' – *O saber é super importante até prá tu saberes selecionar. Por que se tu não te importas com esse saber, simplesmente tu segues tudo o que os outros tão dando. Aí tu pegas um 'livrinho' do professor antigo e dá tudinho, tudinho, então... é super interessante.* [s1, p10].

Para o professor, o aluno não sabe ler, não sabe interpretar o que leu, pois – *desde... uma simples tabuada eles não sabem... eles não sabem dividir... eles não sabem essas operações. Problemas, então, é um horror!* Porque é um horror? – *Eles não sabem... eles não sabem interpretar! Eles... quer dizer, ali, já envolve todas as disciplinas não é... já entra humm... não sabe interpretar... é, é, eu acho que Português é a base ali, não é, porque um... Matemática, mesmo... muita coisa vai da interpretação, não é, principalmente problema... Se um aluno não sabe interpretar, ele não sabe ler, ele não sabe o que está lendo! Ele não vai conseguir. Então, a gente sente* *muito isso aí! Eu sinto na quarta série... que é onde é o maior índice de reprovação é na quarta... Porque ele chega ali, ele pára! Porque se ele não sabe... se ele não sabe o que ele está lendo ali, não sabe nem o que ele tem que fazer... não consegue!* [s3, p19].

Até mesmo porque o aluno não consegue compreender a linguagem do livro texto, por isso: – *Eu não uso! Uma que eu não gosto porque o livro do aluno, sei lá, ele vem com uma linguagem muito... que eu acho muito difícil pro aluno! E o tipo de atividade que vem ali, pro nosso aluno não tá... tá muito... muito distante! Acho muito difícil, então eu trabalho com vários autores! Eles não têm um livro específico...* [s3, p31.1].

O professor reconhece que o aluno tem dificuldades em entender a linguagem matemática porque, – *... a linguagem deles parece que é diferente da nossa. Eles falam "x com x". Eu falo... às vezes, as palavras que a gente usa lá na frente, para eles é tão difícil...* E lembrando os questionamentos do aluno: – *Ah, eles* [dizem]*... 'por que a senhora não simplifica? Por que a senhora enrola? Não, eu não quero saber da onde é que saiu...' Eles querem uma coisa até mesmo... tá explicando com... com uma dedução, com alguma coisa, não. Eles querem o produto final. Isso com isso é isso e pronto! Não querem saber da onde é que vem, porque que é isso. É isso!* Mas, na tua opinião, por que isso acontece? – *Eles querem uma coisa final... Então... eles ficam olhando para cima... e a maioria até de quarta, quinta série eles têm é... é medo de tratar com a pessoa. Eles têm vergonha de dizer que não sabem. Então, eles vão para casa com dúvidas. Quarta, quinta série é... sexta, está começando, assim... agora tem um atendimento com os pais e... eu saio às quinze para as seis e não tem problema nenhum se tiver que ficar até as seis horas, que a turma é grande... Eles dizem assim: "Ah, que bom! Então* *agora, eles se soltam..." Mas eles têm muito... uma segunda série assim "Ah, a professora disse que é isso e ela ficou braba... não sei o que, eles têm muito disso, sabe? Que o professor grita muito, que é muito brabo, que a Matemática, geralmente, que o professor de Matemática... é muito brabo. Então eles têm dúvida e não perguntam. Eles copiam uma coisa que não sabem, que nunca viram. Encontra-se muito.* [s8, p31].

Após esta longa jornada ouvindo o professor e apresentando suas idéias e pareceres sobre a organização da aula de matemática, passarei no próximo capítulo a discutir, à luz da epistemologia genética, o processo de desenvolvimento da criança com vistas a tornar-se sujeito de sua existência. Posteriormente, no capítulo final, estabelecerei paralelos e confrontos entre o que pensa o professor sobre o ensino de matemática, as idéias de Piaget e minhas propostas para uma aula de matemática que se organize na direção da subjetivação de cada um e de todos.

5 A CRIANÇA E SUA REDE: a construção do sujeito

É sobretudo possível – e nós o verificamos em diversos casos – que o insucesso escolar em tal ou tal ponto decorra de uma passagem demasiado rápida da estrutura qualitativa dos problemas (por simples raciocínios lógicos, mas sem a introdução imediata das relações numéricas e das leis métricas) para a esquematização quantitativa ou matemática (no sentido das equações já elaboradas) usada habitualmente pelo físico.

(Jean Piaget)

5.1 A criança se faz sujeito

Tendo realizado longo e minucioso trabalho de pesquisa, que se iniciou na observação cotidiana e detalhada de seus próprios filhos, Piaget pôde constatar que em todo tipo de comportamento infantil – tanto naqueles que têm um fim imediato, como em qualquer tipo de brincadeira –, as ações da criança não se organizam (estruturam) aleatoriamente, mas sim obedecem a um conjunto de leis que regem o desenvolvimento humano. E assim, como fruto de suas observações, depara-se com a presença de verdadeiros sistemas lógicos coordenando o comportamento da criança, sem que disso ela tenha a menor consciência. É nesse sentido que podemos afirmar que a ação ocupa um lugar central nas investigações piagetianas.

A ação constitui elemento indispensável do funcionamento de toda organização viva, ou seja, do processo de adaptação do sujeito ao meio, com seus pólos complementares: a assimilação e a acomodação.

A hipótese de Piaget, nas palavras de Ramozzi-Chiarottino

> [...] é a de que, através das ações do sujeito e a partir dos esquemas motores, se dá a troca do organismo com o meio graças a um processo de equilíbrio progressivo, protótipo de uma 'construção dirigida' ao nível do ser humano, responsável pela construção das suas estruturas mentais. Essas estruturas caracterizam-se, de um lado, por serem um prolongamento das estruturas orgânicas (já conhecidas) e, de outro, por constituírem uma especialização (um órgão especializado) em relação a elas.[125]

Portanto a construção de esquemas é a condição fundamental para a ação, isto é, para o estabelecimento de trocas do organismo com o meio. Todo esquema é gerado pelo funcionamento geral da organização viva ou, numa palavra, pela adaptação.

Ao estudar a gênese da inteligência e do processo de adaptação da criança ao meio Piaget pôde observar que determinadas manifestações no comportamento infantil se repetem em diferentes situações, fato que o leva a imaginar e propor o desenvolvimento humano composto por uma sucessão de estágios. Note-se que, segundo a proposta piagetiana, falar em estágios de

---

[125] *Em busca do sentido da obra de Jean Piaget*, 1994, p. 34.

desenvolvimento não significa falar em seqüência linear (fila) de etapas, mas sim em caminho necessário, em termos de que cada estágio alcançado é função do estágio anterior, subsumido pelo atual, que por sua vez prepara o estágio subseqüente. Creio que a melhor representação para o processo de desenvolvimento seja a de uma espiral ascendente de raio crescente (divergente). Com tal representação afirma-se que a cada ciclo que se completa, o sujeito se encontra em um ponto acima do ponto correspondente no ciclo anterior e mais distante (raio maior) do eixo central.

Apenas para lembrar, é bem conhecido – entre os estudiosos da obra piagetiana – o alto preço que o pesquisador pagou por sua proposta de estágios, na medida em que tal idéia acabou sendo adotada como uma seqüência cronológica constituída por etapas com início e fim pré-determinados, cujo marco seria a idade biológica. Para quem convive com o meio escolar, é sobejamente conhecida a prática de distribuição de crianças por diferentes turmas (A, B, C,...) de um mesmo adiantamento em função de resultados de testes (diríamos adivinhatórios) apregoados como *testes piagetianos* principalmente em escolas cuja *bandeira pedagógica* é a autopromoção como *escola que usa o 'método construtivista'* – como se tal existisse.

Deixando de lado as distorções que sempre acabam, de uma forma ou de outra, sendo introduzidas quando uma proposta começa a ser adotada em práticas apressadas, implementadas sem maiores discussões e preparações teóricas, passemos a examinar o processo de desenvolvimento humano, nosso interesse maior neste trabalho.

5.2 O sensório-motor

Piaget ao analisar o desenvolvimento da criança, a partir de seu nascimento detecta, através das reações infantis, a existência de uma inteligência *sensório-motora*, que se organiza do nascimento à idade de 18 a 24 meses, aproximadamente. O que caracteriza esse primeiro estágio sensório-motor é a organização paulatina de uma inteligência "sem pensamento ou representação, sem linguagem e sem conceitos[126]". A criança ainda não desenvolveu para si a função simbólica que lhe permitirá representar, por um conjunto de imagens mentais, os objetos e as situações ausentes – no tempo e no espaço – assim como evocá-los pela linguagem.

Embora a criança, no início de sua existência, seja totalmente dependente da intervenção de outro ser – em geral a mãe – é um ser ativo na busca da satisfação de sua curiosidade e de suas necessidades. Para se alimentar, a criança precisa aprender a mamar e precisa exercer, ela própria, o ato de mamar, usando seus recursos corporais. Ela precisa respirar, por si própria, expelir gases e subprodutos digestivos usando seu esforço, seu trabalho, sua corporeidade, etc. A mãe, ou o meio, mesmo disponibilizando os elementos necessários à sua sobrevivência, não atuam pela criança. É preciso, é necessário, é indispensável que a criança atue.

Faço referência a esse fato para lembrar que ser atuante, ser agente é condição própria da criança. Posteriormente a *educação*, porta oficial de entrada na sociedade adulta, se encarregará de torná-la passiva, de domesticá-la, nem que seja abaixo de vigilâncias, castigos e punições.

É possível observar ao longo do tempo, acompanhando o desenvolvimento da criança que, muito embora em um *mundo egocêntrico* [127] – em que ela e o meio se confundem – a criança busca desenvolver capacidades para poder se comunicar com esse mesmo meio, o que ocorre através de um processo que Piaget denomina: *imitação*.

Imitar significa agir, atuar. A criança é um ser agente com condições de, por si mesma, estabelecer uma crescente distinção entre o eu e o mundo exterior (não eu) e conseqüentemente e passo a passo, desenvolver fatores de "substantificação e de espacialização do mundo[128]." Em outras palavras, eu me faço sujeito – distinto do meio – na medida em que consigo substantificar-me no meio e substantificá-lo para mim e dessa forma consigo adquirir dimensão (espaço) nesse mesmo meio.

A imitação

> [...] corresponde sempre a um desequilíbrio em favor da acomodação, superado somente pelo advento da assimilação mental operatória: o equilíbrio da assimilação e da acomodação, neste nível, é que substituirá a imitação no âmbito de toda a atividade inteligente.[129]

A criança, através da *imitação* [130] é sempre ativa e, desde seu nascimento, evolui por meio de exercícios reflexos que, paulatinamente, vão assimilando elementos exteriores e se ampliando e dessa forma a criança começa a imitar sons, repetir movimentos das mãos, da cabeça, etc.

---

[126] DOLLE. *Para compreender Jean Piaget*, 1987, p. 77.

[127] Egocentrismo é o ... primado da satisfação sobre a constatação objetiva [e] deformação do real em função da ação e do ponto de vista propriamente ditos (PIAGET. *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 361).

[128] PIAGET. *A construção do real na criança*, 1996, p. 325.

[129] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 67.

[130] Imitação: prefiguração sensório-motora da representação e, por conseguinte, o termo de passagem entre o estágio sensório-motor e o das condutas propriamente representativas.

Por volta de 8 a 12 meses de idade, é possível observar-se o desabrochar da *imitação imediata*, isto é, a reprodução de um modelo por diferenciação progressiva da acomodação, relativamente à assimilação, ou seja, a imitação torna-se

> [...] uma espécie de acomodação sistemática que tende a modificar os esquemas em função do objeto, em contraste com as acomodações inerentes ao ato de inteligência, as quais aplicam igualmente esses esquemas ao objeto mas incorporando este a um sistema de utilizações variadas.[131]

Buscando estabelecer paralelos com a escola, observa-se uma prática que consagra o uso da imitação, com um significado completamente diferente, pois na educação oficial imitar é atender ordens de: – *copia*; – *segue o modelo*; – *repete igualzinho*. E, além disso, a prática cotidiana da sala de aula, para seu pleno funcionamento, requer um aluno fisicamente passivo e um professor *dono do saber*, portador de *certezas*, inclusive sobre quem tem condições de aprender e quem não tem. Estudar é coisa 'séria'. Brincar em aula? Nem pensar!

Particularmente no caso da matemática é muito conhecida a prática de se ensinar a escrita dos algarismos numéricos (numerais) por repetição (encher linhas), o que – até prova em contrário – se constitui na melhor forma de adestramento manual. No entanto é também corriqueiro o entendimento de que por saber 'rabiscar' os numerais, ou saber recita-los de memória (decor), a criança teria apreendido o conceito de número. Mas memorização ou repetição pura e simples não são fatores suficientes para garantir aprendizagem.

Por outro lado, o conhecimento como propõe Piaget é sempre uma totalidade: toda aprendizagem é fruto de construções que acontecem como totalidades. Já em um bebê, de poucos dias, pode-se observar a imitação se desenvolvendo "por totalidades auto-suficientes (= por esquemas já constituídos), só se aplicando em seguida aos movimentos particulares que participam nesses esquemas a título de elementos componentes[132]".

No entanto no ensino escolar é freqüente o uso de práticas atomizadas, onde o conhecimento é decomposto, fragmentado, na expectativa de que posteriormente, juntando as partes, o aluno venha a reconstruir o *todo*. Imagino se tal prática educativa fosse usada para ensinar a 'andar de bicicleta', por exemplo. Teríamos uma aula para aprender os movimentos dos braços, depois os movimentos das pernas e posteriormente os movimentos do corpo; outra aula, de mecânica de bicicleta, para aprender as partes que a compõem: a definição de pedal, de aro, de corrente, etc.; outra sobre impulso, equilíbrio físico, leis de Newton, lei do atrito, etc. No entanto para usar uma bicicleta são indispensáveis repetidas ações sobre o todo: o aprendiz, a bicicleta, o caminho a ser percorrido, os movimentos de conjunto, etc., ou seja, é indispensável uma total interação sujeito-objeto, entendendo-se interação como "processo ... de movimento entre dois pólos que ... se superam gerando uma nova realidade," [133] neste caso, alguém que aprende a andar de bicicleta: 'o ciclista', que surge como resultante de toda experiência.

Retomando: o processo de imitação continua em desenvolvimento até que a coordenação dos esquemas que a criança já dispõe, se emancipa

---

[131] *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 80.
[132] *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 59.
[133] FRANCO. *Piaget e a dialética*, 1998, p. 15.

suficientemente da percepção imediata e da experiência empírica dando lugar a combinações mentais. Observe que o processo de emancipação (ultrapassagem) da percepção e da experiência empírica é um exemplo de abstração reflexionante funcionando em crianças de tenra idade.

Na passagem do segundo para o terceiro ano de vida, com a transição do estágio sensório-motor para o estágio seguinte, *simbólico*, constata-se o desabrochar da inteligência representativa na criança. O estágio simbólico é caracterizado pela presença de um conjunto de condutas que supõem a evocação representativa de um acontecimento ou de um objeto. Tais condutas caracterizam o surgimento da função simbólica na vida da criança.

5.3 A função simbólica

Na assimilação sensório-motora não há evocação. Há o exercício de esquemas de ação, isto é, repetição ou tentativas motoras. No limiar da transição do estágio sensório-motor para o estágio simbólico, observa-se uma incipiente assimilação representativa em que:

> [...] o objeto ora percebido é assimilado a objetos não percebidos no momento mas que são, graças a 'significantes' que os fazem presentes ao pensamento, evocados. A representação nasce da união destes significantes que possibilitam a evocação de objetos ausentes, e do conjunto de significações que liga os objetos ausentes aos presentes.[134]

À função geradora de representações Piaget chama de *função*

[134] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 97.

simbólica ou *função semiótica*[135]. Ela se manifesta por condutas como a *imitação diferida*, o *jogo simbólico*, o *desenho* (imagem gráfica) a *imagem mental*, assim como a *linguagem*.

Na imitação diferida, a criança consegue agir na ausência do modelo e após um intervalo de tempo, mais ou menos longo, da ocorrência do evento imitado; começa a praticar "o faz-de-conta, passa a agir 'como se', e assim da inteligência sensório-motora alcança a inteligência representativa[136]." A partir de então "a imitação desliga-se da ação atual e a criança torna-se capaz de imitar interiormente uma série de modelos, dados no estado de imagens ou de esboços de atos: a imitação atinge, assim, os primórdios do nível da representação[137]."

Complementar à imitação desenrola-se o *jogo simbólico*[138] ou jogo de ficção que marca o apogeu do jogo infantil. A única forma de jogo, já detectada no sensório-motor, e que se conserva parcialmente com o passar do tempo é o *jogo de exercício*. Esta modalidade primitiva de jogo não comporta nenhum simbolismo, nem técnica especificamente lúdica, pois consiste em repetir, pelo simples prazer, as atividades adquiridas. Enquanto podemos considerar o jogo de exercício como uma assimilação sensório-motora, o jogo simbólico manifesta-se como uma assimilação mental.

Por volta de 24 a 30 meses de idade, intermediário entre o jogo e a *imagem mental* surge o *desenho* ou expressão gráfica como outra

---

[135] É preferível empregar, diz Piaget, a expressão *função semiótica* para designar os funcionamentos fundados no conjunto dos significantes diferenciados (PIAGET e INHELDER. *A psicologia da criança,* 1998, p. 47).
[136] DOLLE. *Para compreender Jean Piaget*, 1987, p. 120.
[137] PIAGET. *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 81.
[138] O jogo simbólico está para o jogo de exercício como a inteligência representativa está para a inteligência sensório-motora (Idem. *Ibidem*, p. 209).

manifestação da função simbólica. Por meio do desenho e da imagem mental a criança busca *imitar o real*. É interessante destacar, especialmente para quem tem interesse em compreender a gênese do conhecimento matemático que,

> as primeiras intuições espaciais da criança são, com efeito, **topológicas** antes de serem **projetivas** ou de se conformarem com a **métrica euclidiana** (grifos meus). Existe, por exemplo, um nível em que os quadrados, retângulos, círculos, elipses etc., são uniformemente representados por uma mesma curva fechada, sem retas nem ângulos (o desenho do quadrado só é aproximadamente correto depois dos 4 anos), ao passo que cruzes, arcos de círculo etc. serão figurados como figuras abertas.[139]

Pode-se observar que a evolução do desenho, como forma de comunicação da criança com o mundo, é solidária com toda a estruturação do espaço, conforme os diferentes estágios de seu desenvolvimento.

Verifica-se, também, mais cedo ou mais tarde, a interiorização de imitações a que Piaget refere como *imagem mental* e os primórdios da linguagem que permite a *evocação verbal* de acontecimentos não atuais. A imagem, como uma espécie de suporte do pensamento, ao simbolizar as operações, torna possível sua evocação interior. Nas palavras de Piaget,

> [...] a imagem não é um derivado da percepção pura, mas o produto de uma acomodação imitativa, o que por si mesmo atesta a existência de uma atividade situada acima das percepções e movimentos mais abaixo do pensamento refletido: é essa atividade que nos parece prolongar a inteligência sensório-motora, anterior à linguagem, e que designaremos, após o aparecimento desta, por

[139] PIAGET. *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 59-60.

> inteligência perceptiva ou, mais simplesmente, 'atividade perceptiva'.[140]

Nesse sentido e diversamente do que postulava a psicologia com fundamentação empirista (associacionista), a aprendizagem não ocorre como efeito de um processo de imprimir imagens no pensamento humano, mas sim é fruto de ações que se organizam ao longo do processo de desenvolvimento genético de cada sujeito.

Em essência, a função simbólica, com suas condutas características, constitui-se – após o longo processo de imitação – na primeira grande *propriedade* que a criança desenvolve para se comunicar com o mundo e assim individualizar-se. O conjunto de ações executadas pela criança, desde a gênese dos processos de imitação à construção da função semiótica, direcionam-se no sentido de que ela possa representar-se no mundo e representar – para si - o mundo, possa *falar* com o meio, assim como *ler* esse mesmo meio.

> O indivíduo representa o 'seu' real, isto é, representa o mundo estruturado por ele através da ação, que é o que atribui significado às coisas: numa palavra, **a ação é que dá significado às coisas** (grifos meus).[141]

É interessante, mesmo que brevemente, esclarecer o conceito de representação a partir da epistemologia genética. De acordo com seus princípios, entende-se por *representação* a "capacidade de evocar por meio de um signo ou de uma imagem simbólica o objeto ausente ou a ação ainda não

---

[140] Idem, *Ibidem*, p. 98.
[141] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 12.

realizada[142]." O processo de representação pode ser considerado em dois sentidos, ou seja, representação em sentido lato, em que a mesma "confunde-se com o pensamento, isto é, com toda a inteligência que já não se apóia simplesmente nas percepções e movimentos (inteligência sensório-motora) e sim num sistema de conceitos ou esquemas mentais". É o que poderíamos denominar de *representação conceitual*.[143]

Por outro lado, no sentido estrito, a representação "reduz-se à imagem mental ou à recordação-imagem, isto é, à evocação simbólica das realidades ausentes". Nesse sentido teríamos a *representação simbólica*, valendo-se então de símbolos ou imagens.[144]

5.3.1 A criança e a linguagem

Ao longo do processo de desenvolvimento da função simbólica, a criança vai, passo a passo, conseguindo representar-se no meio assim como representar o meio para si; individualizar-se e comunicar-se com o meio, no qual vai – gradualmente – se inserindo e percebendo-se inserida. O processo ascendente de elaboração da função simbólica continua até que a criança alcance a linguagem, e dessa forma, conquiste a capacidade de falar.

A "fala é, toda ela, um sistema de encaixes, parciais ou totais, ou de negação de encaixes entre unidades de nosso sistema conceitual (classificação); e encaixes numa certa ordem (seriação)[145]". A criança ao falar, expressa sua lógica, e com isto demonstra estar construindo, para si, um

---

[142] PIAGET. *O nascimento da inteligência na criança*, 1978, p. 231.
[143] PIAGET. *A formação do símbolo na criança*, 1978, p. 87.
[144] Idem. Ibidem, p. 87.
[145] BECKER. *Epistemologia genética e conhecimento matemático*, 1998, p. 34.

considerável sistema lógico-matemático.

A lógica infantil não é efeito direto da linguagem, mas sim de uma fonte muito mais profunda que se encontra nas coordenações gerais das ações do sujeito. É uma lógica egocêntrica, intuitiva, ou, no dizer de Piaget *transdutiva* [146], "mais *sincrética* do que dedutiva[147]", sem que se possam ainda explicar os raciocínios desenvolvidos, uma vez que, geralmente, em seus julgamentos a criança omite etapas saltando, diretamente, das premissas para as conclusões.

Recordo excertos de conversa com uma criança quando alguém dizia: - *Se comeres tudo, iremos ao cinema*. Ao que, imediatamente, a criança exclamou: - *Oba! Hoje vamos ao cinema!*[148]*,* numa clara demonstração de um sincretismo natural e plenamente justificável no nível de raciocínio em que a criança se encontra, pois ela não raciocina por hipóteses.

Portanto, para que a criança construa seu conhecimento, não bastam exposições teóricas ou descrições verbais dos últimos resultados da ciência, mesmo que tais colocações possam ser interessantes e até instigadoras da curiosidade infantil. No processo de construção do conhecimento de cada sujeito, é indispensável a execução de ações, o estabelecimento de relações, de transformações e muitas experimentações que desafiam seu processo de abstrações empíricas e reflexionantes.

---

[146] Transdução: combinação de relações tecidas entre as coisas e o organismo pela própria ação (pelos movimentos do organismo) mas sem que esta ação seja consciente de seus próprios processos (PIAGET, *Le jugement et le raisonnement chez* l'enfant, 1971, p. 159).

[147] Sincretismo: caráter não discursivo do pensamento, que vai diretamente das premissas às condições (sic) [conclusões], por um ato intuitivo e sem passar pela dedução (PIAGET, *A linguagem e o pensamento da criança*, 1999, pp. 127 e 45).

[148] Narrativa de Fernando Becker em encontro do S.A. "A formação do símbolo na criança".

5.4 As operações concretas

À medida que a criança se aproxima da idade de seis a sete anos é possível observar os frutos das experiências realizadas com objetos, imagens, símbolos e com o pensamento. Em torno dessas idades a criança alcança um estágio, *das operações concretas*, cuja característica primordial é a possibilidade de realizar ações reversíveis (fazer e desfazer uma ação), organizar o pensamento em estruturas coerentes e totais e dispô-lo em relações hierárquicas ou seqüenciais.

A criança desse período,

> [...] alcançou um nível neurológico de maturação de tal ordem que seu cérebro é capaz de coordenar duas ou três dimensões de um objeto (largura, altura, etc.) ao mesmo tempo. Também é capaz de recordar atividades passadas, o que torna possível a reversibilidade. [...] Observamos que o raciocínio da criança é muito mais rápido, mais flexível, capaz de percorrer o passado e antever o futuro. Ele corre, como Piaget gosta de dizer, como um filme, em comparação com a lenta projeção de *slides*, durante os anos pré-operacionais.[149]

A criança operatório-concreta já desenvolveu a capacidade de elaborar relações entre objetos que percebe a seu redor. Paulatinamente, com o exercício de ações e interações com o meio, a criança vai compreendendo diferentes níveis de conservação de um objeto (unidade). Passa, sucessivamente, da conservação em matéria-substância (idade média: 7-8 anos), onde apenas a forma tenha mudado (bola de massa de modelar transformada em salsicha), à conservação de peso (idade média: 9-10 anos) e, finalmente, alcançando a conservação de volume (idade média: 11-12 anos).

---

[149] PULASKI. *Compreendendo Piaget*, 1986, p. 66.

Estruturas de classificação e de seriação, por exemplo, são adquiridas no estágio das operações concretas, assim como o estabelecimento de relações parciais entre objetos. Sujeitos desse estágio ainda não dispõe da capacidade de pensar em todos os tipos possíveis de relações, quer sejam reais quer hipotéticas, o que somente será alcançado no período das operações formais.

No que se refere à classificação pode-se assinalar três níveis sucessivos, a saber:

(i) *nível das coleções figurais*: em que a criança reúne objetos, até mesmo heterogêneos, com o objetivo de atender a alguma necessidade subjetiva (reunir um triângulo e um quadrado para fazer uma casinha; um quadrado e um retângulo para fazer um caminhãozinho, etc.);

(ii) *nível das coleções não figurais*: em que a criança já consegue reunir objetos segundo uma característica definida, assim como demonstra a capacidade de dividir um conjunto de objetos em subconjuntos ou de reuni-los a outros. Observa-se uma incipiente capacidade de inclusão em que a criança consegue reunir e separar classes de objetos (os quadrados em um subconjunto, os triângulos em outro, os círculos em outro ainda – em um conjunto de peças de madeira, por exemplo);

(iii) *classificação propriamente dita*: em que a criança já é capaz de estabelecer classes de acordo com uma propriedade (invariante) perfeitamente definida, e, além disso, é capaz de estabelecer hierarquias entre as classes mediante encaixes (ascendente ou descendente), estabelecendo-se assim a possibilidade da quantificação, ainda que intensiva (não numérica) da inclusão nos primórdios desse estágio. (Por exemplo, a classe ‘A’ dos triângulos vermelhos é percebida como incluída na classe ‘B’ dos triângulos, logo A < B, etc.).

Em exercícios ou brincadeiras que envolvam procedimentos de seriação, podemos destacar dois níveis principais:

(i) *nível da seriação empírica*: em que a criança ordena os objetos em subconjuntos (dois a dois) e sempre que ocorrer algum erro ou dificuldade a criança prefere recomeçar tudo novamente a tentar inserções entre os subconjuntos;

(ii) *nível da seriação operatória*: em que a criança já consegue perceber a dupla relação < (menor do que) e > (maior do que), o que lhe permite operar de forma reversível e estabelecer a seriação completa (em qualquer sentido).

Relações de classificação permitem organizar os objetos a partir de suas semelhanças, por exemplo: o subconjunto dos triângulos em um conjunto de pecinhas (triângulos, quadrados e círculos) classificadas quanto a forma. Por seu turno, relações de seriação se estabelecem a partir da percepção de distinções (diferenças) entre os objetos, por exemplo: ordenar réguas de diferentes comprimentos.

Estruturas de classificação e de seriação, na medida em que vão sendo desenvolvidas pelo sujeito, vão se organizando em estruturas operatórias de conjunto. Do ponto de vista lógico, as estruturas de conjunto mais simples são os *agrupamentos*, cuja característica fundamental é a *reversibilidade*, isto é, a possibilidade, permanente, de retorno ao ponto de partida.

A reversibilidade, como já destacamos anteriormente, é a propriedade característica da estrutura de agrupamento, como a concebe Piaget. Além da *reversibilidade*, o agrupamento apresenta outras propriedades, como a *composição; a associatividade; a identidade geral*, além de *identidades especiais*.

A reversibilidade pode ocorrer de duas formas distintas, a saber:

- por **inversão** (também conhecida como '**negação**' **N**), cujo efeito é anular a operação inicialmente efetuada. Por exemplo, o resultado da composição da operação direta e de sua inversa é a operação idêntica.
- por **reciprocidade** R (também conhecida como simetria), cujo efeito é anular diferenças (lógicas). Por exemplo, o resultado da composição de duas operações recíprocas é uma eqüivalência.

Vejamos, como exemplo geral, a reversibilidade em operações de um bebê de um ano, aproximadamente. Um bebê de 10 a 12 meses (que começa a organizar de maneira sistemática os deslocamentos em seu espaço próximo), ao deslocar um objeto de A para B, pode *anular* esta transformação por meio da transformação inversa, retornando a colocar o objeto de B em A, o que, em resumo, equivale a um movimento nulo. Mas também pode deixar o objeto em B e *deslocar-se* ele mesmo de A para B, o que reproduzirá a situação inicial, quando o objeto estava em frente a seu próprio corpo; neste caso, o movimento do objeto não foi anulado, mas foi simplesmente compensado mediante um movimento *recíproco* de seu próprio corpo, o que constitui uma transformação distinta.

É interessante destacar que, como resultado das observações realizadas nos estudos piagetianos, tanto a inversão (N) quanto a reciprocidade (R) são encontradas sob aspectos diferentes em todos os níveis de desenvolvimento, no entanto no estágio operatório-concreto elas ainda não são encontradas atuando em conjunto, não constituem um sistema, o que somente acontecerá com sujeitos do estágio operatório-formal.

5.4.1 A criança operatório-concreta e a aula de matemática

Direcionando a seqüência de minhas ponderações para a área de meu interesse, ou seja a aula de matemática observo que em tal ambiente a comunicação oral – geralmente feita pelo professor –, é o fator preponderante no desenrolar do processo ensinar-aprender matemática, na medida em que o conhecimento está em um lado da relação (professor) e deve ser transmitido para o outro lado (aluno). No entanto, como afirma Piaget, "a questão crucial é a da lógica da criança" e não apenas uma questão de comunicar melhor ou ouvir melhor.

> Se ... [a criança] raciocina da mesma maneira que nós, a escola tradicional está justificada em lhe apresentar as matérias de ensino como se se tratasse de conferências dadas a adultos. Mas basta analisar de idade para idade os resultados de lições de aritmética ou de geometria na escola primária, para se dar conta, logo de início, do enorme hiato que existe entre uma teoria adulta, mesmo elementar, e a compreensão das crianças de menos de 11-12 anos.[150]

Dessa forma, a questão não é apenas comunicar, falar e ouvir; a questão é possibilitar a formação de elementos para que ocorra a compreensão por parte daquele que ouve. E tal compreensão só pode ser alcançada se o interlocutor entende aquilo que está ouvindo, ou seja, disponha de estruturas capazes de assimilar o que lhe está sendo apresentado. Heisenberg[151] em *A parte e o todo* narra certo episódio, ocorrido no inverno de 1933, quando

---

[150] PIAGET. *Psicologia e pedagogia*, 1998, p. 164.
[151] Werner Heisemberg (1901-1976), físico autor do 'Princípio da Incerteza'.

debatia com colegas físicos um problema que Paul Dirac levantara alguns anos antes sobre a teoria da relativística dos elétrons. Segundo essa teoria, confirmada experimentalmente, havia razões matemáticas para concluir que, além do elétron de carga negativa, deveria existir uma partícula correlata de carga positiva. A evidência de sua *existência* decorria de seu *comportamento* muito diferente da matéria conhecida até então, pois ao colidir com um elétron comum, supunha-se que os dois se transformassem em radiação, o que deu origem à expressão "antimatéria". Em determinado momento da discussão, diz o autor:

> – Não é estranho que, em toda nossa discussão, ninguém tenha mencionado a teoria quântica? Estamos nos portando como se as partículas eletricamente carregadas fossem um objeto, como uma gota de óleo eletricamente carregada ou uma bola de miolo do sabugueiro num eletroscópio antigo. Impensadamente, estamos usando os conceitos da física clássica, como se nunca tivéssemos ouvido falar das limitações desses conceitos e das relações de incerteza. Não é fatal que isso conduza a erros?

Ao que responde o interlocutor, nada mais, nada menos do que Niels Bohr:

> – Não, é claro que não. [...] – Afinal, é essencial que, num experimento, as observações possam ser descritas com os conceitos da física clássica. Esse é o paradoxo da teoria quântica. De um lado criamos leis que diferem das da física clássica; de outro, toda vez que fazemos observações, tomamos medidas ou tiramos fotografias, aplicamos sem nenhuma reserva os conceitos da física clássica. E é justamente isso o que temos de fazer, porque, no final das contas, somos obrigados a usar a linguagem, se quisermos comunicar nossos resultados a outras pessoas. [...] Somos forçados a usar a linguagem da física clássica, simplesmente por não termos outra linguagem com que expressar os resultados. Sabemos que os

> conceitos dessa linguagem são imprecisos, têm uma aplicação limitada, mas não dispomos de outra linguagem e, afinal, esta nos ajuda a apreender o fenômeno, ao menos indiretamente.[152]

E conclui o famoso físico afirmando, com muita propriedade:

> – Um dos pressupostos básicos da ciência é falarmos das mensurações numa linguagem que tem essencialmente a mesma estrutura daquela com que falamos da experiência cotidiana. Aprendemos que essa linguagem é um meio de comunicação e orientação inadequado. Apesar disso, ela é o pressuposto de todas as ciências.[153]

Um diálogo em tudo semelhante poderia ser aplicado a uma aula de matemática. Em aula, há uma sensível diferença entre formular um conceito matemático e falar sobre matemática. E, assim como o físico nuclear lança mão da linguagem da física clássica para relatar suas experiências e postular suas hipóteses, o professor de matemática usa a linguagem cotidiana para apresentar conceitos matemáticos. A linguagem é a mesma, mas os sentidos atribuídos às palavras são profundamente distintos.

Piaget, em entrevista com Elizabeth Hall, tecendo considerações sobre o ensino da teoria dos conjuntos como parte do ensino de matemática, afirmava:

> ... sete anos seria uma idade perfeita para a maioria das operações da teoria dos conjuntos, porque as crianças têm suas próprias operações espontâneas, que são muito afins a esses conceitos. Mas quando se ensina pela teoria dos conjuntos, deve-se utilizar o vocabulário próprio da criança durante a atividade – faze-la fazer as

[152] HEISEMBERG. *A parte e o todo*, 1996, pp. 154-155.
[153] Idem . Ibidem, 1996, p. 155.

> coisas de modo natural. O importante é não ensinar matemática moderna com os velhos métodos. Da mesma forma é completamente inútil ensinar às crianças conceitos que elas não atingiram no seu desenvolvimento espontâneo. Um matemático inglês tentou ensinar à sua filha de cinco anos os rudimentos da teoria dos conjuntos e de conservação. Ele fez os experimentos típicos da conservação com números. Então ele lhe deu dois conjuntos e ela, nos seus cinco anos, imediatamente reconheceu que havia dois conjuntos. Mas ela não podia contar e não tinha idéia de conservação.[154]

O exemplo acima me leva a recordar a dificuldade que a criança sente ao ser apresentada ao número zero, no sistema decimal.[155] Como sabemos, o zero tem a finalidade de representar a 'ausência' (negação) de elementos em um conjunto. Com relação a negação, de acordo com estudos desenvolvidos por Piaget[156], ela é sempre tardia com respeito à afirmação.

Portanto, se levarmos em conta tais resultados, o conceito de zero será construído posteriormente à construção dos primeiros números, para contar pequenas quantidades. A bem da verdade seria interessante registrar que o sistema de numeração decimal, de origem hindu, foi introduzido no ocidente em substituição ao sistema romano de numeração, por força de necessidades comerciais e não como resultado de uma descoberta ou invenção das mentes mais lúcidas do ocidente. Com isto quero enfatizar que nem mesmo os pensadores mais argutos se deram conta das facilidades e vantagens de um sistema posicional e as implicações do uso do zero na numeração. Daí se pode aquilatar o grande passo que a criança deve dar em

---

[154] HALL, Elizabeth. A conversation with Jean Piaget and Bärbel Inhelder. In *Psychology Today*, v. 3, p. 25-32, 54-6, 1970.

[155] Todo sistema de numeração posicional dispõe de um elemento nulo (zero), o que não ocorre em sistemas não posicionais como o sistema romano, por exemplo.

[156] *A abstração reflexionante*, 1977, cap. XVI. *A tomada de consciência*, 1974, conclusões.

suas elaborações internas para se apropriar do conceito de zero.

O sistema romano, usado até a idade média, é um sistema de numeração não-posicional e como tal a cada um de seus signos corresponde apenas um valor numérico. Por exemplo: I = 1; II = 2; V = 5; X = 10. Nesse sistema, a seqüência: XXII = 10+10+1+1 = 22, cada símbolo, independente de sua posição, tem um único valor (absoluto). Por outro lado, o sistema decimal é um sistema de numeração posicional e, portanto dependendo da posição do numeral, seu valor relativo se modifica. Por exemplo, em 22, o 2 à esquerda equivale a 20 unidades, enquanto que o 2 à direita corresponde a duas unidades. O que caracteriza um sistema de numeração posicional é a existência do numeral 'zero'. Sistemas não-posicionais, como o romano, não dispõem de zero. E, sem dúvidas, o uso de um sistema de numeração não-posicional – como o sistema romano – cumpre um papel interessante no caminho de aprendizagem que a criança percorre em direção a sistemas posicionais, como o sistema decimal, por exemplo.

De outra parte as dificuldades de compreensão se ampliam quando se tenta – equivocadamente – relacionar 'zero' com o conceito *conjunto vazio*. Vejamos através de um exemplo singelo:

Sejam os conjuntos A = {a, b}; B = {m, n}; C = { }; D = { }

Mediante considerações simples é fácil explicar que o conjunto A tem dois elementos. Se quisermos podemos compara-lo a uma caixa que tem dois objetos dentro. Assim podemos afirmar que o número de elementos do conjunto A é dois. Em outras palavras, a cardinalidade do conjunto A é igual a 2. Em símbolos: card(A) = 2. [157]

De maneira semelhante, card(B) = 2. Observe que os conjuntos A e B são diferentes, A ≠ B, muito embora tenham a mesma quantidade de elementos, isto é, o mesmo cardinal.

E para o conjunto C? O que acontece? Como C não tem elementos, diz-se que C é vazio. E qual é o card(C)? card(C) = 0.

E para o conjunto D? Também, card(D) = 0.

Conjuntos sem elementos são conjuntos vazios. Por tal fato, são iguais entre si, são coincidentes: todo conjunto vazio é representado simbolicamente por: ϕ. Em nosso exemplo, dizer C ou D é 'a mesma coisa' que dizer ϕ. A unicidade do conjunto vazio traz um complicador a mais para o entendimento da lógica da teoria dos conjuntos, dispensável para a criança que está se iniciando no mundo das contagens.

5.4.2 Sobre a construção do número

Para apreender o conceito de número, o sujeito lança mão da estrutura de inclusão, já construída nas classificações (o 1 incluído no 2; 2 no 3, etc.) e de uma ordem serial (1 < 1+1 < 1+1+1 < ...). O número será o resultado da síntese desta ordem serial de unidades, com a inclusão de conjuntos (1 incluído em 1+1; 1+1 incluído em 1+1+1, etc.).

De acordo com os resultados de pesquisas desenvolvidas por Piaget e Szeminska, "a síntese da inclusão e da seriação só se constitui por volta dos 7-8 anos [...] para os primeiros números naturais; em compensação, ela só se

[157] Alguns autores indicam a cardinalidade de um conjunto usando o símbolo #, assim: #(A) = 2.

realiza de maneira muito progressiva para o resto da série[158].” Tal fato nos alerta para o longo processo de *aritmetização progressiva* da seqüência dos números inteiros positivos (ditos naturais), podendo observar-se uma

> [...] aritmetização muito progressiva da série dos números, por parcelas de aproximadamente 1-7, depois 8-15, após 15-30 etc., com as parcelas não ainda aritmetizadas conservando muito tempo seus caracteres de simples classes ou de simples ordem serial enquanto a síntese não é generalizada.[159]

Resultados de pesquisa, como os apontados acima, são de extrema importância para o processo de construção de conhecimento matemático que se pretende venha a acontecer em aulas de matemática do ensino fundamental, que, em geral, se alicerça sobre o conceito de número.

Com relação às estruturas (matemáticas) em jogo, caberia perguntarmos: “Que recursos estruturais o sujeito constrói para superar as operações concretas (classificação, seriação, etc.) e operar a nível proposicional?[160]” É o que veremos na seqüência, ao discutirmos as características do estágio operatório-formal.

5.5 Sobre o pensamento operatório-formal

Enquanto a criança operatório-concreta lidava com operações de classes, de relações e de números, estruturadas em agrupamentos lógicos elementares ou em grupos numéricos aditivos e multiplicativos, utilizando duas formas de reversibilidade (inversão e reciprocidade), mas sem uni-las

---

[158] *A gênese do número na criança*, 1981, p. 16.
[159] Idem. *Ibidem*, p. 17.

num sistema único, o adolescente passa a operar com proposições (raciocínio hipotético-dedutivo), desenvolvendo um mecanismo formal baseado ao mesmo tempo em estruturas de reticulado e de grupo de quatro transformações.

Tanto raciocínios hipotético-dedutivos quanto provas experimentais são utilizados pelo sujeito operatório-formal em suas experiências e em seu pensamento lógico-matemático, o que lhe garante instrumentos intelectuais novos e mais poderosos e dessa forma, o adolescente operatório-formal, embora mergulhado na realidade vivida, começa a considerar um conjunto de possibilidades e passa a construir sistemas ou teorias sobre a vida, sobre o mundo, sobre o mundo real e sobre mundos imaginados.

Além da construção de teorias, o adolescente faz programas de vida e projeta reformas da sociedade em que vive. Por um lado, o adolescente assimila o mundo adulto construindo teorias ou reconstruindo as já existentes. Por outro lado, precisa de uma concepção das coisas para afirmar-se e criar e pela qual obtenha o êxito que, eventualmente, seus antecessores não tiveram[161].

O pensamento formal é caracterizado pelo surgimento de novas estruturas, como por exemplo, um sistema combinatório generalizado, que se torna efetivo a partir do momento em que o sujeito consegue raciocinar de maneira hipotética.

De posse de um o sistema combinatório de pensamento, o sujeito operatório-formal torna-se capaz de estabelecer proposições combinatórias, sendo capaz de apropriar-se da lógica proposicional. Como sabemos, a lógica

---

[160] BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 127.

proposicional para duas proposições ‘p’ e ‘q’ e suas negações, gera quatro relações básicas (p e q; p e não-q; não-p e q; nem p nem q). O pensamento operatório-formal consegue, não apenas essas 4 relações, mas também as 16 combinações que se obtém unindo-as 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3...

Além disso, no pensamento formal há a possibilidade do estabelecimento de grupos comutativos de 4 operações, denominados grupos de Klein e de grupos de dupla reversibilidade.

5.6 A linguagem matemática e a questão de sentido

Para comunicar minhas idéias, seja por via oral, seja através da escrita, eu necessito de um código que mantenha um mínimo de coerência interna, que se traduz na unicidade de significado de cada termo, na organização da seqüência emitida e que seja compreensível por meu interlocutor. Assim são os idiomas pátrios, dentro de cada território ou de cada região de determinada nacionalidade. Assim é a ciência, pois “um dos pressupostos básicos da ciência é falarmos ... numa linguagem que tem essencialmente a mesma estrutura daquela com que falamos da experiência cotidiana[162]”. Assim é a matemática: ela necessita de uma linguagem própria, que se identifique com a linguagem usual, mas cujos termos tenham significados claros, precisos e únicos.

No entanto, como afirmava Bohr, no diálogo citado:

> É claro que a linguagem tem esse caráter estranho e móvel. Nunca sabemos o que uma palavra significa exatamente. O sentido de

---

[161] Ver BECKER. *Da ação à operação*, 1997, p. 141 e segs.
[162] HEISENBERG. *A parte e o todo*, 1996, p. 155.

> nossas palavras depende de como as juntamos numa frase, das circunstâncias em que as formulamos e de uma infinidade de fatores adicionais [e] embora nossa mente pareça captar apenas o sentido mais importante de uma palavra que ouvimos enunciada, outros sentidos surgem em seus recônditos mais obscuros, ligam-se a conceitos diferentes e se espalham pelo inconsciente. Isso acontece com a fala cotidiana e *a fortiori* com a linguagem dos poetas. Em menor grau, aplica-se também à linguagem da ciência. Particularmente na física atômica, a natureza nos ensinou que alguns de nossos conceitos mais confiáveis têm uma aplicação estritamente limitada. Basta pensarmos na posição e na velocidade.[163]

Observe, por exemplo, a dificuldade para que uma criança compreenda que para representar a metade de um objeto[164], usam-se dois numerais: 1 e 2, separados por uma barra (horizontal ou inclinada):

$$\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 1/2$$

São dois numerais para indicar uma 'coisa', enquanto que no conjunto dos inteiros, a cada objeto contado, corresponde um só numeral.

A passagem do discreto (onde se conta) para o contínuo (onde se mede) é um ponto delicado e precisa ser bem compreendido fato que, normalmente, o ensino tradicional de matemática não considera.

Lembro certo episódio em sala de aula em que o aluno diante da solicitação 'efetua a soma':

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

respondeu, para espanto do professor:

---

[163] Idem, p. 159.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

A justificativa do aluno, bastante plausível, foi o procedimento esperado: 'somou em cima' e 'somou em baixo'.[165]

Bacquet apresenta diversos exemplos de textos de problemas cujo enunciado confunde alunos e professores. Vejamos um exemplo[166], seguido de soluções encontradas não somente por alunos, mas por professores e adultos:

> Jacques tem uma coleção de 145 selos. Paul lhe diz: – Se eu te desse 20 dos meus selos, eu teria, então três vezes mais que você. Quantos selos Paul tem?

> Em um caso, o número de selos é obtido pelas seguintes operações:
> 3 (145 + 20) = 495 selos, e em outro:
> 3 x 145 + 20 = 455 selos.

A primeira solução foi considerada correta por todos, alunos e professores, muito embora ambas sejam falsas. Em textos escritos na forma condicional, há um elemento de significação que dificulta o entendimento do texto. Neste exemplo:

> Paul tem uma coleção x.
> Se ele desse 20, ele teria (x – 20), o que valeria três vezes mais que Jacques, que teria 20 a mais.
> De onde: x – 20 = 3 (145 + 20).

---

[164] É famoso o apelo que o professor de matemática faz, representando uma barra de chocolate na forma de um retângulo desenhado no quadro.

[165] Para somar frações com denominadores distintos, os livros textos apresentam o algoritmo de redução a um único denominador (mmc dos denominadores).

[166] Problema proposto para alunos da classe CM2, da escola elementar francesa, freqüentada por crianças de aproximadamente 10 anos de idade (5ª série do primeiro grau, no sistema brasileiro).

Mas Paul tem x,
de onde x = 3 (145 + 20) + 20 = 515 selos.

Logo, quando digo: 'Ele tem duas vezes mais do que ela', o pensamento lógico de meu interlocutor restabelece a linguagem para compreender. Ele procura o que ela tem, multiplica-o (vezes) por dois e acha o que ele tem. Dito de outro modo, **a seqüência temporal da linguagem corrente é quase sempre inversa à seqüência temporal do pensamento**[167] (grifei).

Como afirma a autora,

eu não penso que seja realmente possível criar um texto sem nenhuma ambigüidade, sem outra dificuldade a não ser a matemática, enquanto continuarmos utilizando a língua do cotidiano – rica, mas polissêmica, e não-adequada ao pensamento lógico – e, sobretudo, apresentando o problema no âmago de uma 'história', o que o torna ao mesmo tempo mais atraente e menos acessível[168].

[Pois] quando se está na matemática, a coerência ou a incoerência de um resultado não é absolutamente percebida, tendo em vista que os cálculos não têm tanto interesse como sentido, infelizmente, para a maioria dos alunos![169]

Jacquard (1998) ao discorrer sobre a operação de adição, afirma:

A falta de reflexão sobre o uso da adição é apenas um aspecto de uma negligência muito grave, uma falta de reflexão sobre o uso dos números. Para que serve um número? A resposta espontânea das crianças é: 'Para fazer operações.' É verdade que, na escola, logo

[167] BACQUET. *Matemática sem dificuldades*, 2001, p. 39.
[168] Idem, Ibidem, p. 40.
[169] Idem, Ibidem, p. 70.

> que um número aparece, a necessidade de proceder a uma operação qualquer manifesta-se. [...] Esta coabitação abusiva explica as constatações catastróficas descritas por Stella Baruk em *L'Âge du capitaine*.

Apresentada aos alunos como uma investigadora que desejava analisar o nível dos alunos em matemática, pôs-lhes, com grande seriedade, um problema do tipo: 'Sabendo que um barco mede 12 metros de comprimento e transporta uma carga de 2000 toneladas de carvão, qual é a idade do capitão?' Três quartos das crianças das turmas do quarto ano, mais de metade das turmas de sexto ano, apresentaram respostas, adicionando, multiplicando ou dividindo os números dados. Que o resultado seja, nalguns casos, evidentemente estúpido (um capitão com mais de mil anos ou menos de dez), não os incomoda, porque 'trata-se de matemática, não é a realidade.'

E prossegue Jacquard, dando cores mais fortes à questão:

> Um colega de Bruxelas confidenciou-me ter prolongado esta experiência na sua cidade, persuadido de que as crianças belgas estariam menos deformadas do que as francesas por um ensino que suprimia o espírito crítico. As observações foram idênticas. Tinha posto a turma o problema: 'No meu bolso esquerdo tenho 26 caramelos, no bolso direito 15 pirulitos; qual é a minha idade?' Todas as crianças começaram os seus cálculos, excepto um, que ficou de braços cruzados com um sorriso irônico. Mas este sorriso desapareceu quando um colega pôs a questão: 'Posso utilizar a calculadora? – Se quiseres.' Imediatamente o recalcitrante pôs-se ao trabalho. Face à intervenção do colega, não pôde manter o seu espírito crítico.[170]

Baruk discutindo as questões de sentido na linguagem matemática e as enormes barreiras que a criança encontra observa:

> Menos, mais, são palavras da língua materna. Palavras cujos sentidos e efeitos de sentido, abundam nesta língua.
> Não é possível, a menos que se procure a confusão, utiliza-las em linguagem matemática *antes* de as ter matematizado.
> Matematizá-las é, neste caso, escolher para cada uma dessas palavras *um* dos seus sentidos, delimita-lo, depois eliminar os efeitos de sentido, afim de tornar esta palavra adequada ao uso matemático. E esse *tratamento* não pode fazer-se a não ser a partir de uma utilização, e esta só pode fazer-se sobre objetos que a isso se prestem. E estes são exclusivamente matemáticos.[171]

O sucesso que uma criança pode obter no processo de construção de seu próprio conhecimento e de sua constituição como sujeito autônomo é decorrência de suas ações. De forma semelhante, a construção do sentido matemático de cada termo ou expressão é fruto de um processo que a criança só pode alcançar por meio de suas ações.

5.7 Por que ações são definidoras do sucesso da criança?

As ações são sempre, mesmo no estágio sensório motor, antes de qualquer espécie de linguagem, suscetíveis de repetição e generalização, constituindo o que poderíamos chamar de *esquemas de assimilação*. Tais esquemas se organizam de acordo com leis cujo parentesco com as da lógica é inegável: dois esquemas podem ser coordenados ou dissociados, um pode estar parcialmente contido no outro, ou ter somente uma parte em comum, etc. Em partes de um esquema (sub-esquemas) ou na coordenação de dois ou mais esquemas pode aparecer uma ordem de sucessão invariante ou certas permutações (tipos de ordem), assim como correspondências termo a termo,

[170] JACQUARD. *A equação do Nenúfar*, 1998, pp. 51-52.
[171] BARUK. *Insucesso e Matemáticas*, 1996, p. 40.

etc.

Ao agir a criança usa seus esquemas, utiliza as *ferramentas* que ela própria construiu para si, portanto percorre, em seu pensar, caminhos mentais que lhe são conhecidos. Como afirma Piaget, "cairíamos em um grave erro se, limitando-nos ao plano da linguagem, deixássemos de lado o papel das ações." [172]

Comentando idéias de Piaget, Ramozzi-Chiarottino afirma: "a verdadeira causa dos fracassos da educação formal [...] decorre essencialmente do fato de se principiar pela linguagem [...] ao invés de o fazer pela ação real e material[173]".

> É a partir da escola maternal que deve ser preparado o ensino da matemática por uma série de manipulações voltadas para os conjuntos lógicos e numéricos, os comprimentos e as superfícies etc e, esse gênero de atividades concretas deveria ser desenvolvido e enriquecido ininterruptamente, de forma sistemática, no decorrer de todo o ensino de primeiro grau, a fim de se transformar pouco a pouco, no início do segundo grau em experiências de Física e de Mecânica elementares.[174]

O conhecimento matemático não pode ser apreendido como verdade acessível apenas por intermédio da linguagem, pois tal conhecimento deriva essencialmente de ações exercidas sobre o meio e as próprias operações matemáticas também são ações, se bem que coordenadas entre si e representadas, ao invés de serem executadas materialmente.

É preciso observar então que a lógica do adulto, a lógica da escola,

---

[172] PIAGET e SZEMINSKA. *A gênese do número na criança*, 1981, p. 220.
[173] *A teoria de Jean Piaget e a educação*, 1980, p. 97.
[174] Idem, ibidem, p. 97.

difere fundamentalmente da lógica da criança. Em geral, o professor, sem dar a devida atenção para o fato de que a criança *raciocina* usando caminhos diferentes dos que ele utiliza, imagina que está sendo compreendido pela criança e, mais importante, *pensa* que está entendendo o que a criança diz, em suas colocações verbais, ou o que a criança deseja expressar em suas ações.

A compreensão de uma noção supõe sua reinvenção pelo sujeito. É evidente que, em muitos casos, a criança pode *dar a impressão* de ter compreendido sem realizar *seu processo de reinvenção*. No entanto, a verdadeira compreensão, aquela que se manifesta por meio de novas aplicações espontâneas, ou, em outras palavras, por uma generalização ativa, supõe muito mais: que o sujeito tenha sido capaz de encontrar por si mesmo as razões da *verdade* que busca entender, e, portanto, que a tenha reinventado ele mesmo, pelo menos parcialmente.[175]

Vale destacar que um aluno-sujeito, agente, não prescinde da atuação do professor. Ao contrário o professor é indispensável, pois no lugar de ser um mero *repassador* de verdades prontas ou de *dar* lições, ele é desafiado a organizar situações que incitem à investigação, que propiciem a experimentação e que gerem novos questionamentos. No entanto, de nada adiantaria ele, o professor, criar desafios – seja por dispor de conhecimentos teóricos, seja por ter experiência prática – se não tivesse condições de auxiliar o aluno a supera-los, a encaminhar soluções e alternativas de respostas.

Finalmente não podemos esquecer que em todos os níveis o aluno é capaz de *fazer* e de "compreender em ação" [176] o que são indicadores claros de novos caminhos a serem trilhados pela Escola para atingir seu principal

---

[175] Ver PIAGET. *Fazer e compreender*, 1978.

objetivo que é a formação integral da criança.

> A orientação que se pretenda dar à Educação Matemática depende, naturalmente, da interpretação que se aceite para a formação psicológica ou para a aquisição das operações e das estruturas lógico-matemáticas, mas depende igualmente da significação epistemológica que a elas se atribua.[177]

5.7.1 Para uma re-interpretação do 'erro' na escola

Por tudo que estamos vendo até aqui, as idéias fundamentais propostas na epistemologia genética colocam o fulcro principal do desenvolvimento do sujeito em suas próprias ações. Nesse sentido, se pode afirmar que Piaget propõe uma teoria do desenvolvimento a partir da ação, ou ainda, da invenção e da descoberta.

No processo de desenvolvimento de cada ser, através de suas ações, vão ocorrendo revisões (mudanças, alternativas) das próprias ações, dos pensamentos, das idéias ou teorias que o sujeito possa ter desenvolvido ou assimilado. Como o desenvolvimento é paulatino, fruto da experiência, sem saltos bruscos, não cabe, por exemplo, disjunção exclusiva, da prática escolar tradicional de estudo de matemática 'ou acerto ou erro', em que a verdade se opõe à falsidade. Pois não se trata mais de uma mera questão 'acerto-erro' e sim da construção de possibilidades, de fazer e de compreender.

É preciso entender o processo educativo como uma construção do

---

[176] PIAGET. *Abstração reflexionante*, 1995, p. 227.

[177] PIAGET et alii. *La enseñanza de las matematicas modernas*, 1980, p. 219. [La orientación que se pretenda dar a la educación matemática depende, naturalmente, de la interpretación que se acepte para la formación psicológica o para la aquisición de las operaciones y de las estructuras lógico-matemáticas, pero depende igualmente de la significación epistemológica que se les atribuya].

conhecimento que decorre de ações que o indivíduo (sujeito de seu fazer) desenvolve de acordo com o conjunto de estruturas que já possui, isto é, que já desenvolveu para si, portanto 'acertos' e 'erros' fazem parte do processo, são inerentes ao processo educativo. Dito de outra forma, uma manifestação da criança, seja através de uma ação, idéia ou pensamento deveria ser tratada como uma *hipótese científica*. A validação de tal resposta dependerá do contexto e dessa forma poderá ser 'verdadeira', e como tal será um 'acerto'; caso contrário será um 'erro'.

De acordo com Piaget[178], a partir de uma visão construtivista, podemos encontrar três níveis de desenvolvimento de respostas apresentadas por crianças diante de um problema proposto. Num nível I encontram-se crianças para as quais a questão nem mesmo constitui um problema, pois a criança não o resolve ou sequer o entende. Nesse nível se pode detectar uma espécie de 'recalque' do ponto de vista cognitivo nas manifestações da criança. O conceito de *recalque cognitivo*[179], proposto por Piaget na obra 'Problemas de Psicologia Genética' (1972) ao tratar do 'inconsciente afetivo e inconsciente cognitivo' e ampliado nas Conclusões de 'A tomada de consciência' (1974), cumpre a função de evitar 'conflitos' não solucionáveis pelo sistema de estruturas de assimilação que o sujeito dispõe naquele momento.

Em geral, as respostas de crianças do nível I se caracterizam por apresentarem uma 'justaposição' ou um 'sincretismo'. Observa-se a 'justaposição' (dissociação) quando a criança coloca lado a lado, mas sem

---

178 *Problemas de epistemologia genética*, 1978.

179 Recalcamento cognitivo = mecanismo pelo qual ... incoerências entre o que o sujeito pensa e faz ... não constituem, no plano consciente, ainda um problema para ele. (MACEDO, *Ensaios construtivistas*, 1994, p. 169).

vínculo ou articulação, respostas que se contrariam, em diferentes momentos. Por outro lado, o ‘sincretismo’ (indiferenciação) refere-se à idéia de que qualquer alteração na questão apresentada justifica alterações na resposta. Respostas contraditórias ou antagônicas, neste nível, não geram conflitos ou problemas para a criança, portanto não se pode falar em ‘erro’ numa perspectiva consciente e além disso, qualquer tentativa de esclarecimento ou de correção, por parte do adulto, é inoperante, no nível I.

O nível II se caracteriza pela flutuação das respostas apresentadas pela criança, ou seja, a compreensão do problema depende do contexto em que o mesmo é formulado e as respostas se alteram constantemente. Neste nível as soluções propostas pela criança já aparecem como ‘ensaio e erro’, como tentativa ou experimentação. Por interferência do adulto ou de outras crianças (seus pares) o erro pode ser problematizado para a criança, o que ainda não ocorria no nível anterior.

Finalmente o nível III caracteriza-se pela compreensão do problema na forma como ele é proposto. A criança consegue apresentar soluções suficientes para a questão, ou seja, consegue dar explicações lógicas (coerentes) e de acordo com as relações internas do sistema envolvido no problema proposto. Neste nível o erro é superado, pois a criança pode antecipá-lo ou anulá-lo, ou seja, ela já dispõe de meios para analisar e resolver a situação; para evitar erros cometidos em ações anteriores; para antecipar alternativa de solução. Pode-se afirmar que sujeitos do nível III já alcançaram uma certa autonomia.

5.7.2 Fazer e compreender

Com o objetivo principal de caracterizar como surge o erro nas relações em aula de matemática, isto é, a partir de que momento (ou situação) um aluno erra, vamos buscar subsídios teóricos para entender e, se possível, distinguir tipos de erros e suas causas. O trabalho em sala de aula, mesmo aqueles mais teóricos e desprovidos de práticas materiais, supõe algum tipo de ação (fazer) por parte do aluno, que possa leva-lo a alcançar alguma aprendizagem (compreender). Conforme já afirmara Piaget:

> fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por ela levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação.[180]

Fazer (com sucesso) é alcançar um objetivo ou resultado almejado, o que supõe a disponibilidade, por parte do sujeito, de organizações (estruturas) para a construção de meios e estratégias adequadas à solução do problema que está enfrentando. No plano do fazer, o sujeito comete um ‘erro funcional’ quando sua ação não alcança o objetivo desejado, ou seja, ‘as coisas não estão funcionando como era desejado ou esperado pelo sujeito.’

Por outro lado, no plano do compreender, o que interessa ao sujeito é entender as razões que produzem determinado resultado ou acontecimento. O sujeito precisa explicar o que está acontecendo, lançar suas idéias ou teorias sobre o fenômeno (problema) estudado. “O plano da compreensão é o do domínio da estrutura, do sistema que regula a ocorrência de um certo fenômeno[181].” Neste plano, contradições, conflitos ou falhas na teoria

---

[180] *Fazer e compreender*, 1978, p. 176.
[181] MACEDO. *Ensaios construtivistas*, p. 74.

(hipóteses) se manifestam como ‘erros sistemáticos’.

Em ambos os casos, tanto no fazer (funcional) quanto no compreender (estrutural), quando enfocamos a construção do conhecimento do ponto de vista pedagógico (como nos interessa neste estudo), uma ação ou explicação inadequada não pode ser tratada, simplesmente, como erro (oposto a acerto), mas sim como uma hipótese a ser testada e modificada sempre que se fizer necessário.

> Se o erro faz parte do processo, se pode ser analisado de diferentes ângulos, então não se trata de nega-lo ou justifica-lo de maneira complacente, nem de evita-lo por meio de punições, mas de problematiza-lo, transformando-o em uma situação de aprendizagem.[182]

Trabalhos mais recentes de Inhelder e colaboradores, inspirados em pesquisas desenvolvidas por Piaget[183], buscam uma nova abordagem para o erro como manifestação possível em função dos sistemas cognitivos que a criança dispõe em cada etapa de seu desenvolvimento.

5.7.3 O cognitivo e o afetivo em sala de aula

No entanto, para que ocorra o desenvolvimento cognitivo, ou seja, para que a criança construa seu conhecimento é necessário que aconteça seu crescimento afetivo, pois,

> É incontestável que o afeto desempenha um papel essencial no funcionamento da inteligência. Sem afeto não haveria interesse,

---

[182] *Ensaios construtivistas*, p. 75.
[183] *O possível, o impossível e o necessário.*

> nem necessidade, nem motivação; e, conseqüentemente, perguntas ou problemas nunca seriam colocados e não haveria inteligência.[184]

Nestes termos, a afetividade é condição necessária na constituição da inteligência muito embora não suficiente, pois ela "constitui a energética das condutas cujas estruturas correspondem às funções cognitivas e, se a energética não explica a estruturação nem o inverso, nenhuma das duas poderia funcionar sem a outra[185]."

O estado de desenvolvimento afetivo individual pode ser observado na maneira como a criança se situa nas relações que estabelece em casa, na rua e em sala de aula, com o professor, com seus colegas e até mesmo com o conhecimento que está sendo trabalhado.

Portanto, afetividade e cognição, como pólos de um imã, desenvolvem-se mutua e simultaneamente, pois se a cognição está relacionada ao conjunto de estruturas que o sujeito vai desenvolvendo para si, a afetividade, por sua vez, está vinculada às emoções, desejos, sentimentos e manifestações de prazer desse mesmo sujeito. Talvez pudéssemos, parafraseando Damásio[186], afirmar que o grande erro da sociedade ocidental, inspirada em Descartes, foi ter 'dicotomizado' o ser humano em porções disjuntas, a saber: corpo ou espírito; cérebro ou coração; razão ou emoção. Esse foi o caminho que a escola trilhou: estudar é sinônimo de trabalhar, de sofrer. Se brincar me dá prazer, a escola não é lugar para brincar!

O afeto como um *catalisador* pode explicar a aceleração ou retardamento da formação das estruturas; aceleração no caso de interesse e

---

184 *A relação da afetividade com a inteligência no desenvolvimento mental da criança.*
185 PIAGET e INHELDER. *A psicologia da criança*, 1998, p. 98.
186 DAMÁSIO. *O erro de Descartes*, p. 280.

necessidade, retardamento quando a situação afetiva é obstáculo para o desenvolvimento intelectual. Retomando um exemplo apresentado por Piaget, com relação à formação do conhecimento matemático escolar,

> numa estrutura aritmética como 7 + 5 = 12, a compreensão da igualdade pode ser retardada por certas situações afetivas, ou pode ser acelerada onde o interesse estiver envolvido. Em ambos os casos, o sujeito acabará por aceitar que 7 + 5 = 12[187].

Piaget, no artigo citado estabelece uma correspondência entre estágios de desenvolvimento das estruturas do pensamento e estágios da afetividade. No estágio sensório motor em que, cognitivamente, a criança busca a construção do objeto permanente, em estreita relação com a construção do 'espaço', 'tempo' e da 'causalidade', pode-se constatar que, afetivamente a criança se envolve com a constituição das relações objetais. Segundo o autor, os fatos demonstram a existência de duas estruturas paralelas, o aspecto afetivo e o aspecto cognitivo que são complementares, mas sem que um seja a causa do outro.

No segundo estágio, simbólico, caracterizado pela formação da função simbólica, da representação e a vinculação, ainda parcial, do pensamento à linguagem, do ponto de vista afetivo, encontram-se características correspondentes, tais como o aparecimento de afetos representativos (afetos vinculados a valores individuais e valores que se mantém fora do campo perceptivo, portanto, já ligados a representações). Por exemplo, sentimentos de simpatia e antipatia, de superioridade e inferioridade.

---

[187] *A relação da afetividade com a inteligência no desenvolvimento mental da criança*, 1962.

No terceiro estágio, operatório concreto, caracterizado pelo desenvolvimento de capacidades de conservação, por exemplo, por decorrência de estruturas operatórias, no campo afetivo, observa-se o desenvolvimento de uma 'moralidade de reciprocidade', que é uma forma de 'moralidade autônoma' que pode ser observada na troca entre colegas, sem subordinação a ordens superiores.

> Neste nível o melhor exemplo de um sentimento moral baseado na reciprocidade é o senso de justiça entre as crianças de mesma idade, entre colegas; este senso de justiça é independente das ordens ou instruções dos adultos.[188]

No estágio em questão (das operações concretas) podemos estabelecer uma estreita comparação entre o 'problema das operações' (no nível cognitivo) e a 'vontade' (no nível afetivo). "A vontade constitui o equivalente da operação cognitiva; mas isto é uma operação que lida com o aspecto energético do comportamento e, por conseguinte, uma operação afetiva[189]".

No quarto estágio, das operações formais, do ponto de vista afetivo, podemos encontrar sentimentos que se expressam como 'ideologias'. É neste estágio final em que podemos caracterizar a formação da 'personalidade' da criança. Ao referir-se ao termo 'personalidade', Piaget diz:

> Personalidade é a síntese superior da vida afetiva; é a síntese alcançada no momento em que o indivíduo consegue ser capaz de se tornar um membro da sociedade de adultos, numa sociedade já formada, e onde desempenha um papel que escolheu por conta

---

[188] *A relação da afetividade com a inteligência no desenvolvimento mental da criança.*
[189] *A relação da afetividade com a inteligência no desenvolvimento mental da criança.*

> própria e que permite a inserção do indivíduo no grupo e regula globalmente seus valores.[190]

Os aspectos acima considerados que envolvem o desenvolvimento afetivo da criança são pouco tratados e até mesmo esquecidos a propósito de trabalhos escolares, particularmente na aprendizagem da matemática. No entanto, como afirma Lowen,

> O aprendizado é uma atividade criativa. Somos levados a aprender pela promessa do prazer. Esta é cumprida quando aprendemos algo. Procuramos informações para aprofundar o conhecimento e ampliar o prazer. Não é preciso que sejam introduzidas em nós, como acontece em muitos sistemas educacionais. Quando a educação é ajustada ao prazer, as escolas transformam-se numa aventura agradável de autodescoberta.[191]

Assim sendo, penso que as idéias propostas por Jean Piaget sobre a construção do conhecimento matemático são indicadores da possibilidade de entender o *fazer* do professor de matemática e propor uma nova sala de aula.

Professor, sujeito pensante e reflexivo, como se deseja que sejam os alunos e que para tal deve buscar compreender como se desenvolve a formação de seu próprio conhecimento matemático e, fundamentalmente, entender como ocorre a apropriação de conhecimentos por parte do aluno, que fatores influem em seu desenvolvimento, que elementos são primordiais no seu crescimento intelectual, físico, afetivo, etc. O professor necessita, em suma, 'apreender' o aluno no sentido de conhecer sua capacidade (forma) construída que possibilita novas apropriações (conteúdo).

---

[190] Idem, ibidem.
[191] LOWEN. *Prazer* : uma abordagem criativa da vida, p. 150.

Daí a importância essencial de novas reflexões sobre o trabalho do professor, de um modo geral, e do professor de matemática, em particular, o que desenvolverei no próximo capítulo, como fechamento deste trabalho.

6 PARA TECER NOVAS MALHAS, NOVAS REDES

Para Piaget, ser humano implica ser matemático;
tornar-se humano é tornar-se matemático, ou melhor,
lógico-matemático no sentido qualitativo e quantitativo,
portanto, matemático no sentido amplo.[192]
(Fernando Becker)

6.1 Considerações feitas a partir das entrevistas

Fazendo uma revisão dos resultados alcançados nas entrevistas e buscando sintetizar o que me foi possível constatar, retomo inicialmente o quadro de freqüência de uso de alguns termos que aparecem na fala do professor. A idéia de organizar tal quadro surgiu-me durante o transcorrer das entrevistas e não saberia precisar em que momento ou em qual delas. Em verdade, a minha curiosidade foi crescendo, paulatinamente, em função da forma como o professor se expressava em suas respostas.

Por que pensei na *contagem* de termos? Em realidade, nunca tive a preocupação em estabelecer estatísticas descritivas que nada tem a ver com o meu trabalho de pesquisa, nem com minhas prioridades didáticas ou pedagógicas. Mas, eu sempre cogitei que profissionais em cada área técnica utilizassem com muita freqüência e com certa naturalidade alguns termos específicos de sua área. Por exemplo, entre engenheiros: *construir, projetar...*; entre médicos: *curar, ter saúde...* Entre professores, imaginava eu: *ensinar, aprender, entender, etc.*

No entanto, no transcorrer das entrevistas, comecei a me dar conta de que alguns termos que eu imaginava serem usados com elevada freqüência pelo professor custavam a aparecer em suas falas e até mesmo não apareciam. Creio que foi este o fato gerador de minha curiosidade: em algumas entrevistas o professor não utiliza, ou utiliza muito pouco, termos como *aprender* ou *ensinar* (e derivados), contrariamente a minha expectativa de que tais termos seriam muito usados, principalmente em se tratando de entrevistas de aproximadamente uma hora de duração, com professores cuja rotina se estabelece em torno do binômio ensinar-aprender.

O quadro apresenta termos de minha escolha e nele registro o número de vezes que cada sujeito os utiliza em suas respostas. As duas colunas à direita contêm o total de vezes que os termos aparecem nas respostas dos professores licenciados (SL = todos, exceto s6) e o total geral (ST). Como se pode observar s6 usa os termos *ensinar* e *aprender* com freqüência bem superior aos demais sujeitos e por ser s6 o único que não tem licenciatura e sim formação em área técnica (engenharia), fiz a separação de totais para que se possa pensar a respeito.

---

[192] Epistemologia genética e conhecimento matemático in *Revisitando Piaget*, 1998, p. 23.

Quadro de freqüência de termos

	Sujeitos									
Termos	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	SL	ST
conteúdo	6	14	10	11	20	1	17	17	95	96
entend(...)	7	3	19	6	4	17	10	4	53	70
interesse		11	8	3	15	1	4	2	43	44
erro	2	6	5	3	11	6	4	10	41	47
disciplina	5	2	6	7	1	4	2	4	27	31
dificuldade			9	3	1	5	5	4	27	32
aprender	2		4	6	6	22	3	5	26	48
ensinar	3		4		2	10	1	2	12	22
desperta(r)			2	4	5		6	1	11	14
copia				2				6	8	8
motivação		3	3						6	6
atrapalha(r)				5		2			5	7
não querem nada			2		2				4	4
perturbar			1						1	1
interpretação			1						1	1
deficiência			4						4	4

SL = soma de quem tem licenciatura
ST = soma total

No quadro se pode verificar que o termo utilizado com maior freqüência pelos entrevistados é *conteúdo* (95 vezes entre os licenciados e 96 vezes no total geral). Sem dúvidas *conteúdo* enquanto matéria a ser exposta ou currículo a ser cumprido constitui a maior preocupação do professor, de tal forma que sua prática de sala de aula acontece como uma apresentação oral da *matéria* (conteúdo) que necessariamente deve ser exposta, acompanhada do uso do quadro de giz, independentemente do que está ocorrendo com o aluno.

A seguir, o mais freqüente nas respostas é o radical *entend-* que freqüentemente surge em expressões como: *eles entendem...* ou *eles não entendem*. Na contagem acima, excluí a expressão: – *Entendes?* – que aparece, de passagem, em finais de frases, sendo muito freqüente na fala de alguns sujeitos (s5, por exemplo, usa nove vezes essa expressão).

Na seqüência de contagem, excluindo as respostas de s6, o termo mais freqüente é *interesse* (43 vezes entre os licenciados e 44 vezes no geral). O termo *interesse*, geralmente, aparece em expressões que afirmam que o aluno não aprende (ou tem dificuldades em aprender) matemática por sua exclusiva falta de interesse. A falta de interesse leva ao erro. O termo *erro* apresenta freqüência de uso semelhante ao uso de *interesse* (41 vezes entre licenciados e 47 vezes no total).

Logo a seguir, com freqüência menor aparecem os termos *disciplina*, *dificuldade* e *aprender* (27 ou 26 vezes, excluindo s6). Outros termos aparecem com freqüência inferior, sendo digno de destaque o fato de que alguns entrevistados não usam os termos *ensinar* (s2 e s4) e *aprender* (s2), como já havía comentado no capítulo V.

Os comentários acima são apenas ilustrativos e estão relacionados com a minha tentativa de compreender como o professor organiza suas idéias para uma aula de matemática e principalmente como ele percebe o aluno que está ali na sua frente, em última análise como ele organiza sua atividade diuturna e como *enxerga* seu aluno.

6.1.1 A cabeça do professor

Nas respostas do professor pude constatar a presença de algumas idéias que norteiam sua forma de trabalhar e que acabam por definir o resultado geral que se observa em contextos de ensino de matemática, com todas as conseqüências já sobejamente conhecidas de formação deficiente em termos de conhecimentos matemáticos fundamentais. Sem a preocupação de fazer uma apresentação ordenada ou de dar maior destaque a qualquer aspecto em particular, passo a tratar daqueles que mais chamaram minha atenção.

Em aula de matemática o fator primordial e que praticamente determina o comportamento e a forma de trabalhar do professor é a preocupação com o cumprimento do *conteúdo*. Talvez este fato seja uma decorrência do tipo de aula que, costumeiramente, é utilizada para trabalhar com matemática: a aula expositiva, tipo conferência. Em uma palestra ou conferência, há orador e público: o orador disserta para o público que escuta. Em uma aula expositiva de matemática o professor disserta sobre um tema para um público, constituído pelo grupo de alunos, que aos olhos do professor-palestrante se homogeneiza, se padroniza ou se torna abstrato.

Por que abstrato? Em primeiro lugar, porque o professor apresenta sua aula para um aluno, por ele imaginado. Imaginado no sentido de que é alguém que vai demonstrar interesse por aquele assunto, apesar de não ter nenhuma noção de sua utilidade; que acompanhará as explicações ou ainda a forma de raciocinar do professor; que conseguirá entender o que está sendo explicado em um tempo padrão por ele estimado; que vai aprender cada algoritmo, seguindo os passos do exemplo de resolução feito pelo professor e que vai fazer o tema para casa. Em segundo lugar, porque o professor desenvolve a aula imaginando estar frente a um aluno que tem comportamento padrão, que dispõe de material completo, mantém-se sentado, olhando para a frente, copiando todas as coisas, fazendo os exercícios, etc.

Para não ser *atrapalhado* em sua preleção e assim assegurar a continuidade de sua fala, o professor acaba encontrando soluções interessantes (criativas?) como a que segue: – ... *nós tínhamos um código. Pra ir no banheiro tinha um palhacinho. Se o palhaço estava ali, é porque não tinha ninguém no banheiro. Pega o palhaço, vai lá, volta. Se o palhaço não está é porque tem alguém no banheiro. Não precisa estar pedindo pra ir ao banheiro, atrapalhando a aula, atrapalhando o trabalho...* [s4, p19]. Sem dúvidas esta é uma solução criativa, pois pelo menos o aluno não se sentia solitário... no banheiro!

Ao prosseguir em sua argumentação, diz o professor: – *Precisou sair, sai em silêncio, mas não perturba a aula, não perturba a explicação porque eu prefiro uma pessoa quando sai quietinho, do que dizer: 'Professora, dá licença de ir ao banheiro?' Porque atrapalha o que tu estás pensando, falando, ou até os outros, chama a atenção dos outros.* [s4, p19]. Percebe-se a nítida preocupação do professor com a manutenção de sua oratória, com a continuidade de sua exposição oral, pois qualquer interferência (leia-se manifestação) do aluno poderá ter conseqüências *inesperadas*, como até mesmo a possibilidade de pensar e dar-se conta de que a sua exposição oral não está alcançando o objetivo que ele, o professor, esperava.

Outro aspecto interessante e que merece algumas reflexões é o entendimento que tem o professor sobre o ato de ensinar e o aprender. O ensinar para o professor é um ato de sua total responsabilidade. Ao responder à questão: – Qual o principal papel do professor?, surgem expressões que envolvem ações de: *transmitir, mostrar, dar, fazer ver, incentivar, fazer com que acreditem, etc.*, sempre executadas pelo professor. Na voz de s3: – *Ensinar é tu... ir dando um empurrãozinho.* [p09.3].

Por outro lado, quando questionado sobre *como se aprende*, o professor afirma: *vivenciando, buscando, exercitando, trabalhando.* Mas são todas ações que ocorrem no plano físico ou sensorial e que, em geral, não são relacionadas com as condições estruturais já desenvolvidas pela criança. Como afirma s8: – *Primeiro eu falo sobre o assunto. Falo sobre o que eles já deveriam ter aprendido sobre aquilo anteriormente...* [p11.1].

E se o aluno não aprende? Bem, ai a falha é dele, pois: – *o ensinar depende de uma coisa muito importante que é o interesse. Tudo aquilo que tu tens interesse, que te interessa, que tu necessitas, tu aprendes com facilidade.* [s5, p19]. Por não ter interesse, a conseqüência direta é a dificuldade, a nota baixa e finalmente a reprovação.

O aprender fica então submetido à ação de ensinar, exercida pelo professor, ou seja, o aprender é um subproduto do ensinar. E, além disso, o aprender é uma decorrência do *exercitar* enquanto ato repetitivo, executado pelo aluno. É interessante observar que se o aprender, decorre do ensinar, o professor ao ser questionado: – Como se ensina matemática? Responde: – *Matemática, na minha opinião, é exercitando.* Insisto, na questão: – Exercitando? – *É... o português, na base da leitura. Não pode exigir muito a parte de escrever; mas a leitura? Se o aluno não sabe ler, muito menos escrever. E a matemática, que é mais na base da... de exercitar. Fazer ele fazer! Tem o ditado que é fazendo que se aprende, não é?* [s3, p34].

A fala do professor pode nos induzir a pensar que aprender é uma decorrência direta do binômio expor-exercitar, onde o professor expõe e o aluno exercita. No entanto o aprender, em termos piagetianos, tem o sentido de construção de significados, nas palavras de Becker: “o homem se faz matemático na medida em que **constrói** matemática – como conteúdo, mas sobretudo como estrutura[193]".

Assim entendido, podemos fazer coro às palavras do professor, mas completando: *é fazendo com que as coisas nos tenham significado, que se aprende!*

6.1.2 O professor e as submissões no ambiente escolar

O que acontece com a matemática na escola? Vira pauta de conteúdos, isto é, transforma-se em listagem de nomes, e por decorrência passa a depender da transmissão oral, da memorização, de pendores e tendências de toda sorte, chegando-se "por vezes a considerar a compreensão da Matemática elementar como o indício de uma aptidão especial, dessa *bossa*[194] para a Matemática cuja presença ou ausência se presumem possa então explicar os sucessos e os fracassos...[195]" em seu estudo.

E além de ser reduzida a uma seqüência de conteúdos, a matemática escolar se fragmenta, chegando ao extremo de determinar que amplitude numérica, por exemplo, a criança pode aprender em cada idade ou adiantamento escolar. Exemplifico: na educação infantil (pré-escola) a criança só pode aprender os algarismos (de 1 a 9). Na primeira série, aprende até 99, etc.

E por estar fragmentada, o professor acaba responsável apenas um segmento desta pauta (um pedaço do conteúdo) e dessa forma acaba por

---

[193] *Epistemologia genética e conhecimento matemático*, 1998, p. 22.
[194] O termo 'bossa' refere a certa conformação craniana que indicaria pendores para a matemática, lembrando Lombroso e sua caracterização de tendências homicidas por decorrência de medidas da cabeça.
[195] PIAGET. *Para onde vai a educação*, 1998b, p. 55.

impedir-se de se apropriar do conhecimento matemático como um todo. Em outras palavras, o professor é o próprio passageiro que pega o *bonde* andando e logo ali, salta, com ele ainda andando, ou seja, não tem noção de que conhecimento o aluno já tenha desenvolvido para si, nem do que vai acontecer com ele posteriormente. Assim, quando questionado sobre a importância do que está ensinando, nada mais resta ao professor, do que afirmar: – *Até porque eu creio... que outras pessoas mais capazes formaram aqueles temas e... de repente, tudo aquilo ali é necessário.* [s1, p07.2]. Como mais capazes? – *Mais capazes assim, com mais anos de Matemática, de prática... Mais capazes assim em termos de graduação... cursos... não sei. Algumas pessoas sentaram ali para formar aquele programa, né? É pelo menos o que eu julgo que eles fizeram. Selecionaram umas pessoas para fazer aqueles programas.* [s1, p08.1].

A falta de uma fundamentação teórica mais consistente que forneça subsídios para que o professor compreenda a importância da matemática na estruturação do ser é tão gritante que ele afirma: – *Não que eu concorde. Não concordo com aqueles programas. Acho eles enormes, extensos. Tem muita coisa que não precisa, sabe? Que fazem, que obrigam o aluno a perguntar: – 'Por que eu quero isso, onde é que eu vou estudar isso. Pelo amor de Deus porque que eu preciso disso!'* [s1, p08.2].

E sem outra saída, justifica sua ação, afirmando: – *Então... eu dou... aquilo que tem ali, até por medo de... de receio de não cumprir com o meu trabalho... da rede municipal. Até por que a gente precisa...* [do emprego, me arrisco a pensar!] [s1, p08.3].

Dessa forma o professor se torna cativo de uma listagem de conteúdos que se expressa em seqüências curriculares anuais, sem ter domínio sobre o todo e sem dispor de elementos para justificar a necessidade ou a importância de cada item de tal programação. É o que eu denomino de submissão à pauta de conteúdos: o professor é cativo de uma listagem de assuntos. E o seu aprisionamento é tão forte e tão poderoso que, por exemplo, se numa seqüência de dez itens, um tema de geometria aparece listado em nono ou décimo lugar, o professor posterga os trabalhos relacionados com o ensino de geometria para o final do ano letivo, se sobrar tempo.

Por seu turno a geometria, cujo ensino foi relegado equivocadamente a segundo plano com o advento da teoria dos conjuntos (leia-se matemática moderna), praticamente caiu no esquecimento, tanto que é comum o aluno pensar que geometria não é matemática. Ouçamos o professor a respeito: *– Eu comecei desde o início do ano a geometria junto. Mas eles não entendem que geometria é também matemática. Na cabeça deles, geometria não é matemática.* [s1, p27.1]. Por quê? *– Não sei. Eu digo para eles, álgebra e geometria. Aí eles perguntam: '– Professora, hoje tem geometria ou matemática?' Aí eu digo: – 'Mas meu Deus, geometria é matemática também.' É uma matéria, uma matéria... E aí eles praticamente não conseguem entender porque geometria... Eles decoraram, mas eles não entendem... ainda não engoliram que geometria é Matemática também. Não sei por que?* [s1, p27.2].

Entre *explicações verbais* e *engolidas*, a geometria foi esquecida e com ela se foi a possibilidade mais real e evidente da criança aprender a organizar estruturas de toda ordem e assim dar organicidade àqueles conteúdos que soltos perdem todo sentido.

Há uma outra contingência a que o professor se sente submetido: a que se refere ao colega do ano seguinte, ou seja, o professor precisa cumprir a pauta de conteúdos, nem que seja apenas apresentando uma aula expositiva, atropelada no final do ano para justificar o registro no livro de chamada. A situação do professor é muito semelhante à de um atleta em uma corrida de bastão: ele tem que passar o bastão adiante, não importa o que aconteça durante a sua participação na corrida: – *Só que tem muito a questão do tempo e muito a questão de que no ano que vem o professor não vai se lembrar se a gente trabalhou otimamente ou não. Ele quer seguir conteúdos.* E ele próprio admite agir assim ao afirmar: – *Eu cobro dos meus alunos o conteúdo do ano que passou.* [s8, p02.1].

Outra contingência a que o professor se submete é com relação à linguagem matemática e sua simbologia, especialmente àquela utilizada pelo livro texto. Vejamos: para que o aluno entenda do que se está falando, é indispensável que cada termo utilizado tenha significado único e preciso. No entanto diversas palavras do vocabulário matemático são utilizadas no cotidiano com diferentes sentidos e, em muitos casos, com significados diversos.

Por exemplo, *produto*, resultado da operação de multiplicação é também *resultado de produção; quantia apurada em um negócio; resultado de um trabalho,* etc.; *conjunto* é sinônimo de coleção, no entanto observe a dificuldade para a criança (e até mesmo para os adolescentes) entender o significado de *conjunto vazio*. Este conceito, como já referimos anteriormente que expressa a negação de elementos. E como sabemos, por resultados de estudos piagetianos, a compreensão da negação é sempre tardia com relação à afirmação.

Termos como *número racional*, *matriz, raiz, triângulo retângulo* entre outros, são exemplos de palavras que têm diversos significados dependendo da situação onde estão sendo usadas, mas que em matemática devem ter um e somente um significado específico.

Além disso, a construção do texto matemático é, normalmente, uma elaboração que demanda sucessivas des-construções para a sua real compreensão. Vejamos o exemplo da explicação de como se procede à 'redução de radicais ao mesmo índice', em um livro indicado para o ensino fundamental. Diz o texto:

> *Para se reduzir ao mesmo índice, determina-se o MMC dos índices dos radicais e, em seguida, divide-se este MMC por cada um dos índices dos radicais. Os quocientes obtidos são multiplicados, respectivamente, por cada um dos expoentes dos radicandos e pelos índices dos radicais.*

O texto acima foi retirado do livro *Matemática com humor!*[196], indicado para a oitava série do ensino fundamental. Talvez o humor esteja no próprio texto explicativo, que além de hermético e confuso, exige que o aluno lance mão, simultaneamente, de tantos conceitos, que qualquer esforço no sentido de compreende-lo se perde diante da necessidade de sucessivas re-leituras. Em realidade, o autor descreve, resumidamente, um algoritmo de cálculo ao invés de auxiliar o aluno-leitor no processo de construção da lógica operatória do procedimento descrito.

6.2 A necessidade de estudar matemática

---

[196] Reis, Afrânio Nunes dos. *Matemática com humor*; 8ª série. Curitiba: Arco-Íris, 1994, p. 12.

Existe uma lógica fundamental que permite ao ser humano (sujeito) organizar seus pensamentos e, via linguagem, comunica-los ao outro. Tal lógica, independente de fatores locais, genéticos, hereditários, raciais, sociais, culturais, etc., é essencialmente matemática. Por que matemática? Porque se estabelece através de comparações, seriações, classificações e todo tipo de relações cuja essência é matemática.

Estudos em matemática são de importância fundamental para o desenvolvimento humano, pois quando uma criança faz comparações, organiza classes de objetos, estabelece seriações entre objetos, compara distâncias (perto, longe), compara tamanhos (grande, pequenos), etc., está fazendo matemática. Inicialmente é uma matemática topológica, ainda não métrica, onde a permanência de um objeto ou a conservação da unidade, por exemplo, não são fatores determinantes em sua forma de pensar.

O conceito de permanência de um objeto, de uma pessoa, precisa ser construído pela criança. Veja-se o longo trabalho de elaboração da função semiótica em todas as suas características, conforme pôde observar Piaget em detalhadas pesquisas com seus filhos. Penso que apenas esta constatação já seria elemento suficiente para demonstrar a genialidade de Piaget na sua forma de fazer pesquisa, pois até então a permanência do objeto era tida como um efeito direto da capacidade sensorial da criança.

De forma semelhante, o conceito de unidade também precisa ser construído. A unidade, cuja conservação é um invariante fundamental para que a criança possa se constituir como sujeito entre sujeitos, decorre de construções por ela elaboradas, não sendo um simples dado de realidade. Trata-se de uma elaboração ao longo do tempo, através de sucessivas experimentações e que se constitui em diferentes enfoques: pois, em primeiro lugar a unidade é percebida como conservação de substância, depois como conservação de peso e mais tarde como conservação de volume.

Apenas como observação, entendo pertinente registrar que em muitos casos – principalmente em aulas de matemática –, a conservação da unidade é considerada, a despeito de todos os estudos piagetianos, como um dado ou verdade absoluta, o que não se verifica na prática. Observe-se, por exemplo, a dificuldade que a criança encontra para entender que uma das metades de uma folha de papel, rasgada ao meio, deixa de ser '1' e se transforma em '½' . Nesse exemplo deve-se acrescer ainda a dificuldade resultante da compreensão da linguagem matemática para o registro da fração, tema ao qual voltarei a fazer referência.

Com o que estou afirmando até aqui, quero dizer que: existe a necessidade fundamental de conhecer matemática, não no sentido de aprender um conteúdo, mas como forma de estruturação do ser (sujeito). Estudos de matemática não deveriam ser reduzidos a mero acompanhamento de um percurso que se materializa como um currículo ou listagem de conteúdos, definições, fórmulas, regras, algoritmos e exercícios de fixação.

A necessidade fundamental de conhecer matemática está relacionada à constituição do ser como sujeito, assim como a construção do mundo e do outro como não-sujeito. É aí que eu percebo a importância de saber matemática. Por exemplo, a construção da seqüência do tempo (ontem – hoje – amanhã; ainda a pouco – agora – daqui a pouco) é uma elaboração matemática na medida em que a organização do fator tempo é feita mediante uma ordenação (antes – durante – depois). E a ordenação é produto de construções endógenas, que decorrem de ações realizadas pelo próprio sujeito sobre o meio. Menor – maior; mais leve – mais pesado, são produtos da elaboração individual – mesmo que realizadas no coletivo.

A construção do sujeito é uma construção matemática, por conseguinte fazer matemática pode ser um trabalhar no sentido de constituir sujeitos. Talvez tenha sido este o lume norteador do meu caminhar: a possibilidade de fazer matemática, construindo-me como sujeito; a expectativa de desenvolver matemática, acompanhando a auto-construção de meus alunos como sujeitos de seus próprios processos de construção

6.3 A possibilidade de aprender

Em termos de epistemologia genética, o conhecimento é sempre produto de realizações de um sujeito e, para explicar como este constrói seu conhecimento, Piaget, via psicogênese, busca determinar os *invariantes*[197] que existem no processo que vincula o sujeito ao objeto de seu interesse.

Ao determinar tais invariantes, o autor consegue estabelecer vínculos entre os estágios evolutivos do conhecimento, desde os mais elementares até os níveis mais complexos (superiores). Tais vínculos revelam epistemologicamente o processo constitutivo do conhecimento, cujo desenvolvimento não é *linear* no sentido de que um conhecimento novo venha a substituir o anterior. Cada novo estágio começa por uma reorganização em novo nível, das aquisições alcançadas em níveis precedentes, do que resulta a integração, nos estágios superiores, de determinadas ligações cuja natureza só é compreendida a partir de análises realizadas nos estágios elementares.[198]

Ao longo das sucessivas etapas de desenvolvimento do conhecimento pode-se observar a existência de invariantes funcionais e, de modo fundamental, a equilibração – por meio da adaptação (assimilação e acomodação) regula a interação entre as estruturas do sujeito e os objetos, ao tempo em que o sujeito os organiza. Por outro lado, no processo de desenvolvimento do conhecimento, a *abstração reflexionante* é um invariante, cuja presença pode ser detectada sempre que um nível de conhecimento se reorganiza no nível seguinte.

A abstração reflexionante, de forma distinta da empírica – que extrai informações do próprio objeto –, é um produto da coordenação das ações e operações do sujeito, constituindo-se em um mecanismo fundamental para o avanço do conhecimento. A ambas correspondem variedades distintas de generalizações, pois abstrações e generalizações constituem os instrumentos fundamentais que o sujeito desenvolve para alcançar a construção de seu próprio conhecimento.

Enfocando um pouco mais a questão da generalização, constata-se que à abstração empírica correspondem generalizações extensionais que ocorrem, por exemplo, na passagem do 'alguns' ao 'todo', ou das leis particulares às mais gerais, sem reorganizações das primeiras. Uma generalização extensional permite que o conhecimento simplesmente se amplie ao *replicar*[199] propriedades verificadas com alguns elementos, sobre todos os membros do conjunto. É por generalizações extensionais, por

---

[197] Invariante = fator que não varia.
[198] PIAGET e GARCIA. *Psicogênese e história das ciências*, 1987, p. 17.

exemplo, que o sujeito compreende que o resultado da adição de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

Por seu turno, à abstração reflexionante correspondem generalizações construtivas que possibilitam ao sujeito retornar do todo às partes, enriquecendo-as, sempre que venha a ocorrer um novo conhecimento. Por generalizações construtivas são elaboradas novas sínteses, por meio das quais são atribuíveis novas significações aos elementos ou às leis particulares. É por efeito de generalizações construtivas que o sujeito amplia a aplicação de uma propriedade e a torna mais abrangente e precisa. Por exemplo, na matemática, por generalizações construtivas, posso ampliar a aplicação da propriedade comutativa da adição de números naturais, para números inteiros, racionais, etc.

Em resumo, a construção por abstração reflexionante e a generalização por completamento[200], repetindo-se indefinidamente patamar a patamar, fazem com que o desenvolvimento cognitivo resulte da repetição de um mesmo mecanismo, que é constantemente renovado e ampliado por uma alternância de novos conteúdos e elaborações de novas formas ou estruturas.

Assim se pode explicar por que as construções mais elevadas permanecem solidárias com as mais primitivas, ou seja, são elaborações que decorrem deste duplo fato: integrações sucessivas e identidade funcional de um mecanismo suscetível de repetições, mas que se renova sem cessar por via

---

[199] Replicar no sentido genético: tornar-se múltiplo; duplicar-se [falando-se da molécula de ADN]. Dicionário Houaiss, p. 2431.

[200] Falaremos de *generalizações por completamento* sempre que uma estrutura, ao mesmo tempo que conserva as suas características essenciais, se vê enriquecida com novos subsistemas que se adicionam sem modificar os precedentes: por exemplo, as álgebras não comutativas completando as comutativas.

da sua própria repetição em diferentes patamares.[201]

Para o tema de meu interesse, é importante ressaltar que a construção do conhecimento matemático acontece mediante abstrações reflexionantes e generalizações construtivas, pois: 1. toda ação do sujeito é sempre coordenada por outras, na medida em que não existem ações isoladas; 2. tais coordenações são retiradas das formas, isoladas dos conteúdos a que se referem; 3. estas formas se coordenam e dão origem, por reflexão, às operações fundamentais que constituem o ponto de partida das estruturas lógico-matemáticas.

6.4 Para tecer novas estruturas

Retomo, a partir deste momento, minha história como professor de matemática e busco refletir sobre as transformações que têm pautado minha caminhada pedagógica. Pergunto por suas causas: talvez aquelas incipientes inquietações dos primeiros tempos de professor 'amador'; quem sabe as primeiras insatisfações com os resultados negativos em testes e provas – que deveriam servir como indicadores de crescimento intelectual e que em realidade atuavam como rotuladores de nossos fracassos; talvez outras razões que se olvidam na esteira do tempo, mas sem dúvida muitas dentre elas, contenham os elementos fundamentais que concorreram para o repensar constante do 'fazer-me' professor.

Em todos os casos, uns e outros, todos foram fatores fundamentais para a constituição de minha trajetória, cujos efeitos só poderiam ser experimentados por alguém que enquanto aluno, se queria professor e, ao

[201] PIAGET e GARCIA. *Psicogênese e história das ciências*, 1987, p. 18.

assumir a posição de professor, não podia esquecer sua condição de aluno. Com isto quero afirmar que por um longo tempo de minha existência, pude viver – na mais profunda acepção do termo – a experiência de ser professor-aluno de eu próprio aluno-professor.

Talvez esse processo de construir-me professor sem deixar de enxergar-me aluno, tenha sido a forma que encontrei para produzir uma prática construtivista auto-desenvolvida, sem que disso tivesse qualquer conhecimento teórico. Explico: ao assumir a condição de professor de meu colega, me questionava: – Como eu pensaria, enquanto aluno? – Será que existe outra maneira de resolver a questão? – E se eu partisse da resposta, o que aconteceria? E, coisas assim e atitudes assim que me possibilitaram viver a dialética experiência de ser alguém que ensina e alguém que aprende ao mesmo tempo.

Em realidade, minha busca pela construção de uma nova proposta de ser professor sem 'desligar' a condição de aluno, me encaminhou naturalmente em direção a Piaget, à epistemologia genética e, por conseqüência, ao construtivismo aplicado às minhas ações, pois, para mim, ser construtivista é fazer parte de um contexto no qual as ações, de cada um e de todos, se organizam como uma rede de relações que acabam por se constituir como conhecimento.

6.4.1 A epistemologia genética e a sala de aula

É importante ressaltar, e disso não tenho a menor dúvida, que estudar a obra piagetiana me permitiu construir a autonomia indispensável para repensar meu próprio fazer conectando-o constantemente ao fazer de meu aluno. E pensando um pouco mais nos movimentos que empreendi, posso estabelecer pelo menos dois momentos cruciais em minha caminhada.

Meu primeiro movimento foi em direção à compreensão do fenômeno ‘fracasso em matemática’, cujas causas se afirmava estar na falta de requisitos e de conhecimentos prévios. No intuito de buscá-las, empreendi uma longa caminhada de professor universitário a professor de ensino fundamental e formador de professores de educação infantil.

No entanto, tais causas não estavam nos pré-requisitos, nem nos fundamentos: não as pude encontrar do lado de fora da relação professor-aluno, pois se por um lado o professor sonhava com a aula perfeita e fazia tudo aquilo que aprendera em sua formação, por seu turno o aluno vivia a estranha situação de ser alguém que nada tinha com aquilo que estava acontecendo.

Meu segundo movimento foi adentrar a relação professor-aluno e buscar nela própria os elementos necessários a sua re-significação. Para isto passei a ouvir o professor e procurar entender como ele constrói o seu papel e mais ainda que papel ele reserva ao aluno, durante o desenvolvimento da aula propriamente dita.

Nesse movimento, mais do que em qualquer outro momento de minha caminhada, o trabalho experimental de Piaget, exposto em suas obras, foi de fundamental importância para o desenvolvimento do conjunto de reflexões que se materializam no presente documento. Com ele pude buscar a compreensão do significado de uma relação professor-aluno-matemática dinâmica, autônoma, construída em regime de cooperação e com conseqüências éticas.

Uma relação dinâmica não pode sucumbir sob o peso da estaticidade do conhecimento prévio, pronto e acabado, pois "sempre que o discurso substitui a ação efetiva, o progresso da consciência é retardado". O momento da matemática não pode ser reduzido à uma mera assistência visual-auditiva de verdades transmitidas oralmente e rabiscadas sobre o quadro de giz, pois se verdades existem, "as únicas verdades reais são aquelas construídas livremente e não aquelas recebidas de fora.[202]"

O dinamismo da relação professor-aluno-matemática se evidencia na consideração de que a vida é um vir a ser e como tal cada novo momento em sala de aula é inesperado, diferente, surpreendente em última análise. O dinamismo é inerente ao viver e pode ser detectado já no próprio ato de pensar – característica fundamental do ser humano, pois como afirma Piaget: "é preciso ensinar os alunos a pensar, e é impossível aprender a pensar sob um regime autoritário". E na esteira dessa forma de entender a relação professor-aluno-matemática surge a questão da autonomia, pois "pensar é procurar por si mesmo, é criticar livremente e é demonstrar de maneira autônoma[203]."

> É preciso que o estudante faça pesquisas por conta própria, possa experimentar, ler e discutir com uma parcela de iniciativa suficiente e não aja simplesmente por encomenda [pois] haveria muito mais alunos que compreenderiam a matemática se pudessem fazer experiências sobre problemas reais (de física elementar, de geometria concreta e ligada a construções materiais)...[204]

O exercício da autonomia individual e de todos em uma relação de

---

[202] PIAGET. *Sobre a pedagogia*, 1998, p. 166.
[203] PIAGET. *Sobre a pedagogia*, 1998, p. 154.
[204] Idem, ibidem, p. 156.

múltiplos sujeitos como é a relação professor-alunos em aula de matemática, implica na consideração e respeito de diferentes histórias de vida, de distintos desenvolvimentos estruturais que cada um já alcançou, de díspares tempos de ação e operação que cada criança consegue desenvolver.

Entretanto, pergunta estarrecida a costumeira rotina do cotidiano burocratizado da escola oficial: – Como atender a todos em turmas por vezes tão grandes e por outras vezes tão heterogêneas, de forma que se possa abrir espaço para a autonomia? Talvez a resposta não seja tão imediata e nem tão fácil de ser alcançada. Talvez ela passe por repensar a constituição das turmas, os critérios de organização das classes e até mesmo da revisão do número de alunos por sala, pois uma classe não é apenas um amontoado de seres como pensam os autores de políticas públicas para a educação, adeptos da metáfora 'onde comem 5, comem 6'.

Mas a resposta, a partir dos elementos colhidos neste estudo, apoiados na epistemologia genética, certamente decorre de mudanças nas relações estabelecidas em aula, na adoção de práticas que priorizem atitudes de cooperação entre pares, como "interações entre indivíduos iguais e diferenciados.[205]" Iguais na medida em que se estabelecem entre seres com condições e interesses semelhantes e não entre superior e inferiores, como professor e alunos, por exemplo; diferenciados, pois cada um tem sua própria forma de atuar e interagir e assim ultrapassa-se qualquer tipo de conformismo que possa gerar reações homogêneas e massificantes.

Através da cooperação, do diálogo, da troca entre iguais – sem a intervenção de elementos de autoridade ou prestígio –, a criança ao

[205] PIAGET. *Sobre a pedagogia*, 1998, p. 153.

reconhecer o outro, com suas diferenças, consegue tomar consciência de si mesma, pois do contrário sem confrontos, sem cooperação intelectual e moral tende-se a permanecer circunscrito ao próprio egocentrismo natural.

A cooperação não é forçosamente harmoniosa, pois assim como pode ocorrer a colaboração na ação, na investigação e na verificação em comum, poderá vir a acontecer o confronto de idéias, de propostas ou de experiências. Mas mesmo neste caso, em que aconteça o conflito cognitivo – e ai se poderá ver com mais clareza o papel de mediador do professor – haverá valor educativo muito grande, se os pontos de vista iniciais puderem ser confrontados e modificados perante provas e argumentos construídos pelas próprias crianças. Diante da afirmação de uma criança de que 2 + 2 = 5, outra que já tenha compreendido o resultado, poderá ter argumentos que levem a primeira a corrigir seu cálculo, sem carregar o peso de um erro cometido diante do professor, por exemplo.

Há ainda uma outra componente positiva do trabalho compartido entre pares (alunos neste caso) que aponta primeiramente no sentido de ultrapassar o egocentrismo individual e a construção do outro imediato, mas que logo a seguir aponta no sentido mais amplo da construção do outro enquanto ser vivo entendido então como categoria universal, ultrapassando características pessoais, gênero, raça, espécie, etc. Finalmente, como conseqüência ética, a cooperação conduz não mais à simples obediência a regras impostas, mas a uma "ética da solidariedade e da reciprocidade[206]".

6.4.2 A epistemologia genética e a aula de matemática

[206] PIAGET. *Sobre a pedagogia*, 1998, p. 118.

Com relação à matemática que "nada mais é que uma lógica, que prolonga da forma mais natural a lógica habitual e constitui a lógica de todas as formas [...] do pensamento científico[207]", em seu estudo deve-se priorizar os aspectos fundamentais da lógica humana e não mais trata-la como verdade absoluta acessível apenas por meio da comunicação oral e de uma linguagem abstrata, como a linguagem dos símbolos operatórios que tão facilmente seduz matemáticos e professores.

Na aprendizagem matemática estão envolvidos simultaneamente dois aspectos: de um lado os aspectos lógicos da questão tratada e de outro seus aspectos numéricos ou métricos. Se os aspectos lógicos não estão suficientemente claros e compreendidos pela criança, os aspectos numéricos tornam-se obscuros. Lembremos o problema da 'idade do capitão' referido no capítulo V, em que a simples apresentação de dois números induzia a criança a soma-los e a apresentar uma resposta numérica, mesmo que sem nenhum sentido de realidade.

Talvez uma das causas essenciais da passividade da criança em aula de matemática possa ser encontrada na insuficiente dissociação entre aspectos lógicos e considerações numéricas (métricas) das questões propostas, pois enquanto não estiver solidamente assegurada a estrutura lógica – o que depende de construções realizadas pela própria criança –, as considerações numéricas (métricas) permanecerão destituídas de significado.

Além desse fato, na construção do conhecimento matemático há um processo evolutivo que precisa ser respeitado em seu tempo de elaboração. As noções matemáticas evoluem de construções inicialmente qualitativas

[207] PIAGET. *Para onde vai a educação*, 1998, p. 55.

(topológicas) para elaborações métricas em um processo que demanda tempo, maturação, experimentação, colaboração, reflexão, etc. Lembremos, por exemplo, a construção do número pela criança, ou a noção de conservação, em matéria, peso e volume que evolui lentamente por um longo período de sua infância.

Finalmente resta a questão da linguagem simbólica da matemática. Em primeiro lugar o professor deve estar atento para o fato de que diversos conceitos matemáticos utilizam termos que têm sentidos díspares, dependendo do contexto onde são empregados. É o caso já citado de 'matriz', 'produto', raiz, etc. Em segundo lugar, há a questão da escrita simbólica cujo registro pode variar, dependendo da situação enfocada ou dos valores numéricos envolvidos, como acontece, por exemplo, no registro de potências unitárias (expoente = 1) ou de raízes quadradas (índice = 2) valores esses omitidos na prática cotidiana. Exemplificando:

$$\sqrt{5}$$

indica a 'raiz quadrada de 5'. No entanto, se formos escreve-la como uma potência com expoente fracionário, teremos:

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

De onde surge e expoente '½ '? Da convenção de que toda raiz pode ser representada por uma potência com expoente fracionário. Mas, e o '2' no denominador do expoente? Por se tratar da 'raiz quadrada' e como tal seu índice é '2'. Em nome da clareza o símbolo deveria ser escrito:

$$\sqrt[2]{5^1}$$

Mas, em nome da economia de tempo e da não poluição visual, escreve-se $\sqrt{5}$, omitindo ora o ‘2’ do índice, ora o ‘1’ do expoente do radicando, e a criança além de estar envolvida com a questão de construir o significado de um número irracional, como o do exemplo, precisa ainda conviver com simplificações e práticas memorizadas.

Em resumo, a aprendizagem matemática envolve a construção da lógica inerente ao pensar humano, construções topológicas, construções métricas (numéricas, algébricas, geométricas) e a construção de uma linguagem simbólica apropriada.

Mas, quem pode aprender matemática?

Como afirma Piaget, em todos os casos em que os questionamentos propostos a uma criança omitem o fato de que se trata de matemática, eles são tratados e resolvidos em função da inteligência da criança e não por causa de aptidões especiais que ela porventura possa ser portadora.

> É... freqüente aparecerem alunos, medíocres nas aulas de cálculo, que evidenciam um espírito compreensivo e mesmo inventivo quando os problemas são levantados em função de uma atividade qualquer do interesse de quem é argüido. [....] Alunos reputados fracos em matemática assumem uma atitude totalmente diferente quando o problema emana de uma situação concreta e tem a ver com outros interesses: a criança é bem sucedida, então, em função de sua inteligência pessoal, como se se tratasse de uma questão apenas de inteligência.[208]

É nesse sentido, que se pode afirmar que toda criança – com condições físicas e psicológicas dentro de um padrão de normalidade – é

---

[208] PIAGET. *Para onde vai a educação*, 1998, p. 56-7.

capaz de desenvolver raciocínios lógico-matemáticos competentes como efeito do conjunto de estruturas que ela tenha desenvolvido para o propósito desejado, tenha interesse no que está sendo tratado e se sinta livre para realizar sua atividade. O sinal psicológico da presença de uma estrutura é a existência de invariantes que se organizam em estruturas fundamentais como as estrutura de grupo e de reticulado, por exemplo. Por outro lado, a liberdade a que aponto é principalmente aquela que se refere às inibições afetivas que com bastante freqüência geram sentimentos de inferioridade na criança, de impossibilidade e, mais profundamente de incapacidade, como acontece comumente em aulas expositivas de matemática.

Entender a produção da criança como conseqüência de suas possibilidades estruturais, de seu interesse e liberdade é desmistificar o erro em matemática, que a partir desses requisitos perde a componente comportamental de falta de interesse, desleixo, preguiça, etc.

Pensar o conhecimento matemático como construtivo é entender que não há erro no sentido comportamental do termo, pois se a criança chega cedo ao conhecimento não pode compreende-lo por não dispor dos elementos estruturais necessários; se chega tarde: não tem graça, perde o interesse! Para que o aluno possa encontrar o momento mais apropriado para construir seu conhecimento é indispensável a perspicácia do professor (pedagogo no sentido piagetiano do termo) a quem compete perceber o que pode oferecer e o que pode exigir do aluno em cada situação de aprendizagem.

A aprendizagem não acontece como efeito do uso puro e simples dos sentidos físicos que funcionariam como canais de acesso ao sujeito. Aprender é atribuir sentido, é construir significado. Não basta ouvir uma preleção ou acompanhar, de forma estática, uma exposição por mais eloqüente que seja o expositor. Uma palavra ouvida, um texto copiado do quadro de giz pode não ter significado nenhum ou pode mesmo ter múltiplos significados para aquele que ouve ou simplesmente copia. Mas, para que determinado significado seja construído é necessário mais do que ouvir, do que ver, do que o meio ambiente, "é preciso que o sujeito asseste os seus esquemas sobre os objetos – no sentido epistemológico – para lhes conferir significações.[209]" Lembro certo episódio de uma menina de primeira série do ensino fundamental que ouvia a história 'O rancho de Mariana', contada pela professora. Ao final da história a menina afirmou: – Minha mãe também tem! Indagada se tinha um rancho, respondeu rapidamente: – Toda semana, a gente faz, no super! [supermercado].

Em minha eloqüência, posso descrever as maravilhas da 'roda', mas minhas palavras pouco, ou até mesmo nenhum, sentido terão aos ouvidos de alguém que ainda a desconheça. Em termos de conhecimento, em cada nova situação, é indispensável que cada sujeito reinvente, para si, a roda.

E mesmo levando em consideração o fato de que uma descrição verbal possa auxiliar-me na apropriação de determinado conceito, objeto, princípio, idéia ou produto tecnológico, tal narração é insuficiente para que deles me aproprie plenamente, ou seja, para que eu possa considera-los como fazendo parte de meu conhecimento.

A metáfora acima considerada sobre a invenção da roda se aplica, em meu modo de pensar, a todas as áreas do conhecimento e aplica-se principalmente à formação do conhecimento matemático. Isto porque somos

---

[209] INHELDER et alii. *Epistemologia genética e equilibração*, sd, p. 67-8.

seres que nos construímos lógico-matemáticos, capacitados a desenvolver estruturas que nos permitem raciocinar de forma lógico-matemática. E para o desenvolvimento de tais estruturas não são suficientes descrições ou exposições verbais. Para este fim é indispensável a atuação do sujeito sobre o conhecimento a ser elaborado.

6.4.3 A epistemologia genética e o professor de matemática

Educação é processo que resulta de interações entre assimilações e acomodações, abstrações empíricas e reflexionantes, conteúdos e formas, etc., sempre por efeito de ações do sujeito do conhecimento. Educação matemática é formação de estruturas de assimilação que permitem ao sujeito desenvolver-se em todas as instâncias, seja física, biológica, social ou psicologicamente. E, nesse sentido, a sala de aula de matemática cumpre um papel fundamental, se a pudermos pensar como um micro-mundo constituído por sujeitos.

Se por um lado, a criança ao adentrar o universo escolar vem, inteira, prenhe de sonhos, expectativas, desejos e idéias sobre o mundo e sobre tudo, por seu turno o professor é portador de uma história construída sobre suas experiências, vivências, realizações e frustrações, enquanto a sala de aula é o ambiente prenhe de recursos para a aprendizagem, propício à eclosão de transformações, descobertas e invenções de toda sorte.

Como confluir as expectativas da criança, com a experiência do professor e os recursos do ambiente? Como integrar a motivação, o interesse, a afetividade que a criança traz consigo quando ingressa no ambiente escolar, com a experiência, o desejo de orientar, de mostrar caminhos do professor? Como aproveitar o intenso mundo de relações que se estabelecem entre colegas e entre alunos e professores?

Se eu, enquanto professor, desejo um aluno criativo e criador, preciso antes de tudo ter tais características na minha forma de me colocar no mundo, isto é, na minha concepção epistemológica de educação, pois muito pouco ou quase nada advirá de minhas tentativas de uma abordagem *construtivista* de prática letiva em sala de aula se eu, no que se refere a meu próprio conhecimento, continuo *absorvendo* resultados prontos, oriundos de leituras apressadas de textos pré-organizados por autores outros, que em geral são meros repassadores de excertos do tema tratado.

E o que tenho podido observar é que o professor, talvez por ser produto, em sua expressiva maioria, de uma formação decorrente de práticas empiristas-aprioristas de seus antigos mestres, opte por trilhar, em sua prática de sala de aula, caminhos semelhantes àqueles que percorrera em sua formação. O professor diante das circunstâncias consideradas no início deste capítulo, de preocupação com o cumprimento do conteúdo; de desconhecimento do estágio de desenvolvimento alcançado pelo aluno em matemática, no nosso caso; de temer o julgamento do colega professor do ano seguinte, acaba optando por manter uma prática centrada na transmissão oral de conteúdos, chamando a si a responsabilidade do ato de ensinar e a ela submetendo o ato de aprender por parte do aluno.

O professor, por manter uma prática centrada na transmissão oral, traz para si praticamente toda a possibilidade de qualquer tipo de ação, seja ela física, seja ela de pensamento, pois ao aluno resta apenas ouvir, copiar e dar respostas monossilábicas a perguntas que mais servem de elementos de ligação entre assuntos do que propriamente para inferir o grau de entendimento por parte do aluno.

Para mudar uma prática não basta apenas mudar a forma de trabalhar: é preciso mudar a concepção epistemológica que sustenta tal prática. Se busco uma prática interacionista, em que o aluno venha a ser sujeito da construção de seu conhecimento é indispensável que eu, como professor, me faça sujeito de meu próprio conhecimento, que assuma a condição de autor e que permita a meu aluno que se torne sujeito autor de seu próprio conhecimento.

Lembrando Inhelder et alii,

> [...] a inteligência é construção de relações e não apenas identificação; a elaboração dos esquemas implica tanto uma lógica de relações quanto uma lógica de classes. Por conseqüência, a organização intelectual é intrinsecamente fecunda, visto que as relações se engendram mutuamente, e essa fecundidade ganha corpo com a riqueza do real, dado que as relações não se concebem independentemente dos termos que as vinculam, nem o inverso[210].

É o sujeito que através de sua ação constrói para si o mundo e por conseqüência se constrói conhecedor. O desenvolvimento da inteligência é produto da ação do sujeito: "ação criadora na medida em que, ao se deparar com os desafios que o meio físico e social põem, constrói instâncias subjetivas (estruturas) para responder competentemente a esses desafios[211]".

---

[210] INHELDER et alii. *Epistemologia genética e equilibração*, sd, p. 389.
[211] BECKER. *Educação e construção do conhecimento*, 2001, p. 104.

FIG. 24[212]

A epistemologia genética, como vetor construtivo, aponta uma nova direção para o fazer do professor que passa pela re-significação das relações que se constituem em ambientes de aprendizagem de matemática e que, em última análise, restituem ao aluno e ao professor a condição de sujeitos na elaboração do conhecimento de cada um e de todos.

De tudo que descrevemos, analisamos e refletimos, como uma síntese final fica-nos a certeza de que somos – alunos e professores – seres em construção, cujas idéias e propostas são sempre relativas ao estágio de desenvolvimento em que nos encontramos. Dessa forma não há verdades absolutas, imutáveis, intransponíveis, pois o conhecimento é sempre construção individual, mesmo que elaborada no coletivo.

Seres lógico-matemáticos podemos ter na aula de matemática um ambiente de criação de relações onde cada um e todos sejam simultaneamente sujeitos de seus próprios fazeres, pois se, nas palavras de Piaget "o mundo é sempre um mundo de sujeitos[213]", a sala de matemática pode ser um micro-mundo de sujeitos.

---

212 André Macedo. Jornal Diário Popular.
213 BECKER. *Educação e construção do conhecimento*, 2001, p. 86.

Para algo existir mesmo –
um Deus, um bicho, um universo, um anjo –,
é preciso que alguém tenha consciência dele.
Ou simplesmente que o tenha inventado.
(Mário Quintana)

HOMENAGEM

A pedagogia é como a medicina: uma arte, mas que se apóia – ou deveria se apoiar – sobre conhecimentos científicos precisos. As aptidões de um bom médico (o senso clínico, a rapidez do exame visual, o contato com os doentes) são sem dúvida individuais e quase inatas: não se aprendem e são, no máximo, passíveis de desenvolvimento. Mas de nada serviria a um clínico possuí-las se não tivesse se iniciado, durante anos, na anatomia e na fisiologia, na patologia e na clínica.

Da mesma maneira, nasce-se pedagogo: ninguém se torna pedagogo e as mais belas lições de metodologia não fornecem o segredo do contato com as crianças a um futuro professor que não gosta delas. Mas, ainda que fôssemos educadores até a medula dos ossos, é preciso conhecer não apenas as matérias que ensinamos, mas também a própria criança, a quem nos dirigimos, ou o adolescente: em suma, o aluno enquanto ser vivo, que reage, se transforma e se desenvolve mentalmente segundo leis tão complexas como as de seu organismo físico.

Coisa estranha e quase espantosa: conhecem-se todos os recantos do corpo humano, catalogaram-se todos os animais do planeta, descreveram-se e batizaram-se todos os talos de grama, mas durante séculos as técnicas psicológicas – tais como a do educador, em particular – ficaram entregues ao empirismo, como se tivessem menos importância que as do médico, do criador de animais ou do agricultor...

Jean Piaget[214]

[214] Texto originalmente publicado na *Gazette de Lausanne et journal suisse*, 1949, n 63, p. 10 e recentemente publicado, no Brasil, na coletânea: Sobre a pedagogia. São Paulo : Casa do Psicólogo, 1998. (p. 181).

APÊNDICE I: CÁLCULOS ARITMÉTICOS RÁPIDOS

Como podemos encontrar coisas novas?
Talvez seja este meu problema central.[215]
(Jean Piaget)

Apresento, neste apêndice, diversas técnicas para a realização de operações aritméticas, usando propriedades do sistema de numeração decimal que os livros texto de matemática não utilizam. São exemplos de formas alternativas para a resolução de operações que fogem aos algoritmos tradicionalmente utilizados em sala de aula de matemática. Algumas dessas técnicas podem ser encontradas em antigos livros de aritmética fundamental, sob a denominação de *cálculo mental*.

Os procedimentos de cálculo foram listados sem qualquer preocupação com níveis de complexidade ou hierarquia de importância e servem mais como modelos para a criação de novas técnicas por professores e alunos do que propriamente de conteúdo programático a ser seguido.

Multiplicação por um algarismo

---

1. Para multiplicar um número qualquer por um algarismo, 57x8, por exemplo, comece pelo algarismo de ordem superior (5 no exemplo), calculando: 50 x 8 = 400 e a seguir multiplique as unidades: 7 x 8 = 56 e finalmente some os resultados: 400 + 56 = 456.

Observe outros exemplos:
43 x 7 = 40x7 + 3x7 = 280 + 21 = 301,
57 x 6 = 50x6 + 7x6 = 300 + 42 = 342.

2. Quando um dos fatores da multiplicação pode ser decomposto em fatores de um dígito, a operação é muito simples. Por exemplo: 235 x 6

Decomponha o 6, obtendo: 235x6 = 235x2x3
Faça a multiplicação por 2, obtendo: 235x2 = 470
Agora para calcular: 470 x 3 = 400x3 + 70x3 = 1200 + 210 = 1410.
Outro exemplo: 382x8 = ?
382x8 = 382x2x2x2 = 764x2x2 = 1528x2 = 3056.

Multiplicação por um número de dois algarismos

---

3. A multiplicação por dezenas pode ser simplificada reduzindo-a, como no caso anterior, a uma multiplicação por números de um só dígito. Se o multiplicando tem um só dígito, comutam-se os fatores.

Por exemplo:
6x38 = 38x6 = 30x6 + 8x6 = 180 + 48 = 228.

4. Se os dois fatores têm dois dígitos, decompõe-se um deles em dezenas e

---

[215] BRINGUIER, Jean-Claude. *Conversando com Jean Piaget*, p. 183.

unidades.

Por exemplo:

39x12 = 39x10 + 39x2 = 390 + 78 = 468.

51x17 = 51x10 + 51x7 = 510 + 357 = 867.

Ou comutando os fatores:

51x17 = 17x51 = 17x50 + 17 = 850 + 17 = 867.

É sempre conveniente decompor em dezenas e unidades, o fator que apresenta números menores.

5. Se o multiplicando ou o multiplicador pode ser decomposto em fatores de um dígito (por exemplo, 14 = 2x7), aproveita-se esta possibilidade para diminuir um dos fatores, aumentando o outro do valor equivalente.

Exemplo:

35x14 = 70x7 = 490.

Multiplicação e divisão por 4 e por 8

---

6. Para multiplicar um número por 4, duplica-se o número, duas vezes.

Exemplos:

38x4 = 38x2x2 = 76x2= 152.

325x4 = 325x2x2 = 650x2 = 1300.

7. Para multiplicar um número por 8, duplica-se o número, três vezes.

Exemplos:

38x8 = 38x2x2x2 = 76x2x2= 152x2 = 304.

325x8 = 325x2x2x2 = 650x2x2 = 1300x2 = 2600.

Outro procedimento de multiplicar por 8 é decompor o multiplicador. **Exemplo**:

325x8 = 300x8 + 25x8 = 2400 + 200 = 2600.

8. Para dividir um número por 4, divide-se duas vezes por dois.

Exemplo:

76 : 4 = 38 : 2 = 19.

650 : 4 = 325 : 2 = 162,5

9. Para dividir um número por 8, divide-se três vezes por dois.

Exemplos:

76 ÷ 8 = 38 ÷ 4 = 19 ÷ 2 = 9,5

464 ÷ 8 = 232 ÷ 4 = 116 ÷ 2 = 58

Multiplicação por 5 e por 25

10. Para multiplicar um número por 5, acrescenta-se um zero à sua direita e divide-se o resultado por dois.

Exemplo:

86x5 = 860 ÷ 2 = 430

11. Para multiplicar um número por 25, acrescenta-se dois zeros e divide-se o novo número por 4 (ou divide-se por 2, duas vezes).

72x25 = 7200 ÷ 4 = 3600 ÷ 2 = 1800

83x25 = 8300 ÷ 2 = 4150 ÷ 2 = 2075

Multiplicação por 11

12. Multiplicações por 11 são muito fáceis de fazer. Se o número que se quer multiplicar tem um só algarismo, basta repeti-lo duas vezes: 7x11

= 77.

13. Se o número tem mais de um algarismo, obtém-se o produto escrevendo o algarismo da direita (unidades) e a seguir a soma das unidades com as dezenas; das dezenas com as centenas e assim por diante, até alcançar o algarismo da esquerda, que será registrado.

Exemplo: 34x11 = ?

O resultado, começando pelas unidades: 4; 4 + 3 = 7.

Escreve-se finalmente o 3. O resultado será: 374

Exemplo: 74 463x11 = ?

Começando pelo algarismo das unidades: 3; 3 + 6 = 9; 6 + 4 = 10. Escreve-se o zero e guarda-se a reserva ‘1’.

1 + 4 + 4 = 9.

4 + 7 = 11, escreve-se o um e guarda-se a reserva ‘1’.

1 + 7 = 8 e o resultado será: 819 093.

Multiplicação por 15

14. Para multiplicar por 15, basta acrescentar um zero ao número e somar a metade desse resultado, o que equivale a multiplicar por 10 e por 5.

Exemplos:

43x15 = 430 + 215 = 645.

267x15 = 2 670 + 1 335 = 4 005.

Multiplicação por 1½, por 1¼, por 2½ e por ¾

15. Para multiplicar um número por 1½ (= 1,5), soma-se ao multiplicando sua metade.

Exemplo:

$36x1½ = 36 + 18 = 54$.

$23x1½ = 23 + 11½ = 34½$ (= 34,5).

16. Para multiplicar um número por 1¼ (= 1,25), soma-se ao multiplicando a sua quarta parte.

Exemplo:

$36x1¼ = 36 + 9 = 45$.

$58x1¼ = 58 + 14½ = 72½$ (= 72,5).

17. Para multiplicar um número por 2½ (= 2,5), ao dobro do multiplicando soma-se a sua metade.

Exemplo:

$18x2½ = 36 + 9 = 45$.

$59x2½ = 118 + 29½ = 147½$ (= 147,5).

Uma variante consiste em multiplicar o número por 5 e tomar a metade:

18x2½ = $\frac{18.5}{2} = \frac{90}{2} = 45$.

18. Para multiplicar um número por ¾ (= 0,75), multiplica-se por 1,5 e divide-se o resultado por 2.

Exemplo:

36x¾ = $\frac{36+18}{2} = \frac{54}{2} = 27$

$58x1¼ = 58 + 14½ = 72½$ (= 72,5).

APÊNDICE II: GLOSSÁRIO DE TERMOS PIAGETIANOS

Este glossário tem por objetivo apresentar termos encontrados na Epistemologia Genética com os respectivos significados. O propósito primordial deste glossário é clarificar o significado de cada idéia, termo ou conceito encontrados na obra piagetiana, incluída nesta os textos de Jean Piaget assim como de outros autores que utilizei em minhas leituras e registros.

Ação	toda conduta (observável exteriormente, inclusive por interrogatório clínico) visando a um objetivo do ponto de vista do sujeito considerado. (BATTRO, 1978, p. 18)
Ação	o indivíduo representa o 'seu' real, isto é, representa o mundo estruturado por ele através da ação, que é o que atribui significado às coisas: numa palavra, a ação é que dá significado às coisas. (BECKER, 1997, p. 12).
Adaptação	(1) realização de um equilíbrio progressivo entre um mecanismo assimilador e uma acomodação complementar; (2) produto de regulações compensatórias operando por recombinações construtivas e por ajustamento de respostas eficazes dadas aos problemas levantados pelo meio. (MONTANGERO, 1998, p. 102).
Afetividade	os sentimentos propriamente ditos e, em particular, as emoções; as diversas tendências, aí compreendidas as 'tendências superiores' e, particularmente, a vontade (BATTRO, 1978, p. 25)
Apriorista	Todo aquele que pensa que as estruturas de conhecimento já vêm programadas na bagagem hereditária. (BECKER, 1993, p. 282)
Assimilação	incorporação de uma realidade externa qualquer a uma ou outra parte do ciclo de

	organização. (BECKER, 1997, p. 32).
Atividade	As atividades que fazem a criança avançar no desenvolvimento, ou na construção do conhecimento, são de segunda (ou de enésima potência). (BECKER, 1993, p. 282).
Classe	reunião de termos considerados como equivalentes, independentemente de suas diferenças (BATTRO, 1978, p. 51).
Conhecer	... consiste ... em agir (sobre o real) e transformá-lo (na aparência ou na realidade), de maneira a compreendê-lo em função dos sistemas de transformação aos quais estão ligadas estas ações. (PIAGET, 1973b, p. 15).
Conhecer (um objeto)	[...] implica incorporá-lo a esquemas de ação... (PIAGET, 1973b, p. 17).
Conhecimento	[...] nenhum conhecimento, mesmo perceptivo, constitui uma simples cópia do real, porque contém um processo de *assimilação* a estruturas anteriores. (PIAGET, 1973b, p. 13). [Assimilação = integração a estruturas prévias].
Conhecimento x assimilação	[...] todo conhecimento contém sempre e necessariamente um fator fundamental de assimilação, o único a conferir *significação* ao que é percebido ou concebido. (PIAGET, 1973b, p. 14).
Conhecimento x assimilação: significação / ação	[...] todo conhecimento refere-se a significações (índices ou sinais perceptivos)... todo conhecimento está ligado a uma ação e... conhecer um objeto ou acontecimento é utilizá-los, assimilando-os a esquemas de ação. (PIAGET, 1973b, p. 15).
Conhecimento (desenvolvimento do...)	O desenvolvimento do conhecimento é um processo espontâneo, ligado ao processo global da embriogênese. A embriogênese diz respeito ao desenvolvimento do corpo, mas também ao desenvolvimento do sistema nervoso e ao desenvolvimento das funções mentais (PIAGET, 1972).
Egocentrismo	por um lado, primado da satisfação sobre a constatação objetiva (donde o caráter do pensamento inicial da criança, que fica a meio-caminho entre o jogo e a adaptação) e, por outro lado, deformação do real em função da ação e do ponto de vista propriamente ditos. Nos dois casos é naturalmente inconsciente de si mesmo, sendo essencialmente indissociação do subjetivo e do objetivo. (PIAGET, 1978b, p. 361).
Egocentrismo	Indiferenciação entre o ponto de vista próprio e o dos outros, ou entre a atividade própria e as transformações do objeto. (DOLLE, 1987, p. 29).
Egocentrismo	Absorção do eu nas coisas e nas pessoas, com indiferenciação entre o ponto de vista próprio e outros pontos de vista. (DOLLE, 1987, p. 29).
Epistemologia Genética	O próprio da epistemologia genética é, assim, o fato de procurar extrair as raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas mais elementares formas e de seguir seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até o pensamento científico inclusive. (DOLLE, 1987, p. 46).
Equilibração	Resultado... de duas tendências fundamentais de todo sistema cognitivo: a de se alimentar (assimilação) e a de modificar-se para se acomodar aos elementos assimilados (acomodação). Segue-se um estabelecimento de equilíbrio progressivo entre a tendência assimiladora e a tendência acomodadora. (MONTANGERO, 1998, p. 156).
Esquema	[...] representam as ações suscetíveis de se exercerem sobre os objetos. (PIAGET,

	1978a, p. 203).
Esquema	[...] um 'esquema' aplica-se à diversidade do meio exterior e generaliza-se, pois, em função dos conteúdos que abrange, ao passo que uma *Gestalt* não se generaliza e 'aplica-se' até menos do que se impõe, de maneira imediata e interiormente, à situação percebida. (PIAGET, 1978a, p. 359).
Esquema de ação	[...] o que... é transponível, generalizável ou diferenciável de uma situação à seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversas repetições ou aplicações da mesma ação. (PIAGET, 1973b, p. 16).
Esquema de ação	é… o conjunto estruturado de suas características generalizáveis, isto é, daquelas que permitem repeti-la ou aplica-la a novos conteúdos (BETH e PIAGET, 1968, p. 291).
Estado de equilíbrio	o sistema esta em equilíbrio quando as operações de que é capaz constituem uma estrutura tal que as operações sejam suscetíveis de ser desenvolvidas nos dois sentidos (seja por inversão estrita ou negação, seja por reciprocidade) (BATTRO, 1978, p. 87).
Estrutura	[é] toda ligação lógica suscetível de desempenhar, alternativa ou simultaneamente, o papel de forma e de conteúdo. (PIAGET, 1976a, p. 38).
Estrutura	sistema de transformações, que comporta leis, enquanto sistema (em oposição às propriedades dos elementos) e que se conserva ou se enriquece graças ao próprio jogo das suas transformações, sem que estas levem para fora das suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. (PIAGET in Cerutti, [1995], p. 173).
Estrutura	forma particular de equilíbrio, mais ou menos estável em seu campo restrito e que se torna instável nos limites deste (PIAGET, 1977a, p. 17).
Estruturas concretas	forma de organização da experiência infantil (a partir de aproximadamente 7 ou 8 anos) em que o pensamento permanece concreto, isto é, estritamente ligado à realidade física.
Estruturas formais	o pensar conquista o universo das noções abstratas, das idéias, das leis da natureza e das normas morais. (KESSELRING, 1993, p. 9).
Experiência física	Consiste em... agir sobre os objetos de maneira a descobrir as propriedades, que ainda são abstratas nesses objetos como tais: por exemplo, sopesar um corpo a fim de avaliar seu peso. (PIAGET e GRÉCO, 1974, p. 37).
Generalização	[G. indutiva]: aquela que parte dos observáveis presos aos objetos, portanto empíricas, e sobre as quais a gente se detêm para verificar a validade de relações observadas, para estabelecer seu grau de generalidade e tirar daí previsões ulteriores. [G. construtiva] aquela que se apoia ou se dá sobre operações do sujeito ou seus produtos, é ela neste caso de natureza simultaneamente compreensiva e extensiva e chega portanto à produção de novas formas e por vezes de novos conteúdos (cf. os números e suas múltiplas variedades). (PIAGET, 1978d, p. 3).
Inteligência	adaptação mental mais extremada, isto é, o instrumento indispensável do intercâmbio entre o sujeito e o universo, enquanto seus circuitos ultrapassam os contatos imediatos e momentâneos para atingir as relações extensas e estáveis. (PIAGET, 1977a, p. 139).
Inteligência	é, essencialmente, uma organização e sua função consiste em estruturar o universo tal como o organismo estrutura o meio imediato (PIAGET, 1978a, p. 15).

Inteligência aspecto essencial da	O aspecto essencial da inteligência acha-se na operatividade que transforma determinado estado de realidade, e conduz a construções, tais como classes, números e outras noções lógicas. (FURTH, 1974, p. 107).
Interesse	[...] é... aspecto afetivo da assimilação (PIAGET, 1978b, p. 69).
Lógica	A lógica... não se reduz... a um sistema de notações inerentes ao discurso ou a qualquer tipo de linguagem . Consiste... em um sistema de operações (classificar, seriar, por em correspondência, utilizar uma combinatória ou 'grupos de transformações', etc.) e a origem destas operações deve ser procurada, muito aquém da linguagem, nas coordenações gerais da ação. (PIAGET, 1973b, p. 16).
Lógica natural	[...] uma construção logística é mais ou menos natural ou artificial conforme seu grau de correspondência com os sistemas seja psicológicos (operações mentais do sujeito ou sistema de comunicações, etc.), seja matemáticas. (BATTRO, 1978, p. 154).
Número	estrutura mental que leva muito tempo para ser construída... número é uma idéia, e, se o número se mantém invariável, essa invariabilidade fica na cabeça da criança. A disposição espacial do conjunto é irrelevante para os adultos, mas não para crianças que ainda não construíram a estrutura mental do número. (KAMII, 1992c, p. 37-8).
Percepção	Perceber é construir intelectualmente, e se a criança desenha as coisas como as concebe, é claro que não pode percebe-las sem concebe-las. (PIAGET, 1994, p. 149).
Operação	[é] a transformação reversível de uma estrutura em uma outra, seja por modificação da 'forma', seja por substituição referente ao conteúdo. (PIAGET, 1976a, p. 56).
Percepção	Toda percepção nos apareceu como elaboração ou aplicação de um esquema, isto é, como uma organização mais ou menos rápida dos dados sensoriais, em função de um conjunto de atos e de movimentos, explícitos ou simplesmente esboçados... Toda percepção é uma acomodação (com ou sem reagrupamento) de esquemas que exigiram para a sua construção um trabalho sistemático de assimilação e organização... (PIAGET, 1978a, p. 364).
Proposição	É proposição para um sujeito tudo o que é considerado por ele como suscetível de ser verdadeiro ou falso. (PIAGET in Villalobos, 1969, p. 112).
Transdução	Raciocínio sem imbricações reversíveis de classes hierárquicas, nem de relações. Sendo sistema de coordenações sem imbricações, por conexão direta entre esquemas semi-singulares, a transdução será, pois, uma espécie de experiência mental que prolonga as coordenações de esquemas sensório-motores no plano das representações; como não constituem conceitos gerais, e sim meros esquemas de ações evocados mentalmente, essas representações ficarão a meio-caminho entre o símbolo-imagem e o próprio conceito. (PIAGET, 1978b, p. 300).

APÊNDICE III: ROTEIRO DE PERGUNTAS

Bloco A: Sobre o papel do professor de matemática

A1 - Qual é o principal papel do professor de matemática?   A11 - Como realizas esse papel? A2 - E para teus alunos qual é esse papel?

Bloco B: Sobre o ato de ensinar

B1 - O que significa ensinar?
    B11 - Como preparas uma aula? (O que fazes antes de uma aula?)
    B12 - Como conduzes uma aula? (O que fazes durante?)
    B13 - Como analisas uma aula dada? (O que fazes depois?)
B2 - Como avalias o (os resultados de) teu trabalho?
B3 - Que estratégias de ensino usas? Por quê? [Quais não usarias? Por quê?]

Bloco C: Sobre o ato de aprender matemática

C1 - Como é que se aprende matemática?
    C11 - Em que situações um aluno aprende?
    C12 - A partir de que momento tens certeza de que um aluno aprendeu?
C2 - Que características deve ter um aluno para aprender matemática?
    C21 - Se não as tiver, ele poderá aprender? Como?
    C22 - Que tipo de aluno não nasceu para aprender ?

C3 - Um aluno pode aprender matemática sozinho? Por quê?
C31 - Em que casos ele necessita da colaboração do professor?

Bloco D: Sobre trabalho individual ou em grupo / tempos de cada um

D1 - Um aluno aprende mais trabalhando sozinho ou trabalhando em grupos (duplas ou mais alunos). Por quê?

D2 - Como trabalhar com matemática em grupos (duplas; mais alunos)?
D21 - Como respeitar o tempo de aprendizagem de cada aluno?
D22 - O que fazer com aqueles que andam rápido?
D23 - O que fazer com aqueles que fazem as coisas devagar?

Bloco E: Sobre interesses dos alunos e situações desafiadoras

E1 - Que interesses percebes que os alunos têm?

E2 - Como trabalhar matemática, permeando-a com verdadeiros interesses do aluno?
E21 - Que condições favorecem uma integração produtiva entre alunos?
E22 - Que condições deve reunir um assunto para constituir-se em uma situação desafiadora para o aluno?

E3 - Que informações o professor deve (não deve) fornecer aos alunos?

Bloco F: Sobre erros e acertos

F1 - O que significa errar [em uma aula de matemática]?
F11 - Porque um aluno erra?

F2 - O professor pode externar suas dúvidas [diante dos alunos]? Por quê?
F21 - O professor pode errar? Por quê?

F3 - Se um aluno erra muito, ele pode aprender [matemática]? Por quê?
F31 - Como é possível corrigir os erros [sistemáticos] de um aluno?

F4 - Um aluno fica desleixado nos estudos porque erra ou erra porque é desleixado nos estudos?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

6.5 Bibliografia fundamental

BARUK, Stella. *Insucesso e matemáticas*. Lisboa (Portugal): Relógio D' Água, 1996.

BACQUET, Michelle. *Matemática sem dificuldades*: ou como evitar que ela seja odiada por seu aluno. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BECKER, Fernando. *A Epistemologia do professor*: o cotidiano da escola. 3. ed. Petrópolis, RJ : Vozes, 1993.

___. *Da ação à operação*: o caminho da aprendizagem em J. Piaget e P. Freire. 2. ed. Rio de Janeiro : DP&A Editora e Palmarinca, 1997.

___. Epistemologia genética e conhecimento matemático. In: BECKER, Fernando e FRANCO, Sérgio (org.). *Revisitando Piaget*. Porto Alegre : Mediação, 1998, p. 21-48.

___. Educação e construção do conhecimento. Porto Alegre : Artmed, 2001.

___ e FRANCO, Sérgio (org.). *Revisitando Piaget*. Porto Alegre : Mediação, 1998.

BETH, Evert W. e PIAGET, Jean. *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Madrid (Espanha) : Editorial Ciencia Nueva, 1968.

BOURBAKI, Nicolas. *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid (Espanha) : Alianza Editorial, 1972.

BOYER, Carl Benjamin, *História da matemática*. São Paulo : Edgard Blücher, EDUSP, 1974.

BRINGUIER, Jean-Claude. *Conversando com Piaget*. Rio de Janeiro : DIFEL, 1978.

CAPRA, Fritjof. *A teia da vida*: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo : Cultrix, 1997.

CARUSO, Paulo DM. Buscando compreender como o professor de matemática constrói seu conhecimento matemático. *Coletâneas do PPGEDU*. Porto Alegre, 7 (19 e 20) : 52-6, Jul./Dez., 1998.

___. *Gênese simbólica*: caminho para a compreensão matemática? Porto Alegre : UFRGS, PPGEDU, 1999. Trabalho apresentado para a disciplina S.A.: A formação da função semiótica: um estudo de fundamentação. Texto digitado.

___. *Vamos brincar com números!* Pelotas (RS) : UCPel, 2000.

CERUTI, Mauro. *A dança que cria*: evolução e cognição na epistemologia genética. Lisboa (Portugal) : Instituto Piaget, [1995][216]

CHIAROTTINO, Zélia Ramozzi. A teoria de Jean Piaget e a educação. In: PENTEADO, Wilma M. Alves (org.) *Psicologia e Ensino*. São Paulo : Papelivros, 1980, p. 84-100.

___. *Em busca do sentido da obra de Jean Piaget*. São Paulo : Ática, 1994.

DOLLE, Jean-Marie. *Para compreender Jean Piaget*: uma introdução à psicologia genética piagetiana. 4. ed. Rio de Janeiro : Guanabara-Koogan, 1987.

FERREIRO, Emília. *Atualidade de Jean Piaget*. Porto Alegre : Artmed, 2001.

FLAVELL, John H. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo : Pioneira Thomson Learning, 2001.

FRANCO, Sérgio. Piaget e a dialética. In: BECKER, Fernando e FRANCO, Sérgio (org.). *Revisitando Piaget*. Porto Alegre : Mediação, 1998, p. 9-20.

___. *Lógica operatória e lógica das significações em adultos do meio rural*: um estudo piagetiano e seu significado educacional. Porto Alegre : UFRGS, 1999. (Tese de doutorado).

[216] As publicações do Instituto Piaget apresentam apenas a data de Depósito Legal, indicada nesta bibliografia entre colchetes.

FURTH, Hans G. *Piaget e o conhecimento*: fundamentos teóricos. Rio de Janeiro : Forense Universitária, 1974.

___. *Conhecimento como desejo*: um ensaio sobre Freud e Piaget. Porto Alegre : Artes Médicas, 1995.

HENRIQUES. A. Christófides. *Aspectos da teoria piagetiana e pedagogia*. Lisboa (Portugal) : Instituto Piaget, 1996.

INHELDER,Bärbel et alii. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo : Saraiva, 1977.

INHELDER,B., GARCIA, R. e VONÈCHE, J. *Epistemologia genética e equilibração*. Lisboa: Livros Horizonte, sd.

KAMII, Constance. *A criança e o número*: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 16. ed. Campinas, SP : Papirus, 1992a.

___. *Aritmética: novas perspectivas.* Implicações da Teoria de Piaget. São Paulo : Papirus, 1992b.

___. *Reinventando a Aritmética*: Implicações da Teoria de Piaget. 6. ed. Campinas, SP : Papirus, 1992c.

KESSELRING, Thomas. *Jean Piaget*. Petrópolis, RJ : Vozes, 1993.

LEITE, Luci Banks (org). *Piaget e a Escola de Genebra*. 3. ed. São Paulo : Cortez, 1995.

MACEDO, Lino de. *Ensaios construtivistas*. São Paulo : Casa do Psicólogo, 1994.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática*: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo : Cortez, 1995.

___. *Matemática e Educação*: alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo : Cortez, 1992.

___. *Matemática e Realidade*: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. São Paulo : Cortez, 1987.

MONTANGERO, Jacques e MAURICE-NAVILLE, Danielle. *Piaget ou a Inteligência em Evolução*. Porto Alegre : Artes Médicas, 1998.

OTTE, Michael. *O Formal, o Social e o Subjetivo*: uma introdução à filosofia e à didática da matemática. São Paulo : UNESP, 1993.

PIAGET, Jean. [1923] *A linguagem e o pensamento da criança*. 7. ed. São Paulo : Martins Fontes, 1999.

___. [1927] *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. 7. ed. Neuchatel (Suisse) : Delachaux et Niestlé, 1971.

___. [1932] *O juízo moral na criança*. 2. ed. São Paulo : Summus, 1994.

___. [1936] *O nascimento da inteligência na criança*. 3. ed. Rio de Janeiro : Zahar, 1978a.

___. [1937] *A construção do real na criança*. 3. ed. São Paulo : Ática, 1996a.

___. [1945] *A formação do símbolo na criança*: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3. ed. Rio de Janeiro : Guanabara Koogan, 1978b.

___. [1947] *Psicologia da inteligência*. Rio de Janeiro : Zahar, 1977a.

___. [1949] *Ensaio de lógica operatória*. Porto Alegre : Globo; São Paulo : EDUSP, 1976a.

___. [1962]. A relação da afetividade com a inteligência no desenvolvimento mental da criança. *Bulletin of the menninger clinic*, vol. 26, n. 3, 1962.

___. [1964] *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro : Forense Universitária, 1973a.

___. [1967] *Biologia e conhecimento*: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognitivos. Petrópolis : Vozes, 1973b.

___. [1968] *O estruturalismo*. São Paulo : DIFEL, 1979.

___. [1969] *Psicologia e pedagogia*. Rio de Janeiro : Forense Universitária, 1998a.

___. [1970] *Epistemologia genética*. São Paulo : Martins Fontes, 1990.

___. [1970] *Psicologia e epistemologia*: para uma Teoria do Conhecimento. Lisboa (Portugal) : Dom Quixote, 1991.

___. [1971] *Para onde vai a educação*. 14. ed. Rio de Janeiro : José Olympio, 1998b.

___. [1972] *Problemas de psicologia genética*. São Paulo : Abril, 1978. (Os pensadores).

___. [1972] Criatividade. In: VASCONCELOS, Mário (org.). *Criatividade*. São Paulo : Moderna, 2001.

___. [1974] *A tomada de consciência*. São Paulo : Melhoramentos, EDUSP, 1977b.

___. [1974] *Fazer e compreender*. São Paulo : Melhoramentos, EDUSP, 1978c.

___. [1975] *A equilibração das estruturas cognitivas*: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro : Zahar, 1976b.

___. [1977] *Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre : Artes Médicas, 1995.

___. [1978] *Recherches sur la généralisation*. Paris, Presses Universitaries de France, 1978d.

___. [1980] *As formas elementares da dialética*. São Paulo : Casa do Psicólogo, 1996b.

___. *Desenvolvimento e aprendizagem*. In: LAVATTELLY, C. S. e STENDLER, F. Reading in child behavior and development. New York : Hartcourt Brace Janovich, 1972.

___. *Sobre a Pedagogia*. São Paulo : Casa do Psicólogo, 1998c.

___. *Estudios sobre lógica y psicologia*. Madrid (Espanha) : Alianza, 1982.

PIAGET, Jean e GARCIA, Rolando. *Psicogênese e história das ciências*. Lisboa (Portugal) : Dom Quixote, 1987.

PIAGET, Jean e GRÉCO, Pierre [1959]. *Aprendizagem e conhecimento*. Rio de Janeiro : Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo : Pioneira, 1976.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *A imagem mental na criança*: estudos sobre o desenvolvimento das representações imagéticas. Porto (Portugal) : Civilização Editora, 1977.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *Memória e inteligência*. Rio de Janeiro : Artenova, 1979.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança*. 3. ed. Rio de Janeiro : Zahar, 1983.

PIAGET, Jean e INHELDER, Bärbel. *A Psicologia da criança*. 15. ed. Rio de Janeiro : Bertrand Brasil, 1998.

PIAGET, Jean e SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. 3. ed. São Paulo : Zahar, 1981.

PIAGET, Jean (org.). *Lógica e conhecimento científico*. 2v. Porto, Portugal : Livraria Civilização-Editora, 1980.

PIAGET, Jean et alii. *La enseñanza de las matematicas*. Madrid : Aguilar, 1968.

PIAGET, Jean et alii. *La enseñanza de las matematicas modernas*. Madrid : Alianza, 1980.

POINCARÉ, Jules-Henri. *A ciência e a hipótese*. Brasília : Ed. Universidade de Brasília, 1985.

___. *O valor da ciência*. Rio de Janeiro : Contraponto, 1995.

___. *Ciencia y método*. 2. ed. Buenos Aires : Espasa-Calpe Argentina, 1946a.

___. *Últimos pensamientos*. 2. ed. Buenos Aires : Espasa-Calpe Argentina, 1946b.

PULASKI, Mary Ann Spencer. *Compreendendo Piaget*: uma introdução ao desenvolvimento cognitivo da criança. Rio de Janeiro : LTC, 1986.

TIROSH, Dina. Como os professores compreendem as expressões matemáticas indefinidas. *Substratum/ArtMed*, Porto Alegre, 2 (4):77-111.

VAYER, Pierre e outros. *A lógica da vida e educação*. Lisboa : Instituto Piaget, [1999].

VAYER, Pierre e TRUDELLE, Denis. *Como aprende a criança*. Lisboa : Instituto Piaget, [1999].

VILLALOBOS, Maria da Penha. *Didática e epistemologia*: sobre a didática de Hans Aebli e a Epistemologia de Jean Piaget. São Paulo : Grijalbo, 1969.

XYPAS, Constantine. *Piaget e a educação*. Lisboa : Instituto Piaget, [1999].

6.6

6.7

6.8 Bibliografia de apoio

ABBAGNANO, Nicola. *Dicionário de Filosofia*. 2. ed. São Paulo : Martins Fontes, 1998.

ALTHUSSER, Louis. *Aparelhos ideológicos de estado.* Rio de Janeiro : Graal, 1983.

BATTRO, Antônio M. *Dicionário terminológico de Jean Piaget*. São Paulo : Pioneira, 1978.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.) *Educação matemática*. São Paulo : Moraes, s.d.

BOGDAN, Robert e BIKLEN, Sari. *Investigação qualitativa em educação*. Lisboa (Portugal) : Porto Editora, 1994.

BRUTER, Claude-Paul. *Compreender as matemáticas*: as dez noções fundamentais. Lisboa (Portugal) : Instituto Piaget, 1998.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa (Portugal) : s.e., 1951.

CREMA, Roberto. *Introdução à visão holística*: breve relato de viagem do velho ao novo paradigma. São Paulo : Summus, 1989.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Da realidade à ação* : reflexões sobre educação e matemática. São Paulo : Summus ; Campinas : Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

DAMÁSIO, António R. *O erro de Descartes* : emoção, razão e o cérebro humano. São Paulo : Companhia das Letras, 1996.

DOUADY, Régine. Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. In: *Em aberto*: tendências na educação matemática. Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994, pp. 33-42.

DAVIS Philip J. e HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Rio de Janeiro : Francisco Alves, 1985.

Da SILVA, Clóvis Pereira. *A matemática no Brasil*: uma história de seu desenvolvimento. Curitiba : UFPR, 1992.

De DOMENICO, Ettiène Guérios. Confronto entre a "Lógica do Professor" e a "Lógica do Aluno" em classes de 1ª e de 2ª séries do 1º grau. In: XAVIER, Conceição Clarete. *Mapeamento de educação matemática no Brasil*, 1995 : pesquisas, estudos, trabalhos técnicos-científicos por subárea temática. 2. ed. Brasília : INEP, 1996.

FERNANDES, Cleoni M. B. *Sala de aula universitária - ruptura, memória e territorialidade* **-** O desafio da reconstrução do conhecimento**.** Orientanda da Profa. Dra. Denise Leite. Projeto de Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da UFRGS, 1997.

FLAVELL, John H. et allii. *Desenvolvimento cognitivo.* 3 ed. Porto Alegre : ArtMed, 1999.

FONSECA, Vítor da. *Introdução às dificuldades de aprendizagem*. 2. ed. Porto Alegre : Artes Médicas, 1995.

FREIRE, Paulo e SHOR, Ira. *Medo e ousadia*: cotidiano do professor. São Paulo : Paz e Terra, 1987.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática Educativa. 8. ed. São Paulo : Paz e Terra, 1996.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da indignação*: cartas pedagógicas e outros escritos. São Paulo : UNESP, 2000.

GLEISER, Marcelo. *A Dança do Universo*: dos mitos da criação ao Big Bang. São Paulo : Companhia das Letras, 1997.

HEISENBERG, Werner. *A parte e o todo*: encontros e conversas sobre física, filosofia, religião e política. Rio de Janeiro : Contraponto, 1996.

JACQUARD, Albert. *A equação do nenúfar*: os prazeres da ciência. Lisboa : Terramar, 1998.

KOCH, Maria Celeste. *Número e alfabetização*: a em novas bases. Erechim : Edelbra, s.d.

KUHN, Thomas S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo : Perspectiva, 1982.

La TAILLE, Yves de. OLIVEIRA, Marta Kohl de. DANTAS, Heloysa. *Piaget, Vygotsky, Wallon*: teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo : Summus, 1992.

LAWOR, Robert. *Geometria Sagrada*. Madrid (Espanha) : Edições del Prado, 1996.

LEITE, Denise et alii. Inovação na zona cinzenta de transição in *Cadernos de Educação*. Universidade Federal de Pelotas, Faculdade de Educação. N.8 (jan./jun. 1997) – Pelotas : UFPel, 1992 (75-96).

LESSARD-HÉBERT, Michelle. *Pesquisa em educação*. Lisboa (Portugal) : Instituto Piaget, sd.

LOWEN, Alexander. *Prazer* : uma abordagem criativa da vida. São Paulo : Summus, 1984.

LÜCK, Heloísa e CARNEIRO, Dorothy Gomes. *Desenvolvimento afetivo na escola*: promoção, medida e avaliação. Petrópolis : Vozes, 1983.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo : EPU, 1986.

MATTÉI, Jean-François. *Pitágoras e os pitagóricos*. São Paulo : Paulus, 2000.

MINIDICIONÁRIO LUFT. 16. ed. São Paulo : Ática, 1999.

OLIVEIRA, Rogério de Castro. *Construções figurativas*. Porto Alegre : UFRGS, 1997 (Projeto de tese de doutorado).

PENIN, Sonia T. de Sousa. *A aula: espaço de conhecimento, lugar de cultura*. Campinas, SP : Papirus, 1994.

PESSIS-PASTERNAK, Guitta. *Do caos à inteligência artificial*: quando os cientistas se interrogam. São Paulo : Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

ROSA NETO, Ernesto. *Didática da matemática*. 4. ed, São Paulo : Ática, 1992.

RUSSEL, Bertrand. *Misticismo e lógica*. São Paulo : Companhia Editora Nacional, 1957.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. *Globalización e interdisciplinariedade*: el curriculum integrado. Madrid : Morata, 1994.

SANTOS. Boaventura de Souza. *Um discurso sobre as ciências*. 12. ed, Porto (Portugal) : Afrontamento, 2001.

SCHÄFFER, Margareth. O sujeito: efeito ou agente no campo social? Sujeito construtor de conhecimento e aprendizagem: Piaget e Vygotsky. In *Ciências & Letras*. Revista da FAPA. N. 23/24, 1998 (65-80).

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*. 2. ed. Rio de Janeiro : Record, 1998.

STEWART, Ian. *Será que Deus joga dados?* Rio de Janeiro : Jorge Zahar, 1991.

TAMBARA, Elomar. *Positivismo e educação*: a educação no Rio Grande do Sul sob o castilhismo. Pelotas : EDUFPel, 1995.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da matemática no Brasil* (1730-1930). São Paulo : Annablume, 1999.

VASCONCELOS, Mário (org.). *Criatividade*. São Paulo : Moderna, 2001.

VEIGA, Ilma Passos Alencastro. *A prática pedagógica do professor de didática*. Campinas, SP : Papirus, 1989.