

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**“CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS USANDO AMORTECEDORES  
METÁLICOS”**

por

Raúl Oscar Curadelli

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, maio, de 2003

**“CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS USANDO AMORTECEDORES  
METÁLICOS”**

por

Raúl Oscar Curadelli

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Daniel Riera

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Ronaldo Battista (COPPE, UFRJ)

Prof. Dr. Marcelo Rocha (PPGEC, UFRGS)

Prof. Dr. Alberto Tamagna (PROMEC, UFRGS)

Prof. Ph.D. Jun S. O. Fonseca  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 21 de maio, de 2003

*A mi família ...*

## **AGRADECIMENTOS**

Desejo expressar meu sincero agradecimento principalmente ao Professor J. D. Riera e à comissão de seleção que confiaram em mim na hora de aceitar à minha proposta de doutorado.

Novamente ao Professor J. D. Riera mas, nessa oportunidade pela constante e paciente formação transmitida e pelo respaldo a nível pessoal brindado durante estes três anos.

Especialmente a meus colegas do Laboratório de Dinâmica Estrutural e Confiabilidade dos quais recebi o apoio “logístico” durante estes três anos e principalmente nos momentos de minha chegada ao Brasil.

Aos que participaram de alguma maneira na construção e ensaios do amortecedor desenvolvido principalmente aos senhores. Paulo e Flavio.

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e seu pessoal de secretaria que sempre esteve atento e respondendo com amabilidade a qualquer necessidade que tive.

À CAPES pelo suporte financeiro que possibilitou a realização do meu trabalho.

Finalmente, simplesmente menciono a minha família, já que não existem palavras para agradecer o enorme amor que me brinda dia a dia

## RESUMO

Recentes terremotos e furacões mostraram quão vulneráveis são as estruturas às forças da natureza. Ainda em países desenvolvidos, existe alto risco a desastres naturais. Portanto, um dos principais desafios da Engenharia é a prevenção de desastres mediante o desenvolvimento de conceitos inovadores de projeto, para proteger eficientemente as estruturas, seus moradores e o conteúdo, dos efeitos destrutivos das forças ambientais.

O tradicional procedimento de projeto de construções para prevenir falhas catastróficas é baseado na combinação de resistência e capacidade de deformação (ductilidade). Solicitações de baixos níveis provocadas por ventos ou sismos são freqüentemente idealizados com cargas laterais que devem ser resistidas só pela ação elástica da estrutura, enquanto que, em eventos moderados ou severos permite-se certos níveis de dano estrutural e não estrutural, mas não, colapso da mesma. Esta filosofia proporcionou a base da maioria dos códigos de construção (fundados em métodos estáticos equivalentes) desde princípios do século, com resultados satisfatórios.

No entanto, a partir do estudo das características dinâmicas das estruturas surgem novos e diversos conceitos de proteção dos sistemas estruturais que tem sido desenvolvidos e ainda estão em expansão, entre os quais pode-se citar a dissipação de energia externa. Esta nova tecnologia consiste em incorporar na estrutura, elementos projetados especificamente para dissipar energia. Com isto, logra-se reduzir as deformações nos membros estruturais primários e portanto, diminui-se a demandada de ductilidade e o possível dano estrutural, garantindo uma maior segurança e vida útil da estrutura. Graças a recentes esforços e ao particular interesse da comunidade científica internacional, estudos teóricos e experimentais têm sido desenvolvidos durante a última década com resultados surpreendentes. Hoje já existem sistemas de dissipação de energia aplicados com sucesso em países como Estados Unidos, Itália, Nova Zelândia, Japão e México. Recentemente este campo está-se estendendo na América do Sul. Dentro deste contexto, considerando o benefício econômico e o melhor desempenho estrutural que implica a incorporação desta nova tecnologia, no presente trabalho abordou-se o estudo deste tipo de sistemas de proteção estrutural orientado ao uso de amortecedores metálicos. O trabalho dividiu-se em três partes principais:

- a) Projetar e construir um amortecedor metálico que usa as excelentes propriedades do chumbo para dissipar energia.

- b) Desenvolvimento de metodologias de análise e projeto de estruturas que incorporam amortecimento suplementar a fim de melhorar o seu desempenho estrutural.
- c) Avaliação da eficiência de sistemas externos de dissipação de energia em estruturas.

A primeira parte consistiu em projetar e construir um amortecedor metálico para logo submetê-lo a numerosos testes com diferentes níveis de amplitude de deslocamento e frequência a fim de avaliar suas propriedades mecânicas e desempenho. Os resultados são considerados altamente satisfatórios.

Na segunda parte foram desenvolvidas ferramentas computacionais para pesquisa e docência na área da mecânica estrutural mediante as quais é possível simular o comportamento linear e não linear de estruturas que incorporam amortecimento suplementar

Finalmente, apresenta-se um procedimento robusto para avaliar a eficiência dos sistemas dissipadores de energia baseado numa análise da confiabilidade estrutural.

Através de vários exemplos com estruturas reais e teóricas se atingem os objetivos traçados no presente trabalho.

## ABSTRACT

Recent earthquakes and hurricanes showed how vulnerable to the forces of the nature the structures are. Even in developed countries, the environment is susceptible to natural disasters. Therefore, one of the main engineering challenges is the development of innovative project concepts to protect efficiently the structures, its inhabitants and the content, from the environmental forces destructive effects, specially winds and earthquakes.

The traditional construction project procedures to prevent catastrophic failure is based on the combination of strength and ductility. Low level wind or earthquake loads are frequently idealized as lateral loads that must be resisted by the elastic forces of the structure, while in moderate or severe events some levels of structural and non structural damage, but not collapse, is permitted. This philosophy is the basis of most construction codes (based on equivalent static methods) from the beginnings of the century, reaching satisfactory results.

However, from the structural dynamic characteristic studies, new and several concepts of structural vibration control appear, one of them is the passive energy dissipation. This new technology consists on incorporate to the structure, elements projected specifically to dissipate energy. Thus, the deformations in primary structural members is reduced, therefore, the ductility demand and the possible structural damage decrease guaranteeing a larger safety and time life of the structure.

Thanks to recent efforts in theoretical and experimental studies, these techniques had great development during the last decade and it has been used with success in hospitals, bridges, historical structures and residential buildings protection in countries as United States, Italy, New Zealand, Japan and Mexico. Recently, this field is developing in South America.

In this context, considering the economic benefits and the structural performance improvement that the use of this new technology implies, in the present work the study of this type of structural protection systems were approached. From different existent types, the metallic dampers were chosen because of its innumerable advantages. The work was divided in three main parts:

- a) Development of a metallic damper that uses the excellent lead properties to dissipate energy.
- b) Development of structural project methodologies that incorporate supplemental damping to improve the structural performance.
- c) Assessment of the effectiveness of external energy dissipation systems in structures.

At the first stage, a metallic damper was developed. In order to evaluate the mechanical properties and performance, several tests with different displacement levels and frequencies were made. The results were considered highly satisfactory.

In the second part, different computational tools were developed for research and teaching in structural mechanics area. With them is possible to simulate the linear and non-linear structure behavior when supplemental damping is incorporated

Finally, it was presented a procedure to evaluate the energy dissipation system effectiveness by reliability analysis.

Through several examples with real and theoretical structures the objectives planned in the present work were reached.

## ÍNDICE

### Capítulo 1

|  |   |
|--|---|
| Introdução.....  |   |
| 1.1 Introdução.....  | 1 |
| 1.2 Necessidade da Dissipação de Energia e Isolamento Sísmico..... | 3 |
| 1.3 Definição do Problema.....                                     | 6 |
| 1.4 Objetivo do Trabalho.....                                      | 7 |
| 1.5 Organização do Trabalho.....                                   | 7 |

### Capítulo 2

|  |    |
|--|----|
| Sistemas Metálicos de Dissipação de Energia..... |    |
| 2.1 Revisão Bibliográfica.....                   | 9  |
| 2.2 Implementações estruturais.....              | 15 |

### Capítulo 3

|   |    |
|---|----|
| Fundamentos do Modelo Teórico das Propriedades Mecânicas do Amortecedor.....          |    |
| 3.1 Introdução.....   | 18 |
| 3.2 Evidencia Experimental: influência da velocidade de deformação e temperatura..... | 18 |
| 3.2.1 Propriedades mecânicas do Chumbo.....   | 19 |
| 3.2.2 Propriedades mecânicas do Aço de baixo carbono.....                             | 20 |
| 3.3 Fundamentos das Teorias de Plasticidade e Viscoplasticidade.....                  | 24 |
| 3.3.1 Relações Constitutivas: Inelásticas.....  | 24 |
| 3.3.2 Modelagem teórica das equações constitutivas do amortecedor.....                | 26 |
| 3.3.3 Influência da velocidade de deformação na resposta estrutural.....              | 27 |

### Capítulo 4

|  |  |
|--|--|
| Procedimentos de Projeto de Amortecedores Metálicos..... |  |
|--|--|

|   |  |    |
|---|--|----|
| 4.1   | Introdução.....  | 29 |
| 4.2   | Distribuição em altura da Rigidez e Capacidade dos Amortecedores.....                                | 29 |
| 4.3   | Procedimentos de Projeto de Dissipadores Não Lineares.....   | 33 |
| 4.3.1   | Modelo Completo: .....   | 33 |
| 4.3.2   | Modelo Reduzido ou Simplificado (pré-projeto): .....   | 34 |
| 4.3.3   | Técnicas de Linearização.....  | 42 |
| 4.3.4   | Projeto baseado em Curvas de Desempenho e Propriedades Lineares Equivalentes.....                    | 52 |
| <br>Capítulo 5  |  |    |
| Projeto de um Amortecedor Metálico.....   |  |    |
| 5.1   | Introdução.....  | 58 |
| 5.2   | Descrição do Amortecedor.....  | 58 |
| 5.3   | Propriedades do Amortecedor.....   | 60 |
| 5.4   | Modelo Numérico do Amortecedor.....  | 63 |
| 5.5   | Fórmulas práticas para a determinação da Capacidade e Deslocamento de Escoamento do Amortecedor..... | 66 |
| 5.5.1   | Verificação teorico-numérico do critério proposto.....   | 68 |
| <br>Capítulo 6  |  |    |
| Estudo de Variabilidade da resposta Estrutural com os Parâmetros dos Amortecedores Metálicos..... |  |    |
| 6.1   | Introdução.....  | 70 |
| 6.2   | Capacidade ótima do Amortecedor.....   | 71 |
| 6.3   | Eficiência do Amortecedor em função da rigidez do Suporte.....                                       | 75 |
| 6.4   | Eficiência do Amortecedor Metálico em função do deslocamento de escoamento ( $u_y$ ).....            | 78 |

|  |   |     |
|--|---|-----|
| 6.5  | Estudo da Variabilidade da Resposta do Sistema Estrutural com os Parâmetros do Amortecedor..... | 78  |
| Capítulo 7   |   |     |
| Eficiência da Incorporação de Amortecimento Suplementar em Estruturas..... |   |     |
| 7.1  | Introdução.....   | 86  |
| 7.2  | Avaliação da Eficiência por Deslocamentos.....  | 86  |
| 7.3  | Avaliação por Propensão ao Colapso.....   | 88  |
| 7.3.1  | Modelo Estrutural.....  | 89  |
| 7.3.2  | Análise Probabilística do Risco Sísmico.....  | 90  |
| 7.3.3  | Excitações Consideradas.....  | 91  |
| 7.3.4  | CrITÉrio de Falha.....  | 92  |
| 7.3.5  | Curvas de Fragilidade e determinação da Propensão ao Colapso.....                               | 94  |
| 7.4  | Casos em Estudo .....   | 96  |
| 7.4.1  | Descrição das Estruturas Estudadas.....   | 96  |
| 7.4.2  | Análise de Confiabilidade e discussão dos resultados.....                                       | 98  |
| 7.5  | Análise de uma Estrutura real Colapsada.....  | 100 |
| Capítulo 8   |   |     |
| Conclusões e Considerações Finais.....                                     |   |     |
| Referencias Bibliográficas.....  |   |     |
| Apêndice A   |   |     |
| A.1  | Física da Plasticidade  | 114 |
| A.2  | Plasticidade clássica independente do tempo.....  | 118 |
| A.3  | Equações Empíricas em Plasticidades.....  | 127 |
| A.4  | Viscoplasticidade.....  | 129 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| A.5 | Equações Empíricas de Viscoplasticidade..... | 134 |
|-----|--|-----|

## Apêndice B

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| B.1 | Princípio de Máxima Dissipação Plástica..... | 136 |
|-----|--|-----|

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $a$                            | : comprimento da garganta da ranhura.  |
| $\ddot{a}_g$                   | : registro das acelerações do solo.  |
| $A$                            | : área de corte de cada anel.  |
| $A_o$                          | : seção transversal do corpo de prova.   |
| $c_e$                          | : coeficiente de amortecimento viscoso do sistema (elemento) linear equivalente.   |
| $c_e \dot{\Delta}$             | : força de amortecimento do sistema (elemento) linear equivalente.   |
| $C_r$                          | : Coeficiente de redução de deslocamentos.   |
| $\mathbf{c}_e$                 | : vetor formado pelo coeficiente de amortecimento equivalente de cada amortecedor $c_{ei}$ , determinado com o procedimento de linearização. |
| $\mathbf{C}$                   | : matriz de amortecimento da estrutura sim dissipadores.   |
| $\mathbf{C}_e$                 | : matriz de amortecimento equivalente dos dissipadores.  |
| $\mathbf{C}_{eq}$              | : matriz de amortecimento total equivalente da estrutura.  |
| $d$                            | : diâmetro do cilindro interior.   |
| $d_i$                          | : deslocamento relativo máximo de pavimento, atingido durante o evento sísmico.  |
| $diag(\bullet)$                | : representa uma matriz diagonal cuja diagonal principal é o vetor argumento.  |
| $d_{y1}$                       | : deslocamento de escoamento do amortecedor no modo 1.   |
| $D$                            | : vetor de dano.   |
| $E$                            | : módulo elástico de Young.  |
| $E(\bullet)$                   | : indica valor esperado do argumento.  |
| $E_o$                          | : módulo de elasticidade da mola em serie.   |
| $E_l$                          | : módulo de elasticidade da mola em paralelo.  |
| $E_p$                          | : módulo plástico.   |
| $\mathbf{E}(qq^T)$             | : matriz de covariâncias dos deslocamentos da resposta.  |
| $\mathbf{E}(\dot{q}\dot{q}^T)$ | : matriz de covariâncias das velocidades da resposta.  |
| $f_{(\Delta, \dot{\Delta})}$   | : força produzida pelo sistema (elemento) não linear.  |
| $f(t)$                         | : excitação externa.   |
| $f_y = k_l u_y$                | : força de escoamento do elemento.   |
| $F$                            | : variável aleatória que representa a falha em termos de $lnPGA$ .   |
| $F_a$                          | : força do amortecedor.  |

- $F_c$  : força do conjunto.
- $F_s$  : força do suporte.
- $F_{ya}$  : força de escoamento do amortecedor.
- $F_{ya1}$  : força de escoamento do amortecedor no modo 1
- $F_{yat} = \sum_{i=1}^n F_{yai}$  : capacidade total do conjunto de amortecedores.
- $F_{y1} = F_{ya1} + k_1 d_{y1}$ : Força de escoamento do sistema no modo 1.
- $F_{yc}$  : força de escoamento do conjunto.
- $f$  : vetor de forças axiais (coordenadas locais) dos dissipadores com componentes  $f_i(u_i, k_{bi}, f_{yi})$  correspondente à força axial no elemento “ $i$ ” de rigidez  $k_{bi}$ , com força de escoamento  $f_{yi}$  e submetido a deslocamentos axiais  $u_i$ .
- $f_y$  : vetor de capacidades dos elementos dissipativos (força de escoamento no caso de dissipadores metálicos).
- $G$  : módulo de corte do chumbo.
- $G_o = 2 \pi S_o$  : parâmetro de escala.
- $h$  : altura da seção.
- $H_{qw(\omega)}$  : matriz da função de resposta em frequência do sistema.
- $H^{**}_{qw(\omega)}$  : matriz trasposta conjugada da função de resposta em frequência do sistema.
- $k_i$  : rigidez pré-escoamento do elemento.
- $k_f$  : rigidez pós-escoamento do elemento.
- $k_0 = k_1 + k_{a1}$  : rigidez pré-escoamento do sistema no modo 1.
- $k_1 = \phi_1^T \mathbf{K} \phi_1$  : rigidez do sistema no modo 1 (elemento 1,1 da matriz  $\mathbf{K}_n$ ).
- $k_{1d} = \phi_1^T \mathbf{K}_d \phi_1$  : rigidez dos dissipadores no modo 1.
- $k_{a1}$  : rigidez pré-escoamento do amortecedor no modo 1.
- $k_{a2}$  : rigidez pós-escoamento do amortecedor no modo 1.
- $k_{c1}$  : rigidez pré-escoamento do conjunto.
- $k_{c2}$  : rigidez pós-escoamento do conjunto.
- $k_{s1}$  : rigidez do suporte.
- $k_e$  : rigidez do sistema (elemento) linear equivalente.
- $k_e \Delta$  : força elástica do sistema (elemento) linear equivalente.
- $\mathbf{k}_e$  : vetor formado pela rigidez linear equivalente de cada amortecedor  $k_{ei}$ , determinada com o procedimento de linearização.
- $\mathbf{k}_d$  : vetor formado pela rigidez de cada amortecedor (coordenadas locais).

- $\mathbf{K}$  : matriz de rigidez da estrutura sim dissipadores.
- $\mathbf{K}_d$  : matriz formada pela rigidez dos dissipadores em coordenadas globais.
- $\mathbf{K}_e$  : matriz de rigidez equivalente dos dissipadores.
- $\mathbf{K}_{eq}$  : matriz de rigidez total equivalente da estrutura.
- $\mathbf{K}_n = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$  : matriz diagonal de rigidez modal.
- $\mathbf{K}_t$  : matriz de rigidez total da estrutura.
- $\mathbf{K} \Phi_I$  : representa a distribuição de forças laterais associadas com o primeiro modo
- $L$  : comprimento final do corpo de prova. (Cap.3).
- $L$  : constante cinemática que relaciona o deslocamento do dissipador e do oscilador. (Cap.4).
- $L_i$  : linha “ $i$ ” da matriz cinemática  $\mathbf{L}$ .
- $L_o$  : comprimento inicial do corpo de prova.
- $\mathbf{L}$  : matriz cinemática, determina a relação entre os deslocamentos dos elementos dissipadores,  $\mathbf{u}$ , e os graus de liberdade da estrutura,  $\mathbf{q}$ .
- $\mathbf{L}^T \mathbf{f}$  : vetor das forças dos dissipadores em coordenadas globais.
- $\mathbf{L}_w$  : vetor de influencia da excitação.
- $m$  : massa do sistema.
- $m_1 = \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1$  : massa do sistema no modo 1 (elemento 1,1 da matriz  $\mathbf{M}_n$ ).
- $Mg$  : peso da estrutura.
- $\mathbf{M}$  : matriz de massa.
- $\mathbf{M}_n = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$  : matriz diagonal de massa modal.
- $n(t)$  : processo ruído branco gaussiano com média zero e função de correlação  $w_n(\tau) = G_o \delta(\tau)$ .
- $P_{(\Delta, \dot{\Delta})}$  : função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis  $\Delta$  e  $\dot{\Delta}$ .
- $P$  : Carga de tração.
- $q_{y1}$  : deslocamento de escoamento no modo 1 adotado na construção do espectro.
- $\mathbf{q} = [q_{1(t)}, q_{2(t)}, \dots, q_{n(t)}]^T$  : vetor formado pelos deslocamentos da resposta do sistema de  $n$  graus de liberdade.
- $\overline{\mathbf{q}_m^2} = \text{diag}[E(\mathbf{q}\mathbf{q}^T)]$  : vetor formado pelos valores quadráticos médios dos deslocamentos da resposta do sistema, em virtude de ser um processo com média nula.
- $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_{1(t)}, \dot{q}_{2(t)}, \dots, \dot{q}_{n(t)}]^T$  : vetor formado pelas velocidades da resposta do sistema de  $n$  graus de liberdade.

$\bar{\dot{q}}_m^2 = \text{diag}[E(\dot{q}\dot{q}^T)]$ : vetor formado pelos valores quadráticos médios das velocidades da resposta do sistema, em virtude de ser um processo com média nula.

$\mathbf{r}$  : vetor de influência da excitação.

$S_o$  : densidade espectral de potência da excitação ruído branco gaussiano  $n(t)$ .

$S_f(\omega)$  : densidade espectral de potência da excitação filtrada,  $f(t)$ .

$S_{qq}(\omega)$  : matriz da densidade espectral de potência da resposta em deslocamentos.

$T$  : matriz de transformação para o cálculo dos deslocamentos relativos de pavimento correspondentes ao modo 1.

$S_{ww}(\omega)$  : matriz da densidade espectral de potência da excitação.

$\dot{u}, u$  : velocidade e deslocamento do filtro, respectivamente.

$u_c$  : deslocamento do conjunto.

$u_a$  : deslocamento no amortecedor.

$u_{max}$  : deslocamento máximo do ciclo considerado.

$u_s$  : deslocamento no suporte.

$u_{yc}$  : deslocamento de escoamento do conjunto.

$u_{ya}$  : deslocamento de escoamento no amortecedor.

$\mathbf{u}$  : vetor dos deslocamentos dos elementos dissipadores (coordenadas locais).

$\mathbf{u}_y$  : vetor dos deslocamentos de escoamento dos elementos dissipadores.

$W_D$  : energia dissipada pelo amortecedor durante um ciclo.

$W_o$  : energia máxima dissipada por ciclo.

$\ddot{x}, \dot{x}, x$  : aceleração, velocidade, deslocamento do sistema respectivamente.

$x_{ci}$  : deslocamento relativo máximo de colapso, correspondente ao pavimento “i”.

$X$  : variável aleatória que representa a excitação em termos de  $\ln PGA$ .

$z$  : força de histerese.

$I$  : matriz identidade.

$\alpha = (k_1 + k_{a2}) / k_0$ : relação entre a rigidez pós e pré-escoamento.

$\beta = \Delta_o / u_y$  : relação entre amplitude de deslocamento harmônico do ciclo e o deslocamento de escoamento.

$\chi_1 = \phi_1^T \mathbf{M} \mathbf{r} / m_1$  : coeficiente de participação da excitação no modo 1.

$\delta$  : vetor dos deslocamentos relativos do modo 1.

$\Delta = \Delta_o \text{ seno } (\omega t)$  : deslocamento de excitação aplicado no elemento. (linearização harmônica)

- $\Delta$  : processo aleatório do deslocamento de excitação aplicado no elemento.(linearização estatística)
- $\dot{\Delta}$  : processo aleatório da velocidade de excitação aplicado no elemento. (linearização estatística)
- $\Delta_0$  : amplitude de deslocamento da excitação harmônica.
- $\Delta_{max}$  : deslocamento máximo de cada elemento. (determinado a partir do espectro de deslocamentos do sismo de projeto).
- $\varepsilon$  : deformação convencional.
- $\varepsilon^e$  : deformação elástica.
- $\varepsilon^i$  : deformação inelástica.
- $\varepsilon^p$  : deformação plástica.
- $\varepsilon_y$  : deformação de escoamento
- $\phi_1$  : forma modal do modo 1.
- $\phi_l$  : forma modal do modo  $l$ .
- $\Phi$  : matriz das formas modais.
- $\gamma_{ye} = 0.0753$  : distorção de escoamento do chumbo, constante determinada experimentalmente.
- $\Gamma = (\Lambda_d / \Lambda - I)$ : matriz que representa o cambio do quadrado das frequências dos modos da estrutura não amortecida devido aos dissipadores.
- $\eta$  : viscosidade do amortecedor.
- $\eta_1$  : coordenada modal do modo 1.
- $\eta_{elmax}$  : deslocamento máximo elástico do modo 1.
- $\eta_{lmax}$  : deslocamento máximo inelástico do modo 1.
- $\eta$  : vetor das coordenadas modais.
- $\kappa = k_f / k_i$  : relação entre a rigidez pós e pré-escoamento do elemento.
- $\Lambda$  : matriz diagonal dos quadrados das frequências circulares  $\omega_i^2$  dos modos da estrutura não amortecida.
- $\Lambda_d$  : matriz diagonal dos quadrados das frequências circulares  $\omega_{di}^2$  dos modos da estrutura amortecida.
- $\mu = F_{yat}/Mg$  : relação entre a capacidade total do conjunto de amortecedores e peso da estrutura.
- $\mu_F$  : média da variável aleatória  $F$ .
- $\mu_X$  : média da variável aleatória  $X$ .

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| $\sigma$                             | : tensão total   |
| $\sigma_n$                           | : tensão nominal   |
| $\sigma_F$                           | : desvio padrão da variável aleatória $F$ .  |
| $\sigma_X$                           | : desvio padrão da variável aleatória $X$ .  |
| $\sigma_\Delta$                      | : desvio padrão do deslocamento $\Delta$ .   |
| $\sigma_{\dot{\Delta}}$              | : desvio padrão da velocidade $\dot{\Delta}$ .   |
| $\sigma_{\Delta i}$                  | : desvio padrão dos deslocamentos do amortecedor “ $i$ ”.  |
| $\sigma_{\dot{\Delta} i}$            | : desvio padrão das velocidades do amortecedor “ $i$ ”.  |
| $\omega$                             | : frequência natural pré-escoamento do sistema.  |
| $\omega_l$                           | : frequência natural do modo 1 para o caso de uma estrutura com $n$ graus de liberdade submetida a uma excitação de banda larga. |
| $\omega_{d1}^2 = (k_1 + k_{d1})/m_1$ | : frequência do modo 1 da estrutura com dissipadores.  |
| $\omega_l$                           | : frequência estimada do modo $l$ .  |
| $\omega_g$                           | : frequência predominante do solo.   |
| $\bar{\omega}$                       | : frequência da excitação.   |
| $\Omega$                             | : matriz diagonal com $\omega_l^2$ $l=1,2,\dots,n$ na diagonal.  |
| $\xi$                                | : relação de amortecimento próprio do sistema.   |
| $\xi_l$                              | : relação de amortecimento crítico do modo 1 de vibração.  |
| $\xi_g$                              | : amortecimento característico do solo.  |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 1.1  | Classificação de Sistemas de Controle de Vibrações.....  | 2  |
| Figura 2.1  | Amortecedores por extrusão de Chumbo.....  | 10 |
| Figura 2.2  | Geometria do Dispositivo com placas em forma de “X”.....   | 11 |
| Figura 2.3  | Dispositivo Experimental do Amortecedor de placas com forma de “X”.....  | 11 |
| Figura 2.4  | Comportamento Força-Deslocamento do Amortecedor de placas com forma de “X”.....  | 12 |
| Figura 2.5  | Comportamento Força-Deslocamento do ADAS, com amplitudes de 0.45”, 1.5”e 2.2”.....   | 13 |
| Figura 2.6  | Comparação da Resposta para sismo Lolleo, Chile, 1985 (0.13g). [Whittaker et al, 1991]. com TADAS e sem TADAS.....         | 13 |
| Figura 2.7  | Ciclos de Histerese do ADAS para “El Centro ,1940” (0.33g). [Whittaker, et al 1991]. .....                                 | 14 |
| Figura 2.8  | Registros de Energia do ADAS para “El Centro ,1940” (0.33g). [Whittaker et al 1991]. .....                                 | 14 |
| Figura 2.9  | Instalação do ADAS no Pórtico. [Tsai, 1993].....   | 15 |
| Figura 2.10 | Resposta Pseudo-Dinâmica do TADAS. [Tsai, 1991].Com TADAS, e sem TADAS.....  | 15 |
| Figura 2.11 | Instalação dos Amortecedores em Edifício Izazaga, México. [Martinez-Romero, 1993].....                                     | 16 |
| Figura 2.12 | Instalação de Suportes Exteriores com Amortecedores ADAS no Hospital de Cardiologia , México. [Martinez-Romero, 1993]..... | 17 |
| Figura 2.13 | Comparação de Respostas calculadas no “Fargo Bank Building”. [Perry et al, 1993] com ADAS, e sem ADAS.....                 | 17 |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 3.1  | Curvas tensão-deformação para diferentes velocidades de deformação.....  | 19 |
| Figura 3.2  | Curvas tensão-deformação do chumbo para diferentes velocidades de defromação.....  | 19 |
| Figura 3.3  | Variação da tensão de escoamento com a velocidade de deformação para corpos de prova cilíndricos parabólicos de chumbo.....                        | 20 |
| Figura 3.4  | Curva tensão-deformação do Aço para diferentes velocidades de dormação.....  | 21 |
| Figura 3.5  | Curva tensão-velocidade de deformação em diferentes níveis de deformação.....  | 21 |
| Figura 3.6  | Variação da tensão dinâmica com a velocidade de deformação e temperatura homologa (Aço).....   | 22 |
| Figura 3.7  | Curva tensão-deformação do Aço com carga monótona.....   | 23 |
| Figura 3.8  | Idem anterior com deformações plásticas prévias.....   | 23 |
| Figura 3.9  | Curva tensão-deformação do Aço com carga cíclica.....  | 24 |
| Figura 3.10 | Força-deslocamento experimental e numérico sem levar em conta a velocidade de deformação (viscosidade material nula).....                          | 26 |
| Figura 3.11 | Força-deslocamento experimental e numérico levando em conta a velocidade de deformação (viscosidade material não nula).....                        | 27 |
| Figura 3.12 | Distribuição dos dissipadores nos vãos centrais.....   | 27 |
| Figura 3.13 | Deslocamento do teto considerando o efeito da velocidade de deformação no modelo dos amortecedores e o erro cometido ao desprezar dito efeito..... | 28 |
| Figura 4.1  | Oscilador de um grau de liberdade não linear.....  | 39 |
| Figura 4.2  | Espectro de Deslocamentos.....   | 41 |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Figura 4.3  | Espectro de coeficientes de redução em Deslocamentos.....  | 41 |
| Figura 4.4  | Diagrama de fluxo para Linearização harmônica.....   | 43 |
| Figura 4.5  | Curva Força-Deslocamento para o elemento elasto-perfeitamente plástico.....  | 45 |
| Figura 4.6  | Varição da rigidez e Coef. de Amort. Equiv.com a amplitude do deslocamento harmônico.....  | 45 |
| Figura 4.7  | Comparação entre as respostas dos sistemas de um grau de liberdade não linear (exata) e linear equivalente (aproximada) sob uma excitação harmônica..... | 47 |
| Figura 4.8  | Comparação entre as respostas dos sistemas de um grau de liberdade não linear (exata) e linear equivalente (aproximada) sob uma excitação aleatória..... | 47 |
| Figura 4.9  | Diagrama de fluxo para Linearização Estatística.....   | 48 |
| Figura 4.10 | Curvas Iso-desempenho com parâmetros equivalentes correspondendo ao primeiro modo de vibração.....   | 54 |
| Figura 4.11 | Curvas de Parâmetros Equivalentes para um elemento elasto-perfeitamente plástico.....  | 55 |
| Figura 4.12 | Superposição das curvas Iso-desempenho e de Parâmetros Equivalentes.....   | 56 |
| Figura 5.1  | Dispositivo dissipador de energia desenvolvido.....  | 59 |
| Figura 5.2  | Amortecedor desenvolvido.....  | 59 |
| Figura 5.3  | Detalhe do Amortecedor .....   | 60 |
| Figura 5.4  | Curva Força-deslocamento, esquerda grupo 1, direita grupo 2.....   | 61 |
| Figura 5.5  | Ensaio para diferentes frequências (grupo 1).....  | 61 |
| Figura 5.6  | Ensaio para diferentes frequências (grupo 2).....  | 62 |

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| Figura 5.7a. | Modelo e deformação plástica (grupo 1).....  | 63 |
| Figura 5.7b. | Modelo e deformação plástica (grupo 2).....  | 64 |
| Figura 5.8   | Curva Força-deslocamento numérico e experimental (grupo 2).....  | 65 |
| Figura 5.9   | Distribuição das tensões equivalentes de Von Mises.....  | 65 |
| Figura 5.10  | Seção do anel modificada.....  | 65 |
| Figura 5.11  | Força-Deslocamento (numérico) para seções com $\alpha=30, 45, 60^\circ$ e valores de $a=10$ e $20$ mm.....   | 66 |
| Figura 5.12  | Força-deslocamento para quatro seções com relações $a/h$ de 2.5, 4, 5 e 7.5.....   | 68 |
| Figura 5.13  | Relação entre altura efetiva " $h_e$ " e, a altura real " $h$ " da seção do anel.....  | 69 |
| Figura 6.1   | Média da resposta estrutural máxima vs. capacidade do sistema dissipador normalizada ( $F_y/mg$ ). EII/EPT (relação entre a Energia de entrada e dissipada), D (deslocamento max. no topo), V (Velocidade max. no topo) e, Q (Corte max. na base)..... | 71 |
| Figura 6.2   | Coeficiente de redução do deslocamento máximo em função da capacidade do amortecedor.....  | 72 |
| Figura 6.3   | Modelo em Série do Suporte-Amortecedor.....  | 72 |
| Figura 6.4   | Energia relativa dissipada em função da relação entre a rigidez do suporte e amortecedor.....  | 74 |
| Figura 6.5   | Energia relativa em função da relação deslocamento de escoamento e máximo.....   | 75 |
| Figura 6.6   | Oscilador não linear.....  | 80 |
| Figura 6.7   | Mudança na posição dos autovalores da matriz do sistema com a capacidade do amortecedor para diferentes valores de $d_y$ .....   | 81 |

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 6.8  | Desvio padrão relativo do deslocamento em função da capacidade normalizada.....                 | 82 |
| Figura 6.9  | Variação do amortecimento do sistema com a capacidade do amortecedor.....                       | 82 |
| Figura 6.10 | Variação da dissipação com o desvio padrão relativo do deslocamento.                            | 83 |
| Figura 6.11 | Variação da frequência relativa com a capacidade do amortecedor.....                            | 83 |
| Figura 6.12 | Mudança na posição dos autovalores do sistema com o nível da excitação, $\sigma_f^2$ .....      | 84 |
| Figura 6.13 | Variação do desvio padrão do deslocamento com o nível da excitação $\sigma_f^2$ .....           | 84 |
| Figura 6.14 | Variação da rigidez efetiva normalizada à original com o nível da excitação, $\sigma_f^2$ ..... | 85 |
| Figura 6.15 | Variação do amortecimento efetivo com a excitação, $\sigma_f^2$ .....                           | 85 |
| Figura 7.1  | Deslocamento do teto. Excitação taft, California, N 21 E, 1952 (0.18g).....                     | 87 |
| Figura 7.2  | Distribuição por pavimento da energia dissipada na estrutura durante o evento sísmico.....      | 88 |
| Figura 7.3  | Diagrama Momento-Rotação de elementos estruturais.....  | 89 |
| Figura 7.4  | Diagrama Carga axial – Momento de elementos estruturais.....                                    | 90 |
| Figura 7.5  | Curva de Risco Sísmico para Cidade de San Francisco e, Cidade de Tucumán.....                   | 91 |
| Figura 7.6  | Esforço Cortante na base vs. deslocamento no topo. Estrutura 1 e Estrutura 2.....               | 94 |
| Figura 7.7  | Estrutura 1 de Aço (California).....  | 97 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Figura 7.8  | Estrutura 2 de Concreto (Tucumán).....   | 97  |
| Figura 7.9  | Localização dos amortecedores. Estrutura 1 e Estrutura 2.....  | 97  |
| Figura 7.10 | Curva de fragilidade com e sem sistema de dissipação $P_C$ e função de densidade de probabilidade da aceleração máx. do solo $p_A$ . Estrutura 1 e Estrutura 2. Ductilidade 6..... | 99  |
| Figura 7.11 | Curva de fragilidade com e sem sistema de dissipação $P_C$ e função de densidade de probabilidade da aceleração máx. do solo $p_A$ . Estrutura 1 e Estrutura 2. Ductilidade 3..... | 99  |
| Figura 7.12 | Esquema da estrutura. Colapso parcial. [Tezcan et al, 1973].....   | 101 |
| Figura 7.13 | Pórtico equivalente para a análise.....  | 102 |
| Figura 7.14 | Disposição do sistema de amortecimento suplementar no pórtico número 1.....  | 103 |
| Figura A.1  | Corpo de prova.....  | 115 |
| Figura A.2  | Curvas tensão-deformação. a) Metal genérico, b) Metal dúctil, c) Metal frágil.....   | 115 |
| Figura A.3  | Curva tensão-deformação para grandes deformações.....  | 117 |
| Figura A.4  | Efeito Bauschinger.....  | 118 |
| Figura A.5  | Efeito Bauschinger generalizado.....   | 118 |
| Figura A.6. | Condição do “Softening”.....   | 127 |
| Figura A.7. | Curva tensão-deformação. a) Rígido-plástico, b) Plástico puro, c) Bilinear.....  | 128 |

## ÍNDICE DE TABELAS

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Tabela 1.1 | Classificação de Sistemas de controle de Vibrações.....  | 2   |
| Tabela 3.1 | Propriedades dinâmicas da estrutura sem dissipadores.....  | 28  |
| Tabela 4.1 | Características dinâmicas do sistema de um grau de liberdade ...   | 46  |
| Tabela 5.1 | Propriedades geométricas das ranhuras modeladas.....   | 69  |
| Tabela 7.1 | Características dinâmicas da estrutura estudada.....   | 89  |
| Tabela 7.2 | Distribuição da capacidade dos amortecedores.....  | 100 |
| Tabela 7.3 | Probabilidade de colapso das estruturas exemplo, com e sem sistema de dissipação de energia externo..... | 102 |
| Tabela 7.4 | Propriedades estruturais da estrutura colapsada .....  | 101 |

---

## Capítulo I

### Introdução

#### 1.1 Introdução

As vibrações induzidas em estruturas, equipamentos e outros sistemas mecânicos por agentes externos tais como sismo, vento, máquinas ou impacto, ocasionam freqüentemente problemas de desempenho, dano e até o colapso das mesmas. Isto implica num custo importante para a sociedade, seja pela necessidade de reposição das estruturas e seus conteúdos, a paralisação das atividades e até a perda de vidas humanas.

Exemplos importantes são os danos ocasionados pela ação sísmica. Historicamente, cálculos econômicos nos Estados Unidos e no Japão indicam custos atribuíveis aos danos sísmicos de bilhões de dólares por ano, como foi demonstrado nos sismos recentes de Northridge, 1994 e Kobe, 1995.

No projeto da maioria das edificações, as primeiras cargas que se devem considerar são aquelas devidas aos efeitos da gravidade e aos de ocupação. Estas cargas estão sempre presentes e conseqüentemente devem ser resistidas durante toda a vida da estrutura. Tipicamente, a variação destas cargas com o tempo é muito pequena comparada com as variações das características da estrutura. Dessa forma, uma idealização estática é totalmente apropriada, além de ser relativamente simples sua determinação. Esta combinação de fatores fez com que grandes projetos fossem possíveis quando não existiam os princípios racionais da mecânica, nem restrições de materiais e custos. Na era moderna, com as restrições de custo deve-se procurar projetos eficientes. Adicionalmente, requer-se proteção de forças ambientais, incluindo vento e terremotos, os quais produzem cargas dinâmicas multidirecionais com efeitos inerciais importantes que ocasionam amplificação da resposta. Comparadas com as cargas da gravidade, as magnitudes são muito mais difíceis de determinar devido a que as escalas de tempo e espaço dos fenômenos são muito menores.

Independentemente das importantes diferenças nas considerações, existe uma tendência natural de considerar as forças ambientais com métodos estáticos equivalentes. Assim, o tradicional procedimento para prevenir falhas catastróficas é baseado na combinação de resistência e ductilidade, cargas de vento e pequenos sismos são freqüentemente idealizados mediante cargas laterais adequadas que devem ser resistidas só pela ação elástica da estrutura, enquanto que com aquelas associadas com eventos sísmicos moderados ou severos permite-se

certos níveis de dano estrutural e não estrutural, mas, não colapso da mesma. Esta filosofia proporcionou a base da maioria dos códigos de construção desde princípios do século, com resultados razoavelmente satisfatórios.

No entanto, a partir do estudo das características dinâmicas das estruturas surgem novos e diversos conceitos de proteção dos sistemas estruturais que tem sido desenvolvidos e ainda estão em estado de crescimento, entre os quais estão a dissipação passiva de energia e o isolamento sísmico.

Os enfoques para aumentar nas construções a capacidade de absorver solicitações dinâmicas podem ser divididos em três grupos como mostrado na Tabela 1.1.

Tabela 1.1. Classificação de Sistemas de Controle de Vibrações.

|   |  |                               |
|---|--|-------------------------------|
| Sistemas<br>de<br>Controle<br>de<br>Vibrações | Isolamento<br>Sísmico                                  | Isoladores de Elastômeros     |
|   |  | Isoladores de Borracha-Chumbo |
|   |  | Pêndulo de Fricção Deslizante |
|   | Dissipação<br>Passiva<br>de Energia<br>(Amortecedores) | Metálicos                     |
|   |  | Fricção                       |
|   |  | Viscoelásticos                |
|   |  | Fluído Viscoso                |
|   |  | Massa Sintonizada             |
|   | Líquido Sintonizado                                    |                               |
|   | Controle<br>Ativo e<br>Semi-ativo                      | Amortecedor de Massa Ativo    |
|   |  | Rigidez Variável              |
|   |  | Sistemas Amortecedores        |
|   |  | Materiais Inteligentes        |

O isolamento sísmico é atualmente muito usado em vários países. Colocam-se isoladores na fundação da estrutura e, graças à sua flexibilidade e à capacidade de absorver energia, “refletem” ou absorvem parte da energia do sismo. Consequentemente as acelerações transmitidas à estrutura são reduzidas. O efeito resultante é uma redução da demanda de energia do sistema estrutural. Entre os trabalhos mais importantes referentes à história e desenvolvimento dos sistemas de isolamento sísmico podem-se mencionar Kelly, J. M. (1986),

Buckle, I. G., Mayes, R. L.(1990). Alguns dos precursores destes sistemas foram Martel (1929), Green (1935) e Jacobsen (1938) que introduziram o conceito do primeiro pavimento flexível. Posteriormente apareceu o mecanismo com cilindros que eliminou as dificuldades do primeiro andar flexível [Ryuiti, 1941 e Caspe, 1970]. Em 1969 foi implementado o primeiro isolador de borracha numa escola em Skopje, Yugoslavia. Kelly, J. M. (1993) analisa isoladores de borracha reforçados, enquanto Constantinou, M. C. e, Tadjbakhsh, I. G. (1984) adicionam ao sistema de isolamento dispositivos friccionais que dissipam energia e aumentam a capacidade para suportar forças devido ao vento. Uma introdução aos sistemas de isolamento foi publicada por Skinner, R. I. e, Robinson, W. H. (1993).

O uso de dispositivos passivos (não precisam uma fonte de energia para funcionar) para dissipar energia tem uma história de mais de meio século e encontra-se em constante crescimento. Em particular, nos últimos cinco anos fizeram-se grandes esforços para desenvolver o conceito de dissipação passiva ou amortecimento suplementar, com o objetivo de lograr uma tecnologia de fácil utilização. Em dito período numerosos dispositivos deste tipo foram instalados, especialmente no Japão e EUA, em estruturas existentes ou novas, a fim de melhorar seu desempenho. Incorporando elementos dissipadores projetados especificamente para esse fim, logra-se reduzir a energia demandada aos membros estruturais primários e com isto se minimiza o possível dano estrutural. Atualmente existe una extensa variedade de dispositivos passivos baseados em diferentes mecanismos para dissipar energia, como se mostra na figura 1. Existe extensa bibliografia sobre o comportamento de diversos tipos de dispositivos e sua aplicação em estruturas reais [Mahmoodi et al, 1987; Wittaker et al, 1989; Aiken and Kelly, 1990 e Pall and Pall, 1993].

Por outro lado encontram-se os sistemas de controle ativos e semi-ativos, nos quais o movimento da estrutura é controlado ou modificado pela ação do sistema de controle mediante uma fonte de energia externa. Os sistemas semi-ativos requerem pequenas quantidades de energia para ajustar seus propriedades mecânicas e não adicionam energia na estrutura. Os sistemas de controle estrutural ganharam considerável atenção nos últimos anos e sua tecnologia encontra-se no estado de projeto, fabricação e instalação em estruturas reais. Como a área referente ao controle estrutural está fora do alcance deste trabalho não se insistirá nesta matéria.

## **1.2 Necessidade da Dissipação de Energia e Isolamento Sísmico**

Sistemas estruturais convencionais sob excitação sísmica são projetados para forças muito menores que aquelas preditas em uma análise linear da estrutura sujeita a sismos moderados ou

ainda severos. Procedimentos de cálculo permitem reduzir as forças de projeto em função da ductilidade da estrutura. Uma estrutura dúctil é capaz de dissipar energia em elementos e conexões projetadas para esse fim. Esta demanda de ductilidade da estrutura implica dano do sistema estrutural, e freqüentemente, dano de componentes tais como muros ou painéis divisórios.

Os procedimentos tradicionais de projeto estão baseados em um delicado equilíbrio entre resistência e capacidade de deformação de uma estrutura. Com efeito, estruturas que tem maior resistência são capazes de suportar forças e deformações induzidas por ações dinâmicas dentro do regime elástico linear, ou seja, sem dano permanente dos componentes estruturais. Por outro lado, por razões de custo, a maioria das construções são projetadas para resistir à ação sísmica através da dissipação de energia resultante do trabalho de plastificação dos elementos estruturais. Dita plastificação está associada ao dano permanente da estrutura.

A filosofia tradicional do projeto sísmico de construções pode-se expressar como segue:

“Para um sismo freqüente não deve acontecer dano de nenhum tipo, para um sismo moderado pode ocorrer dano só em elementos não estruturais e, para sismos severos, pode ocorrer dano estrutural mas deve-se assegurar a estabilidade da estrutura”.

Mesmo que, esta filosofia seja atrativa intuitivamente, tem sérias deficiências tais como:

- 1) A definição do sismo pequeno, moderado e severo, é insuficiente para definir a excitação.
- 2) A definição dos estados limite da deformação e resistência associados com cada um dos níveis de excitação não é explícita.
- 3) Não é um critério conhecido pelos proprietários nem usuários das construções, que parecem não estar informados que para um sismo severo se aceite dano total da estrutura com a perda econômica que isto implica.
- 4) A filosofia não diz nada dos conteúdos das estruturas que muitas vezes supera o valor da própria estrutura.

O projeto sísmico exige satisfazer a condição de que a capacidade da estrutura supere a demanda externa ou seja  $Capacidade > Demanda$ . A *Demanda* considera as forças e deformações geradas nas estruturas pelo sismo; a *Capacidade* considera a resistência e deformação que se podem desenvolver na estrutura sem comprometer sua estabilidade.

Durante os últimos quinze anos, e com maior força durante os últimos cinco, apareceram novas técnicas do projeto sísmico tais como o Isolamento Sísmico e a Dissipação Externa de Energia. A razão deste progresso é clara se for formulada a pergunta, por que não estender o

desenvolvimento tecnológico dos sistemas de redução de vibrações das indústrias automotivas e aeronáuticas para estruturas civis submetidas a sismos? A resposta há poucos anos atrás era o alto custo da solução. Mas deve-se reconhecer que o custo desta alternativa irá baixando progressiva e inevitavelmente na medida que aumente seu emprego. O que faltava para que estes sistemas fossem aceitos mundialmente? Uma década de pesquisa não conseguiu o que em trinta segundos lograram os sismos de Northridge em 1994 e Kobe em 1995. Os comportamentos das estruturas com estes tipos de sistemas, especialmente em Kobe, revolucionaram a engenharia sísmica.

Observa-se que as novas tecnologias satisfazem a equação  $Capacidade > Demanda$  de formas diferentes. No caso da dissipação de energia, incorporam-se dispositivos projetados especificamente para esse fim, sem implicar degradação nem dano, as deformações na estrutura se reduzem significativamente, e junto com essa redução, a demanda de ductilidade. Poder-se-ia considerar esta redução nas deformações como um aumento da *Capacidade* da estrutura devido ao incremento da rigidez e capacidade de dissipar energia outorgada pelos dissipadores .

O impacto de um bom projeto com dissipadores de energia incorporados numa estrutura é triplo:

a) Através do incremento de amortecimento estrutural se melhora o desempenho de um sistema estrutural convencional implicando numa redução na demanda de deformação estrutural e o conseqüente aumento na vida da estrutura.

b) Através do projeto integrado da estrutura principal com dissipadores suplementares, a resistência do sistema estrutural principal pode ser reduzida, sem perda da performance, ao ser comparada com a de um sistema convencional na procura de baixar custos iniciais.

c) Nos procedimentos de cálculo convencionais a relação de amortecimento da estrutura é estimada, enquanto que nestes tipos de sistemas pode ser determinada com boa precisão, portanto a determinação da resposta será também mais precisa.

No caso do isolamento sísmico, se satisfaz a equação reduzindo a *Demanda*. Isto significa que não se altera a excitação, mas apenas a parcela que percebe a estrutura, ao modificar suas propriedades dinâmicas de rigidez e amortecimento.

Este objetivo logra-se pelo desacoplamento da estrutura das componentes horizontais do sismo, através da colocação, entre a estrutura e a fundação, de elementos com baixa rigidez horizontal e alta rigidez vertical. Esta camada flexível faz que a frequência fundamental da estrutura seja muito menor que as frequências predominantes da excitação.

O primeiro modo de vibração produz deformações só no sistema de isolamento, quanto que a superestrutura tenta-se manter rígida. Os modos de vibração superiores que produzem deformações na superestrutura são ortogonais ao primeiro modo e conseqüentemente à excitação. Desta maneira se há energia nas freqüências altas não podem ser transmitidas à estrutura, ou seja os modos de vibração superiores quase não participam da resposta. O sistema de isolamento não absorve energia como no caso dos dissipadores, senão que “reflete” a energia proveniente do sismo através da dinâmica do sistema. Este sistema funciona ainda sem amortecimento mas, certa quantidade de amortecimento é favorável para suprimir qualquer possível ressonância na freqüência do isolamento.

### **1.3 Definição do Problema**

Recentes terremotos e furacões mostraram quão vulneráveis são as estruturas às forças da natureza. Ainda em países desenvolvidos, o ambiente é susceptível a desastres naturais. Portanto, um dos principais desafios da Engenharia é o desenvolvimento de conceitos inovadores de projeto, para proteger melhor e mais eficientemente as construções, seus moradores e o conteúdo, dos efeitos destrutivos das forças ambientais, particularmente de vento e terremotos.

Nos últimos anos novas estratégias no projeto de construções sismo-resistentes adquiriram considerável importância, através dos conceitos do Isolamento Sísmico e Dissipação de Energia, constituindo uma alternativa radicalmente distinta dos métodos utilizados tradicionalmente.

Num projeto convencional de estruturas (edifícios com base fixa), rigidez, capacidade de dissipar energia e resistência estrutural constituem os principais ingredientes para assegurar um adequado comportamento das construções sob ações externas. Porém, no caso de ações severas, o colapso pode ser evitado com um projeto que considere suficiente ductilidade nos elementos estruturais mas, o dano estrutural é o preço a ser pago. Mais ainda, o dano das instalações secundárias, equipamento e outros bens contidos na estrutura é quase inevitável e pode, em alguns casos, ter um maior impacto econômico que o dano estrutural.

Com a nova tecnologia se reduz a vulnerabilidade estrutural evitando gastos extras durante a vida útil da estrutura (evitam-se reparações da estrutura, requeridas no caso de um projeto tradicional).

Graças a recentes esforços em estudos teóricos e experimentais, estas técnicas tiveram grande desenvolvimento durante a última década e tem sido utilizadas com sucesso em países como Estados Unidos, Itália, Nova Zelândia, Japão e México, no caso de proteção de hospitais,

pontes, estruturas históricas e edifícios residenciais. Recentemente este campo está-se estendendo na América do Sul.

Considerando o benefício econômico e melhoramento do desempenho que implica o uso desta tecnologia na construção atual, considera-se de muita importância a tarefa de ampliar as fronteiras, até o presente conhecidas, das metodologias de projeto estrutural e difundir a informação sobre o estado da arte de sistemas avançados de controle de vibrações em estruturas.

Finalmente, o desenvolvimento de ferramentas computacionais versáteis para pesquisa e docência da dinâmica estrutural moderna resulta uma componente necessária e muito valiosa para a capacitação de engenheiros nesta nova tecnologia.

#### **1.4 Objetivo do Trabalho**

Este trabalho tem como objetivo principal:

- Projetar um amortecedor metálico para uso em estruturas submetidas a ações dinâmicas.
- Determinar as propriedades do amortecedor, teórica e experimentalmente.
- Desenvolver critérios de projeto aplicáveis a estruturas submetidas a ações sísmicas.
- Avaliar o comportamento dinâmico de estruturas providas de sistemas externos de dissipação de energia.

#### **1.5 Organização do Trabalho**

A tese está subdividida em oito capítulos. No presente capítulo fundamenta-se a importância da aplicação de sistemas dissipadores de energia, define-se o problema a ser abordado e resume-se o objetivo do trabalho.

O capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica das principais publicações referentes a dissipação de energia. Também se apresenta uma breve descrição de importantes implementações destes dispositivos de controle de vibrações em estruturas reais.

O capítulo 3 refere-se aos fundamentos teóricos de viscoelasticidade, plasticidade e viscoplasticidade necessários para descrever modelos constitutivos dos materiais usados em amortecedores. Mostram-se algumas evidências experimentais sobre o comportamento do chumbo e aço, considerados como os materiais até hoje mais usados neste tipo de dispositivos. No final do capítulo, apresenta-se uma comparação entre os resultados experimentais e a modelagem teórica das equações constitutivas deste tipo de dispositivo.

O capítulo 4 trata de diferentes tipos de procedimentos utilizados no projeto de sistemas dissipadores de energia e na determinação da resposta dinâmica de estruturas.

No capítulo 5 são apresentados os resultados experimentais obtidos no desenvolvimento de um amortecedor baseado na deformação inelástica do chumbo e a sua modelagem numérica. No final mostra-se um processo de cálculo para o dimensionamento do dispositivo.

O capítulo 6 é destinado ao estudo da dependência da resposta estrutural com os parâmetros físicos dos amortecedores incorporados.

No capítulo 7 avalia-se a eficiência do sistema de dissipação de energia, incorporado numa estrutura, em termos dos deslocamentos de pavimento e da propensão ao colapso que esta apresenta.

Finalmente no capítulo 8 apresentam-se as conclusões e considerações finais do trabalho.

## Capítulo 2

### Sistemas Metálicos de Dissipação de Energia

#### 2.1 Revisão Bibliográfica

Um dos mecanismos mais efetivos para dissipar energia numa estrutura é a deformação inelástica de elementos metálicos. A idéia de utilizar amortecedores histeréticos metálicos nas estruturas para absorver parte da energia sísmica iniciou-se com o trabalho de Kelly et al (1972) e logo, Skinner et al (1975). Os dispositivos incluíam vigas submetidas a torção e flexão e amortecedores de lâmina com forma de “U”. Para incluir estes dispositivos no projeto estrutural, foi preciso caracterizar seu comportamento força-deslocamento não linear. Ozdemir (1976) foi o primeiro a empregar analogias com teorias constitutivas elastoplásticas e viscoelásticas existentes para desenvolver uma relação força-deslocamento de elementos metálicos sob cargas dependentes do tempo. Logo depois, Bhatti et al (1978) utilizaram essa metodologia para determinar a resposta de estruturas com amortecedores de torção junto com sistemas de isolamento sísmico. Extensões do modelo de Ozdemir para carga multiaxial foram desenvolvidos em Graesser e Cozzarelli (1991). Para amortecedores que trabalham com altas velocidades de deformação são necessários modelos dependentes deste parâmetro, como é descrito por Krempl (1987). Outros modelos de elementos finitos mais elaborados e completos em plasticidade de metais são discutidos por Zienkiewicz e Taylor (1989). Modelos de amortecedores metálicos com forma triangular e em “X” baseados nas leis da mecânica foram propostos recentemente por Dargush e Soong (1995) e Tsai et al (1995).

Podem-se procurar em Xia e Hanson (1992), Jara et al (1993), e Tsai et al (1993) outras análises estruturais não lineares de sistemas que incorporam amortecedores metálicos utilizando o programa de elementos finitos DRAIN-2D [Kanaan e Powel, 1973]. As duas primeiras referências discutem amortecedores com forma de “X”, enquanto a última, considera amortecedores com forma triangular. Existem outras alternativas no domínio do tempo para analisar estruturas não lineares, re-escrevendo as equações de movimento na forma de espaço de estado ou seja, introduzindo os deslocamentos e as velocidades como variáveis primárias, podem-se usar procedimentos precisos e eficientes para resolver equações diferenciais de primeira ordem. Inaudi e de la Llera (1992) desenvolveram um código que usa esta formulação.

Grandes esforços tem sido investidos em estudos experimentais de amortecedores metálicos e modelos estruturais a escala reduzida. Entre os primeiros trabalhos podem-se

mencionar Kelly et al (1972) e Skinner et al (1975), que consideram-se precursores da dissipação de energia mediante amortecedores metálicos. Eles estavam baseados em deformações de torção e flexão de vigas de aço. Como recentes trabalhos encontram-se Aguirre e Sánchez (1992) que pesquisaram com amortecedores de lâminas em forma de “U”, incluindo a vida à fadiga e elevação da temperatura e o trabalho de Robinson e Greenbank (1976) onde apresentam-se testes com dispositivos que usam a extrusão de chumbo para dissipar energia (Figura 2.1). A continuação destes estudos levou ao desenvolvimento do amortecedor comercial de chumbo que funciona por corte e é discutido em Monti e Robinson (1996).

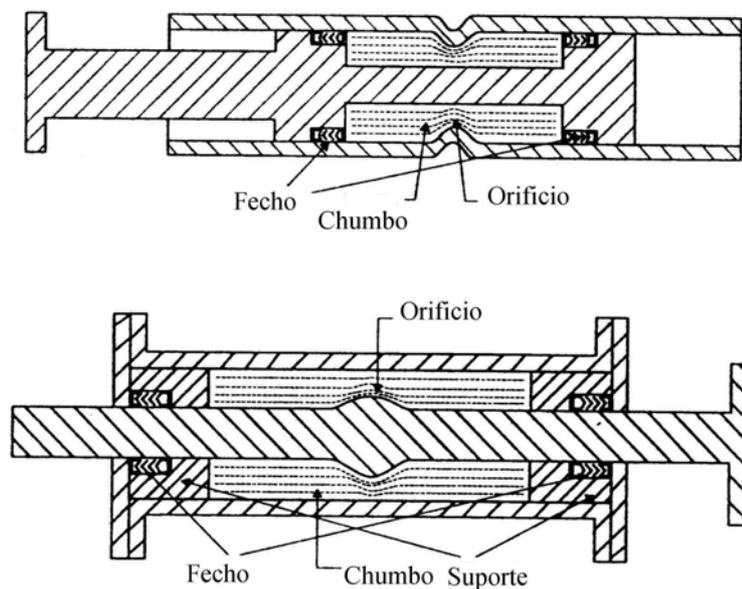


Figura 2.1. Amortecedores por Extrusão de Chumbo.[Robinson et al, 1976].

Atualmente os amortecedores com placa de aço são os mais utilizados para dispositivos metálicos e, vários programas experimentais tem sido realizados. Bergman e Goel (1987) descrevem testes cíclicos de amortecedores de placa com forma de “X” e “V” fabricados por Bechtel Corporation. Detalhes geométricos e experimentais mostram-se na Figura 2.2 e Figura 2.3, respectivamente.

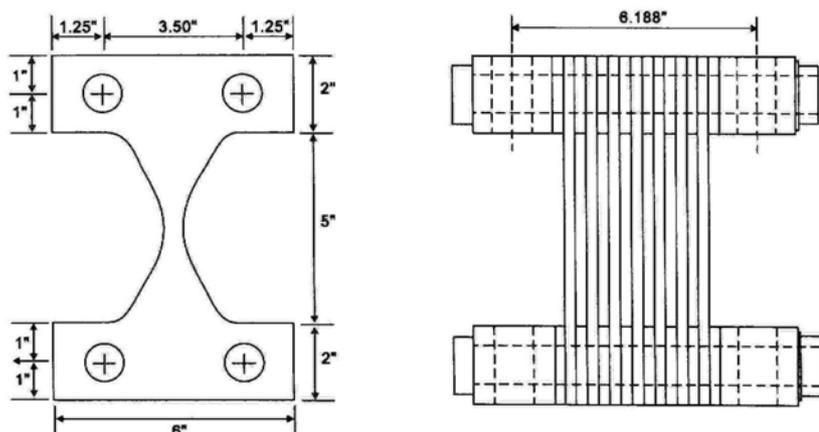


Figura 2.2. Geometria do Dispositivo com placas em forma de “X”. [Bergman e Goel, 1987].

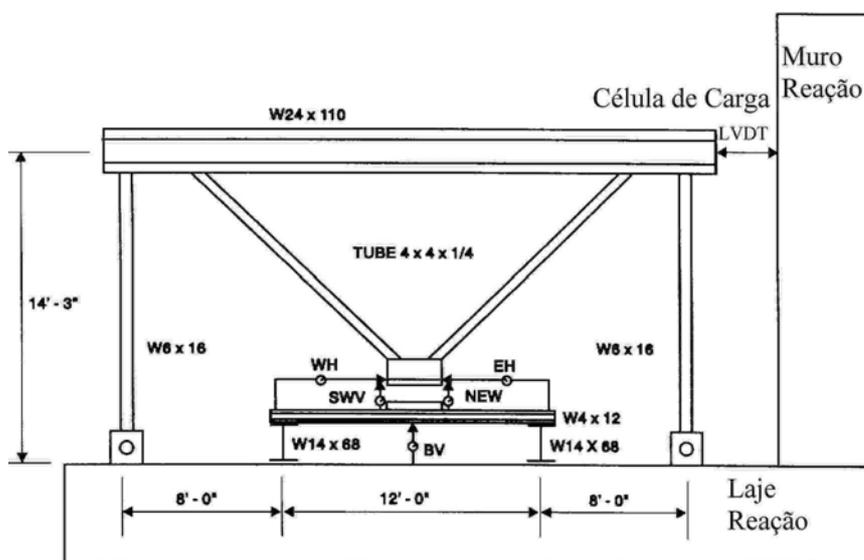


Figura 2.3. Dispositivo Experimental do Amortecedor de placas com forma de “X”.  
[Bergman e Goel, 1987].

Um total de três amortecedores foram testados sob sete níveis de amplitude constante numa frequência de 0.33 Hz. Curvas de força-deslocamento do amortecedor com forma de “X” com amplitudes de 0.42, 1.04 e 1.56 polegadas representam-se na Figura 2.4. A vida à fadiga do espécimen foi de 44 ciclos em amplitude de 1.56 polegadas. Entretanto, o amortecedor com forma de “V” deu uma configuração menos favorável na dissipação de energia e durabilidade.

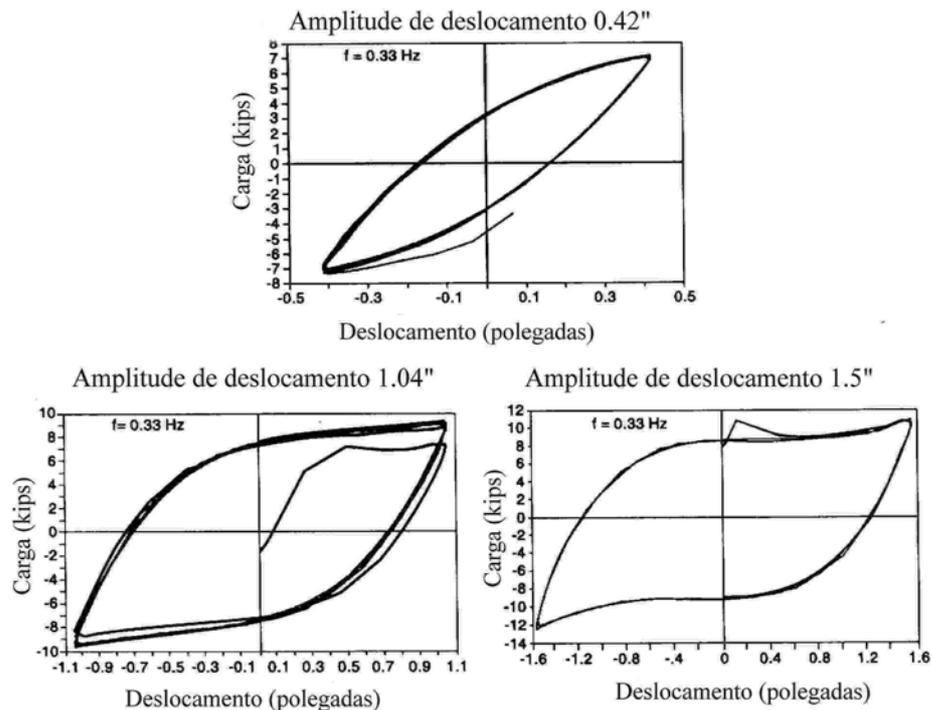


Figura 2.4. Comportamento Força-Deslocamento do Amortecedor de placas com forma de “X” com amplitudes de 0.42”, 1.04” e 1.56”.

Outro programa foi desenvolvido na Universidade de Califórnia em Berkeley por Wittaker et al (1991). A pesquisa foi patrocinada por Bechtel Power Corporation e Counter Quake Corporation, centrada na análise de um dispositivo com placas com forma de “X” conhecido como ADAS (*Added Stiffness and Damping*). As características geométricas do amortecedor são similares as apresentadas na Figura 2.2 e, neste caso, incorporam-se simulações com sismos além de considerar cargas cíclicas. As respostas a cargas cíclicas com amplitudes de deslocamentos de 0.45, 1.5 e 2.2 polegadas mostram-se na Figura 2.5. Comparando as figuras 2.4 e 2.5 observa-se que em pequenas deformações os ciclos de histerese são similares, mas, em grandes deformações não. Estas diferenças no aumento da rigidez em grandes deslocamentos são devidas à deformação finita (existência de não linearidade geométrica), produzida por efeitos axiais, e não ao endurecimento do material. Em Bergman e Goel (1987) a deformação axial é resistida pelos membros do pórtico de suporte, enquanto que no estudo de Wittaker et al (1991) não há restrição vertical. Esta situação não implica que estes dispositivos sejam inadequados para grandes deformações mas sim que devem ser consideradas as deformações finitas.

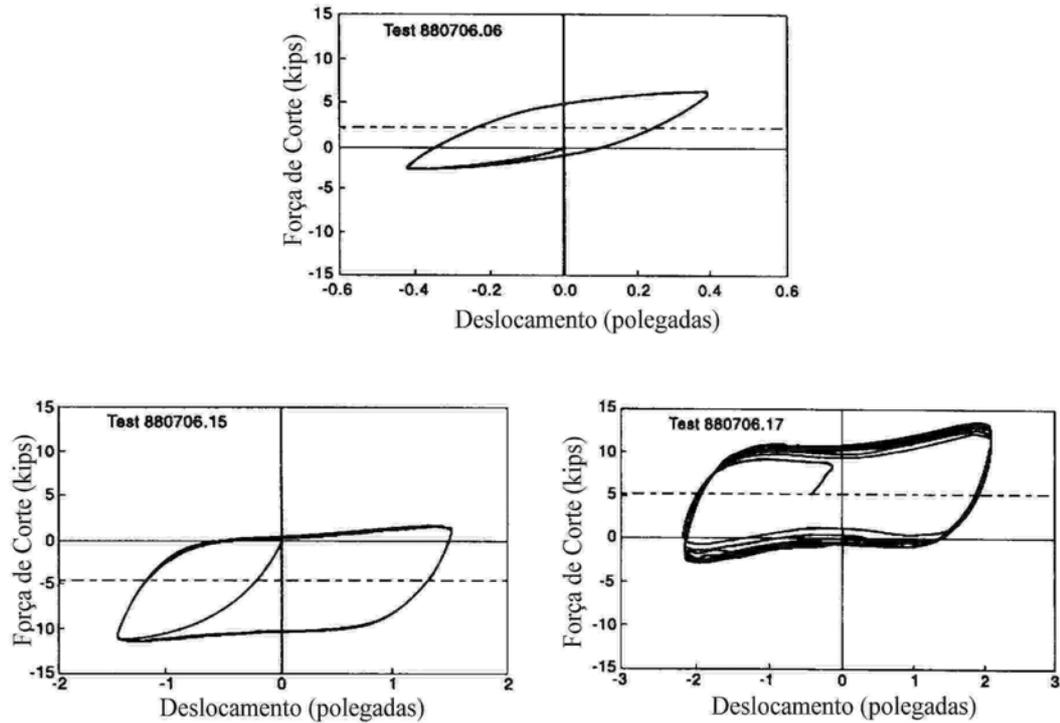


Figura 2.5. Comportamento Força-Deslocamento do ADAS, amplitudes de 0.45", 1.5" e 2.2".

Alguns dos resultados das análises realizadas por Wittaker et al (1991) com excitação sísmica são apresentados aqui. A Figura 2.6 mostra uma comparação das envoltórias dos deslocamentos absolutos e relativos de pavimento e o corte na base de um pórtico metálico ensaiado por Wittaker onde se reflete os benefícios do amortecedor ADAS usando como excitação sísmica o registro "Llolleo N10E, Chile 1985". Ciclos de histerese dos amortecedores ADAS e o correspondente balanço da energia da estrutura completa durante a simulação realizada com o sismo "El Centro, 1940 em 0.33g" mostram-se na Figura 2.7 e Figura 2.8, respectivamente. É evidente que estes dispositivos dissipam uma importante parte da energia sísmica que entra na estrutura.

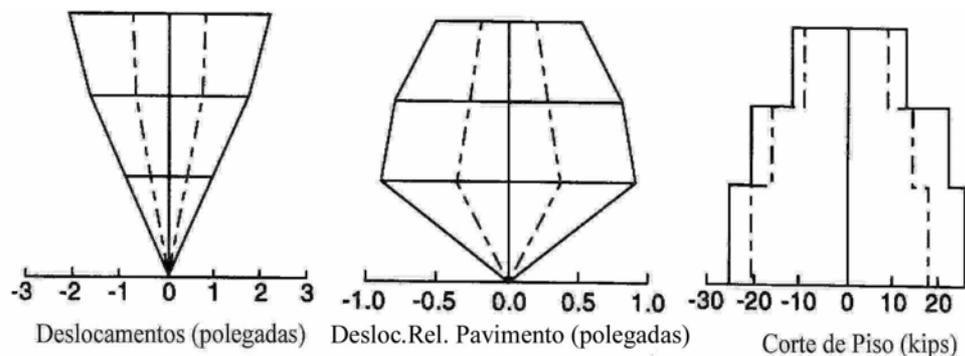


Figura 2.6. Comparação da Resposta para sismo Llolleo, Chile, 1985 (0.13g).

[Whittaker et al, 1991]. - - - - com ADAS — Sem ADAS.

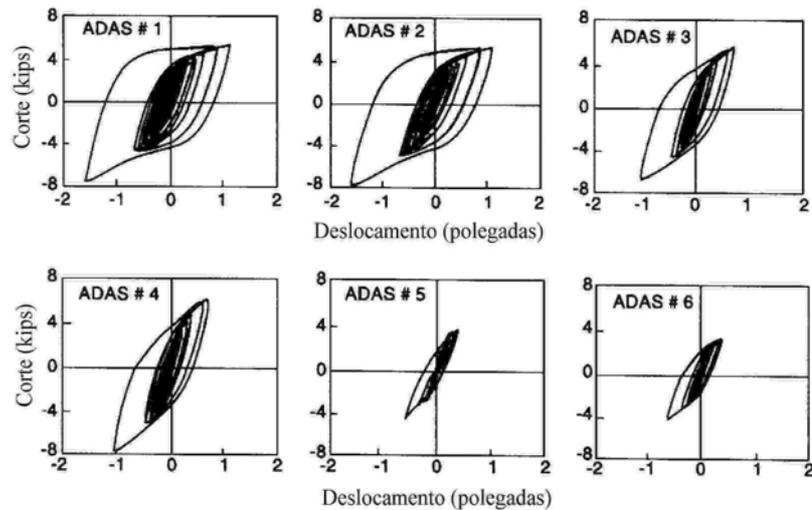


Figura 2.7. Ciclos de Histerese do ADAS para “El Centro ,1940”(0.33g).[Whittaker et al 1991].

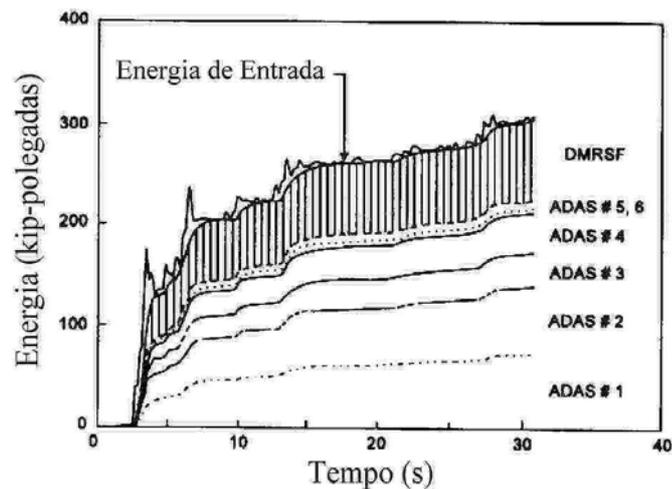


Figura 2.8. Registros de Energia do ADAS para “El Centro ,1940”(0.33g).[Whittaker et al 1991].

Logicamente, resultados similares nos ciclos de histerese aos obtidos com placas “X” da Figura 2.4 foram obtidos com amortecedores de placa triangular (TADAS) nos testes dirigidos por Tsai et al (1993), já que se trata do mesmo mecanismo. No entanto, nestes dispositivos, não desenvolveram forças axiais em grandes deslocamentos como no caso anterior, devido a que sua conexão no extremo é através de passadores que permitem a rotação. Os TADAS foram instalados num pórtico de dois andares (Figura 2.9) e, submetidos à excitação sísmica “El Centro, 1940 S00E”. Resultados dos deslocamentos obtidos no primeiro e segundo andar são mostrados na Figura 2.10. É evidente a redução significativa com a inclusão do TADAS.

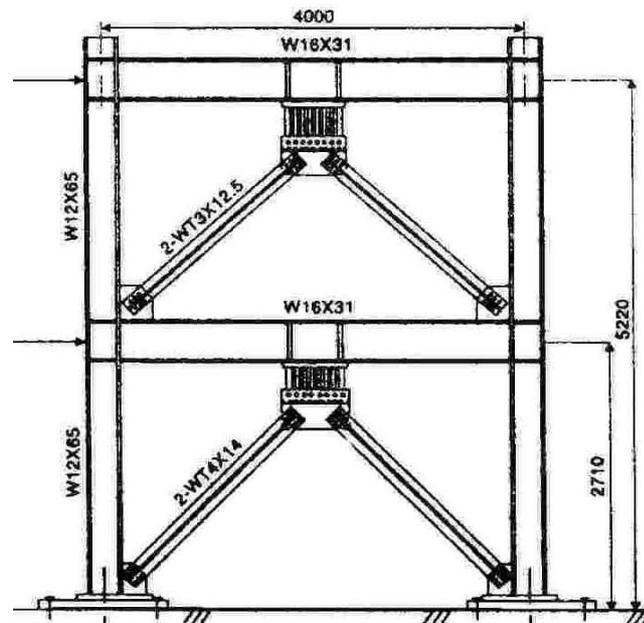


Figura 2.9. Instalação do ADAS no Pórtico. [Tsai, 1993].

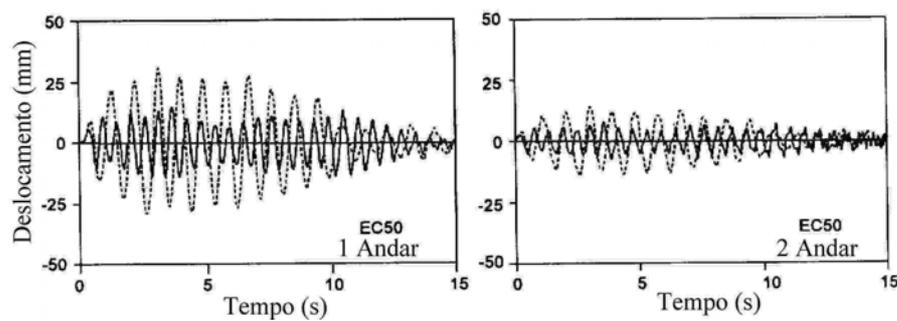


Figura 2.10. Resposta Pseudo-Dinâmica do TADAS. [Tsai, 1991].

----- com TADAS, — sem TADAS.

## 2.1 Implementações Estruturais

Depois de ganhar confiança na performance dos amortecedores metálicos baseada em evidências experimentais e modelos numéricos suficientemente precisos, estes dispositivos foram instalados em estruturas em escala natural. As primeiras aplicações foram realizadas na Nova Zelândia. Várias aplicações são descritas em Skinner et al (1980). A primeira aplicação usou amortecedores tipo vigas a torção de aço para a ponte Rangitikei. Dispositivos de placa engastada foram usados na base de uma chaminé em Christchurch e para “Dunedin Motorway Overbridge” [Nova Zelândia]. Seis amortecedores de viga a flexão de 300 [kN] foram utilizados no “Cronwell Bridge”. Muitas outras aplicações junto ao isolamento na base tem sido implementadas, [Skinner et al, 1980]. Se discutirá três exemplos onde amortecedores metálicos foram utilizados como dissipadores de energia dentro da superestrutura de um edifício. Os três

casos empregam elementos ADAS para a recuperação de prédios danificados por ações sísmicas, os dois primeiros foram na cidade de México e são reportados por Martinez- Romero (1993).

O edifício Izazaga com treze andares construído nos anos 70 de concreto armado foi moderadamente danificado pelo terremoto da cidade de México em 1985. Posteriormente da sua recuperação, nos ataques sísmicos dos anos 1986 e 1989, foi novamente danificado. Em 1990, em nova remodelação, 250 amortecedores ADAS foram instalados nas aberturas exteriores como se apresenta na Figura 2.11 para permitir sua operação durante a construção. A análise estrutural realizada com os dissipadores adicionados indicou uma redução dos períodos fundamentais de 2.82 [s] a 2.24 [s] e de 2.33 [s] a 2.01 [s], redução do 40% nos deslocamentos relativos entre pavimentos, quanto o coeficiente de corte na base manteve-se constante. Para a verificação do projeto final uma análise não linear foi realizada mediante programa de elementos finitos DRAIN 2DX.

Figura 2.11. Instalação de Amortecedores em Edifício Izazaga, México.  
[Martinez-Romero 1993].

A segunda aplicação foi o reforço de um hospital de cardiologia de seis andares construído também nos anos 70 e danificado pelo terremoto de 1985. A estrutura de concreto armado foi reforçada com uma série de suportes exteriores conectados ao edifício através de noventa amortecedores ADAS dispostos como mostra a Figura 2.12 para permitir a operação normal do hospital durante a remodelação. Neste caso a análise indicou uma redução tanto do corte na base como nos deslocamentos relativos entre pavimentos. É importante destacar que no trabalho de Martinez- Romero (1993) detalham-se numerosas observações de projeto e construção relacionados com estos dispositivos.

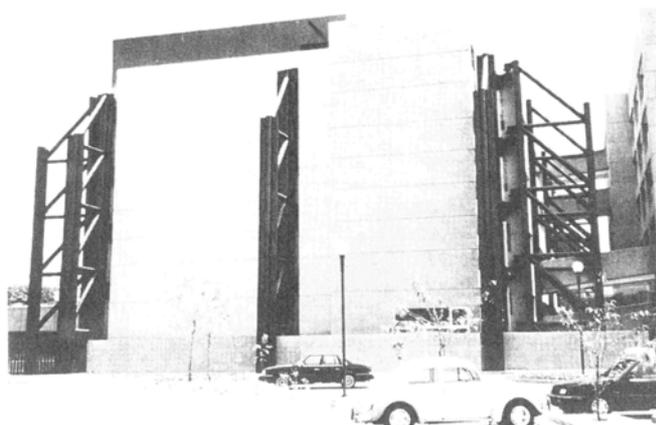


Figura 2.12. Instalação de Suportes Exteriores com Amortecedores ADAS no Hospital de Cardiologia, México. [Martinez-Romero 1993].

Amortecedores metálicos foram também utilizados na remodelação do Wells Fargo Bank em San Francisco, U.S.A., descrito por Perry et al (1993). O edifício tem uma estrutura de concreto com dois andares, construído originalmente em 1967 e posteriormente danificado no terremoto de Loma Prieta em 1989. Ali se utilizaram reforços diagonais e sete elementos ADAS com uma força de escoamento de 670 kN. Numerosas análises lineares 3D com o programa SAP 90 e não lineares com o programa DRAIN 2DX foram realizados até obter o projeto final. Uma comparação estimada da envoltória da resposta antes e depois do melhoramento mostra-se na Figura 2.13. Os resultados numéricos indicam que o projeto é estável e verificou todos os critérios propostos. A adição dos elementos ADAS levou a que várias colunas e muros interiores foram reforçados.

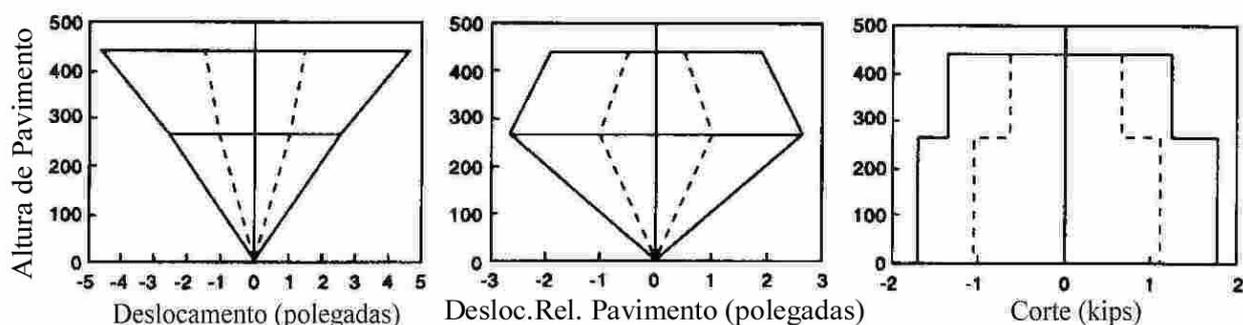


Figura 2.13. Comparação de Respostas calculadas no “Fargo Bank Building”. [Perry et al, 1993]

----- com ADAS, — Sem ADAS.

## Capítulo 3

### Fundamentos do Modelo Teórico das Propriedades Mecânicas do Amortecedor

#### 3.1 Introdução

Como foi mencionado um dos mecanismos mais efetivos para dissipar a energia introduzida numa estrutura por uma ação dinâmica é a deformação inelástica de metais. Entre os mais usados na construção de amortecedores pode-se mencionar o aço e o chumbo. Devido à dependência das propriedades mecânicas destes materiais com a velocidade de deformação, o presente capítulo apresenta evidências experimentais que descrevem dito comportamento. Por outro lado a abordagem matemática que permite estudar uma relação constitutiva com este tipo de característica é a teoria de viscoplasticidade. A partir dessa formulação foi possível modelar o comportamento força-deslocamento do dissipador desenvolvido e descrito em detalhe no capítulo 5. No final deste capítulo se apresenta a aproximação obtida numericamente dos resultados medidos durante o ensaio do dispositivo e a influência que tem, na resposta estrutural, desconsiderar o efeito da velocidade de deformação.

#### 3.2 Evidência Experimental: influência da velocidade de deformação e temperatura

Em estruturas submetidas a excitação sísmica, a velocidade de deformação em seções críticas pode atingir amplitudes da ordem de  $10^{-1}\text{s}^{-1}$  [Lee, (1984)]. A maneira como é afetada a relação tensão-deformação pela velocidade de deformação e em alguns casos a temperatura, tem grande importância na engenharia estrutural. Uma forma de se obter as curvas tensão de escoamento em função da velocidade de deformação é comparando os valores de tensão ao longo de uma linha de deformação constante  $\varepsilon = \text{const.}$ , representada mediante a linha ABC da Figura 3.1, das curvas obtidas para diferentes valores constantes de velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}$ . Estes valores de tensões podem ser representados em função da velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}$ . O procedimento apresenta-se na parte direita da Figura 3.1 onde a abcissa está em escala logarítmica. Em temperatura ambiente, em geral, a relação aproxima-se a uma reta.

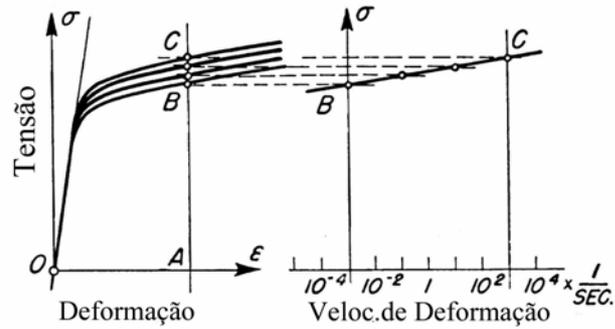


Figura 3. 1. Curvas tensão-deformação para diferentes velocidades de deformação.

### 3.2.1 Propriedades mecânicas do Chumbo

Observações em metais com baixo ponto de fusão, tais como estanho, chumbo e zinco, mostram que as curvas tensão-deformação destes metais têm ordenadas maiores sob altas velocidades de deformação, como se observa na Figura 3.2.

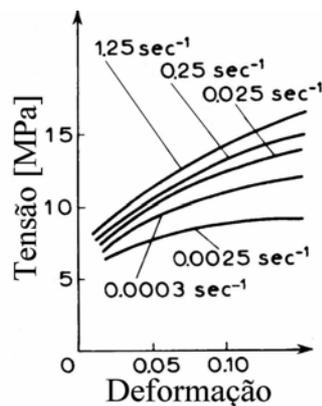


Figura 3. 2. Curvas Tensão-Deformação do chumbo para diferentes velocidades de deformação.

Robinson, (1982) testou três amortecedores histeréticos de chumbo sob várias velocidades de deformação. Estes amortecedores consistiram de cilindros parabólicos com alturas de 24, 42 e 94 [mm] correspondendo a forças de 8, 24 e, 120 kN respectivamente, numa velocidade de deformação de  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ . Eles estavam soldados a duas placas de latão e tinham uma altura igual ao diâmetro menor. Foram realizados com essa forma para minimizar o efeito dos momentos de flexão durante a aplicação de corte simples. A dependência destes amortecedores com a velocidade de deformação é mostrada na Figura 3.3 junto com os valores obtidos para o segundo amortecedor em  $10^{-5}$  e  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Nota-se que sua tensão de corte foi normalizada a uma velocidade de deformação de  $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ . Estes resultados seguem a seguinte lei:

$$\sigma = a\dot{\epsilon}^b \quad (3. 1)$$

onde para valores menores de  $\dot{\varepsilon} = 3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $b = 0.15$  e para maiores desse valor,  $b = 0.035$  coincidindo com os resultados de trabalhos anteriores [Robinson et al. (1976)].

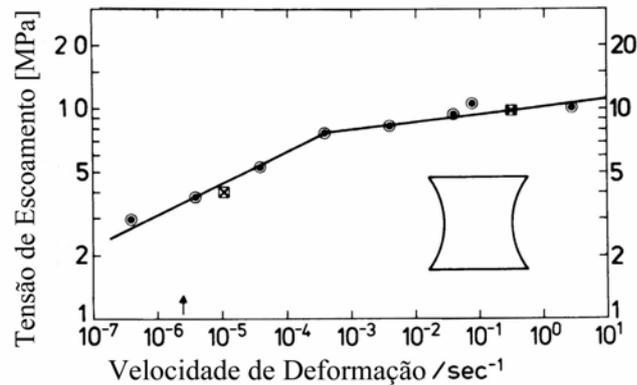


Figura 3.3. Variação da Tensão de Escoamento com a velocidade de deformação para corpos de prova cilíndricos parabólicos de chumbo.

Estes resultados indicam que a tensão de escoamento de amortecedores de chumbo têm uma dependência relativamente baixa da velocidade de deformação na faixa de  $3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  até  $10 \text{ s}^{-1}$ , onde encontram-se incluídos valores típicos de velocidade de deformação para solicitações sísmicas [ $10^{-1} \text{ s}^{-1}$  até  $1 \text{ s}^{-1}$ ], [Robinson, (1982)]. Nesta região um incremento da velocidade por um fator de 10, produz um incremento da força de apenas 8%. Para velocidades de deformação menores de  $4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , a dependência da tensão de corte com  $\dot{\varepsilon}$  é maior, com uma mudança na força do 40% por cada década na velocidade de deformação. Isto significa que para  $\dot{\varepsilon} = 3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  (deslocamento de 1 mm/h no extremo de cilindro de 100 mm de altura), a tensão de corte cai para 35% do valor que tem durante um sismo com  $\dot{\varepsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

Quando metais dúcteis com temperaturas de fusão elevadas são ensaiados, dentro da mesma faixa de velocidade de deformação e em temperatura ambiente, observa-se muito pouca dependência da tensão de escoamento da velocidade de deformação, como é o caso do aço apresentado nos seguintes estudos.

### 3.2.2 Propriedades mecânicas do Aço de baixo carbono

A influência do incremento da velocidade de deformação no fenômeno de escoamento do aço doce foi muito estudada. Entre os primeiros trabalhos pode-se mencionar Ludwik (1909) onde se concluiu que a tensão de escoamento de metais dúcteis aumenta com o logaritmo da velocidade de deformação. Outro trabalho importante em espécimens de aço de 0.2" de diâmetro em uma ampla faixa de velocidades de deformação foi apresentado por Manjoine (1944). Só um

conjunto de curvas tensão-deformação obtidas em temperatura ambiente é reproduzido  Figura 3.4, onde se observa a influência da velocidade de deformação sobre as tensões. Verifica-se que a tensão de escoamento incrementa-se com o aumento da velocidade de deformação. Representando as tensões em função da velocidade de deformação (Figura 3.5) aprecia-se que a partir de um valor de  $1\text{s}^{-1}$  as tensões têm variações importantes nos diferentes níveis de deformação.

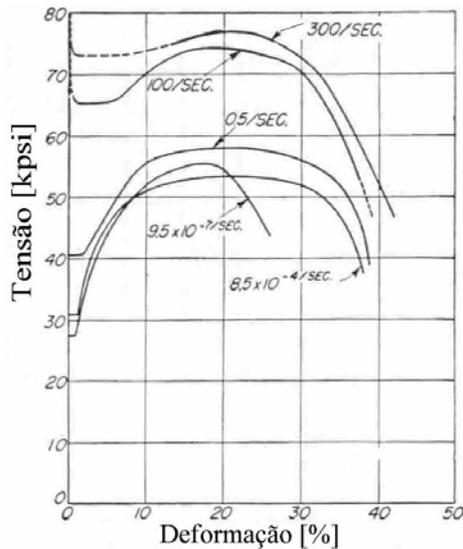


Figura 3. 4. Curva tensão-deformação do Aço para diferentes velocidades de deformação.

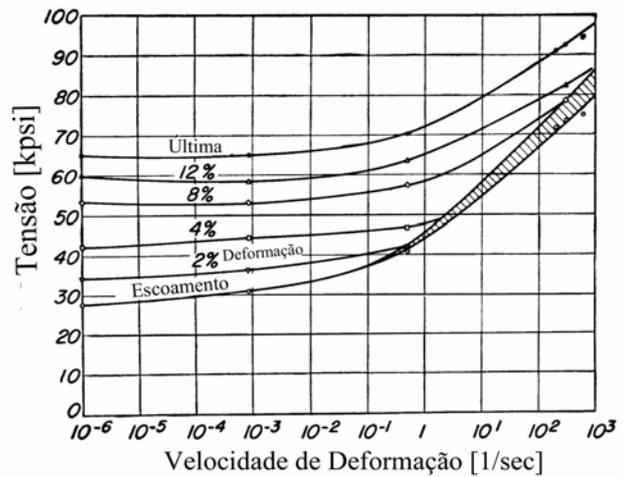


Figura 3. 5. Curva tensão-velocidade de deformação em diferentes níveis de deformação.

A partir de numerosos testes em tração e compressão com velocidades de deformação variáveis desde  $10^{-5}\text{ s}^{-1}$  (quasi-estáticos) até  $10^3\text{ s}^{-1}$  (impacto), Campbell e Duby, (1956,1957) concluíram para o aço doce que a relação entre a tensão dinâmica de escoamento e a tensão quasi-estática de escoamento, em grandes velocidades de deformação, pode atingir um valor de 2, corroborando os estudos feitos por Manjoine, (1944).

Estudos que consideram não só a velocidade de deformação mas também a influência da temperatura encontram-se em Slater et al (1971), onde por exemplo, durante um teste de compressão a baixa velocidade, a tensão (quasi-estática) é determinada para uma velocidade de deformação da ordem de  $10^{-3}\text{ s}^{-1}$ , enquanto que a tensão dinâmica poderia ser determinada a partir de um teste de impacto onde a velocidade de deformação pode atingir  $10^2\text{ s}^{-1}$ . A Figura 3.6  apresenta a relação entre a tensão dinâmica e quasi-estática para um aço com 0.55% de carbono, para diferentes temperaturas homólogas e velocidades de deformação para uma deformação particular de  $\varepsilon = 0.15$ . A temperatura homóloga define-se como:  $T_h = T/T_m$ , onde  $T_m$  é a

temperatura de fusão do metal e  $T$  a temperatura do ensaio. Este tipo de relação com dois pontos de inflexão (o primeiro corresponde à temperatura de recristalização do primeiro componente, ferrita, e o segundo à temperatura do cambio de fase, ao passar de ferrita a austenita) é típica do comportamento de combinação binária de metais. A partir da figura pode-se concluir:

1) O efeito da velocidade de deformação não é importante em temperaturas homólogas menores que 0.5, ou seja, menores que a temperatura de recristalização.

2) A relação de tensões é muito sensível à velocidade de deformação em temperaturas sobre a temperatura de recristalização  $T_h > 0.6$ , atingindo em alguns metais o valor de 10.

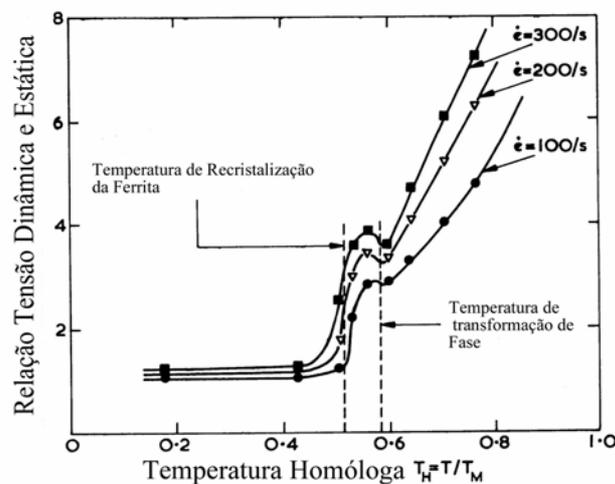


Figura 3. 6 Variação da tensão dinâmica com a velocidade de deformação e temperatura homóloga (Aço).

Testes realizados por Chang et al (1987) sobre aço estrutural (A36) a temperatura ambiente com cargas cíclicas e monótonas mostraram os efeitos da velocidade de deformação e da história da velocidade de deformação. As velocidades de deformação nos diversos testes variaram desde  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  até  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  cobrindo a faixa de velocidades que poderia experimentar um pórtico durante uma ação sísmica.

No caso de carga monótona, ao mudar as velocidades de deformação de  $10^{-5} \text{ s}^{-1}$  para  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  observa-se um incremento da tensão de escoamento de 27%, indicando uma importante dependência da velocidade de deformação no patamar plástico. Já na faixa de endurecimento essa sensibilidade é menor como mostra a Figura 3.7. Percebe-se também que a inclinação das curvas na descarga e posterior recarga para diferentes velocidades de deformação são idênticas à inclinação da reta de carga elástica inicial. A Figura 3.8 apresenta um espécimen com as mesmas velocidades de deformação do caso anterior mas previamente deformado durante vários testes e

logo submetido à carga monótona. Nota-se uma insensibilidade à história da velocidade de deformação.

Para o caso com carga cíclica ao mudar a velocidade de deformação de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$  para  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  pode-se notar na curva estabilizada uma sensibilidade de 8% como mostra a Figura 3.9. Não apresentando efeitos devido à história da velocidade de deformação. Foi provado também, que podem-se obter curvas de cargas cíclicas estabilizadas independentemente dos câmbios nas velocidades de deformação durante cada ciclo de carga. Além disso, as curvas de carga são idênticas e únicas para uma velocidade específica de deformação independentemente da história prévia ou seja que a história da velocidade de deformação não afeta a curva estabilizada única que corresponde a uma velocidade de deformação particular.

Todas as evidências experimentais citadas mostram que existe certa dependência da temperatura ambiente, do comportamento do aço e do chumbo com a velocidade de deformação. Portanto, o uso da teoria de plasticidade clássica (independente do tempo) para representar estes metais sob cargas cíclicas com diferentes velocidades de deformação pode ser desapropriado em certos tipos de análises de estruturas. Neste trabalho quantificou-se essa dependência para o caso dos amortecedores desenvolvidos incorporando uma representação do material através da teoria viscoplástica como é apresentado na seção seguinte.

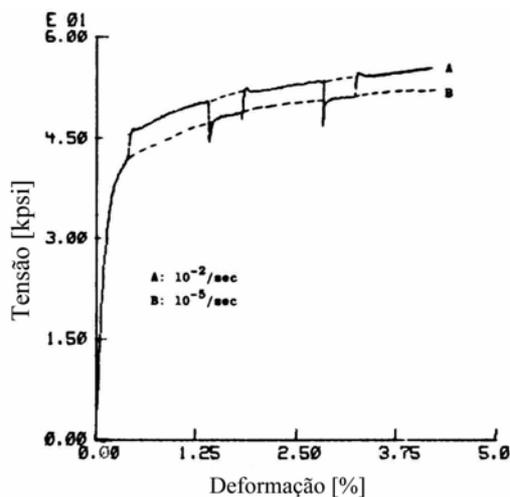


Figura 3. 7. Curva Tensão-deformação do Aço com carga monótona.

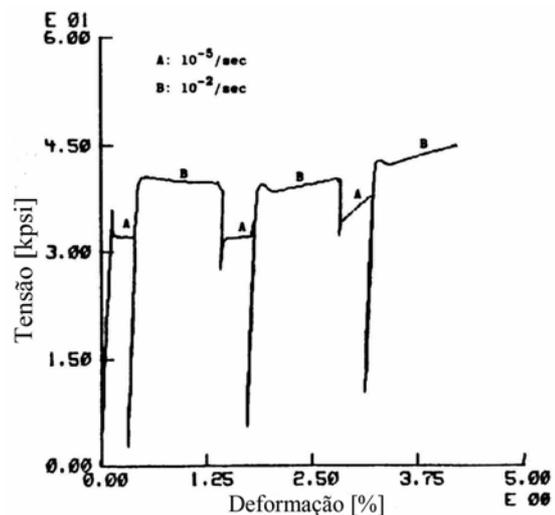


Figura 3. 8. Idem anterior com deformações plásticas prévia

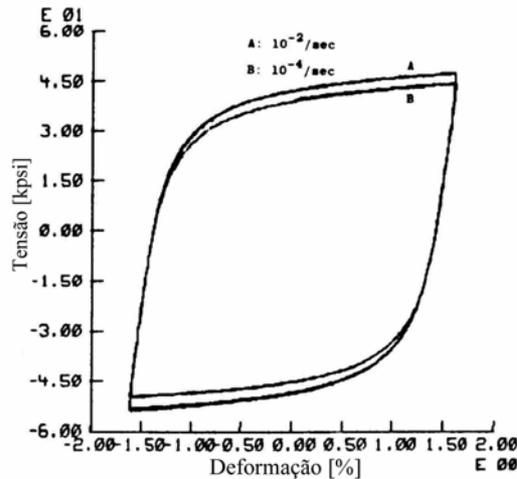


Figura 3. 9. Curva Tensão-deformação do Aço com carga cíclica.

### 3.3 Fundamentos das Teorias de Plasticidade e Viscoplasticidade

#### 3.3.1 Relações Constitutivas: Inelásticas

Apelando à definição de *corpo elástico* (Cauchy) como aquele em que a deformação em qualquer ponto do corpo fica completamente determinada pela tensão e temperatura atual, logo uma definição de um *corpo inelástico* é aquele no qual precisa-se de informação adicional para definir a deformação num ponto. Por exemplo, a informação complementar poderia ser a história passada da tensão e temperatura nesse ponto.

Kármán e Duwez (1950) destacaram uma das formas onde a relação tensão-deformação era modificada mostrando que a relação constitutiva usada para resolver problemas dinâmicos não é necessariamente a mesma que a obtida em testes quasi-estáticos. Uma manifestação particular deste tipo de comportamento é o fato que a deformação geralmente aumentará ao longo do tempo sob tensão constante (exceto sob tensão hidrostática). Este fenômeno é conhecido como *Creep* em sólidos. Outro processo que mostra a dependência do comportamento de um material com o tempo é conhecido como *Relaxação*. Este fenômeno manifesta-se por uma diminuição da tensão ao longo do tempo num espécime que se encontra sob uma deformação constante. Como regra geral pode-se dizer que, nos metais a temperatura favorece a ocorrência destes fenômenos, quanto que materiais que têm um comportamento elástico a temperatura podem tornar-se inelásticos a temperaturas superiores. As vezes essas temperaturas não são muito elevadas como é o caso do chumbo ou estanho (metais com baixo ponto de fusão).

Quando o comportamento do material é linear, a dependência entre a deformação e a história das tensões pode ser expressada explicitamente mediante a teoria de *Viscoelasticidade*

*Linear* (Lubliner, J., 1990). Este é o caso de muitos materiais (asfalto, polímeros, concreto, etc.) dentro de certos limites. Porém, existem outros materiais que têm um comportamento quase elástico dentro de uma faixa de tensões mas, têm uma inelasticidade fortemente dependente da história fora dessa faixa, como é o caso dos metais evidenciado em trabalhos experimentais. Neste último caso, é necessário uma formulação matemática que complemente as equações constitutivas da teoria de viscoelasticidade linear. Uma forma, é através de um conjunto de variáveis  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n$  tal que a deformação dependa delas, além da tensão e temperatura. Estas variáveis são chamadas *variáveis internas* e usualmente são escalares ou um tensor de segunda ordem. Denotando o tensor das variáveis internas com  $\boldsymbol{\kappa}$ , o tensor de deformação tem a forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.2)$$

A presença de variáveis adicionais nas relações constitutivas requer novas equações que descrevam a evolução destas variáveis. Estas equações adicionais que definem, junto às equações constitutivas, o comportamento de corpos inelásticos, levam a hipótese que se o estado local que determina a deformação está definido por  $\boldsymbol{\sigma}, T$ , e  $\boldsymbol{\kappa}$ , a evolução das variáveis internas também está determinada por esse estado através de uma função do tipo:

$$\dot{\kappa}_\alpha = g_\alpha(\boldsymbol{\sigma}, T, \boldsymbol{\kappa}) \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.3)$$

A equação (3.3) é conhecida como equação de evolução para as variáveis internas  $\kappa_\alpha$ . A relação (3.2) nem sempre pode ser invertida para obter  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \boldsymbol{\kappa})$  (conhecido como princípio de não dualidade), ainda quando não há restrições internas para a determinação da deformação. Este conceito das variáveis internas se desenvolve dentro das teorias matemáticas da *Plasticidade Clássica e Viscoplasticidade* apresentadas em forma resumida no apêndice B.

Sendo a teoria da plasticidade clássica só uma aproximação válida para processos suficientemente lentos com respeito ao tempo de relaxação do material, geralmente admite-se a existência de uma superfície de escoamento e uma deformação plástica independente da velocidade de deformação (em outras palavras, consideram-se materiais com viscosidade nula). Mas, para o caso de estruturas submetidas a cargas dinâmicas ou não proporcionais, a dita teoria pode não ser adequada. Nestes casos devem-se utilizar as teorias de Viscoplasticidade que levam em conta os efeitos da velocidade de deformação (materiais com viscosidade não nula). Também comprovou-se em estudos experimentais que o efeito da história da deformação pode ser desprezado. Conseqüentemente, os modelos simples usados em viscoplasticidade clássica, tais

como os de Perzyna (1966) e Malvern (1984), podem ser usados para descrever o efeito da velocidade de deformação introduzindo uma regra apropriada para as variáveis internas (ou de endurecimento). Devido à influência que tem a velocidade de deformação no comportamento mecânico de amortecedores metálicos, um dos objetivos deste trabalho foi avaliar como esse fenômeno modificaria a resposta de estruturas submetidas a cargas dinâmicas. Portanto, para descrever o comportamento força-deslocamento do amortecedor desenvolvido considerou-se um enfoque parcial da teoria da viscoplasticidade baseada no modelo de plasticidade dependente do tempo de Perzyna, o qual se apresenta em detalhe no apêndice B. Como este modelo é baseado na regularização da teoria da plasticidade clássica (independente do tempo), incluiu-se também no apêndice B uma descrição breve da mesma.

### 3.3.2 Modelagem teórica das equações constitutivas do amortecedor

Mediante um algoritmo com retorno mapeado, baseado na noção de Regularização Viscoplastica que leva em conta também o endurecimento cinemático e isotrópico com lei de fluxo e endurecimento de Perzyna reproduzido mediante as equações B.54 – B.56 do Apêndice B, implementou-se um modelo de elemento unidimensional viscoplastico para representar o comportamento força-deslocamento do dissipador de chumbo desenvolvido. O código do algoritmo, em linguagem Matlab, encontra-se no final do apêndice B. A Figura 3. 10 e 3. 11 compara dois ciclos de histereses (com amplitudes máximas de 9 e 12 mm) obtidos experimental e numericamente, num caso desprezando e em outro levando em conta o efeito da velocidade de deformação, respectivamente. Observa-se que o modelo que considera o efeito da velocidade de deformação aproxima o ciclo força-deslocamento obtido no ensaio com maior precisão.

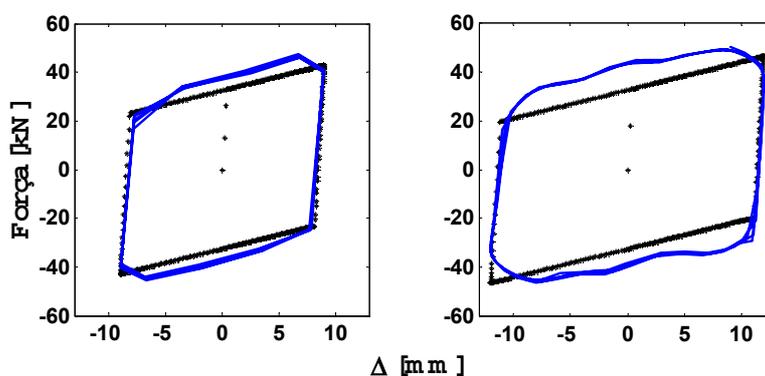


Figura 3. 10. Força-deslocamento experimental e numérico sem levar em conta a velocidade de deformação (viscosidade material nula).

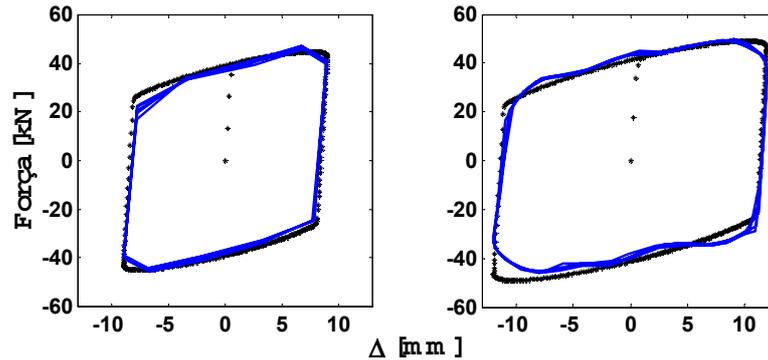


Figura 3. 11. Força-deslocamento experimental e numérico levando em conta a velocidade de deformação (viscosidade material não nula).

### 3.3.3 Influência da velocidade de deformação na resposta estrutural

A fim de quantificar a influência que tem o comportamento dependente da velocidade de deformação dos amortecedores na resposta estrutural estudou-se a estrutura descrita a seguir. Trata-se de um pórtico plano (tipo “*shear building*”) de aço de seis andares e seis vãos com frequências naturais nos primeiros três modos de 0.72, 2, e 3.42 Hz, respectivamente. O amortecimento próprio foi estimado em 2% do crítico. Mediante suportes diagonais foram colocados nos vãos centrais doze elementos dissipativos como mostra a Figura 3.12. O comportamento força-deslocamento de cada elemento foi similar ao descrito no apartado anterior mas, com uma capacidade total do 15% do peso total da estrutura. A excitação escolhida foi o registro sísmico “Taft, California, N 21E, 1952” com uma aceleração máxima do solo de 0.18g. As propriedades dinâmicas da estrutura se indicam na Tabela 3.1.

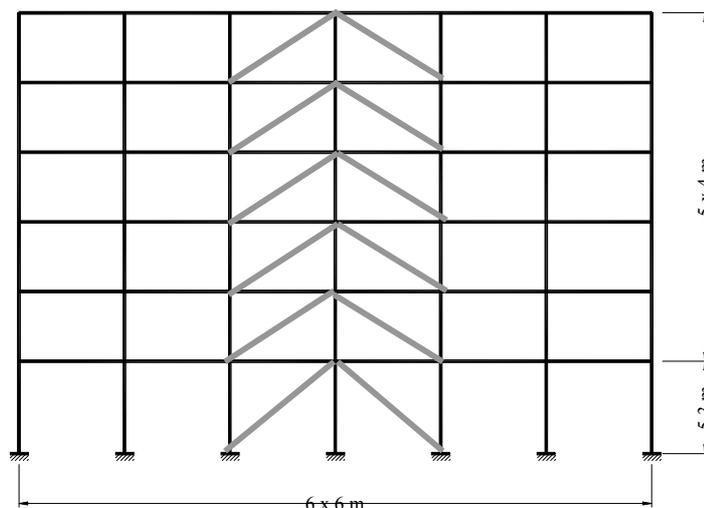


Figura 3. 12. Distribuição dos dissipadores nos vãos centrais.

Tabela 3.1. Propriedades dinâmicas da estrutura sem dissipadores

| Andar | Rigidez lateral [MN/m] | Massa [tn] |
|-------|------------------------|------------|
| 1     | 195                    | 254.65     |
| 2     | 162                    | 254.65     |
| 3     | 140.5                  | 254.65     |
| 4     | 130                    | 254.65     |
| 5     | 90                     | 254.65     |
| 6     | 85                     | 254.65     |

A Figura 3.13 mostra a resposta estrutural em termos do deslocamento do 6<sup>o</sup> pavimento (teto), levando em conta no modelo dos amortecedores a velocidade de deformação. Na mesma figura representou-se o erro que seria cometido na determinação da resposta se no modelo dos dissipadores se desconsiderasse o efeito da velocidade de deformação. Pode-se concluir em geral que, para a faixa de velocidades de deformação que atingem os elementos dissipativos durante um evento sísmico é possível desprezar dito efeito na determinação da resposta estrutural.

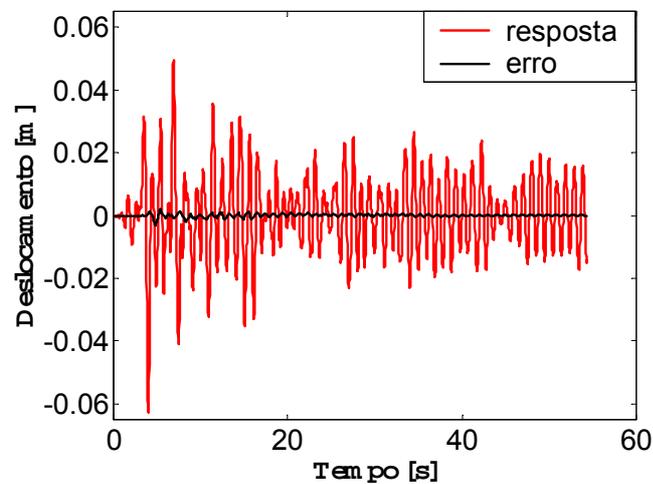


Figura 3. 13. Deslocamento do teto considerando o efeito da velocidade de deformação no modelo dos amortecedores e erro na resposta cometido ao desprezar dito efeito.

## Capítulo 4

### Procedimentos de Projeto de Amortecedores Metálicos

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo abordam-se diferentes procedimentos para determinar a resposta de uma estrutura provida de dissipadores metálicos. Dá-se ênfase especial aos procedimentos simplificados para estudar o campo de variabilidade que a resposta de uma estrutura pode atingir através da mudança nos parâmetros de projeto dos amortecedores. Porém, a determinação final da capacidade e rigidez dos amortecedores como a sua distribuição na estrutura fica sujeita a uma análise não linear mais complexa.

#### 4.2 Distribuição em altura da Rigidez e Capacidade dos Amortecedores

Primeiramente considera-se a distribuição da rigidez ao longo da altura da estrutura. O critério mais simples é o de manter a mesma forma dos modos de vibração da estrutura sem dissipadores. Isto implica que a inclusão da rigidez dos dissipadores somente modifica as frequências próprias de vibração da estrutura mas não as formas modais. Define-se a rigidez total da estrutura amortecida como:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K} + \mathbf{L}^T \text{diag}(\mathbf{k}_d) \mathbf{L} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_d \quad (4.1)$$

onde:  $\mathbf{k}_d$ : vetor formado pela rigidez de cada amortecedor (coordenadas locais).

$\text{diag}(\bullet)$ : matriz diagonal cuja diagonal principal é o vetor argumento.

$\mathbf{K}_d$ : incremento da matriz de rigidez devido aos dissipadores (coordenadas globais).

$\mathbf{K}$ : matriz de rigidez da estrutura sem dissipadores.

$\mathbf{K}_t$ : matriz de rigidez total da estrutura.

$\mathbf{L}$ : matriz cinemática que determina a relação entre os deslocamentos dos elementos dissipadores,  $\mathbf{u}$ , e os graus de liberdade da estrutura,  $\mathbf{q}$ , como segue:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{q} \quad (4.2)$$

A condição que deve ser cumprida para manter a forma modal é que a matriz de rigidez total,  $\mathbf{K}_t$ , seja diagonalizável pela matriz modal,  $\Phi$  e pode-se expressar mediante o problema de autovalores seguinte:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_d)\Phi = \Lambda_d \mathbf{M}\Phi = \Lambda \mathbf{M}\Phi + (\Lambda_d - \Lambda)\mathbf{M}\Phi \quad (4.3)$$

ou seja que a matriz de rigidez devido aos dissipadores cumpra que:

$$\mathbf{K}_d \Phi = (\Lambda_d - \Lambda)\mathbf{M}\Phi = \Gamma \Lambda \mathbf{M}\Phi \quad (4.4)$$

onde:  $\Lambda_d$  : matriz diagonal de autovalores do sistema amortecido (quadrados das frequências circulares  $\omega_{di}^2$  dos modos da estrutura amortecida).

$\Lambda$  : matriz diagonal de autovalores do sistema não amortecido (quadrados das frequências circulares  $\omega_i^2$  dos modos da estrutura não amortecida).

$\Gamma = (\Lambda_d - \Lambda) / \Lambda$  : incremento dos autovalores devido à incorporação dos dissipadores (incremento no quadrado das frequências naturais devido à incorporação dos dissipadores).

$I$  : matriz identidade.

$M$  : matriz de massa.

$\Phi$  : matriz modal.

Isto é válido em forma exata, por exemplo, num prédio com vigas infinitamente rígidas, (tipo “*shear building*”) se os dissipadores mantêm a mesma proporção de rigidez que a rigidez lateral de cada andar. A partir da equação (4.4) o incremento na rigidez devido à incorporação dos dissipadores em coordenadas locais pode-se expressar como:

$$\text{diag}(\mathbf{k}_d) = \Gamma \Lambda (\mathbf{L}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1}) \quad (4.5)$$

Desta forma obtém-se formas modais muito próximas às do sistema não amortecido.

Existem numerosas formas de resolver o problema da distribuição da capacidade dos dissipadores na altura e aqui só se apresentam algumas alternativas baseadas em critérios que consideram a forma modal, a deformação relativa de pavimento e os chamados critérios ótimos. Em geral, ditos critérios procuram alcançar demandas de deformação equilibradas ou uniformes nos diferentes lugares da estrutura mediante a distribuição da capacidade. A seguir se apresenta uma breve descrição de cada um deles.

a) O critério que leva em conta a forma modal onde as capacidades dos dissipadores se distribuem de tal forma de constituir um conjunto de forças laterais elásticas que conduzam a deslocamentos de pavimentos conforme à forma do primeiro modo. Isto significa que as forças dos dissipadores devem verificar a seguinte equação:

$$\mathbf{L}^T \mathbf{f}_y = \nu_o \mathbf{K} \phi_1 \quad (4.6)$$

ou o vetor de capacidades:

$$\mathbf{f}_y = \nu_o \mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1 \quad (4.7)$$

onde:  $\nu_o$  : fator de escala da capacidade total

$\phi_1$  : forma modal do primeiro modo.

$\mathbf{f}_y$  : vetor de capacidades dos elementos dissipativos (força de escoamento no caso de dissipadores metálicos ou força de atrito no caso de dissipadores de fricção).

$\mathbf{K} \phi_1$  : representa a distribuição de forças laterais elásticas associadas ao primeiro modo.

No caso de se definir o vetor dos deslocamentos de escoamento como uma fração dos deslocamentos modais, verifica-se:

$$\mathbf{u}_y = s_o \mathbf{L} \phi_1 \quad (4.8)$$

onde:  $s_o$  : fator de escala.

Por outro lado o incremento na rigidez devido aos dissipadores pode-se expressar como:

$$\mathbf{k}_d = \text{diag}(\mathbf{f}_y) \text{diag}(\mathbf{u}_y)^{-1} \quad (4.9)$$

onde:  $\text{diag}(\bullet)$ : representa uma matriz diagonal cuja diagonal principal é o vetor argumento.

$\mathbf{f}_y$  : vetor das capacidades dos dissipadores.

$\mathbf{u}_y$  : vetor dos deslocamentos de escoamento.

É interessante avaliar que acontece com os modos de vibração da estrutura com a rigidez dos dissipadores assim definida. Para conservar o primeiro modo na estrutura com dissipadores deve-se cumprir:

$$\mathbf{K}_d \phi_1 = \lambda \mathbf{K} \phi_1 \quad (4.10)$$

onde:  $\lambda$  : constante arbitrária.

Levando em conta as equações (4. 7) e (4. 8) e substituindo a equação (4. 9) na (4. 10) para uma estrutura de pavimentos rígidos obtém-se:

$$\frac{v_o}{s_o} \mathbf{L}^T \text{diag}(\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1) \text{diag}(\mathbf{L} \phi_1)^{-1} \mathbf{L} \phi_1 = \frac{v_o}{s_o} \mathbf{L}^T \text{diag}(\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1) \mathbf{1} = c_o \mathbf{K} \phi_1 \quad (4. 11)$$

onde:  $c_o$  : constante arbitrária.

Conseqüentemente, considerando a equação (4. 7) para as capacidades e a equação (4. 8) para os deslocamentos de escoamento se mantém a forma do primeiro modo de vibração. Nota-se que a equação (4. 11) é válida também no caso de se definir as capacidades e deslocamentos de escoamento em base a outro modo.

b) A definição das capacidades baseada na demanda do deslocamento relativo entre pavimentos da estrutura sem dissipadores conduz a bons resultados. Este critério se expressa em termos dos deslocamentos relativos de pavimento correspondente ao primeiro modo, como:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{T} \phi_1 \quad (4. 12)$$

onde:  $\mathbf{T}$  : matriz de transformação para o cálculo dos deslocamentos relativos de pavimento correspondentes ao modo 1.

$\boldsymbol{\delta}$  : vetor dos deslocamentos relativos do modo 1.

Utilizando a equação (4. 12) calculam-se as capacidades dos dissipadores como:

$$f_y = v_o \frac{|\boldsymbol{\delta}|}{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty} \quad (4. 13)$$

onde:  $\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty = \sum |\boldsymbol{\delta}|$ .

Pode-se demonstrar que a combinação (híbrido) entre os critérios de deslocamento relativo de pavimento (equação (4. 13)) e os de forma modal (equação (4. 7)) conduzem a determinações muito próximas do ótimo. Esta distribuição se expressa como:

$$f_y = v_o \frac{\min \left\{ \frac{|\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1|}{\|\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1\|_\infty}, \frac{|\boldsymbol{\delta}|}{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty} \right\}}{\left\| \min \left\{ \frac{|\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1|}{\|\mathbf{L}^{-T} \mathbf{K} \phi_1\|_\infty}, \frac{|\boldsymbol{\delta}|}{\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty} \right\} \right\|_\infty} \quad (4. 14)$$

A distribuição ótima das capacidades ao longo da altura pode-se analisar com procedimentos que envolvem critérios de minimização ou maximização de uma ou várias variáveis. Geralmente estes procedimentos são custosos numericamente, em especial se as capacidades mudam nos diferentes locais da estrutura e se a mesma tem muitos graus de liberdade. Portanto, apesar de ser factível uma otimização não linear multivariável para um registro sísmico determinado, parece preferível usar distribuições de capacidade que mesmo não sendo ainda ótimas, conduzam a demandas na estrutura próximas do ponto ótimo. É assim que existem vários procedimentos alternativos racionais para obter distribuições “ótimas” sob algum critério. Um deles, proposto por Takewaki (1997), procura-se minimizar a soma das funções de transferência entre a excitação (entrada) e o deslocamento relativo de cada pavimento (saída). No entanto, as distribuições obtidas diferem muito pouco das correspondentes ao minimizar a função de transferência entre a entrada e o deslocamento do topo do edifício, que se pode calcular de forma muito simples (otimização linear). Uma vez definidas as distribuições da capacidade dos dissipadores na estrutura, inicia-se o procedimento de cálculo para a determinação do valor da capacidade a fim de atingir o desempenho desejado.

### 4.3 Procedimentos de Projeto de Dissipadores Não Lineares

Os procedimentos de projeto de dissipadores não lineares podem-se classificar em dois grandes grupos:

#### 4.3.1 Modelo Completo:

Neste procedimento monta-se a equação de movimento com as matrizes de rigidez tangente e amortecimento da estrutura completa incluindo os dissipadores. Como excitação se considera um registro sísmico característico do lugar da obra. Com um método de integração passo a passo obtém-se a resposta do sistema em forma exata. Nota-se que o procedimento numérico é muito caro do ponto de vista computacional, devido à atualização da matriz de rigidez tangente em cada passo de tempo durante a integração (iteração).

Outra alternativa é considerar as forças não lineares produzidas pelos dissipadores como pseudo-forças, concentrando assim a não linearidade num termo único que geralmente é função dos deslocamentos. Sob este conceito a equação de movimento fica:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + L^T f = -Mr\ddot{a}_g \quad (4.15)$$

onde:  $\mathbf{f}$  : vetor da capacidade (coordenadas locais) dos “ $i$ ” dissipadores.

$\mathbf{L}$  : matriz cinemática que determina a relação entre os deslocamentos dos elementos dissipadores e os graus de liberdade da estrutura.

$\mathbf{L}^T \mathbf{f}$  : vetor das forças dos dissipadores em coordenadas globais.

$\mathbf{r}$  : vetor de influência da excitação.

$\ddot{\mathbf{a}}_g$  : registro das acelerações do solo.

A equação é integrada passo a passo exatamente admitindo-se variação linear das forças em cada passo de tempo. Como o vetor  $\mathbf{f}$  é avaliado a partir da relação força-deslocamento dos elementos dissipativos incorporados na estrutura, é necessário um processo iterativo em cada passo de tempo onde se atinge o balanço das forças para uma tolerância especificada.

### 4.3.2 Modelo Reduzido ou Simplificado (pré-projeto):

Em geral, como foi mencionado para a determinação da resposta da estrutura não linear de múltiplos graus de liberdade sujeita a cargas determinísticas ou aleatórias precisa-se de integração numérica mas, para projetos preliminares as vezes é suficiente aproximar a resposta com técnicas lineares simplificadas. Neste trabalho se apresentam o Método da Energia de Deformação Modal e a Redução da Ordem do Sistema.

#### a) Método da Energia de Deformação Modal:

Em sistemas de vários graus de liberdade com frequências bem separadas e com baixo acoplamento modal, o Método da Energia de Deformação Modal [Johnson and Kieholz, 1982] em combinação com alguma técnica de linearização (Ver seção 4.3.3), pode ser usado para estimar a resposta de um sistema não linear através da superposição modal do sistema de equações diferenciais desacopladas.

Primeiramente determina-se as formas e frequências modais,  $\phi_i$  e  $\omega_i$  respectivamente. Logo, substituindo na equação (4. 15) o termo não linear com elementos de rigidez linear equivalente de cada dissipador,  $k_{ei}$ , e desprezando os termos de amortecimento equivalente  $c_{ei}$ , o problema de autovalores do sistema pode-se expressar como:

$$\omega_l^2 \mathbf{M} \phi_l = (\mathbf{K} + \mathbf{L}^T \text{diag}(\mathbf{k}_e) \mathbf{L}) \phi_l \quad l=1, 2, 3, \dots, n \quad (4. 16)$$

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ = 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4. 17)$$

onde:  $\omega_l$  : frequência estimada do modo  $l$ .

$\phi_l$  : forma do modo  $l$ .

$k_e$  : vetor formado pela rigidez linear equivalente de cada amortecedor  $k_{ei}$ , determinada com o procedimento de linearização (Ver seção 4.3.3).

Definindo as coordenadas modais como:

$$\mathbf{q} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (4.18)$$

e usando a propriedade de ortogonalidade da matriz  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$  o sistema linear equivalente pode ser escrito como:

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\eta} + \Phi^T \mathbf{L}^T \text{diag}(c_e) \mathbf{L} \Phi \dot{\boldsymbol{\eta}} = \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad (4.19)$$

onde:  $\Phi$  : matriz modal.

$\boldsymbol{\eta}$  : vetor das coordenadas modais.

$\mathbf{q}$  : graus de liberdade da estrutura.

$c_e$  : vetor formado pelo coeficiente de amortecimento equivalente de cada amortecedor  $c_{ei}$ , determinado com o procedimento de linearização (Ver seção 4.3.3).

$\boldsymbol{\Omega}$  : matriz diagonal dos autovalores do sistema, com  $\omega_l^2$   $l=1,2,\dots,n$  na diagonal, determinada na equação (4.16).

Desprezando a interação das coordenadas modais devido ao acoplamento da matriz de amortecimento,  $\Phi^T \mathbf{L}^T \text{diag}(c_e) \mathbf{L} \Phi$  (considerando unicamente a diagonal), obtém-se  $n$  equações modais de movimento desacopladas para o sistema:

$$\ddot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l + \phi_l^T \mathbf{L}^T \text{diag}(c_e) \mathbf{L} \phi_l \dot{\eta}_l = \phi_l^T \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad l=1, 2, 3, \dots, n \quad (4.20)$$

Finalmente chega-se as seguintes equações modais para aproximar a resposta do sistema não linear:

$$\ddot{\eta}_l + 2\omega_l \xi_l \dot{\eta}_l + \omega_l^2 \eta_l = \phi_l^T \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad l=1, 2, 3, \dots, n \quad (4.21)$$

onde a relação de amortecimento modal  $\xi_l$  esta dado por:

$$\xi_l = \frac{1}{2\omega_l} \phi_l^T \mathbf{L}^T \text{diag}(c_e) \mathbf{L} \phi_l \quad l=1, 2, 3, \dots, n \quad (4.22)$$

### b) Redução da Ordem do Sistema:

Utiliza-se este procedimento para o caso onde a contribuição dos modos superiores seja desprezível e a resposta possa ser aproximada unicamente com o primeiro modo de vibração. Isto é, a partir da equação (4. 18) a resposta aproximada obtém-se como:

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}_1 \eta_1 \quad (4. 23)$$

onde:  $\boldsymbol{\phi}_1$  : forma do modo 1.

$\eta_1$  : coordenada modal do modo 1.

A equação diferencial não linear (4. 24) correspondente ao primeiro modo, pode ser resolvida, mediante uma aproximação linear. Para isto, deve-se representar o dissipador não linear por um elemento linear equivalente com parâmetros  $c_e$  e  $k_e$  dados por algum método de linearização (Ver seção 4.3.3) ou, considerando a análise modal não linear.

$$\ddot{\eta}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 + \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{L}^T \mathbf{f} = \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad (4. 24)$$

**Análise Modal Linear Equivalente:** este é o caso de representar cada dissipador mediante um elemento linear equivalente com parâmetros  $k_e$  e  $c_e$ . A resposta do sistema é aproximada mediante a equação do sistema de um grau de liberdade considerando unicamente o primeiro modo da equação (4. 21).

**Análise Modal Não Linear:** neste procedimento simplificado de projeto procura-se seleccionar a rigidez e a capacidade de cada dissipador de maneira tal que a estrutura apresente uma resposta no seu primeiro modo, ainda com os dissipadores incorporados. Se a distribuição das capacidades se realiza para que os dissipadores escoem simultaneamente quando a estrutura vibra no seu primeiro modo de vibração e a força neles é tal que no comportamento elástico como no plástico se garanta a vibração em dito modo, o projeto pode ser baseado num modelo de um grau de liberdade. Neste modelo a rigidez é representada por numa mola linear junto a um único elemento elasto-plástico em paralelo que concentra os efeitos não lineares de todos os dissipadores num só. A resposta dinâmica deste oscilador de um grau de liberdade permite estimar a resposta da estrutura e o desempenho em deslocamentos ou esforços cortantes na base, a partir dos quais pode-se basear o projeto preliminar dos dissipadores e suportes. Considerando um pórtico de vários andares com dissipadores em todos eles, as equações de movimento, desprezando o amortecimento próprio da estrutura e considerando unicamente o amortecimento aportado pelos dissipadores, é:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{L}^T \mathbf{f} = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{a}_g \quad (4.25)$$

onde:  $\mathbf{f}$  : vetor da capacidade (coordenadas locais) dos “ $i$ ” dissipadores .

$\mathbf{L}^T \mathbf{f}$ : vetor das forças dos dissipadores em coordenadas globais.

$\mathbf{r}$  : vetor de influência da excitação.

$\ddot{a}_g$  : registro das acelerações do solo.

No caso de utilizar-se o critério modal de distribuição de capacidades dos dispositivos descrito na equação (4. 7) e de deslocamentos da equação (4. 8), esses entrarão em escoamento simultaneamente quando a estrutura vibrar no seu primeiro modo e sempre que, a condição inicial seja “paralela” a esse modo. Isto se deve a que uma vez que o sistema entre em escoamento o vetor de forças  $\mathbf{L}^T \mathbf{f}$  é paralelo a  $\mathbf{K}\phi_1$  e conseqüentemente ortogonal às direções  $\mathbf{K}\phi_2... \mathbf{K}\phi_n$ . Levando em conta esta propriedade e, fazendo a troca de coordenadas da equação (4. 18) as equações em coordenadas modais do sistema podem-se expressar:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}\Phi\boldsymbol{\eta} + \mathbf{L}^T \mathbf{f} = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{a}_g \quad (4.26)$$

Pré-multiplicando pela transposta da matriz  $\Phi$  é possível desacoplar os termos em  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  ou seja:

$$\mathbf{M}_n\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_n\boldsymbol{\eta} + \Phi^T \mathbf{L}^T \mathbf{f} = -\Phi^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{a}_g \quad (4.27)$$

onde:  $\mathbf{M}_n = \Phi^T \mathbf{M}\Phi$  : matriz diagonal de massa modal.

$\mathbf{K}_n = \Phi^T \mathbf{K}\Phi$  : matriz diagonal de rigidez modal.

Na fase linear da resposta, a força axial dos dissipadores pode-se expressar como:

$$\mathbf{f} = \text{diag}(\mathbf{k}_d)\mathbf{L}\mathbf{q} = \text{diag}(\mathbf{k}_d)\mathbf{L}\Phi\boldsymbol{\eta} \quad (4.28)$$

o que conduz à equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_n\boldsymbol{\eta} + \Phi^T \mathbf{L}^T \text{diag}(\mathbf{k}_d)\mathbf{L}\Phi\boldsymbol{\eta} &= -\Phi^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{a}_g \\ \mathbf{M}_n\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_n\boldsymbol{\eta} + \Phi^T [\mathbf{K}_d\phi_1\mathbf{K}_d\phi_2... \mathbf{K}_d\phi_n]\boldsymbol{\eta} &= -\Phi^T \mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{a}_g \end{aligned} \quad (4.29)$$

Devido à definição de  $k_d$  (equação (4. 9)), esta equação se desacopla unicamente na primeira coordenada modal (as outras ficam acopladas). A primeira equação modal resulta:

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_{d1}^2 \eta_1 = \chi_1 \ddot{a}_g \quad (4. 30)$$

onde:  $\eta_1$  : coordenada modal do modo 1.

$\omega_{d1}^2 = (k_1 + k_{d1})/m_1$  : freqüência do modo 1 da estrutura com dissipadores.

$k_1 = \phi_1^T \mathbf{K} \phi_1$  : rigidez do sistema no modo 1 (elemento 1,1 da matriz  $\mathbf{K}_n$ ).

$k_{d1} = \phi_1^T \mathbf{K}_d \phi_1$  : rigidez dos dissipadores no modo 1.

$m_1 = \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1$  : massa do sistema no modo 1 (elemento 1,1 da matriz  $\mathbf{M}_n$ ).

$\chi_1 = \phi_1^T \mathbf{M} \mathbf{r} / m_1$  : coeficiente de participação da excitação no modo 1.

As outras equações, em geral, ficam acopladas devido à inclusão dos dissipadores. No entanto no caso em que se considera, para efeitos de projeto, que a resposta é descrita fundamentalmente pelo primeiro modo de vibração, é possível obter a fase linear da resposta através da equação (4. 30 ). Uma vez que os dissipadores atingem a carga de escoamento (todos simultaneamente pela definição das propriedades) e fazendo a troca de coordenadas da equação (4. 18), a equação de movimento (4. 25 ) no seu primeiro modo fica:

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 + \frac{\phi_1^T \mathbf{L}^T \mathbf{f}}{m_1} = \phi_1^T \frac{\mathbf{M}}{m_1} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad (4. 31)$$

onde:  $\eta_1$  : coordenada modal do modo 1.

$\omega_1$  : freqüência natural de vibração do modo 1 da estrutura não amortecida.

$m_1, \mathbf{L}, \phi_1, \mathbf{M}, \mathbf{r}, \ddot{a}_g$  têm a mesma definição que nos parágrafos anteriores.

Considerando o escoamento dos dissipadores mediante a equação (4. 6) tem-se:

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 + v_o \frac{\phi_1^T \mathbf{K} \phi_1}{m_1} = -\phi_1^T \frac{\mathbf{M}}{m_1} \mathbf{r} \ddot{a}_g \quad (4. 32)$$

ou:

$$\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 + v_o \omega_1^2 = \chi_1 \ddot{a}_g \quad (4. 33)$$

As equações (4. 30 ) e (4. 33) são as equações de um oscilador de um grau de liberdade com propriedades lineares correspondentes às do primeiro modo, trabalhando em paralelo junto a

um elemento não linear de rigidez  $k_{d1}$  e capacidade  $v_o k_l$ . (Figura 4. 1). O importante destas equações é que o projeto pode ser baseado no uso dos espectros inelásticos de sistemas de um grau de liberdade. Isto permite estabelecer uma conexão direta entre o comportamento não linear da estrutura com os dissipadores e o comportamento de um oscilador de um grau de liberdade. Nota-se que esta análise está restrita a dissipadores que tenham um notável patamar de escoamento onde se pode definir um modelo elasto-plástico. Além disso, o modelo não considera, na resposta do sistema, a contribuição das coordenadas modais restantes, hipótese que pode não ser válida em alguns casos, sobre tudo em estruturas com modos fortemente acoplados.

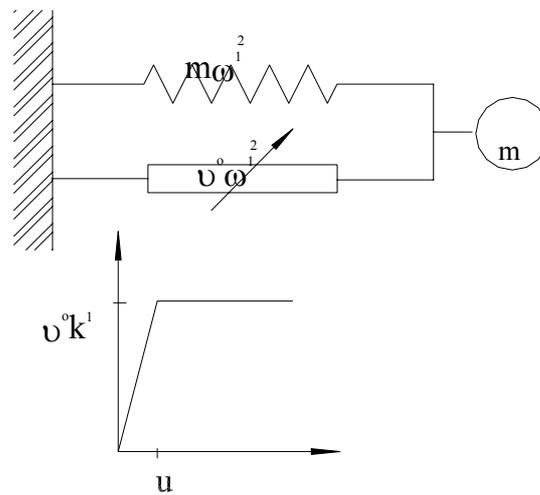


Figura 4. 1. Oscilador de um grau de liberdade não linear.

### Procedimento de Projeto com a Análise Modal Não Linear

Utilizando a formulação indicada, pode-se realizar o projeto preliminar para estruturas de vários graus de liberdade. As etapas seriam as seguintes:

1) Calcula-se o primeiro modo de vibração  $\phi_1$  da estrutura utilizando a matriz de massa e de rigidez, sem considerar os dissipadores.

2) Normaliza-se o modo  $\phi_1$  com um fator ( $s_o$ ) tal que a máxima deformação relativa de pavimento associada ao modo 1, seja igual à deformação de escoamento fixada para os dissipadores. Logo os deslocamentos de escoamento estão dadas por:

$$u_y = s_o \frac{L\phi_1}{\|L\phi_1\|_\infty} \quad (4.34)$$

3) Mediante a equação (4. 33), com valores crescentes da capacidade  $v_0 k_I$ , calcula-se a resposta não linear da estrutura para a excitação de projeto, considerando unicamente o primeiro modo de vibração. O valor de  $v_0$  incrementa-se até atingir o desempenho estrutural desejado.

4) Com o valor da capacidade definida com  $v_0$ , correspondente ao nível de desempenho desejado, determina-se a distribuição das capacidades na altura mediante a equação (4. 7) e a rigidez dos dissipadores com a equação (4. 9).

5) Finalmente, verifica-se o projeto realizando uma análise não linear da estrutura com dissipadores.

### Espectros Não Lineares de Deslocamento e Coeficientes de Redução

Baseado no procedimento anterior é possível construir espectros não lineares de deslocamento e de coeficientes de redução para uma excitação de projeto adotada. Os passos do processo são:

1) Escolher um deslocamento de escoamento do dissipador fixo  $q_{yI}$ , de por exemplo 1% do deslocamento elástico máximo do sistema de um grau de liberdade.

2) Com esse deslocamento de escoamento e adotando capacidades crescentes  $v_0 k_I$  (força de escoamento do dissipador) determina-se a resposta máxima do oscilador de massa unitária para a faixa de períodos de interesse mediante integração não linear da equação:

$$\ddot{\eta}_I + 2\xi_I \omega_I \dot{\eta}_I + \omega_I^2 \eta_I + L f_{(\eta_I)} = \ddot{a}_g \quad (4. 35)$$

onde:  $L$  : constante cinemática que relaciona o deslocamento do dissipador e do oscilador.

$\xi_I$ : relação de amortecimento crítico do modo 1.

$f_{(\eta_I)} = v_0 k_I$  : força de escoamento do dissipador (Figura 4. 1).

Se construi o espectro de Coeficiente de Redução definido como a relação entre o deslocamento máximo inelástico obtido pela equação (4.35) e o deslocamento máximo elástico (estrutura sem dissipador):

$$C_r = \frac{\eta_{I\max}}{\eta_{el\max}} \quad (4. 36)$$

onde :  $C_r$ : Coeficiente de redução de deslocamentos.

$\eta_{I\max}$  : deslocamento máximo inelástico do modo 1.

$\eta_{el\max}$  : deslocamento máximo elástico do modo 1.

Como exemplo considerou-se a estrutura definida em detalhe no capítulo 3 sob a excitação sísmica “El Centro, 1940, 0.5g” com capacidades no sistema dissipador de  $v_o k_1 = 0.25, 0.5, 1, 1.5, 1.75$  (que correspondem a 3, 6, 12, 18 e, 21% do peso da estrutura  $W$ , respectivamente). a resposta foi avaliada numa faixa de períodos compreendidos entre 0.1 [s] e 2.85 [s] para uma relação de amortecimento próprio da estrutura de 1%. Nas Figuras 4.2.2. e 4.3. se apresentam os espectros de Deslocamentos e de Coeficientes de Redução respectivamente, obtidos mediante integração numérica.

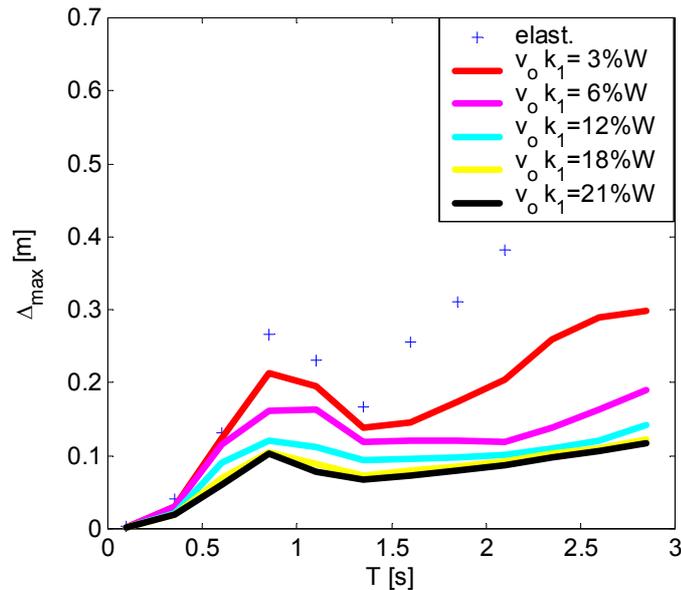


Figura 4. 2. Espectro de Deslocamentos.

( $v_o k_1$ : capacidade do dissipador,  $W$ : peso da estrutura)

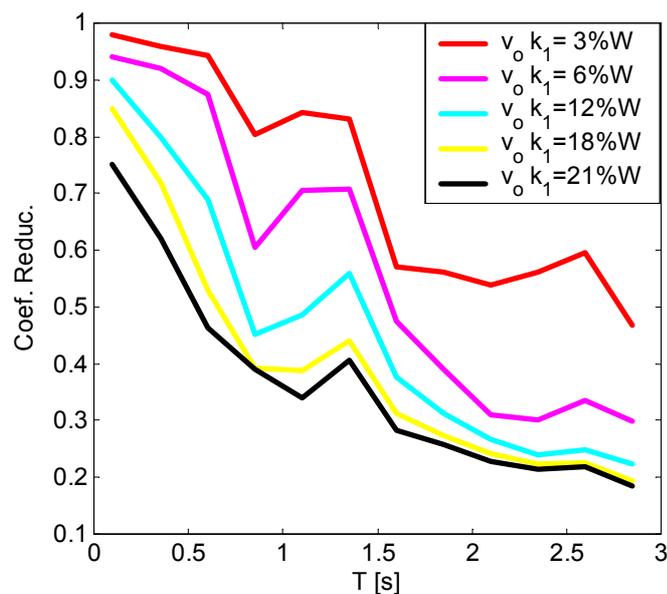


Figura 4. 3. Espectro de Coeficientes de Redução em Deslocamentos.

### Procedimento de Projeto com Espectros Não Lineares

1) Entrando na Figura 4. 3 com o período da estrutura analisada e o coeficiente de redução em deslocamentos desejado obtém-se a capacidade necessária  $v_o k_l$  do sistema dissipador de energia.

2) Como a rigidez modal da estrutura no seu primeiro modo,  $k_l$ , é conhecida, determina-se  $v_o$  e logo mediante a equação (4. 7) o vetor das capacidades dos elementos dissipativos,  $f_y$ .

3) Calcula-se o vetor de deslocamento de escoamento dos dissipadores como:

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{L}\phi_1 q_{y1} \quad (4. 37)$$

onde:  $q_{y1}$  : deslocamento de escoamento do modo 1 adotado na construção do espectro.

4) A Rigidez dos dissipadores obtém-se pela equação (4. 9).

5) Finalmente, verifica-se o projeto realizando uma análise não linear da estrutura com dissipadores.

#### 4.3.3 Técnicas de Linearização

É muito comum em procedimentos de projeto preliminar de estruturas usar espectros de resposta linear e, por esta razão além da simplicidade, surge a necessidade de obter um sistema de equações lineares que aproximem, para uma determinada excitação, a resposta do sistema não linear. A maioria destas técnicas de linearização procuram determinar os parâmetros lineares equivalentes que permitem aproximar a resposta do sistema não linear submetido a uma excitação harmônica ou aleatória. Nota-se que os parâmetros lineares equivalentes que resultam do procedimento de linearização serão função unicamente da frequência, ou da frequência e amplitude do deslocamento, além dos parâmetros físicos próprios dos dispositivos, dependendo se eles satisfazem ou não as condições de linearidade, respectivamente. Estas ferramentas são muito importantes na etapa preliminar da definição de capacidades e localização dos dissipadores na estrutura. Neste trabalho apresentam-se unicamente os mais conhecidos:

**a) Técnica de Linearização harmônica:** denominada também, método de balanço harmônico [Siljak, 1969]. Este método determina os parâmetros de um elemento linear equivalente que aproxime a resposta de um elemento não linear submetido a uma excitação harmônica. Para obter os parâmetros lineares equivalentes minimiza-se o erro quadrático médio definido pela diferença das forças produzidas pelo elemento (sistema) não linear e, as produzidas pelo

elemento (ou sistema) linear viscoso equivalente (modelo de Kelvin), submetidos ambos, a uma excitação harmônica.

O esquema da Figura 4.4 apresenta a idéia do critério:

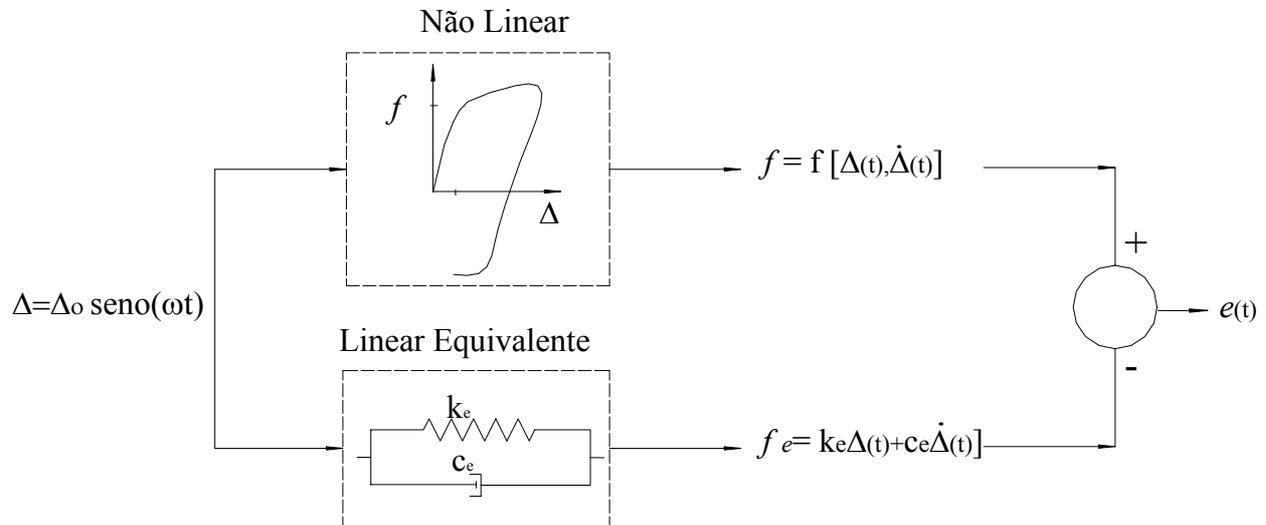


Figura 4. 4. Diagrama de fluxo para Linearização harmônica.

As equações de minimização do erro quadrático médio para obter os parâmetros equivalentes são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_e} \int e^2(t) dt &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_e} \int e^2(t) dt &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde o erro quadrático médio definido pelo quadrado da diferença das forças entre o sistema não linear e equivalente é:

$$\int_0^{2\pi} e^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (f_{(\Delta\dot{\Delta})} - k_e\Delta - c_e\dot{\Delta})^2 dt \quad (4.39)$$

Os parâmetros que conduzem ao mínimo do erro quadrático médio são:

$$\begin{aligned} c_e &= \frac{W_D}{\omega\pi\Delta_o^2} \\ k_e &= \frac{\int_0^{2\pi} f_{(\Delta\dot{\Delta})}\Delta dt}{\frac{\Delta_o^2\pi}{\omega}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde:  $c_e$  : coeficiente de amortecimento viscoso do elemento linear equivalente.

$k_e$  : rigidez do elemento linear equivalente.

$\Delta = \Delta_o \text{ seno } (\omega_1 t)$  : deslocamento de excitação aplicado ao elemento.

$\omega_1$  : frequência natural do modo 1 para o caso de uma estrutura com  $n$  graus de liberdade submetida a uma excitação de banda larga.

$f_{(\Delta)}$  : força produzida pelo elemento não linear.

$W_D$  : energia dissipada pelo elemento durante um ciclo.

A equação (4. 40) pode-se obter também mediante o critério da energia equivalente, igualando a energia dissipada pelo sistema não linear e pelo sistema linear equivalente durante um ciclo. A dificuldade deste procedimento é a escolha da amplitude  $\Delta_o$  da excitação harmônica. Uma forma de escolher pode ser a seguinte:

A partir dos espectros de deslocamentos de um conjunto de sismos escolhidos conforme o local da obra, entrando com a frequência do primeiro modo e um amortecimento total estimado para atingir o desempenho desejado, estima-se o deslocamento máximo da estrutura. A partir desse valor, calcula-se o deslocamento máximo que terá cada elemento dissipador,  $\Delta_{max}$ . Considerando que esse deslocamento máximo  $\Delta_{max}$ , pode atingir 2 ou 3 vezes o desvio padrão durante o sismo, tem-se:

$$\sigma_{\Delta} \cong \Delta_o \cong \frac{\Delta_{max}}{2 \text{ ou } 3} \quad (4. 41)$$

onde  $\Delta_o$  : amplitude de deslocamento da excitação harmônica usada na linearização.

$\Delta_{max}$  : deslocamento máximo de cada elemento. (determinado a partir do espectro de deslocamentos do sismo de projeto).

$\sigma_{\Delta}$  : desvio padrão do deslocamento do elemento durante o sismo.

Por exemplo, para o caso de um elemento do tipo elasto-plástico (bi-linear) com rigidez pré-escoamento  $k_i$  e pós-escoamento  $k_f$  e sob uma excitação harmônica os parâmetros equivalentes podem ser determinados da seguinte forma: definindo  $\beta = \Delta_o/u_y$  como a relação da amplitude de deslocamento da excitação harmônica  $\Delta_o$ , e o deslocamento de escoamento do amortecedor  $u_y$ , a partir da equação (4. 40) para  $c_e$  tem-se:

$$c_e = \frac{W_D}{\omega_1 \pi \Delta_o^2} = \frac{4 f_y (\Delta_o k_i - f_y) (k_i - k_f)}{\omega_1 \pi \Delta_o^2 k_i^2} = 4 \frac{f_y}{\omega_1 \pi \Delta_o} \frac{\beta - 1}{\beta} (1 - \kappa) \quad (4. 42)$$

onde:  $k_i$  e  $k_f$ : rigidez pré e pós-escoamento do elemento, respectivamente.

$f_y = k_i u_y$ : força de escoamento do elemento.

$\beta = \Delta_o/u_y$ : relação entre a amplitude de deslocamento harmônico do ciclo e o deslocamento de escoamento.

$\omega_1$ : frequência natural do modo 1 para o caso de uma estrutura com  $n$  graus de liberdade submetida a uma excitação de banda larga.

$\kappa = k_f/k_i$ : relação entre a rigidez pós e pré-escoamento do elemento.

Para o caso de  $k_e$ , integrando a equação (4. 40) por partes, considerando como limites de integração o tempo transcorrido durante os intervalos [1,2],[2,3],...[5,1] (Figura 4.5), obtém-se:

$$k_e = \frac{f_y}{\beta \pi \Delta_o} \left[ -2 \beta \sqrt{\beta-1} + 4 \sqrt{\beta-1} + \frac{1}{2} \beta^2 \pi - \beta^2 \arcsen\left(\frac{\beta-2}{\beta}\right) \right] \quad (4. 43)$$

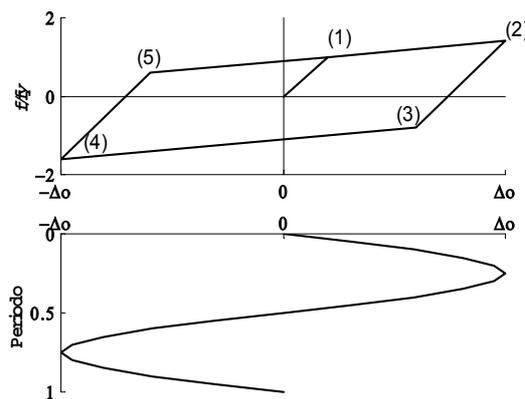


Figura 4. 5. Curva Força-Deslocamento para o elemento elasto-perfeitamente plástico.

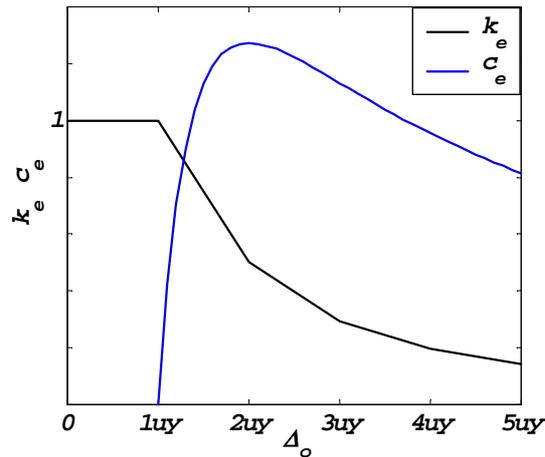


Figura 4. 6. Variação da Rigidez e Coef. de Amort. Equiv. com a amplitude do deslocamento harmônico.

Na Figura 4.6 apresentam-se os parâmetros do sistema linear equivalente em função da amplitude do deslocamento harmônico. Nota-se que o amortecimento máximo atinge-se para um  $\beta = 2$ , ou seja, que é desejável que o deslocamento de escoamento seja  $u_y = \Delta_o/2 = \sigma_d/2$ .

A título de exemplo, a Figura 4. 7 apresenta uma comparação entre as respostas obtidas num sistema não linear de um grau de liberdade e do sistema linear equivalente. Ambos sistemas foram submetidos a uma excitação harmônica de amplitude 0.3 [N] e frequência de 0.58 [Hz], adotando  $\beta=2$ . As características dos sistemas detalham-se na Tabela 4.1:

Tabela 4.1. Características dinâmicas do sistema de um grau de liberdade.

|                               | Sist. Original | Sist. Equiv. | Amortecedor |
|-------------------------------|----------------|--------------|-------------|
| Massa                         | 0.175 [kg]     |              |             |
| Rigidez                       | 2.65 [N/m]     | 3.2 [N/m]    |             |
| freqüência                    | 0.62 [Hz]      | 0.68 [Hz]    |             |
| Relac. Amort. Crítico proprio | 5 [%]          | 24 [%]       |             |
| Força de Escoamento           | -              |              | 0.1735 [N]  |
| Deslocamento de Escoamento    | -              |              | 0.05 [m]    |

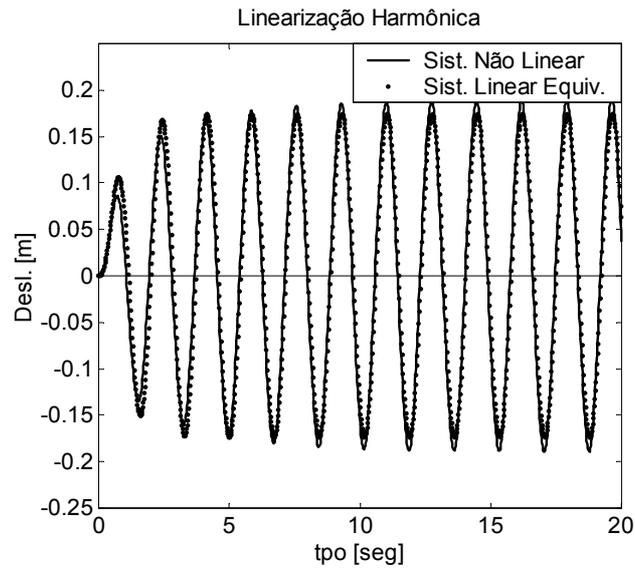


Figura 4. 7. Comparação entre as respostas dos sistemas de um grau de liberdade não linear (exata) e linear equivalente (aproximada) sob uma excitação harmônica.

Na Figura 4. 8. apresenta uma comparação entre as respostas dos mesmos sistemas submetidos ao registro sísmico “Taft California N21° E, 1952”.

Figura 4. 8. Comparação entre as respostas dos sistemas de um grau de liberdade não linear (exata) e linear equivalente (aproximada) sob uma excitação aleatória.

**b) Técnica de Linearização estatística:** este procedimento é baseado num critério de minimização similar à linearização harmônica. Neste caso, minimiza-se o valor esperado do erro quadrático médio supondo que os deslocamentos e velocidades são processos aleatórios estacionários com média nula e função de probabilidade conjunta Gaussiana. [Figura 4. 9]

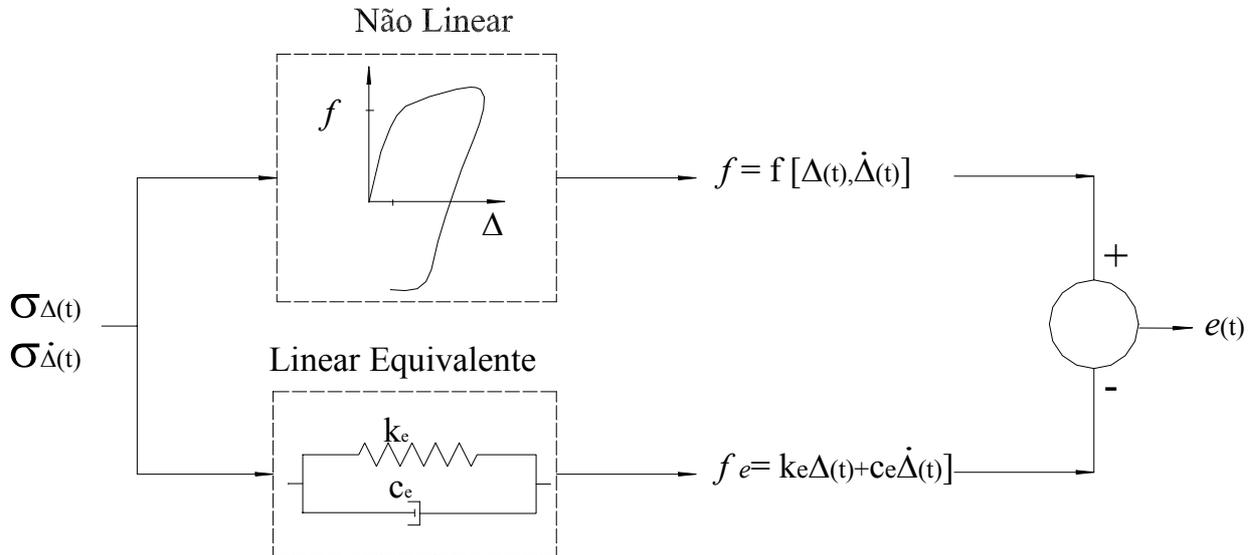


Figura 4. 9. Diagrama de fluxo para Linearização Estatística.

O erro é definido como a diferença da força não linear do elemento e a força de um elemento viscoso linear equivalente:

$$e_{(t)} = f_{(\Delta, \dot{\Delta})} - k_e \Delta - c_e \dot{\Delta} \quad (4.44)$$

onde:  $f_{(\Delta, \dot{\Delta})}$  : força produzida pelo elemento não linear.

$k_e \Delta$  : força elástica do elemento linear equivalente.

$c_e \dot{\Delta}$  : força de amortecimento do elemento linear equivalente.

As equações de minimização do valor esperado do erro quadrático médio são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_e} E(e^2_{(t)}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_e} E(e^2_{(t)}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde:  $E(\bullet)$  indica valor esperado do argumento.

A partir da equação (4. 45) pode-se demonstrar que para um processo aleatório estacionário com média nula dos deslocamentos os parâmetros equivalentes estão dados por:

$$\begin{aligned} k_e &= \frac{E[f_{(\Delta, \dot{\Delta})}\Delta]}{\sigma_{\Delta}^2} \\ c_e &= \frac{E[f_{(\Delta, \dot{\Delta})}\dot{\Delta}]}{\sigma_{\dot{\Delta}}^2} \end{aligned} \quad (4. 46)$$

onde:  $c_e$  : coeficiente de amortecimento viscoso do elemento linear equivalente.

$k_e$  : rigidez do elemento linear equivalente.

$f_{(\Delta, \dot{\Delta})}$  : força produzida pelo elemento não linear.

$\Delta$  : processo aleatório do deslocamento de excitação aplicado no elemento.

$\dot{\Delta}$  : processo aleatório da velocidade de excitação aplicado no elemento.

$\sigma_{\Delta}$  : desvio padrão do deslocamento  $\Delta$ .

$\sigma_{\dot{\Delta}}$  : desvio padrão da velocidade  $\dot{\Delta}$ .

Para o caso em que a força do elemento seja uma função explícita do deslocamento e velocidade tal que:

$$f_{(\Delta, \dot{\Delta})} = g(\Delta, \dot{\Delta}) \quad (4. 47)$$

e os processos aleatórios para  $\Delta$  e  $\dot{\Delta}$  sejam Gaussianos não correlacionados, a função de densidade de probabilidade conjunta é :

$$p_{(\Delta, \dot{\Delta})}(X, \dot{X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\Delta}^2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{\Delta}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\dot{\Delta}}^2}\dot{x}^2} \quad (4. 48)$$

onde:  $p_{(\Delta, \dot{\Delta})}$  : função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis  $\Delta$  e  $\dot{\Delta}$ .

Conseqüentemente o operador  $E(\bullet)$  na equação (4. 45) é considerado como:

$$E[(\bullet)] = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta}\sigma_{\dot{\Delta}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\Delta}^2}x^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\dot{\Delta}}^2}\dot{x}^2} (\bullet) dx d\dot{x} \quad (4. 49)$$

Para obter os desvios padrão do deslocamento  $\sigma_{\Delta}$  e velocidade  $\sigma_{\dot{\Delta}}$ , é preciso caracterizar a excitação como processo aleatório. O caso mais simples é um processo aleatório estacionário definido pela densidade espectral de potência e a variância, no caso de ter média nula. Cabe salientar que a simulação de um registro sísmico mediante um processo aleatório estacionário com média nula é uma aproximação as vezes válida para ser usado no pré-projeto do sistema de dissipação de energia.

Levando em conta as considerações feitas, se procede da seguinte maneira a fim de obter as matrizes de parâmetros equivalentes:

1) Inicialmente considera-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq} &= \mathbf{K} \\ \mathbf{C}_{eq} &= \mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde:  $\mathbf{K}$  : matriz de rigidez da estrutura sem dissipadores.

$\mathbf{C}$  : matriz de amortecimento da estrutura sem dissipadores.

$\mathbf{K}_{eq}$  : matriz de rigidez total equivalente da estrutura.

$\mathbf{C}_{eq}$  : matriz de amortecimento total equivalente da estrutura.

2) Com os parâmetros equivalentes calcula-se a função de resposta em frequência do sistema linear equivalente:

$$\mathbf{H}_{qw(\omega)} = \left( -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C}_{eq} + \mathbf{K}_{eq} \right)^{-1} \mathbf{L}_w \quad (4.51)$$

onde:  $\mathbf{H}_{qw(\omega)}$  : matriz da função de resposta em frequência do sistema.

$\mathbf{L}_w$  : vetor de influência da excitação.

3) Considerando a densidade espectral de potência da excitação  $\mathbf{S}_{ww(\omega)}$  obtém-se a densidade espectral de potência da resposta:

$$\mathbf{S}_{qq(\omega)} = \mathbf{H}_{qw(\omega)} \mathbf{S}_{ww(\omega)} \mathbf{H}_{qw(\omega)}^{**} \quad (4.52)$$

onde:  $\mathbf{H}_{qw(\omega)}^{**}$  : matriz transposta conjugada da função de resposta em frequência do sistema.

$\mathbf{S}_{ww(\omega)}$  : matriz da densidade espectral de potência da excitação.

$\mathbf{S}_{qq(\omega)}$  : matriz da densidade espectral de potência da resposta em deslocamentos.

4) Com a densidade espectral de potência da resposta se obtém a matriz de covariâncias:

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}\mathbf{q}^T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{qq}(\omega) d\omega \quad (4.53)$$

onde:  $\mathbf{q} = [q_{1(t)}, q_{2(t)}, \dots, q_{n(t)}]^T$  : vetor dos graus de liberdade do sistema (em deslocamentos).

$\mathbf{E}(\mathbf{q}\mathbf{q}^T)$  : matriz de covariâncias graus de liberdade do sistema (em deslocamentos).

$diag(\bullet)$  : representa a diagonal principal da matriz argumento.

$\bar{\mathbf{q}}_m^2 = diag[\mathbf{E}(\mathbf{q}\mathbf{q}^T)]$  : vetor de valores quadráticos médios dos graus de liberdade do sistema do sistema(em deslocamentos), em virtude de ser um processo com média nula.

5) A partir da densidade espectral de potência dos graus de liberdade do sistema (em deslocamentos) obtém-se a densidade espectral de potência das velocidades:

$$\mathbf{S}_{\dot{q}\dot{q}}(\omega) = \omega^2 \mathbf{S}_{qq}(\omega) \quad (4.54)$$

e da mesma maneira que a equação (4. 53) determinam-se os valores quadráticos médios da velocidade:

$$\mathbf{E}(\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}^T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{\dot{q}\dot{q}}(\omega) d\omega \quad (4.55)$$

onde:  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_{1(t)}, \dot{q}_{2(t)}, \dots, \dot{q}_{n(t)}]^T$  : vetor dos graus de liberdade do sistema (em velocidades).

$\mathbf{E}(\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}^T)$  : matriz de covariâncias graus de liberdade do sistema(em velocidades).

$\bar{\dot{\mathbf{q}}}_m^2 = diag[\mathbf{E}(\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}^T)]$  : vetor de valores quadráticos médios dos graus de liberdade do sistema do sistema (em velocidades), em virtude de ser um processo com média nula.

6) Com os valores quadráticos médios obtidos da resposta da estrutura calculam-se os desvios padrão dos deslocamentos e velocidades nos dissipadores como segue:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta i} &= \sqrt{\mathbf{L}_i \bar{\mathbf{q}}_m^2 \mathbf{L}_i^T} \\ \sigma_{\dot{\Delta} i} &= \sqrt{\mathbf{L}_i \bar{\dot{\mathbf{q}}}_m^2 \mathbf{L}_i^T} \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde:  $\sigma_{\Delta i}$  : desvio padrão dos deslocamentos do amortecedor “i”.

$\sigma_{\dot{\Delta} i}$  : desvio padrão das velocidades do amortecedor “i”.

$L_i$  : linha “i” da matriz cinemática  $\mathbf{L}$  como foi definida anteriormente (4. 2).

7) Com os desvios padrão e a equação (4. 46) calculam-se os parâmetros equivalentes  $k_{ei}$  e  $c_{ei}$  para montar a matriz de rigidez e amortecimento equivalente dos amortecedores:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \mathbf{L} \text{diag}(\mathbf{k}_e) \mathbf{L}^T \\ \mathbf{C}_e &= \mathbf{L} \text{diag}(\mathbf{c}_e) \mathbf{L}^T \end{aligned} \quad (4. 57)$$

onde:  $\text{diag}(\bullet)$  : representa uma matriz diagonal cuja diagonal principal é o vetor argumento.

$\mathbf{k}_e$  : vetor formado pela rigidez equivalente  $k_{ei}$  de cada amortecedor.

$\mathbf{c}_e$  : vetor formado pelo coeficiente de amortecimento viscoso equivalente  $c_{ei}$  de cada amortecedor.

$\mathbf{K}_e$  : matriz de rigidez equivalente dos dissipadores.

$\mathbf{C}_e$  : matriz de amortecimento equivalente dos dissipadores.

$\mathbf{L}$  : matriz cinemática como definida na equação (4. 1).

Conseqüentemente as matrizes do sistema linear equivalente são:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq} &= \mathbf{K} + \mathbf{K}_e \\ \mathbf{C}_{eq} &= \mathbf{C} + \mathbf{C}_e \end{aligned} \quad (4. 58)$$

Com as matrizes equivalentes da equação (4. 58) volta-se ao passo 2) e itera-se até obter uma tolerância desejada nos desvios padrão da resposta entre dois iterações consecutivas.

Para o leitor interessado no tipo de linearização estatística o trabalho de Pradlwarter, (2000) apresenta o novo conceito de linearização estatística local equivalente junto a uma superposição Gaussiana.

#### 4.3.4 Projeto baseado em Curvas de Desempenho e Propriedades Lineares Equivalentes

##### a) Curvas de Iso-Desempenho

A filosofia desta estratégia de projeto é baseada na aproximação da resposta de estruturas com amortecedores não lineares através de modelos com propriedades lineares equivalentes, como foi mencionado anteriormente na seção de linearização. Admitindo esta hipótese, especialmente nas estruturas onde a não linearidade está concentrada em poucos dispositivos que perturbam unicamente em parte a relação constitutiva global linear da estrutura, pode-se apresentar em forma resumida o efeito destes sistemas de controle de vibrações através das

denominadas curvas de Iso-desempenho. A importância fundamental é que com elas pode-se visualizar, antes de qualquer análise mais sofisticada, se é possível atingir o nível de desempenho desejado. As curvas de Iso-desempenho mostram combinações de rigidez e amortecimento global da estrutura que permitem atingir um nível de desempenho desejado. Este nível de desempenho pode ser definido em termos do máximo deslocamento relativo de pavimento, máximo corte na base, uma combinação de ambos ou, qualquer outro critério que quantifique a performance estrutural. A curva de Iso-desempenho de uma estrutura determinada constrói-se da seguinte maneira:

- 1) Definir a excitação de Projeto para a estrutura analisada, esta pode ser um espectro de projeto ou, uma família de registros sísmicos característicos do lugar da obra.
- 2) Definir o nível de desempenho desejado, por exemplo, uma redução do deslocamento relativo máximo de pavimento do 40%.
- 3) Definir uma faixa de variação para o período fundamental da estrutura através da rigidez dos dissipadores,  $I$ , equação (4. 4).
- 4) Determinar uma faixa de variação aceitável para o amortecimento global linear equivalente introduzido pelos dissipadores.
- 5) Gerar uma amostragem dentro da faixa do período e do amortecimento escolhidos de modo de obter uma malha de pontos.
- 6) Determinar para cada um destes pontos mediante um critério escolhido a rigidez equivalente (equações (4. 5) ou (4. 9)), e o amortecimento de cada pavimento (equações (4. 7), (4. 13) ou (4. 14)).
- 7) Analisar a estrutura com os parâmetros lineares equivalentes correspondentes a cada um destes pontos e registrar a performance.
- 8) Construir as curvas Iso-desempenho mediante interpolação.
- 9) Em geral estas curvas constroem-se uma única vez, para o conjunto de excitações desejado.

A Figura 4. 10 apresenta um conjunto de curvas Iso-s desempenho para a estrutura tipo pórtico, descrita em detalhe no capítulo 3, à qual colocaram-se elementos dissipativos elasto-plásticos. Foi submetida ao registro sísmico “Caucete San Juan, Argentina, 1977”. Os parâmetros equivalentes escolhidos neste caso foram a relação de amortecimento crítico do

primeiro modo do sistema linear equivalente  $\xi_1$ , e a mudança da frequência, devido à rigidez aportada pelos dissipadores, expressada como a relação entre a frequência do sistema amortecido e não amortecido,  $\omega_{1d}/\omega_1$ . Como parâmetro de desempenho escolheu-se o deslocamento máximo no topo da estrutura,  $\Delta_{max6}$  (6<sup>to</sup> andar). Por exemplo, observa-se que para atingir um nível de deslocamento máximo no topo de 0.038 [m] precisa-se de 22.5 [%] de relação de amortecimento crítico e um incremento na frequência do 10 [%], no sistema linear equivalente.

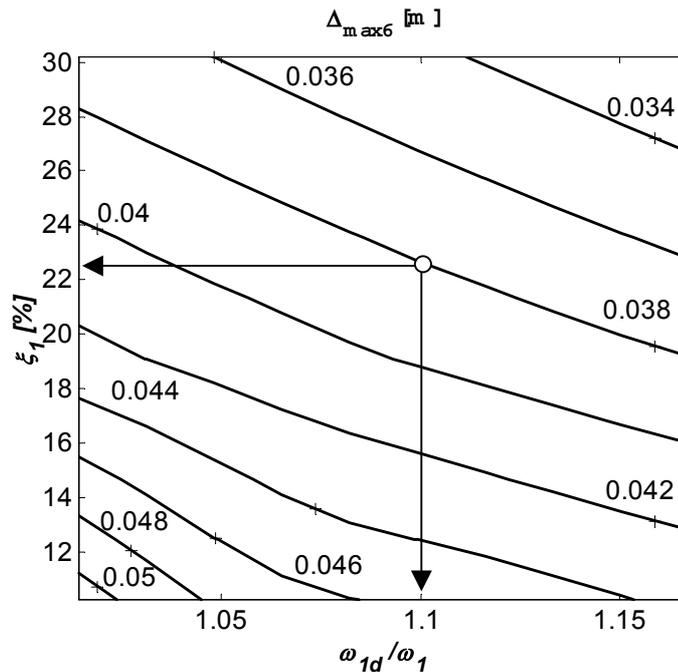


Figura 4. 10. Curvas Iso-desempenho com parâmetros equivalentes correspondendo ao primeiro modo de vibração.

### b) Curvas de Parâmetros Equivalentes dos Dispositivos

Estas curvas dão a relação entre as propriedades dos elementos lineares equivalentes com os parâmetros físicos que definem as constitutivas de cada dispositivo não linear. Principalmente duas dificuldades se apresentam ao definir estas relações:

a) Na maior parte dos casos não é possível encontrar uma relação explícita entre essas variáveis, equação (4. 40) ou (4. 46).

b) As propriedades equivalentes geralmente são função não unicamente dos parâmetros físicos e da frequência mas sim também dos níveis de deformação, equação (4. 40) ou (4. 46).

Conseqüentemente é conveniente representar estas curvas em forma implícita para diferentes níveis de deformação. A Figura 4. 11 ilustra um exemplo destas curvas para o caso de

elementos elasto-plásticos. Neste caso, a partir dos parâmetros do sistema linear equivalente  $\xi_1$ - $\omega_{d1}/\omega_1$  obtidos na figura anterior, determinaram-se  $\beta = \Delta_o/u_{y6}$  (relação entre o deslocamento padrão  $\Delta_o$  obtido pela equação (4. 41) e o deslocamento de escoamento do dissipador do 6<sup>to</sup> andar) e a força de escoamento do dissipador do 6<sup>o</sup> andar,  $f_{y6}$ . Logo, com  $\beta$ ,  $u_{y6}$  e a força  $f_{y6}$  é possível determinar as capacidades e deslocamentos de escoamentos dos dissipadores restantes levando em conta a distribuição em altura considerada.

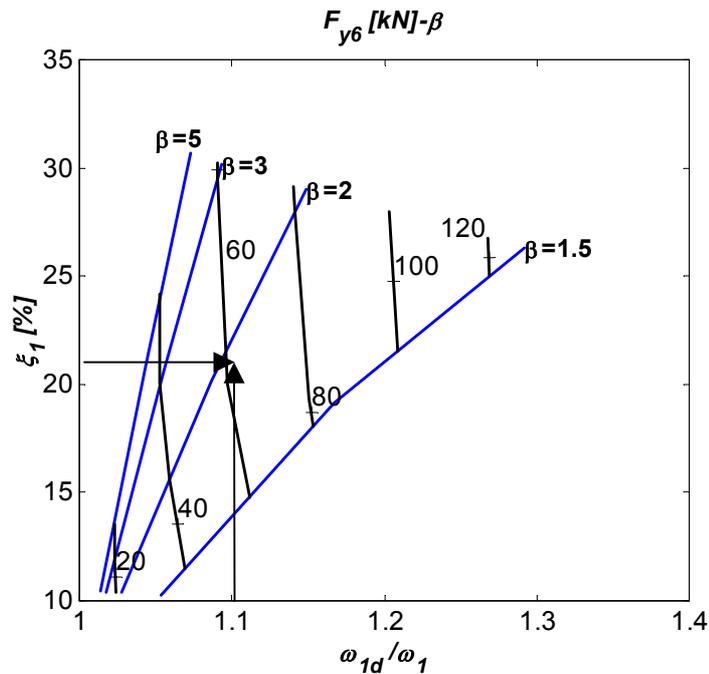


Figura 4. 11. Curvas de Parâmetros Equivalentes para um elemento elasto-perfeitamente plástico.

Finalmente, superpondo os gráficos anteriores, pode-se perceber claramente os limites máximos atingíveis por este tipo de dispositivos dentro de valores práticos aceitáveis dos parâmetros físicos.

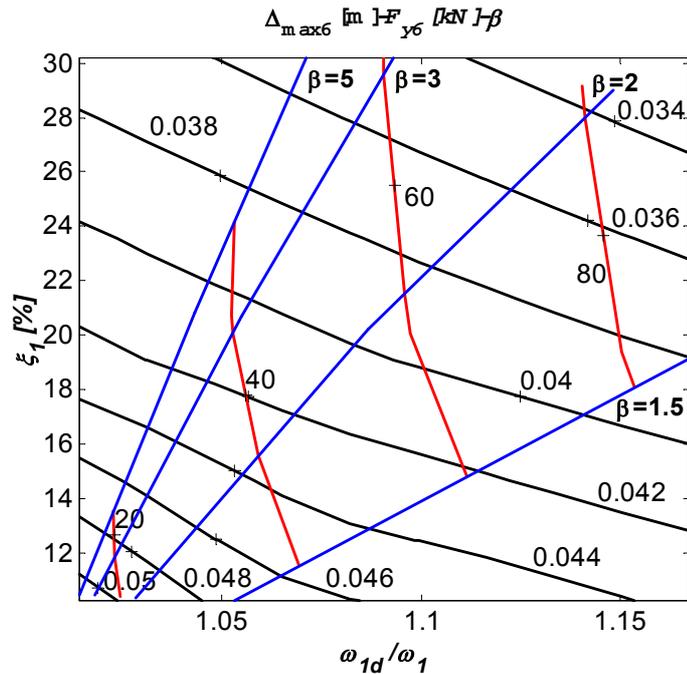


Figura 4. 12. Superposição das curvas Iso-desempenho e de Parâmetros Equivalentes.

### Procedimento de Projeto

O Procedimento de projeto pode-se resumir nos seguintes passos:

- 1) Escolher o nível requerido de desempenho da estrutura.
- 2) A partir das curvas Iso-desempenho escolher um nível de rigidez global (medido através da mudança do período fundamental) e de amortecimento global que permitam atingir aproximadamente o nível de desempenho desejado.
- 3) Distribuir, utilizando algum critério definido, os dissipadores com a rigidez necessária para lograr a mudança do período fundamental especificado no ponto 2).
- 4) Distribuir o amortecimento global equivalente em forma consistente com o critério utilizado na construção das curvas Iso-desempenho.
- 5) Analisar a estrutura com os parâmetros equivalentes determinando a resposta e verificando-a com o nível de desempenho desejado.
- 6) Não deveriam existir diferenças grandes entre o resultado do passo anterior e o nível de desempenho desejado. No entanto, se existir, deve-se voltar ao passo dois, redefinir os parâmetros globais associadas com um nível de desempenho fictício mais estrito que o requerido.

7) Uma vez atingido o desempenho desejado, deve-se obter a partir das curvas de parâmetros equivalentes, as propriedades físicas que determinam as curvas de força-deslocamento de cada dispositivo.

8) Definidas as relações força-deslocamento, realiza-se a análise não linear de verificação do projeto.

9) Por último, projeta-se cada dispositivo detalhadamente para conseguir o ciclo força-deslocamento determinado no passo 7.

## Capítulo 5

### Projeto de Amortecedor Metálico

#### 5.1 Introdução

Como foi mencionado no capítulo 1, uma opção quase sempre viável para melhorar o comportamento estrutural ante solicitações sísmicas ou de vento e conseguir uma construção mais econômica é incrementar a capacidade de dissipação de energia dos componentes estruturais. Numerosos estudos feitos neste sentido são citados no capítulo 2.

O uso de dissipadores metálicos é uma das alternativas para dissipar a energia induzida numa estrutura por ações dinâmicas. Em particular, aqueles baseados na deformação plástica do chumbo têm grandes vantagens. [Robinson et al, 1976], entre elas podem-se mencionar:

1) Um ciclo de histerese (força-deslocamento) quase retangular, praticamente independente da velocidade de deformação, similar ao desenvolvido por amortecedores de atrito, tipo “Coulomb”.

2) Durante um processo de deformação plástica o chumbo tende a se recristalizar, recuperando por completo as propriedades mecânicas originais, dado que a temperatura ambiente encontra-se acima da metade de sua temperatura absoluta de fusão.

3) Espécimens com deformação cortante não restringida poderiam experimentar deformações da ordem de 350% antes de se produzir uma queda na carga [Monti et al, 1996].

4) Para velocidades de deformação superiores a  $10^{-3}$  cm/s o comportamento é quase independente da velocidade de deformação [Robinson et al, 1976].

Baseados nas excelentes propriedades mecânicas do chumbo para dissipar energia, decidiu-se desenvolver um amortecedor que utiliza a deformação plástica deste metal.

#### 5.2 Descrição do Amortecedor

Na Figura 5.1 se apresenta o dispositivo em seu modelo final a ser desenvolvido. Consiste em dois cilindros de aço coaxiais, um externo e outro interno. Ambos têm quatro ranhuras dispostas de maneira tal de formar quatro anéis com seção romboidal as quais são enchidas de

chumbo. Quando acontece um deslocamento relativo entre ambos cilindros, os anéis experimentam uma deformação produzida pela combinação de tensões de compressão e corte. Sob a hipótese de volume constante e com um deslocamento relativo suficiente, o chumbo é forçado a ocupar o espaço que surge do deslocamento, gerando uma deformação plástica em cada anel. Se o processo se repete em ambos sentidos desenvolve-se um ciclo de histerese como se mostra nas Figuras 5.4a e 5.4b. Cabe salientar que o curso do cilindro interior é restringido em ambos sentidos a um deslocamento máximo igual à metade da diagonal do rombo da seção transversal dos anéis.

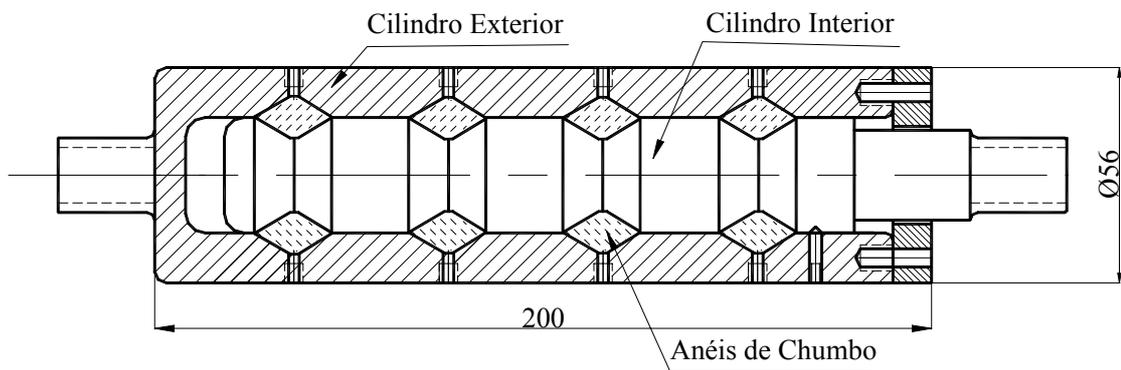


Figura 5.1. Dispositivo dissipador de energia desenvolvido.

A fim de determinar as propriedades mecânicas e o seu desempenho foi construído o protótipo mostrado na Figura 5.2.



Figura 5.2. Vista dos cilindros externo e interno do amortecedor.

Por razões de custo, para avaliar a influência da forma e tamanho da seção transversal dos anéis o protótipo foi construído com dois pares de ranhuras com características geométricas diferentes. Num par delas a face do rombo, da seção transversal do anel, forma  $45^\circ$  de inclinação em relação ao eixo do cilindro e tem uma diagonal de 10 mm, enquanto que a face do rombo da seção transversal do outro par de ranhuras forma  $30^\circ$  em relação ao mesmo eixo e tem uma diagonal 20 mm como mostra a Figura 5.3.



Figura 5.3. Detalhe do Amortecedor.

### 5.3 Propriedades do Amortecedor

Uma das propriedades mecânicas mais importantes do dispositivo é a função força-deslocamento. Portanto para estudar seu desempenho em função dos níveis de deformação fizeram-se dois grupos de ensaios. No primeiro grupo, os ensaios foram conduzidos com amplitudes de deslocamentos de 1, 3, 5 e 6 mm considerando unicamente o par de anéis com 10mm de diagonal na seção transversal e no segundo grupo as amplitudes dos deslocamentos foram de 3, 6, 9 e 12 mm empregando o par de anéis com 20 mm de diagonal na seção transversal. Na Figura 5.4a se apresentam as curvas obtidas em ensaios do primeiro grupo com uma frequência de 1 Hz e na Figura 5.4b as obtidas em ensaios no segundo grupo com uma frequência de 0.5 Hz.

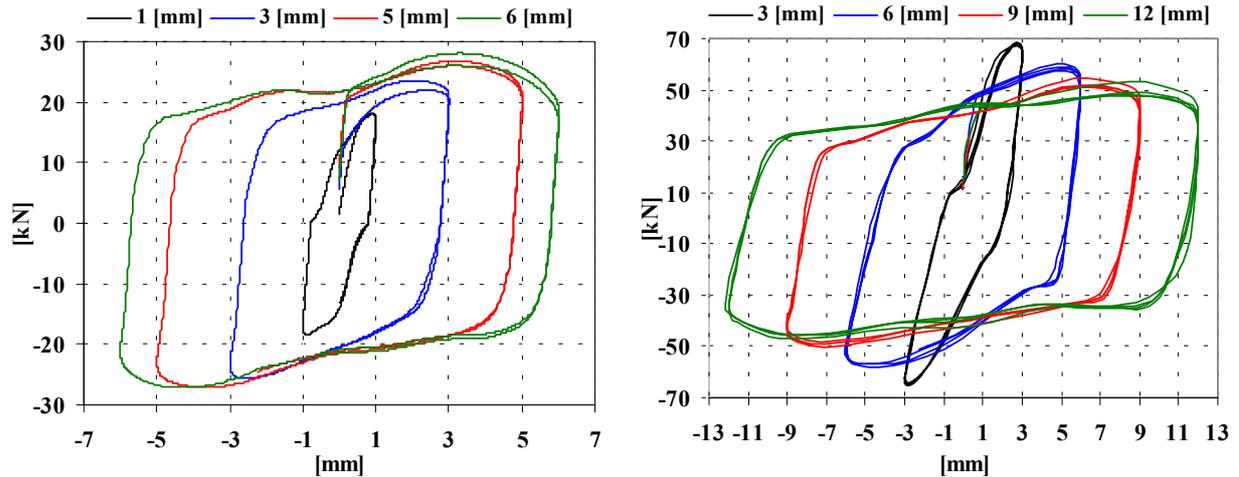


Figura 5.4. Curvas força-deslocamento, esquerda grupo 1, direita grupo 2.

Para avaliar a influência da velocidade de deformação fizeram-se ensaios com ambos tipos de anéis a diferentes frequências. A Figura 5.5 mostram os resultados obtidos com os anéis de 10mm de diagonal para uma amplitude de deslocamento de 5 mm e frequências de 0.3, 0.5, 1, 2 e 3 Hz e na Figura 5.6 se apresentam os resultados obtidos com os anéis de 20mm de diagonal para uma amplitude de deslocamento de 9 mm e frequências de 0.1, 0.3, 0.5 e 1 Hz.

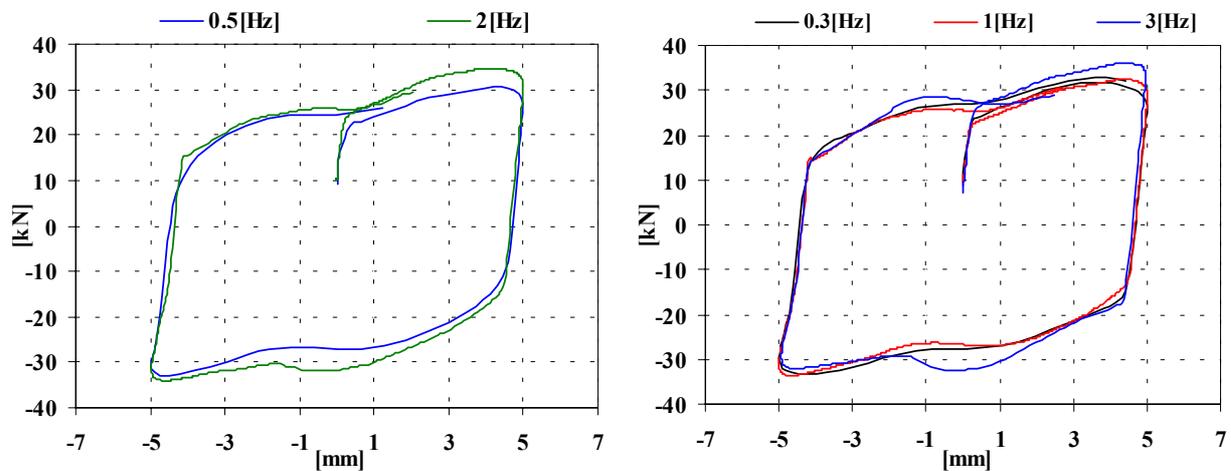


Figura 5.5. Ensaio para diferentes frequências (grupo 1).

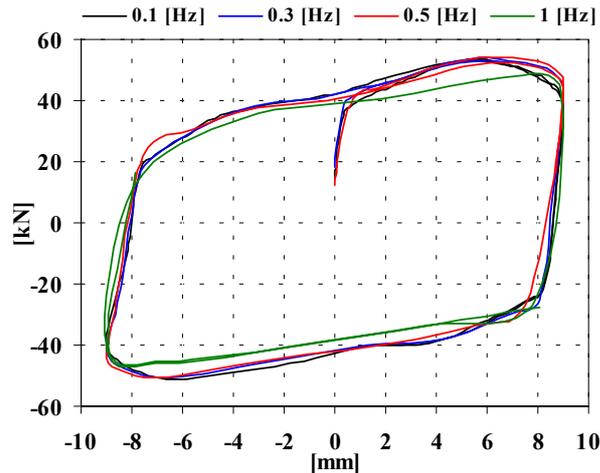


Figura 5.6 Ensaios para diferentes frequências (grupo 2).

Como a energia elástica envolvida em cada ciclo é relativamente pequena comparada à energia plástica e o endurecimento pós-escoamento não é significativo, o dispositivo comporta-se como um elemento elasto-plástico, com uma área envolvida pela curva força-deslocamento com forma quase retangular, com semi-altura igual à força de escoamento e semi-base igual à amplitude de deslocamento. Consequentemente, a energia absorvida será da ordem de 80% a 90% da máxima possível, para uma capacidade e deslocamento máximo estabelecidos. Como o comportamento mecânico depende das propriedades do material usado, e o chumbo recristaliza rapidamente à temperatura ambiente (temperatura de operação) observa-se nas Figuras 5.5 e 5.6 que a força necessária para escoar em ciclos sucessivos não apresenta mudanças importantes. Outra característica importante é que tanto a rigidez pré-escoamento como pós-escoamento não mudam dentro da faixa de velocidades de deformação ensaiadas, evidenciando-se entretanto uma leve dependência da velocidade de deformação nos vértices arredondados das Figuras mencionadas. Portanto, para fins práticos pode-se considerar independência da velocidade de deformação. O comportamento à fadiga foi testado mediante ensaios com frequências que variaram de 0.1 até 3 Hz com amplitudes até 6 mm no primeiro grupo e até 12 mm no segundo, completando um total de 500 ciclos em cada um deles. Não se observaram mudanças importantes nas propriedades mecânicas embora, as condições dos testes foram mais severas que aquelas esperadas na sua vida em serviço. O resultado não é surpreendente já que, como foi mencionado, o “trabalho a quente” do chumbo faz recuperar continuamente através da sua recristalização as propriedades mecânicas originais. A temperatura máxima de equilíbrio atingida foi de 60°C no final dos 500 ciclos. Portanto, o dispositivo deveria ser capaz de suportar vários

eventos sísmicos antes de apresentar alguma mudança importante nas suas propriedades mecânicas.

#### 5.4 Modelo Numérico do Amortecedor

Com o objetivo de otimizar a forma da seção dos anéis e estudar a relação entre a capacidade (força de escoamento) do amortecedor e a geometria da seção do anel, realizou-se um estudo do comportamento do anel mediante análise não linear por Elementos Finitos com o programa comercial Ansys 5.4. Nas Figuras 5.7a e 5.7b se apresentam para ambos casos a malha usada no modelo da seção do anel e, dois estados avançados de deformação plástica desenvolvidos durante um quarto de ciclo com carga incremental.

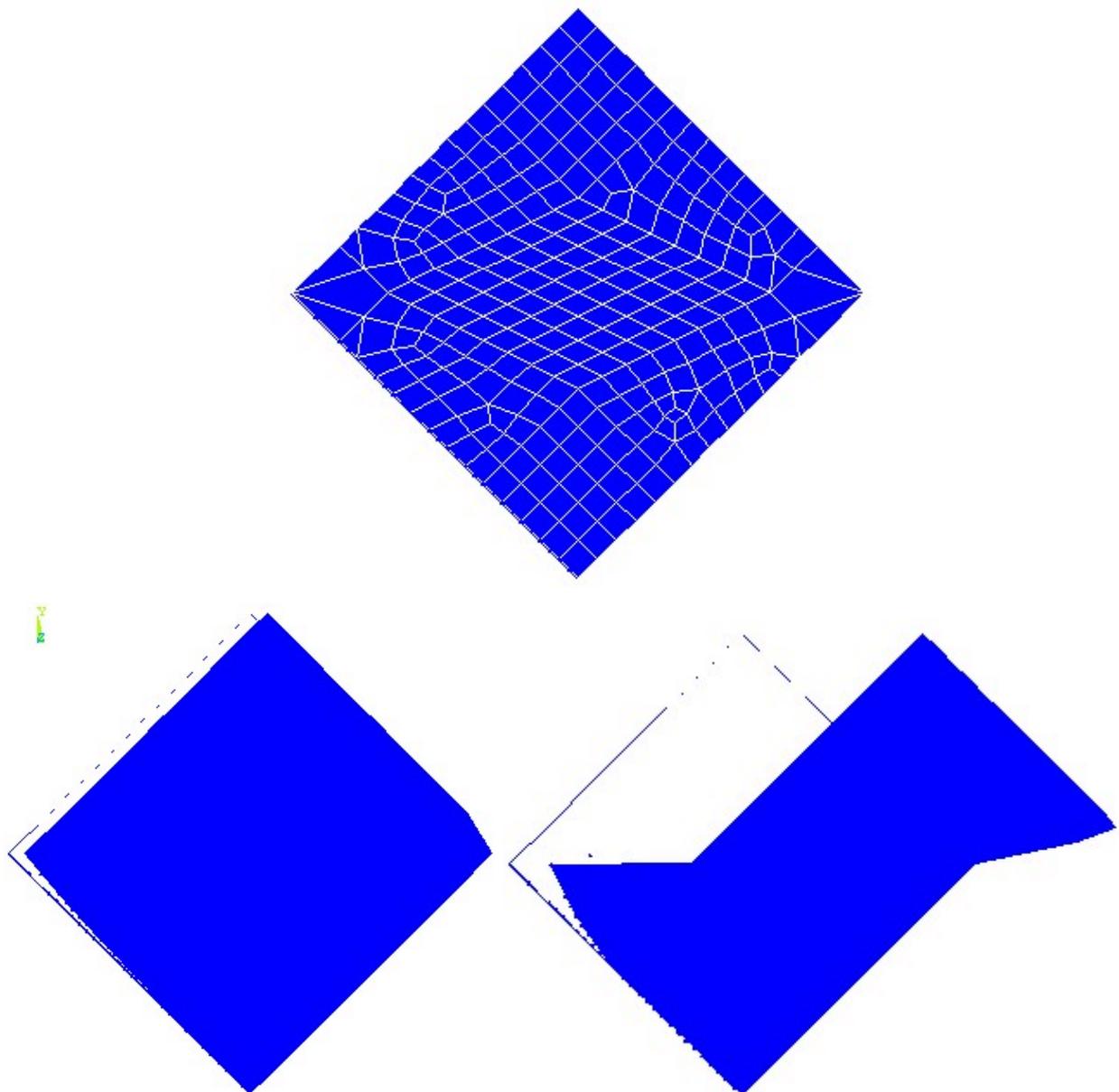


Figura 5.7a. Modelo e deformação plástica (grupo 1).

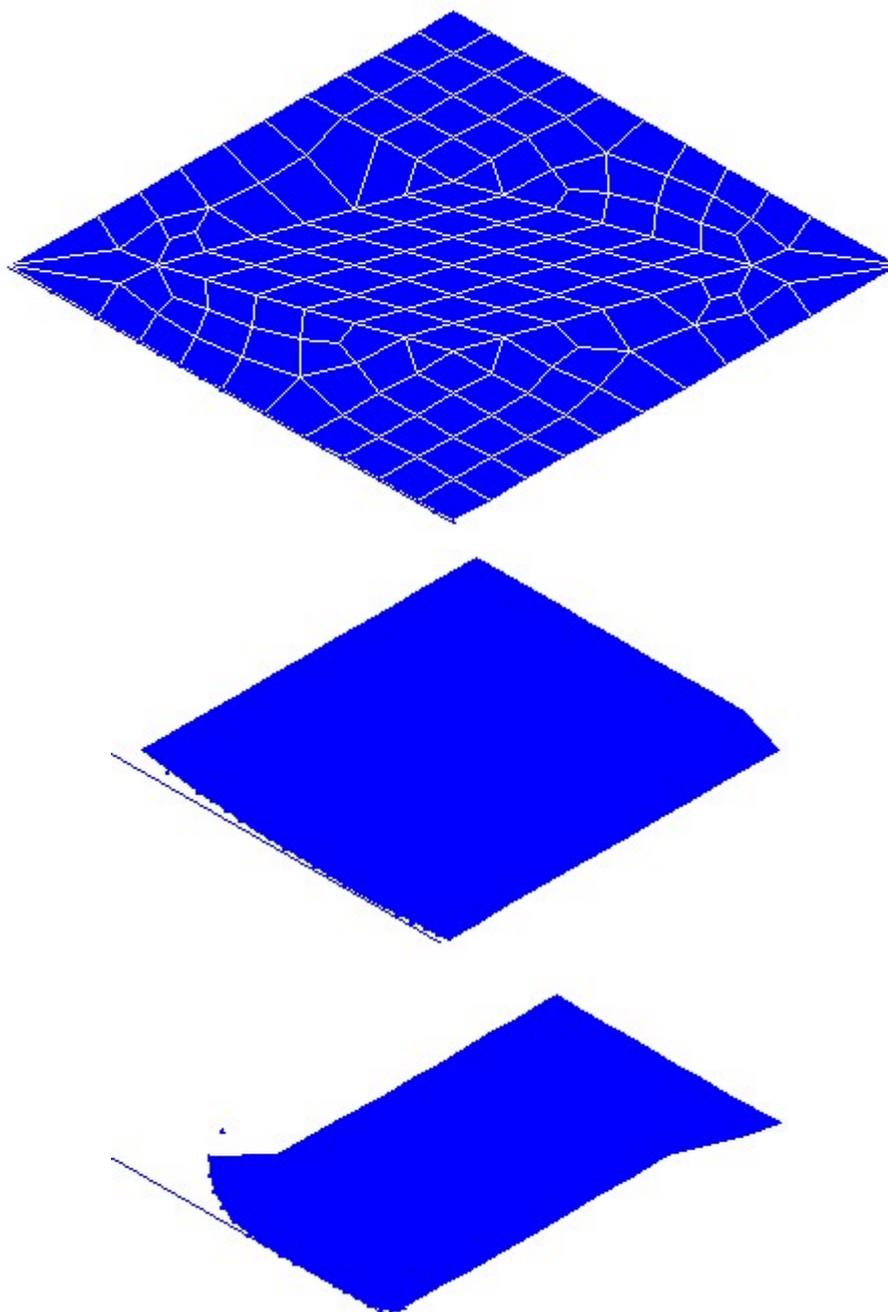


Figura 5.7b. Modelo e deformação plástica (grupo 2).

Depois de ter reproduzido, com suficiente precisão, mediante o modelo numérico as características mecânicas medidas em um ensaio do segundo grupo (ver Figura 5.8), estudou-se a forma da seção transversal do anel para otimizá-la. Logicamente, como a deformação plástica concentra-se na seção central (área de corte) onde existe grande concentração de tensões como mostra a Figura 5.9, pode-se aproveitar material retificando a seção útil do anel da forma mostrada na Figura 5.10.

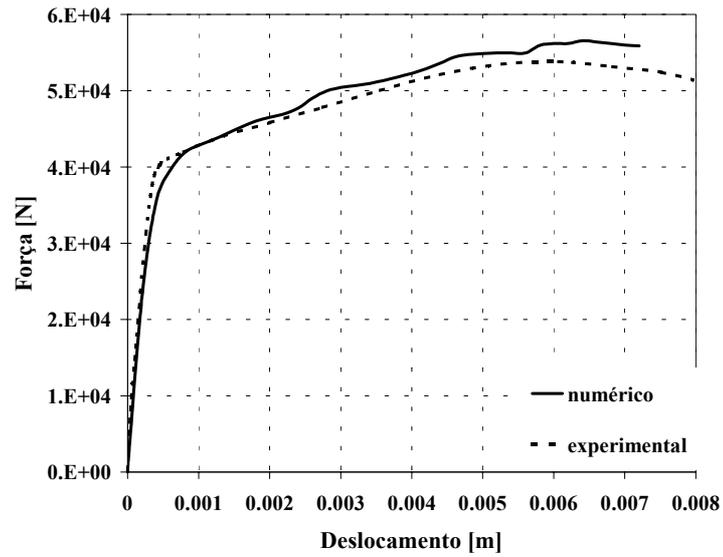


Figura 5.8. Curva Força-deslocamento numérico e experimental (grupo 2).

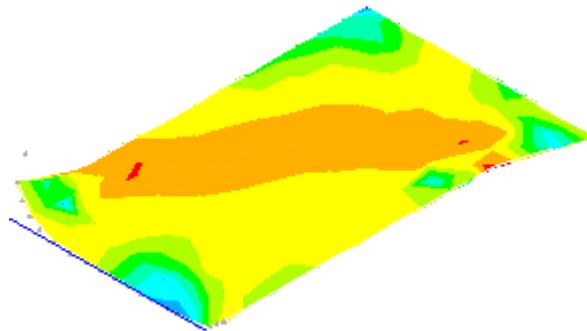


Figura 5.9. Distribuição das tensões equivalentes de Von Mises.

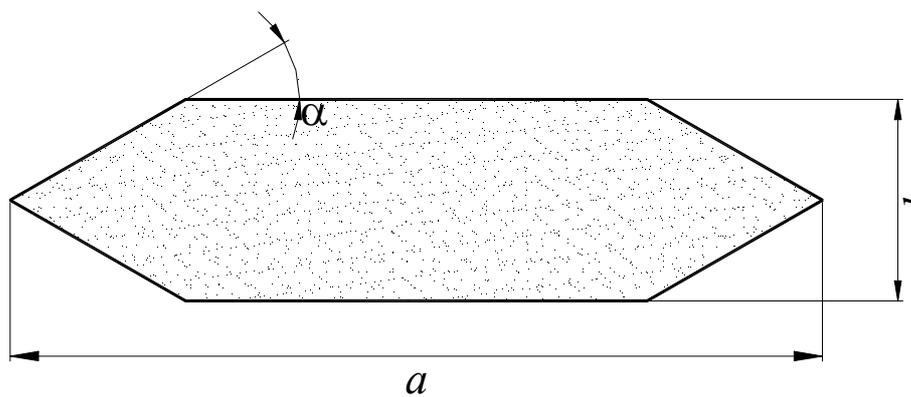


Figura 5.10. Seção transversal do anel modificada.

Definida a seção ótima do anel, estudou-se o comportamento para diferentes tamanhos da mesma a fim de determinar a existência de uma relação de escalas. A Figura 5.11 mostra as curvas força-deslocamento para seis casos diferentes e, na tabela 5.1 suas propriedades geométricas.

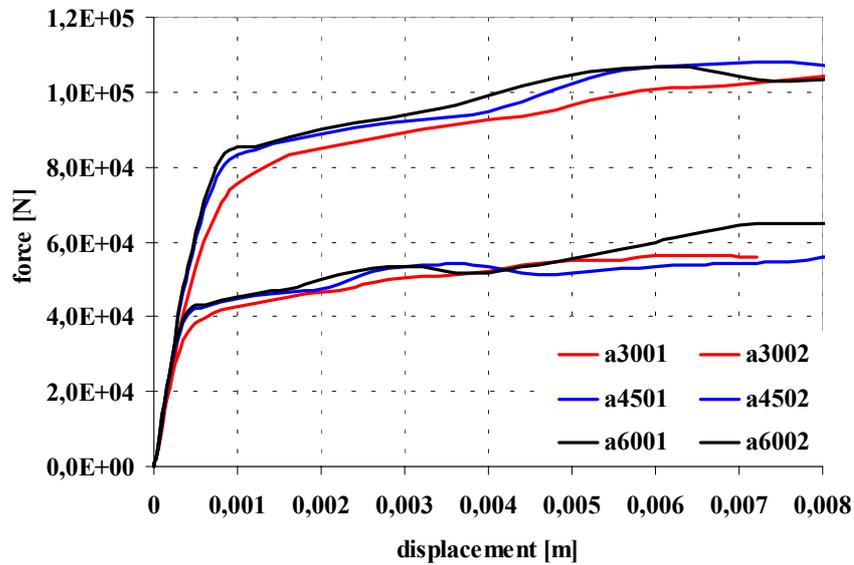


Figura 5.11. Força-Deslocamento (numérico) para seções com  $\alpha = 30, 45, 60^\circ$  e valores de  $a = 10$  e  $20$  mm. Como é indicado na tabela 5.1.

Tabela 5.1. Propriedades geométricas das ranhuras modeladas.

| Seção   | ângulo da face $\alpha$ [°] | $a$ [mm] | $h/a$ |
|---|-----------------------------|----------|-------|
|  a3001 / a3002 | 30                          | 10 / 20  | 0.1   |
|  a4501 / a4502 | 45                          | 10 / 20  | 0.1   |
|  a6001 / a6002 | 60                          | 10 / 20  | 0.1   |

Desta análise surge que é possível obter a capacidade e o deslocamento máximo necessários para um determinado projeto, a partir da geometria do anel.

## 5.5 Fórmulas práticas para a determinação da capacidade e deslocamento de escoamento do amortecedor.

Como as tensões no anel são fundamentalmente de corte, o procedimento para determinar a capacidade (força de escoamento ou limite elástico) de cada anel é baseada na teoria linear

elástica de corte. O procedimento analítico é desenvolvido para a seção otimizada do anel, tendo sido verificado mediante uma análise de elementos finitos. Os parâmetros geométricos envolvidos se apresentam na Figura 5.10.

Portanto para a força de escoamento tem-se:

$$F_y = GA\gamma_{ye} \quad (5.1)$$

onde:  $G$  : módulo de corte do chumbo.

$A$  : área de corte de cada anel.

$\gamma_{ye} = 0.0753$ : distorção de escoamento do chumbo, constante determinada experimentalmente.

Como  $G$  e  $\gamma_{ye}$  são constantes, definindo  $A$ , fica determinado  $F_y$ .

Sendo  $A$ :

$$A = a \pi d \quad (5.2)$$

onde :  $a$  : comprimento da garganta da ranhura.

$d$  : diâmetro do cilindro interior.

Para garantir que a deformação elástica no cilindro interior de aço seja menor que a décima parte da deformação do anel de chumbo deve-se cumprir que:

$$d \geq 2 a \quad (5.3)$$

Substituindo a equação 5.3 na 5.2 :

$$A = 2 \pi a^2 \quad (5.4)$$

Levando em conta a equação 5.4, pode-se determinar a capacidade de um anel em função da geometria:

$$F_y = 2 G \pi a^2 \gamma_{ye} \quad (5.5)$$

O deslocamento de escoamento é dado por:

$$u_y = 1.53 \gamma_{ye} h \quad (5.6)$$

onde :  $h$  : altura da seção.

Foi verificado que o ângulo  $\alpha$  ( ver Figura 5.11) compreendido entre 30 e 60 graus não tem influência importante na determinação de  $F_y$  ou  $u_y$ . Nota-se que todo o procedimento de cálculo

foi feito para um anel. Consequentemente, é possível para um amortecedor determinado conseguir a capacidade necessária, escolhendo o valor adequado de “ $a$ ” e o número de anéis em paralelo. O deslocamento de escoamento desejado é conseguido escolhendo o valor adequado para “ $h$ ”.

### 5.5.1 Verificação teórico-numérico do critério proposto.

A fim de determinar o valor do deslocamento de escoamento a partir da geometria da ranhura realizou-se uma análise por Elementos Finitos, como indicado na seção 5.4, para diferentes seções do anel. Estudaram-se quatro casos com relações  $a / h$  de 2.5, 4, 5 e 7.5, mantendo “ $a$ ” constante. As relações força-deslocamento mostram-se na Figura 5.12.

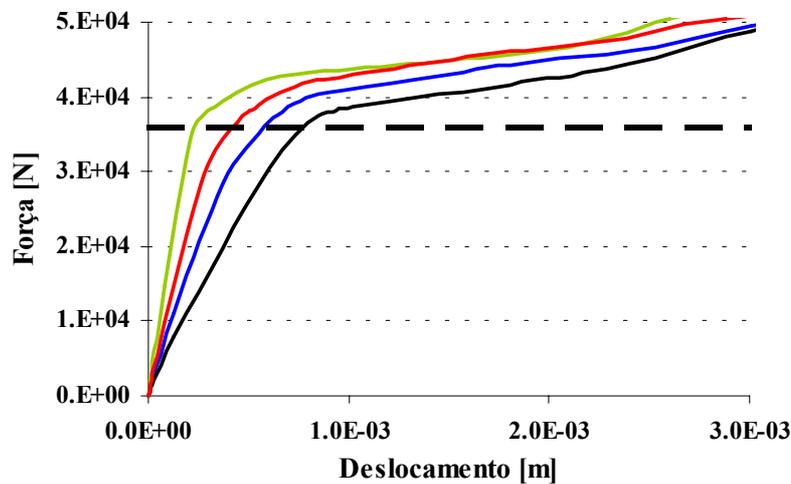


Figura 5.12. Força-deslocamento para seções com relações  $a/h$  de — 2.5, — 4, — 5 e — 7.5.

Considerando que a força de escoamento é função dos parâmetros  $A$ ,  $G$  e  $\gamma_{ye}$  que nesta análise foram considerados constantes (linha de pontos), pode-se obter do gráfico o deslocamento de escoamento  $u_y$  para cada caso. Como a altura “efetiva” de corte é determinada por:

$$h_e = \frac{u_y}{\gamma_{ye}} \quad (5.7)$$

A relação entre a altura efetiva “ $h_e$ ” e a altura real da seção “ $h$ ” pode ser definida a partir de uma regressão linear como se apresenta na Figura 5.13.

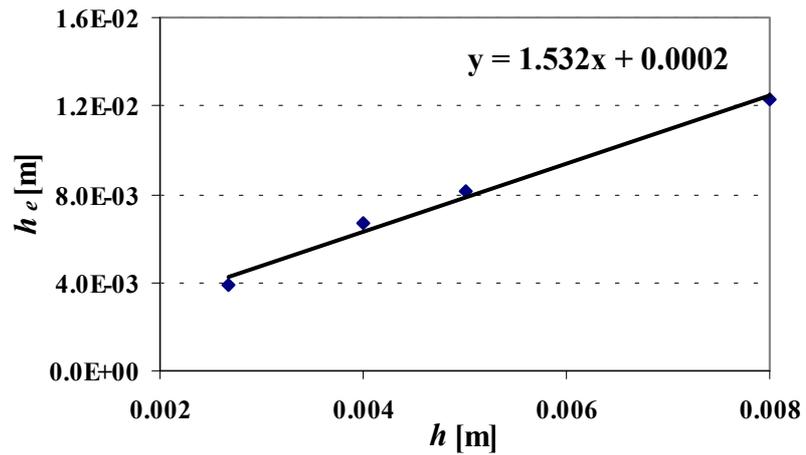


Figura 5.13. Relação entre a altura efetiva “ $h_e$ ” e, a altura real “ $h$ ” da seção do anel.

Observa-se que a relação é:

$$h_e \approx 1.53 h \quad (5.8)$$

Substituindo a equação 5.8 na 5.7 chega-se à equação 5.6.

## Capítulo 6

### Estudo de Variabilidade da Resposta Estrutural com os Parâmetros dos Amortecedores Metálicos

#### 6.1 Introdução

A fim de estudar a variabilidade da resposta estrutural em função dos parâmetros dos amortecedores e evidenciar faixas onde estes produzem a máxima eficiência do sistema de dissipação de energia, considerou-se uma estrutura padrão de aço (tipo “*shear building*”) de seis andares e seis vãos. A massa por pavimento foi de 254.65 t com frequências naturais nos três primeiros modos de 0.72, 2, 3.42 Hz e amortecimento próprio em cada modo de 2% do crítico. Detalham-se na Tabela 3.1 outras propriedades dinâmicas da estrutura. Doze elementos dissipativos foram colocados nos vãos centrais mediante suportes diagonais como mostra a Figura 6. 1 (Capítulo 3). A estrutura foi submetida aos seguintes registros sísmicos, “Taft, California N21° E, 1952”, “Caucete San Juan, Argentina, 1977”, “Northridge, California, 1994” e “El Centro, Imperial Valley, 1940” utilizados freqüentemente em estudos dinâmicos de estruturas sob excitação sísmica apresentam-se na Figura (6. 1). Resultados típicos médios da resposta estrutural máxima, para os quatro sismos mencionados, expressados em diferentes grandezas para níveis crescentes de amortecimento, (representado como a relação entre a força de escoamento total do sistema de dissipação de energia e o peso da estrutura), As curvas confirmam que existem valores ótimos da capacidade do sistema de dissipação de energia onde se satisfaz o desempenho estrutural desejado. Observa-se também que os níveis máximos de redução logrados na resposta estrutural variam entre 30% a 70%, dependendo do critério de otimização (variável considerada). Logicamente, estes valores mostram a tendência geral que se pode conseguir com estes tipos de dissipadores.

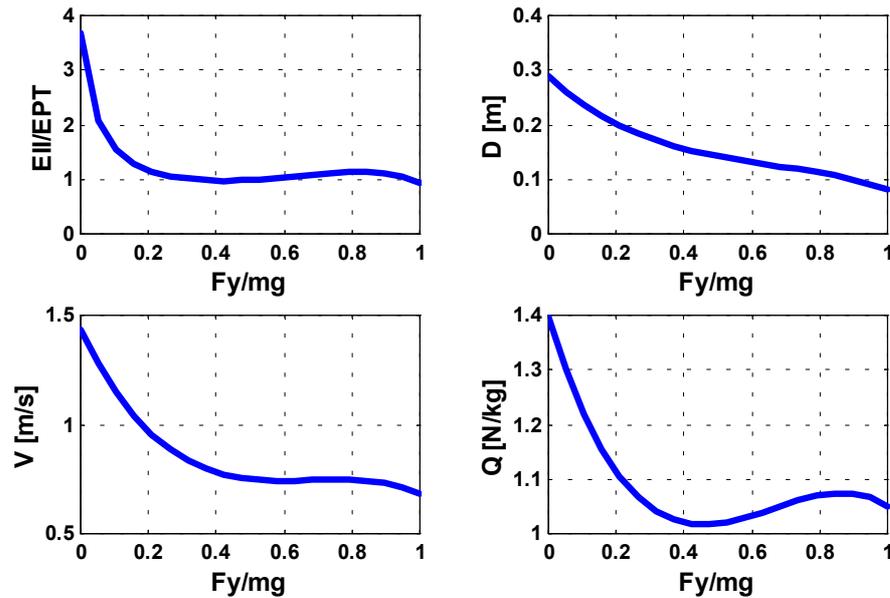


Figura 6. 1. Média da resposta estrutural máxima vs capacidade do sistema dissipador normalizada ( $F_y/mg$ ).  $E_{II}/E_{PT}$  (relação entre a Energia de entrada e dissipada),  $D$  (Deslocamento max. no topo),  $V$  (Velocidade max. no topo) e,  $Q$  (Corte max. na base).

Nas próximas seções discute-se sobre a escolha dos parâmetros de projeto dos amortecedores a fim de maximizar a energia dissipada e minimizar a resposta estrutural.

## 6.2 Capacidade ótima do Amortecedor

Para estudar a capacidade ótima (medida pela força de escoamento) do sistema de dissipação de energia, considerou-se um oscilador não linear (elasto-perfeitamente plástico), com período (pré-escoamento) de 1 s e amortecimento próprio de 1%. Determinou-se a média da resposta máxima medida em deslocamento do sistema, submetido as excitações antes mencionadas normalizadas a uma aceleração máxima de 0.3g. A capacidade do amortecedor, normalizada com o peso do oscilador ( $\mu = F_y/mg$ ) variou na faixa de 0 a 0.5. A 6.2 mostra o coeficiente de redução definido como a relação entre as médias dos deslocamentos máximos do oscilador não linear e linear (elástico), ( $u_p / u_{el}$ ) vs. a capacidade do amortecedor ( $\mu$ ), para diferentes relações entre o deslocamento de escoamento do dissipador e o deslocamento elástico máximo do oscilador ( $u_y / u_{el}$ ).

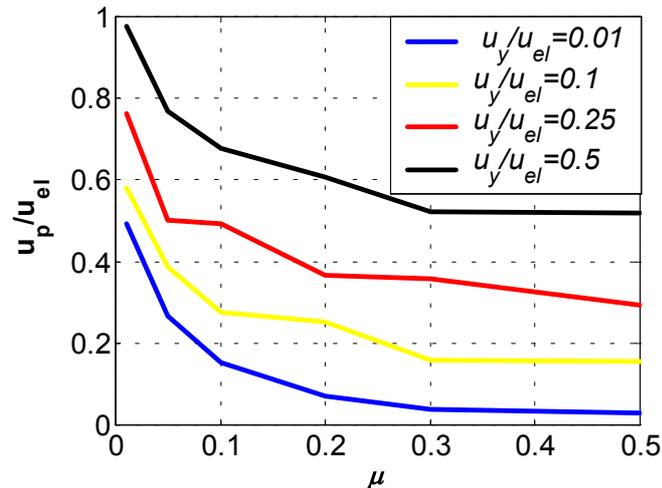


Figura 6. 2. Coeficiente de Redução do deslocamento máximo em função da capacidade do amortecedor.

Pode-se observar que uma capacidade normalizada de aproximadamente  $\mu = 0.2$ , independentemente do valor de  $u_y / u_{el}$ , é suficiente para obter uma redução apreciável no pico de deslocamento. A partir de deste valor o benefício é marginal. Nota-se que para um mesmo valor de capacidade ( $\mu = \text{constante}$ ) se conseguem grandes reduções com valores decrescentes da relação  $u_y / u_{el}$ .

### 6.3 Eficiência do Amortecedor em função da rigidez do Suporte

Neste caso, define-se a eficiência como a relação entre a energia total dissipada pelo sistema amortecedor-suporte e a energia que dissiparia se a rigidez do suporte diagonal fosse infinita. Para estudar a variabilidade da energia dissipada pelo amortecedor em função da rigidez do suporte, o sistema amortecedor–suporte diagonal foi representado mediante um modelo em série como mostra a Figura 6.3. O amortecedor está representado com uma relação força deslocamento bi-linear, com rigidez pré-escoamento  $k_{a1}$  e pós-escoamento  $k_{a2}$ . A rigidez axial do suporte diagonal é  $k_{s1}$ .

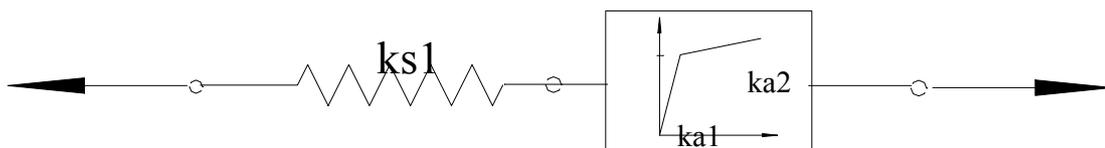


Figura 6. 3. Modelo em Série do Suporte-Amortecedor .

Verifica-se em consequência:

$$F_c = F_a = F_s$$

$$u_c = u_a + u_s \quad (6.1)$$

onde :  $F_c, u_c$ : força e deslocamento do conjunto, respectivamente.

$F_a, u_a$ : força e deslocamento do amortecedor, respectivamente.

$F_s, u_s$ : força e deslocamento do suporte, respectivamente.

Portanto:

$$F_{yc} = F_{ya}$$

$$u_{yc} = u_{ya} + u_s \quad (6.2)$$

onde :  $F_{yc}, u_{yc}$ : força e deslocamento de escoamento do conjunto, respectivamente.

$F_{ya}, u_{ya}$ : força e deslocamento de escoamento do amortecedor, respectivamente.

$u_s$ : deslocamento do suporte.

Levando em conta a equação (6.2) e definindo a rigidez pré-escoamento do conjunto e do amortecedor, como:

$$k_{c1} = \frac{F_{yc}}{u_{yc}}$$

$$k_{a1} = \frac{F_{ya}}{u_{ya}} \quad (6.3)$$

onde:  $k_{c1}$  : rigidez pré-escoamento do conjunto.

$k_{a1}$  : rigidez pré-escoamento do amortecedor.

A rigidez do conjunto é:

até o limite de escoamento:

$$k_{c1} = \frac{k_{a1}k_{s1}}{k_{a1} + k_{s1}} \quad (6.4)$$

após o limite de escoamento:

$$k_{c2} = \frac{k_{a2}k_{s1}}{k_{a2} + k_{s1}} \quad (6.5)$$

onde:  $k_{c2}$  : rigidez pós-escoamento do conjunto.

$k_{a2}$  : rigidez pós-escoamento do amortecedor.

$k_{s1}$ : rigidez axial do suporte diagonal.

A energia máxima que pode dissipar o amortecedor durante um ciclo (modelo, bi-linear) corresponde a um suporte infinitamente rígido ( $k_{s1} = \infty$ ,  $k_{c1} = k_{a1}$ ,  $k_{c2} = k_{a2}$ ) e está dado por:

$$W_o = \frac{4F_{ya}}{k_{a1}^2} (u_{max} k_{a1} - F_{ya}) (k_{a1} - k_{a2}) \quad (6.6)$$

como a rigidez do suporte diagonal é finita, a energia real  $W_D$  dissipada pelo amortecedor durante um ciclo é:

$$W_D = \frac{4F_{yc}}{k_{c1}^2} (u_{max} k_{c1} - F_{yc}) (k_{c1} - k_{c2}) \quad (6.7)$$

onde:  $W_o$ : energia máxima ideal dissipada por ciclo.

$W_D$ : energia real dissipada por ciclo.

$u_{max}$ : deslocamento máximo do ciclo.

Representando graficamente (Figura 6.4) a eficiência definida como  $W_o / W_D$  vs. a rigidez do suporte diagonal relativo à rigidez do amortecedor ( $k_{s1} / k_{a1}$ ), para diferentes relações  $u_{max} / u_{yc}$ , ( $u_{yc}$ : deslocamento de escoamento do conjunto), verifica-se que é suficiente que  $k_{s1} = 10 k_{a1}$  para atingir uma eficiência satisfatória. Porém, em casos usuais onde a relação  $u_{max} / u_{yc} > 5$ , considera-se suficiente uma relação  $k_{s1} / k_{a1} > 2.5$

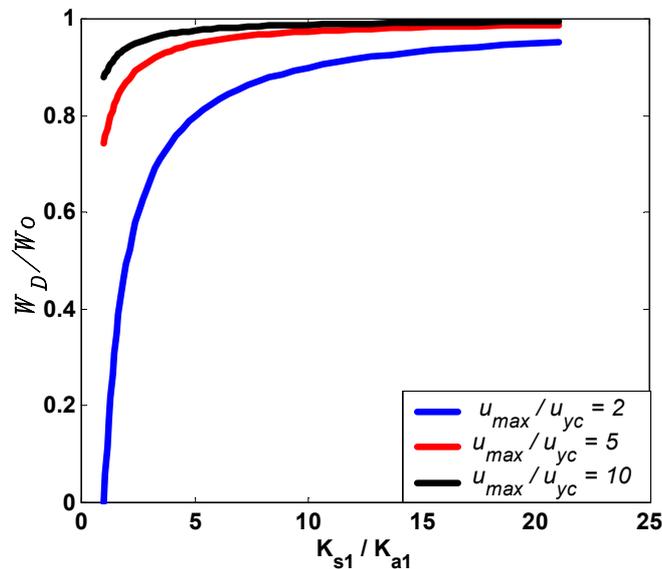


Figura 6. 4. Energia relativa dissipada em função da relação entre a rigidez do suporte e a rigidez do amortecedor.

#### 6.4 Eficiência do Amortecedor metálico em função do deslocamento de escoamento

( $u_y$ )

A eficiência é definida como a relação entre a energia real dissipada e a máxima energia dissipada quando o deslocamento de escoamento do amortecedor  $u_{ya} \rightarrow 0$ . A partir da equação (6.7) é possível analisar a influência do deslocamento de escoamento do amortecedor na eficiência. Admitindo que a variação de  $u_{ya}$  está dada pelo intervalo [ $u_{max}10^{-3} < u_{ya} < u_{max}$ ], tem-se  $W_{max}$ , quando  $u_{ya} = u_{max}10^{-3}$  e  $W_{min} = 0$ , (o sistema não dissipa energia) quando  $u_{ya} = u_{max}$  (permanece elástico). Na Figura 6.5 apresenta-se a variação de  $W_D / W_{max}$  vs.  $u_{ya} / u_{max}$ .

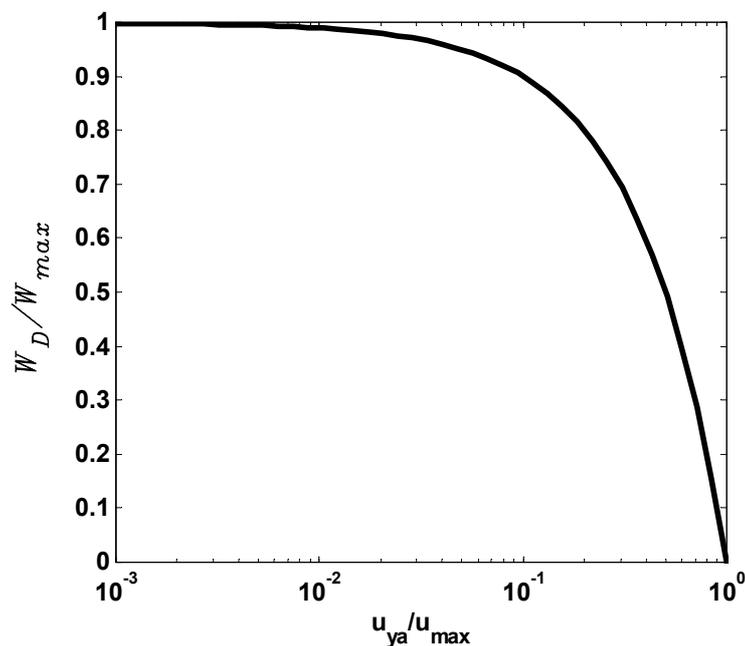


Figura 6.5. Energia relativa em função da relação deslocamento de escoamento e máximo

O gráfico anterior mostra que a relação entre  $u_{ya} / u_{max}$  deve ser o menor possível a fim de conseguir a máxima energia dissipada em concordância com a conclusão da seção 6.2.

#### 6.5 Estudo da Variabilidade da Resposta do Sistema Estrutural com os Parâmetros do Amortecedor

Nas duas últimas seções estudou-se a eficiência do amortecedor a partir da energia dissipada num ciclo para uma amplitude e fase de deslocamento que se mantém constante num período de tempo (é o caso de uma linearização harmônica do sistema não linear). Portanto, a validade das conclusões estaria limitada às situações onde a resposta do sistema provido de amortecedores fosse de banda estreita (caso onde a energia dissipada é relativamente pequena).

Nas estruturas reais submetidas a excitações externas onde a dissipação de energia pode ser relativamente grande o processo da resposta tem banda larga (a resposta apresenta um caráter aleatório) e os modelos de banda estreita podem ser imprecisos. Uma forma de superar esta dificuldade é representar a força de histerese na forma de uma equação não linear de primeira ordem. Esta formulação tem como vantagem a simplicidade de combinar as equações de movimento do sistema de maneira de montar um conjunto de equações diferenciais capaz de ser linearizado de maneira simples como se apresentará logo.

Para fazer uma abordagem do problema mais abrangente decidiu-se analisar o sistema completo, isto é, sistema estrutural com amortecedores incorporados. Considerou-se que representando o sistema mediante um oscilador não linear de um grau de liberdade a resposta pode-se ser determinada em forma suficientemente precisa (Curadelli, 2002) onde, por suas vantagens, a força de histerese (componente não linear do sistema provida pelos dissipadores) pode-se ser representada mediante um modelo diferencial de primeira ordem não linear proposto por Wen (1976). O sistema é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \alpha\omega^2x + (1-\alpha)\omega^2z &= \frac{f(t)}{m} \\ \dot{z} &= -\gamma|\dot{x}|z|z|^{r-1} - \beta\dot{x}|z|^r + A\dot{x} \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde:  $\ddot{x}, \dot{x}, x$ : aceleração, velocidade, deslocamento do sistema respectivamente.

$m$ : massa do sistema.

$z$ : força de histerese.

$\xi$ : relação de amortecimento próprio do sistema.

$\omega$ : frequência natural pré-escoamento do sistema.

$\alpha$ : relação entre a rigidez de pós e pré-escoamento.

$f(t)$ : excitação externa.

$\gamma, \beta, A, r$ : parâmetros que controlam a forma e magnitude do ciclo de histerese.

Uma das vantagens do modelo é a sua facilidade a ser estendido a análises com múltiplos graus de liberdade e de representar uma grande variedade de formas de ciclos de histerese inclusive sistemas com degradação da rigidez.

Uma vez estabelecido o sistema, o objetivo é estudar a influência que os parâmetros do amortecedor exercem nos diferentes níveis de resposta. Como foi mencionado anteriormente, o

fato de que o sistema apresente uma resposta aleatória dificulta o estudo, mas num estágio inicial de projeto e a fim de conhecer o comportamento do sistema com a mudança das características do dissipador, considera-se suficiente uma análise estatística linear equivalente do sistema. Para linearizar o sistema (6. 8) utilizou-se o método de linearização estatística [Caughey, 1963] que não apresenta o problema mencionado na linearização harmônica. Esta técnica tem como vantagem a facilidade de ser generalizável a sistemas de múltiplos graus de liberdade que incorporem elementos com histerese [Roberts et al, 1981b] e a possibilidade de trabalhar com excitações e respostas não estacionárias [Roberts, 1981a, Spanos, 1981]. Como no processo de linearização da equação (6. 8) é preciso ter definida a excitação, considerou-se uma excitação estacionária com média zero tipo ruído branco Gaussiano,  $n(t)$ , filtrado pelo espectro dado por Kanai (1961) [Tajimi, 1960], que dá um modelo aceitável de um registro sísmico, dado por:

$$S_f(\omega) = G_o \frac{\left[ I + 4 \zeta_g \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right]}{\left[ I - \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right]^2 + 4 \zeta_g \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2} \quad (6. 9)$$

onde:  $n(t)$ : processo ruído branco Gaussiano com média nula.

$G_o = 2 \pi S_o$  : parâmetro de escala.

$S_o$  : densidade espectral de potência da excitação ruído branco Gaussiano  $n(t)$ .

$S_f(\omega)$  : densidade espectral de potência da excitação filtrada,  $f(t)$ .

$\zeta_g$ : amortecimento característico do solo.

$\omega_g$  : frequência predominante do solo.

A relação entre o processo ruído branco  $n(t)$  e o processo filtrado  $f(t)$  com densidade espectral de potência  $S_f(\omega)$  (equação (6. 9)) dado por:

$$\begin{aligned} f(t) &= \omega_g u + 2 \zeta_g \omega_g \dot{u} \\ \ddot{u} + 2 \zeta_g \omega_g \dot{u} + \omega_g u &= n(t) \end{aligned} \quad (6. 10)$$

onde:  $\dot{u}, u$ : velocidade e deslocamento do filtro, respectivamente. Portanto realizando a linearização da equação (6. 8) e levando em conta a equação (6. 10) tem-se:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \alpha\omega^2 x + (1-\alpha)\omega^2 z &= 2\zeta_g\omega_g\dot{u} + \omega_g^2 u \\
\dot{z} + c_e\dot{x} + k_e z &= 0 \\
\ddot{u} + 2\zeta_g\omega_g\dot{u} + \omega_g^2 u &= \frac{n(t)}{m}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde:  $c_e$ ,  $k_e$ : constantes de linearização. Wen (1980) provou que, para uma excitação tipo ruído branco gaussiano filtrado,  $f(t)$ , e modelo de força de histerese dada pela equação (6.8), este tipo de linearização tem uma excelente aproximação estatística do sistema não linear para um amplo intervalo de níveis de excitação além de ter a vantagem que as constantes  $c_e$  e  $k_e$  podem ser determinadas em forma fechada a través dos segundos momentos estatísticos de  $\dot{x}$  e  $z$  mediante:

$$\begin{aligned}
c_e &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \gamma \frac{E(\dot{x}z)}{\sigma_{\dot{x}}} + \beta \sigma_z \right] - A \\
k_e &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \gamma \sigma_{\dot{x}} + \beta \frac{E(\dot{x}z)}{\sigma_z} \right]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Escrevendo a equação (6.11) como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem e definindo um vetor de estado como,  $\mathbf{y} = [x \ \dot{x} \ z \ u \ \dot{u}]^T$  tem-se:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{p} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde: } \mathbf{y} &= [x \ \dot{x} \ z \ u \ \dot{u}]^T \\
\dot{\mathbf{y}} &= [\dot{x} \ \ddot{x} \ \dot{z} \ \dot{u} \ \ddot{u}]^T \\
\mathbf{p} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ n]^T
\end{aligned}$$

e a matriz do sistema é:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\zeta\omega & -(1-\alpha)\omega^2 & \omega_g^2 & 2\zeta_g\omega_g \\ 0 & -c_e & -k_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_g^2 & -2\zeta_g\omega_g \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

Se a matriz de covariância de  $\mathbf{y}$  é  $\mathbf{V}$  com  $V_{ij} = E(y_i y_j)$ , pode ser demonstrado [Lutes, (1997)] que  $\mathbf{V}$  satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}^T + \mathbf{B} \tag{6.15}$$

onde em virtude de se tratar de uma excitação tipo ruído branco gaussiano a matriz  $\mathbf{B}$  tem todos seus elementos nulos ( $B_{ij} = 0$ ) exceto  $B_{55} = G_o = 2\pi S_o$ .

Como a excitação é estacionária,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{V}$  são independente do tempo e a equação (6. 15) é nula. A solução para  $\mathbf{V}$  pode ser obtida resolvendo a equação matricial de Lyapunov:

$$\mathbf{GV} + \mathbf{VG}^T + \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6. 16)$$

Como  $c_e$  e  $k_e$  pertencem à matriz  $\mathbf{G}$  (equação (6. 14)) e dependem da estatística da resposta (equação (6. 12)), é necessário um procedimento iterativo para a solução da equação (6. 16). Para iniciar o processo de cálculo de  $\mathbf{V}$ , pode-se usar a solução do sistema linear com uma rigidez igual à rigidez pré-escoamento. Com esta base teórica, tem-se as condições para analisar o efeito dos parâmetros do amortecedor na resposta estrutural.

Seja o caso da estrutura mencionada no início do capítulo, de seis andares e seis vãos. O estudo foi baseado num oscilador não linear de um grau de liberdade (que representa o primeiro modo da mencionada estrutura), linearizado pelo procedimento descrito.

A

Figura 6. 6 mostra um esquema do oscilador não linear, onde os parâmetros estão definidos como segue:

$m_1$  : massa do sistema no modo 1.

$k_1$ : rigidez do sistema no modo 1.

$k_{a1}$ : rigidez pré-escoamento do amortecedor no modo 1.

$k_{a2}$ : rigidez pós-escoamento do amortecedor no modo 1.

$k_0 = k_1 + k_{a1}$  : rigidez pré-escoamento do sistema no modo 1.

$\alpha = (k_1 + k_{a2}) / k_0$ : relação entre a rigidez pós e pré-escoamento.

$\xi_1 = 0.01$ : relação amortecimento do modo 1 (próprio da estrutura).

$d_y$ : deslocamento de escoamento do amortecedor no modo 1 (neste caso admitiram-se valores de  $d_y$ , de 0.5%, 1 %, 2 % da altura de pavimento,  $H$ ).

$F_{ya1}$  : força de escoamento do amortecedor no modo 1.

$F_{y1} = F_{ya1} + k_1 d_{y1}$ : Força de escoamento do sistema no modo 1.

$\mu = F_{yat} / Mg$ : relação entre a capacidade total do conjunto de amortecedores e o peso da estrutura.

$F_{yat} = \sum_{i=1}^n F_{yai}$  : capacidade total do conjunto de amortecedores.

$Mg$  : peso da estrutura.

$S_f$  : densidade espectral de potência da excitação,  $f(t)$  (filtrada) (para variância  $\sigma_f^2 = 0.2$ ) .

$\xi_g = 0.6$ : amortecimento característico do solo [Chopra, 1979].

$\omega_g = 5 \pi$  : frequência predominante do solo [Chopra, (1979)].

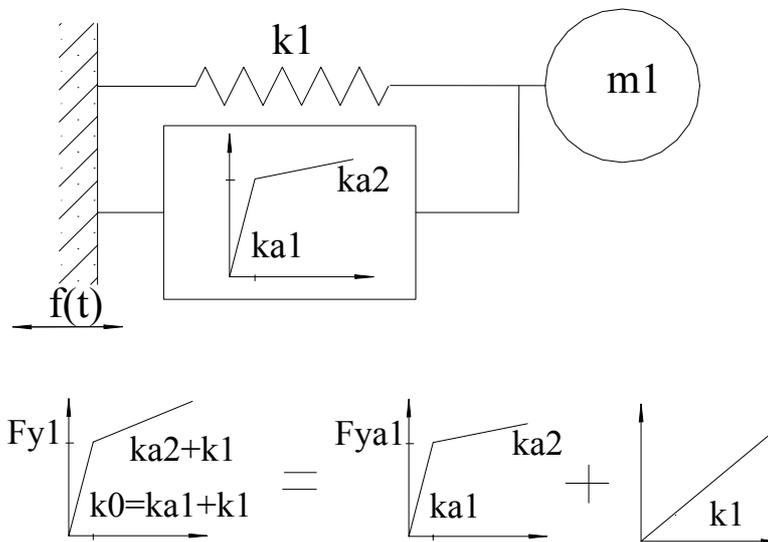


Figura 6. 6. Oscilador não linear.

Na Figura 6. 7. Mudança na posição dos autovalores da matriz do sistema com a capacidade do amortecedor para diferentes valores de  $\alpha$ . Se apresenta no plano complexo a mudança na posição dos autovalores complexos (pólos oscilantes do sistema com coordenadas dadas por o amortecimento efetivo (equivalente) do sistema,  $\xi_{eff}$ , e a frequência do sistema amortecido,  $\omega_d$ ) da matriz do sistema  $\mathbf{G}$ , para diferentes valores de rigidez e deslocamento de escoamento do oscilador. Neste caso  $\alpha$  (relação entre a rigidez pós e pré-escoamento) variou-se entre 0.03 (amortecedor muito rígido) até 1 (sistema sem amortecedor). Para valores de  $\alpha$  próximos a 1 os autovalores da matriz do sistema se encontram próximos ao eixo imaginário indicando, em vibrações livres, uma resposta do sistema levemente amortecido (só com amortecimento próprio da estrutura) de tipo banda estreita. A medida que  $\alpha$  tende a zero, os

autovalores se afastam do eixo imaginário indicando um aumento de amortecimento efetivo ( $\xi_{eff}$ ), até um máximo, quando  $\alpha = 0.5$ , ou seja a rigidez provida pelo dissipador é igual à do oscilador. Continuando com a redução de  $\alpha$  (aumentando a rigidez do dissipador) o amortecimento começa a diminuir devido ao aumento excessivo da rigidez do sistema. Obviamente, o mesmo fenômeno acontece para os três valores diferentes de deslocamento de escoamento mencionados, com um maior efeito quando  $d_y$  é menor.

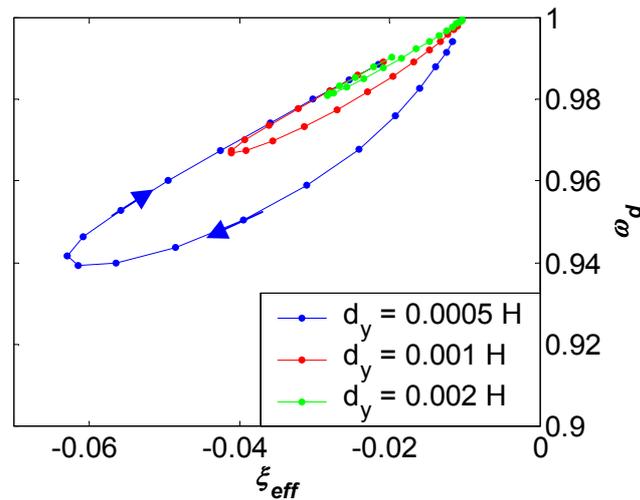


Figura 6. 7. Mudança na posição dos autovalores da matriz do sistema com a capacidade do amortecedor para diferentes valores de  $d_y$ .

A Figura 6.8 mostra a variação do desvio padrão da resposta, referido ao desvio padrão do sistema elástico vs. a capacidade do amortecedor, normalizada com o peso da estrutura, para os três valores de deslocamento de escoamento antes mencionados (0.5‰, 1 ‰, 2 ‰ da altura de pavimento,  $H$ ). Observam-se reduções significativas na resposta do sistema até um valor da capacidade do amortecedor de aproximadamente 20-25% do peso da estrutura ( $\mu = 0.2-0.25$ ) confirmando os resultados da Figura 6. 2. Porém, não fica claramente definido qual é a capacidade onde se atinge o maior valor de dissipação do sistema. Nota-se também que, para uma mesma capacidade, logicamente a redução é maior quando o deslocamento de escoamento  $d_y$  é menor.

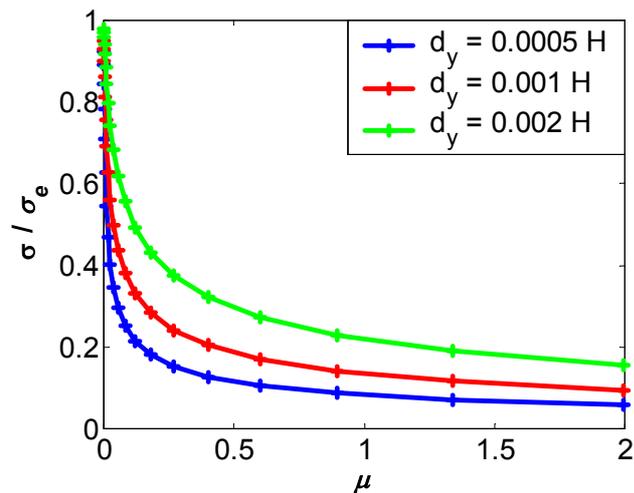


Figura 6. 8. Desvio padrão relativo do deslocamento em função da capacidade normalizada.

Na Figura 6. 9 se apresenta a variação da relação de amortecimento  $\xi_{eff}$  com  $\mu$  (capacidade normalizada). Claramente evidencia-se o ponto onde o sistema logra a máxima dissipação ( $\xi_{effmax}$ ) ( $\alpha = 0.5$ ).

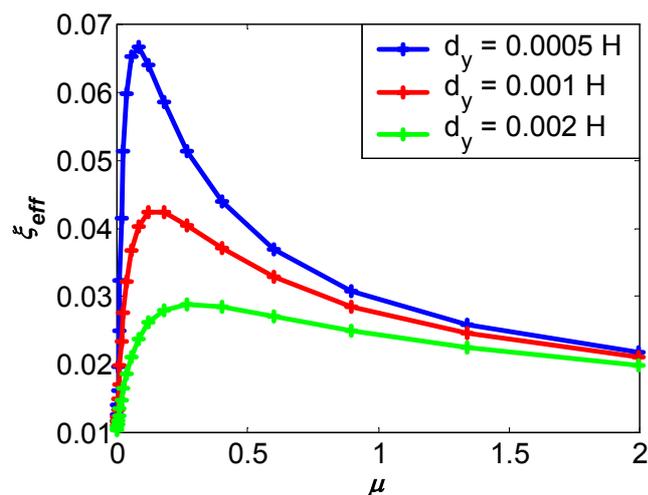


Figura 6. 9. Variação do amortecimento do sistema com a capacidade do amortecedor.

O fato de que a máxima dissipação não corresponde ao o mínimo dos deslocamentos verifica-se na Figura 6. 10.

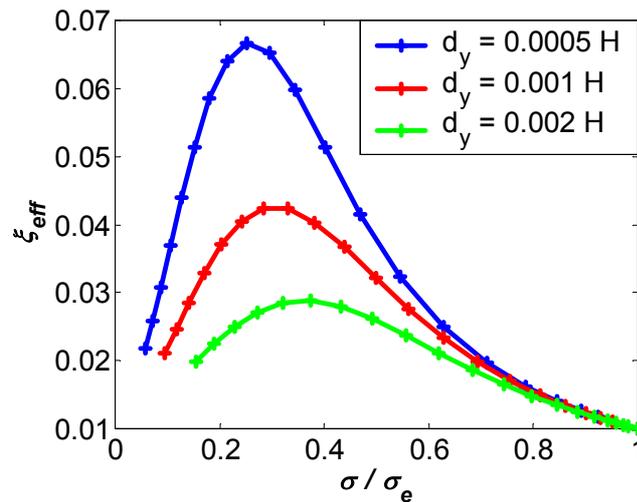


Figura 6. 10. Variação da dissipação com o desvio padrão relativo do deslocamento.

Finalmente na Figura 6. 11 se apresenta o incremento da frequência natural relativa à do sistema original (sem dissipadores) com o incremento da capacidade do amortecedor. Nota-se que esta frequência corresponde ao estado de pré-escoamento e não à efetiva do sistema.

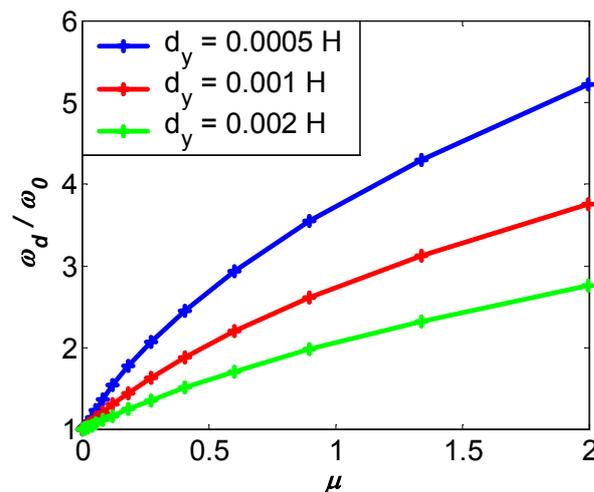


Figura 6. 11. Variação da frequência relativa com a capacidade do amortecedor.

Como infere-se da equação (6. 12) os valores das constantes  $c_e$  e  $k_e$  são função da estatística da resposta, portanto, variam com o nível da excitação. A fim de estudar dita variabilidade, apresenta-se o caso da mesma estrutura anterior com uma relação fixa entre a rigidez pós e pré-escoamento de  $\alpha = 0.5$  e um deslocamento de escoamento de  $d_y = 0.001H$  (altura de pavimento), submetida diferentes níveis de excitação medida em termos do valor quadrático médio da aceleração do solo,  $\sigma_f^2$ .

A Figura 6. 12 mostra a mudança dos autovalores do sistema com o incremento do nível da excitação,  $\sigma_f^2$ . Com baixos níveis de excitação o sistema apresenta praticamente o próprio

amortecimento. Ao crescer  $\sigma_f^2$ , logicamente, cresce a resposta do sistema (Figura 6. 13) e, cai rapidamente a sua rigidez efetiva secante (rigidez estrutural mais rigidez incremental do sistema dissipador) (Figura 6. 14) indicando que o dissipador entra no campo plástico, conseqüentemente, origina-se um incremento importante na dissipação de energia (Figura 6. 15). Embora a resposta continue a crescer com  $\sigma_f^2$ , a rigidez secante tende á rigidez original (sem dissipador) produzindo-se uma queda do amortecimento. O comportamento descrito, é uma das vantagens deste sistema de dissipação. Até um certo nível de excitação, com o incremento da excitação, o sistema ganha flexibilidade provocando um crescimento pronunciado na capacidade de dissipar energia

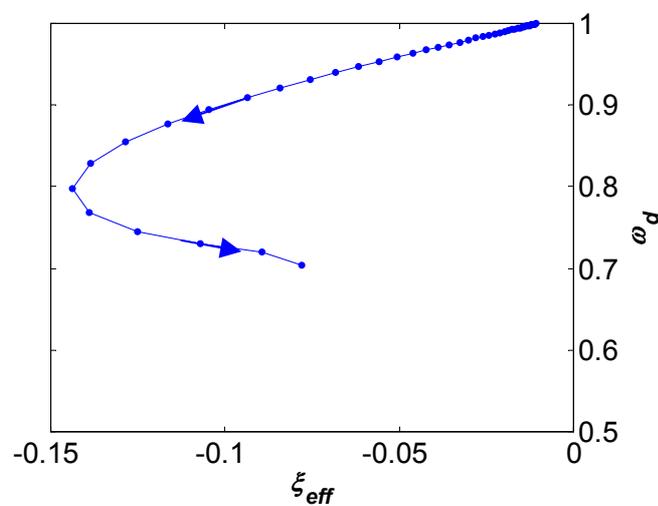


Figura 6. 12. Mudança na posição dos autovalores do sistema com o nível da excitação,  $\sigma_f^2$ .

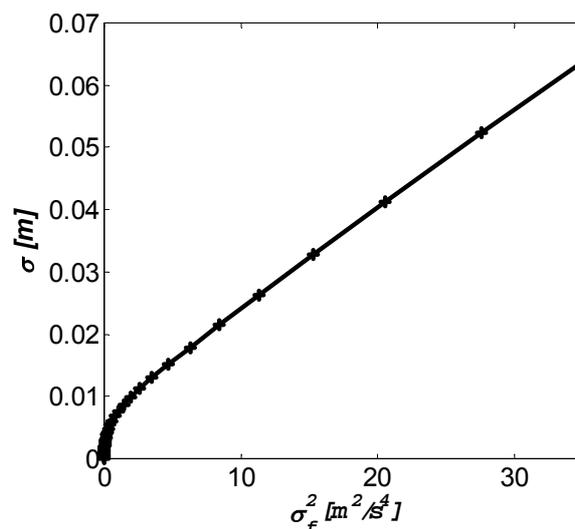


Figura 6. 13. Variação do desvio padrão do deslocamento com o nível da excitação,  $\sigma_f^2$ .

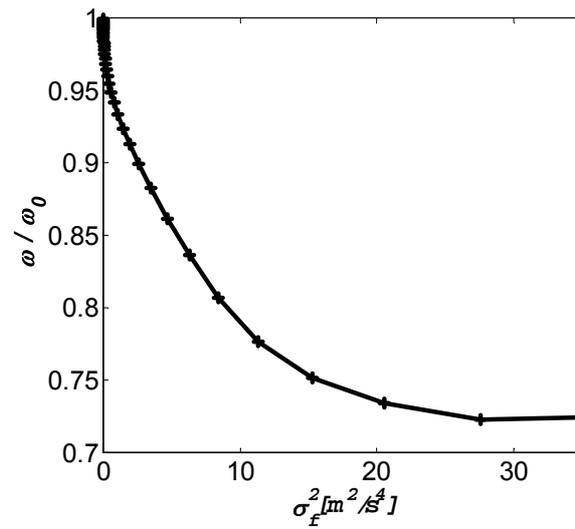


Figura 6. 14. Variação da rigidez efetiva normalizada à original com o nível da excitação,  $\sigma_f^2$ .

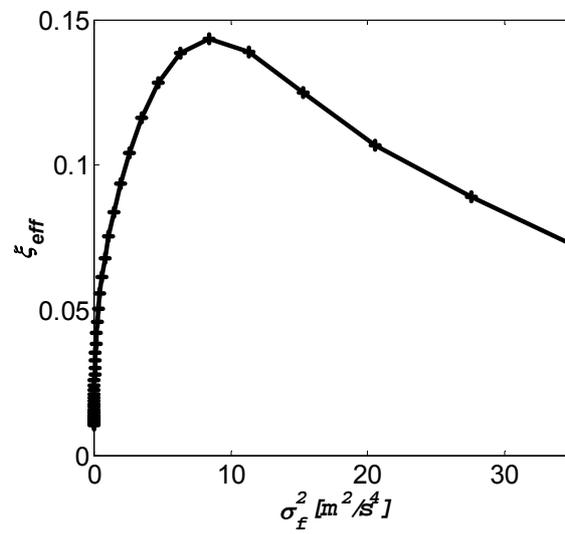


Figura 6. 15. Variação do amortecimento efetivo com a excitação,  $\sigma_f^2$ .

## Capítulo 7

### Eficiência da Incorporação de Amortecimento Suplementar em Estruturas

#### 7.1 Introdução

Na literatura existem diferentes formas de avaliar a eficiência da incorporação de amortecimento suplementar numa estrutura sob excitação aleatória tais como sismos, vento e ondas do mar. A maioria dos trabalhos publicados usam como variável de análise os deslocamentos relativos de pavimento como o mostra, Pall e Marsh (1982), Filiatrault e Cherry (1987) e Aiken et al (1988) que estudaram a incorporação de amortecedores do tipo de atrito. Tsai et al (1993), Martinez-Romero (1993) e Rodriguez e Battista (2001) com abordagem similar mas com amortecedores metálicos, e Chang et al (1992, 1995) com amortecedores viscoelásticos. Outros autores [Nims et al (1993), Filiatrault et al (1987)] quantificam a performance estrutural através do estudo da redução da aceleração nos diferentes níveis da estrutura.

Em virtude das grandes incertezas envolvidas na excitação (conteúdo de frequências, duração, etc.), como também nas propriedades mecânicas da estrutura em consideração, neste trabalho, a fim de avaliar a eficiência do sistema de dissipação de energia além de considerar como parâmetro de análise os deslocamentos de pavimento, adotou-se uma forma integral através do estudo da propensão ao colapso que tem a estrutura submetida a uma excitação sísmica.

#### 7.2 Avaliação da Eficiência por Deslocamentos

A fim de avaliar a eficiência do sistema de dissipação de energia através da avaliação da resposta estrutural em termos de deslocamentos, considera-se a estrutura padrão de aço, de seis andares e seis vãos com parâmetros dinâmicos apresentados brevemente na Tabela 7.1. Para mas detalhes e disposição dos amortecedores referir-se à Figura 3.12 e Tabela 3.1 no capítulo 3. A estrutura foi submetida ao sismo “Taft, California, N 21E, 1952” com uma aceleração pico de 0.18g.

Tabela 7.1. Características Dinâmicas da estrutura estudada.

|                                  |                    |
|----------------------------------|--------------------|
| Massa de cada andar              | 254.65 [t]         |
| Frequências naturais             | 0.72, 2, 3.42 [Hz] |
| Rel. de Amortec. Crítico próprio | 2 [%] em cada modo |

Na estrutura sem amortecimento suplementar, calculou-se um deslocamento máximo no sexto andar de 0.092 m. Seguindo o procedimento de Curvas de Iso-desempenho descrito no capítulo 4, se determinou um conjunto de dissipadores com deslocamento de escoamento de 0.1% da altura de andar e capacidade total (força de escoamento) de 15% do peso total da estrutura. As capacidades dos dissipadores foram distribuídas ao longo da altura de maneira tal de manter, durante a deformação, a forma do primeiro modo. Na Figura 7.1 se apresentam os deslocamentos do teto da estrutura original (sem dissipadores) e com o sistema de dissipação de energia suplementar incorporado. Pode-se observar uma importante diminuição nos deslocamentos implicando numa redução da demanda, conseqüentemente, do possível dano estrutural. A relação entre os valores r.m.s. (“*root mean square*”) das respostas foi de 0.44 enquanto que em valores picos foi de 0.68.

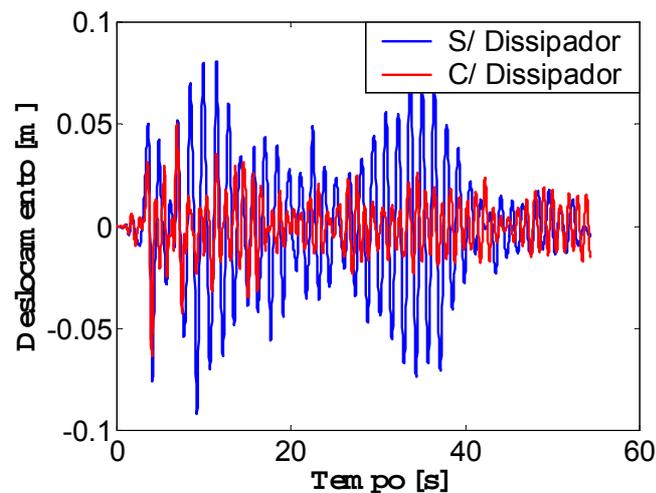


Figura 7. 1. Deslocamento do teto. Excitação Taft, California, N 21E, 1952 (0.18g).

Na Figura 7.2 se mostra a distribuição da energia dissipada durante o evento sísmico na estrutura provida de dissipadores externos. Nota-se que a maior parte da energia de entrada é dissipada pelo sistema de dissipação incorporado.

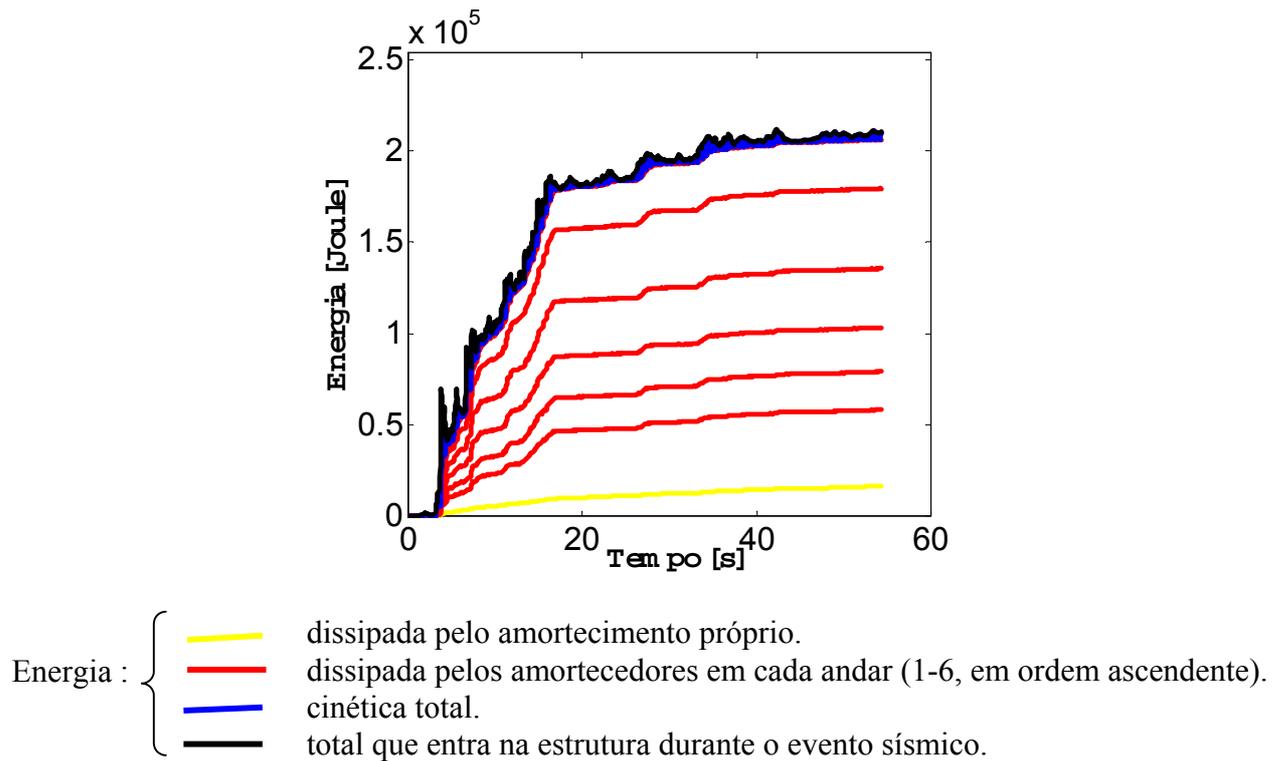


Figura 7.2. Distribuição por pavimento da energia dissipada na estrutura durante o evento sísmico.

### 7.3 Avaliação da Eficiência por Propensão ao Colapso

Para este fim é necessário adotar uma metodologia para quantificar o dano, que conduziria a estrutura estudada ao colapso, para diferentes níveis de intensidade do movimento do solo. A metodologia empregada para abordar o problema probabilístico pode ser descrito pelos seguintes passos:

- 1) Adequado modelo estrutural não linear para simular a resposta sísmica. Neste passo é possível levar em consideração as incertezas nas propriedades geométricas e mecânicas da estrutura determinando amostras das variáveis relevantes a partir de suas funções de distribuição de probabilidade.
- 2) Geração de registros sísmicos a partir de modelo de risco sísmico do local levando em conta os efeitos do tipo da fonte sísmica, atenuação e, condições do solo.
- 3) Construção de curvas de fragilidade mediante simulação, mediante a contagem do número relativo de colapsos registrados em cada nível de aceleração do solo.

- 4) Análise da confiabilidade estrutural. Isto é, através das curvas de fragilidade e a distribuição das acelerações máximas do solo, é determinada a probabilidade de colapso num período de tempo e local determinados.

### 7.3.1 Modelo Estrutural

Conforme com o primeiro passo da análise probabilística mencionado e devido a que no estudo deve-se atingir o colapso da estrutura, o qual implica uma crescente deterioração na rigidez e resistência estrutural, foi necessário considerar um modelo estrutural não linear. Neste caso, para representar as funções momento-rotação do comportamento histerético no extremo dos elementos estruturais (vigas e colunas), utilizou-se um modelo bilinear onde uma articulação plástica com capacidade de rotação máxima definida por um valor de ductilidade se forma quando se atinge o momento de plastificação do elemento (Figura 7.3). Cabe salientar que no presente trabalho a “*ductilidade*” é definida como a relação entre a rotação máxima e a de escoamento. Os parâmetros de cada elemento estrutural foram obtidos a partir das propriedades geométricas das seções e dos diagramas de interação, onde se combina carga axial e momento fletor, considerando um endurecimento no comportamento de 2% (Figura 7.4). O leitor é referenciado a FEMA 273 (1996) onde se descreve conceitos de análise não linear como também extensas recomendações para valores aceitáveis de força e deformação associados com diferentes níveis de performance para elementos de aço, concreto, madeira e alvenaria.

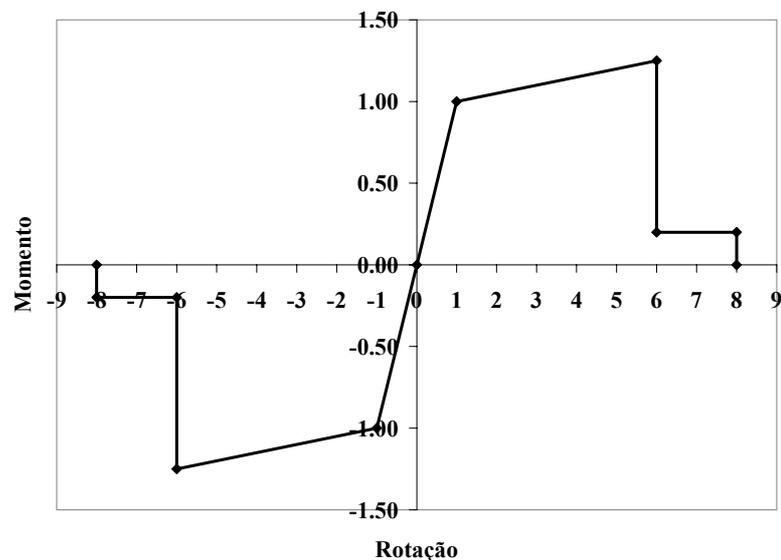


Figura 7. 3. Diagrama Momento-Rotação de elementos estruturais.

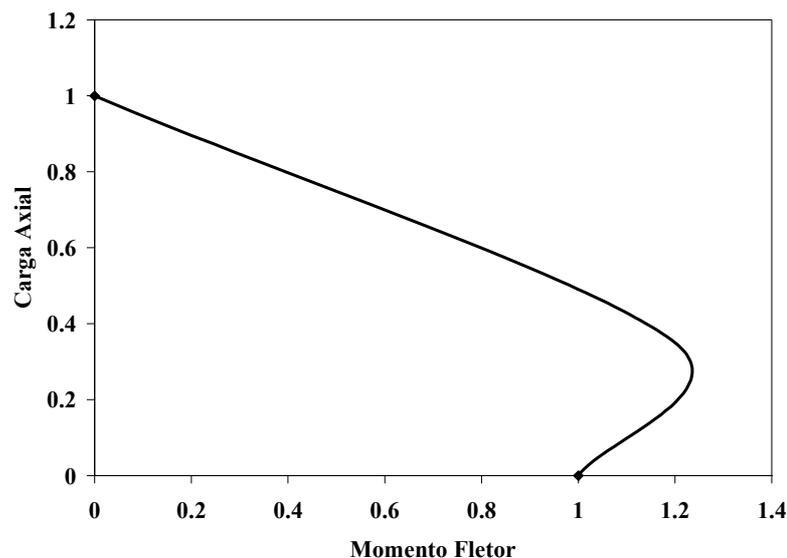


Figura 7.4. Diagrama Carga Axial-Momento de elementos estruturais.

### 7.3.2 Análise Probabilística do Risco Sísmico

Nesta seção trata-se de quantificar a probabilidade de que um nível de intensidade sísmica (medida pela aceleração máxima do solo) seja ultrapassado num local determinado, levando em conta todos os possíveis eventos.

A análise probabilística do risco sísmico envolve três passos:

- 1) Modelo da fonte de risco sísmico: é uma descrição da magnitude, localização e periodicidade de todos os eventos que usualmente representem uma ameaça num local determinado.
- 2) Modelo do movimento do solo ou relação de atenuação: permite determinar os níveis de movimento sísmico, como função da magnitude, distância e outros parâmetros que descrevem os diferentes tipos de solo e falha. Conseqüentemente com este modelo é possível determinar os parâmetros da distribuição das acelerações máximas do solo num determinado local.
- 3) Calculo de Probabilidade: uma vez definidos ambos modelos anteriores, onde se concentram as dificuldades, a determinação da probabilidade do risco sísmico é, teoricamente, simples.

Para determinar a propensão ao colapso da estrutura, é necessário determinar uma distribuição dos níveis da aceleração máxima do solo que representem uma ameaça seguindo os

três passos anteriores. Como uma minuciosa modelagem para a determinação do risco sísmico está além do objetivo deste trabalho, adotou-se para as acelerações máximas do solo, uma função de densidade de probabilidade log-normal usualmente usada nestes modelos [Lee et al, 2000]. Os parâmetros da mesma foram obtidos a partir de uma análise probabilística baseada no valor de aceleração máxima do solo com 10% de probabilidade de ser ultrapassado num período de 50 anos, valor normalmente usado pelo código de projeto do local da obra. A Figura 7.55. apresenta a função de distribuição de probabilidade das acelerações máximas do solo estimada para a cidade de San Francisco, Califórnia, USA, e para a cidade de Tucumán, Argentina, utilizadas na determinação dos parâmetros mencionados.

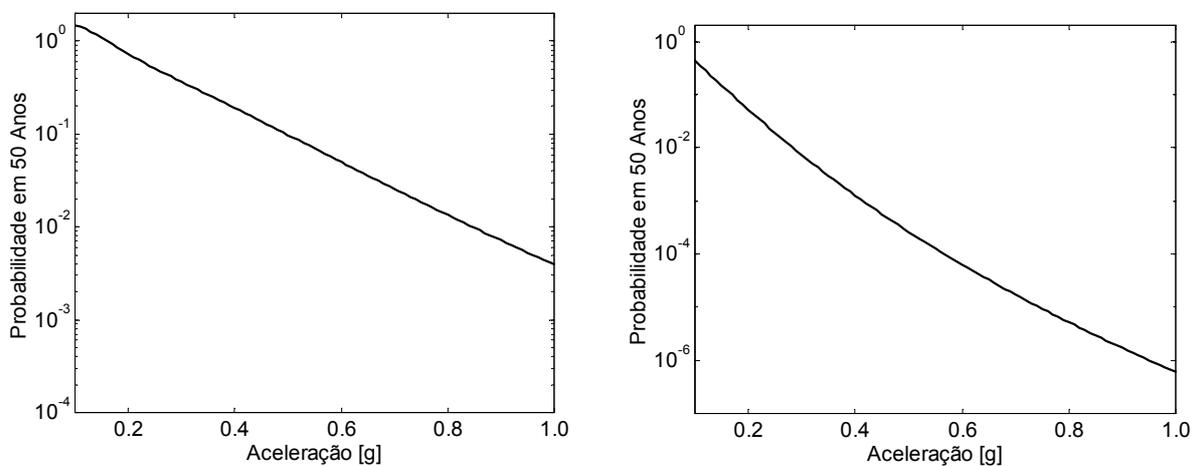


Figura 7.5. Curva de Risco Sísmico para Cidade de San Francisco (esquerda) e, Cidade de Tucumán (direita).

### 7.3.3 Excitações Consideradas

Na seção anterior determinou-se a distribuição das acelerações máximas do solo para cada local onde estariam localizadas as estruturas estudadas. Resta estabelecer o conjunto de registros sísmicos a serem usados na simulação que levem em conta as particularidades das rupturas na zona sísmica e a distância epicentral que são os fatores que definem as características em frequência e duração dos mesmos (segundo passo da análise probabilística). Isto, pode ser feito mediante a simulação de processos aleatórios estacionários ou não, através de modelos elaborados sobre fontes de risco sísmico [Cornell, 1968, WGCEP, 1995] ou adotando registros sísmicos reais. Como estudar modelos elaborados de fontes de risco sísmico está fora do escopo deste trabalho e com o propósito de inferir conclusões gerais sobre o comportamento sísmico de uma estrutura, escolheu-se um conjunto de dez registros sísmicos amplamente diferentes,

correspondentes a terremotos ocorridos em Ásia, Norte e Sul América. A amostra foi composta pelos seguintes sismos:

Caucete, San Juan, Argentina, 1977.

Chichi, CHY010 E, N, Taiwan, 1999.

Imperial Valley, El Centro, 000, USA, 1979.

Kobe, JMA, NS, Japão, 1995.

Landers, Josuha Tree, 000, 1992.

Llollelo, 010, Chile, 1985.

Loma Prieta, Halls Valley, 000, USA, 1989.

Northridge, Brentwood V.A. Hospital, 195, California, USA, 1994.

San Fernando, Pasadena, Cit Athenaeum, 000, USA, 1971.

Taft, California, N21E, USA, 1952.

#### **7.3.4 Critério de Falha**

A fim de determinar a propensão à falha é preciso previamente definir um critério de falha. Entre vários autores que abordaram o problema, pode-se mencionar Murotsu et al (1993), que consideraram que a estrutura atinge o colapso quando a relação entre o módulo do determinante da matriz de rigidez da estrutura danificada e não danificada torna-se menor que um valor especificado. Dorka et al (1993) usou um índice de segurança que representa um múltiplo do desvio padrão de uma variável crítica (por exemplo, distorções relativas de pavimento) a respeito de seu limite definido. Park et al (1985) definiu um índice de dano como uma combinação entre a máxima deformação estrutural e a energia histerética absorvida, baseado em dados experimentais para elementos estruturais de concreto armado. Dito parâmetro tem uma distribuição log-normal com média unitária (colapso) e coeficiente de variação igual a 0.54. Esteva et al (1989) estudaram a probabilidade de falha de pórticos de múltiplos andares sob excitação sísmica. O critério de falha adotado foi a relação entre a distorção relativa máxima entre pavimentos atingido durante o evento e a capacidade de deformação dúctil da estrutura.

Depois de um extenso levantamento bibliográfico sobre trabalhos que abordam este tipo de problemas concluiu-se que a escolha de um critério de falha que quantifique de uma forma rigorosa o nível avançado de dano de uma estrutura é ainda uma linha de pesquisa em

desenvolvimento [Esteva et al, 2001]. Reconhecendo as limitações existentes, o propósito consiste em apresentar um processo de avaliação relativamente simples, porém robusto, que reproduza as características essenciais do objetivo. Portanto neste trabalho, define-se como critério de falha, considerado suficiente para reproduzir com aproximação o estado de pre-coloapso de uma estrutura, o seguinte:

$$D = [d_1/x_{c1}, d_2/x_{c2}, \dots, d_n/x_{cn}]^T \quad (7.1)$$

onde:  $D$  : vetor de dano.

$d_i$ : deslocamento relativo máximo de pavimento, atingido durante o evento sísmico.

$x_{ci}$ : deslocamento relativo máximo de colapso, correspondente ao pavimento  $i$ .

Cada elemento do vetor corresponde a um pavimento da estrutura é definido como a relação entre o deslocamento relativo máximo de pavimento atingido durante o sismo,  $d_i$  e, o deslocamento relativo de colapso de pavimento correspondente,  $x_{ci}$ . O último parâmetro é obtido mediante uma análise estática não linear da estrutura (denominada na literatura inglesa “*pushover*”), usada no projeto sísmico, que permite verificar a performance do sistema estrutural. O processo consiste em fazer um modelo analítico bi ou tridimensional inelástico da estrutura e aplicar, além do peso próprio, cargas laterais incrementais (mediante um vetor de carga cortante), distribuídas em altura de acordo a um modelo padrão (geralmente dado pelo código de projeto particular representando aproximadamente as forças de inércia) até atingir deslocamentos prescritos associados com níveis específicos de performance. [Mwafy A. et al, 2001, Krawinkler H. et al, 1998, Tso W et al, 1998]. Desta forma é possível estimar resistência, rigidez, capacidade de deformação inelástica e forças nos elementos estruturais e suas conexões. Em nosso caso interessa o deslocamento prescrito associado com o colapso da estrutura. Define-se o deslocamento de colapso global (capacidade de deslocamento máximo),  $X_c$ , como aquele onde se produz uma queda no mínimo de 20% da capacidade inicial do esforço cortante. A modo de ilustração na Figura 7.6 apresenta-se uma curva esforço cortante basal vs. deslocamento do topo, das estruturas estudadas descritas na seção 7.4, para uma ductilidade igual a 6. As curvas mostram repentinos degraus que correspondem à formação de uma série de rótulas plásticas quando atingem sua capacidade limite de rotação.

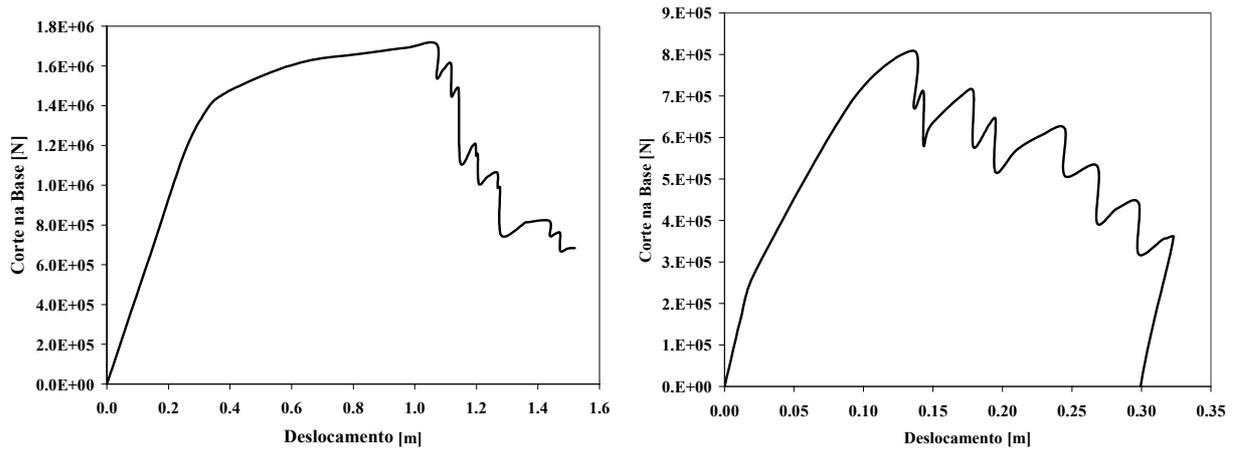


Figura 7.6. Esforço Cortante na base vs. deslocamento no topo. Estrutura 1 (esquerda) e, Estrutura 2 (direita).

O colapso da estrutura (falha) será atingido quando um ou mais elementos do vetor dano  $D$ , torna-se maior ou igual a um. Portanto é possível definir uma variável dano  $C$ , como:

$$C = \begin{cases} =1; & \text{se } \cup(D_i \geq 1) = \cup(d_i/x_{ci} \geq 1) \text{ (colapso)} \\ =0; & \text{em outro caso (não colapso)} \end{cases} \quad (7.2)$$

onde  $\cup$ : união dos elementos do conjunto que cumprem a desigualdade.

A equação (7.2) indica que o colapso de um pavimento individual implica no colapso total da estrutura como conjunto.

### 7.3.5 Curvas de Fragilidade e determinação da Propensão ao Colapso

Em estudos referidos à avaliação do risco sísmico é essencial determinar o dano potencial real causado em estruturas por um sismo. A probabilidade do dano estrutural causado por crescentes níveis de um terremoto é descrito pela relação entre a intensidade do movimento sísmico e o dano, usualmente é expressa em termos de curvas de fragilidade ou matriz de probabilidade. Antigamente ditas curvas eram construídas a partir de dados de experiências anteriores e juízo de especialistas e, recentemente, mediante aproximações analíticas calibradas com dados de sismos disponíveis. A partir do conjunto de eventos sísmicos que define a excitação, juntamente com o modelo estrutural e o critério de falha, construíram-se curvas de fragilidade para cada uma das estruturas descritas mais adiante na seção 7.4, mediante simulações do comportamento em seu estado original (sem dissipador) e, posteriormente,

provendo-as com dissipadores metálicos para níveis incrementais de excitação. Usou-se como estimador da propensão ao colapso a frequência relativa da variável  $C$ , isto é:

$$P_C = P[C = 1] = P[\cup(d_i/x_{ci} \geq 1)] \quad (7.3)$$

Uma vez obtidas as probabilidades de colapso para cada nível de aceleração máxima do solo, a função de probabilidade condicional de falha, em termos da aceleração máxima do solo, foi aproximada por uma função de densidade Log-normal. Portanto, expressando a variável  $C$  em termos do  $\ln PGA$  (logaritmo natural da aceleração máxima do solo), tem-se:

$$p_C(\ln PGA) = \frac{1}{\sigma_C \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln PGA - \mu_C)^2}{2\sigma_C^2}} \quad (7.4)$$

onde:  $\mu_C$ : valor esperado da variável  $C$ , em termos de  $\ln PGA$ .

$\sigma_C$ : desvio padrão da variável  $C$ , em termos de  $\ln PGA$ .

A função de distribuição de probabilidade, que define o estado de colapso, isto é, a fragilidade real, vem dada por:

$$P_C(\ln PGA) = \int_0^{\ln PGA} p_C(\ln PGA) d(\ln PGA) \quad (7.5)$$

Como foi mencionado anteriormente para o caso do risco sísmico, a função de densidade de probabilidade da aceleração máxima do solo num período de 50 anos, que define a excitação  $A$ , também pode-se aproximar por uma função Log-normal [Lee et al, 2000]:

$$p_A(\ln PGA) = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln PGA - \mu_A)^2}{2\sigma_A^2}} \quad (7.6)$$

onde:  $\mu_A$ : valor esperado da variável  $A$ , em termos de  $\ln PGA$ .

$\sigma_A$ : desvio padrão da variável  $C$ , em termos de  $\ln PGA$ .

Finalmente a probabilidade de colapso  $P$ , pode ser obtida integrando numericamente a seguinte convolução:

$$P = \int_0^{\infty} P_C(\ln PGA) p_A(\ln PGA) d(\ln PGA) \quad (7.7)$$

## 7.4 Casos em Estudo

### 7.4.1 Descrição das Estruturas Estudadas

A fim de avaliar o aumento na confiabilidade do sistema estrutural devido à incorporação dos dissipadores, analisaram-se duas estruturas tipo pórtico plano, localizadas em zona sísmica e, reportadas na literatura técnica. As propriedades geométricas e mecânicas relevantes são indicadas a seguir.

*Exemplo 1.* Este exemplo (denominado a seguir, estrutura número 1) consiste de um dos pórticos, com três vãos e dez andares de uma estrutura em aço, reportada por Bertero et al (1978). Dita estrutura foi projetada para uma aceleração máxima do solo de 0.5g segundo o código UBC [Uniform Building Code, 1997] para a cidade de Califórnia, USA. A massa total por andar é de 47t, com um amortecimento próprio de 1% do crítico e, período fundamental, para vibrações de pequena amplitude, de  $T_1 = 1.67s$ . A tensão de escoamento do aço foi considerada igual a  $f_y = 2.48 \times 10^8$  Pa, com módulo de Young de  $E = 2 \times 10^{11}$  Pa. O pórtico e as dimensões de seus membros apresentam-se na (Figura 7.7).

*Exemplo 2.* O segundo exemplo (denominado a seguir, estrutura número 2) corresponde a um dos pórticos, com três vãos e seis andares, de uma estrutura tridimensional de concreto armado projetada para uma aceleração máxima do solo de 0.17g segundo o código INPRES-CIRSOC 103 ou ACI (neste caso resultam em projetos similares), para a cidade de Tucumán, Argentina. A massa total por andar é de 100t, com um amortecimento próprio de 5% do crítico e, período fundamental de  $T_1 = 1s$ . O módulo de Young do concreto considerou-se igual a  $E = 2.48 \times 10^{10}$  Pa. Nas relações constitutivas não lineares as resistências do aço e concreto consideraram-se  $f_y = 4.13 \times 10^8$  Pa e,  $f_c = 2.76 \times 10^7$  Pa, respectivamente. A Figura 7.8 mostra as características geométricas da estrutura. A localização dos amortecedores em ambas estruturas apresentam-se na Figura 7.9. A distribuição da capacidade dos amortecedores ao longo da altura indicam-se na Tabela 7.2.

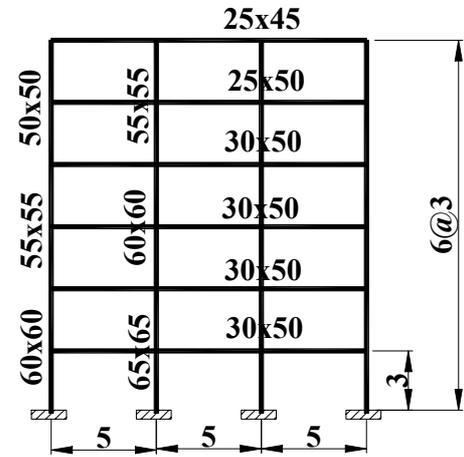
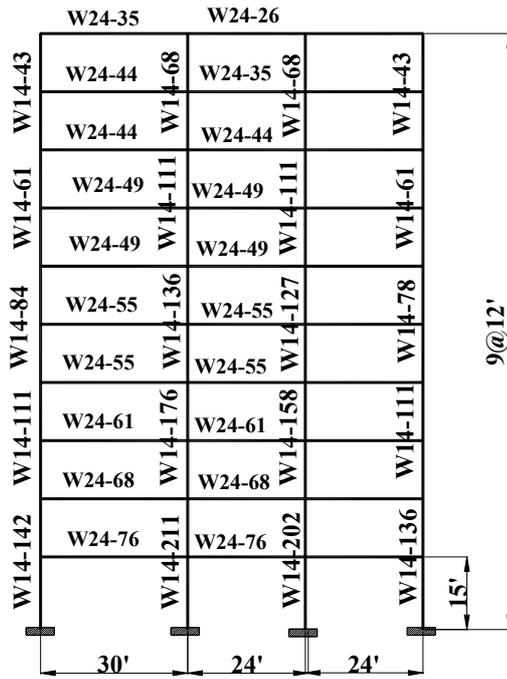


Figura 7.7. Estrutura 1 de Aço. (Califórnia).

Figura 7.8. Estrutura 2 de Concreto. (Tucumán).

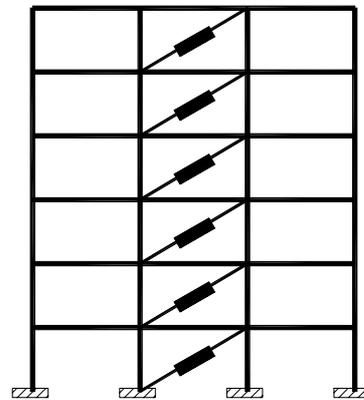
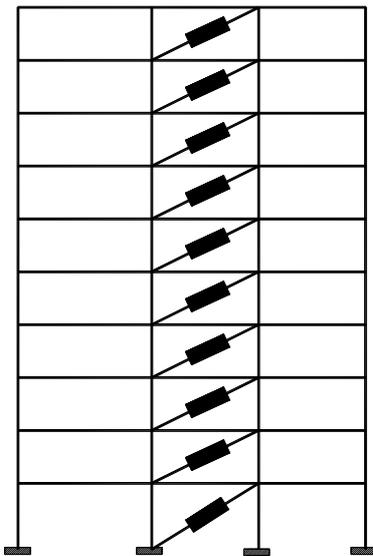


Figura 7.9. Localização dos amortecedores. Estrutura 1 (esquerda), Estrutura 2 (direita).

Tabela 7.2. Distribuição da capacidade dos amortecedores.

| Andar | Distribuição da Capacidade dos amortecedores em $\times 10^5$ [N] |                             |
|-------|---|-----------------------------|
|       | Estrutura 1   | Estrutura 2                 |
| 1     | 2.0   | 4.08                        |
| 2     | 1.9   | 3.96                        |
| 3     | 1.85  | 3.61                        |
| 4     | 1.75  | 3.01                        |
| 5     | 1.62  | 2.18                        |
| 6     | 1.44  | 1.16                        |
| 7     | 1.23  | -                           |
| 8     | 0.97  | -                           |
| 9     | 0.674   | -                           |
| 10    | 0.35  | -                           |
| Total | 13.8<br>(30% do peso total )                                      | 18.0<br>(30% do peso total) |

#### 7.4.2 Análise de Confiabilidade e discussão dos resultados

A Figura 7.1010 mostra as formas das equações (7. 5) e (7. 6) para ambos exemplos, com e sem amortecedores, para ductilidade 6. Similar informação para ductilidade 3, isto é, comportamento estrutural frágil, apresenta-se na Figura 7.11. A Tabela 3 mostra a probabilidades de colapso estimadas mediante a equação (7. 7) para ambas estruturas com e sem sistema de dissipação de energia externa. A análise foi conduzida par um comportamento dúctil ou normal (ductilidade 6) e para um comportamento frágil (ductilidade 3).

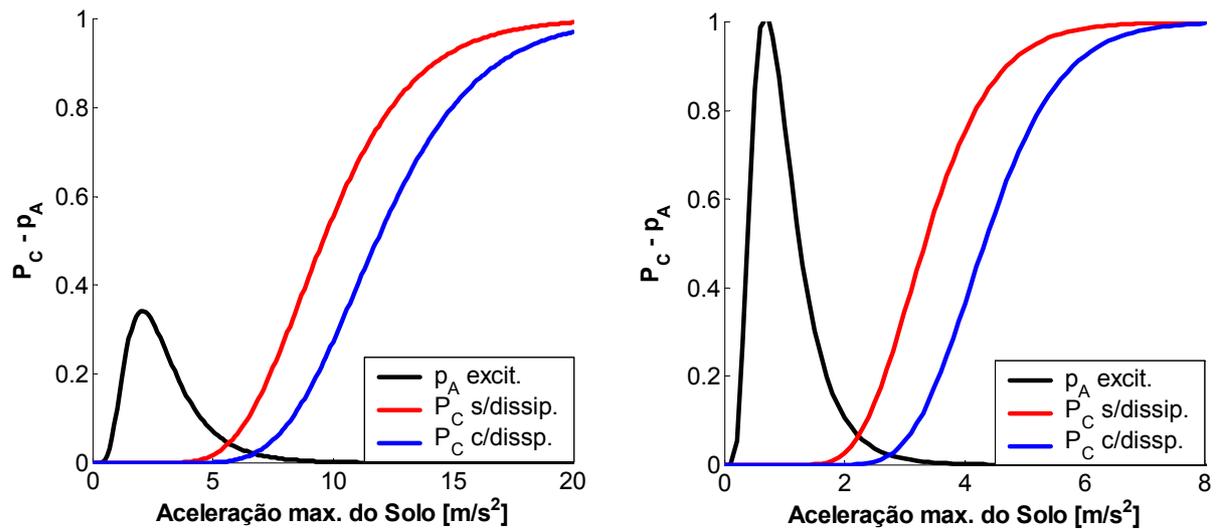


Figura 7.10. Curva de fragilidade com e sem sistema de dissipação,  $P_C$ , e função de densidade de probabilidade da aceleração máx. do solo,  $p_A$ . Estrutura 1 (esquerda), Estrutura 2 (direita). Comportamento dúctil, ductilidade 6.

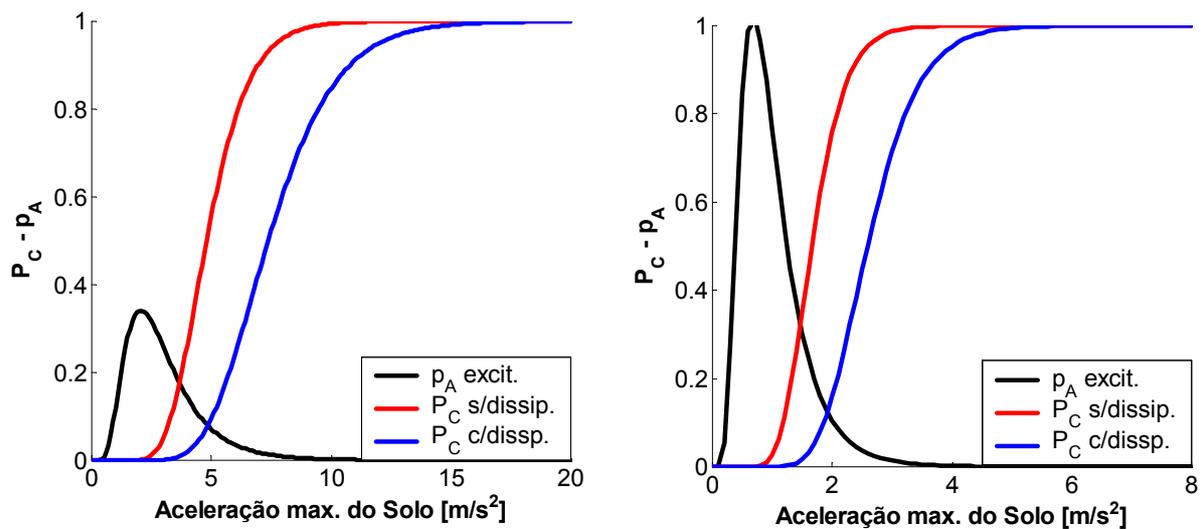


Figura 7.11. Curva de fragilidade com e sem sistema de dissipação,  $P_C$ , e função de densidade de probabilidade da aceleração máx. do solo,  $p_A$ . Estrutura 1 (esquerda), Estrutura 2 (direita). Comportamento frágil, ductilidade 3.

| Estrutura    | Probabilidade de Colapso [%] |                 |         |                          |                 |         |
|--------------|------------------------------|-----------------|---------|--------------------------|-----------------|---------|
|              | Ductilidade = 6 (Dúctil)     |                 |         | Ductilidade = 3 (Frágil) |                 |         |
|              | sem Amortecedor              | com Amortecedor | Relação | sem Amortecedor          | com Amortecedor | Relação |
| 1 (Aço)      | 1.4                          | 0.4             | 3.5     | 15.2                     | 3.8             | 4       |
| 2 (Concreto) | 1                            | 0.2             | 5       | 13.4                     | 2.7             | 5       |

Tabela 7.3. Probabilidade de colapso das estruturas exemplo, com e sem sistema de dissipação de energia externo.

Em ambos casos, o sistema de dissipação de energia foi altamente efetivo, conduzindo a uma redução na probabilidade de colapso entre 70 e 80%. O efeito é mais pronunciado para o comportamento frágil (ductilidade 3), sugerindo que o uso de amortecedores externos pode ser uma alternativa factível para aumentar a confiabilidade de estruturas com reduzida capacidade de dissipar energia, onde a probabilidade de colapso pode ser reduzida em 5 vezes.

É importante salientar que a distribuição do dano ao longo da altura, isto é, o pavimento onde o dano começa ou onde se concentra a maior parte dele, varia significativamente com o tipo de terremoto. Isto implica que uma distribuição ótima da capacidade dos amortecedores na altura da estrutura seria válida só para um tipo de sismo determinado e, portanto não relevante no desenvolvimento de um sistema de dissipação de energia robusto.

### 7.5 Análise de uma Estrutura Real Colapsada

Finalmente, visando ilustrar a eficácia do sistema de dissipação de energia, considerou-se uma estrutura real colapsada durante o evento sísmico do dia 28 de março de 1970 na cidade de Bursa, a 130 km de Gediz, Turquia, onde foi localizado o epicentro. O evento teve uma magnitude estimada de 7.1 na escala de Richter, provocando um milhar de mortes e inumeráveis danos nas construções civis [Tezcan et al, 1973]. A estrutura era tipo pórtico de concreto armado pertencente a uma fábrica de carros e, de acordo com Tezcan et al (1973) colapsou para uma aceleração máxima do solo na direção transversal à estrutura muito baixa ( $ZPGA = 0.05g$ ) devido à inusual amplificação da demanda produzida pela coincidência do período predominante do solo com o período natural da estrutura. A Tabela 7.4 resume as principais propriedades estruturais. Adicionais detalhes da estrutura junto a uma análise baseado no código sísmico de

Turquia podem-se encontrar em [Tezcan et al, 1973]. A Figura 7.12 apresenta um esquema geral da estrutura e uma foto de uma das colunas da estrutura colapsada.

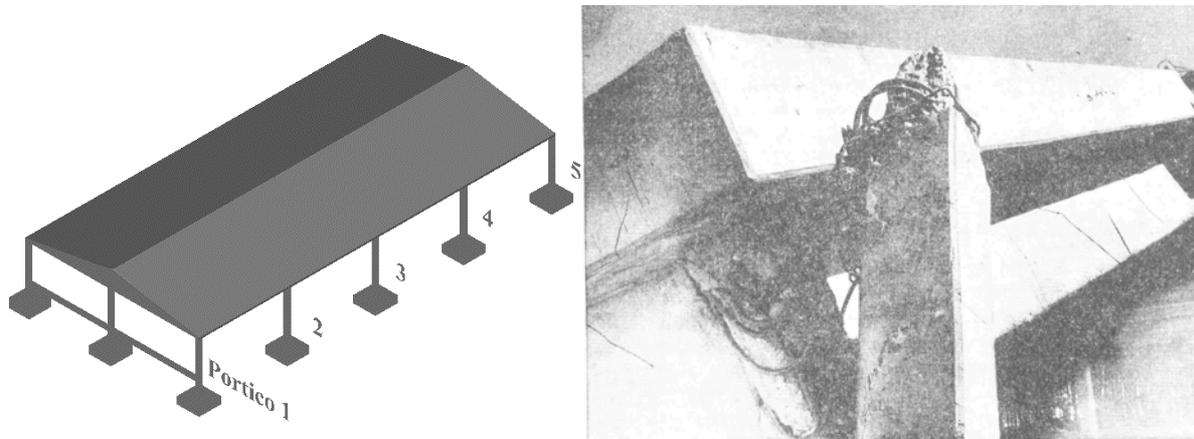


Figura 7.12. Esquema da estrutura (esquerda), Colapso parcial (direita). [Tezcan et al, 1973].

Tabela 7.4. Propriedades estruturais da estrutura colapsada

| Pórtico | Dimensões das Colunas [cm] |          | Cargas nas Colunas [t] |          |
|---------|----------------------------|----------|------------------------|----------|
|         | externas                   | internas | externas               | internas |
| 1       | 40/40                      | 40/40    | 14.16                  | 38.13    |
| 2, 4    | 40/40                      | 50/50    | 44.46                  | 121.7    |
| 3       | 40/40                      | 50/50    | 35.43                  | 94.9     |
| 5       | 30/40                      | 30/50    | 14.3                   | 37.92    |

Viga inferior transversal 25/60, unicamente no pórtico 1  
 Peso total calculado  $W = 1032$  t  
 Período fundamental  $T_1 = 1.25$  s  
 Vão transversal entre colunas e longitudinal entre pórticos 12 m  
 Altura 5.40 m

Com um modelo do pórtico número 1 (Figura 7.12), mediante uma análise não linear estática incremental, obtiveram-se resultados muito próximos aos indicados na literatura (deslocamento de colapso do modelo igual a 5.6 cm vs. 5.4 cm segundo Tezcan et al, 1973), permitindo, assim, verificar a validade do modelo estrutural.

A fim de melhorar o comportamento sismo-resistente da estrutura, eliminou-se a viga transversal inferior, que une as três colunas, existente unicamente no pórtico número 1. Isto fez aumentar a esbeltez das colunas do pórtico 1, levando-o a ter uma deformação última similar aos demais pórticos. Como a estrutura tem cinco pórticos distribuídos em forma simétrica com

características de deformação transversal praticamente idênticas e, como o teto pode ser considerado como um diafragma rígido, adotou-se para análise um único pórtico equivalente que represente o comportamento do conjunto (Figura 7.13). Para isto, a partir dos dados de Tezcan et al (1973) determinaram-se as características geométricas do pórtico equivalente e, com uma análise de “pushover”, similar à realizada nas estruturas anteriores, determinou-se o deslocamento de colapso.

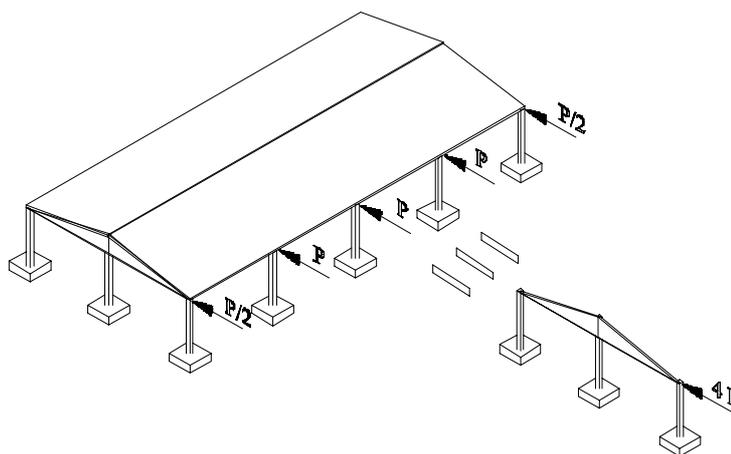


Figura 7.13. Pórtico equivalente para a análise.

Devido à inexistência de registros de acelerações a que foi submetida a estrutura, gerou-se um sinal com as características espectrais esperadas no local, mediante um procedimento descrito em Bruna e Riera (1988). Por simulação determinou-se a aceleração máxima do solo que conduziria ao colapso da estrutura, igual a aproximadamente  $1.5 \text{ m/s}^2$ . Posteriormente, projetaram-se quatro dissipadores metálicos com capacidades de 500kN (20% do peso da estrutura) e deslocamento de escoamento de 8 mm dispostos aos pares nos pórticos números 1 e 5. A Figura 7.14 mostra a instalação no pórtico número 1. As diagonais de suporte foram projetadas como tubos de aço com seção quadrada de 38 cm de lado e 2 cm de espessura, preenchidas com concreto. Verificou-se que com a adição do sistema de dissipação de energia, a aceleração máxima do solo que produziria o colapso seria de  $2.3 \text{ m/s}^2$ . Portanto, é evidente que com as provisões mencionadas, a estrutura não teria colapsado, sendo a probabilidade de colapso reduzida numa ordem de magnitude.

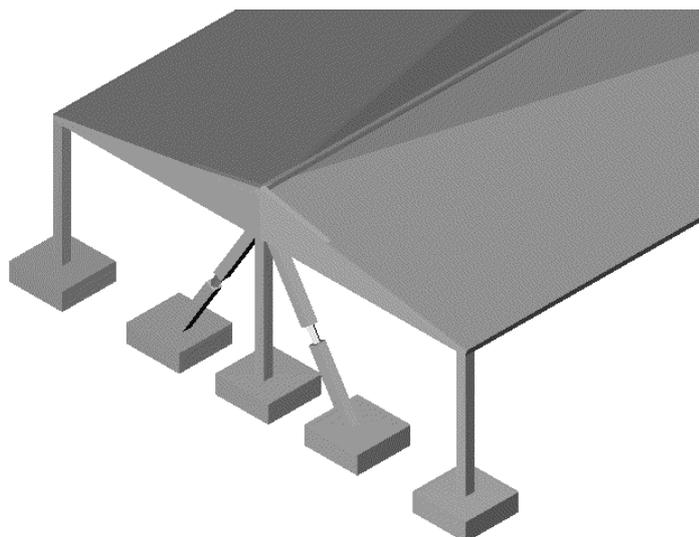


Figura 7.14. Disposição do sistema de amortecimento suplementar no pórtico número 1.

## Capítulo 8

### Conclusões e Considerações Finais

Dentre os objetivos mais importantes indicados no presente trabalho, pode-se mencionar: (i) o projeto e construção de um amortecedor baseado nas propriedades mecânicas do chumbo, para ser utilizado em estruturas submetidas a ações dinâmicas; (ii) foram desenvolvidos novos procedimentos e ferramentas computacionais de análise e projeto de sistemas estruturais que incorporam amortecimento suplementar e (iii) com o propósito de determinar a eficiência dos sistemas de dissipação de energia estudados foi proposto um critério robusto baseado na avaliação da propensão ao colapso que tem uma estrutura sob excitação dinâmica.

Com base no mencionado anteriormente pode-se salientar as seguintes conclusões:

- Em relação ao amortecedor desenvolvido é importante distinguir a notável estabilidade nos ciclos de histerese sem sinal de degradação na rigidez ou resistência e a grande capacidade de dissipar energia. A alta resistência à fadiga, desprezível dependência da velocidade de deformação e facilidade de manutenção, confirma seu elevado grau de confiabilidade na aplicação tanto em estruturas novas como reparadas dentro de uma ampla faixa de problemas de vibração. Além desses aspectos, este amortecedor possui uma grande versatilidade com respeito aos parâmetros físicos que caracterizam seu comportamento mecânico definidos através de simples relações geométricas.
- Mediante os diferentes métodos de análise estudados podem-se, numa etapa de pré-projeto, caracterizar os níveis de desempenho atingíveis pela estrutura ao incorporar um conjunto de amortecedores metálicos. Por outro lado, desenvolveram-se ferramentas para determinar a resposta estrutural de forma precisa e definir parâmetros de projeto ótimos do sistema de dissipação de energia.
- A partir do estudo da avaliação da eficiência, infere-se que com estes tipos de amortecedores pode-se incrementar substancialmente a capacidade de dissipar energia de uma estrutura. Conseguem-se assim, reduzir os danos nos membros estruturais e aumentar os níveis de segurança da estrutura quando submetida a ações dinâmicas. Enfatiza-se que, tanto para construções de aço como de concreto, obtiveram-se reduções na probabilidade de colapso da ordem de 80%. Finalmente, conclui-se que estes sistemas são altamente eficientes para serem usados em estruturas submetidas a ações dinâmicas.

Com o propósito de orientar a escolha de tópicos de investigação adicional, são sugeridos os seguintes pontos:

- Integrar aspectos técnicos do sistema de dissipação de energia externa, com fatores econômicos mediante funções de custo, a fim de alcançar um ponto ótimo que contemple um nível de risco aceitável durante a vida útil da estrutura.
- Realizar uma análise de segmento de mercado para uma potencial comercialização e produção em série deste tipo de amortecedores, levando em conta um estudo dos processos de fabricação e materiais a serem utilizados.
- Estudar a possibilidade de estender os procedimentos de projeto de sistemas de dissipação de energia desenvolvidos para contemplarem estruturas submetidas a cargas de vento, como as torres de transmissão de energia elétrica e comunicações.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Aguirre, M. and Sánchez, A.R., 1992. **“Structural Seismic Damper”**, J. Structural Engrg, ASCE, 118, 5, 1158-1171.

Aiken, I.A. and Kelly, J.M., 1990, **“Earthquake simulator testing and analytical studies of two energy-absorbing systems for multistory building”**, Report No UCB/EERC-90/03, Earthquake Engineering Reserch Center, University of California at Berkeley.

Aiken I D., Kelly J. and Pall A.S., 1988, **“Seismic Response of a Nine-Story Steel Frame with Friction Damped Cross-Bracing”**, Report No UCB/EERC-88/17, University of California, Berkeley, CA.

Alder, J.F. and Philips, K.A., 1954, **“The Effect of strain-rate and Temperature on the Resistence of Aluminium, Copper and Steel to Compression”**,J. Inst. Metals, 83, 80.

Bergman, D.M. and Goel, S.C., 1987, **“Evaluation of Cyclic Testing of Steel-Plate Device for Added Damping and Stiffness”**, Report No. UMCE 87-10, The Univ. of Michigan, Ann Arbor, MI.

Bertero V., Mahin S. and Herrera R., 1978, **“Aseismic Design implications of Near-Fault San Fernando earthquake Records”**, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6, 31-42.

Bhatti, M.A., Pister, K.S. and Polek,E., 1978, **“Optimal Design of an Erthquake Isolation System”**, Report No. UBC/EERC-78/22. Univ. of California, Berkeley CA.

Bruna R. and Riera J.D., 1988, **“Towards the Simultaneous Generation of Three Components of the Seismic Acceleration on Rock Surface”**, Nuclear Engng. and Design, 110, 153-163.

Buckle, I. G., Mayes, R. L., 1990, **“Seismic Isolation: History, Application, and Performance--a World View”**, Earthquake Spectra, vol. 6, no. 2, May , 161-201.

Campbell, J. D. and Duby, J., 1957, **“Delayed Yield and other Dynamic Loading Phenomena in Medium Carbon Steel”**, Proc. Conf. on the Properties of Materials at High Rates of Strain, Inst. Mech. Engrs. P.214.

Campbell, J. D. and Duby, J., 1956, **“The Yield Behaviour of Mild Steel in Ddynamic Compression”**, Proc. R. Soc., Ser. A236,24.

Caspe, M. S., 1970, **“Earthquake Isolation of Multi-Storey Concrete Structures”**, Journal of the American Concrete Institute, 923-933.

Caughey, T. K., 1963, **”Equivalent Linearization Techniques”**, J. of Acoustical Soc. America, 35, 1706-1711.

Chang K.C., Soong T.T., Oh S.T. and Lai M.L., 1992, **“Effect of Ambient Temperature on a Viscoelastically Damped Structure”**, J. of Structural Engng., 118, 7, 1955-1973.

Chang K.C., Soong T.T., Oh S.T. and Lai M.L., 1992, **“Seismic Behaviour of Steel Frame with Added Viscoelastic Dampers”**, J. of Structural Engng., 127, 10, 1418-1426.

Chopra Anil, K. and Lopez Oscar, A., 1979, **“Evaluation of Simulated Ground Motions for Predicting Elastic Response of Long Period Structures and Inelastic Response of Structures”**, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 7, 4, 383-402.

Constantinou, M.C., and Tadjbakhsh, I.G., 1984, **”Response of a Sliding Structure to Filtered Random Excitations”**, J. of Struct. Mechanics, 12, 401-418.

Cornell C.A., 1968, **“Engineering Seismic Risk Analysis”**, Bull. Seismic Soc. America., 58, 1583-1606.

Curadelli, O. and Riera J. D., 2002, **“Procedimentos de Análise de Estruturas providas de Dissipadores Metálicos”**, Jornadas Sul-Americanas de engenharia Estrutural, Brasilia-DF, Brasil.

Dargush, G.F. and Soong, T.T., 1995, **“Behavior of Metallic Plate Damper in Seismic Passive Energy Dissipation Systems”**, Earthquake Spectra, 11, 4, 545-568.

Dorka U.E. and Pradlwarter H.J., 1993, **“Reliability based Retrofitting of RC-Frames with Hysteretic Devices”**, Structural Safety and Reliability, ICOSSAR, 1993, 3, 1545-1552. Schüeller G.I., Shinozuka M. and Yao J.T.P. (Editors).

Esteva L., Díaz-López O. and García-Pérez J., 2001, **“Reliability Functions for Earthquake Resistant Design”**, Reliability Engng. & System Safety, 73, 239-262.

Esteva L. and Ruiz S., 1989, **“Seismic Failure Rates of Multistory Frames”**, J. of Structural Engng., 115, 2, 268-284.

FEMA. NEHRP, 1996, **“ Guidelines for Seismic Rehabilitation of Buildings”**. FEMA 273, Federal Emergency Management Agency.

Filiatrault A. and Cherry S., 1987, **“Performance Evaluation of Friction Damped Braced Frames Under Simulated Earthquake Loads”**, Earthquake Spectra, 3, 1, 57-78.

Graesser, E.J. and Cozzarelli, F.A., 1991. **“A Multidimensional Hysteretic Model for Plastically Deforming Metals in Energy Absorbing Devices”**, Technical Report NCEER-91-0006, National Center for Earthquake Engrg Research, Buffalo. N.Y.

Green, N. B., 1935, **“Flexible First Story Construction for Earthquake Resistance”**, Transactions ASCE., 100, paper nro 1906, 644-674.

Hanson, R.D., 1993, **“Supplemental damping for improved seismic performance”**, Earthquake Spectra, Vol 9, No 3, pp 319-333.

Hill, R., 1950, **“The Mathematical Theory of Plasticity”**, Oxford Univ. Press. Oxford, U.K.

Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L., 1978, **“Unconditionally Stable Algorithms for Quasi-Static Elasto-Viscoplastic Finite Element Analysis”**, Computers and Structures 8, 169-173.

Inaudi, J.A. and de la Llera, J.C., 1992, **“Dynamic Analysis of Nonlinear Structures Using State-Space Formulation and Partiones Integration Schems”**, Report No UCB/EERC 92-18, Univ. of California, Berkeley, CA.

Inouye, K., 1955, **“Studies on the Hot-working Strength of Steels”**, (in japanese), Tetsu-to-Hagané, 41, 593.

INPRES-CIRSOC 103, **“Normas Argentinas para Construcciones Sismoresistentes”**, 1970.

Iwan, W.D., 1980, **“Estimating Inelastic Response Spectra from Elastic Spectra”**, J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 8, 4, 375-388.

Jacobsen, L. S., 1938, **“Effects of a Flexible Fierst Atory in a Building Located on Vibrating Ground”**, Timoshenko, 60<sup>th</sup> aniversario Vol. Macmillan Co., N.Y., pp 93/103.

Jara, J.M., Gómez-Soberón, C., Vargas, E. and Gonzalez, R., 1993, **“Seismic Performance of Buildings with Energy Dissipating Systems”**, Proc. ATC 17-1 on Seismic Isolation, Energy Dissipation, and Active Control, 2, 663-673.

Johnson, C.D. and Kieholz, D.A., 1982, **“ Finite Element Prediction od Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers”**, AIAA Journal, Vol. 20, 9, 1284-1290.

Kanaan, A.E. and Powel, G.H., 1973, **“DRAIN-2D A General Porpouse Computer Program for Dynamic Analysis of Inelastic Plane Structures”**, Report No UCB/EERC 73-06, Univ. of California, Berkeley, CA.

Kanai, K., 1961, **“An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions”**, Bull. Erthquake Reserch Inst., of Tokyo, Japan, 39.

- Kármán, T., and Duwez P., 1950. *J. Applied Physics*, 21, 978.
- Kelly, J. M., 1993, **“Earthquake-Resistant Design with Rubber”**, Springer-Verlag, London and New York,.
- Kelly, J. M., 1986, **“Aseismic Base Isolation: Review and Bibliography”**, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5, 4, 202-216.
- Kelly, J.M., Skinner, R.I. and Heine, A., J., 1972, **“Mechanisms of Energy Absorption in Special Devices for Use in Earthquake Resistant Structures”**, *Bull. N.Z.Soc. Earthquake Engrg.*, 5, 3, 63-88.
- Koiter, W.T., 1960, **“General Theorems for Elastic-plastic Solids”**, in *Progress in Solid Mechanics*, 6, eds. I.N. Sneddon and R. Hill, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 167-221.
- Krawinkler H. and Seneviratna G.D., 1998, **“Pros and Cons of a Pushover Analysis of Seismic Performance Evaluation”**, *Engng. Structures*, 20, 4-6, 452-464.
- Krempl, E., 1987, **“Models of Viscoplasticity: Some Comments on Equilibrium (Back) Stress and Drag Stress”**, *Acta Mechanica*, 69, 25-42.
- Lee, G. C., 1984, **“Pilot Study on the Dynamic Behavior of Steel Gable Frames”**, WRC Progress Report, Sep., 21-30.
- Lee Y., Anderson J.G. and Zeng Y., 2000, **“Evaluation of empirical Ground Motion Relations in Southern California”**, *Bull. Seism. Soc. of Am.*, 90, 6B.
- Lubahn, J. D. and Felgar R. P., 1961, **“Plasticity and Creep of Metals”**, Wiley, N.Y.
- Lubliner, J., 1990, **“Plasticity theory”**, Macmillan Publishing Company.
- Lubliner, J., 1984, **“A Maximum Dissipation Principle in Generalized Plasticity”**, *Acta Mechanica* 52, 225-237.
- Lubliner, J., 1972, **“On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics”**, *Int. Journal of Non-Linear Mechanics*, 7, 237-254.
- Ludwik, P., 1909, **“Elemente der technologischen Mechanik”**, Springer-Verlag, Berlin.
- Luenberger, D.G., 1984, **“Linear and NonLinear Programming”**, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.
- Lutes Loren, D. and Sarkami Shahram, 1997, **“Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations”**, Prentice Hall, New Jersey.

Mahmoodi, P., Roberson, L.E., Yontar, M., Moy, C., and Feld, I., 1987, **“Performance of viscoelastic dampers in World Trade Center Towers”**, Dynamic of Structures, Proceedings of the Sessions at structural Congress '87, Orlando, Florida.

Maier, G., 1970, **“A Matrix Structural Theory of Piecewise Linear Elastoplasticity with Interacting Yield Planes”**, *Mecanica* 54-66.

Makris, M., 1991, **“Theoretical and Experimental Investigation of Viscous Dampers in Applications of Seismic and Vibration Isolation”**, PhD. Dissertation, Graduate School of State University of New York at Bufalo.

Malvern, L. E., 1984, **“Experimental and Theoretical Approaches to Characterization of Material Behavior at High strain Rates of Deformation”**, presented at the 3<sup>rd</sup> Conference on Mechanical Properties of Materials at High Rates of Strain held at Oxford, U.K.

Malvern, L. E., 1965, **“Experimental Studies of Strain Rate Effects and Plastic Wave Propagation in Annealed Aluminium”**, Proc. Amer. Soc.Mech. Engrs., p. 81, Coll. Behavior of Materials under Dynamic Loading, Chicago.

Martel, R. R., 1929, **“The Effects of Earthquake on Buildings whit a Flexible first Story”**, Bulletin of Sismological Society of America, 19, 3, 167-178.

Martinez-Romero E., 1993, **“Experiences on the Use of Supplemental Energy Dissipators on Building Structures”**, Eathquake Spectra, 9, 3, 581-625.

Monti, M.D. and Robinson, W.H., 1996, **”A Lead Shear Damper Suitable for Reducing the Motion Induced by Wind and Earthquake”**, Proc.of the Eleventh WCEE, Acapulco, Mexico.

Murotsu Y. and Okada H. and Shao S., 1993, **“Reliability-based Design of Transmission Line Structures under Extreme Wind Loads”**, Structural Safety and Reliability, ICOSSAR, 1993, 3, 1675-1681, Schüeller G.I., Shinozuka M. and Yao J.T.P. (Editors).

Mwafy A.M. and Elnashai A.S., 2001, **“Static Pushover Versus Dynamic Collapse Analisis of RC Buildings”**, Engng. Structures, 23, 407-424.

Nims D.K., Richter P.J. and Bachman R.E., 1993, **“The Use of Energy Dissipating Restraint for Seismic Hazard Mitigation”**, Eathquake Spectra, 9, 3, 467-489.

Ozdemir, H., 1976, **“Nonlinear Trasient Dyamic Analysis of Yieldig Structures”**, PhD. Dissertation , Univ. of California, Berkeley, CA.

Pall A.S. and Marsh C., 1982, **“Response of Friction Damped Braced Frames”**, Jo. of structural Division, ASCE, 108(ST6), 1313-1323.

Pall, A., Venzina, S., Proulx, P., and Pall, R., 1993, **“Friction dampers for seismic control of Canadian Space Agency Headquarters”**, Earthquake Spectra, Vol 9, No 3, pp 547-557.

Park Y. and Ang A., 1985, **“Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Buildings”**, J. of Structural Engng., 111, 4, 740-757.

Perry, C.L., Fierro, E.A., Sedarat, H. and Scholl, R.E., 1993, **“Seismic Upgrade in San Francisco Using Energy Dissipation Devices”**, Earthquake Spectra, 9,3, 559-579.

Perzyna, P., 1971, **“Thermodynamic Theory of Viscoplasticity”**, in Advances in Applied Mechanics, Academic Press, N. Y., 11.

Perzyna, P., 1966, **“Fundamental Problems in Viscoplasticity”**, Advanced in Applied Mechanics”, 24, 5, 299-312.

Pinsky, P., Ortiz M., and Pister K.S., 1983, **“Numerical Integration of Rate Constitutive Equations in Finite Deformation Analysis”**, Computer Methos in Applied Mechanics and Engineering 40, 137-158.

Pradlwarter H. J., 2000, **“Non-Linear Stochastic Response Distributions by Local Statistical Linearization”**, Intern. Journal of Non-Linear Mechanics 36, 1135-1151.

Ramberg, W., and Osgood, W. R., 1943, **“Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters”**, NAÇA Technical Note Nro 902, July.

Roberts J. B., 1981a, **“Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation: Part I, Markov Methods”**, Shock and Vibration Digest, 13, 17-28.

Roberts J. B., 1981b, **“Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation: Part II, Equivalent Linearization and Other Methods”**, Shock and Vibration Digest, 13, 15-29.

Robinson, W. H., 1982, **“Lead-Rubber Hysteretic Bearing Suitable for Protection Structures During Earthquakes”**, J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10, 593-604.

Robinson, W. H. and Greenbank, L.R., 1976, **“An Extrusion Energy Absorber Suitable for the Protection of Structures During an Earthquake”**, J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, 251-259.

Rodriguez Blandón N. and Battista R.C., 2001, **“Elastic-Plastic Devices for Dynamic Control of Frame-Structures under Seismic Action”**, Anals of XII CILAMCE, Campinas, S.P., Brasil.

Ryuiti, O., 1941 **“Experiment on Earthquake Construction using Roller Type Damper”**, Journal of Architectural Institute of Japan, 32.

Siljak, D. D., 1969, **“Nonlinear Systems, the Parameter Analysis and Design”**, John Wiley & Sons, New York.

Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., 1998, **“Computational Elasticity”**, Springer-Verlag, N.Y.

Simo, J.C. and Ortiz, M., 1985, **”A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplasticity Based on the used of Hiperelastic Constitutive Equations”**, Computer Methos in Applied Mechanics and Engineering 49, 221-245.

Skinner, R.J., Kelly, J.M., and Heine, A., J., 1975, **“Hysteresis Dampers for Earthquake-Resistant Structures”**, Earthquake Engrg. and Structural Dynamics, 3, 287-296.

Skinner, R. J., Robinson, W. H., McVerry, G. H., 1993, **“An Introduction to Seismic Isolation”**, John Wiley & Sons, Chichester, U.K., and New York,.

Skinner, R.J., Tyler, R.G., Heine, A., J. and Robinson, W.H., 1980, **“Hysteresis Dampers for Protection Structures from Earthquake”**, Bull. N.Z.Soc. Earthquqke Engrg., 13, 1, 22-36.

Slater, R. A., Aku, S.Y.and Johnson, W., 1971, **“Strain Rate and Temperature Effects During the Fast Upsetting of Short Circular Cylinders of 0.55% Plain Carbon Steel at Elevates Temperatures”**, Annals of C.I.R.P., XXIV, 513.

Spanos P-T. D., 1981, **“Stochastic Linearization in Structural Dynamics”**, Appl. Mech. Revs., ASME, 34, 1-8.

Tajimi H., 1960, **“A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake”**, Proc. 2<sup>nd</sup>. World Conf. Earthquake Engng., vol. II, Tokyo and Kyoto, Japan, 781-798.

Takewaki I., 1997, **”Optimal amper Placement for Minimun Transfer Functions”**, J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 26, 1113-1124.

Tezcan, S.S. and Ipek, Muzaffer, 1973, **“Long Distance Efects of the 28 march 1970 Gediz Turkey Earthquake”**, Earthquake Engrg. and Structural Dynamics, 1, 203-215.

Tsai, C.S. and Tsai, K.C., 1995, “**TPEA Device as Seismic Damper For High-Rise Building**”, J. Engrg. Mech., ASCE, 121, 10, 1075-1081.

Tsai, K.C., Chen, H.Q., Hon, C.P. and Su, Y.F., 1993, “**Design of Steel Triangular Plate Energy Absorbers for Seismic-Resistant Construction**”, Earthquake Spectra, 9, 3, 505-528.

Tso W.K. and Moghadam a.S., 1998, ”**Pushover Procedure for Seismic Analisis of Buildings**”. Progress in Structural Engng and Materials, 1, 3, 337-344.

U.B.C. “**Uniform Building Code**”. Vol. 1, 2 and 3. 1997.

Voce, E., 1948, “**The Relationship between Stress and Strain for Homogeneous Deformation**”, J.Inst. Metals, 74, 537.

Wen Y. K., 1980, “**Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation**”, J. of Applied Mechanics ASME, 47, 150-154.

Wen Y. K., 1976, “**Method for Random Vibration of Hysteretic Systems**”, J. of Engng. Mechanics Div., 102, EM2, 249-263.

WGCEP (Working Group on California Earthquake Probabilities), 1995, “**Seismic Hazard in Southern California: probable eathquake 1994 to 2024**”. Bull.Seismic Soc. America, 85,379-439.

Wittaker, A., Bertero, V., Alonso, J., and Thompson, C., 1989, “**Earthquake Simulator Testing of Steel Plate Added Damping and Stiffness Elements**”, Report No UCB/EERC-89/02, Earthquake Engineering Reserch Center, University of California at Berkeley.CA.

Wittaker, A.S., Bertero, V.V., Thompson, C.L. and Alonso, L.J., 1991, “**Seismic Testing of Steel Plate Energy Dissipation Devices**”, Earthquake Spectra, 7, 4, 563-604.

Xia, C. and Hanson, R.D., 1992,”**Influence of ADAS Element Parameters on Building Seismic Response**”, J. Structural Engrg, ASCE, 118, 7, 1903-1918.

Zienkiewicz O.C. and Corneau I.C., 1974, ”**Viscoplasticity – Plasticity and Creep in Elastic Solids – a Unified Numerical Solution Approach**”, Int. Jounal for Numerical Methodsin Engineering 8, 821-845.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1989,”**The Finit Element Method**”, McGraw-Hill, London, U.K.

## Apêndice A

O presente apêndice apresenta uma revisão da física da plasticidade a fim de definir a notação empregada e introduzir ao leitor em conceitos básicos necessários para a interpretação dos modelos de plasticidade clássica (modelo independente do tempo) e viscoplasticidade (modelo dependente do tempo). Logo, resume-se fundamentos das teorias da plasticidade e viscoplasticidade orientados para sua codificação, junto a aproximações empíricas focalizadas na descrição o comportamento histerético do dispositivo desenvolvido.

### A.1 Física da Plasticidade

O adjetivo “plástico” se utiliza para descrever materiais, tais como metais dúcteis ou argila que tem a propriedade de mudar de forma sob ação de cargas de suficiente intensidade, permanecendo deformados após remoção das mesmas. Geralmente, observa-se que as deformações plásticas, estão acompanhadas de muito pouca alteração de volume. Consequentemente, a deformação plástica é primariamente uma *distorção* e, portanto, a parcela das tensões internas produzidas pelas cargas externas, que gera a maior quantidade do trabalho é a componente *desviadora* do tensor de tensões. Por exemplo, um teste direto de plasticidade para um determinado material poderia ser produzido por um estado de deformação cortante puro sobre um espécimen, mediante a aplicação de forças que gerem esse estado, como acontece num ensaio de torção de um tubo de paredes delgadas. No entanto, um teste muito mais simples é o teste de tração.

#### A.1.1 Ensaio de Tração

Considere-se o comportamento de uma barra cilíndrica com comprimento  $L_o$  e seção transversal  $A_o$ , submetida a uma tração axial como se apresenta na Figura A.1. Admita-se que a carga  $P$  incrementa-se lentamente (velocidade de deformação menor que  $10^{-3}$  /seg.) para assegurar a validade da aproximação quasiestática. Na Figura A.2 se apresentam curvas típicas de tensão-deformação. Nestes diagramas a abcissa representa a *deformação nominal* e a ordenada a *tensão nominal* definidas como:

$$\varepsilon = \frac{L - L_o}{L_o} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A_o} \quad (\text{A.2})$$

onde:  $\varepsilon$ : deformação nominal.

$L$ : comprimento final do corpo de prova.

$L_0$ : comprimento inicial do corpo de prova.

$P$ : Carga de tração.

$A_0$ : seção transversal

$\sigma_n$ : tensão nominal

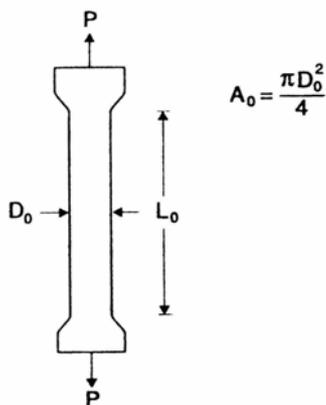


Figura A.1. Corpo de prova.

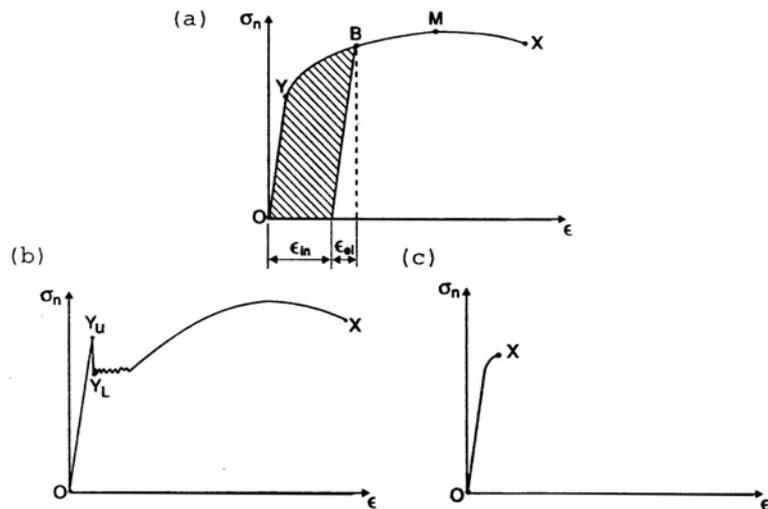


Figura A.2. Curvas tensão-deformação. a) Metal genérico,

b) Metal dúctil, c) Metal frágil.

A curva da Figura A.2a, é típica de metais. Para tensões menores que a tensão nominal de escoamento  $\sigma_y$ , a resposta do espécimen é totalmente elástica, com  $\sigma_n$  proporcional a  $\varepsilon$ . Neste nível de carregamento, o estado inicial  $O$  é totalmente recuperável ao remover a carga aplicada e não há dissipação de energia. No caso que a tensão inicial exceda a tensão de escoamento (o seja além do ponto  $Y$  sobre a curva) aparece uma deformação plástica irreversível. Considerando o estado  $B$  é útil dividir a deformação total em duas partes, a deformação *elástica*  $\varepsilon^e$  e a deformação *inelástica*  $\varepsilon^i$  como se indica no diagrama. Portanto:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^i \quad (\text{A.3})$$

onde: 
$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{A.4})$$

com:  $E$ : módulo elástico ou de Young.

$\varepsilon^i$ : deformação inelástica.

$\varepsilon^e$ : deformação elástica.

A densidade de energia total é medida pela área definida pela curva tensão-deformação desde  $O$  até  $B$ . Parte de essa energia é recuperável (energia elástica), no entanto, a parte de energia associada com a deformação  $\varepsilon^j$  identificada pela área sombreada é dissipada (energia plástica). Se o espécime é descarregado depois de alguma deformação plástica e logo recarregado, a porção do diagrama tensão-deformação correspondente a esta última fase é aproximadamente uma linha reta de inclinação  $E$ , igual à da reta de descarga, até a maior tensão previamente atingida (tensão na qual começou a descarga). Similares resultados obtêm-se com subsequentes descargas e recargas. A maior tensão atingida antes da descarga é a nova tensão de escoamento. Este processo se conhece como *endurecimento por deformação plástica* ou *trabalho a frio*. Neste regime de endurecimento por deformação, sucessivos incrementos de tensão produzem maiores incrementos de deformação plástica, até que se atinge o ponto  $M$  associado com a máxima carga que o espécime pode suportar. Este valor particular de tensão nominal que corresponde à carga axial máxima,  $P_{max}$ , denomina-se tensão última designada por,

$$\sigma_u = \frac{P_{max}}{A_o} \quad (\text{A. 5})$$

Além do ponto  $M$  os estados de equilíbrio tornam-se instáveis. O fenômeno de localização começa com uma região de estreitamento, apresentando um estado tridimensional de tensões até que no ponto  $X$  ocorre a falha. O aço doce e outras ligas metálicas comportam-se como a Figura A.2.b. Neste caso, a resposta é similar à discutida previamente, exceto na região além do primeiro ponto de escoamento  $Y_u$  onde se produz uma queda na tensão desde o ponto  $Y_u$  até  $Y_l$ , correspondendo com as *tensões de escoamento superior e inferior* respectivamente. Este fenômeno e o platô resultante são devidos à formação e propagação das bandas de Lüders. No caso de aço doce endurecido por deformação plástica não se observa este fenômeno. A Figura A.2c mostra o comportamento de um típico metal frágil tal como o ferro fundido. Obviamente, este material não é apto para usar-se como amortecedor metálico, devido à pequena dissipação de energia antes da fratura. As definições empregadas nas equações A.1 e A.2 são adequadas quando o comprimento e área do espécime não mudam significativamente durante o processo. Para altos níveis de deformação, são mais apropriadas a *deformação natural* “ $e$ ” e a *tensão verdadeira* “ $\sigma$ ”, definidas a seguir:

$$e = \ln \frac{L}{L_o} \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (\text{A.7})$$

sendo  $A$ , área verdadeira obtida a partir da condição de material incompressível,

$$A_o L_o = AL = cte \quad (A.8)$$

Redesenhando a Figura A.2a nestas novas coordenadas conduz à Figura A.3. Cabe aclarar que as tensões verdadeiras crescem com a deformação natural durante o caminho todo até a fratura.

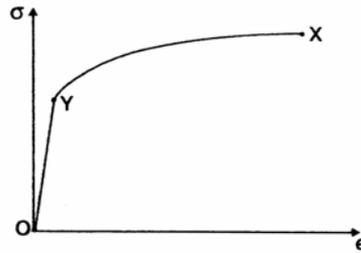


Figura A.3. Curva tensão-deformação para grandes deformações.

A deformação plástica para um valor dado de tensão é freqüentemente, algo diferente da deformação permanente observada quando o espécime é descarregado desta tensão, devido a que a deformação plástica determinada a partir da equação A.3 e equação A.4 mediante:

$$\varepsilon^i = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (A.9)$$

é resultado da diferença da deformação total com uma deformação idealmente elástica na descarga. Esta diferença se deve a efeitos tais como a dependência com a velocidade de deformação, ou anisotropia induzida (efeito Bauschinger).

### A.1.2 Efeito Bauschinger

Como foi mencionado anteriormente, um espécime de material dúctil que já foi submetido a uma deformação permanente (com uma tensão de tração maior que a tensão de escoamento) e logo descarregado, tem a tensão de escoamento em tração maior que um virgem. Se agora, o primeiro espécime é submetido a uma tensão de compressão, encontra-se que a tensão de escoamento em compressão é menor que a de um espécime virgem. Este fenômeno se conhece como efeito Bauschinger mostrado na Figura A.4. O efeito Bauschinger pode-se observar sempre que a direção da deformação é invertida, por exemplo, compressão seguida de tração, ou corte seguido de corte na outra direção. Mais geralmente, o termo efeito Bauschinger pode-se usar para descrever a diminuição da tensão de escoamento na recarga com o mesmo sentido à

descarga prévia ( $|-Y_2| < Y$ ), [Figura A.4]. Ainda observa-se também este fenômeno, se a recarga é no mesmo sentido à carga original [Lubahn e Felgar, (1961)]. [Figura A.5], ( $A < Y'$ ). Note-se o pequeno ciclo de histerese que aparece nas grandes deformações.

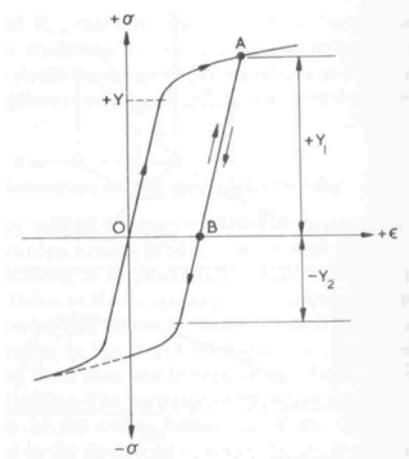


Figura A.4. Efeito Bauschinger.

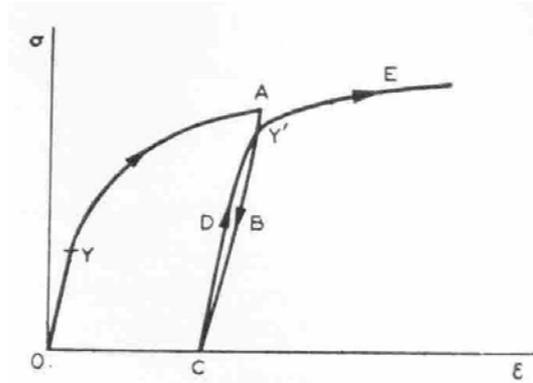


Figura A.5. Efeito Bauschinger generalizado.

Outros resultados da deformação plástica é a perda de isotropia. Seguido a um endurecimento numa direção dada, aparecem diferenças entre os valores da tensão de escoamento nesta mesma direção e na direção perpendicular. Uma das teorias que explica este fenômeno atribui-as a uma classe particular de tensões residuais influenciadas pelos bordos de grãos. Pode-se remover este efeito, como também as tensões residuais, mediante um tratamento térmico a baixa temperatura. Para maiores detalhes remete-se o leitor às referencias Lubahn e Felgar (1961).

## A.2 Plasticidade clássica independente do tempo (Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., 1998)

Seja  $\mathbf{B} \subset \mathbf{R}^{ndim}$  a configuração de referência do corpo de interesse, onde  $1 \leq n_{dim} \leq 3$  é a dimensão do espaço. Admite-se que  $\mathbf{B}$  é aberto e limitado com uma borda suave  $\partial\mathbf{B}$  e, fechado  $\mathbf{B}_c = \mathbf{B} \cup \partial\mathbf{B}$ .

Seja também  $[0, T] \subset \mathbf{R}_+$  o intervalo de tempo  $t$  de interesse.

Os tensores de segunda ordem simétricos são transformações lineares em  $\mathbf{S}$  definidos como:

$$\mathbf{S} = \{ \xi: \mathbf{R}^{ndim} \rightarrow \mathbf{R}^{ndim} \mid \xi \text{ é linear e, } \xi = \xi^T \} \quad (\text{A.10})$$

Este é um espaço vetorial com produto interno

$$\xi : \xi = \mathbf{tr} [\xi^T \xi] = \xi_{ij} \xi_{ij} \quad (\text{A.11})$$

Denota-se o tensor de tensões como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (\text{A.12})$$

onde:  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  é a matriz nula com um elemento unidade na posição  $ij$ . Em todos os casos índices repetidos indicam soma sobre estes índices. O modelo mais simples para uma equação constitutiva é dada por um material hiperelástico na qual a resposta das tensões é caracterizada em termos da função de energia acumulada:

$$\mathbf{W}: \mathbf{B} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (\text{A.13})$$

tal que:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{W}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.14})$$

em componentes (notação tensorial)  $\sigma_{ij} = \partial \mathbf{W} / \partial \varepsilon_{ij}$ .

Denota-se:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \mathbf{W}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \quad (\text{A.15})$$

o tensor elástico. Em notação tensorial  $C_{ij} = \partial^2 \mathbf{W} / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{ij}$

### Espaço das Tensões. Equações que Governam o Problema

Nesta seção se apresenta uma estrutura básica da Plasticidade, dentro do marco clássico (independente do tempo), das funções resposta (condição de escoamento e regra de fluxo) formuladas no espaço das tensões, dentro de uma teoria infinitesimal tridimensional.

Esta apresentação está restrita só à estrutura matemática das equações relevantes que governam o problema, colocando especial atenção na formulação das condições de carga-descarga na forma denominada Kuhn-Tucker. Estas são as condições complementares clássicas usadas em problemas tal como o de Plasticidade. [Koiter, 1960 e Maier, 1970].

Sob um ponto de vista fenomenológico considera-se o fluxo plástico num corpo material, tipicamente um metal, como um processo irreversível caracterizado em termos do *tensor das deformações*  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e duas variáveis adicionais: a *deformação plástica*  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  e um conjunto adequado de variáveis internas denotado por  $\boldsymbol{\alpha}$  (no espaço das deformações) e denominadas *parâmetros de endurecimento*.

Como foi mencionado, a condição de escoamento e regra de fluxo, são geralmente formuladas no espaço das tensões em termos das variáveis  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  (tensor das tensões) e  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$  (variáveis internas). Onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma função dependente das variáveis  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p\}$  e  $\mathbf{q}$ , são funções de  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}\}$ . O vetor  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$  define as coordenadas do ponto material e  $t \in [0, T]$  é o tempo atual. Cabe esclarecer que ao longo da discussão, se não se indica o contrário, se interpretará que os campos  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dots$  são avaliados num ponto material com coordenadas dadas pelo vetor  $\mathbf{x}$  e num tempo atual dado por  $t$ .

Admita-se que o tensor de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pode ser descomposto numa componente elástica e outra plástica denotadas por  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  respectivamente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{A.16})$$

Desde que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é considerado como variável independente e a evolução de  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  é definida através da regra de fluxo, a equação (A.16) se deveria tomar como uma definição do tensor de deformação elástica:  $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$ .

O tensor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}$  está relacionado com o tensor das deformações elásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  através da função  $W : \mathbf{B} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$  de acordo com a relação hiperelástica :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (\text{A.17})$$

Para a elasticidade linearizada,  $W$  é uma forma quadrática da deformação elástica, ou seja,  $W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ , onde  $\mathbf{C}$  é o tensor do módulo elástico que se supõe constante (material linearmente elástico). Portanto das equações (A.16) e (A.17) se tem:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.18})$$

#### Domínio Elástico e Condição de Escoamento

Define-se uma função  $f : \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ , denominada critério de escoamento que restringe os estados admissíveis  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m$  para que fiquem dentro do espaço das tensões  $\mathbf{E}_\sigma$  definido por:

$$\mathbf{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (\text{A.19})$$

Geralmente ao interior de  $\mathbf{E}_\sigma$  ( $\text{int}\mathbf{E}_\sigma$ ) refere-se como *domínio elástico*:

$$\mathbf{intE}_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0\} \quad (\text{A.20})$$

enquanto que a borda de  $\mathbf{E}_\sigma$ , ( $d\mathbf{E}_\sigma$ ) é definido como a *superfície de escoamento*.

$$d\mathbf{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (\text{A.21})$$

onde  $\mathbf{E}_\sigma = \mathbf{intE}_\sigma \cup d\mathbf{E}_\sigma$ . Notar que os estados  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  fora do  $\mathbf{E}_\sigma$  não são admissíveis na plasticidade clássica.

Regra de Fluxo e Lei de endurecimento. Condição de Carga/Descarga

Introduz-se a noção de irreversibilidade do fluxo plástico mediante as equações de evolução para  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  denominadas *regra de fluxo* e *lei de endurecimento*, respectivamente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{q} &= -\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

onde:  $\boldsymbol{r} : \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{S}$  e  $\boldsymbol{h} : \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  são funções prescritas que definem a direção do fluxo plástico e o tipo de endurecimento. O parâmetro  $\gamma \geq 0$  é uma função não negativa, denominada *parâmetro de consistência* que obedece as *condições de complementaridade Kuhn-Tucker*:

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \\ \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Além das condições (A.23),  $\gamma \geq 0$  satisfaz o requerimento de consistência:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.24})$$

Na literatura clássica, as equações (A.23) e (A.24) são denominadas: *condição de Carga/Descarga* e *condição de Consistência*, respectivamente.

Interpretação das condições de Complementaridade Kuhn-Tucker

1) Considere-se o caso no qual  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in \mathbf{intE}_\sigma$  o seja, pela equação (A.20)  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$ . Levando em conta a equação (A.23),  $\gamma f = 0$  e, como  $f < 0$  conclui-se que:  $\gamma = 0$ .

Logo, a partir da equação (A.22) segue que :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  e considerando a equação (A.18) tem-se:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (\text{A.25})$$

Este tipo de resposta é denominada resposta *elástica instantânea*.

2) Admita-se que  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in d\mathbf{E}_\sigma$  por tanto,  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ , equação (A.21). Logo a equação (A.23) é satisfeita ainda se  $\gamma > 0$ . Quando  $\gamma \geq 0$ , a partir da equação (A.24) aparecem duas situações:

a) Primeiro, se  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$ , desde (A.24) conclui-se:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0 \rightarrow \gamma = 0 \quad (\text{A.26})$$

Por tanto, desde a equação (A.22) se tem  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ ,  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  se encontra sobre  $d\mathbf{E}_\sigma$  e é válida a equação (A.25). Este tipo de resposta é chamada *descarga desde o estado plástico*.

b) Segundo,  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ , então a equação (A.24) é automaticamente satisfeita. Se  $\gamma > 0$ , logo  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq \mathbf{0}$  e  $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ . Este estado é chamado *carga plástica*. O caso onde,  $\gamma = 0$  (e  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ ) é chamado *carga neutra*.

Para resumir a análise anterior se apresenta o seguinte esquema para qualquer estado  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in \mathbf{E}_\sigma$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} f > 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \text{int}\mathbf{E}_\sigma \Rightarrow \gamma = 0 \quad (\text{elástico}) \\ f = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in d\mathbf{E}_\sigma \left\{ \begin{array}{l} \dot{f} < 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad (\text{descarga elástica}) \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \gamma = 0 \quad (\text{carga neutra}) \\ \dot{f} = 0 \text{ e } \gamma > 0 \quad (\text{carga plástica}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Note-se que a possibilidade  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) > 0$  foi excluída da análise, enquanto que, intuitivamente é claro que  $\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) > 0$  para algum  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in d\mathbf{E}_\sigma$  no tempo  $t$ , a condição  $f \leq 0$  seria violada para um instante de tempo seguinte a  $t$ . Um argumento formal é dado em Simo et al.(1998).

### Condição de Consistência e Módulo Tangente Elastoplástico

A partir da condição (A.24) deriva-se respeito do tempo em  $(\sigma, q) \in E_\sigma$  usando a regra da cadeia e considerando as equações (A.18) e (A.22) se tem:

$$\begin{aligned}\dot{f} &= \partial_\sigma f : \dot{\sigma} + \partial_q f \cdot \dot{q} \\ &= \partial_\sigma f : \mathbf{C} : (\dot{\varepsilon} - \varepsilon^p) + \partial_q f \cdot \dot{q} \\ &= \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} - \gamma [\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \partial_q f \cdot \mathbf{h}] \leq 0\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

onde:  $\partial_v(\bullet)$  indica derivada temporal do argumento com respeito a variável  $\mathbf{v}$ , neste caso.

Para realizar a análise, é preciso admitir que a regra de fluxo, a lei de endurecimento e, a condição de escoamento no espaço das tensões mantém a seguinte desigualdade:

$$[\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \partial_q f \cdot \mathbf{h}] > 0 \quad (\text{A.28})$$

para estados admissíveis  $\{\sigma, q\} \in dE_\sigma$ . Será demonstrado logo, que esta hipótese é válida também para plasticidade perfeita associativa.

Portanto considerando a equação (A.27) e a (A.24) se tem:

$$\dot{f} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{\langle \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \rangle}{\partial_\sigma f : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \partial_q f \cdot \mathbf{h}} \quad (\text{A.29})$$

onde:  $\langle x \rangle = \frac{[x + |x|]}{2}$  denota a função rampa.

A partir das equações (A.28) e (A.29) conclui-se que para:

$$f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0, \gamma \geq 0 \Leftrightarrow \partial_\sigma f : \mathbf{C} : \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (\text{A.30})$$

Finalmente, considerando as equações (A.18) e (A.22) obtém-se a derivada do tensor das tensões em função da derivada do tensor de deformação.

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\varepsilon} \quad (\text{A.31})$$

onde:

$$\mathbf{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{se } \gamma = 0, \\ \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \mathbf{r} \otimes \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f}{\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \partial_q f \cdot \mathbf{h}} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

A equação (A.31) mostra verdadeiramente que a formulação é independente do tempo no sentido que o tensor derivada das tensões depende linearmente da derivada do tensor da deformação.

Note-se que  $\mathbf{C}^{ep}$  é em geral não simétrico para  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, q)$  exceto no caso para:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \partial_{\sigma} f(\boldsymbol{\sigma}, q) \quad (\text{A.33})$$

que tem um significado especial, denominado *regra de fluxo associativa*.

Para plasticidade perfeita, onde  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  a hipótese anterior se mantém enquanto que a regra de fluxo seja associativa. Esta conclusão é um resultado direto devido a que o tensor elástico  $\mathbf{C}$  é positivo definido. Considerando  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  e fluxo associado a partir da equação (A.28) tem-se:

$$\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f \geq \beta \|\partial_{\sigma} f\|^2 > 0 \quad (\text{A.34})$$

onde:  $\beta > 0$  é constante e  $\mathbf{C}$  se mantém positivo definido para qualquer tensor simétrico  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{S}$ , em particular, para  $\boldsymbol{\xi} = \partial_{\sigma} f$ .

Por conveniência resume-se as equações gerais da plasticidade independente do tempo como segue:

- a) Relação tensão deformação elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.35})$$

- b) Domínio elástico no espaço das tensões (superfície simples)

$$\mathbf{E}_{\sigma} := \{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0\} \quad (\text{A.36})$$

- c) Regra de fluxo e lei de endurecimento:

- 1) Modelo geral não associativo:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, q) \\ \dot{q} &= -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, q) \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

2) Caso particular associativo:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

onde:  $\mathbf{D}$  = tensor de módulo plástico generalizado.

d) Condições complementares de carga/descarga Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.39})$$

e) Condição de Consistência:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (\text{A.40})$$

Exemplo Elementar. Plasticidade 1-D

Particularização do modelo geral para modelo 1-D

Nesta situação,  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p\}$  são simplesmente grandezas escalares  $\{\sigma, \varepsilon, \varepsilon^p\}$ . Define-se um vetor das variáveis internas como:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

O critério de escoamento é:

$$f(\sigma, \mathbf{q}) = |\sigma + q_2| + q_1 - \sigma_y \leq 0 \quad (\text{A.42})$$

onde:  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento.

Especifica-se a regra de fluxo e a lei de endurecimento como:

$$\begin{aligned}r(\sigma, \mathbf{q}) &= \text{sign}[\sigma + q_2] \\ \mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \text{sign}[\sigma + q_2] \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

onde:  $K$ : módulo plástico e  $H$ : módulo de endurecimento cinemático.

Obviamente na formulação 1-D o tensor módulo elástico  $\mathbf{C}$  reduz-se  $E$  (módulo de Young).

Observa-se a partir da equação (A.42) que:

$$\begin{aligned}\partial_{\sigma} f &= \text{sign}[\sigma + q_2] \\ \partial_q f &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \text{sign}[\sigma + q_2] \end{array} \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

Identifica-se:  $q_2$  como a “back stress” e a deformação plástica equivalente com  $-q_1/K$ .

A partir das equações (A.43) e (A.44) a equação (A.49) fica:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\text{sign}[\sigma + q_2] E \varepsilon}{E(\text{sign}[\sigma + q_2])^2 + K + H(\text{sign}[\sigma + q_2])^2} \\ &= E \text{sign}[\sigma + q_2] \frac{\varepsilon}{[E + K + H]}\end{aligned}\quad (\text{A.45})$$

A partir das equações (A.43) e (A.44) pode-se escrever a regra de fluxo e lei de endurecimento como:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}^p &= \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\gamma \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \\ \text{e} \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (\text{A.46})$$

Portanto, a regra de fluxo é associativa no sentido que o critério  $f(\sigma, \mathbf{q})$  no espaço das tensões é um potencial para  $\varepsilon^p$  e  $\mathbf{q}$ .

Desde que  $\dot{\sigma} = (\partial \sigma / \partial \varepsilon) \dot{\varepsilon}$ , a relação elástica (A.18) particularizada para 1-D, junto com a regra de fluxo (A.46)<sub>1</sub> e, as equações (A.44)<sub>1</sub> e (A.45) resulta na expressão:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \begin{cases} E & \text{se } \gamma = 0 \\ \frac{E[H+K]}{E+H+K} & \text{se } \gamma > 0 \end{cases}\quad (\text{A.47})$$

A qual define o módulo tangente elastoplástico para endurecimento cinemático e isotrópico.

Interpretação da desigualdade (A.28)

Substituindo as equações (A.43) e (A.44) na equação (A.28) obtém-se:

$$\begin{aligned} [\partial_{\sigma} f : \mathbf{C} : \mathbf{r} + \partial_q f \cdot \mathbf{h}] &= E + \{1 \operatorname{sign}[\sigma + q_2]\} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \operatorname{sign}[\sigma + q_2] \end{Bmatrix} \\ &= E + \{K + (\operatorname{sign}[\sigma + q_2])^2 H\} \\ &= E + [H + K] > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

O significado da condição (A.28) é apreciada observando a Figura A.6  condição (A.48) implica uma restrição na quantidade de “softening” no sentido seguinte:

$$[E + K] > -E \Leftrightarrow E^{ep} > -\infty \quad (\text{A.49})$$

onde:  $E^{ep}$  é definido pela equação (A.47) ou em forma geral pela equação (A.32).

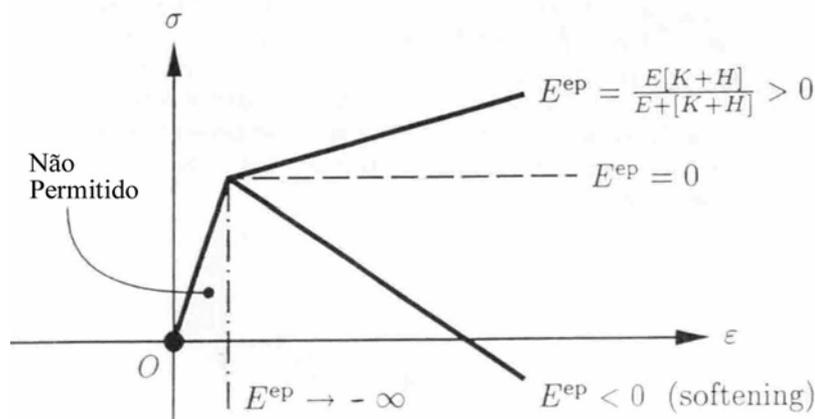


Figura A.6. Condição do “Softening”.

### A.3 Equações Empíricas em Plasticidade

Curvas Tensão-Deformação independentes do  po.

Para a maior parte dos problemas de plasticidade é útil representar a relação tensão-deformação mediante equações obtidas ajustando dados experimentais. Nas seguintes equações usa-se a deformação convencional considerando que as deformações plásticas envolvidas são da

mesma ordem que as deformações elásticas mas, no caso de grandes deformações plásticas é preferível usar a deformação natural. Uma das primeiras equações empíricas foi dada por Ludwik, (1909), com a seguinte forma:

$$\sigma = \sigma_y + m\varepsilon^n \quad (\text{A.50})$$

onde:  $\sigma_y$ : tensão de escoamento inicial e,  $m$  e  $n$  são constantes do material.

Quando  $n = 1$  a equação representa um material que é rígido até a tensão de escoamento inicial  $\sigma_y$  e, logo ocorre a deformação plástica com velocidade constante tal que, o material tem um endurecimento linear. A Figura A.7a mostra o caso para  $0 < n < 1$  supondo deformação elástica desprezível. No caso de considerar  $\sigma_y = 0$  se obtém a Figura A.7b.

A curva tensão-deformação pode ser aproximada também usando uma lei bilinear. Figura A.7c.

$$\sigma \begin{cases} = E\varepsilon_y & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ = E\varepsilon_y + E_P(\varepsilon - \varepsilon_y) & \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

onde:  $E$  : módulo de Young,  $\varepsilon_y$  : deformação de escoamento e,  $E_P$  : módulo plástico.

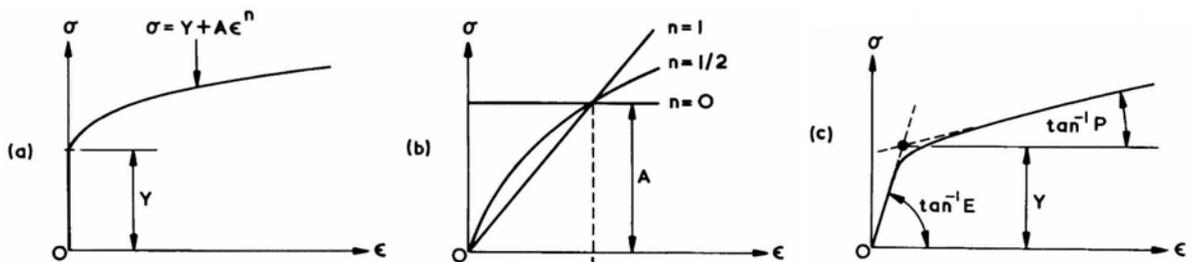


Figura A.7. Curva tensão-deformação. a) Rígido-plástico, b) Plástico puro, c) Bilinear.

Uma equação empírica que ajusta bem aos dados tensão-deformação para metais em engenharia, particularmente para o alumínio puro, é a sugerida por Voce (1948) :

$$\sigma = F + G[1 - \exp(-r\varepsilon)] \quad (\text{A.52})$$

onde:  $F$ ,  $G$  e  $r$  são constantes para um material dado. Devido à sua complexidade a equação (A.52) não é utilizada em análises matemáticas.

A equação proposta por Prager é:

$$\sigma = \sigma_y \tanh(E\varepsilon / \sigma_y) \quad (\text{A.53})$$

Esta curva tem a tangente de  $E$  para deformação zero e a tensão de escoamento  $\sigma_y$  é atingida em forma assintótica.

Outra equação muito utilizada é devido a Ramberg-Osgood (1943) e dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left( \frac{\sigma}{E} \right)^p \quad (\text{A.54})$$

onde:  $E$ : modulo de Young,  $k$  e  $p$  são constantes do material.

#### A.4 Viscoplasticidade

O termo “Viscoplasticidade” em seu significado clássico, usado pela maioria dos autores, é para denotar a descrição do comportamento dependente do tempo com um critério de escoamento bem definido do material.

##### a) Viscoplasticidade Clássica.

Nesta seção se apresenta um esquema parcial de viscoplasticidade com enfoque computacional baseado no modelo de plasticidade dependente do tempo de Perzyna, o qual foi considerado extensamente em aplicações como por exemplo, Zienkiewicz et al (1974), Huges e Taylor (1978), Pinsky et al (1983) e Simo et al (1985). Para tratamentos mais gerais da plasticidade pode-se citar Perzyna (1971) e Lubliner (1972). Como no caso da plasticidade independente do tempo, nas formulações clássicas de viscoplasticidade, se introduz um campo elástico que é definido em termos de uma função de carga  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  mediante o conjunto:

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{\sigma}} := \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (\text{A.55})$$

A diferença básica entre a Viscoplasticidade e Plasticidade independente do tempo é, que em estados  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  do primeiro modelo permitem-se fora da superfície do campo elástico o seja,  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \geq 0$  enquanto que no segundo modelo não é permitido.

As equações de evolução das variáveis internas viscoplásticas  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p, \mathbf{q}\}$  são formulados em termos de uma função monótona crescente do tipo  $C^2$ ,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  tal que  $g(x) = 0$ , se  $x = 0$ . Para metais essas funções são tipicamente do tipo exponenciais e potenciais.

## b) Interpretação como uma Regularização Viscoplastica

A regularização da plasticidade (clássica) independente do tempo pode ser considerada como uma interpretação alternativa importante da Viscoplasticidade clássica. Explicitamente, o modelo constitutivo viscoplastico pode ser considerado como as condições ótimas para minimizar o funcional de Lagrange da função de máxima dissipação plástica com penalidade regularizada (com parâmetro de penalidade  $1/\eta > 0$ ). Uma interpretação das implicações do *Princípio da Máxima Dissipação Plástica* na plasticidade clássica é mostrado no Apêndice C e serve de base para a análise seguinte.

De acordo com a regularização viscoplastica, se os valores do parâmetro  $\eta \in (0, \infty)$  (viscosidade do material), consideram-se decrescentes, no limite quando  $\eta \rightarrow 0$ , recupera-se a formulação independente do tempo. Pode-se argumentar que quando  $\eta \rightarrow 0$  os estados fora da superfície de carga são incrementalmente penalizados e portanto  $f \rightarrow 0$  e  $\langle g(f) \rangle / \eta \rightarrow \gamma$  finito. Esta propriedade foi extensamente explorada em algoritmos computacionais para plasticidade independente do tempo, ver por exemplo Hughes e Taylor (1978).

### Formulação do Princípio de Máxima Dissipação Plástica com Penalidade

Na análise considera-se a formulação clássica de extremos aplicada ao princípio de máxima dissipação plástica com penalidade. Nota-se que dentro do contexto da teoria de otimização restringida, a idéia básica é, transformar o problema de minimização restringida em uma seqüência de problemas sem restrição usando uma função de penalidade das restrições para a função objetivo.

Por simplificação considera-se viscoplasticidade perfeita admitindo  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  e sem perda de generalidade admita-se que  $g(x) = x$ .

Considera-se o problema de minimização com restrição associado com a máxima dissipação plástica:

$$\begin{aligned} \underset{\tau \in E_\sigma}{\text{MIN}} \left\{ -\Gamma^{vp} [\tau; \dot{\epsilon}^{vp}] \right\}, \\ \Gamma^{vp} [\tau; \dot{\epsilon}^{vp}] = \tau : \dot{\epsilon}^{vp} \end{aligned} \tag{A.56}$$

onde:  $\sigma_\eta \in \mathbf{S}$  é a solução do problema .

Associado com este problema considera-se a seguinte seqüência de problemas de minimização não restringida para  $\eta \in (0, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} & \underset{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{S}}{\text{MIN}} \left\{ -\Gamma_{\eta}^{vp} \left[ \boldsymbol{\tau}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \right] \right\} \\ & \Gamma_{\eta}^{vp} \left[ \boldsymbol{\tau}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \right] = \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \frac{1}{\eta} \chi^+ [f(\boldsymbol{\tau})] \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

onde:  $\eta \in (0, \infty)$ : parâmetro de penalidade, enquanto que a função  $\chi^+ : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  da restrição  $f(\boldsymbol{\tau}) \leq 0$  é chamada função de penalização e está sujeita aos seguintes requerimentos [Luenberger, 1984]:

1.  $\chi^+$  é uma função tipo  $C^1$ .
2.  $\chi^+(x) \geq 0$ , e  $\chi^+(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Quando as condições anteriores são satisfeitas, o problema (A.57) é o chamado regularização penalizada do problema de minimização restringida (A.56).

Seja,  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta} \in \mathbf{S}$  a solução do problema (A.57), sob condições fracas da suavidade de  $\Gamma^{vp} \left[ \boldsymbol{\tau}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \right]$  pode-se mostrar que  $\boldsymbol{\sigma}_{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$  (solução do problema (A.56)) quando  $\eta \rightarrow 0$ . A prova encontra-se em Luenberger (1984).

A vantagem computacional do problema (A.57) respeito do problema (A.56) é clara, enquanto que a função objetivo  $-\Gamma^{vp} \left[ \boldsymbol{\tau}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \right]$  com o termo  $\frac{1}{\eta} \chi^+ [f(\boldsymbol{\tau})]$  onde  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S}$ , substitui o problema restringido no qual  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{E}_{\boldsymbol{\sigma}}$ . Note-se que com valores de  $1/\eta$  suficientemente grandes, atinge-se uma versão localmente convexa do problema original que conduz a condições fracas sobre a existência do minimizador  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S}$ .

Para relacionar a versão regularizada do princípio de máxima dissipação plástica dada por (A.57) com as equações de viscoplasticidade clássica, considera-se a seguinte expressão explícita para a função  $\chi^+ : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$

$$\chi^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 & \Leftrightarrow x > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

Claramente, esta função satisfaz as condições anteriores 1 e 2, portanto pode ser considerada como função de penalização para o problema(A.56). Além, é claro que sua derivada está dada por:

$$\frac{d}{dx} \chi^+(x) = \langle x \rangle = \begin{cases} x & \Leftrightarrow x > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.59})$$

Procedendo de acordo com a equação(A.59), segue que a condição ótima para o problema não restringido (A.57) conduz à regra de fluxo viscoplástico:

$$\frac{\partial \Gamma_{\eta}^{vp} [\boldsymbol{\tau}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}) \rangle \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.60})$$

Conclui-se que o modelo constitutivo viscoplástico é uma regularização do modelo de plasticidade independente do tempo.

Claramente, os argumentos anteriores podem ser estendidos imediatamente para o caso de plasticidade independente do tempo com endurecimento geral mediante a variável de endurecimento  $\mathbf{q}$ . No caso geral, o funcional com penalidade regularizada associado com a máxima dissipação plástica toma a forma:

$$\begin{aligned} & \underset{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}) \in \mathcal{S} \times \mathbf{R}^m}{MIN} \left\{ \Gamma_{\eta}^{vp} [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\pi}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}] \right\} \quad (\text{A.61}) \\ & \Pi = \Gamma_{\eta}^{vp} [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{p}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}] = \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} + \mathbf{p} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{1}{\eta} \chi^+ [f(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{p})] \end{aligned}$$

onde:  $\chi^+ : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$  é definida pela equação (A.58) com sua derivada dada pela equação (A.59). Logo as condições ótimas para o problema de minimização não restringida conduz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} &= \frac{1}{\eta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \rangle \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \frac{1}{\eta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \rangle \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ &e \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

onde:  $\Pi$  é chamado funcional de Lagrange como mostra o Apêndice C para o caso de plasticidade.

$\mathbf{D}$  : matriz do módulo generalizado de endurecimento que define a relação entre as variáveis de endurecimento no espaço das tensões com as correspondentes no espaço das deformações, tomando a forma da equação (A.46)<sub>3</sub> para o caso 1-D.

As equações (A.62) são a versão associativa da regra de fluxo e lei de endurecimento para viscoplasticidade clássica.

Por conveniência resume-se as equações gerais da viscoplasticidade como segue:

a) Relação tensão deformação elástica:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \mathbf{C} &= \frac{\partial^2 W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \quad \text{módulo elástico}\end{aligned}\tag{A.63}$$

d) Domínio elástico no espaço das tensões (superfície simples)

$$\mathbf{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{R}^m / f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0\}\tag{A.64}$$

Regra de fluxo e lei de endurecimento associativos a partir da equação (A.62) (modelo de Perzyna) se tem:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \frac{1}{\eta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, q) \rangle \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ \dot{q} &= \frac{1}{\eta} \langle f(\boldsymbol{\sigma}, q) \rangle \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\gamma \mathbf{D} \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} \\ \gamma &= \frac{\langle g(f(\boldsymbol{\sigma}, q)) \rangle}{\eta}\end{aligned}\tag{A.65}$$

onde:  $\mathbf{D}$  = tensor de módulo plástico generalizado.

$g(x)$  = função monótona com  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ , na equação (A.65) caso admitiu-se  $g(x) = x$ .

$$\langle x \rangle = \frac{x + |x|}{2} \quad \text{função rampa}$$

## A.5 Equações Empíricas de Viscoplasticidade

Modelos entre Tensões, Velocidade de Deformação e Temperatura

Em 1909, Ludwik (1909) propôs uma relação entre tensão e velocidade de deformação. B equação tem a forma:

$$\sigma = \sigma_l + \sigma_0 \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \quad (\text{A.66})$$

onde:  $\sigma_l, \sigma_0$  e  $\dot{\varepsilon}_0$  são constantes. A equação (A.63) é válida para um certo número de metais dentro de uma faixa de deformações e, mostra que a tensão não se incrementa rapidamente com a velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}$ .

Alder e Philips (1954) resumiram seus experimentos sobre compressão dinâmica em alumínio e aço em termos de uma lei potencial dada por:

$$\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^n \quad (\text{A.67})$$

onde :  $\sigma_0$  : tensão correspondente à velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}_0$  e  $n$  é uma constante dependente da temperatura de recristalização.

Uma equação que envolve, deformação, velocidade de deformação e temperatura foi introduzida por Inouye (1955).

$$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m e^{\frac{A}{Tk}} \quad (\text{A.68})$$

onde:  $\sigma_0, n, m, A$ , e  $k$  são constantes.

A partir de estudos experimentais relacionados com alumínio, Malvern (1965) propôs uma equação da forma:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + F[\sigma - \sigma_0(\varepsilon)] \quad (\text{A.69})$$

onde:  $\sigma > \sigma_0(\varepsilon)$ ,  $\sigma_0(\varepsilon)$  é a tensão quasi-estática na deformação  $\varepsilon$  e  $E$  é o módulo de elasticidade de Yung. Outras formas da equação de Malvern são:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + D \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right]^p \quad (\text{A.70})$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + A \left[ e^{\left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^q} - 1 \right] \quad (\text{A.71})$$

onde:  $A$ ,  $D$ ,  $p$  e  $q$  são constantes empíricas e  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento quasi-estática. Ripperberger (1965) adaptou a equação de Malvern para descrever seus dados experimentais obtidos com alumínio endurecido. A equação tem a forma:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\tau} \left[ \frac{\sigma - \sigma_0(\varepsilon)}{\sigma_0(\varepsilon)} \right]^m \quad (\text{A.72})$$

onde:  $\tau$ : tempo de relaxação do material,  $\sigma_0(\varepsilon)$ : tensão quasi-estática na deformação  $\varepsilon$  e,  $\sigma - \sigma_0(\varepsilon)$ : excesso de tensão a que está submetido o material para uma velocidade de deformação dada.

## Apêndice B

### B.1 Princípio de Máxima Dissipação Plástica

O princípio de máxima dissipação plástica atribuída a Von Mises [Hill, 1950] e considerado por subsequentes autores por exemplo Lubliner (1984), tem um rol crucial na formulação aproximada da Plasticidade no marco de elementos finitos.

Nesta descrição se empregará os multiplicadores de Lagrange e condições ótimas proporcionando una nova interpretação no rol fundamental deste princípio. Por exemplo as condições de carga/descarga são obtidas a partir das condições ótimas.

Primeiramente considera-se o caso da plasticidade perfeita.

#### Formulação Clássica da Plasticidade Perfeita.

O princípio da máxima dissipação plástica estabelece que para uma quantidade de deformação plástica  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , entre todas as possível tensões que satisfazem o critério de escoamento, a *dissipação plástica*, para o caso da plasticidade perfeita, dada como:

$$\Pi^p \left[ \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\varepsilon}^p \right] = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{B. 1})$$

atinge um seu *máximo* para o tensor real  $\boldsymbol{\sigma}$  das tensões. Isto é, seja  $\mathbf{E}_\sigma$  a superfície fechada no campo elástico do espaço das tensões já definido como:

$$\mathbf{E}_\sigma := \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{S} / f(\boldsymbol{\tau}) \leq 0 \} \quad (\text{B. 2})$$

Logo, a tensão real  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{E}_\sigma$  é o argumento que maximiza dito funcional:

$$\Pi^p \left[ \boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\varepsilon}^p \right] = \underset{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{E}_\sigma}{\text{MAX}} \left\{ \Pi^p \left[ \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\varepsilon}^p \right] \right\} \quad (\text{B. 3})$$

O fundamental significado deste princípio resume-se no resultado clássico que define completamente a regra de fluxo para um critério de escoamento dado.

**Proposição 1:** *A Máxima Dissipação Plástica implica:*

- a) Regra de fluxo associativa no espaço das tensões, esta condição é frequentemente chamada *normalidade* no espaço das tensões.

- b) Condições de carga/descarga na forma complementar Kuhn-Tucker e,
- c) Convexidade do campo elástico  $\mathbf{E}_\sigma$ .

**Prova:**

Para provar a) e b) se aplica o método clássico dos multiplicadores de Lagrange. Primeiro, transforma-se o princípio de maximização em princípio de minimização simplesmente trocando o sinal e considerando como função objetivo  $-\Pi^p[\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\varepsilon}^p]$ . Logo, transforma-se o problema de minimização restringida num problema não restringido introduzindo o cone dos multiplicadores de Lagrange:

$$\mathbf{K}^p = \left\{ \delta \in L^2(\mathbf{B}) \mid \delta \geq 0 \right\} \quad (\text{B. 4})$$

e considerando o funcional de Lagrange:  $\Pi^p : \mathbf{S} \times \mathbf{K}^p \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\Pi^p(\boldsymbol{\tau}; \delta; \boldsymbol{\varepsilon}^p) = -\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \delta f(\boldsymbol{\tau}) \quad (\text{B. 5})$$

onde:  $\boldsymbol{\varepsilon}^p \in \mathbf{S}$  é considerado como fixo o bem como ima função arbitraria. Logo a solução do problema (B.3) é dado mediante o ponto  $(\boldsymbol{\sigma}, \gamma) \in \mathbf{S} \times \mathbf{K}^p$  que satisfaz as condições clássicas ótimas Kuhn-Tucker, ver por exemplo Luenberrger (1984), ou Strang (1986).

$$\frac{\partial \Pi^p(\boldsymbol{\tau}; \delta; \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\tau}} = -\boldsymbol{\varepsilon}^p + \gamma \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (\text{B. 6})$$

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \text{ e } \gamma f(\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Estas condições são precisamente o enunciado da normalidade da regra de fluxo e condições de carga/descarga.

Para demonstrar a condição de convexidade do domínio elástico  $\mathbf{E}_\sigma$  é suficiente demonstrar que a função  $f(\boldsymbol{\sigma})$  é convexa (no sentido definido depois). Para este fim, observe-se que a partir da (B.3), o ponto extremo  $\boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbf{E}_\sigma$  satisfaz a condição:

$$\Pi^p[\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\varepsilon}^p] \geq \left\{ \Pi^p[\boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{\varepsilon}^p] \right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^p \geq \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \text{para todo } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{E}_\sigma \quad (\text{B. 7})$$

Conseqüentemente, tem-se:

$$[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}]: \boldsymbol{\varepsilon}^p \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{E}_\sigma \quad (\text{B. 8})$$

Das condições ótimas Kuhn-Tucker segue:

$$\gamma[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}]: \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \leq \gamma f(\boldsymbol{\tau}), \text{ para } \boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbf{E}_\sigma \text{ e qualquer } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{E}_\sigma. \quad (\text{B. 9})$$

Se  $\gamma = 0$  a desigualdade é satisfeita trivialmente. Por outro lado, se  $\gamma > 0$  e dado que  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ,

$$\gamma[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}]: \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \leq f(\boldsymbol{\tau}) - f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\tau}) \leq 0 \text{ para qualquer } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{E}_\sigma. \quad (\text{B. 10})$$

o qual coincide com a equação (B.9) implicando convexidade.

*Definição:* Admita-se que a função  $f: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{R}$  é suave (derivável). Logo,  $f(\boldsymbol{\sigma})$  é convexa se e solo se a seguinte desigualdade se mantém:

$$\gamma[\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\sigma}]: \nabla f(\boldsymbol{\sigma}) \leq f(\boldsymbol{\tau}) - f(\boldsymbol{\sigma}) \text{ para qualquer } \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{S}$$

A prova pode-se consultar em Simo et al (1998).

### **Plasticidade com Endurecimento Geral Associativo no Espaço das Tensões.**

O resultado principal é a caracterização de uma estrutura geral para obter as leis do endurecimento associativo como resultado do princípio da máxima dissipação plástica.

Admite-se que  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}\} \in \mathbf{E}_\sigma$  seja uma solução das equações constitutivas da plasticidade clássica considerando o endurecimento, onde  $\mathbf{E}_\sigma$  é a superfície definida em (B.2).

Estendendo a definição (B.1) para o caso com endurecimento tem-se:

$$\Pi^p \left[ \boldsymbol{\tau}; \boldsymbol{q}; \boldsymbol{\varepsilon}^p; \boldsymbol{\alpha} \right] = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{B. 11})$$

onde as variáveis de endurecimento  $\boldsymbol{q}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  no espaço das tensões e no espaço das deformações respectivamente, relacionam-se mediante a equação:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{B. 12})$$

onde:  $\mathbf{D}$  é o tensor do módulo plástico generalizado para o caso associado, como foi definido no apêndice B.

No presente contexto, para valores fixos  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^p; \boldsymbol{\alpha}\}$  o princípio da máxima dissipação plástica caracteriza o estado real  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\} \in \mathbf{E}_\sigma$  como o estado entre todos os estados admissíveis  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}\} \in \mathbf{E}_\sigma$  para o qual a dissipação plástica atinge um máximo, o seja:

$$\Pi^p[\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{q}; \boldsymbol{\varepsilon}^p; \boldsymbol{\alpha}] = \underset{(\boldsymbol{\tau}; \mathbf{p}) \in \mathbf{E}_\sigma}{MAX} \left\{ \Pi^p[\boldsymbol{\tau}; \mathbf{p}; \boldsymbol{\varepsilon}^p; \boldsymbol{\alpha}] \right\} \quad (\text{B. 13})$$

A extensão da proposição 1 é dada como:

**Proposição 2:** O princípio da Máxima Dissipação Plástica implica:

a) Regra de fluxo associada no espaço das tensões de acordo às relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ e \\ \boldsymbol{\sigma} &= \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \end{aligned} \quad (\text{B. 14})$$

b) Lei do endurecimento associativo no espaço das tensões:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \gamma \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \\ e \\ \dot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{B. 15})$$

c) Condições de carga/descarga na forma complementaria Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} \gamma &\geq 0, \\ f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) &\geq 0, \\ \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 16})$$

d) Convexidade no campo elástico

A prova desta última proposição segue exatamente as mesmas linhas como na proposição 1, para ver detalhes referir-se a Simo et al (1998).