

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**ESCOLA DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

***ANÁLISE INTERATIVA DE SITUAÇÕES DE REFORÇO E  
RECUPERAÇÃO DE PEÇAS DE CONCRETO ARMADO,  
EMPREGANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS***

*Maria Manuela de Melo Moreira*

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Estruturas

Porto Alegre

Julho de 2002

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Programa de Pós-Graduação.

---

Prof. Américo Campos Filho  
Orientador

---

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil

Prof. Américo Campos Filho (Orientador)  
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Francisco de Paula Simões Lopes Gastal  
Ph.D. pela North Carolina State University

Prof. Mauro de Vasconcellos Real  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Sérgio Roberto Maestrini  
Ph.D. pela North Carolina State University

Dedico esta dissertação aos meus pais, Manuel Moreira da Costa e Maria das Neves de Melo Moreira e à minha irmã Valéria de Melo Moreira pelo carinho, incentivo e amor que sempre me dedicaram.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Américo Campos Filho pela constante orientação, paciência e amizade prestados durante este período de trabalho.

À minha família, principalmente aos meu pais e minha irmã pelo carinho e amor dedicado.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, pela convivência e auxílio prestados na condução deste trabalho.

Ao CNPq –pelo auxílio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	<b>viii</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>xii</b>
<b>RESUMO</b> .....	<b>xviii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xix</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 OBJETIVO DO TRABALHO.....	3
1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO.....	4
<b>2 ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS...</b>	<b>5</b>
2.1 INTRODUÇÃO.....	5
2.2 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO.....	6
2.2.1 Expressões Básicas .....	6
2.2.2 Incremento de Deformação Viscoplastica.....	8
2.2.3 Incremento de Tensão.....	8
2.2.4 Equações de Equilíbrio.....	8
2.2.5 Correção do Equilíbrio.....	10
2.2.6 Modelo de Camadas.....	10
2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO.....	12
2.3.1 Incremento de Tensão.....	13
2.3.2 Equações de Equilíbrio.....	14
2.3.3 Taxa de Deformação Viscoplastica.....	14

<b>3</b>	<b>MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS EMPREGADO PARA O CONCRETO E A ARMADURA.....</b>	<b>15</b>
3.1	ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO.....	15
3.2	ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA.....	18
<b>4</b>	<b>MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS.....</b>	<b>21</b>
4.1	COMPORTAMENTO NÃO-LINEAR DOS MATERIAIS.....	21
4.2	MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PARA O CONCRETO.....	22
4.2.1	<b>Modelo para o Concreto Comprimido.....</b>	<b>22</b>
4.2.1.1	Critério de Ruptura.....	23
4.2.1.2	Critério de Plastificação para o Concreto.....	25
4.2.1.3	Regra de Endurecimento.....	26
4.2.1.4	Vetor de Fluxo Plástico.....	27
4.2.2	<b>Modelo para o Concreto Fissurado.....</b>	<b>29</b>
4.2.2.1	Critério de Fissuração.....	30
4.2.2.2	Colaboração do Concreto entre Fissuras.....	31
4.2.2.3	Rigidez Transversal do Concreto Fissurado.....	33
4.3	MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO.....	33
4.4	MODELOS VISCOELÁSTICOS PARA O CONCRETO E O AÇO.....	35
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO.....</b>	<b>38</b>
5.1	ALGORITMOS DE SOLUÇÃO.....	38
5.2	DETALHAMENTO DAS SUBROTINAS.....	39
<b>6</b>	<b>PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>	<b>55</b>
6.1	A LINGUAGEM MATLAB.....	55
6.2	INTERFACE GRÁFICA.....	56
<b>7</b>	<b>COMPARAÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS, OBTIDOS ATRAVÉS DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS, COM VALORES EXPERIMENTAIS</b>	<b>81</b>
7.1	INTRODUÇÃO.....	81

7.2	VIGA DE CONCRETO ARMADO SIMPLEMENTE APOIADA.....	82
7.3	VIGA REFORÇADA COM CAMADA DE ARGAMASSA ADITIVADA.....	88
7.4	VIGA REFORÇADA COM CHAPA DE AÇO.....	94
7.5	VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ARMADURA EXPOSTA.....	101
<b>8</b>	<b>SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE SITUAÇÕES DE REFORÇO DE VIGAS SOB CARREGAMENTO APLICADO.....</b>	<b>112</b>
8.1	INTRODUÇÃO.....	112
8.2	VIGAS REFORÇADAS NO BORDO COMPRIMIDO (VFC).....	113
8.2.1	Considerações gerais.....	113
8.2.2	Caracterização dos materiais.....	115
8.2.3	Caracterização das vigas VFC ( armaduras e dimensões ).....	116
8.2.4	Obtenção das cargas devidas a protensão.....	118
8.3	ANÁLISE DA VIGA VFC-1.....	120
8.4	ANÁLISE DA VIGA VFC-2.....	127
8.5	ANÁLISE DA VIGA VFC-3.....	132
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>137</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>139</b>
<b>ANEXO</b>	<b>– VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS DE ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>143</b>
A.1	PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS.....	143
A.2	CONVERSÃO DOS VALORES DAS TENSÕES NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DAS BARRAS DE ARMADURA, PARA OS PONTOS NODAIS.....	146

## LISTA DE SÍMBOLOS

### I - LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

$A_s$  – área da seção transversal da armadura passiva

$B$  – matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de concreto

$B_s$  – vetor que relaciona deformações e deslocamentos nodais do elemento de aço

$D$  – matriz constitutiva

$E$  – módulo de elasticidade longitudinal

$E_s$  – módulo de elasticidade longitudinal do aço

$F$  – função de plastificação

$F_0$  – tensão corrente de plastificação

$G$  – módulo de elasticidade transversal

$G_c$  – módulo de elasticidade transversal do concreto

$H'$  - taxa de endurecimento do concreto

$H'_s$  - taxa de endurecimento do aço

$I_1$  – 1<sup>a</sup> invariante do tensor de tensão

$J$  – matriz jacobiana

$J_2$  – 2<sup>a</sup> invariante do tensor desviador de tensão

$K$  – matriz de rigidez do elemento de concreto armado

$K_c$  – matriz de rigidez do concreto

$K_s$  – matriz de rigidez do aço

$N$  – função de interpolação para o elemento de concreto

$P$  – vetor de cargas nodais

$Q$  – função do potencial plástico

$S$  – superfície

$V$  – vetor de pseudo-cargas, volume

## II – LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

$a$  – vetor de fluxo plástico; coeficiente

$c$  – parâmetro

$e$  – espessura total do elemento de concreto

$e_i$  – espessura da camada de concreto

$f_{cm}$  – resistência média à compressão do concreto

$f_{tm}$  – resistência média à tração do concreto

$f_y$  – tensão de escoamento da armadura passiva

$k$  – parâmetro

$t$  – tempo

$u$  – campo de deslocamento

$x$  – coordenada cartesiana

$y$  – coordenada cartesiana

$w$  – fator de peso

### III – LETRAS GREGAS MAIÚSCULAS

$\Delta$  - incremento

$\Sigma$  - somatório

$\Phi$  - função de fluxo

### IV – LETRAS GREGAS MINÚSCULAS

$\alpha$  - coeficiente

$\beta$  - coeficiente

$\gamma$  - coeficiente de fluidez do concreto

$\gamma_s$  - coeficiente de fluidez do aço

$\varepsilon$  - deformação específica longitudinal

$\varepsilon_e$  - deformação elástica

$\varepsilon_{vp}$  – deformação viscoplástica

$\eta$  - coeficiente de viscosidade

$\theta$  - ângulo de similaridade

$\lambda$  - parâmetro

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\xi$  - coordenada normalizada

$\sigma$  - tensão normal no concreto

$\sigma_{ef}$  - tensão efetiva no concreto

$\sigma_s$  - tensão normal na armadura

$\phi$  - diâmetro da barra da armadura

$\psi$  - forças residuais

## V - SÍMBOLOS

{ } - vetor coluna

< > - vetor linha

[ ] - matriz

[ ]<sup>T</sup> - matriz transposta

[ ]<sup>-1</sup> - matriz inversa

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Modelo elasto-viscoplástico.....	6
Figura 2.2	Modelo de camadas superpostas.....	11
Figura 3.1	Elementos isoparamétricos quadrangulares.....	16
Figura 3.2	Barra de armadura no interior do concreto.....	20
Figura 4.1	Diagrama carga-deslocamento típico.....	21
Figura 4.2	Superfície de plastificação e ruptura.....	25
Figura 4.3	Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.....	26
Figura 4.4	Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado.....	32
Figura 4.5	Diagrama tensão-deformação para o aço tipo A.....	34
Figura 4.6	Diagrama tensão-deformação para o aço tipo B.....	35
Figura 4.7	Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em $t'$ .....	35
Figura 4.8	Modelo de cadeias de Maxwell.....	36
Figura 5.1	Fluxograma geral do programa.....	40
Figura 5.2	Elementos finitos com carregamento nodal.....	42
Figura 5.3	Elemento finito com vinculação nos nós 1 e 3 .....	48
Figura 5.4	Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3.....	49
Figura 5.5	Elemento finito com vinculação nos nós 1 ,2 e 3.....	50
Figura 5.6	Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3 e carregamento nodal no nó 1.....	51

Figura 5.7	Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e3.....	52
Figura 5.8	Elemento finito com vinculação nos nós 1 e 3 e carregamento nodal no nó 2.....	53
Figura 6.1	Tela inicial do programa .....	57
Figura 6.2	Tela informativa sobre o REFSTRUC.....	57
Figura 6.3	Entrada de dados .....	58
Figura 6.4	Retirada de elementos .....	59
Figura 6.5	Dados iniciais.....	60
Figura 6.6	Conetividades dos elementos de concreto.....	61
Figura 6.7	Numeração do elemento finito.....	62
Figura 6.8	Entrada da espessura e do tipo de concreto.....	62
Figura 6.9	Conetividades das barras de armadura.....	63
Figura 6.10	Coordenadas nodais.....	63
Figura 6.11	Nós vinculados.....	64
Figura 6.12	Nós vinculados.....	64
Figura 6.13	Vínculos em X e Y.....	64
Figura 6.14	Entrada de propriedades.....	65
Figura 6.15	Propriedades do ambiente.....	66
Figura 6.16	Propriedades do concreto.....	66
Figura 6.17	Propriedades da armadura passiva.....	67
Figura 6.18	Entrada dos carregamentos.....	68
Figura 6.19	Convenção do ângulo de gravidade.....	69
Figura 6.20	Tela salvar arquivo .....	71
Figura 6.21	Tela calcular.....	71
Figura 6.22	Malha de elementos finitos de concreto e armadura.....	76
Figura 6.23	Numeração dos nós dos elemento finitos.....	76

Figura 6.24	Posição dos nós dos elementos finitos.....	77
Figura 6.25	Malha de elementos finitos de concreto deformada.....	78
Figura 6.26	Posicionamento dos nós da malha indeformada e deformada.....	79
Figura 6.27	Distribuição das tensões nos elementos de concreto .....	79
Figura 6.28	Distribuição das tensões na armadura.....	80
Figura 6.29	Mudança de carregamento.....	80
Figura 7.1	Armadura da viga testemunho.....	82
Figura 7.2	Discretização da viga testemunho.....	83
Figura 7.3	Discretização da armadura da viga testemunho.....	83
Figura 7.4	Deformada da viga testemunho para diferentes níveis de carga .....	84
Figura 7.5	Estado de tensões da viga testemunho em diferentes níveis de carregamento.....	85
Figura 7.6	Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento.....	86
Figura 7.7	Comparação das flechas da viga testemunho, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	87
Figura 7.8	Comparação das deformações da viga testemunho, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	87
Figura 7.9	Armadura da viga reforçada com argamassa aditivada.....	88
Figura 7.10	Discretização da viga reforçada com argamassa aditivada.....	89
Figura 7.11	Discretização da armadura da viga reforçada com argamassa aditivada.....	89
Figura 7.12	Deformada da viga reforçada com argamassa aditivada .....	90
Figura 7.13	Estado de tensões da viga reforçada com argamassa aditivada em diferentes níveis de carregamento.....	91
Figura 7.14	Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento.....	92
Figura 7.15	Comparação das flechas da viga reforçada com argamassa aditivada, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	93
Figura 7.16	Comparação das deformações na armadura tracionada da viga reforçada	

	com argamassa aditivada, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	93
Figura 7.17	Deformação da armadura longitudinal de reforço.....	93
Figura 7.18	Armadura da viga reforçada com chapa de aço.....	94
Figura 7.19	Disposição dos parafusos auto-fixantes na chapa.....	95
Figura 7.20	Discretização da viga reforçada com chapa de aço.....	95
Figura 7.21	Discretização da armadura da viga reforçada com chapa de aço.....	95
Figura 7.22	Deformada da viga reforçada com chapa de aço, para diversos carregamentos.....	96
Figura 7.23	Estado de tensões da viga reforçada com chapa de aço, em diferentes níveis de carregamento.....	97
Figura 7.24	Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento.....	98
Figura 7.25	Comparação das flechas da viga reforçada com chapa de aço, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	99
Figura 7.26	Comparação das deformações na armadura tracionada da viga reforçada com chapa de aço, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	99
Figura 7.27	Comparação das deformações na chapa de aço da viga reforçada, obtidas experimentalmente e pelo programa.....	100
Figura 7.28	Detalhamento das vigas ensaiadas.....	102
Figura 7.29	Malha de elementos finitos adotada para a viga com armadura exposta em um trecho de 100 cm.....	102
Figura 7.30	Malha de elementos finitos adotada para a viga com armadura exposta em um trecho de 170 cm.....	102
Figura 7.31	Discretização da armadura.....	103
Figura 7.32	Deformada da viga com armadura exposta ao longo de 100 cm.....	104
Figura 7.33	Estado de tensões da viga com armadura exposta ao longo de 100 cm.....	105
Figura 7.34	Estado de tensões da armadura, com comprimento exposto igual a 100 cm.....	106
Figura 7.35	Comparação das flechas numéricas e experimentais para a viga com	

	armadura exposta ao longo de 100 cm.....	107
Figura 7.36	Deformada da viga com armadura exposta em um trecho de 170.....	107
Figura 7.37	Estado de tensões da viga com armadura exposta ao longo de 170 cm.....	108
Figura 7.38	Estado de tensões da armadura, com comprimento exposto igual a 170 cm.....	109
Figura 7.39	Comparação das flechas numéricas e experimentais para a viga com armadura exposta ao longo de 170 cm.....	110
Figura 7.40	Diagrama de tensões no concreto em diversas seções da viga de armadura exposta.....	111
Figura 8.1	Esquema de aplicação do pré-carregamento por protensão, por Reis (2002).....	114
Figura 8.2	Dimensões das VFC.....	116
Figura 8.3	Armadura da VFC.....	117
Figura 8.4	Detalhe das armaduras na seção transversal da VFC.....	117
Figura 8.5	Aplicação da força de protensão $F$ .....	118
Figura 8.6	Decomposição da força $F$ .....	118
Figura 8.7	Aplicação do binário nos nós da malha.....	119
Figura 8.8	Aplicação das forças nos nós 1 e 61.....	119
Figura 8.9	Discretização das vigas ensaiadas.....	120
Figura 8.10	Deformada da viga VFC-1 para diferentes níveis de carga.....	121
Figura 8.11	Estado de tensões da viga VFC-1 em diferentes níveis de carregamento....	122
Figura 8.12	Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento.....	123
Figura 8.13	VFC-1 antes do reforço.....	124
Figura 8.14	VFC-1 após o reforço.....	124
Figura 8.15	Fissuração na viga VFC-1.....	125
Figura 8.16	Comparação das flechas da VFC-1 experimentalmente e pelo programa.....	125

Figura 8.17	Deformada da VFC-2 para diferentes níveis de carga.....	128
Figura 8.18	Estado de tensões da viga VFC-2 em diferentes níveis de carregamento....	129
Figura 8.19	Estado de tensões da armadura.....	130
Figura 8.20	VFC-2 antes do reforço.....	131
Figura 8.21	VFC-2 após o reforço.....	131
Figura 8.22	Comparação das flechas da VFC-2 experimentalmente e pelo programa.....	131
Figura 8.23	Deformada da VFC-3 para diferentes níveis de carga.....	133
Figura 8.24	Estado de tensões da viga VFC-3 em diferentes níveis de carregamento....	134
Figura 8.25	Estado de tensões da armadura.....	135
Figura 8.26	Fissuração na VFC-3 após a protensão 1 ( $F_v=31,9$ kN).....	136
Figura 8.27	Ruptura da VFC-3.....	136
Figura 8.28	Comparação das flechas da VFC-3 experimentalmente e pelo programa.....	136
Figura A.1	Tensões suavizadas e não suavizadas.....	144
Figura A.2	Barras de armadura no interior dos elementos de concreto.....	147
Figura A.3	Segmentos de barras no interior do elemento de concreto.....	147
Figura A.4	Numeração dos nós do segmento de armadura.....	147

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa computacional, baseado no método dos elementos finitos, para simular situações de reforço e recuperação de peças de concreto armado.

A linguagem Matlab é a ferramenta utilizada para a elaboração do programa. É uma linguagem de alta performance para computação técnica. Integra computação, visualização e programação em um fácil ambiente para uso, onde problemas e soluções são expressos em familiar notação matemática.

A característica principal deste programa é de permitir alterações na modelagem numérica durante a análise do problema, podendo-se retirar ou acrescentar elementos da estrutura, aumentar ou diminuir rigidezes, alterar materiais, etc, viabilizando-se, assim, uma avaliação das diversas etapas ou hipóteses dos procedimentos de recuperação ou reforço de estruturas. O programa permite a mudança de vinculações do elemento estrutural, durante a análise. Além disto, é permitido não só incrementos de forças como incrementos de deslocamentos impostos à estrutura.

O programa computacional utiliza duas etapas distintas, baseadas em um modelo elasto-viscoplástico. Na primeira etapa, faz-se a determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Considera-se, nesta etapa, que o material possui comportamento viscoelástico. Na segunda, busca-se determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo, considerando-se o material com comportamento elastoplástico.

Para melhor representar o comportamento do concreto, quando submetido a carregamento de longa duração, utilizou-se um modelo de camadas superpostas. A armadura é introduzida no modelo como uma linha de material mais rígido dentro do elemento de concreto. Considera-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. Assim, os deslocamentos ao longo das barras de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto.

Para verificar a precisão do programa computacional desenvolvido, comparam-se os resultados numéricos com resultados experimentais, cujos ensaios foram realizados no Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, e no Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos- USP. Nessas comparações, obtiveram-se ótimas aproximações entre os resultados numéricos e experimentais.

## **ABSTRACT**

The aim of this work is to develop a computational program, based on the finite element method, to simulate strengthening and rehabilitation situations of reinforced concrete structures.

The language Matlab is the tool utilized for the program elaboration. It's a high-performance language for technical computing. It integrates computation, visualization and programming in a easy to use environment where problems and solutions are expressed in a familiar mathematical notation.

The main characteristic of this program is the possibility of interfering on the numerical modelling during the problem analysis. It is possible to withdraw or to add elements of structure, to increase or to decrease stiffness, to change materials, etc, allowing a estimate of the several stages or hypothesis of the structures rehabilitation or strengthening procedure. The program allows changing nodal restrictions of the structural element, during the analysis. Furthermore, the program allows not only incremental loading but also incremental displacement.

The program uses two different procedures, based in an elasto-viscoplastic model. On the first procedure, it does the structure response determination behaviour in time. It is considered, in this stage, that the material presents a viscoelastic behaviour. On the second procedure, the program determines the structure's response to an instantaneous loading, where the material presents an elastoplastic behaviour.

To represent the concrete behaviour, when submitted to long-term loading, it uses an overlay model. The reinforcement is inserted into the model as a line of a stiffer material inside the concrete element. No slip between concrete and the reinforcement is considered. Thus, the displacements along the reinforcement elements are determined from the concrete elements nodal displacements.

In order to evaluate the accuracy of the computational program developed, the numerical results are compared to the experimental results. These tests were carried out by the Laboratory of Structural Tests and Modelling of the Civil Engineering Graduate Program of the School of Engineering at the Federal University of Rio Grande do Sul, and by the Laboratory of Structures of the School of Engineering of São Carlos-USP. These comparisons demonstrated that the numerical program has accurately expressed the behaviour observed on the experimental tests.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 GENERALIDADES

Desde o início do emprego do concreto armado, criado na França em 1849 por Monier, as edificações e demais construções civis em concreto armado têm sido submetidas às mais variadas ações do meio ambiente.

Embora o concreto possa ser considerado um material praticamente eterno, desde que receba manutenção sistemática e programada, há construções que apresentam manifestações patológicas em intensidade e incidência significativas, acarretando elevados custos para sua correção. Sempre há comprometimento dos aspectos estéticos e, na maioria das vezes, redução da capacidade resistente, podendo chegar, em certas situações, ao colapso parcial ou total da estrutura.

Assim, a patologia pode ser entendida como a parte da Engenharia que estuda os sintomas, o mecanismo, as causas e as origens dos defeitos das construções civis, ou seja, é o estudo das partes que compõem o diagnóstico do problema. A patologia do concreto armado está, portanto, relacionada à patologia dos seus componentes que deverão reunir uma série de características que impeçam a ocorrência, a curto prazo, de defeitos, mais ou menos graves no concreto.

Fatores como a diferença entre as resistências à tração e compressão do concreto; a não linearidade da relação tensão deformação; a aderência imperfeita entre o aço e o concreto adjacente; as deformações por fluência e retração do concreto; a fissuração do concreto e a transmissão de esforços entre fissuras, entre outros, são fatores que dificultam a análise desse

tipo de estrutura. Devido a sua grande importância dentro da engenharia estrutural, o concreto tem sido um objeto permanente de estudo.

A simulação numérica constitui uma forma de avaliar o comportamento das estruturas de concreto. Devido a sua boa aproximação com os resultados reais, o método dos elementos finitos surge como uma poderosa técnica para a solução numérica de uma variedade de problemas encontrados na engenharia, dentre os quais, os relativos ao concreto estrutural. Muitos trabalhos foram realizados, utilizando esse método, a fim de analisar o comportamento de estruturas de concreto armado e protendido. No Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFRGS, pode-se citar, entre outros, os trabalhos de Martins (1989), D'Avila (1990), Sensale Cozzano (1991), Prates Jr. (1992), Claire (1994) , Gomes (1997) e Dantas (2000) realizados nesta área.

O número de estruturas de concreto, que necessitam ser reforçadas e/ou recuperadas, tem sido cada vez maior. Segundo Beber (1999), muitas são as razões que levam uma estrutura a ser reforçada ou recuperada. Dentre elas, têm-se:

- mudança de utilização que pode conduzir a um aumento da carga aplicada à estrutura;
- durante o processo de renovação de uma construção, apoios podem ser removidos ou o arranjo estrutural modificado, conduzindo a uma redistribuição de forças e à necessidade de reforço;
- condições de exposição adversas podem provocar danos ao concreto, bem como às barras de armaduras;
- projeto fora dos padrões estabelecidos pelas normas;
- falta de barras de armadura, resultando em seções de aço insuficientes;
- dano estrutural devido a explosões, impacto de veículos, incêndios, e outros sinistros.

Apesar da constante necessidade de reforço e/ou reparo das estruturas de engenharia, praticamente inexitem normas técnicas específicas que tratem de projetos de reforço de

elementos estruturais danificados, ou mesmo de como estimar a sua capacidade portante residual.

O Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (LEME-PPGEC/UFRGS) tem procurado colaborar no desenvolvimento deste campo de estudo. Vários trabalhos experimentais têm sido desenvolvidos sobre reforço de lajes, vigas e pilares de concreto armado como, por exemplo, os de Campagnolo e Dal Molin (1992), Campagnolo et al (1994a e 1994b, 1996a e 1996b), Zanato (1999) e Beber (1999).

Existe, entretanto, uma certa carência de modelos numéricos, que tratem de reforço ou recuperação de estruturas de concreto, principalmente, quando as mesmas são reforçadas ou recuperadas sob carregamento, ou seja, submetidas a um determinado nível de tensão.

## 1.2 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é implementar um programa computacional interativo, na linguagem Matlab, para a análise de situações de reforço e recuperação de peças de concreto armado, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos. Este trabalho foi desenvolvido a partir do modelo de Dantas (2000). A linguagem Matlab possibilitou a criação de uma interface gráfica, que permite uma total interatividade com o usuário. Esses procedimentos podem ser aplicados em qualquer fase de carregamento, estando a viga já submetida a um certo nível de tensão.

Para tanto, o programa permite simulações de situações de recuperação, tais como, a retirada de elementos de concreto, durante a análise, juntamente com a armadura, ou mantendo-se a armadura na estrutura. Pode-se também simular situações como a adição de novas barras de armadura ou de chapas de aço à estrutura, mudar a vinculação do elemento estrutural durante a análise do problema e impor incrementos de deslocamentos à estrutura, em qualquer etapa de carregamento. Pode-se, assim, simular situações de reforço, como escoramento, ou a necessidade de remoção de algum apoio da estrutura.

Os resultados obtidos numericamente são validados através de comparação com resultados experimentais, obtidos de ensaios realizados no LEME/UFRGS e no Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos/USP.

### 1.3 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em nove capítulos, dos quais esta introdução é o primeiro.

No **capítulo 2**, faz-se uma breve revisão da teoria e apresenta-se o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, para análise de um material elasto-viscoplástico, segundo proposto por Owen e Hinton (1980). Mostra-se o funcionamento do algoritmo de solução incremental para problemas não-lineares e explica-se o modelo de camadas adotado.

O **capítulo 3** apresenta os modelos de elementos finitos empregados para o concreto e para a armadura. Descreve-se, ainda, o procedimento para a determinação do segmento de armadura que fica no interior de cada elemento de concreto.

Os modelos constitutivos dos materiais são abordados no **capítulo 4**. Destaca-se, neste capítulo, o comportamento do concreto tracionado e comprimido e as propriedades da armadura. Apresentam-se, também, as propriedades do concreto e do aço dependentes do tempo.

O **capítulo 5** mostra a teoria computacional envolvida no processo de elaboração do programa.

No **capítulo 6**, são mostradas todas as etapas da interface gráfica interativa do programa.

No **capítulo 7**, são apresentados comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto armado (reforçadas ou recuperadas) com os obtidos pelo programa computacional.

Simulações de situações de reforço, durante o carregamento, são abordadas no **capítulo 8**.

O **capítulo 9** apresenta as conclusões deste trabalho.

Finalmente, no **anexo**, são mostrados os processos de suavização das tensões nos elementos de concreto e nas barras de armadura, para visualização dos resultados.

## **2 ANÁLISE DE UM MATERIAL COM COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

### **2.1 – INTRODUÇÃO**

É possível obter a resposta de uma estrutura para cargas de curta e longa duração, por meio da teoria da elasto-viscoplasticidade. O modelo elasto-viscoplástico, mostrado na Figura 2.1, possibilita a solução de problemas elastoplásticos e viscoelásticos.

Assim, o programa computacional desenvolvido permite solucionar dois tipos de problemas. No primeiro tipo de problema, determina-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo, procurando-se o estado de deformações da estrutura quando o tempo tende ao infinito. Este estado estável, corresponde à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a uma carga instantânea. No segundo tipo, determina-se a resposta de uma estrutura ao longo do tempo, buscando calcular o estado de deformação da estrutura, decorrido um determinado tempo da aplicação do carregamento. Esta resposta corresponde ao comportamento viscoelástico e é obtido anulando-se a tensão de plastificação inicial.

Para representar de forma mais precisa o comportamento real do concreto utiliza-se o modelo de camadas superpostas. Neste modelo, o material é composto de diversas camadas que sofrem a mesma deformação. Atribuindo-se diferentes propriedades a cada camada, obtém-se um comportamento composto, que pode exibir as características da resposta elasto-viscoplástica do material real.

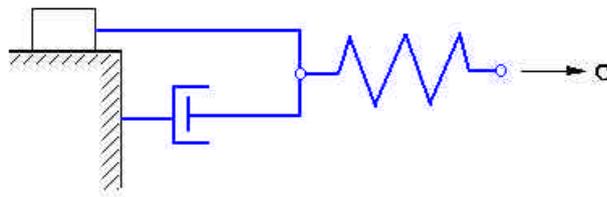


Figura 2.1 – Modelo elasto-viscoplástico

## 2.2 – COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO CONCRETO

Neste item, será mostrada a formulação matemática para análise estrutural não-linear, através do método dos elementos finitos, de um material isótropo homogêneo de comportamento elasto-viscoplástico.

O programa, para solução deste problema, encontra-se apresentado em Owen e Hinton (1980). A partir deste programa, foram implementados os diversos modelos utilizados para representação dos materiais deste estudo. (Dantas, 2000).

Para que esta formulação possa ser desenvolvida é necessário que se apresentem primeiramente, expressões básicas, sumarizadas a seguir.

### 2.2.1 Expressões Básicas

Para problemas contínuos não-lineares pode-se admitir que a deformação total,  $\epsilon$ , pode ser separada em componentes elástica,  $\epsilon_e$ , e viscoplástica,  $\epsilon_{vp}$ , de forma que a taxa de deformação total pode ser expressa por

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}_e\} + \{\dot{\epsilon}_{vp}\} \quad (2.1)$$

onde  $(\dot{\quad})$  representa diferenciação com relação ao tempo.

A taxa de tensão total é calculada a partir da taxa de deformação elástica de acordo com

$$\{\dot{\sigma}\} = [D] \{\dot{\epsilon}_e\} \quad (2.2)$$

onde [D] é a matriz constitutiva do material. O comportamento viscoplástico é governado por uma superfície de plastificação dada por

$$F(\{\sigma\}) - F_0(\kappa) = 0 \quad (2.3)$$

onde  $F_0$  é a tensão de plastificação uniaxial, que pode ser uma função do parâmetro de endurecimento  $\kappa$ . Se  $F < F_0$ , tem-se um comportamento elástico, se  $F = F_0$ , plástico, e comportamento viscoplástico somente quando  $F > F_0$ .

É necessário estabelecer uma lei específica para determinar as deformações viscoplásticas a partir do estado de tensões. Uma forma explícita para esta lei, conforme Owen e Hinton (1980) é

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}_{vp}\} &= \gamma \Phi(F) \frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}}, \text{ para } F > F_0 \\ \{\dot{\epsilon}_{vp}\} &= \{0\}, \text{ para } F \leq F_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

na qual

$\gamma = 1 / \eta$  é o parâmetro de fluidez, sendo  $\eta$  o coeficiente de viscosidade;

$Q = Q(\{\sigma\})$  é a função potencial plástico;

$$\Phi(F) = F - F_0$$

Restringindo-se ao caso de plasticidade associada, na qual  $F \equiv Q$ , a equação (2.4) fica

$$\{\dot{\epsilon}_{vp}\} = \mathbf{g} \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\mathbf{s}\}} = \mathbf{g} \Phi(F) \{a\} \quad (2.5)$$

onde  $\{a\}$  é o vetor de fluxo plástico a ser visto no item 4.2.1.4.

### 2.2.2 Incremento de Deformação Viscoplastica

Com a lei para taxa de deformação viscoplastica, expressa em (2.5), pode-se definir um incremento de deformação  $\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}$ , correspondente a um intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , usando um esquema de integração explícita no tempo, uma vez que o incremento de deformação fica completamente determinado pelas condições existentes no tempo  $t_n$  como

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\} = \Delta t_n \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} \quad (2.6)$$

### 2.2.3 Incremento de Tensão

Usando a forma incremental em (2.2), obtém-se

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D_n] \{(\Delta\varepsilon_e)_n\} = [D_n] (\{\Delta\varepsilon_n\} - \{(\Delta\varepsilon_{vp})_n\}) \quad (2.7)$$

Expressando o incremento de deformação total em termos de incremento de deslocamentos, tem-se

$$\{\Delta\varepsilon_n\} = [B] \{\Delta u_n\} \quad (2.8)$$

onde  $[B]$  é a matriz de relações deformações-deslocamentos e  $\{\Delta u_n\}$  é o vetor de incrementos de deslocamentos nas direções dos eixos globais cartesianos  $x$  e  $y$ . Usando as equações (2.6) e (2.8), a expressão (2.7) resulta em

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D_n] \left( [B] \{\Delta u_n\} - \{(\dot{\varepsilon}_{vp})_n\} \Delta t_n \right) \quad (2.9)$$

### 2.2.4 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio a serem satisfeitas, a cada instante de tempo  $t_n$ , são

$$\int_v [B]^T \{\sigma_n\} dV - \{P_n\} = \{0\} \quad (2.10)$$

onde  $\{P_n\}$  é o vetor de cargas nodais equivalentes. Durante um incremento de tempo, as equações de equilíbrio, que devem ser satisfeitas, são dadas pela forma incremental de (2.10), como segue

$$\int_v [B]^T \{\Delta\sigma_n\} dV - \{\Delta P_n\} = 0 \quad (2.11)$$

na qual  $\{\Delta P_n\}$  representa a variação nas cargas durante o intervalo de tempo  $\Delta t_n$ . Na maioria dos casos, os incrementos de cargas são aplicados como passos discretos, considerando  $\{\Delta P_n\}=0$  para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro dentro de um incremento de carga.

Usando (2.7) e (2.11), o incremento de deslocamento, ocorrido durante cada passo de tempo  $\Delta t_n$ , pode ser calculado como

$$\begin{aligned} \{\Delta u_n\} &= [K_n]^{-1} \{\Delta F_n\} \\ \{\Delta F_n\} &= \int_v [B]^T [D_n] \{(\dot{\epsilon}_{vp})_n\} \Delta t_n dV + \{\Delta P_n\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $[K_n]$  é a matriz de rigidez tangente global, dada por

$$[K_n] = \int_v [B]^T [D_n] [B] dV \quad (2.13)$$

$\{\Delta u_n\}$  é o vetor que contém os incrementos dos deslocamentos nodais;

$\{\Delta F_n\}$  é o vetor de incrementos de cargas nodais equivalentes de toda a estrutura, no passo  $n$ , chamado de vetor de “pseudo-cargas”.

Aplicando a condição inicial, os incrementos de deslocamentos  $\{\Delta u_n\}$  podem ser calculados para qualquer instante de tempo  $t_n$ , que se substituídos em (2.9) dão os incrementos de tensões  $\{\Delta\sigma_n\}$ . Assim,

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + \{\Delta\sigma_n\}$$

e

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} \quad (2.14)$$

Usando (2.7) e (2.8) resulta

$$\{(\Delta\varepsilon_{vp})_h\} = [B] \{\Delta u_n\} - [D_n]^{-1} \{\Delta\sigma_n\} \quad (2.15)$$

e então

$$\{(\varepsilon_{vp})_{n+1}\} = \{(\varepsilon_{vp})_h\} + \{(\Delta\varepsilon_{vp})_h\} \quad (2.16)$$

O estado estacionário pode ser numericamente obtido examinando-se a variação dos deslocamentos nodais. A condição de convergência é atingida quando esta quantidade torna-se adequadamente pequena.

### 2.2.5 Correção do Equilíbrio

O cálculo do incremento de tensão está baseado numa forma linearizada das equações de equilíbrio (2.11). Portanto, as tensões totais  $\{\sigma_{n+1}\}$ , obtidas pela acumulação de todos incrementos de tensões, não são estritamente corretas e não satisfazem exatamente as equações de equilíbrio (2.10). Segundo Strincklin (1973), há vários procedimentos de solução disponíveis para efetuar as correções necessárias. A aproximação mais simples é avaliar  $\{\sigma_{n+1}\}$ , conforme apresentado no item anterior e, então, calcular as forças residuais  $\Psi$ , como

$$\{\Psi_{n+1}\} = \{P_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{\sigma_{n+1}\} dV \neq \{0\} \quad (2.17)$$

Esta força residual é então adicionada ao incremento de força aplicada  $\Delta V$  no próximo passo de tempo. Tal técnica evita um processo de iteração e ao mesmo tempo alcança uma redução do erro.

### 2.2.6 Modelos de Camadas

O modelo reológico, correspondente ao comportamento elasto-viscoplástico, descrito anteriormente, apresenta uma resposta material de acordo com observações experimentais. Porém, a história de deformação com o tempo (curvas de fluência) de muitos materiais reais,

como o concreto, não pode ser precisamente representada por um modelo elasto-viscoplástico tão simples.

Uma resposta de um material mais elaborado pode ser obtida pelo método das camadas superpostas, segundo Pande e Owen (1977), na qual o sólido analisado é suposto como sendo composto de várias camadas, cada uma das quais sofrendo a mesma deformação. O campo de tensões totais é obtido pela soma das contribuições de cada camada.

Introduzindo um número conveniente de camadas e atribuindo diferentes características materiais a cada uma, pode-se reproduzir o comportamento experimental de materiais complexos como o concreto.

No caso mais geral, o modelo reológico é formado por um conjunto de elementos compostos por uma mola em série com um elemento de atrito e um amortecedor, em paralelo. Têm-se como parâmetros as espessuras das camadas  $e_i$ , os módulos de elasticidade das molas  $E_i$ , as constantes dos amortecedores  $\gamma_i$  e as tensões de escoamento  $F_{0i}$ , nas quais começam a atuar os elementos de atrito.

Para o concreto, aplicar-se-á o modelo de cinco camadas superpostas para representar o comportamento viscoelástico com envelhecimento.

Na Figura 2.2, ilustra-se, esquematicamente, a situação de um modelo de camadas superpostas em duas dimensões.

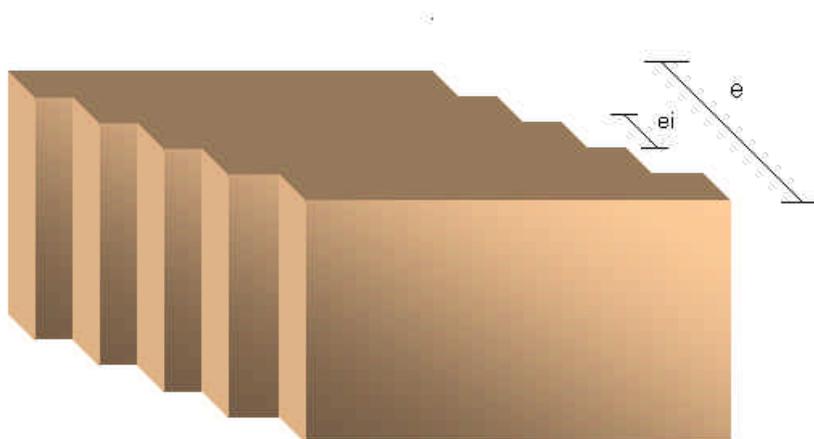


Figura 2.2 – Modelo de camadas superpostas

Cada camada pode ter espessura diferente e um comportamento material também diferente. Desta forma, resulta um campo de tensões  $\{\sigma_i\}$  distinto para cada camada. A contribuição dessas camadas para o campo de tensões totais  $\sigma$ , conforme sua espessura relativa  $e_i$ , é dada por

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^k \{\sigma_i\} e_i \quad (2.18)$$

onde  $k$  é o número de camadas do modelo e

$$\sum_{i=1}^k e_i = 1 \quad (2.19)$$

A equação de equilíbrio em (2.10) fica

$$\{P_n\} - \int_V [B]^T \sum_{i=1}^k \{(\sigma_n)_i\} e_i dV = 0 \quad (2.20)$$

E a matriz de rigidez de cada elemento será a soma das contribuições da cada camada, ou seja

$$[K_n] = \sum_{i=1}^k \int_V [B]^T [D_n]_i [B] dV \quad (2.21)$$

onde  $[D_n]_i$  é a matriz  $[D_n]$  calculada para cada camada. Esta matriz será diferente para cada camada, em função de suas propriedades. O processo de solução é idêntico ao descrito nas seções anteriores, com os termos de deformação e tensão sendo calculados para cada camada separadamente. É importante observar que, embora as deformações viscoplásticas, em cada camada, possam ser diferentes, devido aos diferentes valores das tensões de plastificação, a deformação total deve ser a mesma.

### 2.3 COMPORTAMENTO ELASTO-VISCOPLÁSTICO DO AÇO

No item anterior, foi apresentado um modelo para análise elasto-viscoplástica de peças de um material homogêneo. Este modelo seria adequado para o estudo de peças de concreto simples.

Neste item, será apresentado a formulação, desenvolvida por Prates Jr. (1992), para incorporar a armadura a este modelo.

Considerando-se que exista aderência perfeita entre o concreto e o aço, admite-se que o deslocamento de um ponto qualquer da barra de aço é o mesmo que o do concreto que a envolve. Sendo assim, pode-se escrever o desenvolvimento matemático do modelo elasto-viscoplástico para o aço de uma maneira incremental, similar ao feito para o concreto.

### 2.3.1 Incrementos de Tensão

Conhecidos os incrementos de deslocamentos nodais  $\{\Delta u_n\}$ , para o passo  $n$  de tempo, o incremento da tensão em um ponto de uma barra de aço será

$$(\Delta \sigma_s)_n = E_s (\Delta \epsilon_e)_n = E_s [ (\Delta \epsilon_s)_n - (\Delta \epsilon_{svp})_n ] \quad (2.22)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço e o incremento da deformação total é dado por

$$(\Delta \epsilon_s)_n = \langle B_s \rangle \{\Delta u_n\} \quad (2.23)$$

em que  $\langle B_s \rangle$  é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura.

Usando um esquema de integração no tempo explícito, conforme item 2.2, o incremento de deformação viscoplástica para o aço é

$$(\Delta \epsilon_{svp})_n = \Delta t_n (\dot{\epsilon}_{svp})_n \quad (2.24)$$

sendo a taxa de deformação viscoplástica é dada no item 2.3.3.

Substituindo (2.23) e (2.24) em (2.22) tem-se

$$(\Delta \sigma_s)_n = E_s [ \langle B_s \rangle \{\Delta u_n\} - \Delta t_n (\dot{\epsilon}_{svp})_n ] \quad (2.25)$$

E a tensão no passo  $n+1$  fica

$$(\sigma_s)_{n+1} = (\sigma_s)_n + (\Delta \sigma_s)_n \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Equações de Equilíbrio

A equação (2.17), correspondente às forças residuais, considerando a presença da armadura, fica

$$\{\Psi_{n+1}\} = \{P_{n+1}\} - \int_V [B]^T \{\sigma_{n+1}\} dV - \int_1 \{B_s\} (\sigma_s)_{n+1} A_s dS \quad (2.27)$$

O vetor de pseudo-cargas, da equação (2.12), terá um acréscimo, dado por

$$\{\Delta V_s\}_n = \int_1 \{B_s\} E_s A_s (\dot{\epsilon}_{svp})_n \Delta t_n dS \quad (2.28)$$

onde S é a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura.

### 2.3.3 Taxa de Deformação Viscoplastica

A taxa de deformação viscoplastica para o aço pode ser tomada como

$$(\dot{\epsilon}_{svp}) = \gamma_s (\sigma_s - \sigma_y - H'_s \epsilon_{svp}) \quad (2.29)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de plastificação inicial do aço;  $H'_s$  é o parâmetro de endurecimento do aço, a ser discutido no item 4.3, e  $\gamma_s$  é o coeficiente de fluidez do aço, sendo igual a zero, na fase viscoelástica, e igual a 0,00001, na fase elastoplástica.

### **3 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO E PARA A ARMADURA**

#### **3.1 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO**

Para modelar o concreto, foram utilizados três elementos finitos isoparamétricos quadrangulares: um linear e dois quadráticos, um da família Serendipity e outro da família de Lagrange, conforme Owen e Hinton (1980). Estes elementos possuem quatro, oito e nove nós, respectivamente, com dois graus de liberdade em cada nó, correspondentes às translações na direção dos eixos  $xy$  do sistema global de coordenadas.

Em se tratando do elemento linear, o campo de deslocamentos possui variação linear e o de deformações é constante ao longo dos lados do elemento. Para os outros elementos (8 e 9 nós), o campo de deslocamento possui variação quadrática e o de deformações, variações lineares.

As funções de interpolação (ou de forma), que têm como variáveis independentes as coordenadas normalizadas  $(\xi, \eta)$  e a numeração dos nós, conforme indicado na Figura 3.1, são:

a) Elemento linear

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0), \quad i = 1,2,3,4$$

onde  $\xi_0 = \xi \xi_i$ ,  $\eta_0 = \eta \eta_i$  e  $(\xi_i, \eta_i)$  são as coordenadas naturais do nó em consideração.

b) Elemento quadrático da família Serendipity

- para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (\xi_0 + \eta_0 - 1), \quad i = 1,3,5,7$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = \xi_i^2/2 (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) + \eta_i^2/2 (1 + \eta_0) (1 - \xi^2), \quad i = 2,4,6,8$$

c) Elemento quadrático de Lagrange

- para os nós de canto:

$$N_i = 1/4 (\xi^2 + \xi_0) (\eta^2 + \eta_0), \quad i=1,3,5,7$$

- para os nós de meio de lado:

$$N_i = 1/2 \eta_i^2 (\eta^2 - \eta_0) (1 - \xi^2) + 1/2 \xi_i^2 (\xi^2 - \xi_0) (1 - \eta^2), \quad i=2,4,6,8$$

- para o nó central:

$$N_i = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), \quad i = 9$$

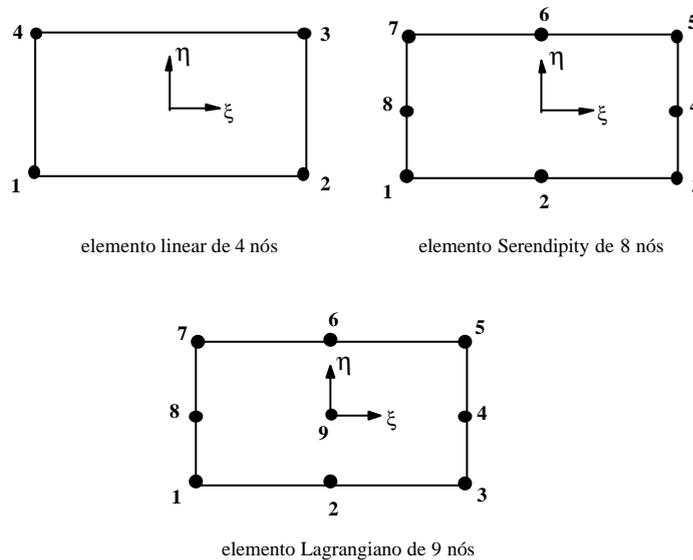


Figura 3.1 – Elementos isoparamétricos quadrangulares

Trabalhando com elementos isoparamétricos, pode-se representar as coordenadas cartesianas (x,y), de um ponto no interior deste elemento, como

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

na qual  $N_i$  é a função de forma correspondente ao nó  $i$  do elemento de coordenadas cartesianas  $(x_i, y_i)$  e  $n$  é o número de nós do elemento.

A matriz de rigidez para o concreto é dada por:

$$[K_c] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.2)$$

e pode ser calculada numericamente através da expressão

$$[K_c] = \sum_{i=1}^{ng} \sum_{j=1}^{ng} [B_{ij}]^T [D] [B_{ij}] w_i w_j e_{ij} \det J \quad (3.3)$$

onde,  $ng$  é o número de pontos de integração em cada direção do elemento;

$[B_{ij}]$  é a matriz das relações deformações-deslocamentos, calculadas no ponto de integração com coordenadas naturais  $(\xi_{i,j}, \eta_{i,j})$ ;

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \mathbf{h}-1 & 0 & 1-\mathbf{h} & 0 & 1+\mathbf{h} & 0 & -1-\mathbf{h} & 0 \\ \mathbf{x}-1 & 0 & -1-\mathbf{x} & 0 & 1+\mathbf{x} & 0 & 1-\mathbf{x} & 0 \\ 0 & \mathbf{h}-1 & 0 & 1-\mathbf{h} & 0 & 1+\mathbf{h} & 0 & -1-\mathbf{h} \\ 0 & \mathbf{x}-1 & 0 & -1-\mathbf{x} & 0 & 1+\mathbf{x} & 0 & 1-\mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde:

$$\mathbf{H} = [J]^{-1} \quad (3.5)$$

Sendo  $[J]$  a matriz Jacobiana, calculada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{h}} y_i \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

O determinante de  $[J]$  é dado por:

$$\det [J] = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} \quad (3.7)$$

$[D]$  é a matriz constitutiva elástica para estado plano de tensão;

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $\nu$ , o coeficiente de Poisson;

$w_i, w_j$  são os fatores de peso;

$e_{ij}$  é a espessura no ponto de integração;

As coordenadas naturais e fatores de peso dos pontos de integração encontram-se em Owen e Hinton (1977).

### 3.2 ELEMENTOS FINITOS PARA A ARMADURA

Para considerar a inclusão da armadura em um modelo de elementos finitos para análise de peças de concreto estrutural, pode-se utilizar três formas: o modelo distribuído, o modelo incorporado e o modelo discreto.

No modelo distribuído, considera-se o aço distribuído uniformemente no elemento de concreto, admitindo-se aderência perfeita entre o aço e o concreto. É um modelo conveniente quando a armadura está densamente distribuída, como no caso de placas e cascas.

No modelo incorporado, considera-se a armadura como uma linha de material mais rígido no interior do elemento finito de concreto. Desta forma, a armadura não necessita estar uniformemente distribuída, podendo ocorrer várias barras de aço no interior de um mesmo elemento de concreto. Admite-se, também, aderência perfeita entre o concreto e o aço.

No modelo discreto, a armadura é representada por elementos unidimensionais de treliça, que se integram à malha de elementos finitos bidimensionais utilizada na

representação do concreto. Este modelo tem a desvantagem da malha de elementos finitos de concreto limitar a disposição das barras de armadura.

Neste trabalho, optou-se pelo modelo incorporado para representar a armadura. Assim, admite-se que a armadura resista apenas a esforços axiais e que os deslocamentos de qualquer ponto da barra são iguais aos do elemento de concreto na mesma posição. Desta maneira, a barra de aço pode ser arbitrariamente colocada dentro do elemento finito de concreto, sem introduzirem-se incógnitas adicionais no problema.

Os deslocamentos ao longo das barras de aço são determinados a partir dos deslocamentos nodais dos elementos de concreto. Assim, as matrizes de rigidez das armaduras têm as mesmas dimensões das matrizes de rigidez dos elementos de concreto e são somadas para a obtenção das matrizes de rigidez totais. A expressão final da matriz de rigidez do elemento é

$$[K] = [K_c] + \sum_{i=1}^{nb} [K_s]_i \quad (3.9)$$

onde nb é o número de segmentos de barra de armadura no interior do elemento de concreto. A matriz de rigidez de cada barra de armadura é dada por

$$[K_s] = A_s E_s \int_s \{B_s\} \langle B_s \rangle ds \quad (3.10)$$

onde, S é a coordenada que descreve o eixo da barra de armadura;  $A_s$  é a área da seção transversal da barra de armadura;  $E_s$  é o módulo de elasticidade longitudinal do aço e  $\{B_s\}$  é o vetor das relações deformações-deslocamentos para a armadura.

As barras de aço são representadas por elementos unidimensionais isoparamétricos. Através destes elementos podem ser modeladas barras retas e curvas.

Neste trabalho, utilizou-se a formulação desenvolvida por Prates Jr. (1992), baseada no trabalho de Elwi & Hrudey (1989), para incorporar barras de aço ao elemento bidimensional de concreto. As barras de armadura são descritas em coordenadas globais cartesianas, independentemente da malha de elementos finitos (Figura 3.2).

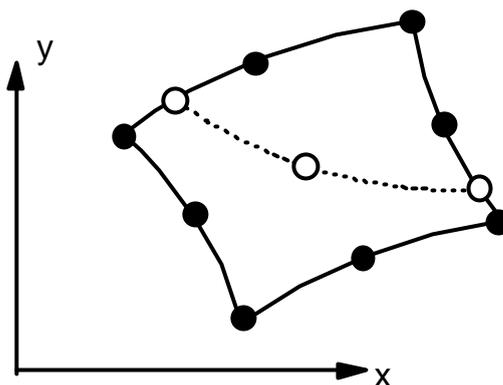


Figura 3.2 – Barra de armadura no interior do concreto

Uma importante vantagem desta formulação é que a localização e geometria da barra de armadura podem ser estabelecidas independentemente da malha global. Uma vez criada a malha de elementos de concreto, a armadura deve ser especificada por um conjunto de pontos nodais. Para garantir uma continuidade interelementar adequada é necessário colocar nós nos elementos de barra, onde a armadura atravessa o contorno do elemento de concreto. As coordenadas dos nós na barra de aço, entre os nós de definição da mesma, são obtidos por interpolação. Desta forma, nós adicionais são colocados dentro do elemento de concreto.

As barras de armadura são posicionadas por suas coordenadas globais  $(x, y)$ . Para a obtenção da matriz de rigidez total (concreto-aço) de um determinado elemento, necessita-se saber quais barras interceptam este elemento, atribuindo-lhe uma rigidez adicional.

O programa computacional calcula automaticamente os segmentos destas barras que ficam no interior do elemento de concreto. Uma vez determinados estes trechos, é realizado o cálculo da matriz de rigidez da armadura.

As funções de forma e a obtenção da matriz de rigidez para a armadura estão apresentadas no trabalho de Prates Jr. (1992).

## 4 MODELOS CONSTITUTIVOS DOS MATERIAIS

### 4.1 COMPORTAMENTO NÃO –LINEAR DOS MATERIAIS

O comportamento do concreto estrutural é extremamente complexo e apresenta uma resposta altamente não-linear, conforme ilustrado na Figura 4.1.

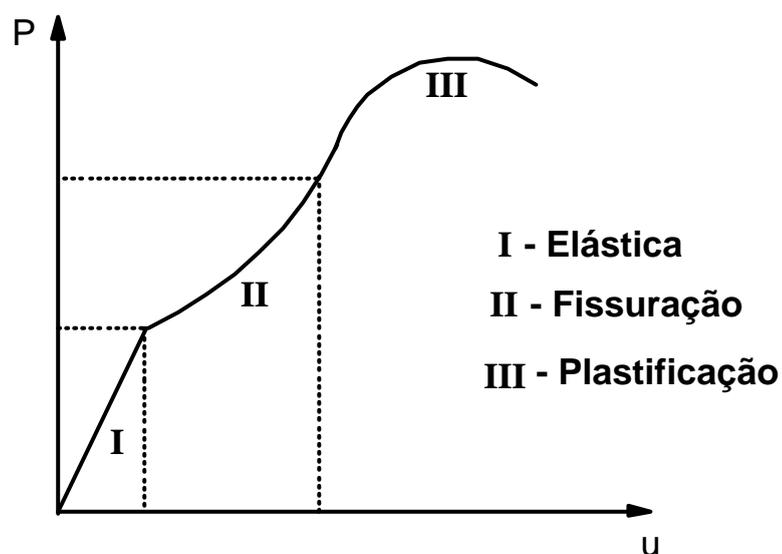


Figura 4.1 – Diagrama típico carga-deslocamento

Este gráfico carga-deslocamento apresenta as três fases típicas de comportamento pelas quais passa uma peça de concreto estrutural: uma etapa elástica-linear, com concreto não fissurado; uma etapa de formação de fissuras e uma fase plástica.

Assim, dois fatores são responsáveis por este comportamento não-linear: a fissuração do concreto e a plastificação do aço e do concreto.

Outras não linearidades, independentes do tempo, surgem nos materiais, tais como o deslizamento das barras de aço na matriz do concreto, o engrenamento dos agregados e o efeito de pino das barras de aço, no concreto fissurado. Os efeitos dependentes do tempo, como fluência e retração do concreto e relaxação do aço, também contribuem para a resposta não-linear.

É possível realizar uma análise mais racional destes fenômenos, através de métodos numéricos e principalmente, através da técnica dos elementos finitos.

## 4.2 MODELOS ELASTOPLÁSTICOS PARA O CONCRETO

Evidências experimentais, conforme Hinton e Owen (1984), indicam que a deformação não-linear do concreto é basicamente inelástica e que, portanto, o comportamento tensão-deformação pode ser separado em componentes recuperáveis e irrecuperáveis. A componente de deformação irrecuperável deve ser tratada pela teoria da plasticidade.

Neste estudo, foi empregado um modelo elastoplástico com endurecimento para descrever o comportamento do concreto comprimido. Este modelo corresponde à solução estável do modelo elasto-viscoplástico, descrito no capítulo 2. Para o concreto sob tensões de tração considera-se um comportamento elástico linear até a ruptura. Após a ruptura, admite-se uma colaboração entre fissuras, devido às tensões de aderência entre o concreto e o aço, possibilitando uma análise mais realista da estrutura.

A seguir, serão descritos os modelos constitutivos utilizados para representar o concreto.

### 4.2.1 Modelo para o Concreto Comprimido

O modelo elastoplástico será composto por um critério de ruptura, por um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento.

#### 4.2.1.1 Critério de Ruptura

Admitindo-se que o concreto não fissurado é um material de comportamento isótropo, sua superfície de ruptura pode ser expressa por

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (4.1)$$

onde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  são as tensões principais (tensões de tração positivas). Em vez de expressar a superfície de ruptura  $f$  em função das tensões principais, é conveniente usar o primeiro invariante do tensor de tensões  $I_1$ , o segundo invariante do tensor desviador de tensões  $J_2$  e o ângulo de similaridade  $\theta$ .

Desta forma, (4.1) fica

$$f(I_1, J_2, \theta) = 0 \quad (4.2)$$

Ottosen (1977) propôs o seguinte critério de ruptura para o concreto, que foi adotado pelo CEB (1993):

$$\mathbf{a} \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \mathbf{I} \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + \mathbf{b} \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.3)$$

com

$$\lambda = c_1 \cos [ 1/3 \arccos (-c_2 \sin 3\theta) ] , \text{ para } \sin 3\theta \leq 0$$

$$\text{e } \lambda = c_1 \cos [ \pi/3 - 1/3 \arccos (c_2 \sin 3\theta) ] , \text{ para } \sin 3\theta > 0 \quad (4.4)$$

sendo

$$\sin 3\theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.5)$$

onde  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto e  $\alpha, \beta, c_1$  e  $c_2$  são parâmetros.

Os invariantes podem ser calculados, a partir das tensões principais, através das expressões

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$$

$$\sigma_m = I_1 / 3 \quad (4.6)$$

Os quatro parâmetros do modelo são determinados a partir da resistência média à compressão uniaxial do concreto  $f_{cm}$  e da resistência média à tração uniaxial do concreto  $f_{tm}$ , dada por

$$f_{tm} = a \left( \frac{f_{cm} - 8}{10} \right)^{2/3}, \text{ em MPa}$$

$$0,95 \leq a \leq 1,85$$

Conforme o CEB (1993), a resistência à tração do concreto é mais variável que a sua resistência à compressão e pode ser reduzida substancialmente por efeitos ambientais. Desta forma, o valor médio proposto é por demais cauteloso e, para comparações com valores experimentais, preferiu-se adotar  $a = 1,85$ , conforme Prates Jr. (1992). Além disto, a diferença de 8 MPa entre  $f_{cm}$  e  $f_{ck}$ , proposta pelo CEB, é exagerada para concretos de baixa resistência. Achou-se mais conveniente adotar para este valor, uma fração de  $f_{cm}$  (20%). Sendo assim, a resistência média à tração adotada no modelo foi

$$f_{tm} = 1,85 \left( \frac{0,8 f_{cm}}{10} \right)^{2/3} \quad (4.7)$$

Os parâmetros do critério de Ottosen são então calculados por

$$\alpha = \frac{1}{9k^{1,4}}$$

$$\beta = \frac{1}{3,7k^{1,1}}$$

$$c_1 = \frac{1}{0,7k^{0,9}}$$

$$c_2 = 1 - 6,8 (k - 0,07)^2$$

onde

$$k = f_{tm} / f_{cm} \quad (4.8)$$

#### 4.2.1.2 Critério de Plastificação para o Concreto

Admite-se, neste trabalho, que o concreto comprimido tenha um endurecimento isotrópico e que suas superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura.

Considerando a tensão efetiva ou uniaxial equivalente  $\sigma_{ef} = f_{cm}$  e operando a equação (4.3), obtém-se a seguinte expressão para a superfície de plastificação

$$F = \left[ \lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1 + \sqrt{(\lambda \sqrt{J_2} + \beta I_1)^2 + 4\alpha J_2} \right] / 2 = \sigma_{ef} \quad (4.9)$$

O domínio elástico, para o concreto comprimido, é definido para tensões efetivas menores que 30% da tensão de ruptura. Para superfícies de carregamento superiores a superfície de plastificação inicial ( $0,3 f_c \leq \sigma_{ef} \leq f_{cm}$ ) ocorre o domínio plástico, onde o material possui um comportamento elastoplástico com endurecimento (Figura. 4.2).

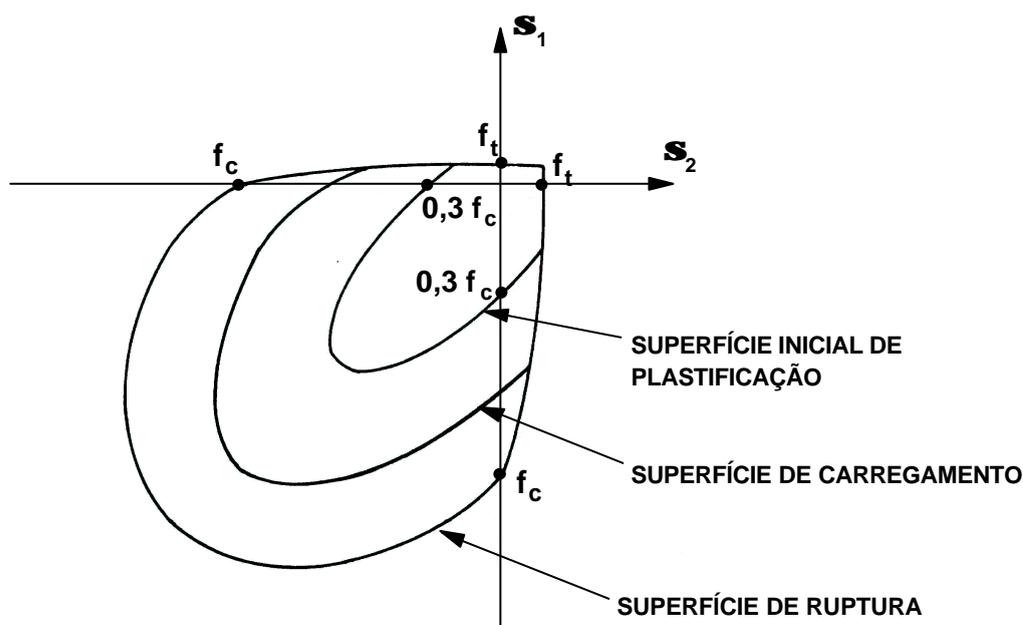


Figura 4.2 – Superfície de plastificação e ruptura

### 4.2.1.3 Regra de Endurecimento

A regra de endurecimento define o movimento das superfícies de plastificação subsequentes (superfícies de carregamento) durante a deformação plástica. É determinada pela relação entre a tensão efetiva e a deformação plástica acumulada ou deformação plástica efetiva. Através dos conceitos de tensão efetiva e de deformação plástica efetiva, é possível extrapolar os resultados de um simples ensaio uniaxial para uma situação multiaxial.

Neste trabalho, adotou-se a curva tensão-deformação, proposta pelo CEB (1993), Fig. 4.3, para representar o comportamento do concreto sob compressão uniaxial.

Considerando-se que a componente de deformação elástica é  $\sigma/E$ , obtém-se para  $0,3f_{cm} \leq \sigma \leq f_{cm}$ , a partir de (4.10), uma relação  $\sigma = \sigma(E, f_{cm}, \varepsilon_p)$ .

$$\sigma = \frac{-\frac{E}{f_{cm}}\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon}{0,0022}\right)^2}{1 + \left(\frac{E}{f_{cm}}0,0022 - 2\right)\frac{\varepsilon}{-0,0022}} f_{cm} \quad (4.10)$$

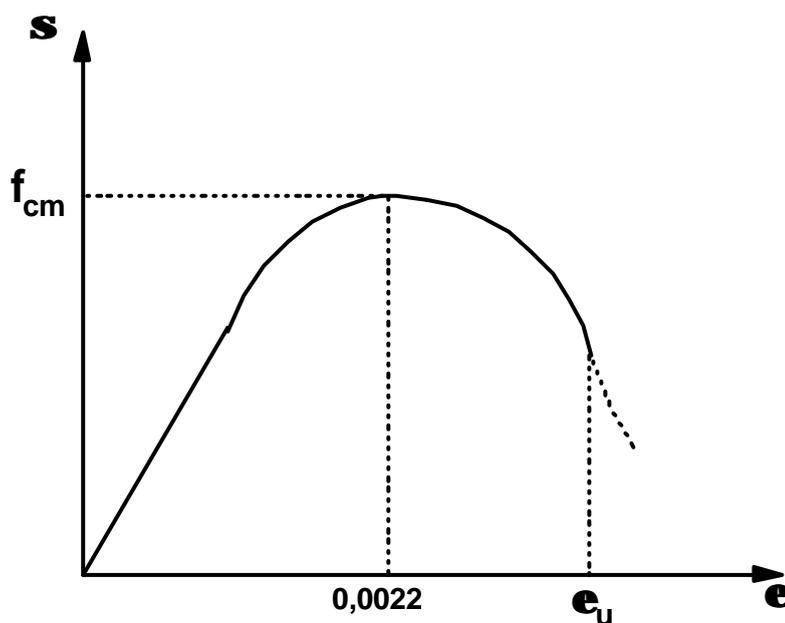


Figura 4.3 – Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido

#### 4.2.1.4 Vetor de fluxo plástico

Na relação tensão-deformação, no domínio plástico, é comum considerar o vetor taxa de deformação plástica normal à superfície de plastificação. Sendo assim, pela equação (2.5)

$$\{\dot{\mathbf{e}}_{vp}\} = \mathbf{g} \Phi(F) \frac{\partial F}{\partial \{\mathbf{s}\}} = \mathbf{g} \Phi(F) \{a\} \quad (4.11)$$

$\{a\}$  é o vetor de fluxo plástico e define sua direção perpendicular à superfície de plastificação. A função tensão efetiva  $F$  é a condição de plastificação. O vetor de fluxo plástico é dado por

$$\{a\} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \{\mathbf{s}\}} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\mathbf{s}\}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \{\mathbf{s}\}} \quad (4.12)$$

com

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \{ \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z \}$$

No caso de estado plano de tensão,  $\sigma_z$  é nula.

O vetor  $\{a\}$  pode ser transformado em

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (4.13)$$

onde

$$\{a_1\} = \frac{\partial I_1}{\partial \{\mathbf{s}\}} = \{ 1, 1, 0, 1 \} \quad (4.14)$$

$$\{a_2\} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \{\mathbf{s}\}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{ s_x, s_y, 2\mathbf{t}_{xy}, s_z \} \quad (4.15)$$

$$\{a_3\} = \frac{\partial J_3}{\partial \{\mathbf{s}\}} = \left\{ \left( s_y s_z + \frac{J_2}{3} \right), \left( s_x s_z + \frac{J_2}{3} \right), -2s_z \mathbf{t}_{xy}, \left( s_x s_y - \mathbf{t}_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right\} \quad (4.16)$$

Os valores  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  são as tensões desviadoras dadas por

$$s_x = (2 \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) / 3$$

$$s_y = (2 \sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) / 3$$

$$s_z = (2 \sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) / 3 \quad (4.17)$$

Os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são:

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} = \frac{\mathbf{b}}{2} \left[ 1 + \frac{\mathbf{l} \sqrt{J_2} + \mathbf{b} I_1}{\sqrt{(\mathbf{l} \sqrt{J_2} + \mathbf{b} I_1)^2 + 4 \mathbf{a} J_2}} \right] \quad (4.18)$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} - \frac{\text{tag } 3\mathbf{q}}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.19)$$

onde

$$\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{l} + \frac{\mathbf{l} (\mathbf{l} \sqrt{J_2} + \mathbf{b} I_1) + 4 \mathbf{a} \sqrt{J_2}}{\sqrt{(\mathbf{l} \sqrt{J_2} + \mathbf{b} I_1)^2 + 4 \mathbf{a} \sqrt{J_2}}} \right] \quad (4.20)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{l}} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.21)$$

para  $\text{sen} 3\theta \leq 0$

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\mathbf{q} \text{sen}[1/3 \text{arc cos}(-c_2 \text{sen} 3\mathbf{q})]}{\text{sen}[\text{arc cos}(-c_2 \text{sen} 3\mathbf{q})]} \quad (4.22)$$

e para  $\text{sen} 3\theta > 0$

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{c_1 c_2 \cos 3\mathbf{q} \text{sen}[\mathbf{p}/3 - 1/3 \text{arc cos}(c_2 \text{sen} 3\mathbf{q})]}{\text{sen}[\text{arc cos}(c_2 \text{sen} 3\mathbf{q})]} \quad (4.23)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \left[ 1 + \frac{\mathbf{I}\sqrt{J_2} + \mathbf{b}I_1}{\sqrt{(\mathbf{I}\sqrt{J_2} + \mathbf{b}I_1)^2 + 4\mathbf{a}J_2}} \right] \quad (4.24)$$

O coeficiente  $C_3$  é:

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\mathbf{q}} \frac{1}{(\sqrt{J_2})^3} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.25)$$

#### 4.2.2 Modelo para o Concreto Fissurado

O concreto simples possui baixa resistência à tração comparada com sua resistência à compressão. Isto resulta no aparecimento de fissuras para tensões muito baixas, induzindo a um acentuado comportamento não-linear da estrutura.

Os modelos para o concreto fissurado geralmente consideram uma perda da capacidade de carga do concreto causada pela fissura.

No contexto dos elementos finitos, duas aproximações têm sido usadas para representar este fenômeno: modelo de fissuras discretas e modelo de fissuras distribuídas, Hinton (1988).

O modelo de fissuras discretas representa as fissuras individuais como descontinuidades reais da malha de elementos finitos. Esta aproximação foi usada por Ngo e Scordelis (1967) para análise de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada. Neste estudo, as fissuras foram modeladas por separação dos pontos nodais, inicialmente ocupando a mesma posição no espaço. Uma restrição a este modelo é que as fissuras devem formar-se ao longo do contorno dos elementos. Desta forma, a resposta é fortemente dependente da malha. Por isso, esse modelo é apropriado apenas para problemas envolvendo somente poucas fissuras dominantes.

O modelo de fissuras distribuídas não leva em conta a descontinuidade da malha. Pelo contrário, o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades materiais são modificadas para considerar o dano devido à fissuração. O concreto, inicialmente isotrópico, torna-se ortotrópico após a fissura, com os eixos materiais principais orientados no sentido

das direções de fissuração. As propriedades materiais variam dependendo do estado de deformação e de tensão. O módulo longitudinal é reduzido na direção perpendicular ao plano da fissura e o efeito de Poisson é usualmente desprezado. O módulo de elasticidade transversal, paralelo ao plano da fissura, também é reduzido. O método de fissuras distribuídas é computacionalmente atrativo, uma vez que a topologia da malha não muda ao longo da análise e só a relação tensão-deformação deve ser atualizada quando ocorre a fissuração.

Foi adotado, neste trabalho, um modelo de fissuras distribuídas. Para estabelecer tal modelo, são necessários os seguintes itens: um critério de fissuração; uma regra para consideração da colaboração do concreto entre as fissuras; e um modelo para transferência de tensões tangenciais. Estes estão apresentados a seguir.

#### 4.2.2.1 Critério de Fissuração

A resposta do concreto sob tensões de tração é suposta ser elástica até que a superfície de ruptura seja atingida, e seu comportamento é calculado pela versão isotrópica da relação  $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ .

A avaliação da fissuração do concreto é feita através do nível de tensões dos pontos de integração de Gauss dos elementos de concreto.

A tensão principal  $\sigma_1$  de tração é determinada através dos invariantes de tensões  $I_1$ ,  $J_2$ ,  $\theta$ , conforme (4.5) e (4.6)

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \quad (4.26)$$

Para distinguir se um determinado ponto atingiu a superfície de ruptura por fissuração ou por esmagamento do concreto, adotou-se o critério proposto pelo CEB (1983)

se  $\sigma_1 \geq f_{tm} / 2$  , o ponto de integração fissurou;

se  $\sigma_1 < f_{tm} / 2$  , o ponto de integração esmagou.

Caso o ponto de integração tenha fissurado, admite-se que uma fissura tenha se formado num plano ortogonal à tensão  $\sigma_1$ . Portanto, o comportamento do concreto não é mais isotrópico e sim ortotrópico, e os eixos materiais locais coincidem com as direções principais de tensão.

#### 4.2.2.2 Colaboração do Concreto entre Fissuras

O comportamento carga-deslocamento do concreto estrutural é fortemente influenciado pela interação entre seus dois componentes: o concreto e o aço. A aderência entre esses materiais é que torna possível a transmissão de esforços atuantes entre os mesmos.

A incorporação da aderência nos cálculos através do método dos elementos finitos depende da forma de conectar os elementos de aço aos elementos de concreto. Existem duas maneiras para se modelar esta ligação. Na primeira, usam-se elementos especiais de aderência. Nestes, as propriedades da aderência são modeladas por suas relações tensões-deslizamentos. Na segunda maneira, os elementos de aço e concreto são ligados diretamente. Neste caso, admite-se completa compatibilidade de deformações entre aço e concreto, e modifica-se a lei do material (concreto ou aço), para considerarem-se os mecanismos de interação.

A escolha da forma de modelar a aderência depende do problema específico a ser analisado. O uso de elementos especiais de aderência requer grande esforço computacional. Portanto, seu emprego só se justifica nos casos em que as tensões de aderência são de particular interesse, como no estudo de zonas de ancoragem.

Neste trabalho, admitiu-se aderência perfeita entre concreto e aço e modelou-se indiretamente este efeito, pela introdução de um ramo descendente suave na relação tensão-deformação do concreto tracionado.

Este efeito pode ser incorporado num modelo computacional de duas maneiras indiretas: modificando a curva tensão-deformação do aço [Gilbert e Warner (1978)] ou admitindo que a perda da resistência à tração no concreto ocorre gradualmente depois da fissura [Scanlon (1974)]. Este último modelo foi adotado neste estudo.

Considera-se um gráfico tensão-deformação consistindo de um ramo ascendente, correspondendo a resposta elástica linear, e outro ramo descendente, pós-fissura, que leva em conta a colaboração do concreto entre fissuras, conforme Fig. 4.4.

$$\sigma = \alpha f_{tm} ( 1 - \varepsilon / \varepsilon_m ) \quad , \text{ para } \varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_m \quad (4.27)$$

com  $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$ . Adotaram-se os valores de  $\alpha = 0,6$  e  $\varepsilon_m = 0,002$ , conforme sugestão de Hinton e Owen (1984).

A redistribuição de tensões, devido à fissuração em outros pontos ou carregamentos posteriores, pode forçar algum ponto previamente fissurado a fechar parcial ou totalmente. Este comportamento é permitido neste modelo. Se a deformação atual  $\varepsilon$  é menor do que a deformação máxima  $\varepsilon_{ref}$  alcançada pelo ponto em questão, a tensão normal a fissura é calculada por

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \varepsilon \quad , \text{ para } \varepsilon < \varepsilon_{ref} \quad (4.28)$$

Este caminho de “descarga” secante é visualizado pela Figura 4.4. Caso o ponto fissure novamente, segue-se o mesmo caminho até  $\varepsilon_{ref}$  ser excedido. Depois a tensão é calculada por (4.27).

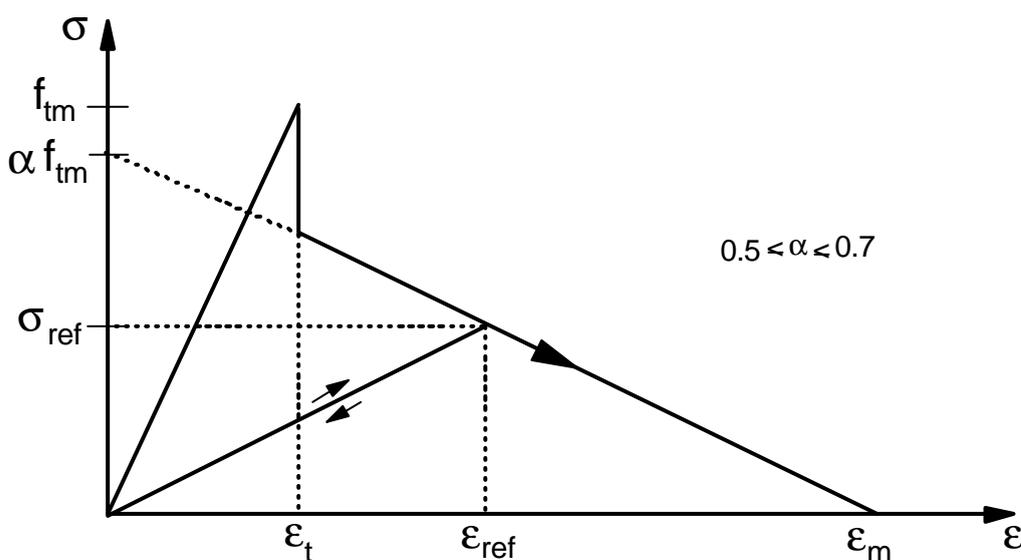


Figura 4.4 – Diagrama Tensão-deformação para o Concreto Tracionado

#### 4.2.2.3 Rigidez Transversal do Concreto Fissurado

Resultados experimentais indicam que uma parcela significativa do esforço cortante pode ser transferida através das superfícies rugosas da fissura [Hofbeck (1969)]. Em concreto simples, o principal mecanismo de transferência de esforços transversais é o engrenamento dos agregados, com as principais variáveis envolvidas sendo o tamanho do agregado e sua granulometria. Em concreto estrutural, o efeito de pino desempenha um importante papel, sendo as principais variáveis a taxa de armadura, o diâmetro da barra e o ângulo entre o aço e a fissura. Ambos mecanismos são controlados pela abertura das fissuras sendo a capacidade de transferência de corte reduzida com o aumento da abertura da fissura.

A inclusão direta destes mecanismos num modelo de fissuras distribuídas é complexa. Uma aproximação simplificada para contornar este problema consiste em adotar um valor apropriado para o módulo de elasticidade transversal do concreto  $G_C$ . Para o ponto de integração, fissurado em uma direção, Hinton e Owen (1984) recomenda que se calcule  $G$  como:

$$G_C = 0,25 G ( 1 - \varepsilon / 0,004 ) \quad (4.29)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do concreto não fissurado. Se a fissura fechar, o módulo  $G$  é adotado novamente.

### 4.3 – MODELO ELASTOPLÁSTICO PARA O AÇO

Nas peças de concreto estrutural, as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços na sua direção. Desta forma, é suficiente conhecer o seu comportamento uniaxial.

No modelo implementado, o aço é representado por um diagrama tensão-deformação bilinear.

O aço é considerado um material elastoplástico com endurecimento. Admite-se que o aço possui mesmo comportamento em compressão e tração.

O módulo de elasticidade longitudinal adotado para o aço  $E_s$  é 210000 MPa. Para as barras de aço da classe A, adotou-se um diagrama elastoplástico perfeito, onde o material

possui um comportamento elástico linear até atingir a tensão de escoamento  $f_y$  (Figura 4.5). Após este limite, o aço deforma-se plasticamente até atingir a ruptura, com tensão  $\sigma_s = f_y$  e endurecimento nulo ( $H' = 0$ ).

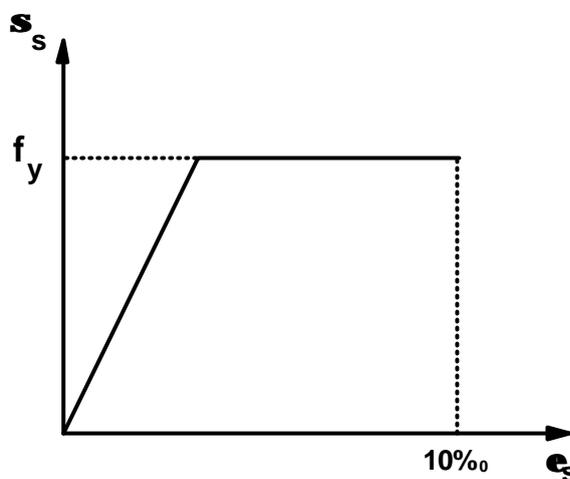


Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação para os aços laminados a quente

O aço encruado a frio possui comportamento elastoplástico com endurecimento. Por simplificação, conforme Prates Jr. (1992), adotou-se um diagrama tensão-deformação com endurecimento linear, conforme Figura 4.6. Desta forma, após atingir o limite de escoamento, as deformações no aço tem endurecimento definido por

$$H'_s = \frac{d\mathbf{s}_s}{d\mathbf{e}_p} = \frac{\Delta\mathbf{s}_s}{\Delta\mathbf{e}_p} = \frac{0,15 f_y}{\left(10\%o - \frac{0,85 f_y}{E_s}\right) \frac{0,15 f_y}{E_s}}$$

$$H'_s = \frac{0,15 f_y}{10\%o - \frac{f_y}{E_s}} \quad (4.30)$$

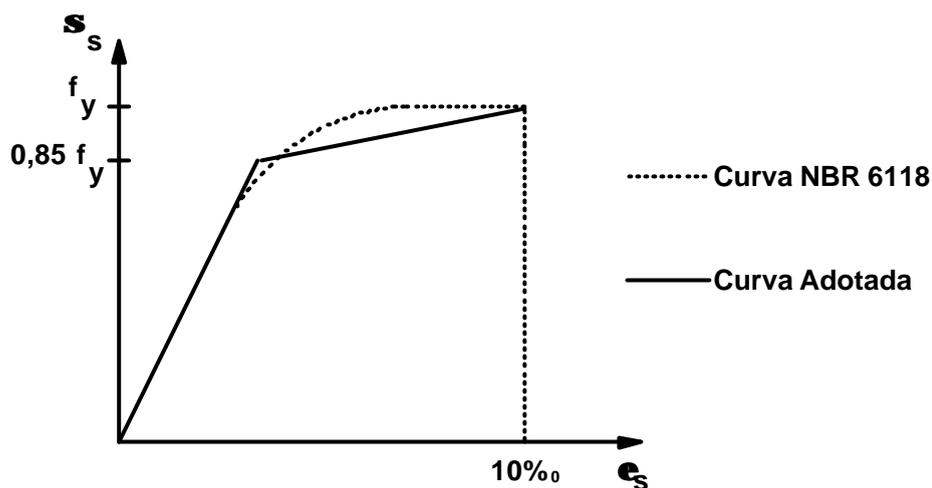


Figura 4.6 – Diagrama tensão-deformação para o aço encruado a frio

#### 4.4 MODELOS VISCOELÁSTICOS PARA O CONCRETO E O AÇO

O concreto submetido a cargas de longa duração, sofre uma deformação instantânea, seguida por uma deformação devida a fluência, que se desenvolve ao longo do tempo. Desta forma, mesmo sob tensões constantes, as deformações no concreto aumentam no decorrer do tempo, conforme ilustrado na Figura 4.7.

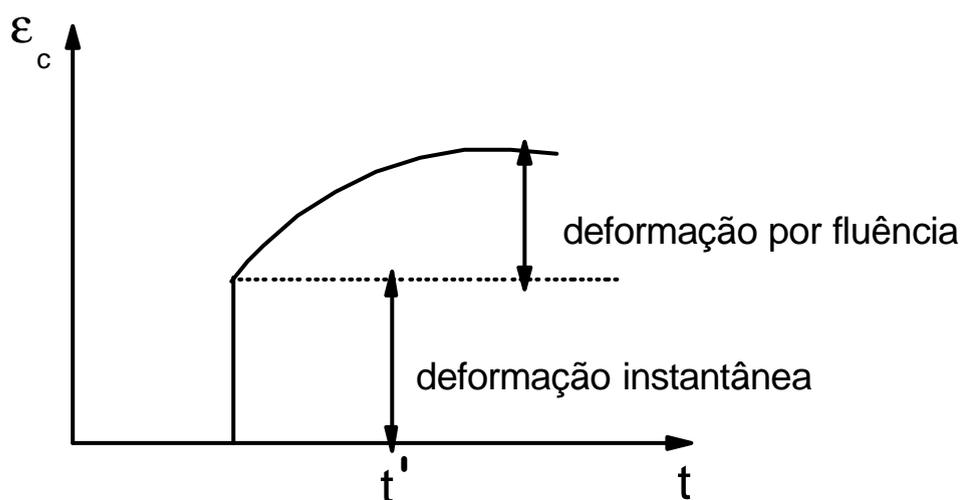


Figura 4.7 – Evolução da deformação por fluência para tensão constante aplicada em  $t'$ .

Este fenômeno manifesta-se mais acentuadamente nas idades imediatamente posteriores ao aparecimento das tensões, estando ligado a fenômenos de diversos tipos, relacionados com a circulação de água na massa do concreto e sua dissipação para o exterior.

Uma peça de concreto, colocada ao ar livre, sofre durante o processo de endurecimento uma diminuição de volume, denominada retração. Esta deformação ao longo do tempo é independente da tensão aplicada e está ligada a fenômenos semelhantes aos da fluência, relacionados com a água livre ou parcialmente adsorvida dentro da massa de concreto.

No estudo de estruturas de concreto, a consideração das deformações por fluência e retração é importante, pois seus valores são da mesma ordem de grandeza das deformações imediatas, para níveis usuais de tensão.

A fluência e a retração dependem, entre outros fatores, da umidade e da temperatura ambiente, das dimensões da peça, da composição do concreto e da velocidade de endurecimento do cimento.

O modelo reológico, adotado para representar o comportamento dependente do tempo do concreto, foi uma cadeia de elementos Maxwell. Esta cadeia é constituída por uma associação em paralelo de elementos formados por uma mola em série com um amortecedor viscoso, conforme ilustra a Figura 4.8.

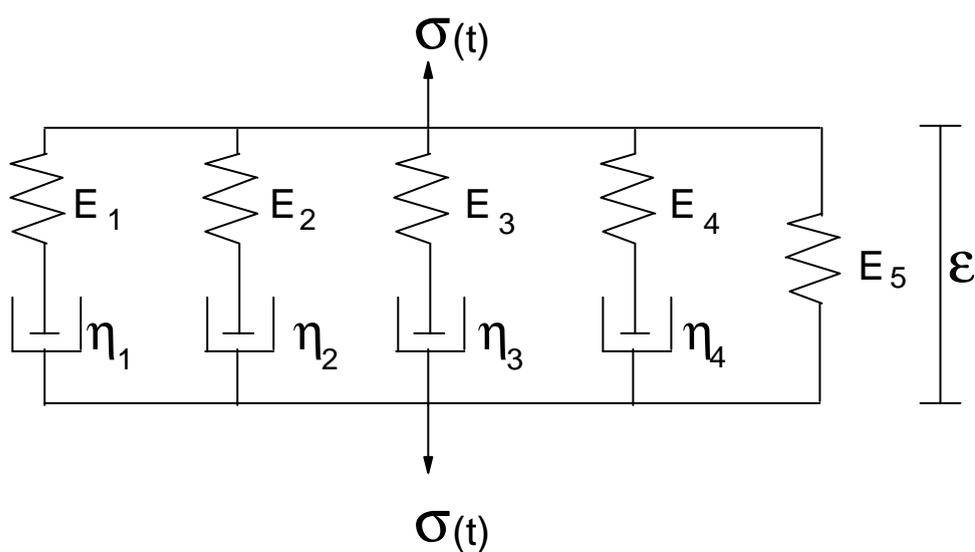


Figura 4.8 – Modelo de cadeias de Maxwell

Este modelo pode ser obtido por um modelo elasto-viscoplástico, admitindo-se que os elementos de atrito possuem tensão de plastificação nula.

Segundo o CEB (1993), para tensões de serviço menores que  $0,4 f_m$  (resistência à compressão média do concreto), as deformações por fluência são proporcionais a tensão. Neste estudo, adotou-se este comportamento linear.

Para determinar os valores dos parâmetros desse modelo reológico, o programa computacional utiliza o procedimento desenvolvido por Bazant e Wu (1974). A formulação matemática do modelo de Maxwell e a determinação dos parâmetros da função de fluência e retração, pelo CEB (1993), estão apresentados no trabalho de Prates Jr. (1992).

Para estruturas de concreto armado, considera-se, nesta etapa, que o aço tem um comportamento elástico.

## **5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO**

### **5.1 ALGORITMOS DE SOLUÇÃO**

O programa original, desenvolvido por Dantas (2000), empregou a linguagem Fortran. Na nova versão, apresentada neste trabalho, a linguagem, utilizada na implementação do programa, foi a linguagem Matlab.

O programa computacional REFSTRUC, desenvolvido nesta dissertação, utiliza dois procedimentos distintos, baseados no algoritmo elasto-viscoplástico.

Numa primeira etapa, faz-se a determinação da resposta da estrutura ao longo do tempo. Calcula-se o estado de deformação da estrutura, decorrido um período de tempo da aplicação do carregamento anterior. Há um processo de incremento do tempo real (em dias), onde ocorrem os efeitos do tempo na estrutura (fluência e retração do concreto e relaxação do aço). Esta resposta representa um comportamento viscoelástico dos materiais, correspondente à etapa 1 no programa.

Na segunda fase, busca-se determinar a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo. Este carregamento pode consistir de forças concentradas, lineares ou de volume e/ou de deslocamentos impostos. Isto é feito, supondo-se a estrutura elasto-viscoplástica e procurando-se o seu estado de deformação quando o tempo (fictício) tende ao infinito. Este estado estável corresponde à resposta de uma estrutura de comportamento elastoplástico, submetida a carga instantânea. Esta fase corresponde à etapa 2 do programa.

O programa permite ainda a aplicação de diversos carregamentos, em datas distintas, entre as quais ocorrem os fenômenos decorrentes do tempo. Desta forma, as etapas 1 e 2 são

executadas de forma sucessiva, à medida em que são aplicadas novas cargas, nas datas especificadas.

Na Figura 5.1 é apresentado um fluxograma geral, onde ilustram-se as diversas fases do programa.

Da maneira com está estruturado, o programa implementado neste trabalho possibilita a análise de situações de reforço e recuperação de vigas de concreto armado, permitindo que se retire ou acrescente elementos da estrutura, em qualquer etapa de carregamento. O mesmo permite também a mudança de vinculação do elemento estrutural durante a análise do problema e dá possibilidade para que se possa impor incrementos de deslocamentos à estrutura, em qualquer fase de carregamento. Pode-se ainda retirar elementos de concreto junto com a armadura ou retirar apenas o concreto, mantendo-se a armadura na estrutura. É permitido também utilizar mais de um tipo de concreto, podendo-se alterá-lo no decorrer do carregamento, simulando a recuperação da estrutura.

## 5.2 DETALHAMENTO DAS SUBROTINAS

Cada subrotina que compõe o fluxograma tem uma determinada finalidade dentro do programa. O fluxograma da Figura 5.1 é iniciado por VISCO que é o programa principal. A subrotina DIMEN atribui os valores das variáveis associadas com o processo de dimensionamento dinâmico. Em seguida, a subrotina DADOS lê os dados de entrada definindo geometria, condições de contorno e propriedades dos materiais. A ZERO anula todas as matrizes cumulativas.

Na seqüência, a subrotina NOVA considera a hipótese de reforço e recuperação. O programa permite a retirada ou o acréscimo de elementos de concreto e armadura, ou apenas de elemento de concreto, permanecendo a armadura na estrutura. Para ambos os casos, pode-se alterar o tipo de concreto.

Para se retirar ou acrescentar elementos de concreto juntamente com a armadura deve-se, inicialmente, entrar com os dados do programa, utilizando-se o número máximo de elementos de concreto que a estrutura terá em toda história de carregamento, NELEM. Consequentemente, a variável NPOIN, que é o número de nós da estrutura, deverá também ter seu valor máximo de todo o carregamento. Quando algum elemento de concreto e armadura for retirado, será considerado que o mesmo está desativado. Este elemento poderá ser ativado

novamente, se o mesmo voltar à estrutura em outro carregamento. Ao ativar esse elemento, é preciso indicar qual o tipo de concreto deste elemento, uma vez que é permitido, pelo programa, utilizar mais de um tipo de concreto.

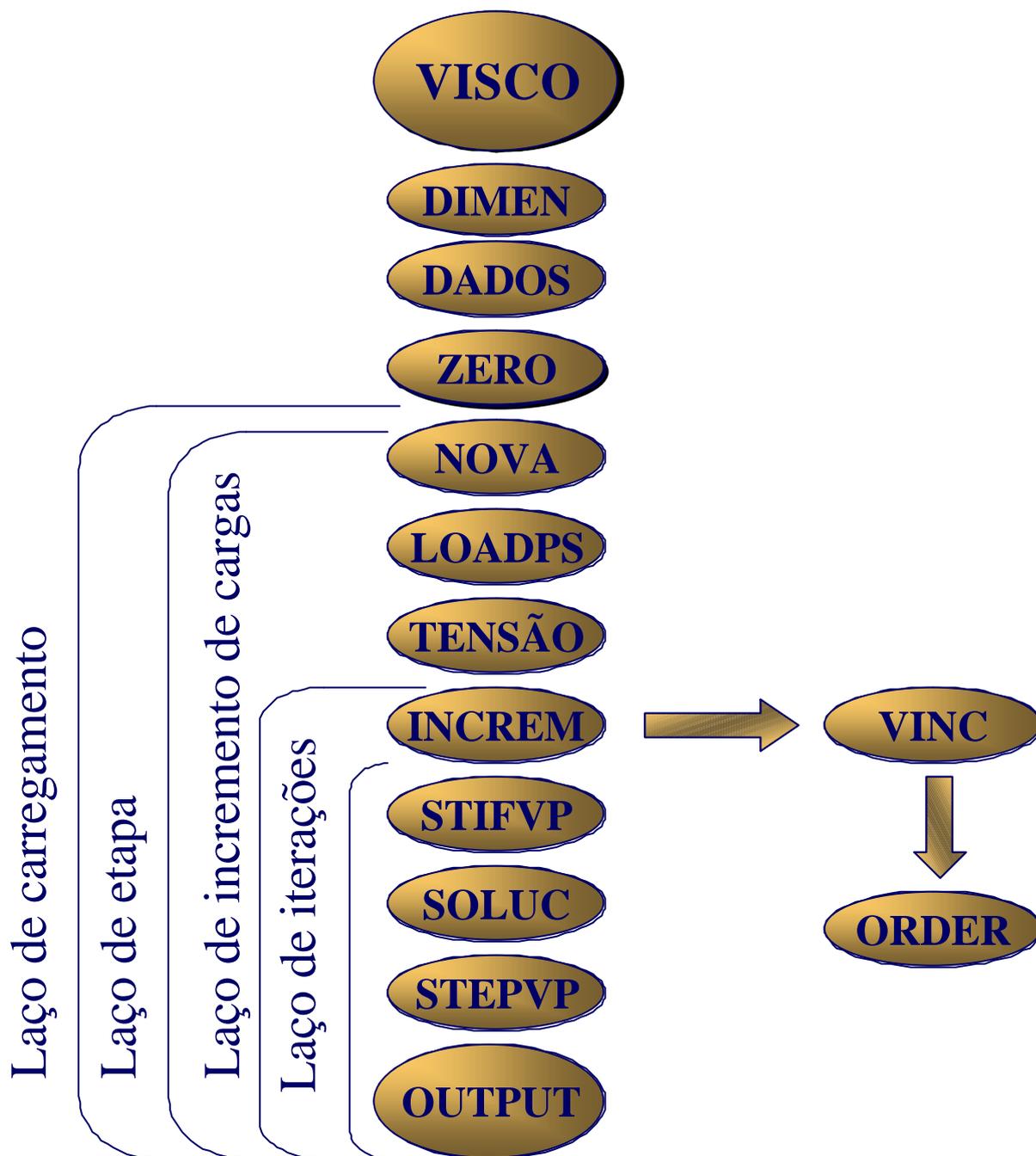


Figura 5.1 – Fluxograma geral do programa

Para cada tipo de concreto, deve ser informada a resistência à compressão e em que data deverá começar a ser considerado o efeito da retração, pois cada tipo de concreto pode ser incluído na estrutura em datas diferentes. Todas as variáveis, vetores e matrizes, cujos valores são calculados a partir da resistência média à compressão e da data de início da retração, passam a armazenar seus valores em vetores e matrizes de duas e três dimensões, respectivamente.

Havendo acréscimo e/ou retirada de elementos (concreto e armadura), deve-se informar ao programa quantos elementos serão acrescentados e quantos serão retirados, em cada carregamento. O REFSTRUC armazena essas informações nos vetores IATIV e INATIV, respectivamente.

Desta forma, deve-se informar ao programa quais elementos estão sendo ativados e/ou desativados, no carregamento corrente. Estas informações são armazenadas no vetor LATIV, sendo

- LATIV: vetor de dimensão NELEM, que indica se o elemento de concreto e armadura está ativado ou não no carregamento corrente. Se for igual a zero é porque, naquele carregamento, o elemento não existe. Se for um, é porque o elemento existe.

Ao se retirar algum elemento, alguns nós pertencentes a este poderão permanecer na estrutura. O programa determina, automaticamente, quais são estes nós e armazena esta informação no vetor NOATIV, onde

- NOATIV: vetor que possui o número de linhas igual ao valor de NPOIN. Este vetor indica quais nós estão ativados e quais estão desativados, no carregamento corrente.

Os vetores e variáveis descritos anteriormente são lidos inicialmente na subrotina DADOS.

Em cada carregamento, os vetores LATIV E NOATIV e a matriz LNODS são atualizados, sendo

- LNODS: matriz que armazena as conectividades dos nós, para cada elemento. Possui tantas linhas quantos forem os elementos da estrutura. As colunas desta matriz armazenam tantas posições quanto for o número de nós por elemento.

Havendo nós desativados, devido à retirada de elementos, o programa anula os valores dos deslocamentos, horizontal e vertical, desses nós. Esses deslocamentos são armazenados no vetor TDISP.

O programa armazena o carregamento total da estrutura na matriz TLOAD. Cada linha dessa matriz armazena as cargas nodais totais de cada elemento. Os graus de liberdade dos nós do elemento ocupam as colunas desta matriz. Havendo nós comuns a vários elementos, o programa armazena o carregamento deste nó no elemento de numeração mais baixa. Se este elemento for desativado, o programa, automaticamente, armazena este carregamento no próximo elemento que contenha este nó. O carregamento, atuante nos nós que são desativados junto com o elemento, tem seu valor anulado. O Exemplo 5.1, esclarecerá esta situação.

#### Exemplo 5.1

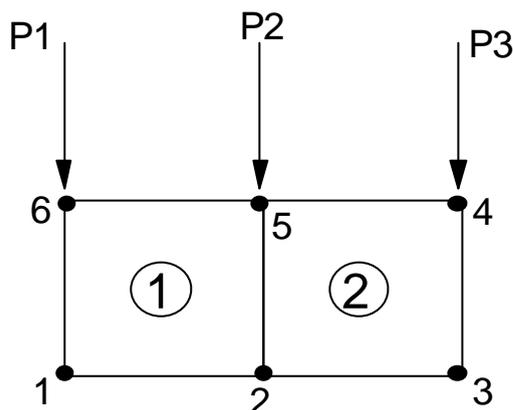


Figura 5.2 – Elementos finitos com carregamento nodal

Antes do elemento 1 ser desativado, a matriz TLOAD apresentava-se da seguinte forma:

$$\text{TLOAD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P2 & 0 & P1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Após o elemento 1 ser desativado, a matriz TLOAD é modificada, pelo programa, e fica da seguinte maneira:

$$\text{TLOAD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P3 & 0 & P2 \end{bmatrix}$$

A subrotina STIFVP, monta a matriz de rigidez de cada elemento e armazena os valores na matriz ESTIF. Para cada elemento, o programa grava esta matriz em arquivo seqüencial. Desta maneira, o programa não grava a matriz de rigidez do elemento desativado.

Após calculados todos os deslocamentos nodais da estrutura, o programa entra na subrotina STEPVP e anula as linhas das matrizes TLDIS e ELDIS, referentes aos elementos desativados, onde

- TLDIS: matriz que contém os deslocamentos totais do elemento;
- ELDIS: matriz que contém os incrementos de deslocamento do elemento.

A função da subrotina STEPVP é calcular as forças residuais para o próximo passo de carga.

Para a armadura, são anulados os valores das tensões totais, das deformações viscoplásticas e das velocidades de deformações viscoplásticas referentes aos pontos de integração dos segmentos das barras de armadura, pertencentes a um elemento desativado.

Nos pontos de integração dos elementos de concreto desativados, são anulados os valores da taxa de deformação viscoplástica, da deformação viscoplástica total e das tensões totais.

Havendo, no concreto, pontos de integração onde houve esmagamento ou fissuração, o programa armazena esta informação no vetor ISTAT. Quando um ponto de integração de um elemento de concreto não está plastificado, fissurado ou esmagado, o valor do vetor ISTAT, referente a este ponto, é igual a zero. Quando um elemento é retirado, este pode estar já plastificado, fissurado ou esmagado, logo o valor de ISTAT, neste ponto, é diferente de zero. Porém, quando este elemento voltar à estrutura, não deverá apresentar estas situações. Assim, ao se retirar um elemento, os valores do vetor ISTAT, referentes a todos os pontos de integração, pertencentes a este elemento, são anulados.

Para a situação de recuperação, pode-se retirar apenas o concreto, mantendo-se a armadura na estrutura.

Deve-se entrar com os dados do programa, utilizando-se o número máximo de elementos que a estrutura terá em toda a história do carregamento.

Na subrotina DADOS, é lida a variável INCON0, que indica o número de elementos de concreto desativados na etapa 1 do carregamento 1. Se na etapa 1 do primeiro carregamento, todos os elementos de concreto estiverem ativados, INCON0 será nulo.

No programa principal, VISCO, são lidos os vetores ICOAT e ICODES que armazenam, para cada carregamento, o número de elementos de concreto acrescentados e retirados, respectivamente.

Para o carregamento  $j$ , são lidas as  $j$ -ésimas linhas dos vetores ICOAT e ICODES. Se o  $i$ -ésimo elemento de concreto é retirado, a  $i$ -ésima linha do vetor LATIV será igual a dois. Na subrotina STEPVP, que calcula as forças residuais para o próximo passo de tempo, é verificado, para cada elemento, o valor do vetor LATIV. Se este valor for igual a dois, significa que este elemento possui apenas armadura e não mais concreto. Para simular este comportamento, correspondente à zona de armadura exposta, são anuladas, na subrotina STEPVP, as tensões no concreto, neste elemento finito.

É permitido recolocar os elementos de concreto que foram retirados. Assim, o vetor LATIV terá valores unitários para cada elemento. Portanto, as tensões no concreto não serão mais anuladas neste elemento finito. Neste caso, ao incluir novamente o elemento de concreto na estrutura, deve-se também indicar qual o tipo de concreto deste elemento.

Na seqüência do fluxograma, a subrotina LOADPS calcula as forças nodais equivalentes para o carregamento de superfície e de volume. A subrotina TENSÃO, transforma tensões da etapa viscoelástica para etapa elastoplástica e vice-versa. A INCREM é responsável por incrementar a aplicação de carregamento ou de deslocamento. Para possibilitar a mudança de vinculação do elemento estrutural e a imposição de incrementos de deslocamentos à estrutura, a partir da INCREM é chamada a subrotina VINC, que realiza a mudança de vinculação e a imposição de deslocamento. Através da VINC é chamada a ORDER, que coloca os vetores e matrizes em ordem crescente.

No programa principal VISCO, é lido, como dado de entrada, um vetor chamado NVINC. Este apresenta um número de linhas igual ao número de carregamentos da estrutura. Assim:

$$\text{NVINC} = \begin{Bmatrix} \text{NVINC}(1) \\ \text{NVINC}(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{NVINC}(n) \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde NVINC(1), NVINC(2), ..., NVINC(n) correspondem ao número de nós que mudarão de vinculação ou que terão deslocamentos impostos nos n carregamentos.

Para o i-ésimo carregamento, é lida a i-ésima posição do vetor NVINC. Se, neste carregamento, não houver nenhum deslocamento prescrito, nem mudança de vinculação em nenhum nó da estrutura, o valor de NVINC(i) deverá ser nulo. Caso haja mudança de vinculação ou deslocamento imposto em qualquer nó, o valor de NVINC(i) deverá ser igual ao número de nós cujos vínculos serão modificados mais o número de nós que estejam recebendo deslocamentos prescritos. Sejam quantas forem as mudanças de vinculações e/ou deslocamentos prescritos em um determinado nó, este nó só contribuirá uma vez, no valor do NVINC(i).

Na etapa 2, que considera um comportamento elastoplástico para a estrutura, em cada incremento de carregamento, é chamada a subrotina INCREM. O escalar NVFIXC, para o i-ésimo carregamento, é o valor encontrado na i-ésima linha do vetor NVINC, assim,

$$\text{NVFIXC} = \text{NVINC}(i) \quad (5.2)$$

Se o programa estiver no primeiro incremento de carga e NVFIXC for diferente de zero, então é chamada a subrotina VINC.

Esta subrotina recebe, como dados de entrada, os novos nós cujas vinculações serão modificadas, com ou sem deslocamento prescrito. A subrotina recalcula as matrizes TREAC e PRESC, os vetores NOFIX, IFFIX, FIXED e o escalar NVFIX, que deverão ter seus valores modificados devido a mudança de vinculação. Desta forma, têm-se

- NVFIX: número de nós vinculados para cada carregamento;
- MVFIX: número máximo de nós vinculados, admitido pelo programa;
- NOFIX: vetor de dimensão máxima MVFIX, que contém, em ordem crescente, os nós que estão vinculados;

- MTOTV: número máximo de graus de liberdade da estrutura;
- IFFIX: vetor de dimensão máxima MTOTV, que indica se o nó é vinculado ou não. Este vetor armazena, em ordem crescente para cada nó, duas posições referentes às direções x e y, podendo o nó, em cada direção estar vinculado,  $IFFIX(i)=1$ , ou não,  $IFFIX(i)=0$ ;
- FIXED: vetor que armazena os valores dos deslocamentos prescritos dos nós vinculados, nas direções x e y;
- TREAC: matriz de dimensão máxima  $MVFIX \times 2$ , que contém as reações de apoio para cada carregamento. A primeira coluna armazena a reação na direção x e a segunda, na direção y. As diversas linhas desta matriz armazenam as reações, em ordem crescente, dos nós vinculados;
- PRESC: matriz de dimensão máxima  $MVFIX \times 2$ , que contém os incrementos de deslocamentos impostos à estrutura, para cada carregamento. A primeira coluna corresponde ao deslocamento na direção x e a segunda, na direção y. As linhas desta matriz armazenam os incrementos de deslocamentos dos nós vinculados, em ordem crescente, que sofrem deslocamentos prescritos.

O escalar NVFIX e os vetores IFFIX e NOFIX são dados de entrada, cujos valores, para a etapa 1 (etapa viscoelástica) do primeiro carregamento, são lidos no início do programa, na subrotina DADOS. Se não houver alteração de vinculação em nenhum nó, nem imposição de deslocamento à estrutura na etapa 2 (etapa elastoplástica) do primeiro carregamento, esses valores continuarão inalterados e o primeiro elemento do vetor NVINC deverá ser nulo. Caso haja deslocamento imposto e/ou mudança de vinculação já na etapa 2 do primeiro carregamento, o valor de NVINC(1), deverá ser fornecido. Os vetores IFFIX e NOFIX e a matriz PRESC deverão ter seus valores atualizados, na subrotina VINC. Só deverão ser dados os nós que mudarão de vinculação ou terão deslocamentos impostos. Os que permanecerem inalterados, não precisam ser fornecidos novamente como dados de entrada. O mesmo deverá ser feito, para qualquer carregamento, durante a análise, sempre na etapa elastoplástica.

Havendo mudança de vinculação em algum nó, pode-se ter 12 situações, que são todas consideradas na subrotina VINC:

1. Se determinado nó é livre nas duas direções, no próximo carregamento ele pode ser:

1.1 Restringido apenas na direção x;

1.2 Restringido apenas na direção y;

1.3 Restringido nas direções x e y.

2. Se determinado nó é livre na direção x e restringido na direção y, no próximo carregamento ele pode ser:

2.1 Restringido também na direção x;

2.2 Restringido apenas na direção x;

2.3 Livre nas direções x e y.

3. Se determinado nó é livre na direção y e restringido na direção x, no próximo carregamento ele pode ser:

3.1 Restringido também na direção y;

3.2 Restringido apenas na direção y;

3.3 Livre nas direções x e y.

4. Se determinado nó é restringido nas duas direções, no próximo carregamento ele pode ser:

4.1 Restringido apenas na direção x;

4.2 Restringido apenas na direção y;

4.3 Livre nas direções x e y.

De acordo com os valores dados ao vetor IFFIX, para um nó n que esteja mudando de vinculação, são comparados os valores do vetor IFFIX, do carregamento anterior, referentes a este mesmo nó n. Assim, determina-se em qual das doze situações encontra-se este nó. Se houver deslocamentos impostos a este nó, já são dados seus valores nas direções x e y e armazenados na matriz PRESC.

O programa atualiza o vetor IFFIX e a matriz PRESC, referente a posição do nó n. Na subrotina INCREM, os valores dos deslocamento prescritos armazenados na matriz PRESC são transferidos para o vetor FIXED.

No caso das três primeiras situações, é acrescentado o valor um, ao valor total de nós vinculados NVFIX e este nó n passa a ocupar a posição igual a NVFIX (já atualizada) no vetor NOFIX. O Exemplo 5.2 ilustrará a situação 1.2:

Exemplo 5.2: Suponha-se que uma estrutura, num determinado carregamento i, apresenta a seguinte situação de vinculação:

Carregamento i:

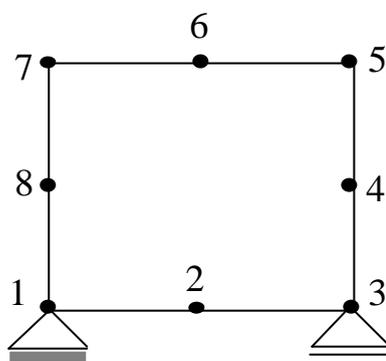


Figura 5.3 – Elemento finito com vinculação nos nós 1 e 3

$$NVFIX = 2 \quad NOFIX = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

IFFIX(1)=1; IFFIX(2)=1    nó 1 restringido nas direções x e y;

IFFIX(3)=0; IFFIX(4)=0    nó 2 livre nas direções x e y;

IFFIX(5)=0; IFFIX(6)=1    nó 3 restringido apenas na direção y;

Os demais valores do vetor IFFIX são nulos, pois os nós de 4 a 8 são todos livres.

A estrutura, no carregamento i+1, será vinculada, na direção y, no nó 2. Logo, NVFIXC=1, então o escalar NVFIX e os vetores NOFIX e IFFIX serão iguais a:

Carregamento  $i+1$ :

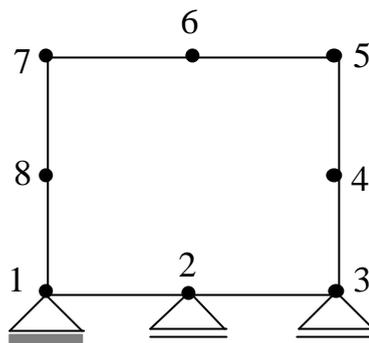


Figura 5.4 – Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3

$$\text{NVFIX} = 3; \quad \text{NOFIX} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix};$$

IFFIX(1)=1; IFFIX(2)=1      nó 1 restringido nas direções x e y;

IFFIX(3)=0; IFFIX(4)=1      nó 2 restringido apenas na direção y;

IFFIX(5)=0; IFFIX(6)=1      nó 3 restringido apenas na direção y;

Os demais valores do vetor IFFIX continuam nulos.

Nas situações 2.1 e 3.1 é feita apenas alteração no vetor IFFIX, já que não há variação no número de nós vinculados, sendo apenas alterado a condição de vinculação dos nós.

Para a situação 2.2, o valor de NVFIX e o vetor NOFIX não se alteram. Como havia restrição na direção y e esta restrição não existirá mais, deverá ser aplicado ao nó n uma força externa de mesmo valor da reação que atuava neste nó, na direção y, porém de sentido contrário. O valor da reação de apoio na direção y, armazenado na matriz TREAC, deverá ser anulado. O Exemplo 5.3 esclarecerá a situação 2.2.

Exemplo 5.3: Suponha-se que a estrutura, no carregamento anterior (carregamento i), possua a situação de vinculação conforme Figura 5.5:

Carregamento i:

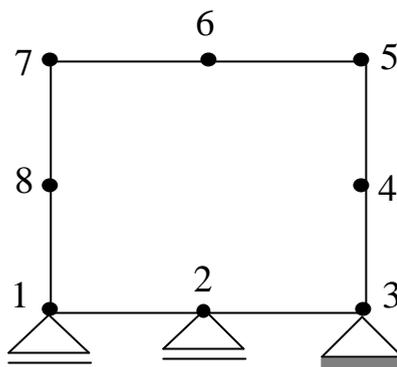


Figura 5.5 – Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3

$$\text{NVFIX} = 3; \quad \text{NOFIX} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

IFFIX(1)=0; IFFIX(2)=1      nó 1 restringido apenas na direção y;

IFFIX(3)=0; IFFIX(4)=1      nó 2 restringido apenas na direção y;

IFFIX(5)=1; IFFIX(6)=1      nó 3 restringido nas direções x e y;

Os demais valores do vetor IFFIX são nulos.

A estrutura, no carregamento  $i+1$ , apresenta vinculação no nó 1 apenas na direção x. A matriz TREAC será anulada na posição (1,2). A reação vertical, devida ao apoio que existia no nó1, será aplicada com o sentido contrário, como carregamento externo, neste nó. O valor de NVFIXC deverá ser igual a 1 e o escalar NVFIX e os vetores NOFIX e IFFIX serão iguais a:

Carregamento  $i+1$ :

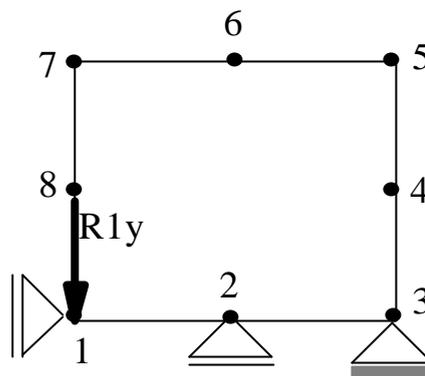


Figura 5.6 – Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3 e carregamento nodal no nó 1

$$\text{NVFIX} = 3; \quad \text{NOFIX} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

$\text{IFFIX}(1)=1; \text{IFFIX}(2)=0$     nó 1 restringido apenas na direção x;

$\text{IFFIX}(3)=0; \text{IFFIX}(4)=1$     nó 2 restringido apenas na direção y;

$\text{IFFIX}(5)=1; \text{IFFIX}(6)=1$     nó 3 restringido nas direções x e y;

Os demais valores do vetor  $\text{IFFIX}$  continuam nulos.

$\text{TREAC}(1,2) = 0$ ;    reação de apoio na direção y do primeiro nó vinculado anulada.

O mesmo procedimento deverá ser feito para a situação 3.2, porém trocando-se as direções das reações.

A situação 2.3 segue o mesmo procedimento da situação 2.2, porém as linhas da matriz  $\text{TREAC}$  e do vetor  $\text{NOFIX}$ , referidas ao nó  $n$ , deverão ser substituídas pelas linhas subsequentes a elas e assim por diante. Desta forma, esta linha não ocupa mais espaço na matriz  $\text{TREAC}$  e no vetor  $\text{NOFIX}$ , uma vez que o nó  $n$ , não está mais vinculado em nenhuma direção. Consequentemente, o número de nós vinculados,  $\text{NVFIX}$ , deverá ser diminuído de uma unidade. O Exemplo 5.4 esclarecerá a situação 2.3:

Exemplo 5.4: Suponha-se que a estrutura, no carregamento anterior (carregamento  $i$ ), possua a situação de vinculação (Figura 5.7):

Carregamento i:

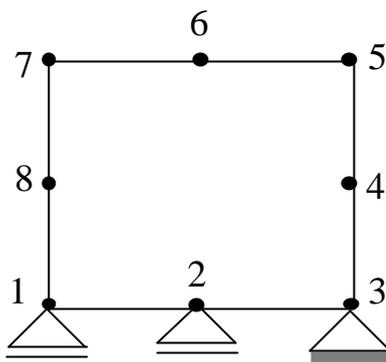


Figura 5.7 – Elemento finito com vinculação nos nós 1,2 e 3

$$\text{NVFIX} = 3; \quad \text{NOFIX} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

IFFIX(1)=0; IFFIX(2)=1      nó 1 restringido apenas na direção y;

IFFIX(3)=0; IFFIX(4)=1      nó 2 restringido apenas na direção y;

IFFIX(5)=1; IFFIX(6)=1      nó 3 restringido nas direções x e y;

Os demais valores do vetor IFFIX são nulos.

A estrutura, no carregamento  $i+1$ , não apresenta mais vinculação no nó 2. Logo, a reação vertical, devida ao apoio que existia no nó 2, será aplicada com o sentido contrário, como carregamento externo, neste nó, (Figura 5.8). O valor de NVFIXC deverá ser igual a 1 e o escalar NVFIX e os vetores NOFIX e IFFIX serão iguais a:

Carregamento  $i+1$ :

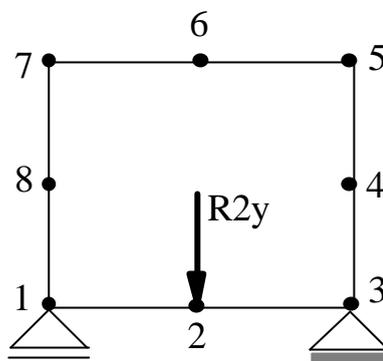


Figura 5.8 – Elemento finito com vinculação nos nós 1 e 3 e carregamento nodal no nó 2

$$\text{NVFIX}=2; \quad \text{NOFIX} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix};$$

$\text{IFFIX}(1)=0; \text{IFFIX}(2)=1$  nó 1 restringido apenas na direção y;

$\text{IFFIX}(3)=0; \text{IFFIX}(4)=0$  nó 2 livre nas duas direções;

$\text{IFFIX}(5)=1; \text{IFFIX}(6)=1$  nó 3 restringido nas direções x e y;

Os demais valores do vetor IFFIX são nulos.

O mesmo ocorrerá nas situações 3.3 e 4.3. Na situação 3.3, o nó n está deixando de ser vinculado na direção x e na 4.3, o nó n está deixando de ser vinculado nas duas direções.

As situações 4.1 e 4.2 seguem o mesmo procedimento das situações 2.2 e 3.2, respectivamente.

Em algumas situações, pode ocorrer que o vetor NOFIX e a matriz TREAC, não estejam armazenando seus valores, na ordem crescente de nós, após serem modificadas na subrotina VINC, conforme Exemplo 5.2. É necessário, então, colocá-los na ordem crescente de nós. Por isso, é chamada a subrotina ORDER, que tem a função de ordenar os valores de um vetor em ordem crescente. A medida em que o vetor NOFIX está sendo posto em ordem crescente, a matriz TREAC também o está sendo.

As subrotina STIFVP , calcula os elementos da matriz de rigidez tangente global para o aço e o concreto. A SOLUC resolve o sistema de equações lineares. A subrotina STEPVP calcula as forças residuais para o próximo passo de tempo. Finalmente a OUTPUT imprime os resultados.

Os valores de cada carregamento são armazenados em matrizes e estas são gravadas em arquivos especiais do Matlab (.mat) para depois serem utilizados, em caso de mudança, acréscimo ou cancelamento de carregamento, permitindo assim uma nova análise da estrutura.

A cada iteração os valores dos deslocamentos, reações de apoio, tensão no concreto e no aço, são armazenados nos vetores TDISP, TREAC, STRESS e SIGMA, respectivamente.

## 6 PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL

### 6.1 A LINGUAGEM: MATLAB

A linguagem de programação utilizada na elaboração do programa foi a linguagem Matlab, que constitui uma ferramenta poderosa para computação técnica. Integra computação, visualização, e programação em um ambiente de fácil uso, onde os problemas e soluções são expressos em uma familiar notação matemática.

Matlab é uma abreviação para *MATlab LABORatory*. É um ambiente de programação de alto nível possuindo características de aplicativo (facilidade para o usuário) e de linguagem de programação (flexibilidade).

Ao contrário de linguagens clássicas como C ou Fortran, no ambiente Matlab o usuário não se preocupa com itens como declaração de variáveis, alocação de memória, utilização de ponteiros e outras tarefas de rotina.

O Matlab apresenta uma série de funções matemáticas já implementadas que podem ser utilizadas em uma rotina construída pelo usuário. Estas funções são agrupadas de acordo com a área de interesse em *toolboxes* e armazenadas em diretórios específicos. Qualquer função a ser utilizada deve estar no diretório de trabalho ou caminho do Matlab.

É um sistema interativo cujo elemento básico de dados é uma matriz que não requer dimensionamento. Isto leva a resolver vários problemas, especialmente aqueles com matrizes e vetores, em uma fração do tempo que levaria para escrever um programa em uma linguagem não interativa como C ou Fortran, porém quanto ao processamento, o Matlab não é tão rápido, além de não ser muito simples a sua compilação.

Possui uma biblioteca gráfica que permite a construção de vários tipos de gráficos. Os gráficos do Matlab são objetos pertencentes a figuras, nas quais pode-se visualizar de várias formas diferentes um conjunto de dados. Como os demais objetos gráficos, para manipulá-los pode-se utilizar comandos de linha ou então o editor de objetos gráficos GUIDE.

O GUIDE é um dos importantes recursos do Matlab, que permite a construção de uma interface interativa com o usuário e o que é melhor, de uma forma amigável, ou seja, utilizando uma interface gráfica, o *Graphical User Interface* (GUI), para criar outras.

## 6.2 INTERFACE GRÁFICA

O programa REFISTRUC ( REFORço de eSTRUturas de Concreto) possui uma interface gráfica que proporciona uma melhor interação com o usuário. Várias telas foram elaboradas visando facilitar a entrada de dados e visualização dos resultados.

Para ilustrar a utilização do programa, será mostrado, a seguir, um exemplo em que serão exibidas as telas, de acordo com a seqüência de execução.

O exemplo escolhido consta no item 7.4 que é de uma viga reforçada com chapa de aço colada, conforme Campagnolo, Campos Filho e Silva Filho (1997).

A Figura 6.1 é a tela principal, nela se encontram três botões, o botão SOBRE, FECHAR E ENTRADA DE DADOS. Clicando no botão 'SOBRE', outra tela irá aparecer fornecendo informações sobre o REFISTRUC (Figura 6.2). O botão 'ENTRADA DE DADOS', solicita todos os dados de entrada necessários à resolução do programa (Figura 6.3). Finalmente, o botão FECHAR, tem a mesma função em todas as telas, finalizar o aparecimento da tela.

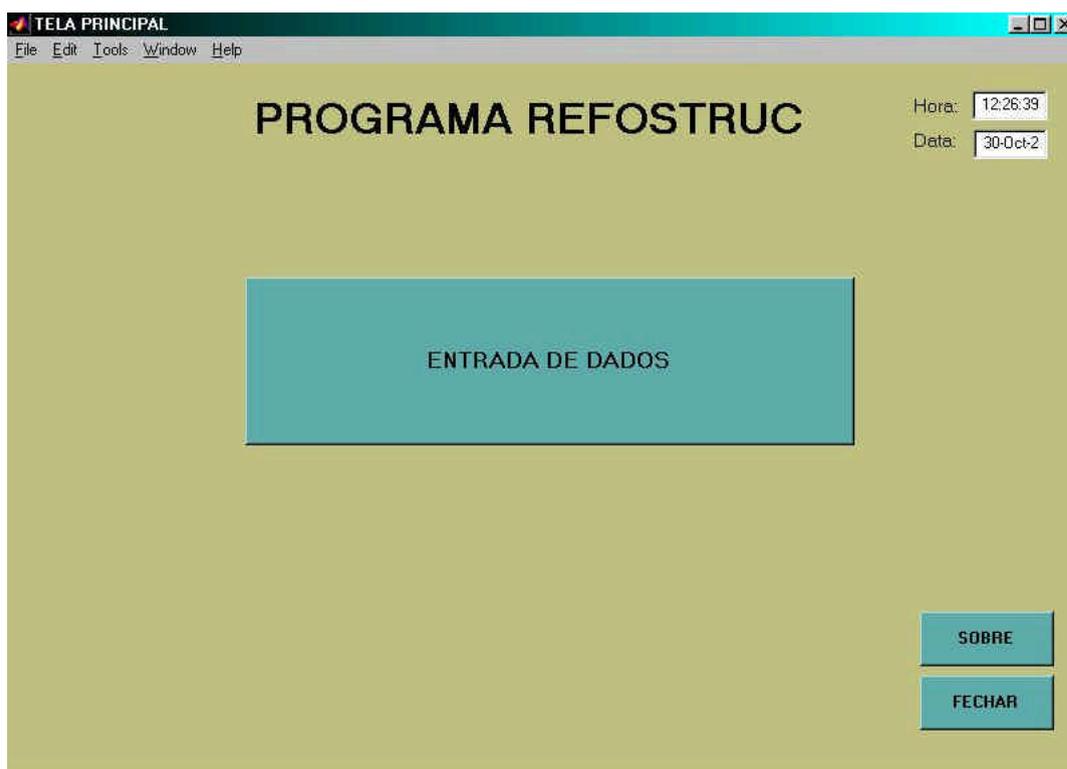


Figura 6.1- Tela inicial do programa

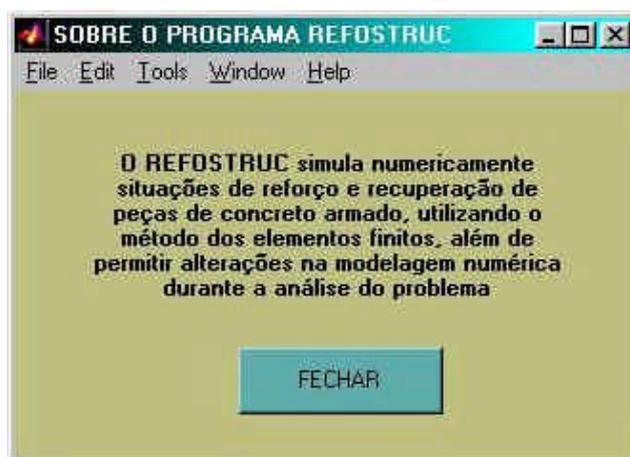


Figura 6.2- Tela informativa sobre o REFOSTRUC

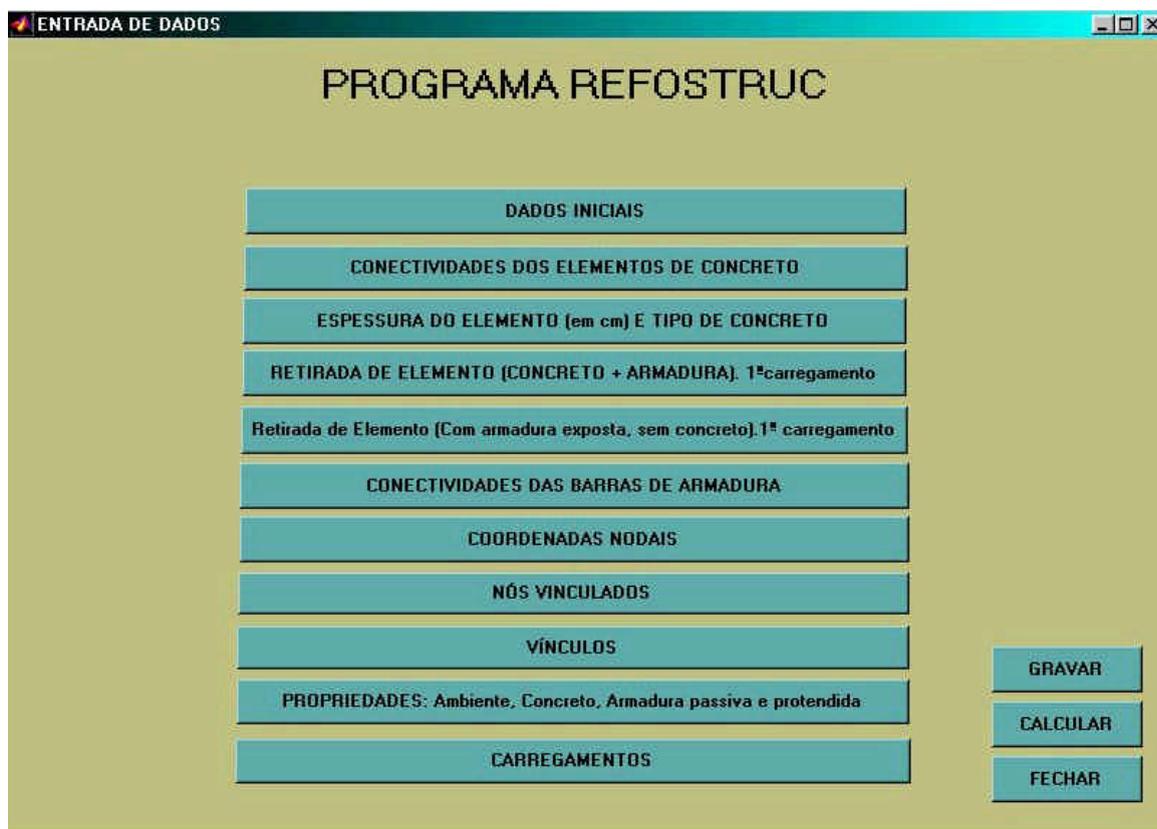


Figura 6.3- Entrada de dados

Na Figura 6.3, constam onze botões para entrada de dados, cada um solicita dados diferentes. O primeiro botão chama a tela dos dados iniciais (Figura 6.5). O segundo botão leva à tabela de entrada das conectividades dos elementos, como no exemplo são 20 elementos e cada elemento tem oito nós, então têm-se 20 linhas x 8 colunas (Figura 6.6). Clicando no terceiro botão, surge uma tabela com 20 linhas e duas colunas, uma da espessura do elemento e outra do tipo de concreto, respectivamente (Figura 6.8).

Se na etapa 1 (incremento de tempo), no primeiro carregamento, já houver a retirada de elementos, o quarto e/ou o quinto botão devem ser acionados. O quarto botão se refere aos elementos retirados juntamente com a armadura e o quinto aos elementos com armadura exposta (sem concreto), conforme a Figura 6.4.

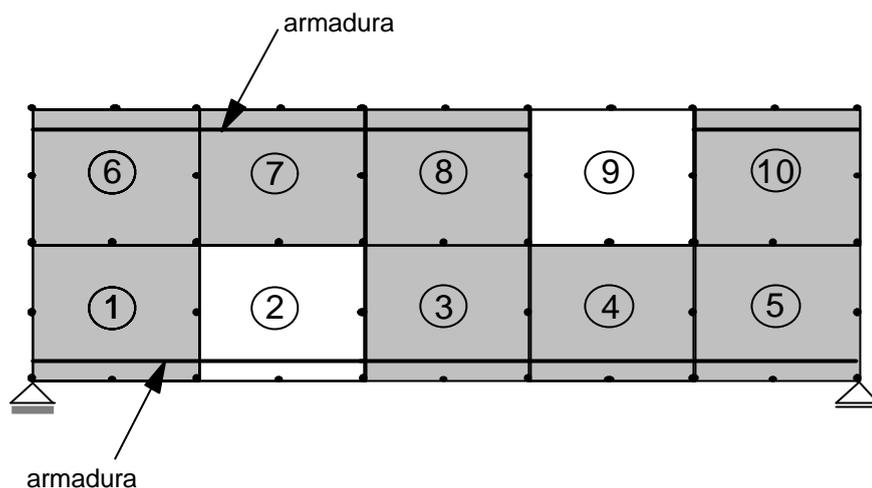


Figura 6.4- Retirada de elementos

- Número do elemento a ser retirado (concreto e armadura): 9
- Número do elemento com armadura exposta (sem concreto): 2

Para entrar com as conectividades das barras de armadura, clica-se no sexto botão (Figura 6.9). O sétimo entra as coordenadas nodais (Figura 6.10).

O oitavo e o nono botão se referem à vinculação dos nós (Figuras 6.11 e 6.13).

O penúltimo botão permite a entrada das propriedades do ambiente, concreto, armadura passiva e protendida (Figura 6.14).

Finalmente, clicando no último botão entra-se com os dados referentes aos carregamentos (Figura 6.18).

Label	Value
NÚMERO MÁXIMO DE NÓS DA ESTRUTURA	135
NÚMERO MÁXIMO DE ELEMENTOS	20
NÚMERO DE ELEMENTOS (CONCRETO E ARMADURA) A SEREM DESATIVADOS JÁ NA ETAPA 1 DO PRIMEIRO CARREGAMENTO	0
NÚMERO DE BARRAS DE ARMADURA	25
NÚMERO DE NÓS VINCULADOS	2
NÚMERO DE NÓS POR ELEMENTO	8
NÚMERO DE MATERIAIS DIFERENTES PARA A ARMADURA PASSIVA	3
NÚMERO DE MATERIAIS DIFERENTES PARA A ARMADURA PROTENDIDA	0
ORDEM DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	3
NÚMERO DE CARREGAMENTOS	2
NÚMERO DE MATERIAIS DIFERENTES PARA O CONCRETO	1
NÚMERO DE ELEMENTOS, QUE APRESENTARÃO ARMADURA EXPOSTA (SEM CONCRETO, MANTENDO-SE A ARMADURA), JÁ NA ETAPA 1 DO PRIMEIRO CARREGAMENTO	0

FECHAR

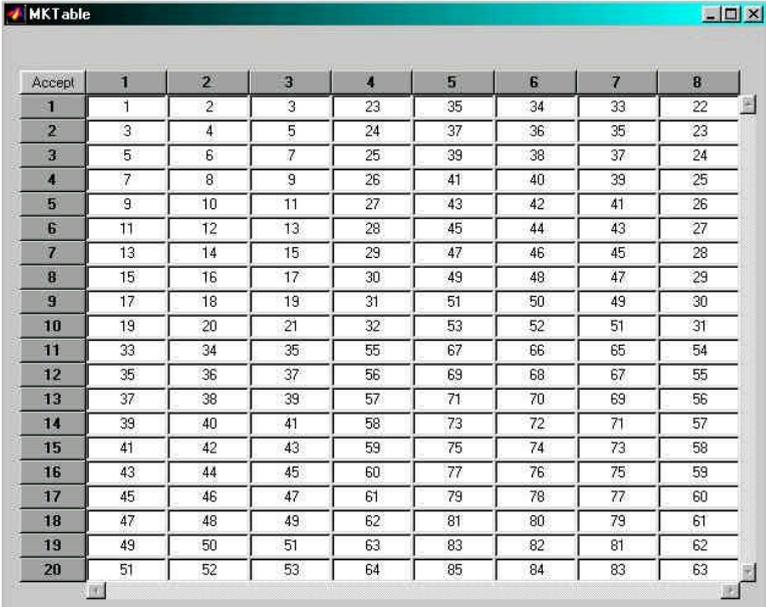
Figura 6.5- Dados iniciais

A Figura 6.5 contém dados essenciais para a leitura das demais informações, na seguinte ordem:

- Número máximo de nós da estrutura
- Número máximo de elementos
- Número de elementos (concreto e armadura) a serem desativados já na etapa 1 do primeiro carregamento
- Número de barras de armadura
- Número de nós vinculados

- Número de nós por elemento
- Número de materiais diferentes para a armadura passiva
- Número de materiais diferentes para a armadura protendida
- Ordem de integração numérica
- Número de carregamentos
- Número de materiais diferentes para o concreto
- Número de elementos, que apresentarão armadura exposta (sem concreto, mantendo-se a armadura), já na etapa 1 do primeiro carregamento

Na Figura 6.6, são introduzidas as conectividades nodais dos elementos de concreto. Considerando-se um único elemento finito, como o Exemplo 1, a ordem das conectividades deve ser colocada no sentido de anti-horário (Figura 6.7).



Accept	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	23	35	34	33	22
2	3	4	5	24	37	36	35	23
3	5	6	7	25	39	38	37	24
4	7	8	9	26	41	40	39	25
5	9	10	11	27	43	42	41	26
6	11	12	13	28	45	44	43	27
7	13	14	15	29	47	46	45	28
8	15	16	17	30	49	48	47	29
9	17	18	19	31	51	50	49	30
10	19	20	21	32	53	52	51	31
11	33	34	35	55	67	66	65	54
12	35	36	37	56	69	68	67	55
13	37	38	39	57	71	70	69	56
14	39	40	41	58	73	72	71	57
15	41	42	43	59	75	74	73	58
16	43	44	45	60	77	76	75	59
17	45	46	47	61	79	78	77	60
18	47	48	49	62	81	80	79	61
19	49	50	51	63	83	82	81	62
20	51	52	53	64	85	84	83	63

Figura 6.6- Conectividades dos elementos de concreto

## EXEMPLO 1:

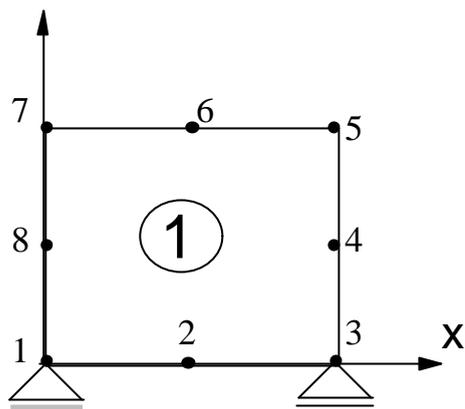


Figura 6.7- Numeração do elemento finito

- Número do elemento: 1

- Conetividades: 1 2 3 4 5 6 7 8

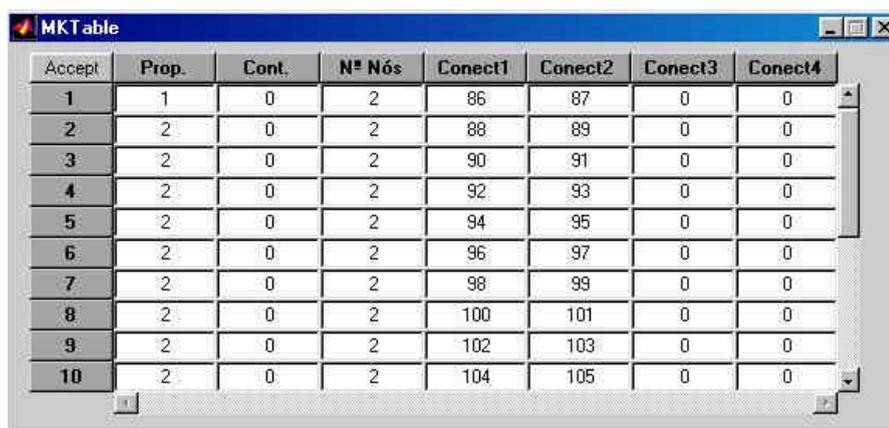
A espessura e o tipo de concreto devem ser especificados, para cada elemento finito, através da tela mostrada na Figura 6.8.

Accept	Esp	Tipo
1	12	1
2	12	1
3	12	1
4	12	1
5	12	1
6	12	1
7	12	1
8	12	1
9	12	1
10	12	1
11	12	1
12	12	1
13	12	1
14	12	1
15	12	1
16	12	1
17	12	1
18	12	1
19	12	1
20	12	1

Figura 6.8- Entrada da espessura e do tipo de concreto

Para as conectividades das barras de armadura, são fornecidos os seguintes dados:

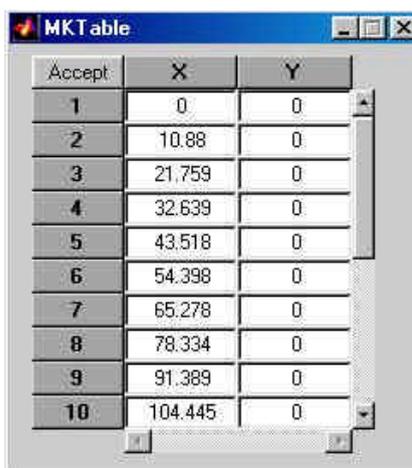
- Número das propriedades do material
- Número da barra da qual é continuação (para barras curvas e poligonais)
- Número de nós que definiram a geometria e as conectividades da barra
- Conectividades da barra



Accept	Prop.	Cont.	Nº Nós	Conect1	Conect2	Conect3	Conect4
1	1	0	2	86	87	0	0
2	2	0	2	88	89	0	0
3	2	0	2	90	91	0	0
4	2	0	2	92	93	0	0
5	2	0	2	94	95	0	0
6	2	0	2	96	97	0	0
7	2	0	2	98	99	0	0
8	2	0	2	100	101	0	0
9	2	0	2	102	103	0	0
10	2	0	2	104	105	0	0

Figura 6.9- Conectividades das barras de armadura

A seguir, devem ser fornecidas as coordenadas dos nós, que definiram a malha de elementos de concreto e de armadura (Figura 6.10).



Accept	X	Y
1	0	0
2	10.88	0
3	21.759	0
4	32.639	0
5	43.518	0
6	54.398	0
7	65.278	0
8	78.334	0
9	91.389	0
10	104.445	0

Figura 6.10- Coordenadas nodais

Após serem especificados os nós que serão restringidos (Figura 6.11), os seus códigos de restrição são fornecidos (Figura 6.13), conforme o Exemplo 2 (Figura 6.12 e a Tabela 1).



Figura 6.11 – Nós vinculados

EXEMPLO 2:

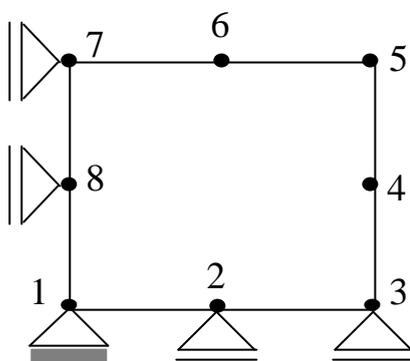


Figura 6.12 – Nós vinculados

Tabela 1 – Nó restringido e código de restrição

Nó restringido	Código de restrição
1	11
2	01
3	01
7	10
8	10



Figura 6.13- Vínculos em X e Y

Na Figura 6.14, são, então, fornecidas as propriedades do ambiente, concreto, armadura passiva e armadura protendida.

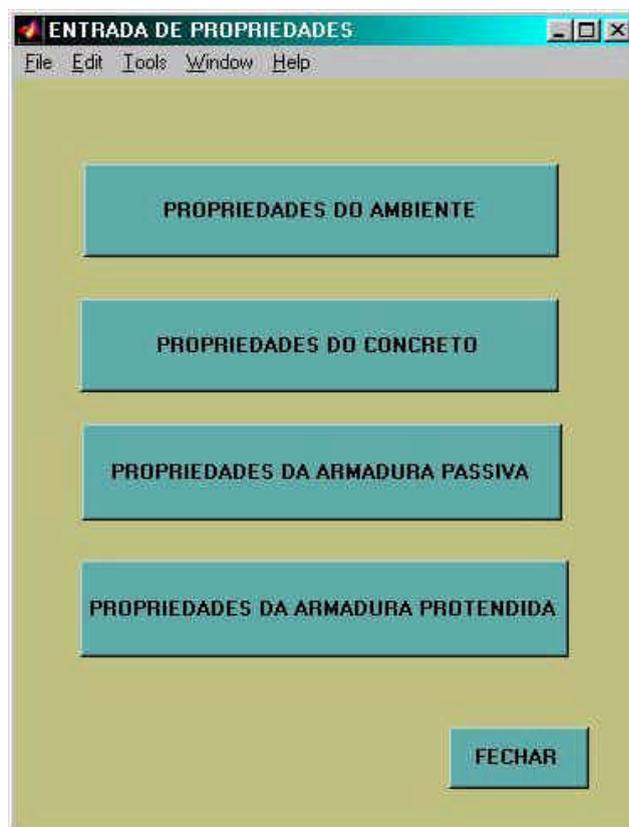


Figura 6.14- Entrada das propriedades

Para o ambiente, são informadas as seguintes propriedades, (Figura 6.15):

- Data do início da retração, em dias
- Umidade relativa do ar
- Período de duração  $\Delta t_i$  da temperatura  $T_i$ , em dias
- Valor da temperatura  $T_i$  no período  $\Delta t_i$ , em °C

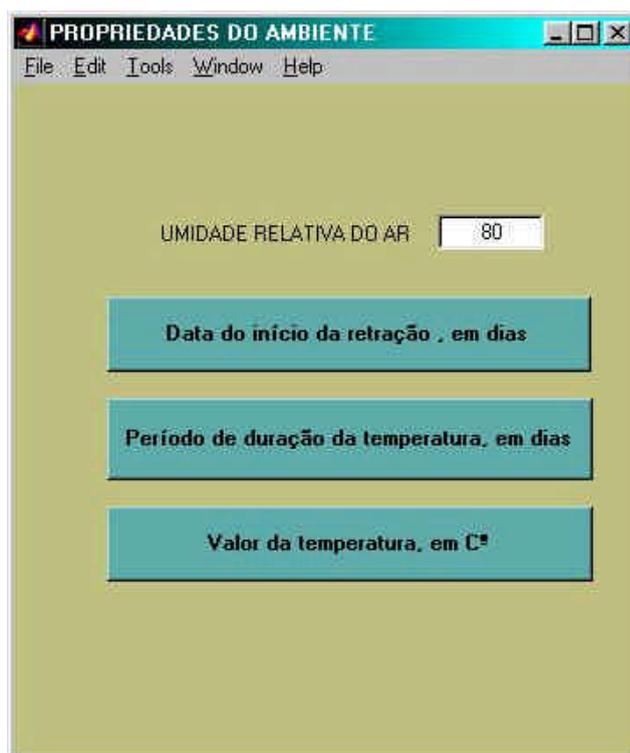


Figura 6.15- Propriedades do ambiente

Para o concreto, são informadas, as seguintes propriedades (Figura 6.16):

- Resistência média à compressão aos 28 dias, em  $\text{kN/cm}^2$
- Espessura fictícia, em cm
- Tipo de cimento: endurecimento lento (-1), normal (0) ou rápido (1)

Como no exemplo tem-se só um tipo de concreto a tabela possui apenas uma linha.

Accept	Fc	Espessura	tipo de cimen
1	3.126	8.108	0

Figura 6.16- Propriedades do concreto

Para a armadura passiva, as seguintes propriedades devem ser fornecidas (Figura 6.17):

- Número de barras
- Tensão de escoamento do aço, para armadura passiva, ou tensão de ruptura do aço, para armadura protendida, em  $\text{kN/cm}^2$
- Diâmetro da barra, em cm
- Tipo do aço: para armaduras passivas: laminado a quente (1), deformado a frio (2); para armaduras ativas: relaxação normal (3) ou relaxação baixa (4)



Accept	N° barras	$f_y$	D(cm)	Tipo de aço
1	2	54.9	1.00	1
2	2	65.7	0.63	2
3	1	32.6	2.068	1

Figura 6.17- Propriedades da armadura passiva

Os próximos dados só deverão ser fornecidos se a armadura for protendida:

- Coeficiente de atrito entre o cabo e a bainha metálica
- Tensão inicial, em  $\text{kN/cm}^2$
- Tipo de protensão: pré-tração (1), pós-tração com aderência (2) ou pós-tração sem aderência (3)
- Data da protensão, em dias

**ENTRADA DO CARREGAMENTO**

File Edit Tools Window Help

**CARREGAMENTO**

Data do Carregamento

Nº de incrementos de carga e/ou deslocamento

Nº de nós carregados

Ocorrência de força gravitacional: valor 1, para considerar peso próprio e 0 para não considerar

Nº de bordos carregados, em caso de carregamento distribuído

Nº de nós que mudarão de vinculação e/ou que sofrerão deslocamento imposto

Nº de elementos (concreto e armadura) ativados

Nº de elementos (concreto e armadura) desativados

Nº de elementos com armadura exposta que voltarão a possuir concreto

Nº de elementos que terão armadura exposta

**CLIQUE SE**

Carregamento nodal

Força gravitacional

Carregamento distribuído

Incremento de deslocamento

Houver elementos ativados

Houver retirada de elementos

Elementos passarão a possuir concreto

Houver armadura exposta

FECHAR

Figura 6.18- Entrada dos carregamentos

A Figura 6.18 contém vários botões. Cada botão solicita uma determinada informação, na seguinte ordem:

- Data do carregamento
- Número de incrementos de carga e/ou deslocamento
- Número de nós carregados
- Ocorrência de força gravitacional: valor 1, para considerar peso próprio e 0, para não considerar
- Número de bordos carregados, em caso de carregamento distribuído
- Número de nós que mudarão de vinculação e/ou que sofrerão deslocamento imposto
- Número de elementos (concreto e armadura) ativados

- Número de elementos (concreto e armadura) desativados
- Número de elementos com armadura exposta que voltarão a possuir concreto
- Número de elementos que terão armadura exposta

Se houver elementos ativados, devem ser informados quais os elementos (concreto e armadura) que passarão a existir e que tipo de concreto estes elementos possuem, uma vez que um determinado elemento, depois de desativado, poderá ser ativado com novas propriedades.

Se em um carregamento houver a retirada de elementos (concreto e armadura) deve ser informado o número desses elementos desativados.

Se houver elementos com armadura exposta, que passarão a possuir concreto, devem ser fornecidos o número desses elementos e o tipo de material dos mesmos.

Para cada tipo de carregamento devem ser fornecidas as seguintes informações :

- Carregamento nodal

Devem ser incluídas as cargas aplicadas nos nós. São fornecidos o número do nó e as componentes de carga nas direções x e y.

- Força gravitacional

Devem ser fornecidos, o ângulo de gravidade,  $\theta$ , em graus, medido em relação ao eixo y positivo, conforme Figura. 6.19, e a constante de gravidade, em  $m/s^2$ .

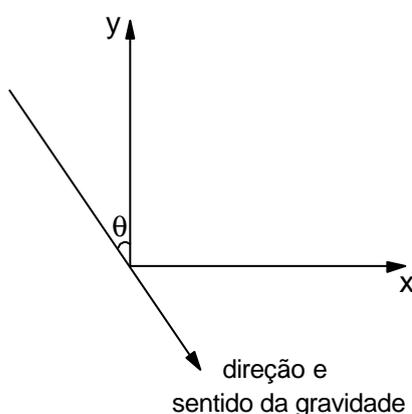


Figura 6.19 – Convenção do ângulo de gravidade

- Carregamento distribuído

Havendo cargas distribuídas nos bordos dos elementos, devem ser fornecidos o número do elemento, uma lista de pontos nodais que compõem o bordo do elemento e os valores das componentes normais e tangenciais, ao bordo, de carga em cada nó do bordo.

- Incremento de deslocamento

Havendo deslocamento imposto em algum nó, devem ser fornecidos, o número desse nó, o código de restrição e o valor do deslocamento imposto a este nó nas direções x e y. Este deslocamento será aplicado de forma incremental, de acordo com o número de incrementos que for dado para este carregamento. Em um mesmo carregamento podem ser aplicados incrementos de carga e de deslocamento.

Havendo apenas mudança de vinculação sem imposição de deslocamento, deve-se informar da mesma maneira a ocorrência, porém o valor do deslocamento prescrito deverá ser nulo, nas duas direções.

Após entrar com todos os dados necessários, na tela 'ENTRADA DE DADOS' (Figura 6.3), clica-se no botão GRAVAR e todos os dados serão gravados em um arquivo que o nome será solicitado ao usuário, no caso o arquivo terá o nome de 'chapa.dat' (Figura 6.20).



Figura 6.20- Tela salvar arquivo

Concluída esta etapa, para executar o programa e resolver o arquivo, clica-se no botão CALCULAR (Figura 6.3). Surgirá então a tela solicitando o nome do arquivo a ser analisado (Figura 6.21).

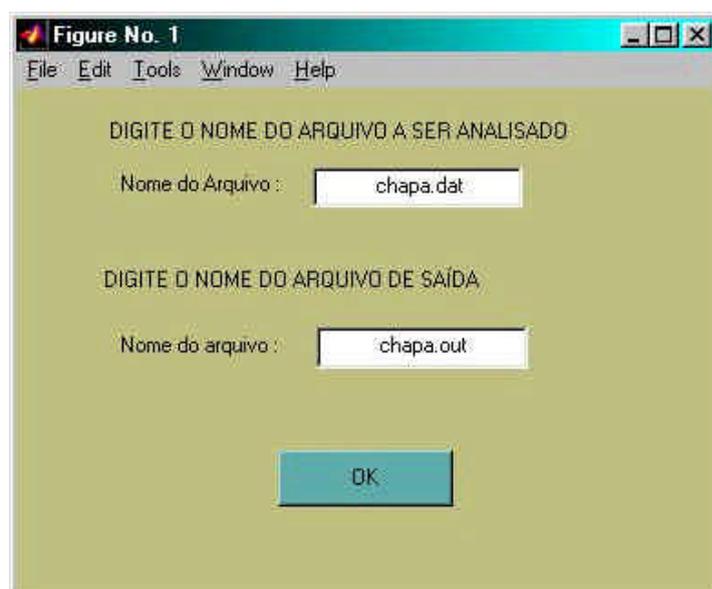


Figura 6.21- Tela calcular

O arquivo de entrada de dados, tem a formatação abaixo, no caso o 'chapa.dat', é mostrado como exemplo.

Exemplo: chapa.dat

**DADOS INICIAIS**

135 20 0 25 2 8 3 0 3 2 1 0

**CONETIVIDADES DOS ELEMENTOS, ESPESSURA E TIPO DE CONCRETO**

1	1	2	3	23	35	34	33	22		12.000	1
2	3	4	5	24	37	36	35	23		12.000	1
3	5	6	7	25	39	38	37	24		12.000	1
4	7	8	9	26	41	40	39	25		12.000	1
5	9	10	11	27	43	42	41	26		12.000	1
6	11	12	13	28	45	44	43	27		12.000	1
7	13	14	15	29	47	46	45	28		12.000	1
8	15	16	17	30	49	48	47	29		12.000	1
9	17	18	19	31	51	50	49	30		12.000	1
10	19	20	21	32	53	52	51	31		12.000	1
11	33	34	35	55	67	66	65	54		12.000	1
12	35	36	37	56	69	68	67	55		12.000	1
13	37	38	39	57	71	70	69	56		12.000	1
14	39	40	41	58	73	72	71	57		12.000	1
15	41	42	43	59	75	74	73	58		12.000	1
16	43	44	45	60	77	76	75	59		12.000	1
17	45	46	47	61	79	78	77	60		12.000	1
18	47	48	49	62	81	80	79	61		12.000	1
19	49	50	51	63	83	82	81	62		12.000	1
20	51	52	53	64	85	84	83	63		12.000	1

**CONETIVIDADES DAS BARRAS DE ARMADURA**

1	1	02	86	87	0	0
2	2	02	88	89	0	0
3	2	02	90	91	0	0
4	2	02	92	93	0	0
5	2	02	94	95	0	0
6	2	02	96	97	0	0
7	2	02	98	99	0	0
8	2	021001	101		0	0
9	2	021021	103		0	0
10	2	021041	105		0	0
11	2	021061	107		0	0
12	2	021081	109		0	0
13	2	021101	111		0	0
14	2	021121	113		0	0
15	2	021141	115		0	0
16	2	021161	117		0	0
17	2	021181	119		0	0
18	2	021201	121		0	0
19	2	021221	123		0	0
20	2	021241	125		0	0
21	2	021261	127		0	0

22	2	02128129	0	0
23	2	02130131	0	0
24	2	02132133	0	0
25	3	02134135	0	0

**COORDENADAS NODAIS**

1	0.000	0.000
2	10.880	0.000
3	21.759	0.000
4	32.639	0.000
5	43.518	0.000
6	54.398	0.000
7	65.278	0.000
8	78.334	0.000
9	91.389	0.000
10	104.445	0.000
11	117.500	0.000
12	130.555	0.000
13	143.611	0.000
14	156.666	0.000
15	169.722	0.000
16	180.602	0.000
17	191.482	0.000
18	202.361	0.000
19	213.241	0.000
20	224.120	0.000
21	235.000	0.000
22	0.000	6.250
23	21.759	6.250
24	43.518	6.250
25	65.278	6.250
26	91.389	6.250
27	117.500	6.250
28	143.611	6.250
29	169.722	6.250
30	191.482	6.250
31	213.241	6.250
32	235.000	6.250
33	0.000	12.500
34	10.880	12.500
35	21.759	12.500
36	32.639	12.500
37	43.518	12.500
38	54.398	12.500
39	65.278	12.500
40	78.334	12.500
41	91.389	12.500
42	104.445	12.500
43	117.500	12.500
44	130.555	12.500
45	143.611	12.500
46	156.666	12.500

47	169.722	12.500
48	180.602	12.500
49	191.482	12.500
50	202.361	12.500
51	213.241	12.500
52	224.120	12.500
53	235.000	12.500
54	0.000	18.750
55	21.759	18.750
56	43.518	18.750
57	65.278	18.750
58	91.389	18.750
59	117.500	18.750
60	143.611	18.750
61	169.722	18.750
62	191.482	18.750
63	213.241	18.750
64	235.000	18.750
65	0.000	25.000
66	10.880	25.000
67	21.759	25.000
68	32.639	25.000
69	43.518	25.000
70	54.398	25.000
71	65.278	25.000
72	78.334	25.000
73	91.389	25.000
74	104.445	25.000
75	117.500	25.000
76	130.555	25.000
77	143.611	25.000
78	156.666	25.000
79	169.722	25.000
80	180.602	25.000
81	191.482	25.000
82	202.361	25.000
83	213.241	25.000
84	224.120	25.000
85	235.000	25.000
86	0.000	2.630
87	235.000	2.630
88	0.000	22.555
89	235.000	22.555
90	2.000	2.630
91	2.000	22.555
92	13.000	2.630
93	13.000	22.555
94	24.000	2.630
95	24.000	22.555
96	35.000	2.630
97	35.000	22.555

98	46.000	2.630
99	46.000	22.555
100	57.000	2.630
101	57.000	22.555
102	68.000	2.630
103	68.000	22.555
104	79.000	2.630
105	79.000	22.555
106	90.000	2.630
107	90.000	22.555
108	101.000	2.630
109	101.000	22.555
110	112.000	2.630
111	112.000	22.555
112	123.000	2.630
113	123.000	22.555
114	134.000	2.630
115	134.000	22.555
116	145.000	2.630
117	145.000	22.555
118	156.000	2.630
119	156.000	22.555
120	167.000	2.630
121	167.000	22.555
122	178.000	2.630
123	178.000	22.555
124	189.000	2.630
125	189.000	22.555
126	200.000	2.630
127	200.000	22.555
128	211.000	2.630
129	211.000	22.555
130	222.000	2.630
131	222.000	22.555
132	233.000	2.630
133	233.000	22.555
134	7.500	0.010
135	227.500	0.010

**VINCULAÇÃO DOS NÓS 1 E 21**00101 **RESTRINGIDO NA DIREÇÃO Y**02111 **RESTRINGIDO NAS DIREÇÕES X E Y****PROPRIEDADES DO AMBIENTE:**30.000 **DATA PARA CONSIDERAR O INÍCIO DA RETRAÇÃO**

00080.00020000.000 20.000 0.000 0.000 0.000

0.000 0.000 0.000 0.000 0.000

**PROPRIEDADES DO CONCRETO:**

3.126 8.108 0.000

**PROPRIEDADES DAS ARMADURAS PASSIVAS E PROTENDIDAS:****ARMADURA TIPO 1**

2.000 54.900 1.000 1.000 0.000 0.000

0.000 0.000

**ARMADURA TIPO 2**

2.000	65.700	0.630	2.000	0.000	0.000
0.000	0.000				

**ARMADURA TIPO 3**

1.000	32.600	2.068	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000				

**CARREGAMENTO**

1	28.00	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	<b>CARREGAMENTO AOS 28 DIAS</b>
---	-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---------------------------------

2	28.00	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	<b>CARREGAMENTO AOS 28 DIAS</b>
---	-------	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---------------------------------

0.000	10.000			<b>FORÇA GRAVITACIONAL</b>
-------	--------	--	--	----------------------------

72	0.000	-2.500	<b>FORÇA APLICADA NO NÓ 72</b>
----	-------	--------	--------------------------------

78	0.000	-2.500	<b>FORÇA APLICADA NO NÓ 78</b>
----	-------	--------	--------------------------------

As Figuras 6.22 a 6.29 são as telas de saída do programa desenvolvido. Se houver necessidade de um novo cálculo, há possibilidade de mudança de carregamento, sem ser necessário entrar com todos os dados novamente (Figura 6.29).

A Figura 6.22 exibe a malha de elementos finitos tanto para o concreto quanto para a armadura. Se for retirada a marcação da opção 'armadura', só será mostrada a malha de concreto. A opção 'Numeração dos elementos finitos', está ativada, isso faz com que todos os elementos finitos da malha sejam numerados.

As Figuras 6.23 e 6.24 têm as opções 'Numeração dos Nós', e 'Posição dos Nós', respectivamente ativadas. Estas opções numeram todos os nós da malha e marcam todas as posições dos nós, respectivamente.

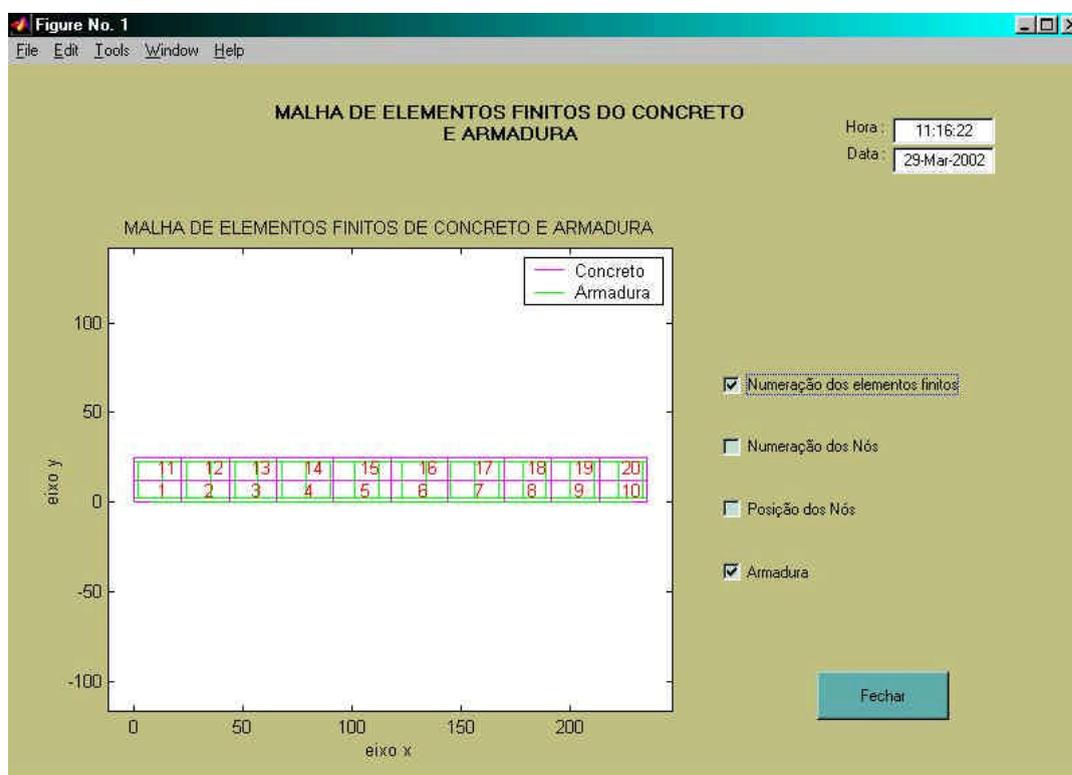


Figura 6.22 – Malha de elementos finitos de concreto e armadura

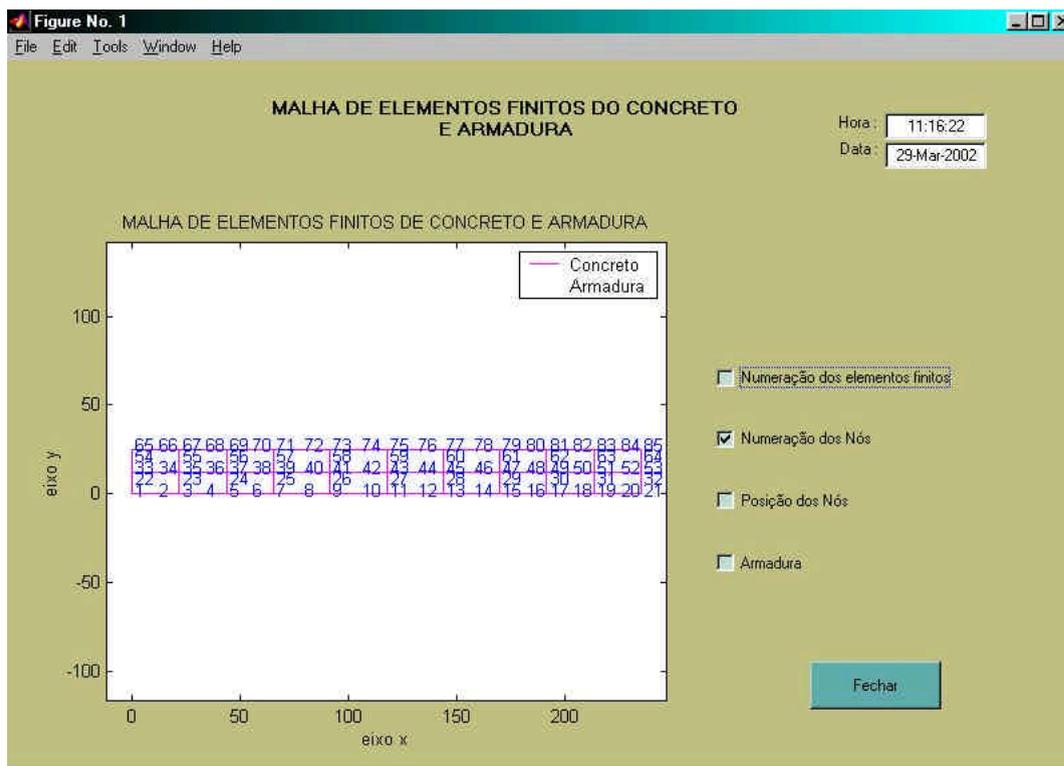


Figura 6.23- Numeração dos nós dos elementos finitos

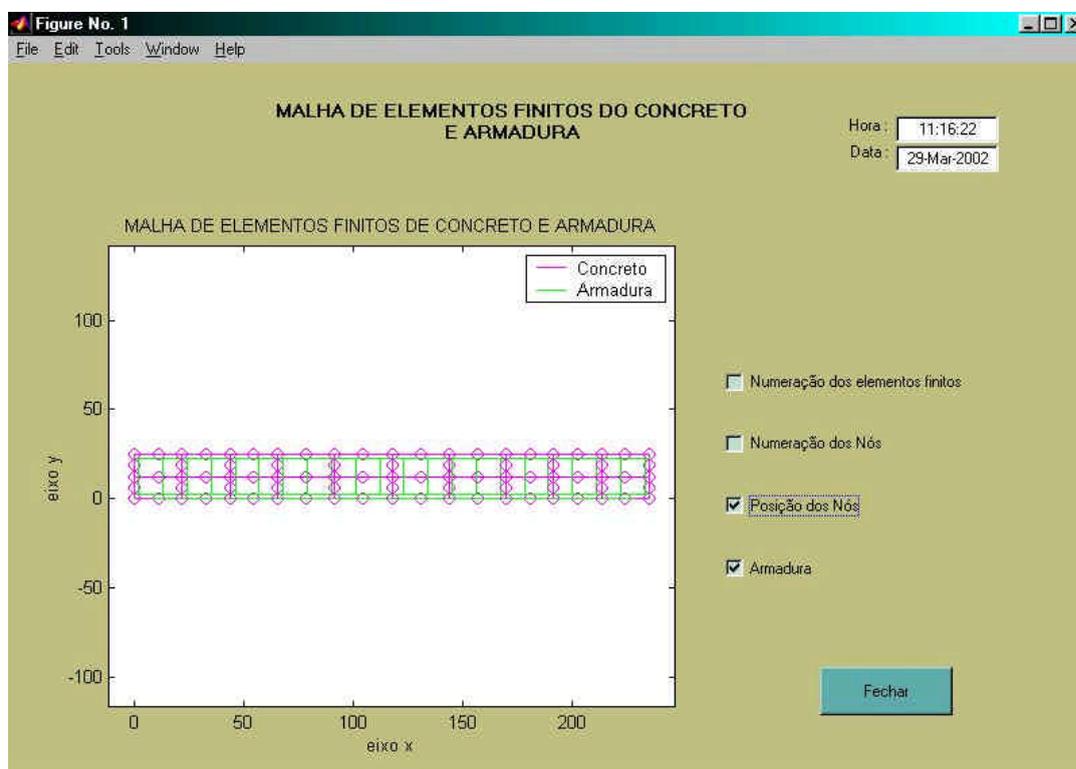


Figura 6.24- Posição dos nós dos elementos finitos

A Figura 6.25 mostra a deformada da viga no vigésimo incremento do segundo carregamento. Há possibilidade de visualizar todas as deformadas em todos os incrementos de cada carregamento em que a viga foi submetida, basta selecionar na opção 'Deformada do Incremento', o número do incremento desejado. No caso do exemplo, a viga foi submetida a dois carregamentos, o primeiro com 1 incremento e o segundo com 20 incrementos.

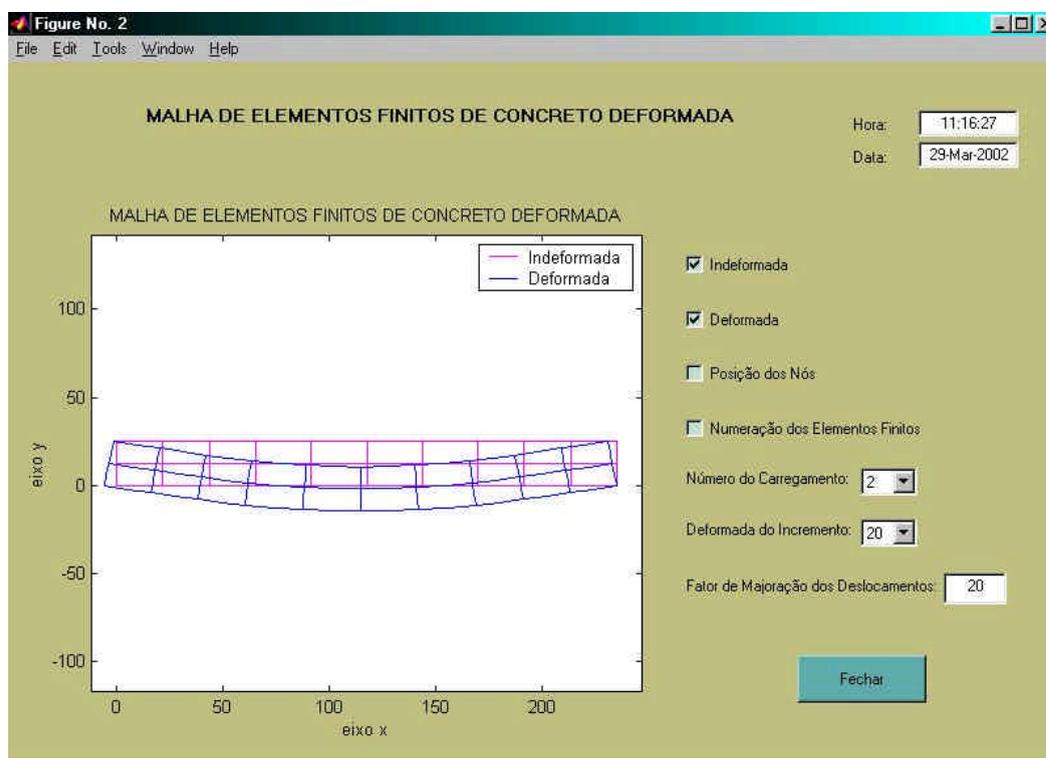


Figura 6.25- Malha de elementos finitos de concreto deformada

A Figura 6.26 mostra a posição de todos os nós da malha indeformada como também da malha deformada. Se fosse desejado visualizar ainda a numeração dos elementos finitos era só ativar a respectiva opção.

As Figuras 6.27 e 6.28 exibem as distribuições das tensões nos elementos concreto e nas barras de armadura respectivamente.

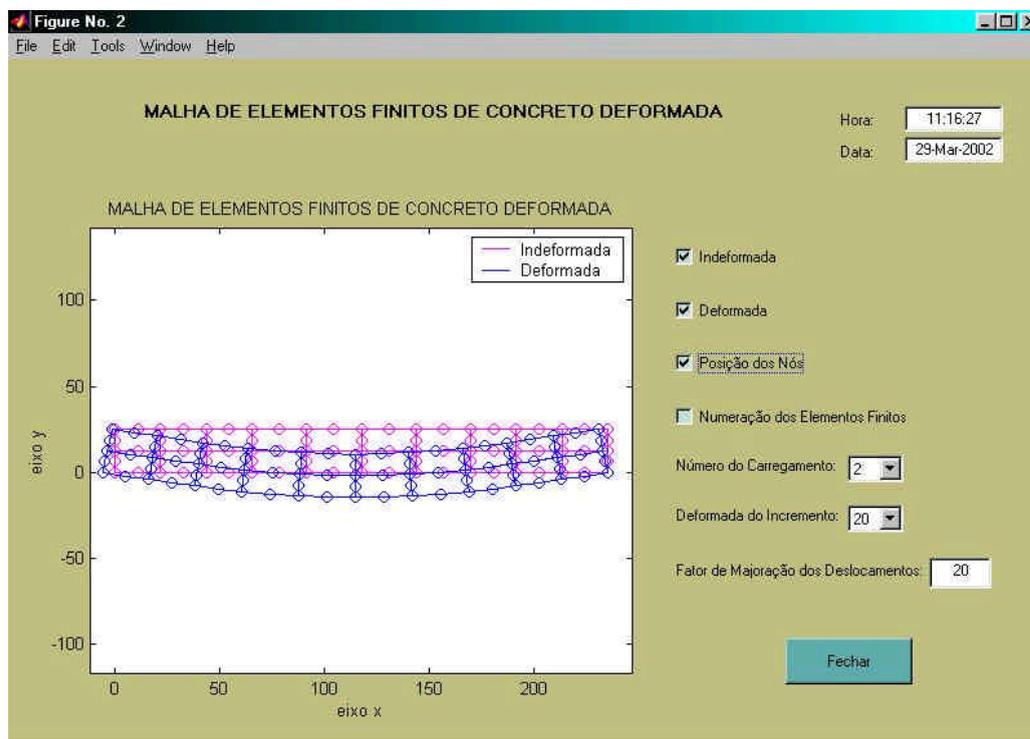


Figura 6.26- Posicionamento dos nós da malha indeformada e deformada

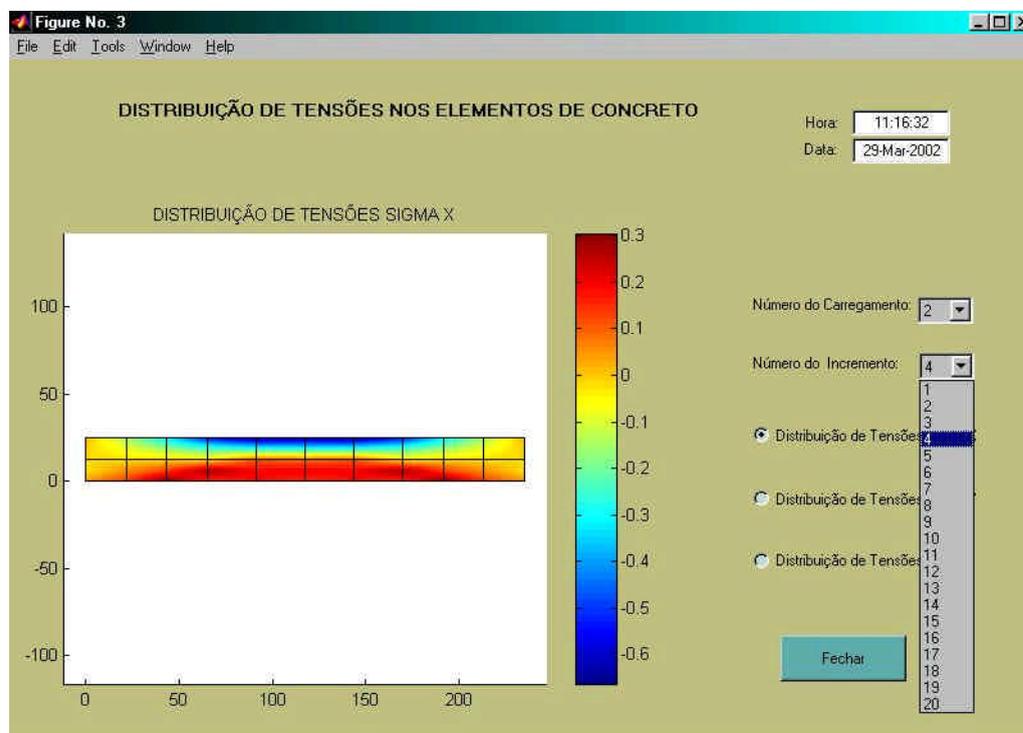


Figura 6.27- Distribuição das tensões nos elementos de concreto

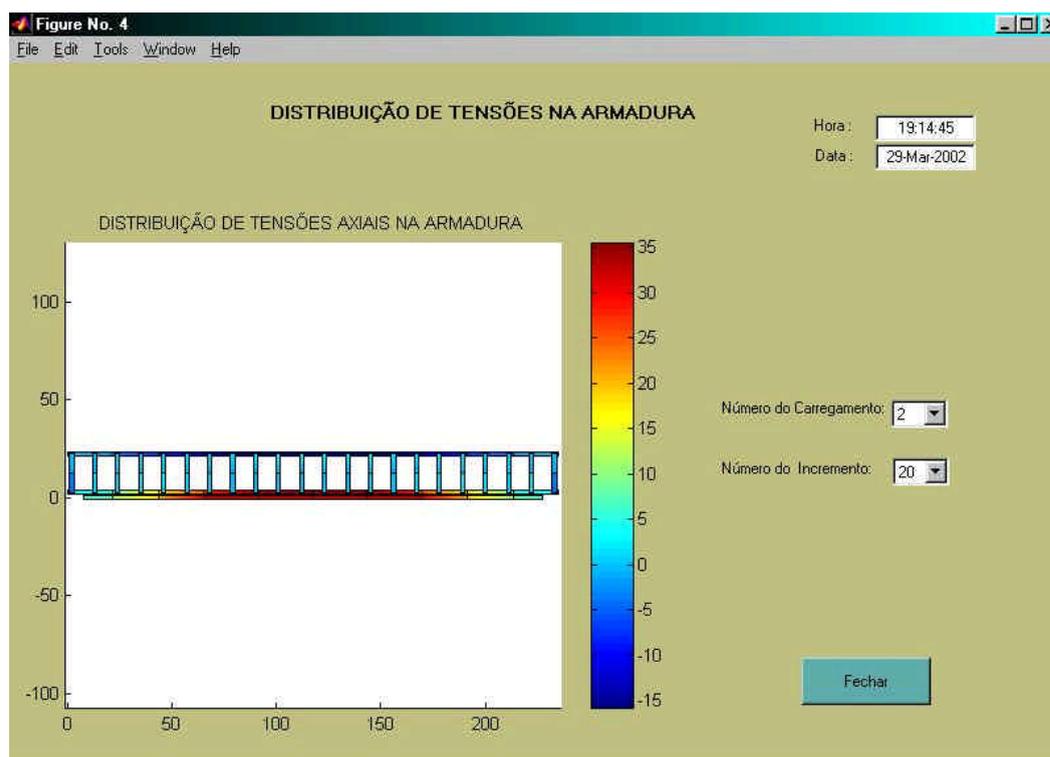


Figura 6.28- Distribuição das tensões na armadura

Figura 6.29- Mudança de carregamento

## **7 COMPARAÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS, OBTIDOS ATRAVÉS DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS, COM VALORES EXPERIMENTAIS**

### **7.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, apresentam-se comparações entre os resultados experimentais de vigas de concreto armado com os obtidos pelo programa computacional, para ilustrar a adequação do modelo computacional proposto na representação de situações de reforço e recuperação. Os resultados experimentais foram determinados através de ensaios realizados no Laboratório de Ensaios e Modelos Estruturais (LEME/UFRGS). Em todos os exemplos deste capítulo, as vigas foram primeiramente reforçadas e depois aplicado o carregamento.

As situações analisadas apresentam diferentes malhas de elementos finitos, porém todas utilizam elementos finitos de oito nós com nove pontos de integração.

Na entrada de dados, são fornecidas informações referentes à geometria da peça, ao tipo de carregamento e às propriedades do concreto, aço e ambiente. Além desses dados, são fornecidas informações quanto à retirada ou introdução de elementos de concreto.

Igualmente, para todos os exemplos, foi adotado um valor fixo para o coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,2$ , e considerado cimento de endurecimento normal.

Consideraram-se os efeitos da fluência e retração do concreto a partir do sétimo dia após a concretagem da viga, adotando-se uma umidade relativa do ar de 80% e uma temperatura ambiente média de 20°C.

Os valores comparados são valores líquidos, isto é, estão descontadas as parcelas correspondentes aos efeitos dependentes do tempo e do peso próprio.

## 7.2 VIGA DE CONCRETO ARMADO SIMPLEMENTE APOIADA

Neste exemplo, comparam-se os resultados, obtidos através do programa computacional, com valores determinados experimentalmente para uma viga de concreto armado, submetida a duas cargas concentradas que distavam 78,5 cm de cada apoio, conforme Campagnolo, Campos Filho e Silva Filho (1997). Esta viga serviu de testemunho para outras, em situações de reforço, que serão apresentadas na seqüência. Os incrementos de carga foram de 5 kN, partindo-se do zero e levando-se a peça até a carga de ruptura de 53 kN.

Além da análise da viga com incrementos de carga, foram utilizados também incrementos de deslocamentos impostos à estrutura, para ilustrar esta possibilidade no programa. Os incrementos de deslocamento foram aplicados na mesma posição da carga concentrada, sendo impostos incrementos de 0,5 mm, até ser atingida a ruptura.

A viga possui seção transversal retangular de 12x25 cm e comprimento de 250 cm, sendo a distância entre os apoios de 235 cm. A armadura longitudinal é composta, inferiormente, por duas barras de aço, bitola de 10 mm ( $f_y = 549$  MPa) e, superiormente, por duas barras de aço, bitola de 6,3 mm ( $f_y = 657$  MPa). A armadura transversal consiste de estribos de 6,3 mm de diâmetro, com espaçamento uniforme de 11 cm, conforme mostra a Figura 7.1.

A resistência média à compressão do concreto, aos 28 dias, foi de 33,11 MPa. O valor da espessura fictícia foi calculado como sendo de 8,1 cm.

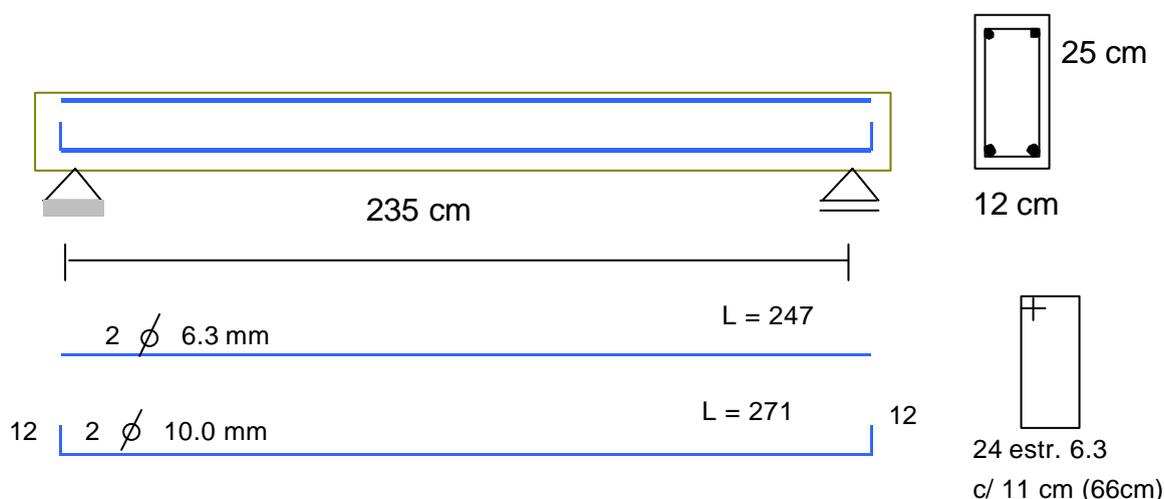


Figura 7.1 – Armadura da viga testemunho

A espessura fictícia ( $h_{fic.}$ ) é dada pela expressão

$$h_{fic.} = 2 A_c / u \quad (7.1)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal e  $u$ , o perímetro de contato com a atmosfera.

A análise numérica da viga testemunho foi desenvolvida empregando-se a malha de elementos finitos discretizada na Figura 7.2. A discretização adotada para a armadura está representada na Figura 7.3.

As Figuras 7.4 ,7.5 e 7.6 mostram, respectivamente, a deformada da viga testemunho, o estado de tensões ( $\sigma_x$ ), em  $\text{kN/cm}^2$ , nos elementos de concreto e nas barras de armadura, em diferentes níveis de carregamento, conforme o programa.

A Figura 7.7 apresenta a comparação da flecha determinada pelo modelo computacional e pelos dados experimentais, para cada nível de carga. A comparação da deformação da armadura longitudinal inferior, no vão central da viga, pelo modelo computacional e pelos dados experimentais, está mostrada na Figura 7.8.

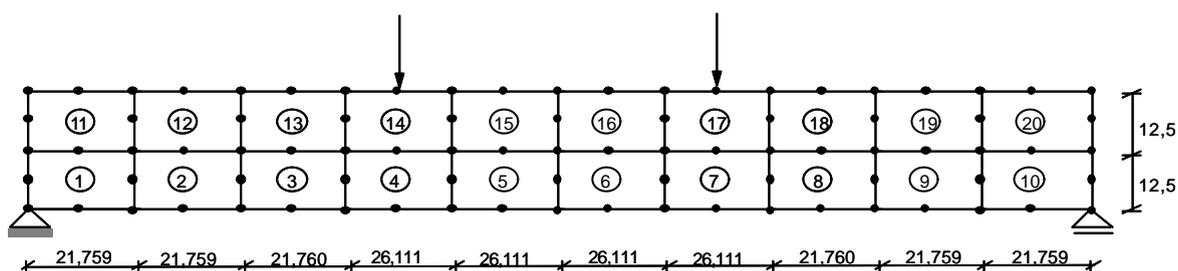


Figura 7.2 – Discretização da viga testemunho

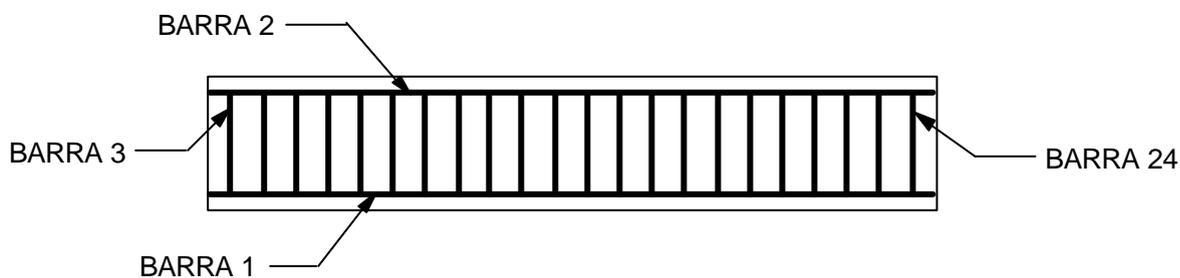
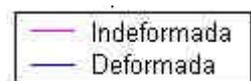
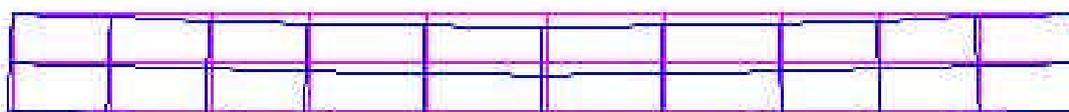


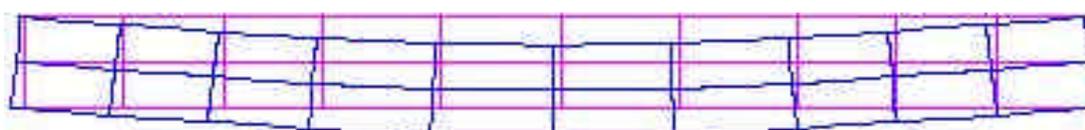
Figura 7.3 – Discretização da armadura da viga testemunho



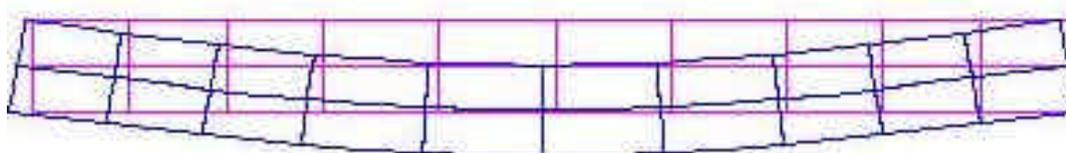
10 kN



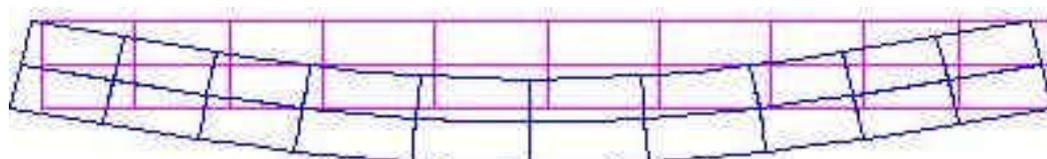
20 kN



30 kN



40 kN



50 kN

Figura 7.4 – Deformada da viga testemunho para diferentes níveis de carga

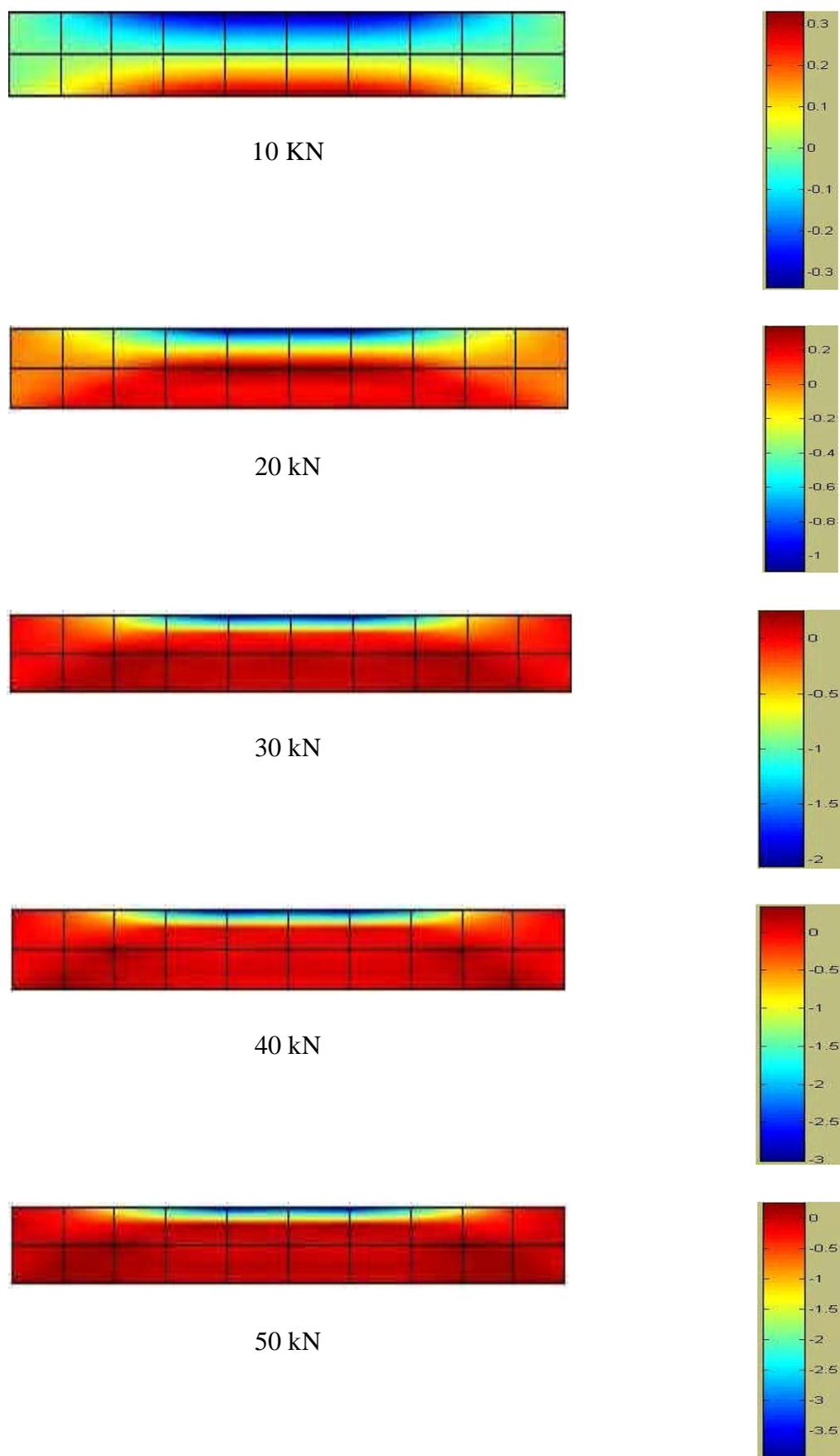


Figura 7.5– Estado de tensões da viga testemunho em diferentes níveis de carregamento

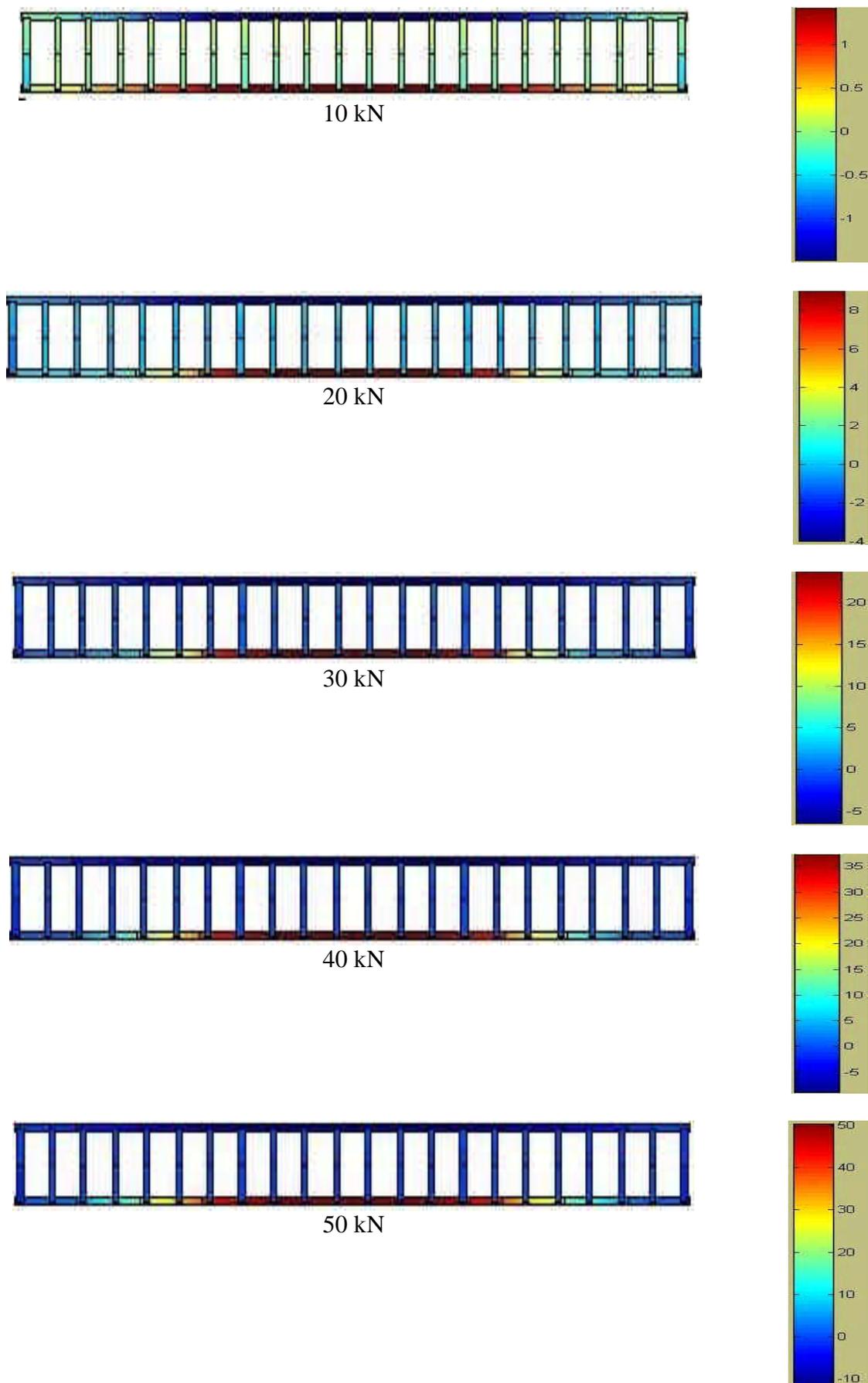


Figura 7.6 – Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento

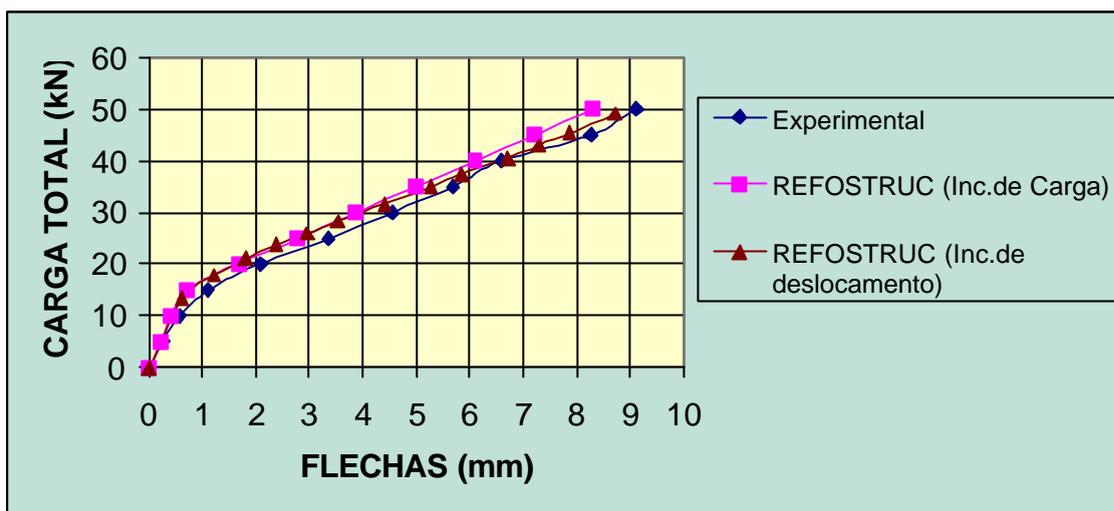


Figura 7.7 – Comparação das flechas da viga testemunho, obtidas experimentalmente e pelo programa

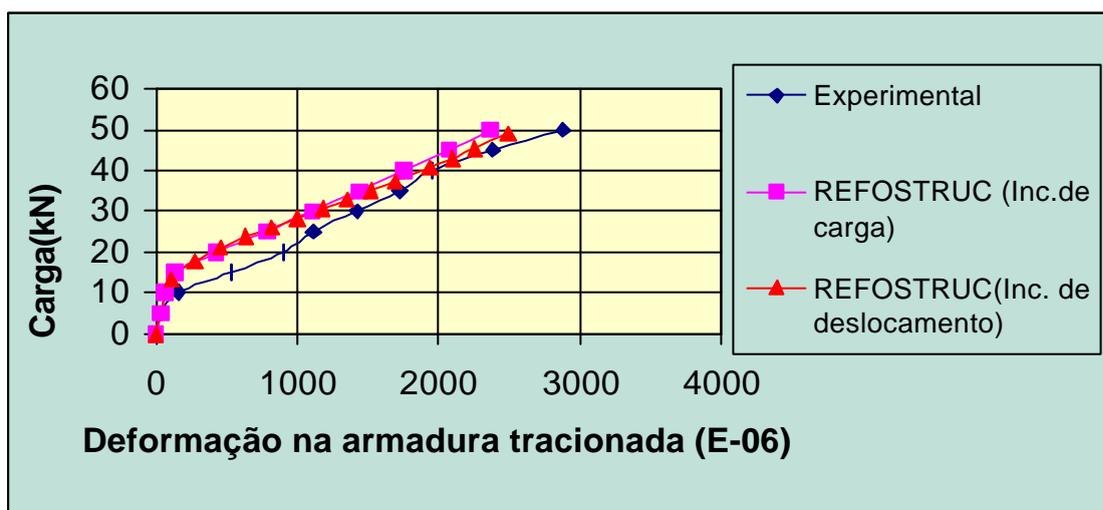


Figura 7.8 – Comparação das deformações da viga testemunho obtidas experimentalmente e pelo programa

### 7.3 VIGA REFORÇADA COM CAMADA DE ARGAMASSA ADITIVADA

Neste exemplo, os resultados do programa computacional são comparados com valores de ensaio de uma viga reforçada com barras adicionais de armadura em camada de argamassa aditivada, de acordo com Campagnolo, Campos Filho e Silva Filho (1997).

A viga já reforçada foi submetida a duas cargas concentradas, distando 78,5 cm de cada apoio. Foram aplicados incrementos de 5 kN de carga, até atingir a ruptura, em carga, cujo valor foi igual a 101 kN.

No procedimento do reforço, a face inferior da viga foi apicoada de forma que ficassem expostos os agregados graúdos. Após a retirada do material pulverulento desta superfície, as barras de armadura foram integradas à viga por uma camada de argamassa aditivada, com adição de 10% do peso de cimento em microsilica.

A viga foi executada com seção transversal retangular de 12 x 27,5 cm (acréscimo de 2,5 cm, devido ao reforço) e comprimento de 250 cm (distância entre os apoios de 235 cm). Esta viga possui a mesma armadura da viga testemunho, apresentada no exemplo 1, acrescida de duas barras de 10 mm de diâmetro ( $f_y = 549$  MPa), colocadas junto a sua face inferior, segundo detalhamento apresentado na Figura 7.9.

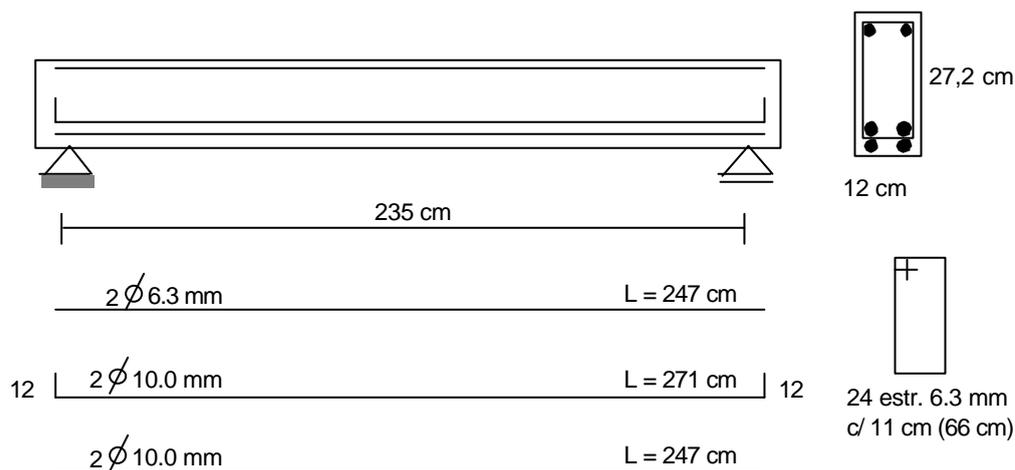


Figura 7.9 – Armadura da viga reforçada com argamassa aditivada

A resistência média à compressão do concreto, aos 28 dias, foi de 26,19 MPa. A espessura fictícia foi tomada com sendo de 8,3 cm.

A malha de elementos finitos, utilizada neste exemplo, discretizada na Figura 7.10, difere da malha do exemplo anterior, apenas na adição de uma camada de elementos, referente às barras de armadura do reforço. A discretização adotada para a armadura está representada na Figura 7.11

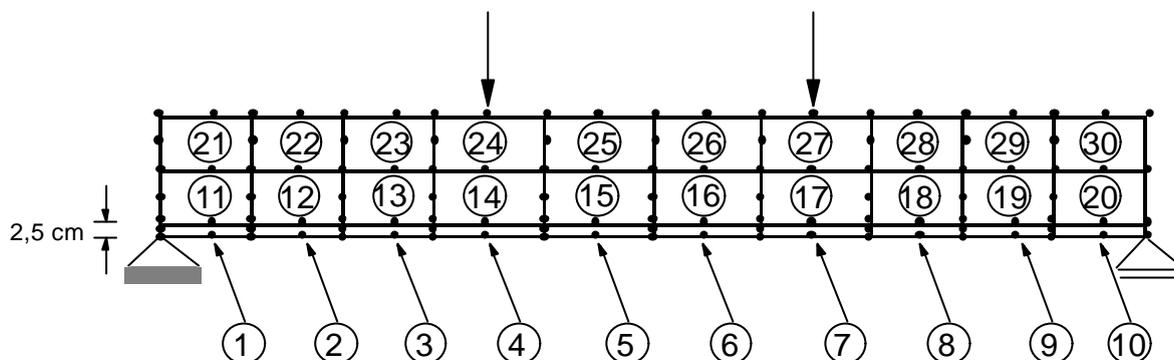


Figura 7.10 – Discretização da viga reforçada com camada de argamassa aditivada

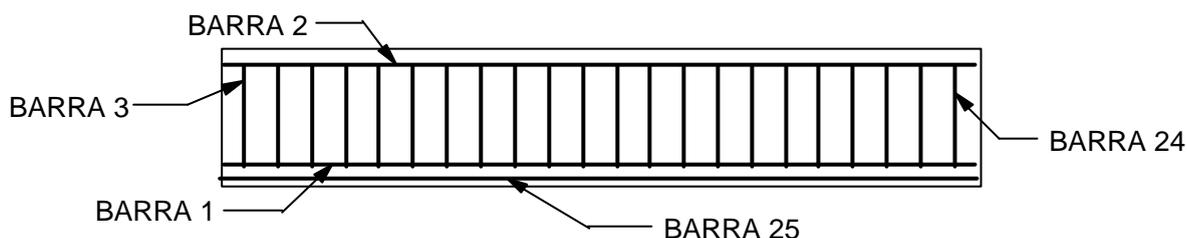


Figura 7.11 – Discretização da armadura da viga reforçada com camada de argamassa aditivada

Nas Figuras 7.12, 7.13 e 7.14, são mostrados, respectivamente, a deformada da viga reforçada com camada de argamassa, o estado de tensões ( $\sigma_x$ ), em  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nos elementos de concreto e nas barras de armadura, sob vários carregamentos, obtidos numericamente pelo programa REFISTRUC.

Nas Figuras 7.15, 7.16 e 7.17, compararam-se os resultados experimentais e os obtidos pelo programa. Estas figuras mostram, respectivamente, flechas, deformações na armadura tracionada e deformações na armadura de reforço da viga reforçada com camada de argamassa aditivada.

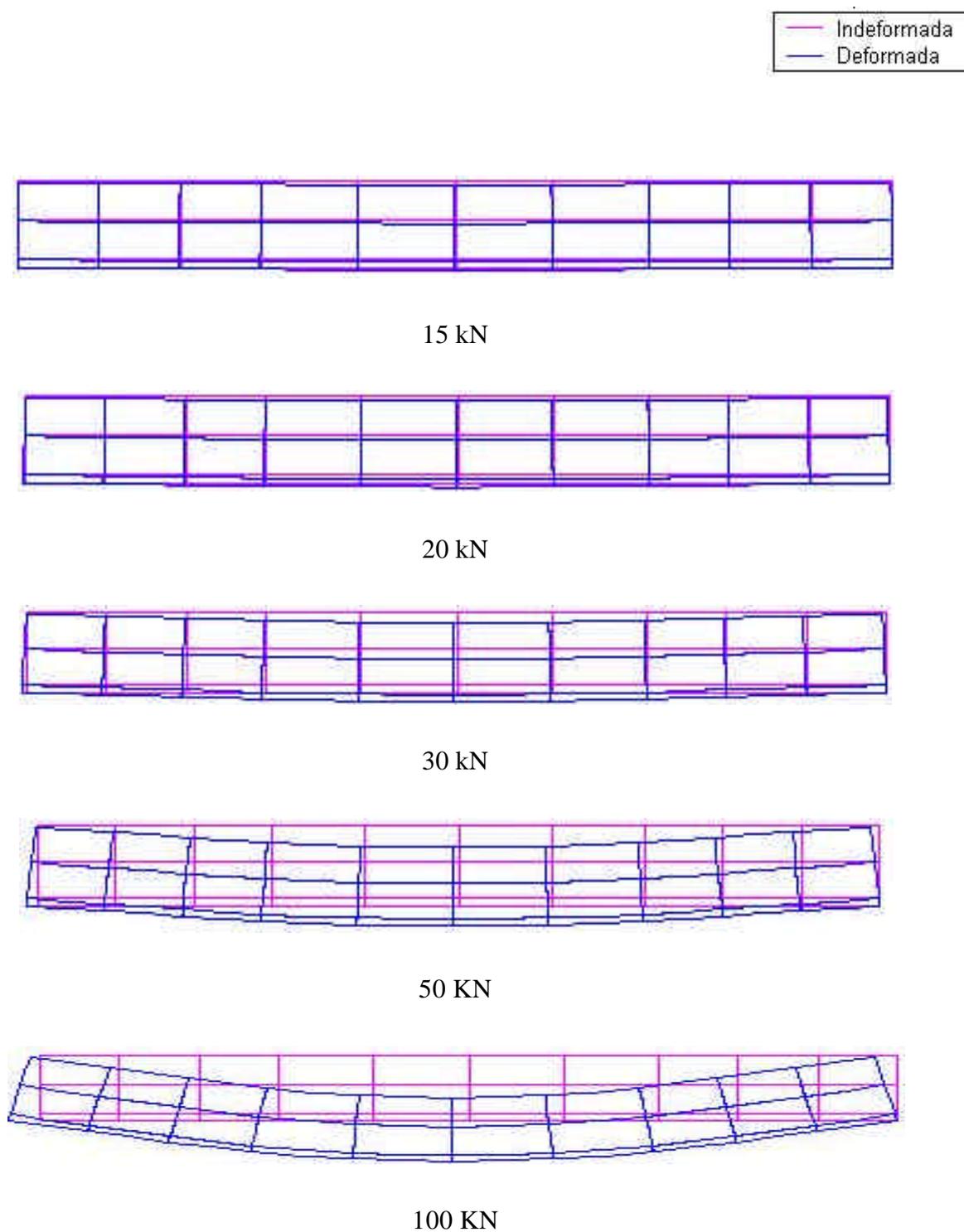


Figura 7.12 – Deformada da viga reforçada com camada de argamassa aditivada

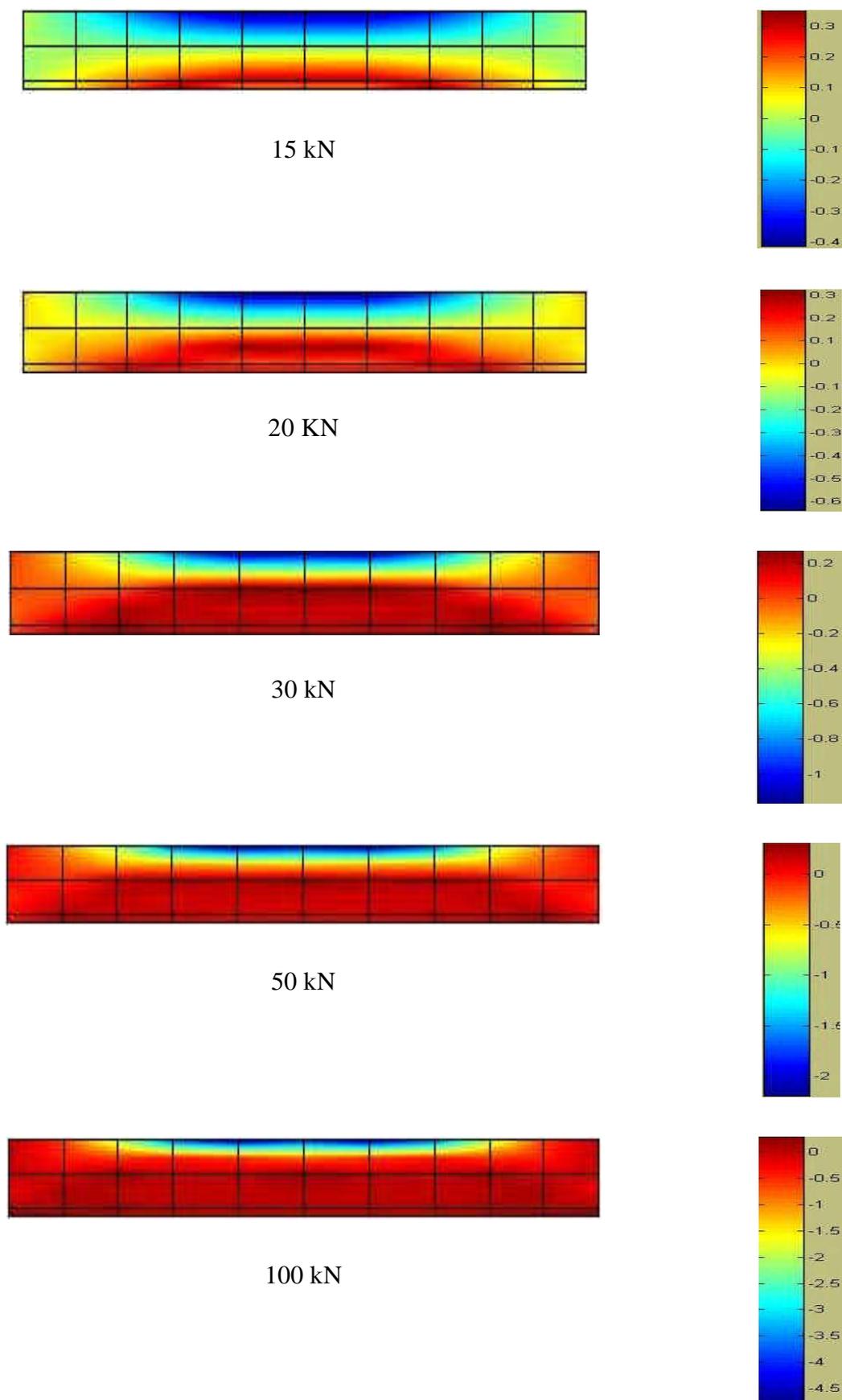


Figura 7.13 – Estado de tensões da viga reforçada com camada de argamassa aditivada em diferentes níveis de carregamento

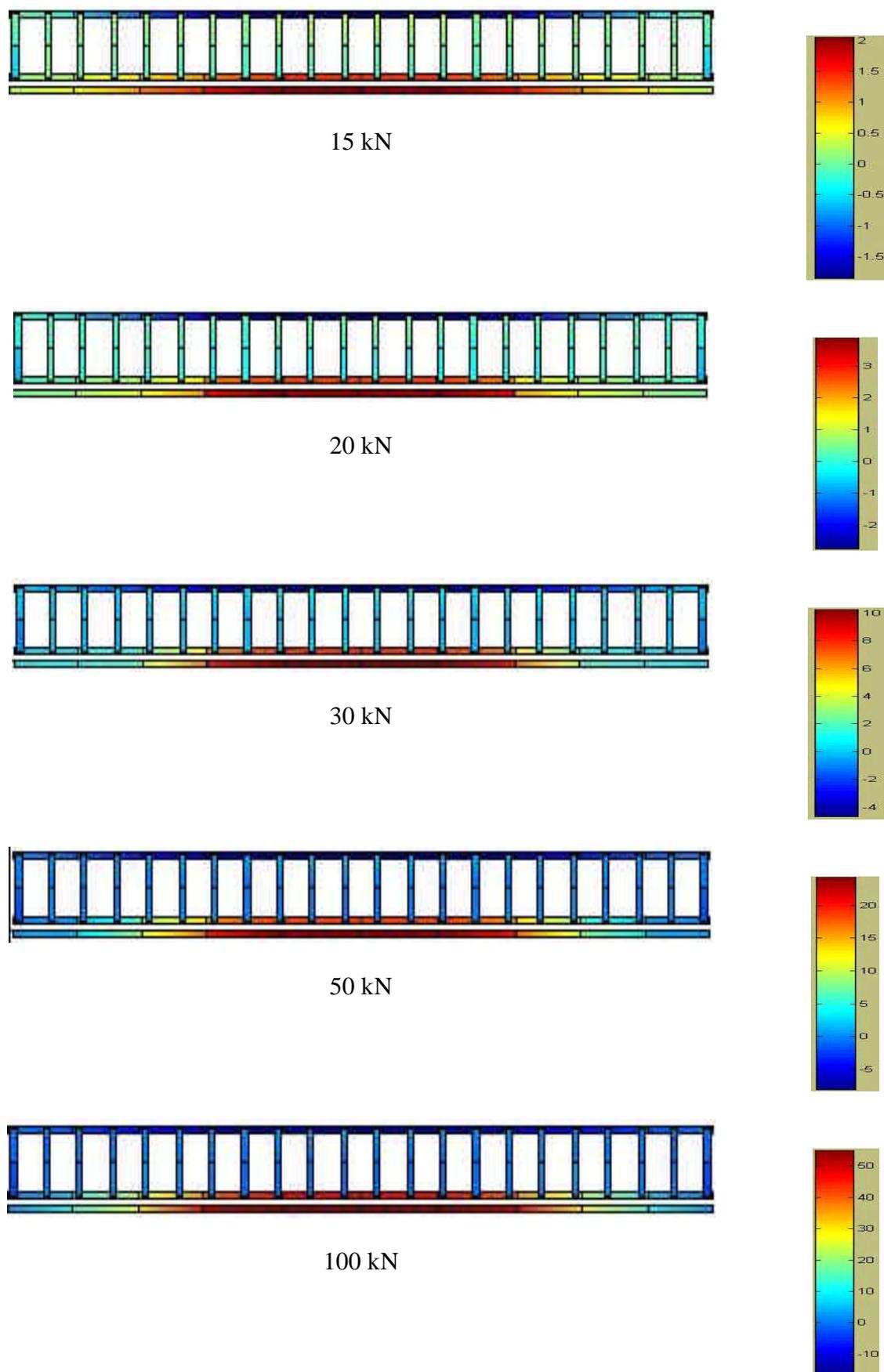


Figura 7.14 – Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento

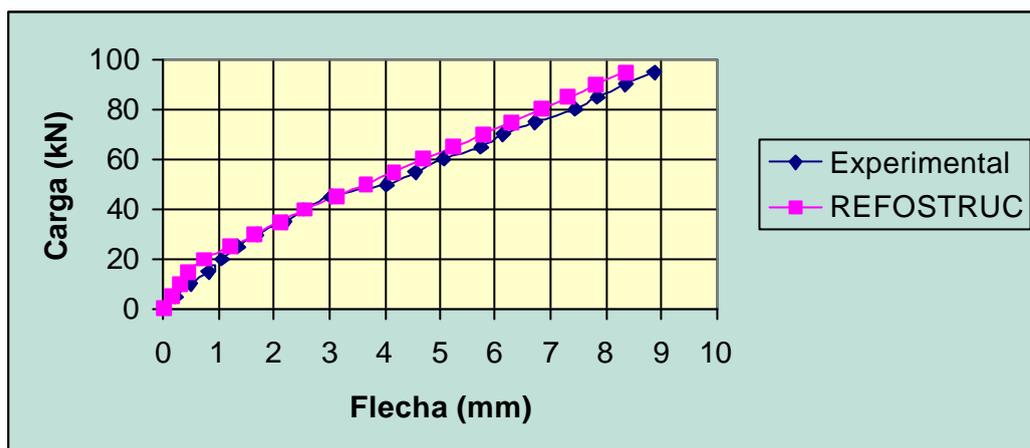


Figura 7.15 – Comparação das flechas da viga reforçada com camada de argamassa aditivada, obtidas experimentalmente e pelo programa

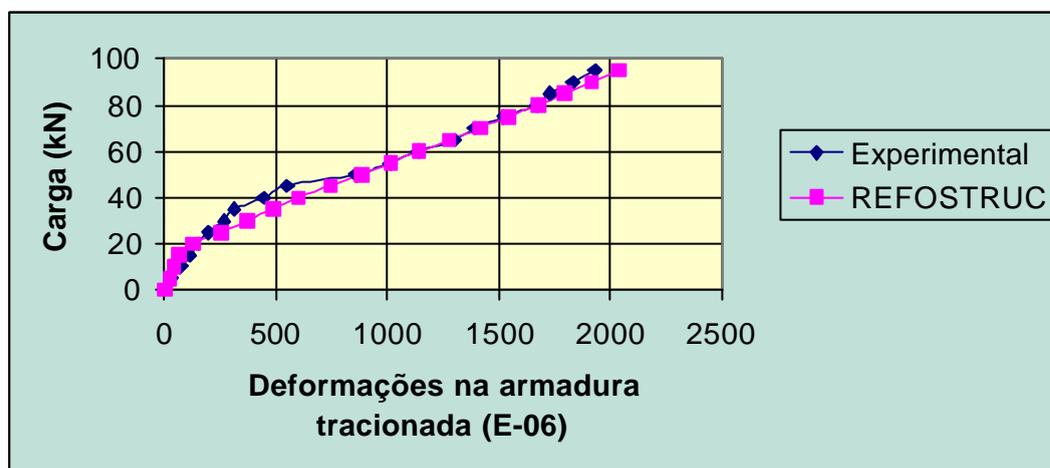


Figura 7.16 – Comparação das deformações na armadura tracionada da viga reforçada com camada de argamassa aditivada, obtidas experimentalmente e pelo programa

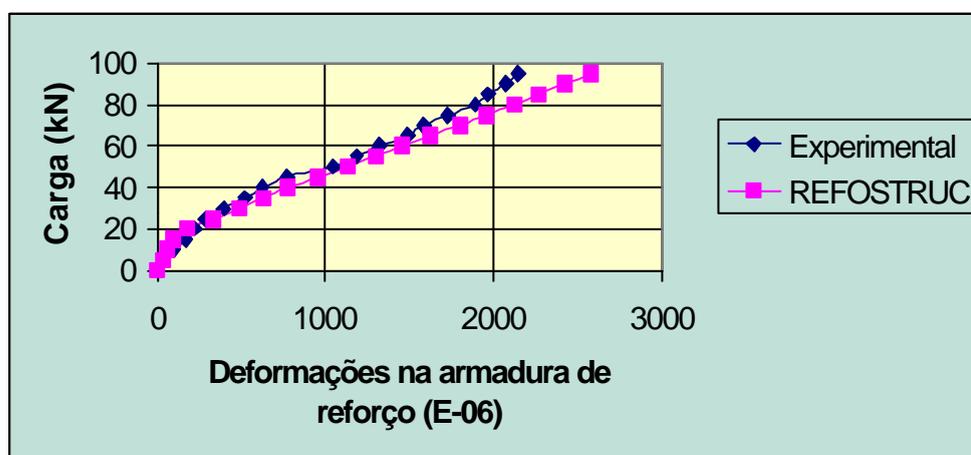


Figura 7.17 - Deformações da armadura longitudinal de reforço

#### 7.4 VIGA REFORÇADA COM CHAPA DE AÇO

Este exemplo apresenta comparações entre resultados do programa computacional com valores experimentais de uma viga reforçada com chapa de aço colada, conforme Campagnolo, Campos Filho e Silva Filho (1997).

A viga reforçada foi submetida a duas cargas concentradas, posicionadas a 78,5 cm de cada apoio. Foram aplicados incrementos de 5 kN de carga, até atingir-se a ruptura, cuja carga foi igual a 114kN.

A viga possui uma seção transversal retangular de 12x25 cm e comprimento de 250 cm, sendo a distância entre os apoios igual a 235 cm. A armadura longitudinal é composta, na face tracionada, por duas barras de aço, bitola de 10 mm ( $f_y = 549$  MPa) e, na face comprimida, por duas barras de aço, bitola de 6,3 mm ( $f_y = 657$  MPa). Os estribos possuem uma armadura de 6,3 mm de diâmetro, com espaçamento uniforme de 11 cm, conforme detalhamento mostrado na Figura 7.18.

A chapa de aço, utilizada no reforço da viga, tinha 2,20 m de comprimento, 12 cm de largura e 2,8 mm de espessura, com tensão média de escoamento de 326 MPa. Foram utilizados, para fixação da chapa, onze parafusos auto-fixantes TB-56080 de 8 mm de diâmetro e 80 mm de comprimento, com disposição conforme indicada na Figura 7.19. Estes parafusos têm resistência ao cisalhamento de 13,5 kN e ao arrancamento de 14,3 kN. Além de fixada com parafusos, a chapa de aço foi colada à viga com resina epóxi.

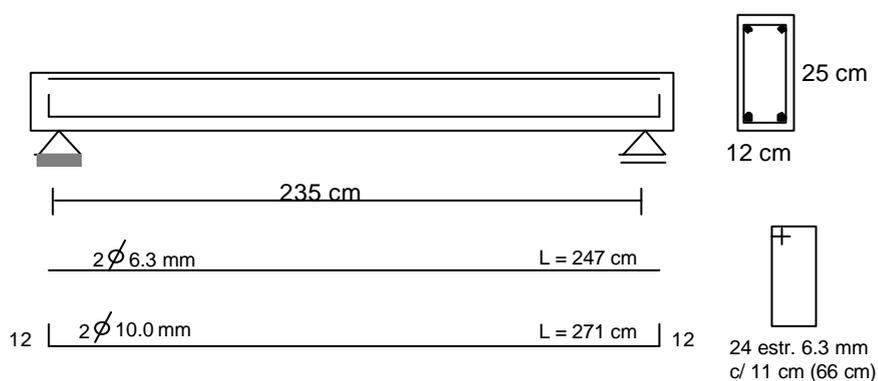


Figura 7.18 – Armadura da viga reforçada com chapa de aço

A resistência média à compressão do concreto aos 28 dias é de 31,26 MPa e a espessura fictícia foi tomada como sendo de 8,1 cm.

Para simular o reforço no programa, considerou-se a chapa de aço como uma barra de seção transversal equivalente à seção transversal da chapa, inserida a 0,1 mm para cima da face inferior da viga. A barra possui uma bitola de 20,68 mm com tensão média de escoamento de 326 MPa e aço tipo A.

A malha de elementos finitos utilizada no programa está discretizada na Figura 7.20. A Figura 7.21 mostra a discretização da armadura da viga reforçada com chapa de aço.

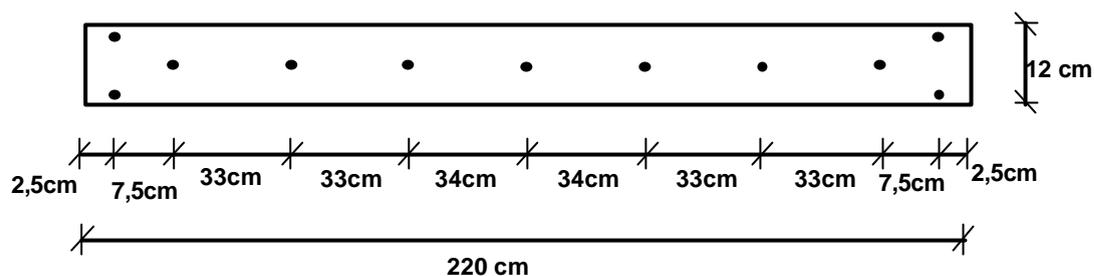


Figura 7.19 – Disposição dos parafusos auto-fixantes na chapa

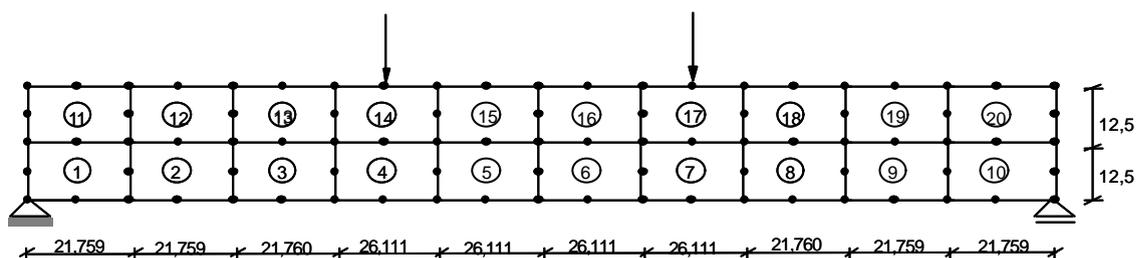


Figura 7.20 – Discretização da viga reforçada com chapa de aço

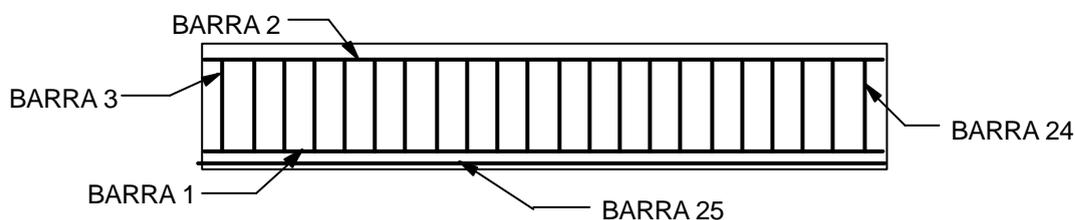


Figura 7.21 – Discretização da armadura da viga reforçada com chapa de aço

As Figuras 7.22, 7.23 e 7.24 apresentam, respectivamente, a deformada da viga reforçada com chapa de aço e o estado de tensões ( $\sigma_x$ ), em  $\text{kN/cm}^2$ , nos elementos de concreto e nas barras de armadura, obtidos numericamente, em diferentes níveis de carregamento.

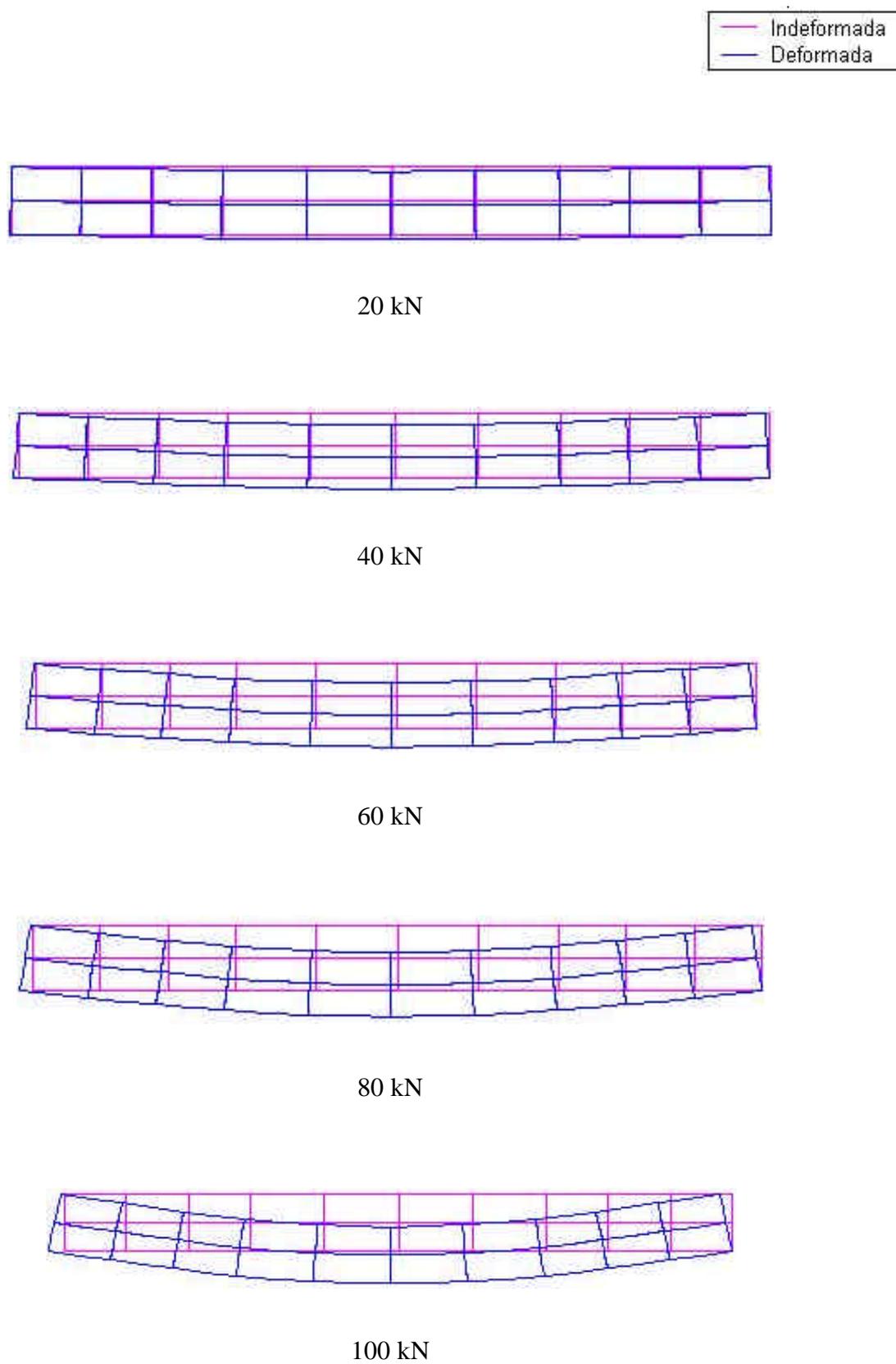


Figura 7.22 – Deformada da viga reforçada com chapa de aço, para diversos carregamentos

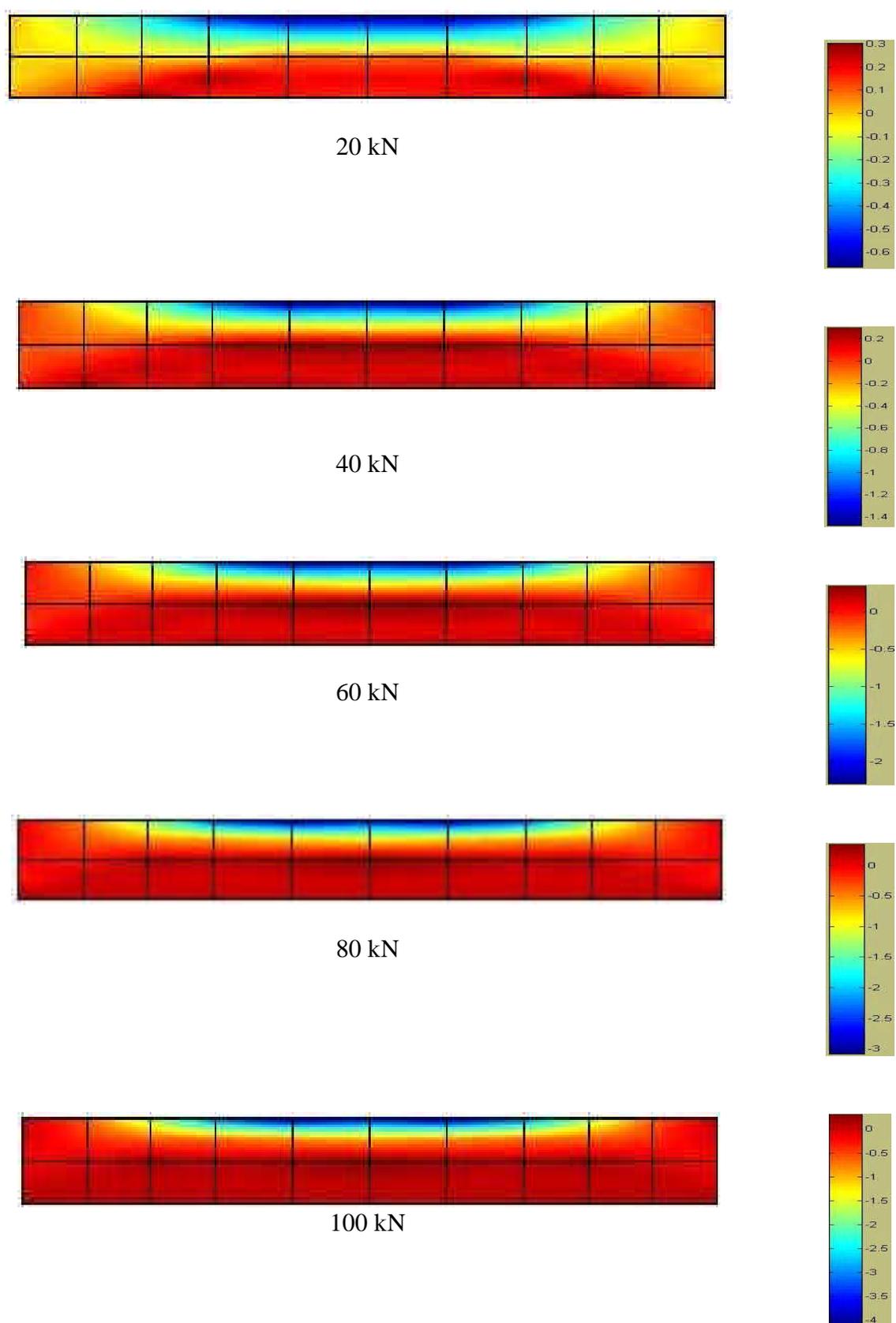


Figura 7.23 – Estado de tensões da viga reforçada com chapa de aço, em diferentes níveis de carregamento

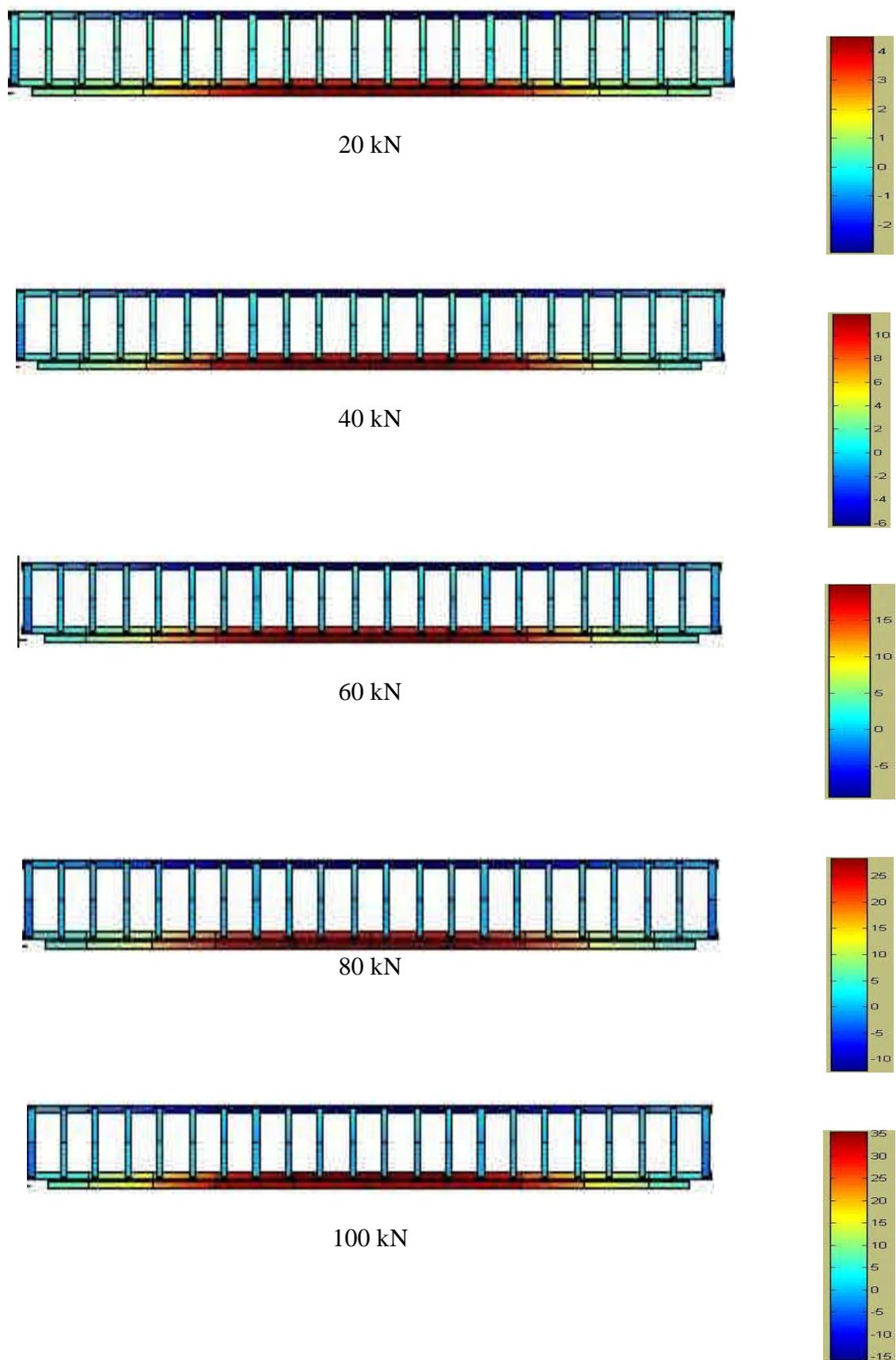


Figura 7.24 – Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento

As Figuras 7.25, 7.26 e 7.27 mostram, respectivamente, a flecha da viga e a deformação na armadura tracionada e na chapa de aço obtidos por resultados experimentais e pelo programa.

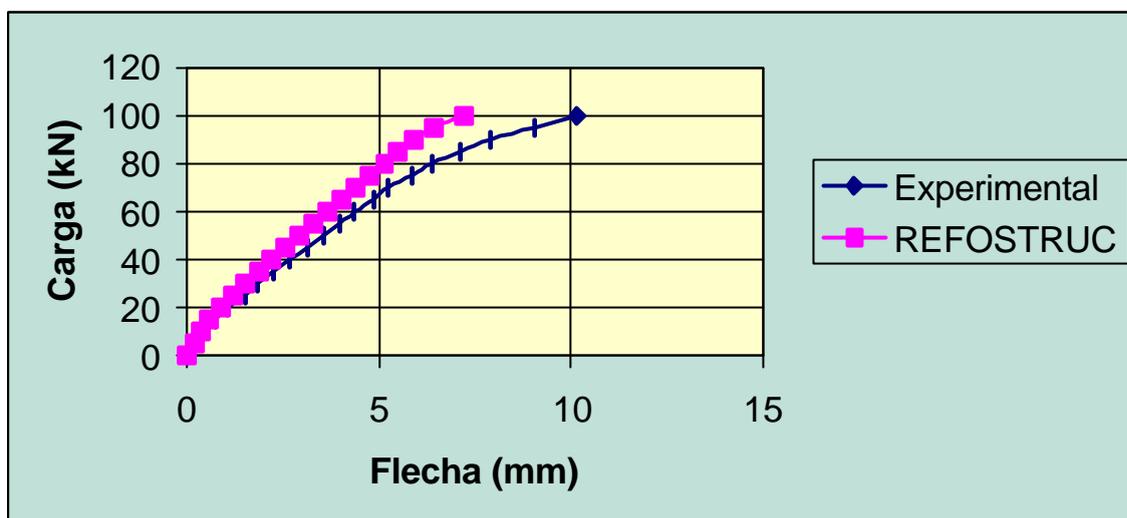


Figura 7.25 - Comparação das flechas da viga reforçada com chapa de aço, obtidas experimentalmente e pelo programa

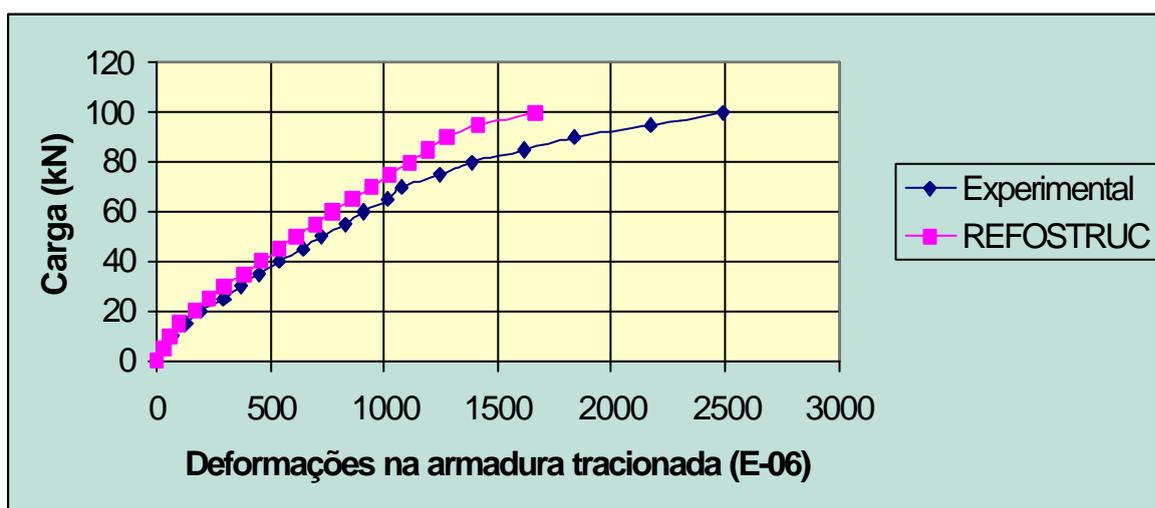


Figura 7.26 – Comparação das deformações na armadura tracionada da viga reforçada com chapa de aço, obtidas experimentalmente e pelo programa

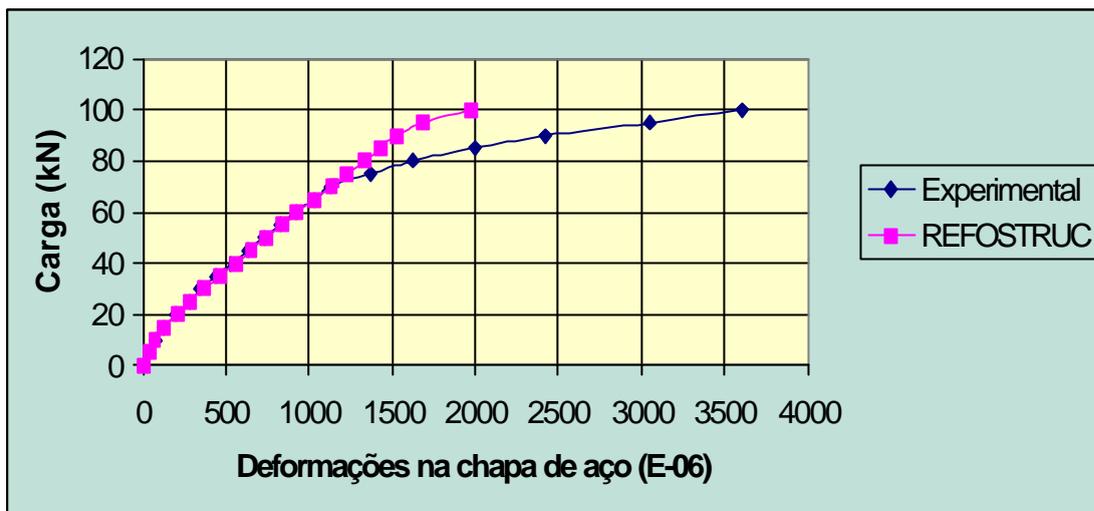


Figura 7.27 – Comparação das deformações na chapa de aço da viga reforçada, obtidas experimentalmente e pelo programa

A discordância dos resultados numéricos e experimentais observada na Figura 7.27, para níveis de carregamento próximos à ruptura, deve-se ao diagrama tensão-deformação adotado para a chapa de aço. Para se obter melhores resultados, seria necessário a determinação experimental do diagrama tensão-deformação para o aço dessa chapa.

## 7.5 VIGAS DE CONCRETO ARMADO COM ARMADURA EXPOSTA

A corrosão da armadura é uma das principais causas de degradação da capacidade portante das peças de concreto armado, quando submetidas a certas condições ambientais. A técnica usual, para restaurar a resistência destas peças, inclui a remoção do concreto que envolve a armadura afetada, para que se verifique o grau de redução da sua seção e seja definido o tipo de recuperação a ser executado (reforço ou substituição das barras de aço). A retirada do concreto tem também o objetivo de eliminar os agentes agressivos, de forma a evitar o reinício do processo após a restauração.

Este exemplo analisa o comportamento estrutural de vigas de concreto armado, quando a armadura está exposta, fazendo comparações entre resultados experimentais e numéricos.

Campagnolo, Campos Filho e Silva Filho (1995) realizaram ensaios em vigas de concreto armado (Figuras 7.28). Estas vigas tinham uma seção transversal de 8 x 18 cm e um comprimento de 210 cm, sendo a distância entre os apoios de 200 cm.

O concreto, utilizado para a confecção das vigas, apresentou, na data do ensaio, uma resistência à compressão média de 45 MPa. Foi utilizado o aço CA-50A para a armadura longitudinal de tração e o aço CA-60B para os estribos e para a armadura longitudinal de compressão. As barras das bitolas utilizadas apresentaram tensão de escoamento de 647 e 892 MPa para os aços CA-50A e CA-60B, respectivamente. As vigas foram concretadas deixando o trecho central da armadura longitudinal de tração exposta (comprimentos de 100 e 170 cm). A carga foi aplicada em incrementos de 2 kN, em dois pontos simétricos da viga, de forma concentrada. Estes dois pontos eram localizados nos terços médios do vão da viga.

A malha de elementos finitos utilizada neste exemplo é composta por 24 elementos finitos, conforme Figuras 7.29 e 7.30. A discretização da armadura, apresenta-se na Figura 7.31.

São fornecidos, no arquivo de entrada, dados sobre a inexistência do concreto em determinada região. Assim, o programa identifica quais elementos possuem armadura exposta e, automaticamente, anula as tensões no concreto destes elementos. Os nós da borda superior dos elementos finitos dessa região são independentes dos nós dos elementos adjacentes.

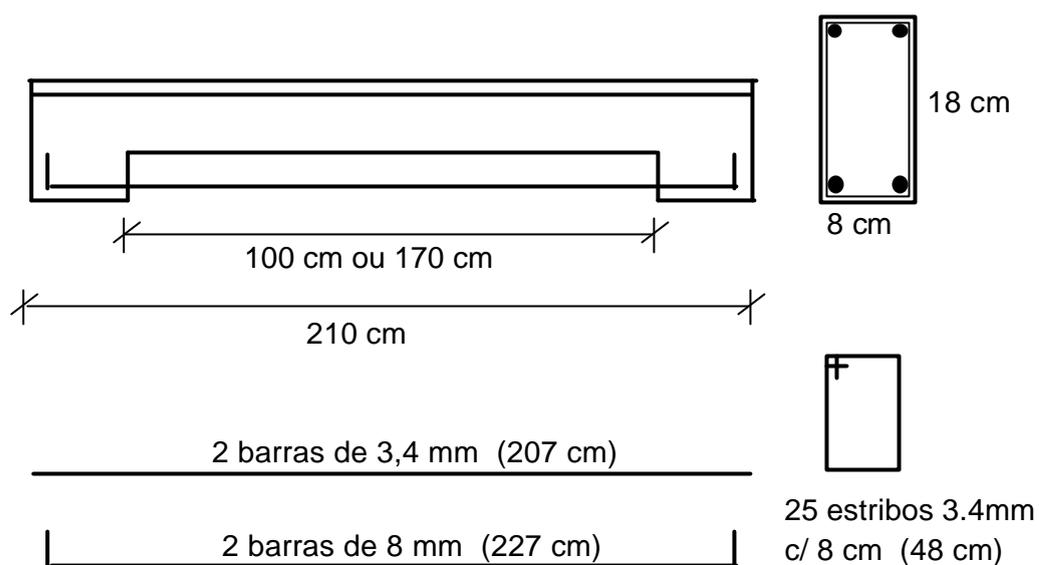


Figura 7.28 – Detalhamento das vigas ensaiadas

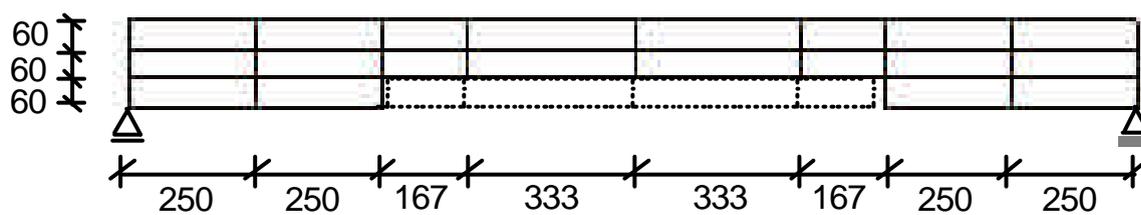


Figura 7.29- Malha de elementos finitos adotada para a viga com armadura exposta em um trecho de 100 cm

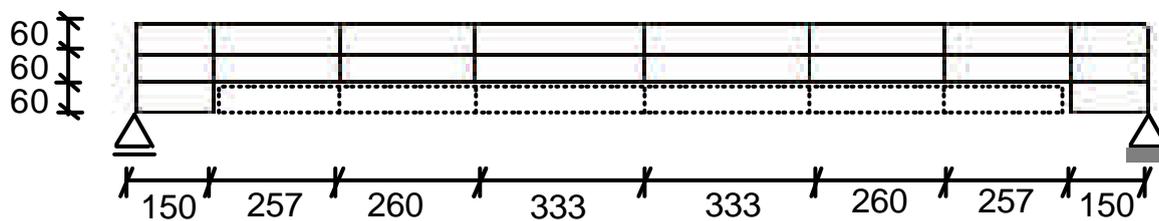


Figura 7.30- Malha de elementos finitos adotada para a viga com armadura exposta em um trecho de 170 cm

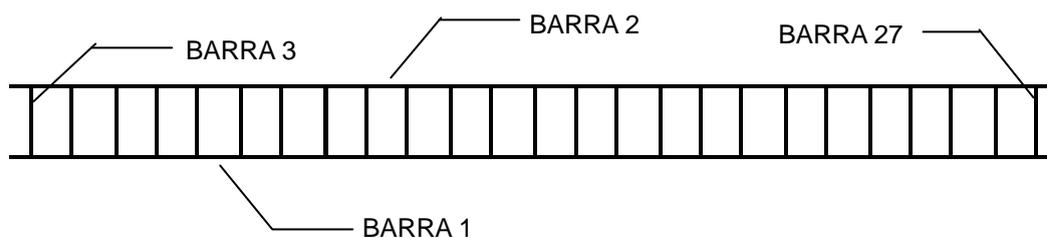


Figura 7.31 – Discretização da armadura

Nas Figuras 7.32, 7.33 e 7.34, é apresentada a deformada e o estado de tensões ( $\sigma_x$ ), em  $\text{kN/cm}^2$ , nos elementos de concreto e nas barras de armadura da viga com armadura exposta em um trecho de 100 cm, para diversos níveis de carregamento. O mesmo é apresentado nas Figuras 7.36, 7.37 e 7.38, para a viga com armadura exposta em um trecho de 170 cm.

As Figuras 7.35 e 7.39 apresentam a comparação entre os resultados experimentais e computacionais, para a flecha nas vigas com armadura exposta ao longo dos trechos com 100 cm e 170 cm, respectivamente.

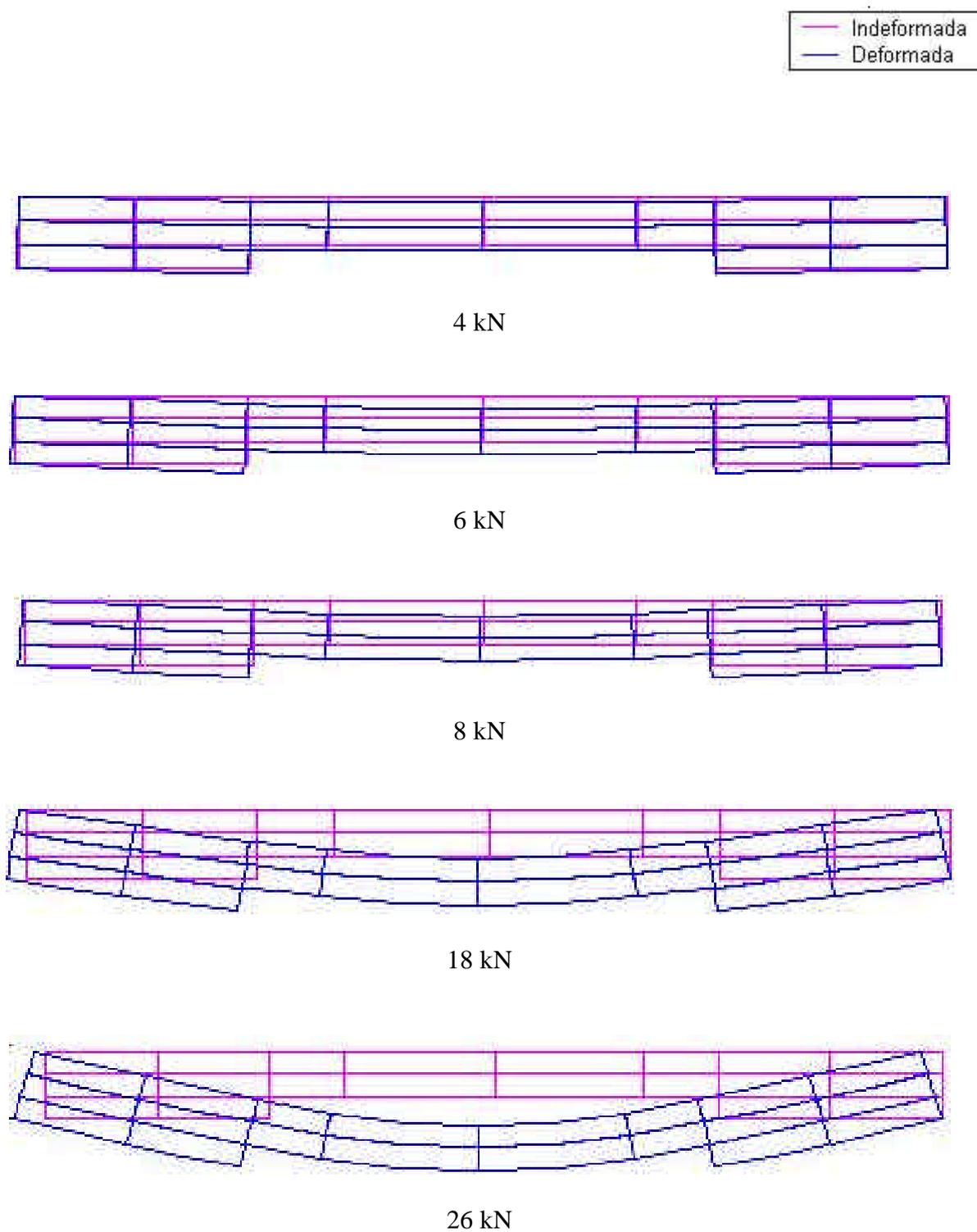


Figura 7.32 – Deformada da viga com armadura exposta ao longo de 100 cm

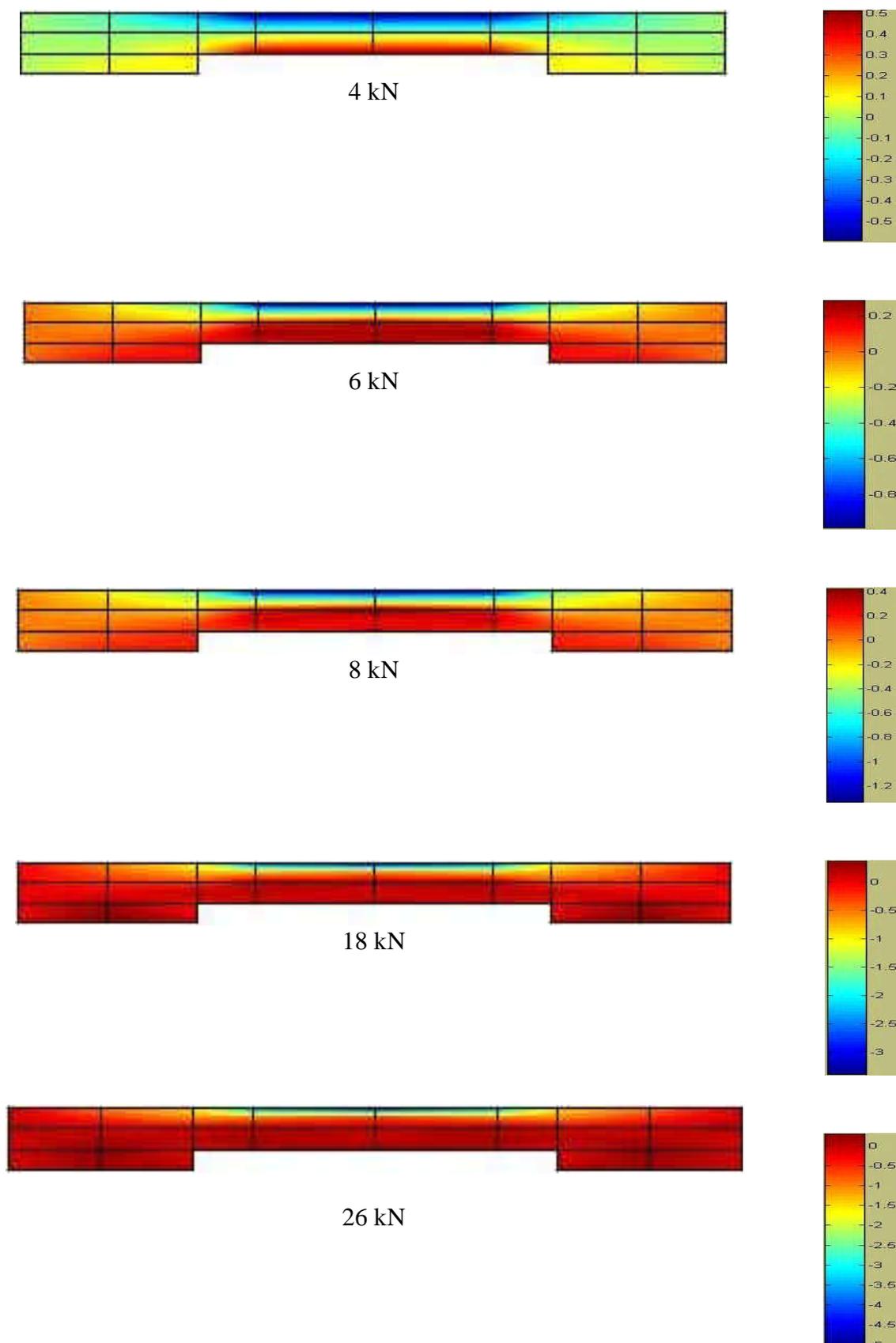


Figura 7.33 – Estado de tensões da viga com armadura exposta ao longo de 100 cm

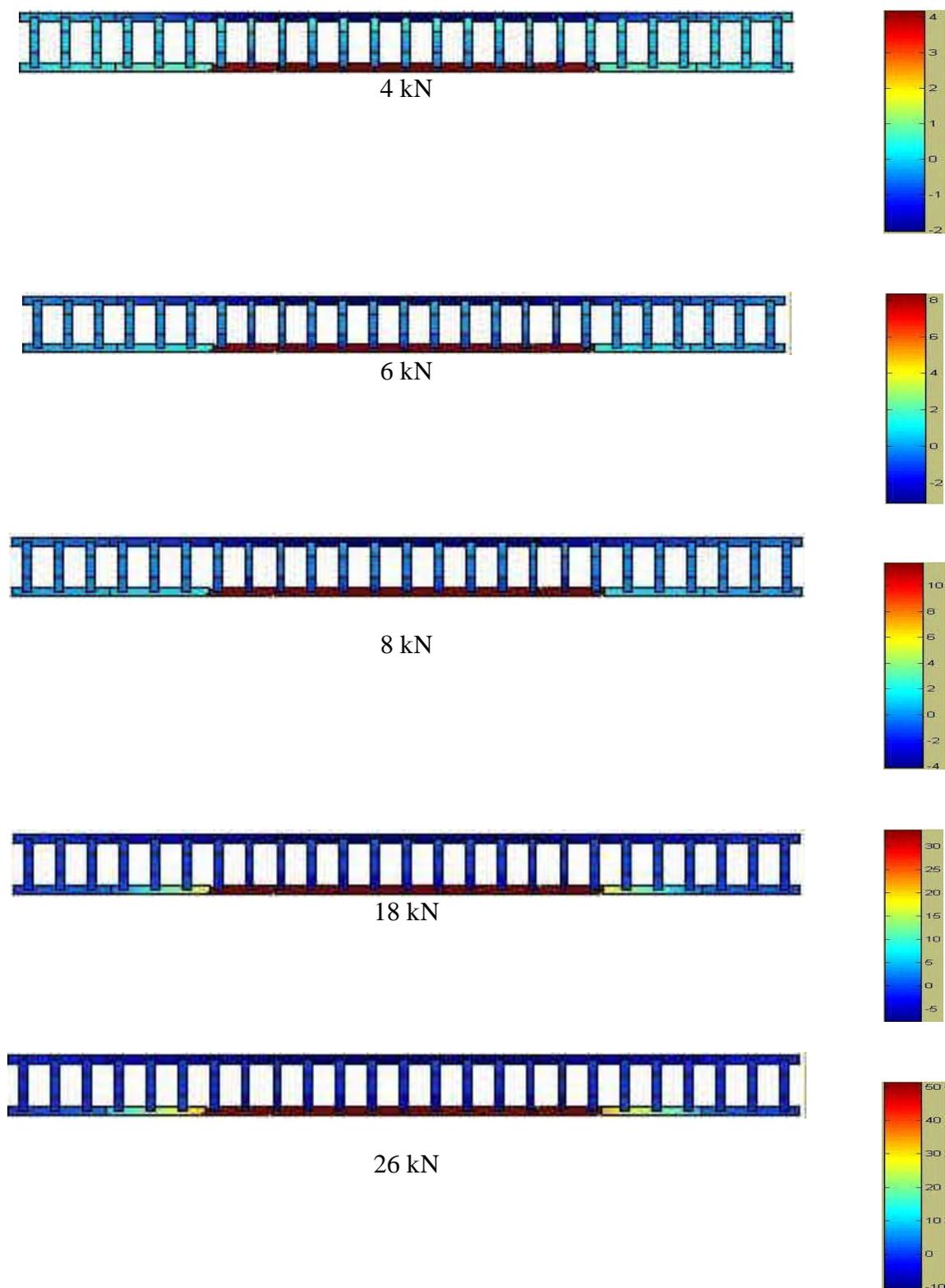


Figura 7.34 – Estado de tensões da armadura, com comprimento exposto igual a 100 cm

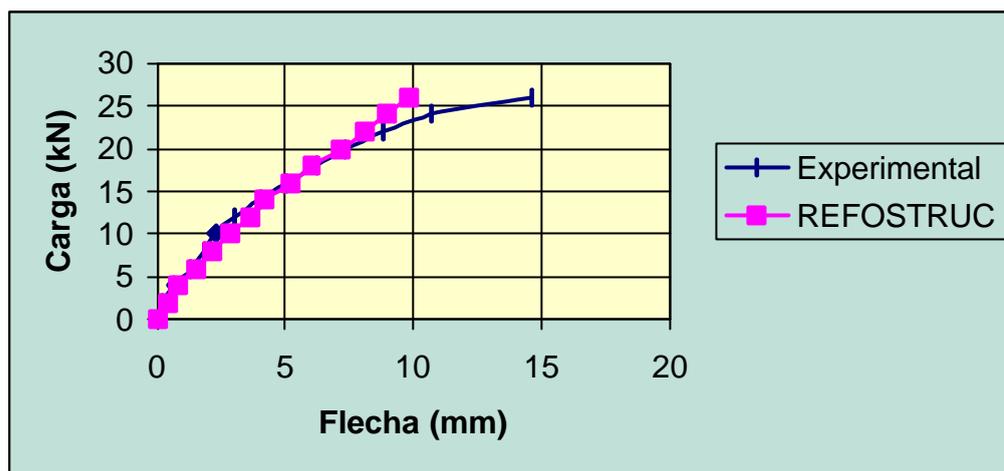


Figura 7.35 – Comparação das flechas numéricas e experimentais para a viga com armadura exposta ao longo de 100 cm

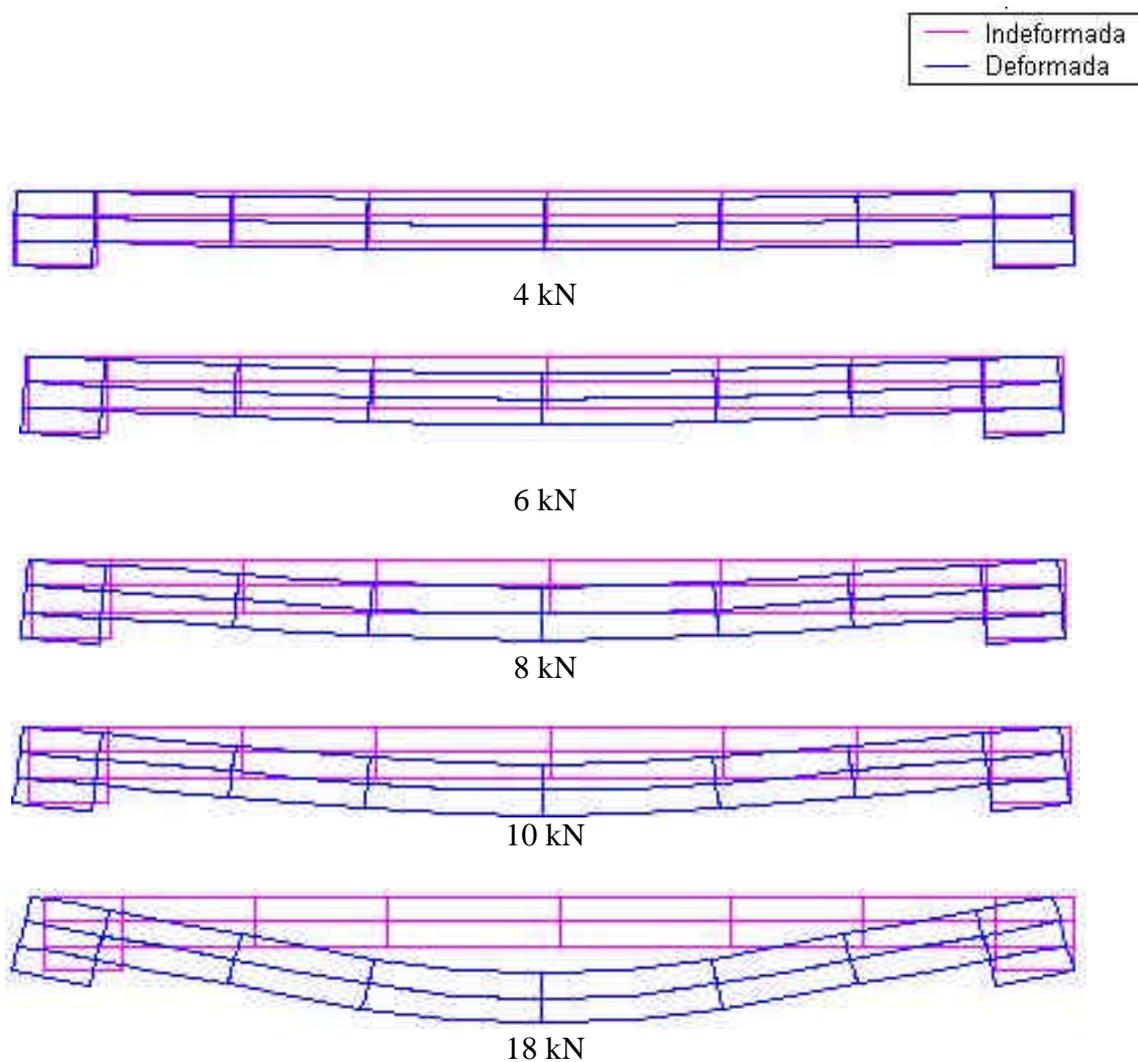


Figura 7.36 – Deformada da viga com armadura exposta em um trecho de 170 cm

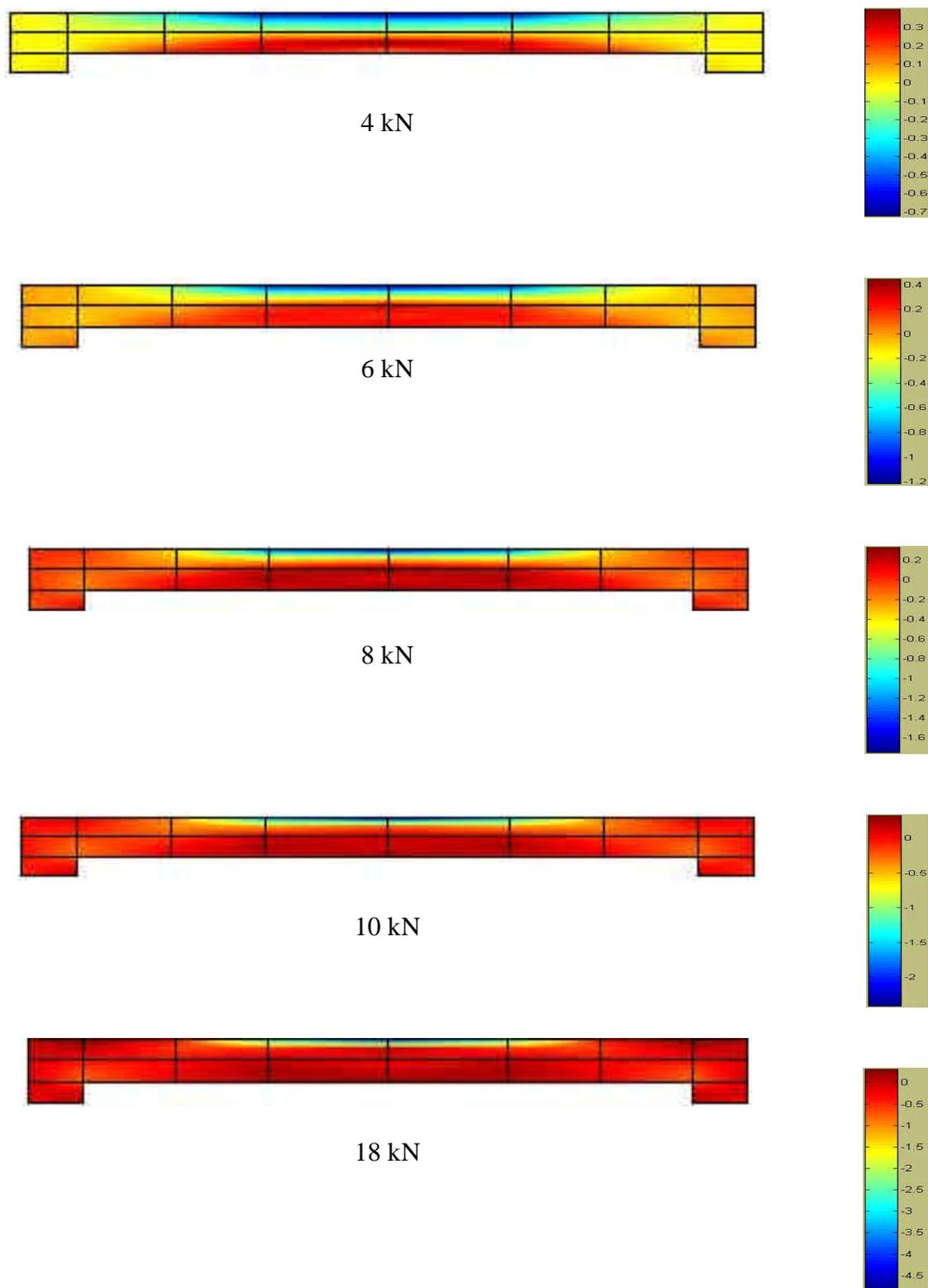


Figura 7.37 – Estado de tensões da viga com armadura exposta ao longo de 170 cm

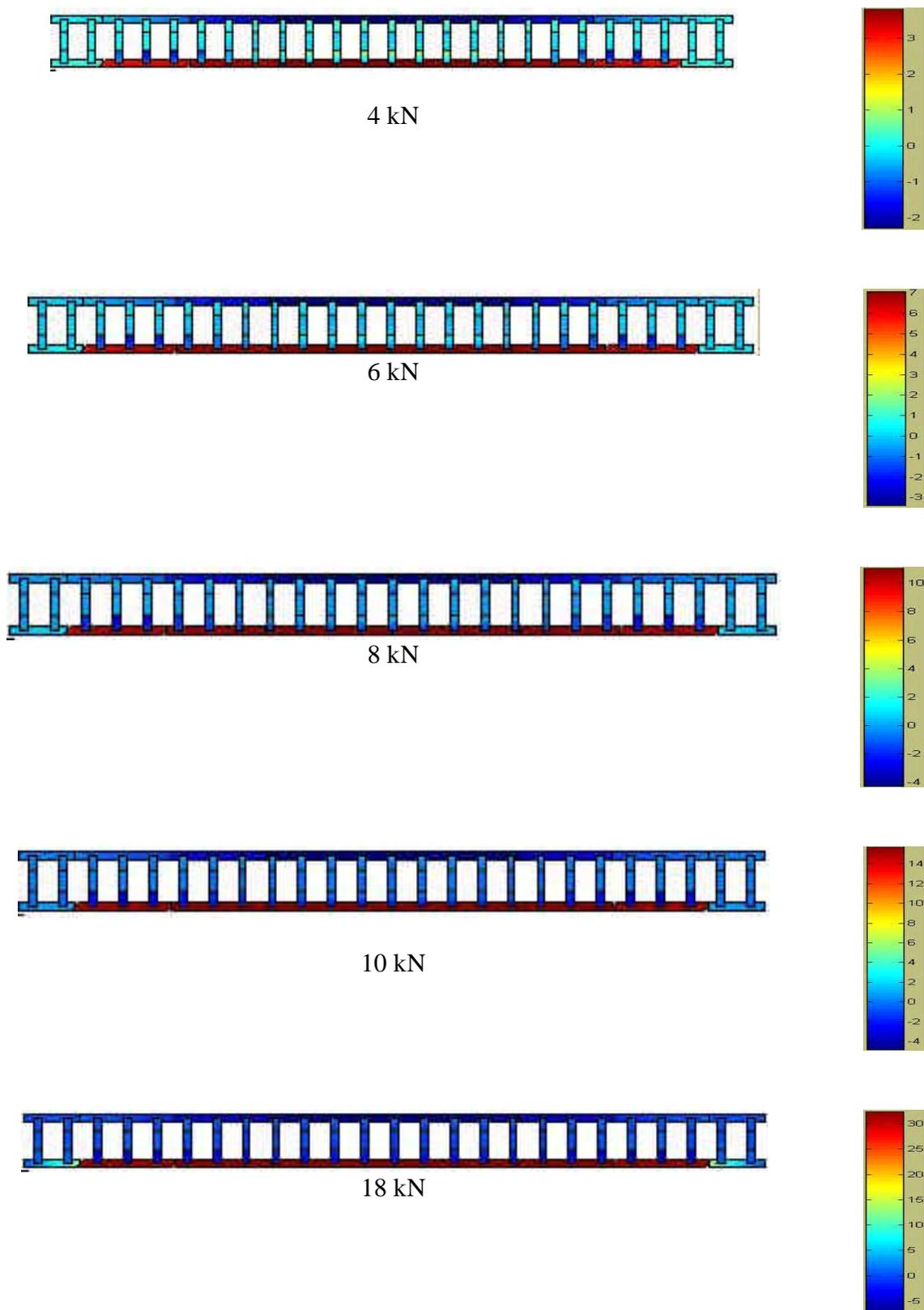


Figura 7.38 – Estado de tensões da armadura, com comprimento exposto igual a 170 cm

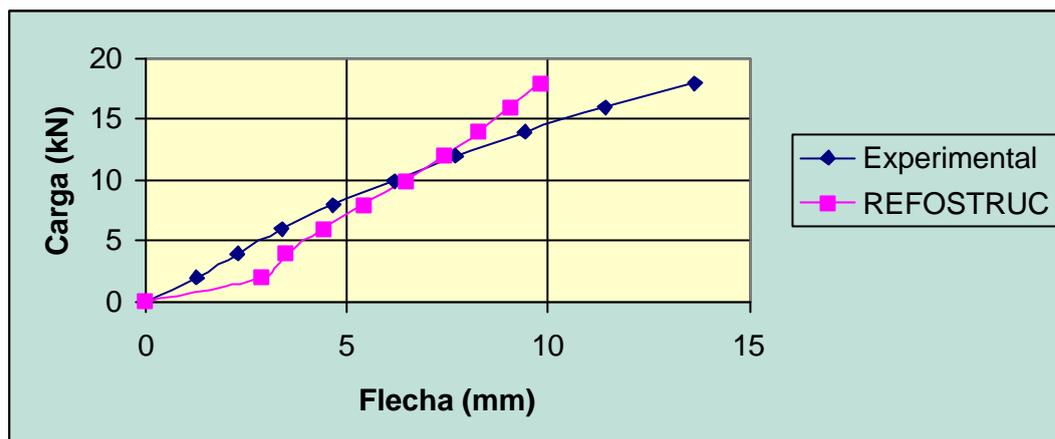


Figura 7.39 – Comparação das flechas numéricas e experimentais para a viga com armadura exposta ao longo de 170 cm

Pode-se observar, na Figura 7.38, o aparecimento de tensões de compressão na face inferior no concreto, no início do trecho de armadura exposta. Isto ocorre devido às condições de equilíbrio que a viga deve satisfazer.

Para demonstrar este fenômeno, Cairns e Zhao (1993) consideraram o concreto com um comportamento elástico-linear e desprezaram a tensão de tração no concreto. As condições de equilíbrio de forças e de compatibilidade de deformações devem ser satisfeitas seja a seção com armadura exposta ou não.

Uma das condições de equilíbrio que deve ser satisfeita é que as forças internas devem estar em equilíbrio com o momento aplicado. Esta condição é dada pela equação 7.2.

$$A_{st} f_{st} z = M \quad (7.2)$$

onde  $A_{st}$  é a área da seção transversal da barra de armadura;  $f_{st}$  é a tensão atuante em uma seção da barra de armadura;  $z$  é o braço de alavanca e  $M$  é o momento aplicado numa determinada seção.

É evidente que, devido à ausência de aderência, a tensão de tração na armadura será uniforme em todo o trecho de armadura exposta. A área da seção transversal da barra de armadura é constante em todo o vão da viga. Desta forma, para que seja satisfeita a condição de equilíbrio mostrada na equação 7.2, o braço de alavanca numa determinada seção deverá ser proporcional ao momento aplicado nesta mesma seção.

Verifica-se na Figura 7.40 que a área do diagrama de tensões de compressão, representada pelo trecho em cinza, é alterada de acordo com a redução do valor do momento aplicado à seção, surgindo, portanto, tensões de compressão na face inferior da viga.

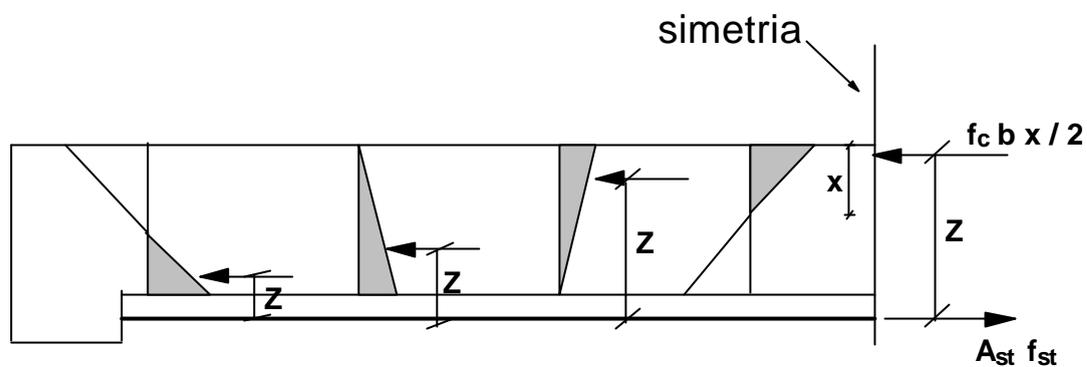


Figura 7.40 – Diagrama de tensões no concreto em diversas seções da viga de armadura exposta

## **8 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE SITUAÇÕES DE REFORÇO DE VIGAS SOB CARREGAMENTO APLICADO**

### **8.1 INTRODUÇÃO**

Este capítulo apresenta comparações entre resultados experimentais e simulações computacionais de situações de reforço em vigas sob carregamento aplicado. As vigas foram ensaiadas no Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos- USP, por Reis (2002).

Foi escolhido como tipo de reabilitação à flexão das vigas a adição de microconcreto de alta resistência no banzo comprimido da viga.

A nomenclatura adotada, no trabalho experimental, para representar as vigas reabilitadas foi a seguinte:

V: tipo de elemento a ser reforçado que, no caso, corresponde a uma viga

F: solicitação para a qual a capacidade resistente está sendo ampliada, no caso, de flexão

C: posição do reforço, bordo comprimido, na situação analisada.

Em relação às solicitações atuantes nas peças, estabeleceu-se que o pré-carregamento aplicado às vigas originais (vigas moldadas antes da execução do reforço), teria um valor aproximadamente igual ao da carga de serviço suportada pela peça. Esta carga de serviço foi calculada utilizando os valores característicos dos materiais (aço e concreto) e os respectivos coeficientes de segurança indicados em norma.

As vigas originais que seriam reforçadas foram dimensionadas como peças superarmadas de forma que se houvesse uma ruptura, esta ocorreria por esmagamento do

concreto comprimido de maneira frágil (domínio 4). Entretanto, após a execução do reforço todas as vigas reforçadas deveriam romper no domínio 3 (escoamento da armadura transversal, seguido do esmagamento do concreto). Para dimensionar tanto as peças originais quanto as reabilitadas, utilizaram-se os procedimentos de cálculo da NBR-6118 (1978). Como pretendia-se evitar que as vigas reforçadas rompessem por ação do esforço cortante, superdimensionou-se sua armadura transversal.

## 8.2 VIGAS REFORÇADAS NO BORDO COMPRIMIDO (VFC)

### 8.2.1 Considerações Gerais

Para avaliar os efeitos da retração e fluência na redistribuição das tensões na seção transversal dos elementos reabilitados e, também, o efeito da existência de um pré-carregamento atuante na peça durante a execução do reforço, foram confeccionadas três vigas de mesmas dimensões e taxas de armadura, Tabela 8.1. Em função do instante da aplicação do pré-carregamento e de seu valor, subdividiu-se o ensaio das vigas VFC em várias etapas conforme Tabela 8.2.

Tabela 8.1- Características das vigas ensaiadas, por Reis (2002)

Viga	Característica do reforço aplicado a viga
VFC-1	Peça reforçada submetida a solicitações de longa duração por meio da aplicação de um pré-carregamento em duas etapas. A primeira etapa foi aplicada após 7 dias da moldagem do substrato e a segunda foi aplicada 30 dias após a execução do reforço.
VFC-2	Peça reforçada que não foi submetida a nenhum tipo de solicitação antes da realização do ensaio final.
VFC-3	Peça reforçada submetida a solicitações de longa duração por meio da aplicação de um pré-carregamento em uma única etapa, aplicada após 7 dias da moldagem do substrato.

Tabela 8.2- Etapas de ensaio das vigas VCF por Reis (2002)

Etapa de ensaio da viga	Idade (dias)	Intervalo de tempo após o início do carregamento (dias)	Intervalo de tempo entre cada etapa (dias)
VFC -1			
Moldagem	0	-	-
Protensão 1	7	1	7
Reforço no bordo comprimido	39	33	33
Protensão 2	75	69	36
Ensaio Final	104	98	28
VFC -2			
Moldagem	0	-	-
Reforço no bordo comprimido	40	-	40
Ensaio Final	125	-	85
VFC-3			
Moldagem	0	-	-
Protensão 1	7	1	7
Reforço no bordo comprimido	76	69	69
Ensaio Final	147	141	72

As vigas VFC-1 e VFC-3 foram submetidas a pré-carregamento por protensão. Para produzir as forças necessárias, o cabo de protensão devia ter uma configuração poligonal, saindo da extremidade da viga com uma inclinação de  $18^\circ$  e sendo desviado à uma altura de aproximadamente 55 cm a partir da face superior da viga (bordo comprimido) para a seção situada a 125 cm dos apoios (Figura 8.1).

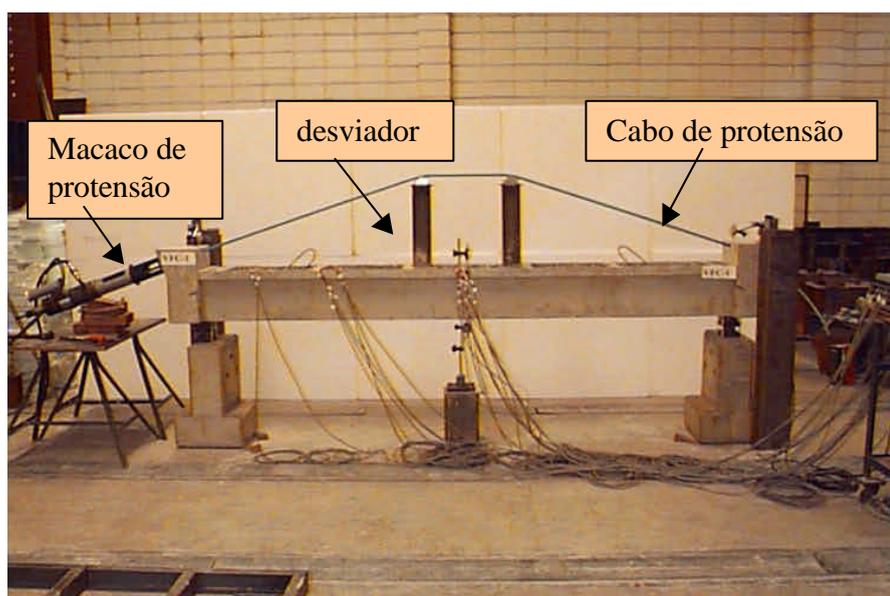


Figura 8.1 Esquema de aplicação do pré-carregamento por protensão, por Reis (2002)

### 8.2.2 Caracterização dos materiais

As propriedades dos materiais utilizados na confecção das vigas, Reis (2002), estão apresentadas nas Tabelas 8.3 e 8.4.

Tabela 8.3 – Características do concreto e do microconcreto do reforço, Reis (2002)

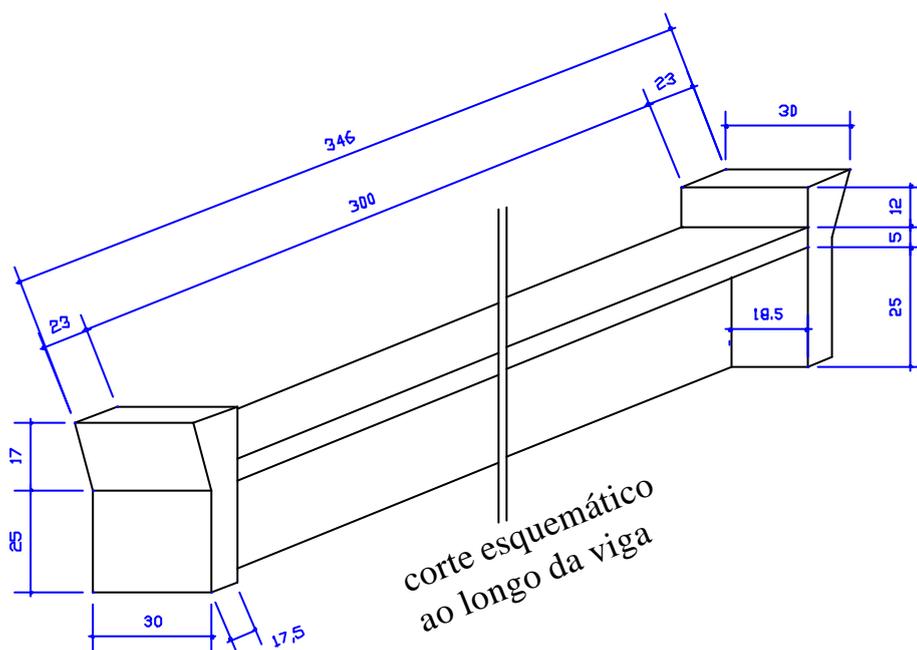
Etapas do ensaio	Idade (dias)	Data	Substrato			Reforço		
			fcj (MPa)	ftj (MPa)	Eco (MPa)	fcj (MPa)	ftj (MPa)	Eco (MPa)
<b>VFC-1</b>								
Concretagem do substrato	0	04/01/01	-	-	-	-	-	-
Protensão 1	7	11/01/01	14,61	1,90	11296	-	-	-
Concretagem do reforço	39	12/02/01	21,51	2,73	24378	-	-	-
Protensão 2	75	20/03/01	22,06	2,37	26000	66,24	5,07	34952
Ensaio da peça	104	18/04/01	25,79	2,69	26403	71,55	5,46	35718
<b>VFC-2</b>								
Concretagem do substrato	0	20/07/01	-	-	-	-	-	-
Concretagem do reforço	40	29/08/01	22,66	2,04	ND	-	-	-
Ensaio da peça	125	21/11/01	26,48	3,04	ND	92,36	5,17	ND
<b>VFC-3</b>								
Concretagem do substrato	0	29/06/01	-	-	-	-	-	-
Protensão 1	7	04/07/01	16,19	1,90	ND	-	-	-
Concretagem do reforço	76	10/09/01	29,90	3,00	ND	-	-	-
Ensaio da peça	147	20/11/01	32,59	3,46	ND	95,08	6,34	ND
OBS:								
ND- corresponde aos resultados que ainda não estão disponíveis								

Tabela 8.4 – Características das armaduras, Reis (2002)

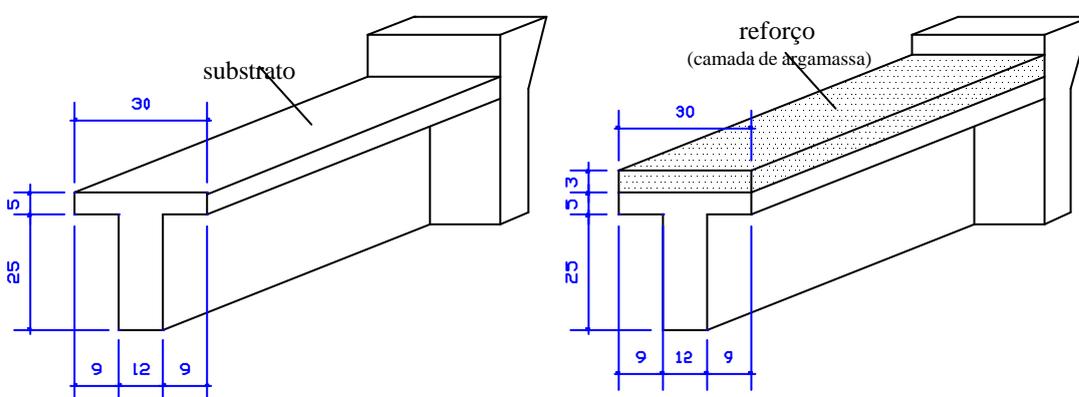
$\phi$ (mm)	Tipo de armadura	fy (MPa)	fu (MPa)	$\epsilon_y$ (‰)
<b>VFC-1</b>				
6,3	CA 60B - Asl'	605	844	2,95
10	CA 50A - Asw	521	833	2,54
20	CA 50A - Asl1 e Asl2	561	682	2,74
<b>e VFC-3</b>				
<b>VFC-2</b>				
6,3	CA 60B - Asl'	633	824	3,09
10	CA 50A - Asw	564	653	2,75
20	CA 50A - Asl1 e Asl2	525	637	2,56

### 8.2.3 Características das vigas VFC (armaduras e dimensões)

As dimensões das vigas reforçadas no bordo comprimido (vigas tipo VFC) e o detalhamento de suas armaduras estão nas Figuras 8.2 a 8.4. Percebe-se que a seção transversal destas vigas não é constante pois suas extremidades são formadas por dois blocos de concreto. Isso foi feito para permitir a ancoragem do cabo não aderente protendido, responsável por gerar o pré-carregamento da peça.

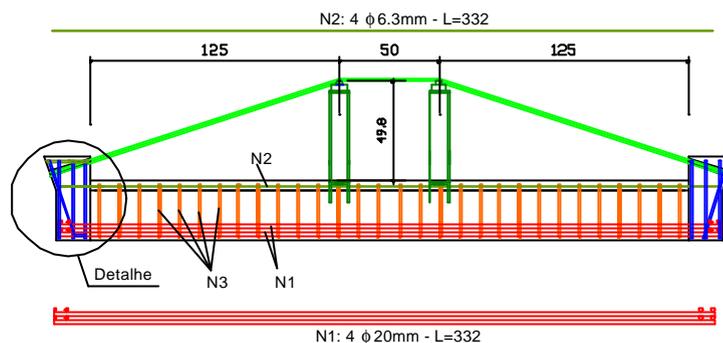


(a) Dimensões das vigas VFC

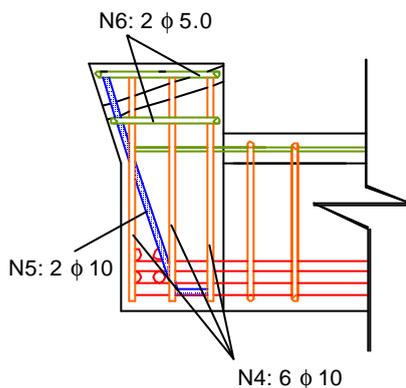


(b) Dimensões da seção transversal para a região do corte esquemático

Figura 8.2– Dimensões das VFC



(a) Detalhe das armaduras na seção longitudinal



(c) Detalhe das armaduras do bloco de ancoragem

Figura 8.3 – Armadura da VFC

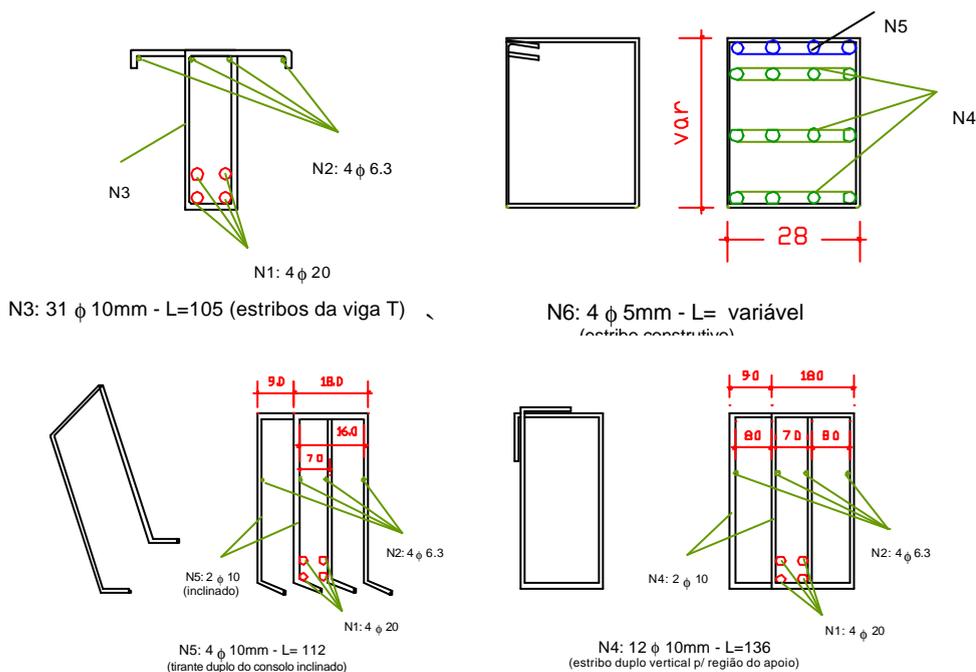


Figura 8.4– Detalhe das armaduras na seção transversal da VFC

### 8.2.4 Obtenção das cargas devidas a protensão

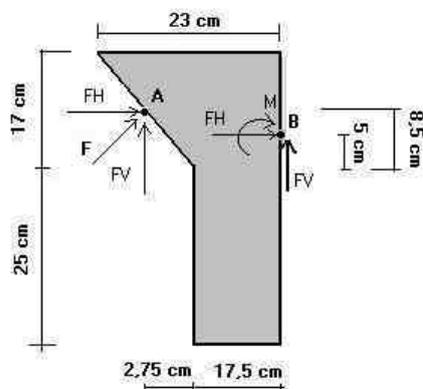


Figura 8.5- Aplicação da força de protensão F

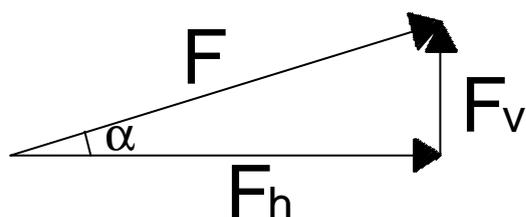


Figura 8.6- Decomposição da força F

A força F é a força de protensão aplicada no ponto A, decomposta nas forças FH e FV, horizontal e vertical, respectivamente.

No ponto B, no topo da seção T da viga, as componentes da força são aplicadas levando junto o momento fletor M.

Assim,

$$\alpha = 18^\circ$$

$$FV = FH \operatorname{tg} \alpha = FH \operatorname{tg} 18^\circ = 0,325 FH$$

$$M = (FH \times 3,5) + (FV \times 20,25)$$

$$M = (FH \times 3,5) + (0,325 FH \times 20,25)$$

$$M = 10,05 FH$$

Em posse do momento  $M$  calcula-se então o binário aplicado nos nós 1 e 61 :

$$B = \frac{M}{30} = \frac{10,05FH}{30} = 0,335 FH$$

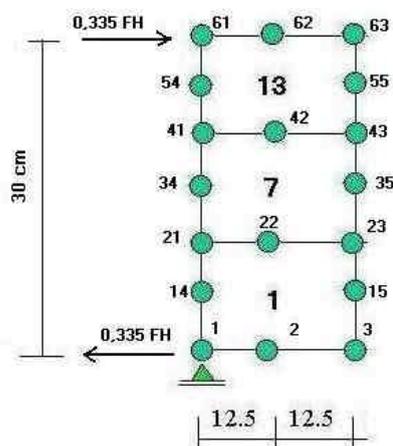


Figura 8.7- Aplicação do binário nos nós da malha

No nó 61 a força 0,355 FH é somada com a força FH já existente , Figura 8.8.

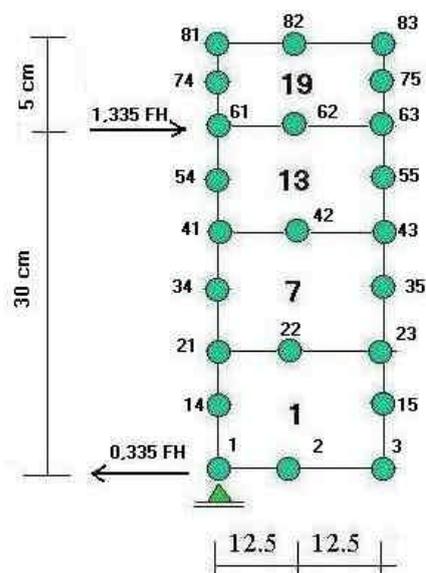


Figura 8.8- Aplicação das forças nos nós 1 e 61

### 8.3 ANÁLISE DA VIGA VFC-1

Para analisar o efeito de um pré-carregamento, atuante no instante da execução do reforço e, também, avaliar o efeito da fluência diferenciada entre o material adicionado e o substrato, aplicou-se na viga VFC-1 dois valores de pré-carregamento em instantes distintos.

O primeiro pré-carregamento (Protensão 1), aplicado 7 dias após a moldagem do substrato, introduzia forças verticais de 19,6 kN . Após 69 dias da aplicação do primeiro pré-carregamento, com a viga já reforçada, aumentou-se o pré-carregamento (Protensão 2) para produzir forças verticais de 35,1 kN. Isto foi feito para verificar a absorção do pré-carregamento pelo material de reforço adicionado. Este novo pré-carregamento foi deixado por mais 30 dias e após este prazo realizou-se o ensaio final da peça, onde foram aplicados incrementos de carga até a ruptura da peça.

A análise numérica da viga foi desenvolvida empregando-se a malha de elementos finitos discretizada na Figura 8.9, que por simetria foi considerada para análise a metade da viga. Inicialmente os elementos 19 ao 24 estão inativos. Na ocasião do reforço estes elementos passam a ser ativos.

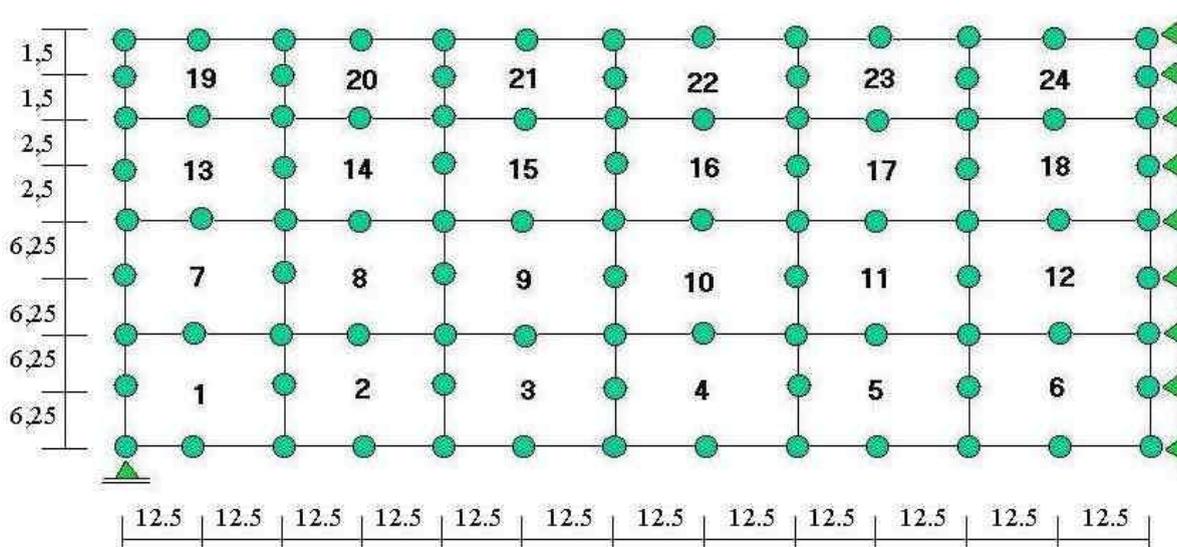


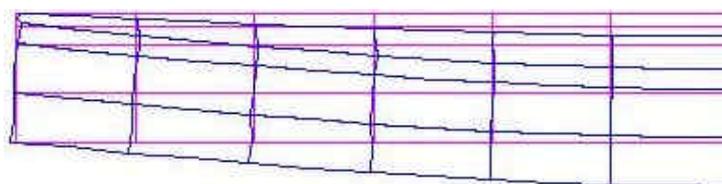
Figura 8.9- Discretização das vigas ensaiadas

Nas Figuras 8.10 a 8.12 são mostradas as deformadas e as tensões no concreto e nas barras de armadura, para as diversas etapas do carregamento.

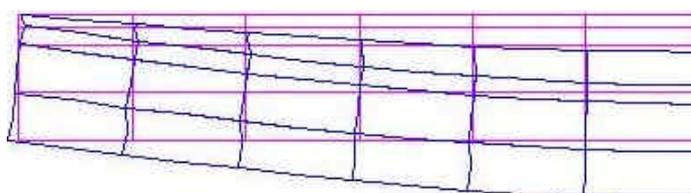
— Indeformada  
— Deformada



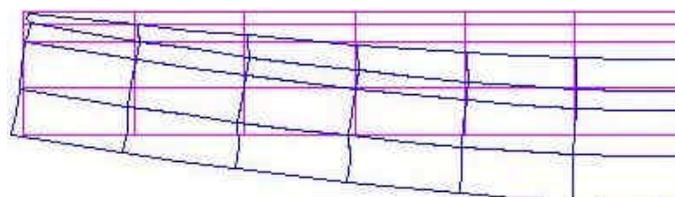
19,6 kN



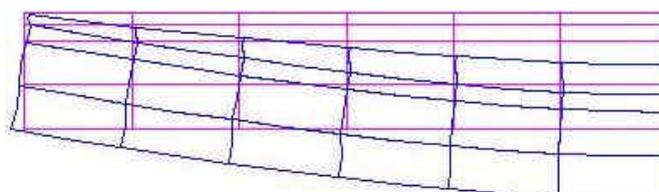
35,1 kN



80,8 kN



105,0 kN



117,1 kN

Figura 8.10 – Deformada da viga VFC-1 para diferentes níveis de carga

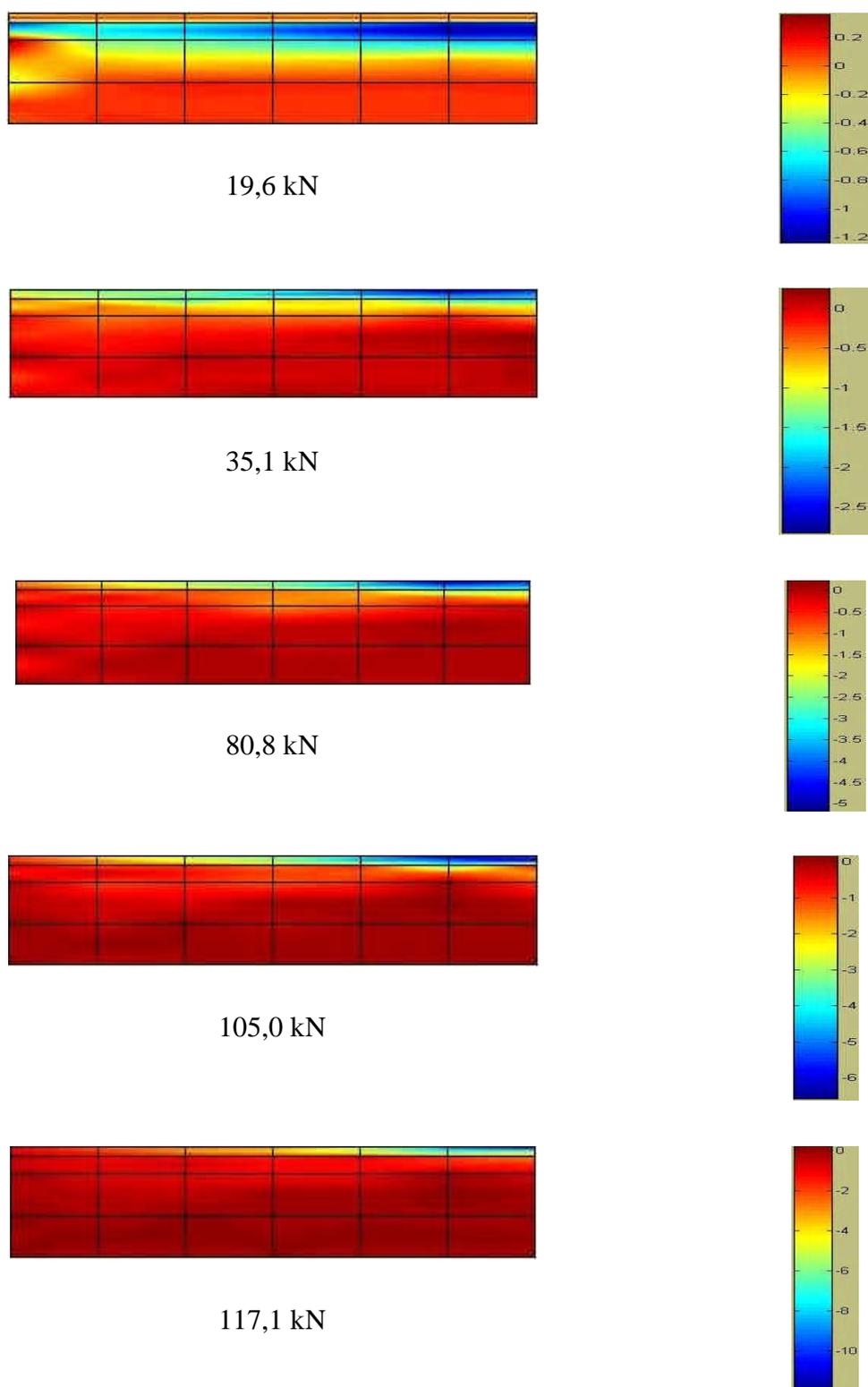


Figura 8.11 – Estado de tensões da viga VFC-1 em diferentes níveis de carregamento

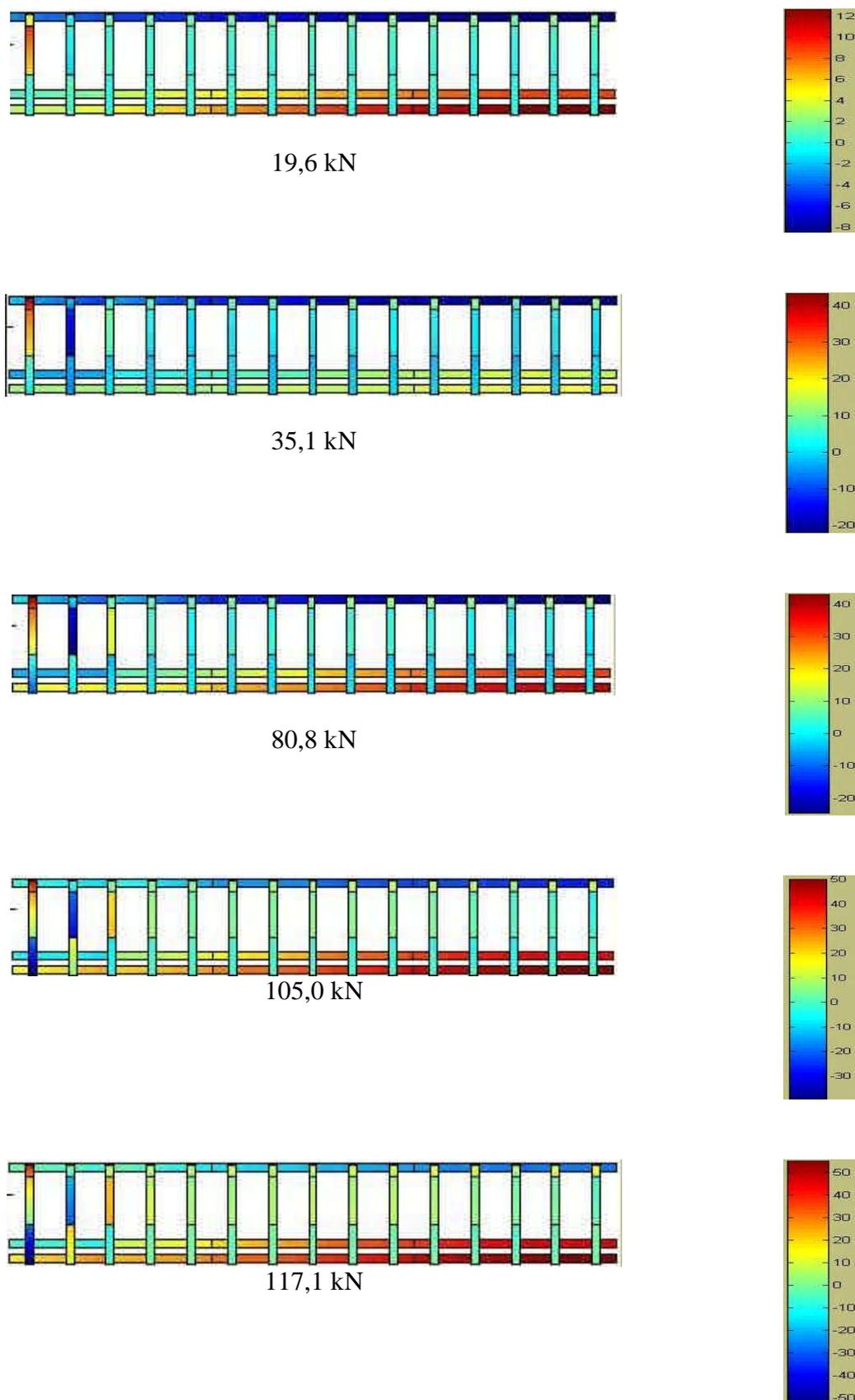


Figura 8.12 – Estado de tensões da armadura em diferentes níveis de carregamento

As Figuras 8.13 e 8.14 ilustram a viga VFC-1 antes e após o reforço respectivamente. A Figura 8.15 mostra o momento da fissuração da viga.

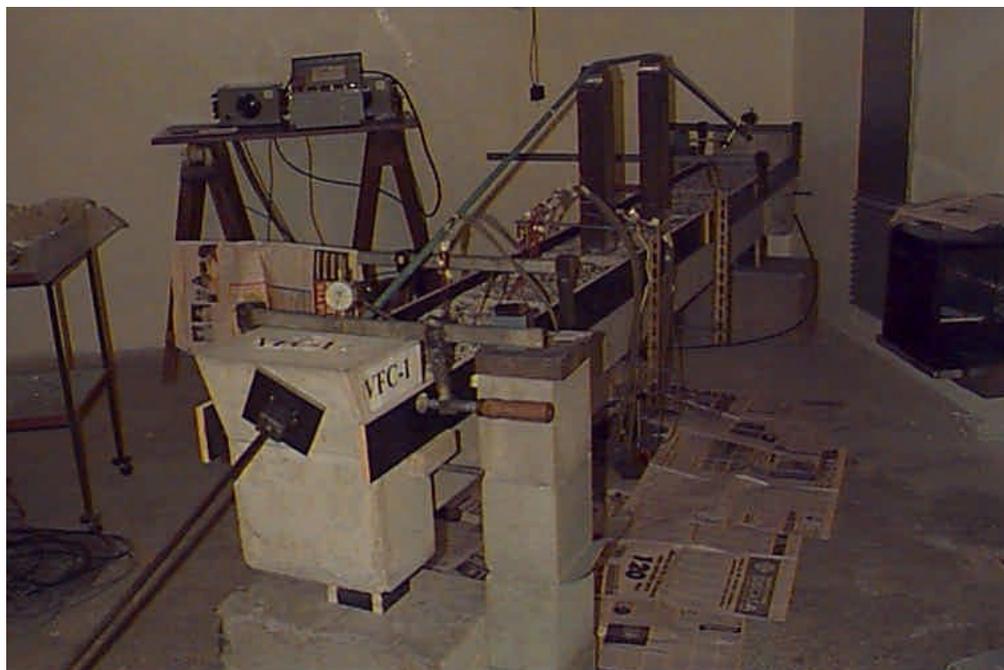


Figura 8.13 – VFC-1 antes do reforço



Figura 8.14 – VFC-1 após o reforço



(a) Fissuração na VFC-1 (após a Protensão 1 –  $F_v = 19,6$  kN)



(b) Fissuração na VFC-1 (após a Protensão 2 –  $F_v = 35,1$  kN)

Figura 8.15 – Fissuração na viga VFC-1

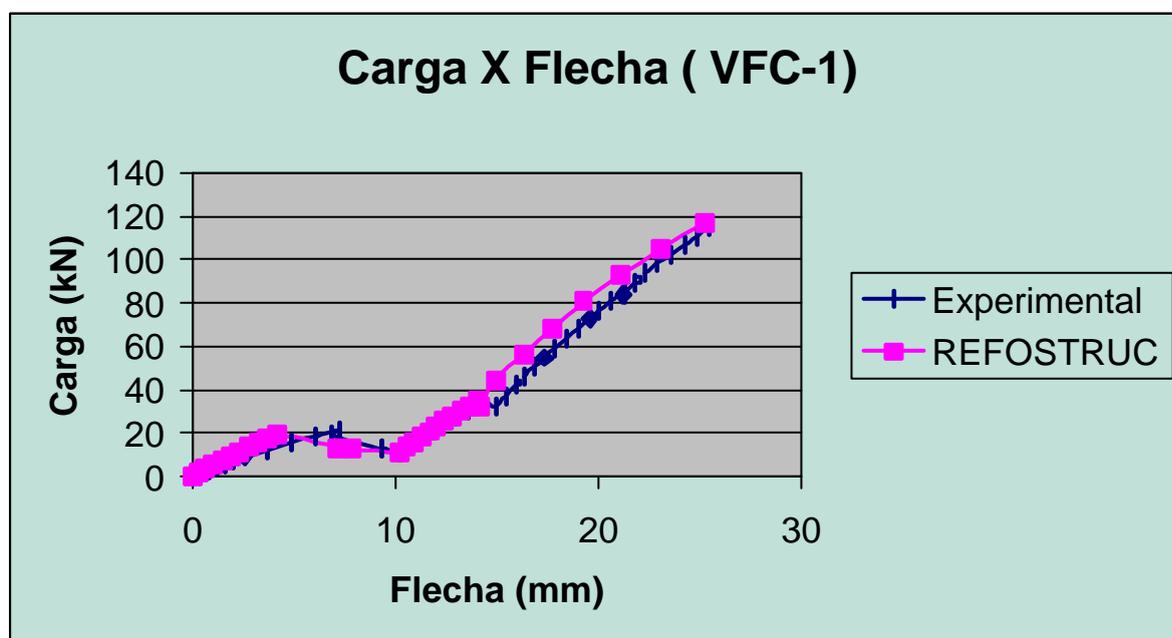


Figura 8.16 – Comparação das flechas da VFC-1, obtidas experimentalmente e pelo programa

As cargas aplicadas na viga VFC-1, levaram, desde a primeira etapa do ensaio (Protensão 1), a níveis de tensão do concreto superiores a  $0,4f_c$ . Nestas condições, o modelo utilizado no programa REFSTRUC, proposto pelo Código Modelo CEB-FIP 1990 (1998) não é mais válido.

Desta forma, as deformações por fluência do concreto obtidas pelo modelo computacional são superiores às observadas experimentalmente.

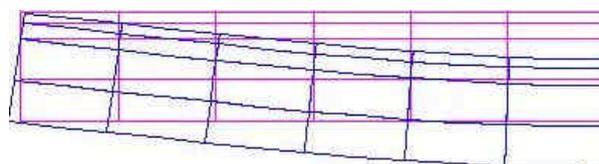
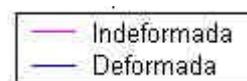
Na simulação do comportamento da viga VFC-1 desconsiderou-se a variação do tempo a partir da Protensão 2 que ocorreu aos 75 dias. Com isto, conforme pode ser observado na Figura 8.16, conseguiu-se uma boa aproximação com os resultados experimentais, viabilizando a comparação de resultados com a última etapa do ensaio.

#### 8.4 ANÁLISE DA VIGA VFC-2

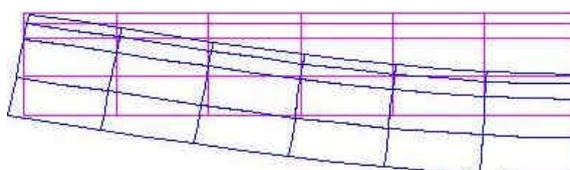
Para a viga VFC-2 foram adotadas as mesmas características geométricas da viga VFC-1, como também a mesma discretização da viga. Apenas o carregamento da VFC-2 é diferente.

Na viga VFC-2 não se aplicou nenhum tipo de carregamento inicial, para que se pudesse analisar se a existência de um pré-carregamento realmente afetava na resistência final da peça. Para que não atuasse nenhum tipo de esforço na peça, esta ficou apoiada ao longo de todo seu comprimento para que nem o peso próprio gerasse esforços.

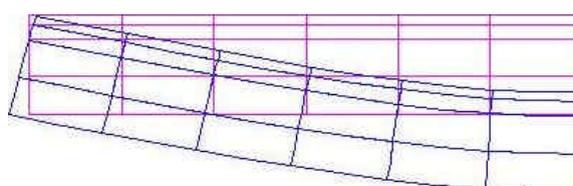
Nas Figuras 8.17 a 8.19 são mostradas as deformadas e as tensões no concreto e nas barras de armadura, para as diversas etapas do carregamento, geradas pelo REFSTRUC.



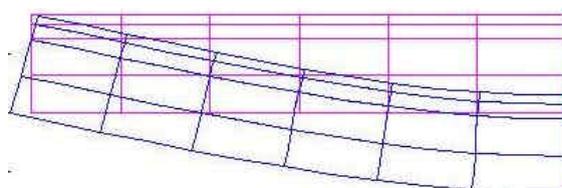
75 kN



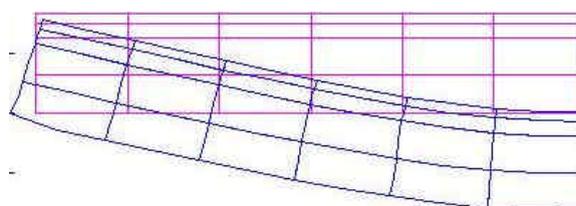
100 kN



125 kN



130 kN



135 kN

Figura 8.17 – Deformada da viga VFC-2 para diferentes níveis de carga

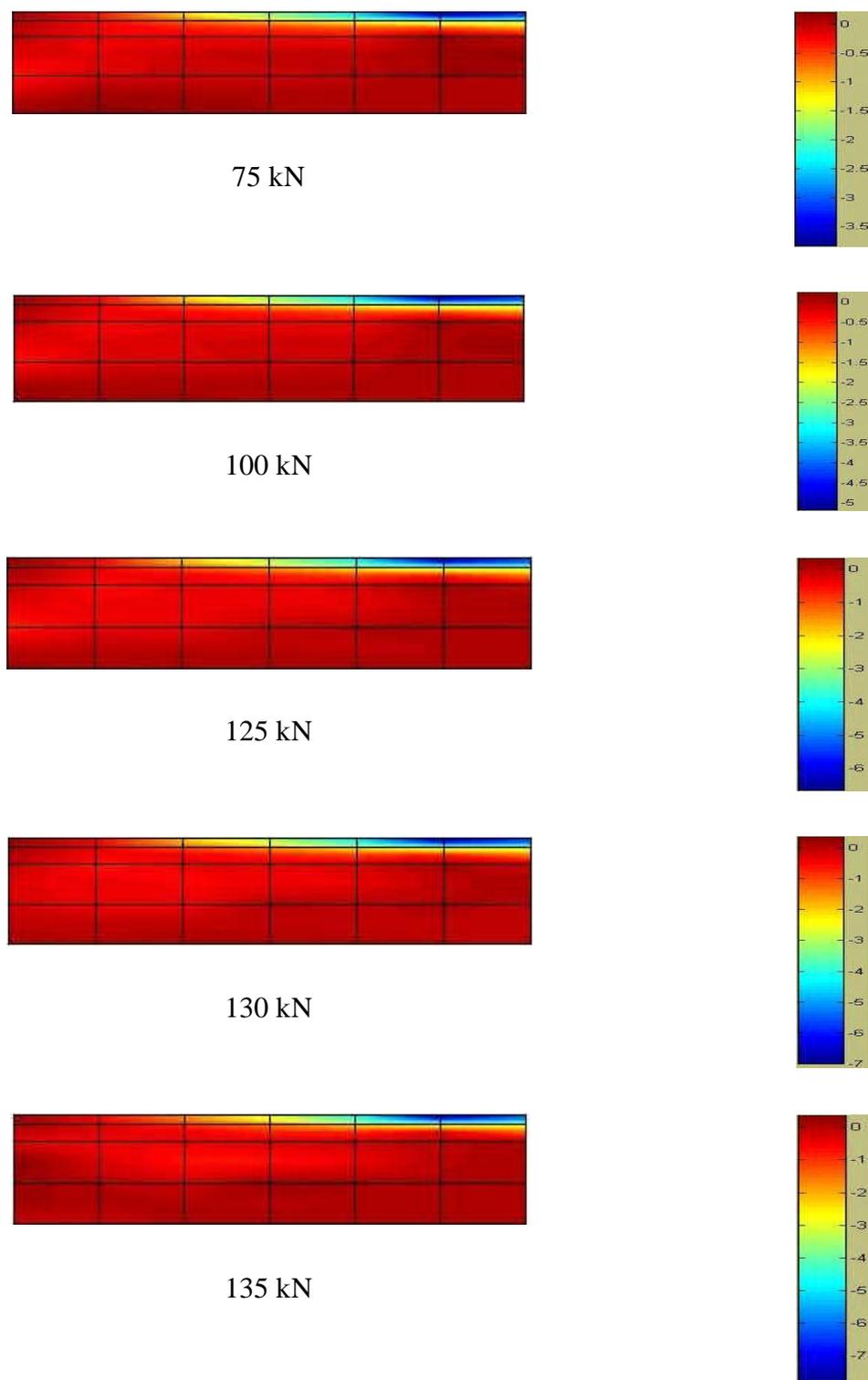


Figura 8.18 – Estado de tensões da viga VFC-2 em diferentes níveis de carregamento

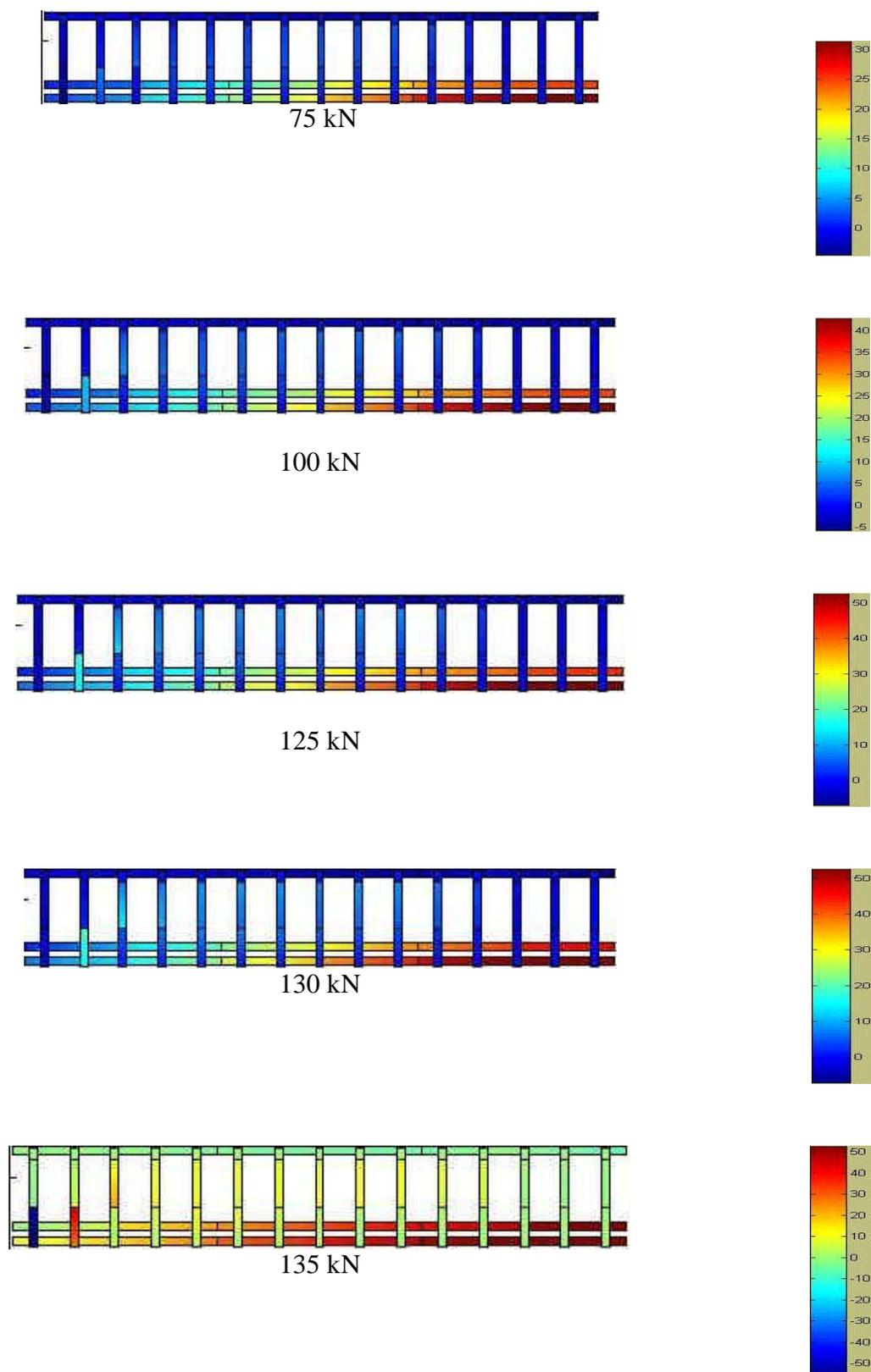


Figura 8.19 – Estado de tensões da armadura



Figura 8.20–VFC-2 antes do reforço



Figura 8.21–VFC-2 após o reforço

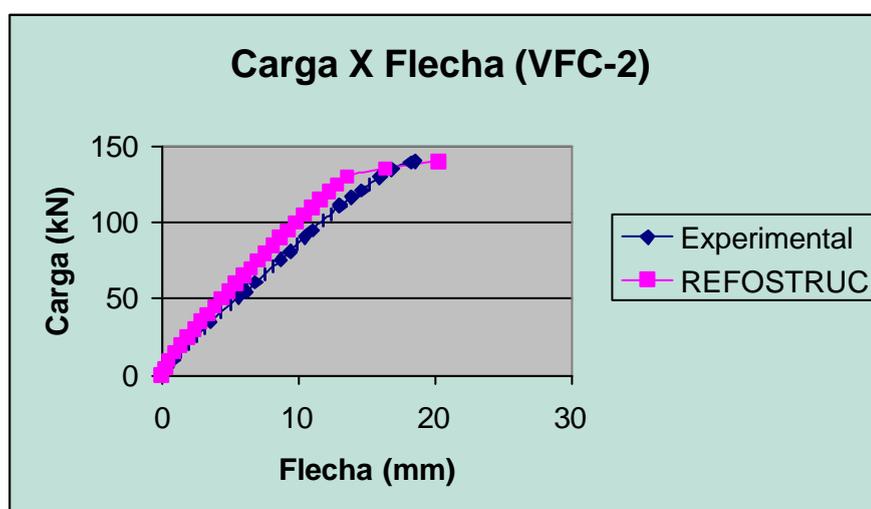


Figura 8.22–Comparação das flechas da VFC-2, obtidas experimentalmente e pelo programa

## 8.5 ANÁLISE DA VIGA VFC-3

A viga VFC-3 também apresenta as mesmas características geométricas das vigas VFC-1 e VFC-2, mas o carregamento não foi o mesmo.

Na viga VFC-3, foi aplicado apenas um valor de pré-carregamento (Protensão 1) de 32 kN. Esta solicitação foi aplicada 7 dias após a moldagem do substrato e portanto, antes da execução do reforço. Desta maneira, pretendia-se analisar o fato de apenas o substrato ter sofrido fluência antes do ensaio final da peça.

Nas Figuras 8.23 a 8.25, são mostradas as deformadas e as tensões no concreto e nas barras de armadura, para as diversas etapas do carregamento, geradas pelo REFOSTRUC.

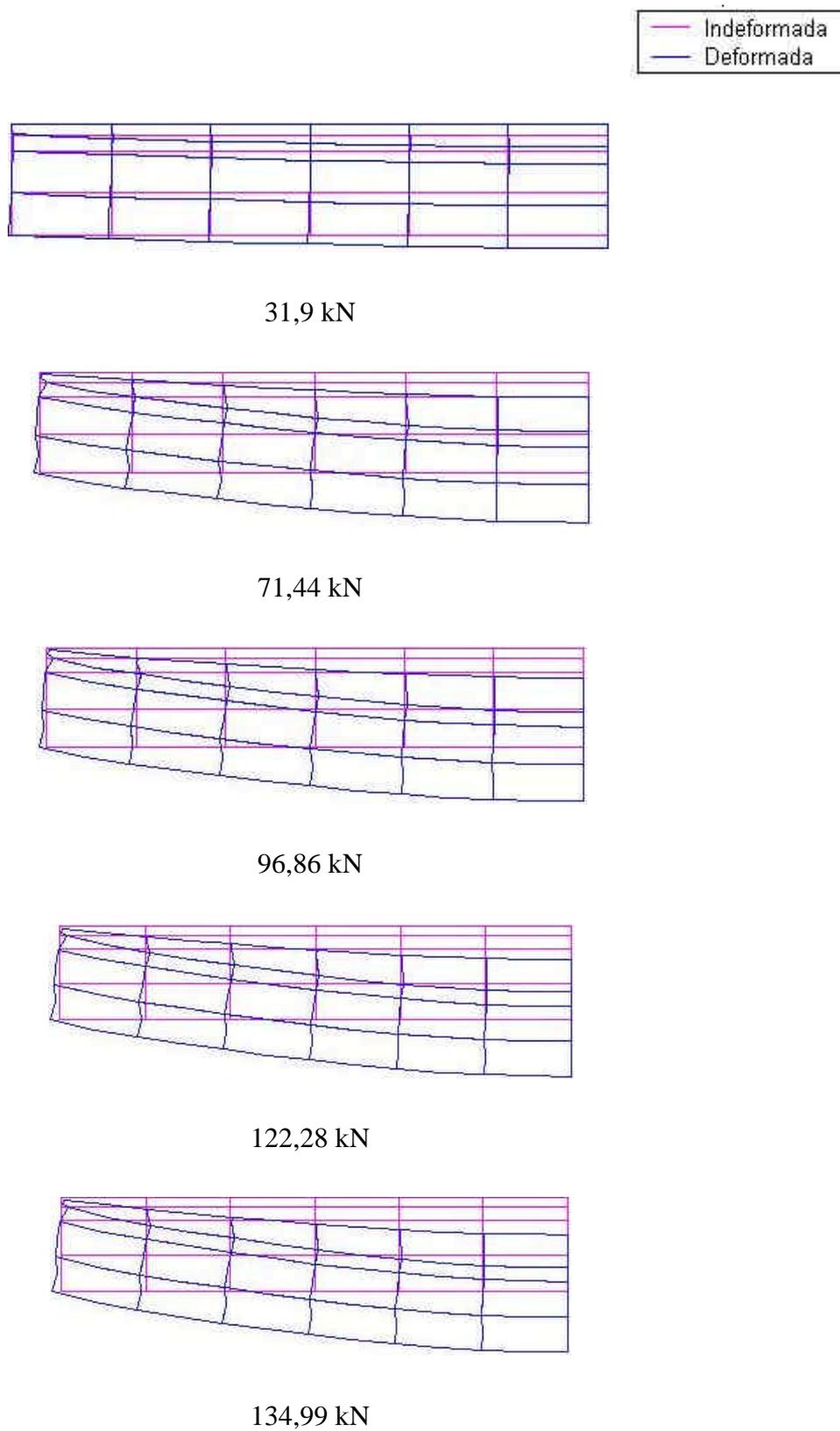


Figura 8.23 – Deformada da viga VFC-3 para diferentes níveis de carga

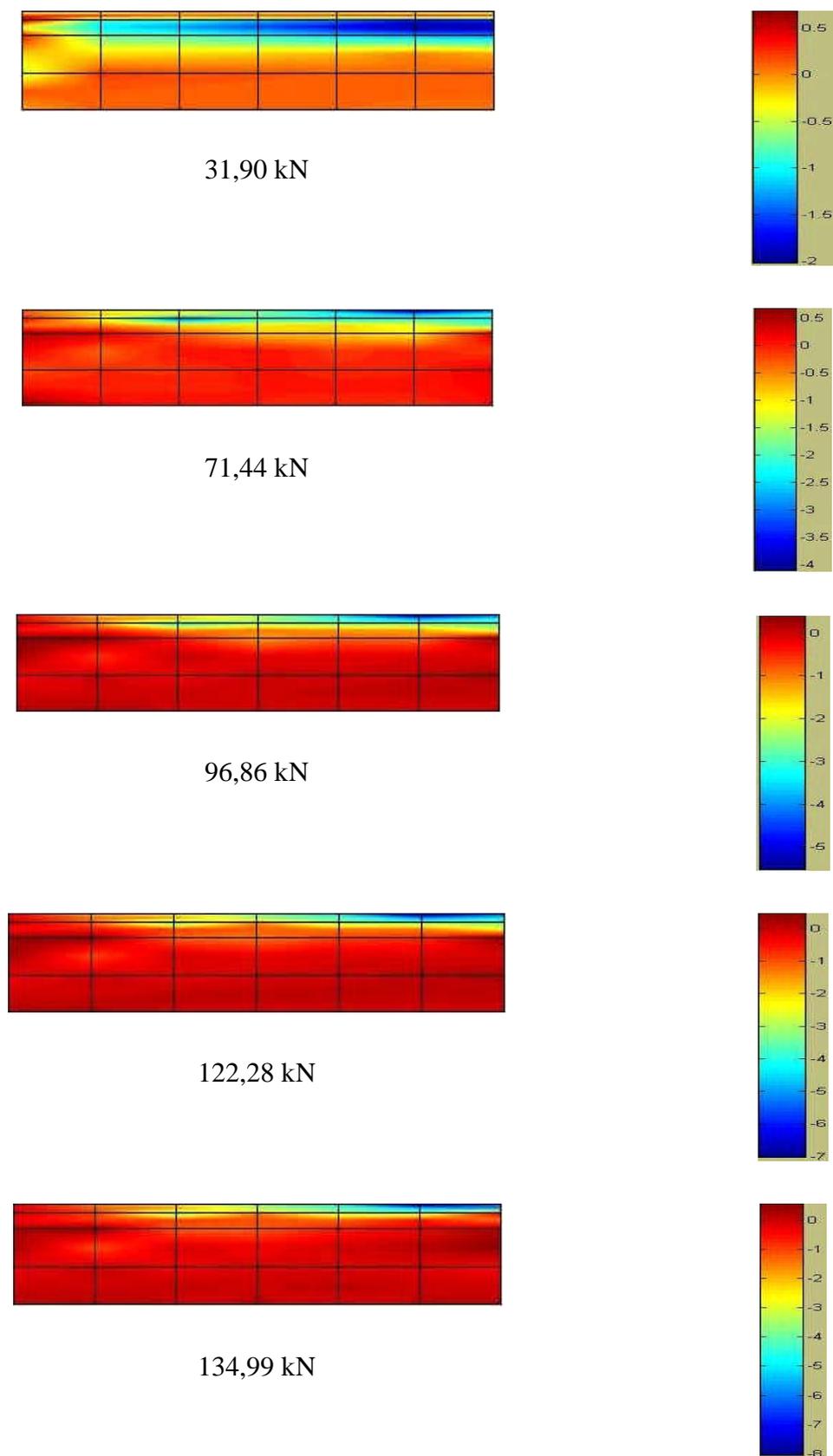


Figura 8.24– Estado de tensões da viga VFC-3 em diferentes níveis de carregamento

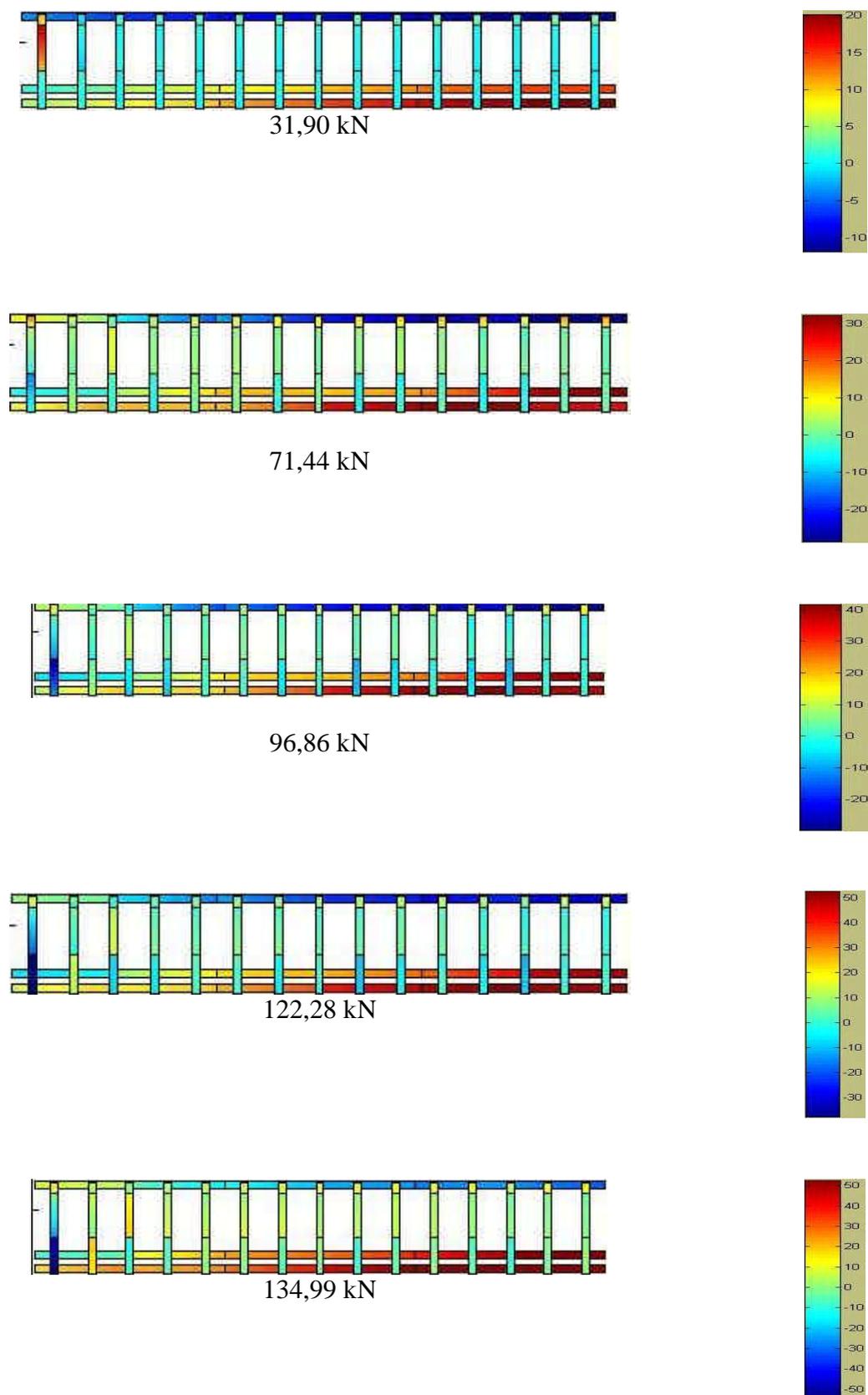


Figura 8.25 – Estado de tensões da armadura



Figura 8.26–Fissuração na VFC-3 após a protensão 1 ( $F_v=31,9$  kN)



Figura 8.27–Ruptura da VFC-3

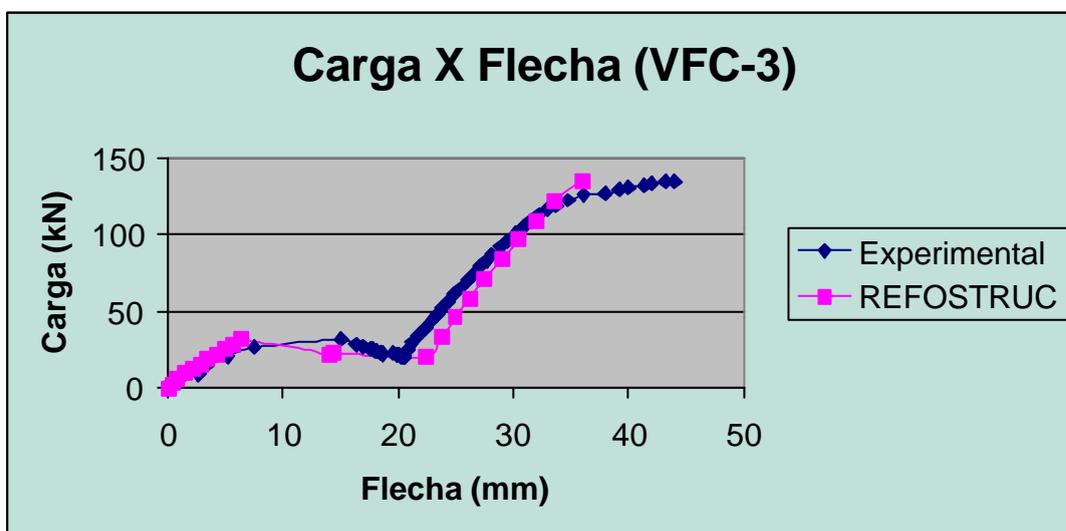


Figura 8.28–Comparação das flechas da VFC-3, obtidas experimentalmente e pelo programa

## 9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Esta dissertação revisou o programa computacional implementado no trabalho de Dantas (2000). O programa, originalmente na linguagem Fortran, foi implementado utilizando o sistema Matlab. Em relação ao trabalho anterior, desenvolveu-se uma interface gráfica de entrada e saída de dados, facilitando o procedimento de análise. O programa computacional, REFSTRUC, possibilita de forma simples a mudança e a inclusão de carregamentos, depois do término de qualquer análise, permitindo utilizar todos os dados que foram gerados no carregamento anterior aos que estão sendo mudados ou novos. Isto evita ter que fazer todo o cálculo novamente desde o início.

No capítulo 7, compararam-se situações de reforço e recuperação de vigas em concreto armado, obtidas pelo programa e experimentalmente através de ensaios realizados no LEME/UFRGS. Observa-se que a maioria dos exemplos apresentou ótimos resultados, uma vez que os valores numéricos foram muito próximos dos experimentais.

No capítulo 8, foram simuladas situações de reforço de vigas em concreto armado, já submetidas a um determinado carregamento, considerando-se carregamentos de curta e longa duração. As vigas foram ensaiadas no Laboratório de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos/USP, e os resultados experimentais foram comparados com os resultados obtidos da análise numérica pelo REFSTRUC, obtendo-se boas aproximações. Foram encontradas algumas dificuldades na simulação das vigas em que havia um pré-carregamento por protensão, pois elas estavam sob tensões acima do limite de  $0,4 f_c$ .

Conclui-se, desta forma, que o método dos elementos finitos pode ser utilizado como uma valiosa ferramenta para o estudo de situações de reforço de elementos estruturais de concreto armado. Encontra-se, através deste método, uma ótima aproximação entre resultados experimentais e as previsões numéricas. Adicionalmente, as análises, por elementos finitos,

permitem o estudo das mais variadas situações de reforço, viabilizando um adequado entendimento do comportamento estrutural da peça reforçada.

Como sugestão a trabalhos futuros, recomenda-se que seja implementado no programa computacional um modelo que permita a avaliação de deformações por fluência do concreto para níveis de tensões superiores ao limite de  $0,4f_c$ .

Sugere-se, também, a extensão do modelo para estruturas de concreto protendido, tendo sido já implementadas, neste trabalho, todas as telas de entrada para este caso. Seria interessante o estudo de reforço de pilares, além da utilização de vínculos elásticos no modelo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BAZANT, Z.P. & WU, S.T. **Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain.** *Matériaux et Constructions*, v.7, n.34, p. 45-60, 1974.
2. BEBER, A. J. **Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono.** Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1999. 108p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
3. CAIRNS, J. & ZHAO, Z. **Behaviour of concrete beams with exposed reinforcement.** *Proceedings of The Institution of Civil Engineers, Structures and Buildings*, v.99, p.141-154, 1993.
4. CAMPAGNOLO, J.L. et al **Reforço de lajes com chapas de aço coladas com resina epóxi.** Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1994. 41p. Relatório de Pesquisa - Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. a
5. CAMPAGNOLO, J.L. et al **Reforço de vigas com deficiência de armadura transversal – chapas de aço coladas com resina epóxi.** Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1994. 51p. Relatório de Pesquisa – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. b
6. CAMPAGNOLO, J.L. et al **Reforço de vigas à flexão com argamassa aditivada.** Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1996. 38p. Relatório de Pesquisa – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. a
7. CAMPAGNOLO, J.L. et al **Reforço de vigas com chapa colada com resina epóxi e ancoragem com chapas laterais.** Porto Alegre: Escola de Engenharia, 1996. 56p. Relatório de Pesquisa – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS. b

8. CAMPAGNOLO, J.L., CAMPOS Fº, A. & SILVA Fº, L.C.P. **Estudo Teórico-Experimental sobre Vigas de Concreto Armado Reforçadas.** In: CON-PAT 97 - IV CONGRESSO IBEROAMERICANO DE PATOLOGIA DAS CONSTRUÇÕES - VI CONGRESSO DE CONTROLE DE QUALIDADE, Porto Alegre, 21-24 out. 1997. Anais. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1997, v.2, p.127-134.
9. CAMPAGNOLO, J.L.; CAMPOS Fº, A. & SILVA Fº, L.C.P.S. **Análise Teórico-Experimental de Vigas de Concreto Armado com Armadura Exposta.** In: XXVII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, Tucumán, 18-22 set. 1995. Memórias. Tucumán, Argentina, Laboratorio de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia, Universidad Nacional de Tucumán, 1995, v.4, p. 165-175.
10. CLAURE, J. D. **Análise tridimensional elasto-viscoplástica de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1994. 145p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
11. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990.** Lausanne, 1993. (Bulletin d'Information, 213/214).
12. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **Concrete under multiaxial states of stress - constitutive equations for practical design.** Paris, 1983. (Bulletin d'Information, 159).
13. DANTAS, A. U. **Simulação numérica dos processos de recuperação e reforço de peças estruturais em concreto armado.** Porto Alegre: PPGEC/ UFRGS, 2000. 133p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
14. D' AVILA, V. M. R. **Um modelo laminar para análise não-linear de cascas de concreto armado.** Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1990. 119p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
15. ELWI, A. E. & HRUDEY, T. M. **Finite element model for curved embedded reinforcement.** Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, v.115, n.4, p. 740-745, Apr. 1989.

16. GILBERT, R. I. & WARNER, R. F. **Tension stiffening in reinforced concrete slab.** Journal of the Structural Division, ASCE, n.104, p. 1885-1900, 1978.
17. GOMES, H. M. **Análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado usando o método dos elementos finitos e processos de simulação.** Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1997. 118p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
18. HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1988. 550p.
19. HINTON, E. & OWEN, D. R. J. **Finite element software for plates and shells.** Swansea: Pineridge Press, 1984. 403p.
20. HINTON, E; CAMPBELL, J. S. **Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 8, p. 461-480, 1974.
21. HOFBECK, J. A.; IBRAHIM, I. O. & MATTOCK, A. H. **Shear transfer in reinforcement concrete.** Journal of the American Concrete Institute, p. 119-128, Feb. 1969.
22. INTERNATIONAL CENTER FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING. **GiD User Manual** – Pre and post processing system for F. E. M. calculations. Barcelona. 191p. 1999.
23. MARTINS, A. S. F. **Estudo do comportamento de estruturas compostas por peças laminares de concreto armado, solicitadas por cargas paralelas e normais ao seu plano médio, através do método dos elementos finitos.** Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1989. 131p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
24. NGO, D. & SCORDELIS, A. C. **Finite element analysis of reinforced concrete beams.** Journal of the American Institute, v.64, n.3, p. 152-163, Mar. 1967.
25. OTTOSEN, N.S. **A failure criterion of concrete.** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.103, n.4, p. 527-535, Aug. 1977.
26. OWEN, D.R.J. & HINTON, E. **Finite element in plasticity: theory and practice.** Swansea, Pineridge Press, 1980. 594p.

27. OWEN, D.R.J. & HINTON, E. **Finite element programming**. London: Academic Press, 1977. 305p.
28. PANDE, G. N. ; OWEN, D. R. J. & ZIENKIEWICZ, O. C. **Overlay models in time-dependent non-linear material analysis**. Computers and Structures, v.7, n.3, p. 435-443, 1977.
29. PRATES JR, N.P. **Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1992, 131p. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil.
30. REIS, A.P.A., (2002) **Estudo dos mecanismos resistentes em estruturas de concreto reabilitadas submetidas à flexão**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, USP ,2002.Tese de Doutorado em Engenharia Civil.
31. SCALON, A. & MURRAY, D. W. **Time-dependent reinforced concrete slab deflection**. Journal of the Structural Division, ASCE, n.100, p.1911-1924, 1974.
32. SENSALÉ COZZANO, B. **Análise do comportamento ao longo do tempo de peças de concreto armado submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1991. 110p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.
33. SOUZA, V. C. M. ; RIPPER, T. **Patologia, Recuperação e Reforço de Estruturas de Concreto**. 1. ed. São Paulo: Pini, 1998.
34. STRINCKLIN, J. A. ; HAISLER, W. & REISEMANN, W. **Evaluation of solution procedures of material and/or geometrically non-linear structural analysis**. AIAA Journal, v.11, n.3, p. 292-299, 1973.
35. ZANATO, G. A. **Desempenho de reforços em pilares esbeltos de concreto armado: análise numérico-experimental**. Porto Alegre: CPGEC/ UFRGS, 1999. 141p. Dissertação de Mestrado em Engenharia.

## **ANEXO VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS DE ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS ATRAVÉS DO PROGRAMA REFOSTRUC**

Como as tensões, tanto nos elementos de armadura, como nos elementos de concreto, são obtidas nos pontos de integração, e não nos pontos nodais dos elementos, foi necessário fazer uma transferência desses resultados, para se obter os valores das tensões nos pontos nodais e, assim, visualizá-los no programa .

### **A.1 PROCESSO DE SUAVIZAÇÃO DE TENSÕES UTILIZANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS, PARA ELEMENTOS FINITOS PLANOS**

No método dos deslocamentos, as tensões são descontínuas entre elementos por causa da natureza da variação do deslocamento assumida. Durante o processo de análise, as tensões são calculadas nos pontos de integração dos elementos. Para a representação da distribuição das tensões, são necessários os valores nodais das tensões. Se os valores nodais das tensões fossem calculados separadamente para cada elemento, seria gerada uma distribuição não suavizada, conforme apresentado na Figura A.1. Torna-se, assim, necessário um processo de suavização para possibilitar a continuidade interelementar das tensões.

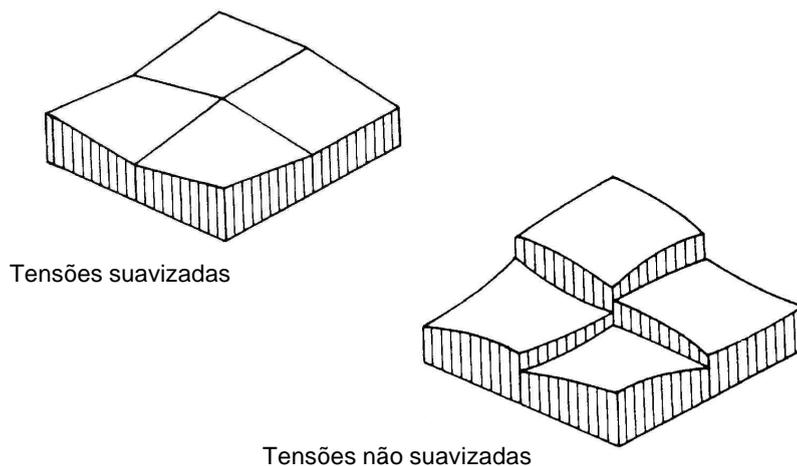


Figura A .1 – Tensões suavizadas e não suavizadas

Neste trabalho, utiliza-se o processo de suavização proposto por Hinton e Campbell (1974). A função de suavização é definida como:

$$g(x,y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{11} xy + a_{20} x^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

$$= \sum a_{ij} x^i y^j \quad \begin{cases} i=0,p \\ j=0,q \end{cases}$$

onde  $g$  é uma função de ordem  $p$  em  $x$  e uma função de ordem  $q$  em  $y$ .

Se a função não suavizada é dada por  $\sigma(x,y)$ , então o problema resume-se em encontrar os coeficientes  $a_{ij}$  que minimizem o funcional

$$\chi = \iint (\sigma - g)^2 dx dy \quad (\text{A.2})$$

Consequentemente, para  $\chi$  ser um valor mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial a_{ij}} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Neste problema, as incógnitas são tomadas como as tensões nodais suavizadas  $\sigma_i^*$  e estas tensões podem ser obtidas usando-se as funções de forma. Desta maneira, a função de suavização  $g(\xi,\eta)$  é dada pela expressão:

$$g(\xi,\eta) = \sum_{i=1,n} N_i \sigma_i^* \quad (\text{A.4})$$

onde  $N_i$ , a função de forma no nó  $i$ , é uma função de coordenadas  $(\xi, \eta)$  e  $\sigma_i^*$  é a tensão nodal suavizada no nó  $i$  e  $n$  é o número de nós por elemento.

O erro entre as tensões suavizadas e não suavizadas em qualquer ponto dentro do elemento é dado por

$$e(\xi, \eta) = \sigma(\xi, \eta) - g(\xi, \eta) \quad (\text{A.5})$$

onde as tensões não suavizadas  $\sigma(\xi, \eta)$ , em qualquer ponto dentro do elemento, podem ser obtidas pela relação usual tensão-deslocamento

$$\sigma(\xi, \eta) = [D] [B] \{\delta\}^e \quad (\text{A.6})$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva,

$[B]$  é a matriz deformação – deslocamento

e  $\{\delta\}^e$  são os deslocamentos nodais do elemento.

O problema agora é encontrar as tensões nodais suavizadas  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$ , ...,  $\sigma_p^*$  que minimizem o funcional

$$\chi = \sum_{j=1, ne} \iint e(\xi, \eta)^2 dx dy \quad (\text{A.7})$$

onde  $p$  é o número total de nós e  $ne$  é o número total de elementos

Para  $\chi$  ser um mínimo

$$\frac{\partial \chi}{\partial \sigma_i^*} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{A.8})$$

Portanto, para cada elemento, a matriz de suavização do elemento é dada por

$$[S]^e = \begin{bmatrix} \iint N_1 N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_1 N_n \det J d\xi d\eta \\ \vdots & & \vdots \\ \iint N_n N_1 \det J d\xi d\eta & \dots & \iint N_n N_n \det J d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

onde  $\det J$  é o determinante da matriz Jacobiana

O vetor de “forças” é dado por

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \iint N_1 \sigma \det J d\xi d\eta \\ \vdots \\ \iint N_n \sigma \det J d\xi d\eta \end{Bmatrix} \quad (A.10)$$

O vetor de “forças” global  $\{F\}$  e a matriz de suavização global  $[S]$  são obtidos reunindo-se o vetor de “forças” de cada elemento  $\{F\}^e$  e a matriz de suavização de cada elemento  $[S]^e$ , respectivamente.

As tensões nodais suavizadas  $\sigma_1^*$ ,  $\sigma_2^*$ , ...,  $\sigma_p^*$  são obtidas resolvendo-se o sistema

$$\{F\} = [S] \{\sigma\} \quad (A.11)$$

onde  $\{\sigma\}$  é o vetor formado pelas tensões nodais suavizadas.

## A.2 CONVERSÃO DOS VALORES DAS TENSÕES NOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DAS BARRAS DE ARMADURA, PARA OS PONTOS NODAIS

As barras de armadura são introduzidas no programa a partir apenas dos dois nós de extremidade, conforme Figura A.2. O programa identifica, automaticamente, quais segmentos de barras estão contidos nos elementos de concreto. Assim, cada elemento possui  $n$  segmentos de barras, conforme a Figura A.3.

Se o elemento de concreto utilizado for o quadrático de oito nós, cada segmento de barra terá três nós. Assim, cada segmento de barra, dentro de um elemento de concreto, fica dividido em duas partes. Para cada segmento de armadura, têm-se, então, três nós e dois elementos de barra. Esses nós são numerados em uma determinada seqüência, de modo que fique na mesma ordem dos resultados das tensões nos pontos de integração dos segmentos das barras, conforme Figura A.4.

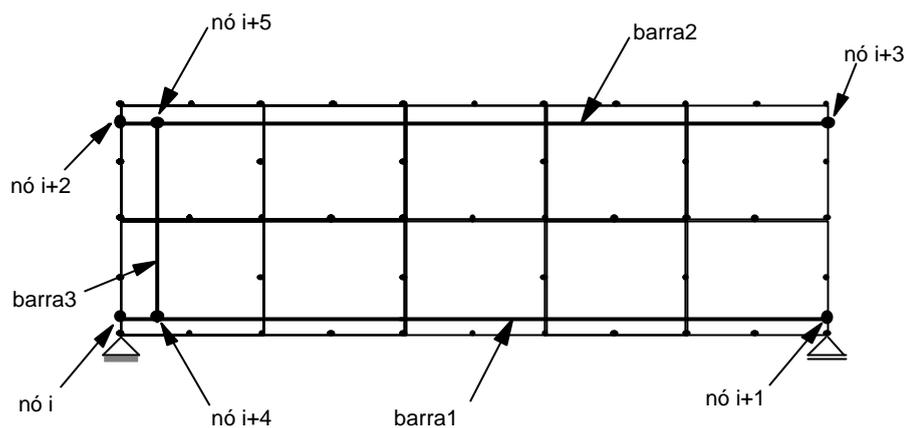


Figura A.2 – Barras de armadura no interior dos elementos de concreto

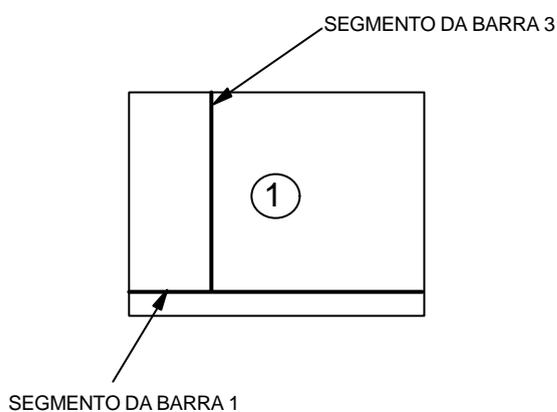


Figura A.3 – Segmentos de barras no interior do elemento de concreto

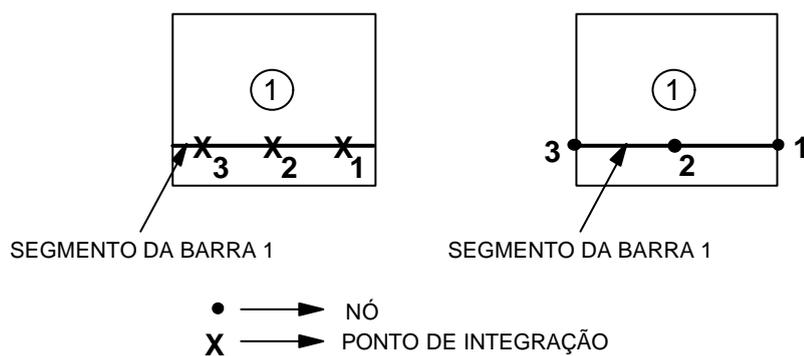


Figura A.4 – Numeração dos nós do segmento de armadura

Para efeitos de visualização dos resultados, por simplificação de cálculo, considera-se que os valores de tensão, determinados para os pontos de integração, correspondem aos valores nodais do elemento de barra.