

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Marilise Oliveira Jorge

**PINTANDO O CUBO:
MATEMÁTICA COM ARTES**

Porto Alegre

2011

Marilise Oliveira Jorge

**PINTANDO O CUBO:
MATEMÁTICA COM ARTES**

Trabalho de Conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2011

Marilise Oliveira Jorge

**PINTANDO O CUBO:
MATEMÁTICA COM ARTES**

Trabalho de Conclusão de curso de graduação
apresentado ao Departamento de Matemática
Pura e Aplicada do Instituto de Matemática da
Universidade Federal do Rio grande do Sul,
como requisito parcial para a obtenção do grau
de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius de
Azevedo Basso

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Simone Diaz Cruz

Profa. Dra. Marilaine de Fraga Sant' Ana

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Porto Alegre

2011

Resumo

Este trabalho trata do planejamento e implementação de uma sequência de atividades sobre transformações geométricas destinadas para estudantes do 2º ano do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRGS. Visando a articulação entre as disciplinas de Matemática e Artes, o trabalho foi desenvolvido por professores de Artes e Matemática e por acadêmicos do Curso de Licenciatura em matemática da UFRGS, através de uma disciplina denominada Enriquecimento Curricular (EC). Parte das atividades tiveram como base obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher, destacando-se aquelas relacionadas com conceitos de translações, rotações, reflexões. Os conceitos matemáticos desenvolvidos no EC foram aplicados na construção de mosaicos e caleidoscópios. Os resultados das sequências de atividades, as quais foram aplicadas em um Laboratório de Informática e em uma Oficina de Artes, apontam que os objetivos foram alcançados e que o trabalho integrando Artes e Matemática, promove benefícios recíprocos em termos da aprendizagem de conceitos comuns as duas disciplinas.

Palavras-chave: transformações geométricas, Escher, mosaicos, aprendizagem em Matemática, Artes, simetria

Abstract

This study deals with the planning and implementation of a sequence of activities about geometric transformations destined to students of the 2^o year of High School of Aplicação School from the Federal University of Rio Grande do Sul (UFRGS). Envisioning the articulation between the fields of Mathematics and Art, the study was developed by teachers of Art and Math and by academics of the Graduation Course in Mathematics of UFRGS, through a class named Curricular Enrichment (EC). Part of the activities had as base the works of dutch artist Maurits Cornelis Escher, highlighting those related to the concepts of translations, rotations, reflections. The mathematical concepts developed in this EC were applied in the construction of mosaics and kaleidoscopes. The results of this sequence of activities, which was applied in a Computers Lab and in an Art Workshop, show that the goals were reached and that the integrated work between Art and Mathematics promotes reciprocal benefits in terms of learning concepts common to both disciplines.

Key words: geometric transformation, Escher, mosaics, learning in Mathematics, Art, simmetry

Lista de Figuras

Figura 1: Mosaico de parede – Fortaleza de Alhambra – Granada- Espanha	13
Figura 2: favos de mel	14
Figura 3: M. C. Escher – Metamorfose II- 1937	15
Figura 4: casco de tartaruga	15
Figura 5: malhas formadas por triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares	15
Figura 6: < http://www.quiltingfromthegut.com/artbookreviews/tessellations/ >	16
Figura 7: Construção do módulo de um mosaico	17
Figura 8: Mosaico partindo de um quadrado de uma aluna da 2º ano do E.M.	18
Figura 9: Trabalho de um aluno do 2º ano do E.M., feito no simetrizador	19
Figura 10: deslocamento em linha reta de um objeto - translação de uma figura por um vetor	20
Figura 11: girar um objeto em torno de um ponto, pertencendo ou não ao objeto rotação de uma figura por um ponto	20
Figura 12: Reflexão de uma figura por um eixo	21
Figura 13: Reflexão de uma figura por um outro eixo	22
Figura 14: M. C. Escher, Dia e Noite, xilografia, 1939 < http://www.mcescher.com/ >	23
Figura 15: M. C. Escher, Céu e Água, xilografia, 1938 < http://www.mcescher.com/ >	23
Figura 16: M. C. Escher, Relatividade, litografia, 1953 < http://www.mcescher.com/ >	24
Figura 17: Peças do Pentaminó	30
Figura 18: Os alunos escolhendo sua imagem	31
Figura 19: Montagem do mosaico com formas geométricas	32
Figura 20: construção do módulo de um mosaico feito a mão, partindo de um quadrado	34
Figura 21: Construção de um mosaico com ponto de rotação a partir de um quadrado no MS Paint	36
Figura 22: Construção de um mosaico, com módulo a partir de um quadrado	37
Figura 23: Construção de uma “flor” a partir de um quadrado no Geogebra	38
Figura 24: representação dos tamanhos de papel < http://pt.wikipedia.org/wiki/A1_(28tamanho_de_papel) >	39
Figura 25: Montagem do Caleidoscópio, retirado do livro <i>Matemáticas Experimentais</i>	40
Figura 26: uso de <i>Mirror Car</i>	41

Figura 27: Conjunto de <i>Mirror Car</i> , 1967 - McGraw-Hill Book Company	41
Figura 28: Conjunto de <i>Mirror Card</i> , 1967 - McGraw-Hill Book Company	42
Figura 29: Conjunto de imagens usados como exemplos de simetria	43
Figura 30: Montagem da reflexão do rosto	45
Figura 31: Tela inicial do Simetrizador	46
Figura 32: Peças do Pentaminó	47
Figura 33: Possíveis retângulos montados com todas do pentaminó	48
Figura 34: Estudantes utilizando as peças do pentaminó	49
Figura 35: Trabalho de leitura de imagem de uma aluna da 2ª série do E. M.	50
Figura 36: M. C. Escher, Pássaros no Espaço, tecelagem	50
Figura 37: Construção de um módulo feita a mão por uma aluno do 2º ano do E.M.	52
Figura 38: Mosaico feito a mão por uma aluna da 2º ano do E. M	53
Figura 39: Mosaico feito a mão por uma aluna da 2º ano do E. M.	53
Figura 40: Construção de um mosaico com ponto de rotação a partir de um quadrado no MS Paint	54
Figura 41: Colorindo o mosaico	55
Figura 42: Conjunto de mosaicos feito no MS Paint com um ponto de rotação por alunos da 2ª série do E. M.	56
Figura 43: Conjunto de mosaicos feito no Geogebra utilizando vetores para as translações	58
Figura 44: Construção de uma “flor” a partir de um quadrado no Geogebra	59
Figura 45: Imagens da mesma 'flor' feita no geogebra, com ângulos de rotação diferentes	60
Figura 46: Módulo partindo de um hexágono	61
Figura 47: Construção do módulo e encaixe para a formação do mosaico com hexágono	63
Figura 48: Montagem do Caleidoscópio, retirado do livro <i>Matemáticas Experimentais</i>	64
Figura 49: Construção do Caleidoscópio	65
Figura 50: Alunos olhando dentro dos caleidoscópios	66
Figura 51: Imagem interna de um caleidoscópio	66
Figura 52: Fotografia com o UCA do visão interna do Caleidoscópio	68
Figura 53: Uso do <i>Mirror Card</i>	69
Figura 54: Malha feita por uma aluno	69
Figura 55: Eixos de simetria marcado por uma aluno da 2º ano do E.M.	70
Figura 56: Eixos de simetria marcado por uma aluno da 2º ano do E.M.	70

Figura 57: Reflexão formando uma figura “engraçada”	71
Figura 58: Reflexão do rosto de uma aluna da 2º ano do E.M.	72
Figura 59: Trabalho feito com o Simetrizador por uma aluno da 2ª série do E.M.	73
Figura 60: Alunos durante a apresentação	74
Figura 60: Conjunto de imagens retirada da apresentação em vídeo de um grupo de alunos	76
Figura 61: Apresentação do alunos para os outros EC	76
Figura 62: Slide inicial dos trabalhos dos alunos	78

Sumário

1.Introdução	10
2.Matemática e Arte na Escola	
2.1Considerações sobre o Ensino da Geometria na Escola	12
2.2Transformações Geométricas	14
2.3Escher e a Matemática	21
3.Metodologia	24
3.1Sobre o grupo de alunos e professores	26
3.2Coleta de dados	27
3.3Descrição das atividades	27
4. Análise da implementação das atividades nos encontros com os estudantes	46
5. Resultados	75
6. Considerações Finais	79
7. Referências Bibliográficas	81
Anexo - Autorização para o uso do nome da instituição de ensino	82

1. Introdução

O ensino de Geometria sempre representou uma parte da matemática que me chamou muita atenção por eu gostar e visualizar facilmente as formas geométricas, muito embora eu tenha tido poucas aulas dessa área da Matemática. Na escola, me recordo de ter estudado Geometria Espacial no Ensino Médio, quando então se fazia necessário visualizar as formas apresentadas nos problemas.

Na universidade, com meu entendimento sobre geometria ampliado, em uma disciplina de Geometria, me deparei com um conteúdo que até então não havia estudado: transformações geométricas. Naquele momento, o que aprendemos foi superficial, com transformações simples, rotações, translações, simetria. Em outra disciplina de Geometria trabalhamos com as transformações geométricas com as obras do artista Maurits Cornelis Escher, mas ainda assim só as transformações da posição das figuras, nada relacionada à construção delas.

Com o passar dos semestres, as obras de Escher foram me chamando mais a atenção. Percebi que em algumas obras, suas imagens eram formadas a partir de uma composição de formas geométricas regulares. Diante dessa percepção, me perguntei como é que ele fazia isso? Seria possível desenvolver este trabalho com os alunos?

A oportunidade de colocar essa ideia em prática surgiu em 2010. Seria uma aula oferecida para os alunos de 2ª série do Ensino Médio, como um Enriquecimento Curricular (EC), no Colégio de Aplicação da UFRGS. Na maioria das vezes o que é apresentado no EC é diferente das atividades desenvolvidas pelos professores em suas aulas regulares. Tem EC de culinária de um determinado país, de construção de uma rádio web, de criação e montagem de vídeos. No caso do EC que será descrito nesse trabalho de conclusão de Curso, em parceria com as professoras de Artes e de Matemática da escola, criamos um conjunto de atividades cujo tópico central constituiu-se no trabalho envolvendo transformações geométricas. A partir dessas transformações construímos mosaicos, caleidoscópios, integrando conhecimentos dessas duas disciplinas e realizando atividades tanto em ambiente informatizado quanto em uma Oficina de Artes. Considerando o exposto acima, enuncio os objetivos desse trabalho:

- Criar e implementar atividades que contribuam para:
 - estabelecer relações entre Matemática e Artes;

- tratar de conceitos que não são usualmente tratados nas aulas regulares de Matemática;

- relacionar os conceitos de simetria, translação, rotação e reflexão com o cotidiano.

Assim, nesse trabalho apresentarei essa proposta de Enriquecimento Curricular e sua implementação. O segundo capítulo trata da Matemática na escola, sua relação com as artes e com o artista M.C. Escher. O terceiro capítulo descreve o que é o Enriquecimento Curricular, nossa proposta inicial de trabalho, a descrição das atividades, onde o EC ocorreu e os alunos com os quais trabalhamos. No quarto capítulo registro e discuto as respostas dos alunos às atividades desenvolvidas. No quinto capítulo apresento os resultados e no último capítulo faço as considerações finais do trabalho.

2. Matemática e Arte na Escola

2.1 Considerações sobre o Ensino de Geometria

Segundo Vergnaud (2009) a melhor forma de aprender é através da experiência em parceria com o estudo. O ensino não é somente de leituras e interpretações de textos, é preciso confrontar a prática com a teoria, para que cada um faça o seu aprendizado. Além de experiência e teoria estarem juntas, é preciso saber lidar com situações diversas, estar preparado para o inesperado, saber se adaptar quando necessário. Por exemplo, não basta somente saber resolver um problema; é necessário saber explicar o que está acontecendo e o que está fazendo.

Segundo Bittar e Muniz (2009), por mais que exista homogeneidade nas atividades desenvolvidas pelos sujeitos, a experiência vivida é única para cada um. Sucessivas experiências semelhantes e diferentes é que permitem diferenciar e identificar as situações. Esse esquema de reconhecimento, que passa por identificar um objeto, as propriedades, as relações e as transformações é de fundamental importância para a adaptação ao ambiente. Na vida temos experiências cotidianas e experiências escolares, profissionais. Uma não é o oposto da outra, ou contra a outra, elas são experiências diferentes que passam por esquemas similares de reconhecimento pelo sujeito. Essas experiências somadas, ou seja, a análise realizada por cada sujeito, sobre esse conjunto de experiências, contribui para a construção dos conceitos.

A geometria está presente em nossa vida, no nosso cotidiano. Desde o brincar de crianças, com um simples jogo de encaixe, até um adulto que precisa calcular uma área, ou perímetro para seu trabalho, a geometria se faz presente em situações que sequer percebemos. Ela é essencial em diferentes áreas, nas construções, nas artes, na Matemática, na Geografia, na Física. É o ensino da Geometria que facilitará seu uso em cada área específica. Para isso, primeiro temos que fixar os objetivos, planejar atividades e trabalhar com conceitos básicos. Por exemplo, na Geografia ou em construções, usar a geometria para localizar um ponto num mapa ou resolver problemas reais relacionados com a quantidade de material e o espaço necessário para construir uma casa. Além disso, pensamos que, se o estudo da geometria estiver ligado às noções e percepções de espaço e forma, sua integração com os trabalhos envolvendo álgebra poderão contribuir para a compreensão das operações algébricas.

Como já mencionado antes e de acordo com análise realizada em cinco livros didáticos, o ensino da geometria vem sendo baseado fundamentalmente em cálculos de área e perímetro. Acrescenta-se que a abordagem desses tópicos fica, de modo geral, focada na memorização de fórmulas e na aplicação dessas mesmas fórmula a um extenso conjunto de exercícios bastante similares uns aos outros. Como parte desse trabalho, pretendo mostrar um conteúdo referente à geometria que, assim como os cálculos, também fazem parte do cotidiano: os mosaicos. Esses, por sua vez, podem ser encontrados nos azulejos, nos pisos, nos vitrais e em sua construção estão presentes as operações envolvendo transformações geométricas.



Figura 1: Mosaico de parede – Fortaleza de Alhambra – Granada- Espanha

Durante minha vida acadêmica percebi que quando se prepara uma aula, devemos imaginá-la de forma que favoreça a atenção dos alunos. Minhas experiências em sala de aula sugerem que ensinar somente cálculos não é uma forma de prender a atenção dos estudantes por muito tempo. Usar a arte dos mosaicos para iniciar um trabalho pode ser uma forma de incentivar o aluno a desvelar o quão interessante pode ser estudar Matemática. Ele percebe que vai aprender algum conteúdo de matemática que não tem exclusivamente cálculos. Claro que devemos levar em consideração que os estudantes podem não gostar do conteúdo. No entanto, independentemente desse gostar ou não, pensamos que as estratégias de trabalho e atividades apresentadas nesse texto poderão ser vir como motivação para esse estudo.

O ensino das transformações geométricas pode estar presente nas escolas, auxiliando nos cálculos de áreas, perímetro e volume. Trabalhando com área e perímetro, deixando “um pouco de lado” os cálculos, podemos construir figuras de maneira que a área permanece a mesma e o perímetro se altera. Essa prática pode ser o começo do ensino das transformações, partindo da exploração de perímetros e áreas, e dando continuidade com os mosaicos e sua construção.

Para aprender, precisamos estar interessados no assunto. No entanto, aprender na sala de aula é visto como um dever, não como uma forma de descobrir novidades. A maioria dos alunos necessita de motivação para começar estudar. Os aspectos rotineiros não incentivam os alunos a estudarem. Por outro lado, apresentar conteúdos novos ou mesmo outras abordagens didáticas para conteúdos usuais, podem se constituir em formas de convidar o aluno a estar presente e disposto a trabalhar na sala de aula.

2.2 Transformações Geométricas

A arte praticada em determinadas épocas é esquecida em outras. Os primeiros mosaicos, que são obras de artes, eram simples desenhos em pedras, foram descobertos na Ásia Menor e na China. Na Grécia, os mosaicos apareceram na forma de pisos e paredes compostos por ladrilhos com contornos de fio de chumbo. Os romanos aprimoraram, com o uso de mármore e espalharam essa técnica pelo mundo (Ormazzenano e Santos 2005).

Todo o recobrimento de um certo espaço, seja por madeira, cerâmica, pedra, ou outros materiais, é considerado mosaico, como pisos, paredes (Ormazzenano e Santos 2005). Os mosaicos são figuras que cobrem determinadas superfícies, com formas que se repetem, partindo de uma forma geométrica regular. Encontramos mosaicos em vários lugares: no piso e na parede do banheiro, da cozinha; nos vitrais das igrejas; numa obra de arte; em cascos de tartarugas, em pulseiras artesanais, colchas de retalhos, nos favos de mel; na casca dos abacaxis; o mosaico está presente na natureza e nas obras construídas pelo homem.



Figura 2: favos de mel



Figura 3: M. C. Escher – Metamorfose II- 1937



Figura 4: casco de tartaruga

Para construir um mosaico precisamos primeiro de um módulo, a peça que será repetida pela superfície a ser coberta. A base dos mosaicos é a repetição desse módulo, a imagem formadora a partir da qual o mosaico se repete. Pode ter como módulo inicial polígonos regulares de três tipos: triângulo equilátero, quadrado ou hexágono regular, sendo que este último pode ser formado por triângulos equiláteros.

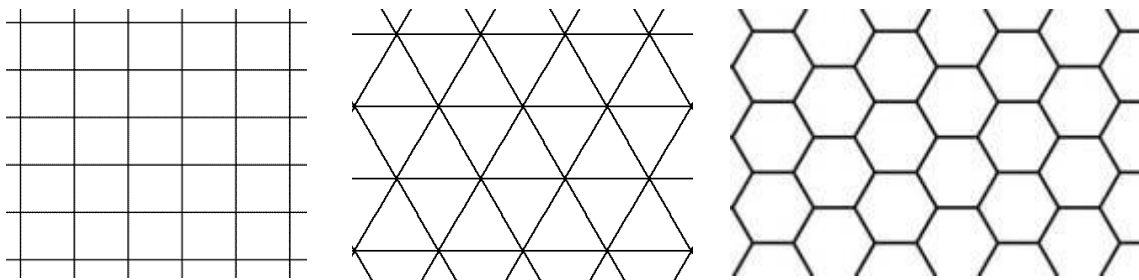


Figura 5: malhas formadas por triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares

Outros polígonos também podem formar mosaicos, mas devem ser combinados para constituir o módulo inicial. Podemos também pensar em mosaicos que não

apresentem nenhuma forma geométrica aparente, mas que são triângulos ou quadrados que sofreram alguma transformação.



Figura 6: < <http://www.quiltingfromthegut.com/artbookreviews/tessellations/>>

Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que não raro permaneceram até os dias atuais. Muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração.

Ruy Madsen Barbosa, 1993

Num mosaico podemos encontrar apenas formas geométricas, ou como os de Escher, formas variadas que se encaixam perfeitamente (figura 6).

O módulo de um mosaico deve ser pensado e construído de maneira que as peças possam se encaixar perfeitamente. Uma técnica que pode ser usada é a de, a partir de uma forma geométrica regular, fazer um recorte em um dos lados e acrescentar esse recorte no lado oposto, dependendo do número de lados repetir esse passo.

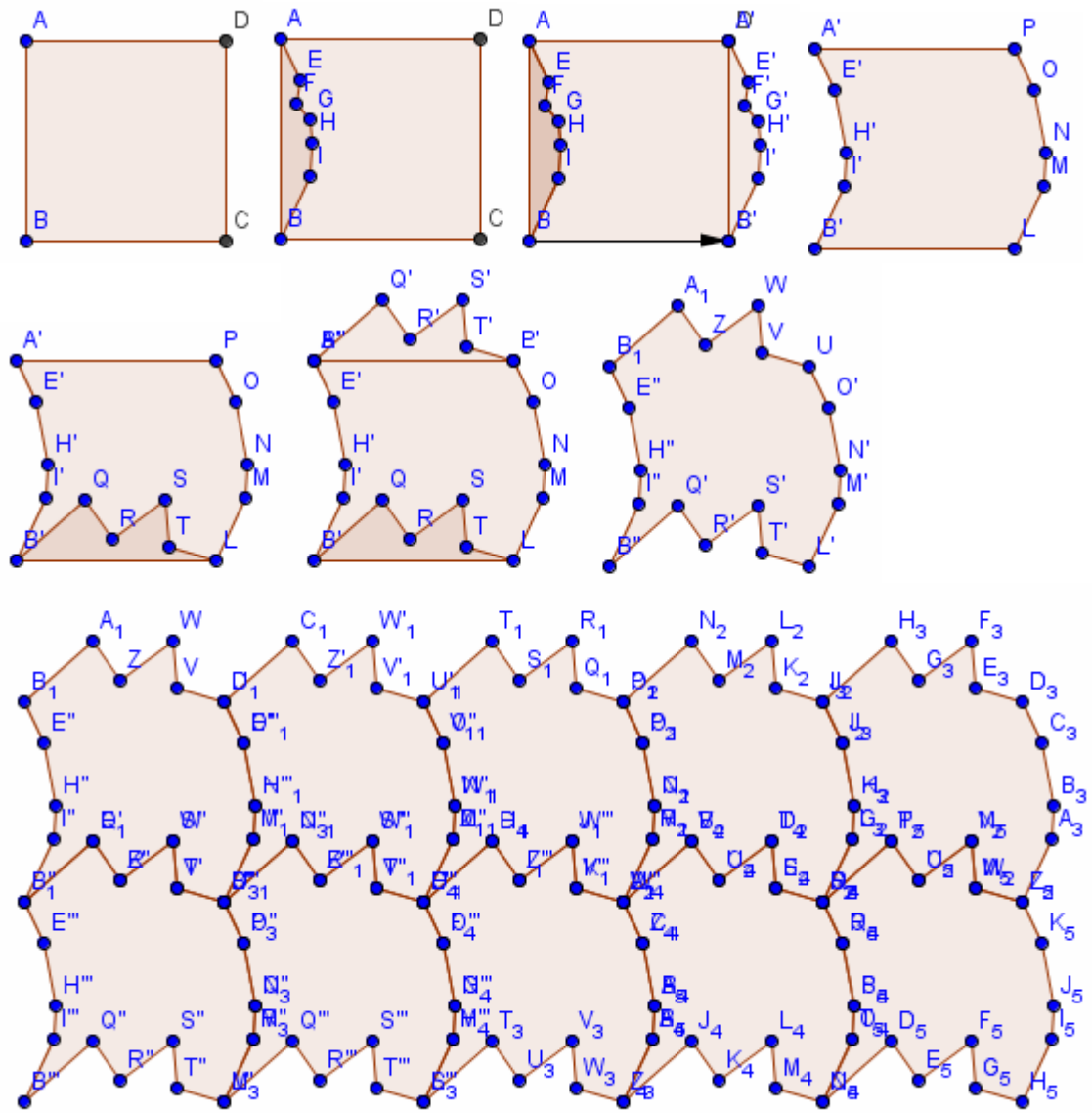


Figura 7: Construção do módulo de um mosaico

Assim, é garantido o encaixe da peça e esta tem uma forma diferente. O encaixe dessas peças será feito através de translações do módulo.



Figura 8: Mosaico partindo de um quadrado de uma aluna da 2º ano do E.M.

Como já referido, em parte das Escolas que tive contato durante minha graduação, o que é ensinado de Geometria fica restrito ao cálculo de área, perímetro e volume. Alguns conceitos como altura, base, geratriz, todos necessários para os cálculos, quando são abordados, é via exposição pelo professor.

Entre as várias recomendações da reunião do Kuwait, temos a utilização de calculadoras no 1º grau, ênfase às estimativas e ao cálculo mental, ensino de estatística e probabilidades no 1º grau, muita geometria significativa e conexões entre Matemática e Cultura. (Lopes, s/d)

Este trabalho possibilita ao aluno o entendimento do processo de transformação. Existem outras formas que podemos utilizar para a abordagem das transformações geométricas. Trabalhar simetria através da reflexão de um espelho ou de simetrizador, que será explicado no capítulo 3, na descrição das atividades realizadas.

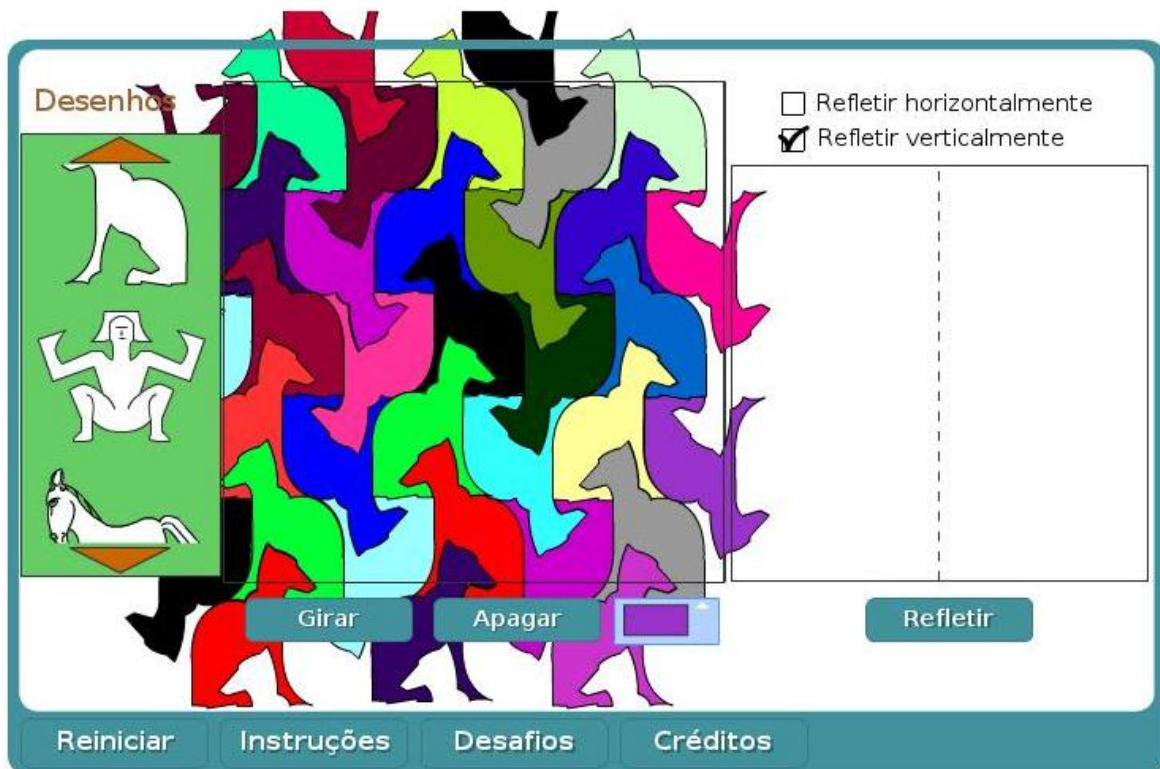


Figura 9: Trabalho de um aluno do 2º ano do E.M., feito no simetrizador

Nas transformações geométricas que foram objeto das atividades desse trabalho, operamos com conceitos de translação, rotação e simetria.

De acordo com Rezende e Queiroz (2000), definem-se as seguintes transformações geométricas no plano.

Translações – Sejam A e B pontos distintos do plano α . A **translação** $T_{AB}: \alpha \rightarrow \alpha$ é a isometria no plano α , que leva um ponto X de α no ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que $ABX'X$ é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X colineares, então T_{AB} é tal que XX' está na reta AB e os segmentos AX' e BX' têm o mesmo ponto médio.

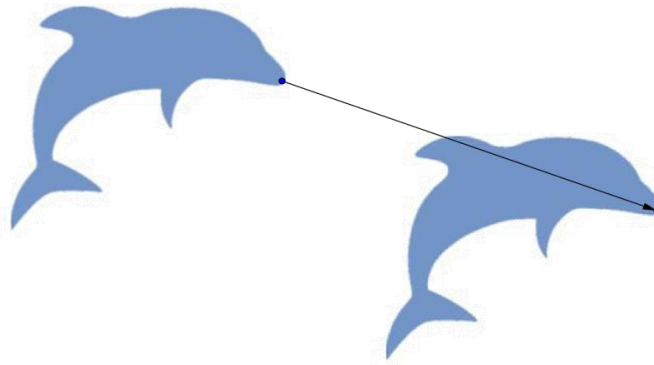


Figura 10: deslocamento em linha reta de um objeto - translação de uma figura por um vetor

Rotação – Seja O um ponto do plano e θ um número real com $-180 < \theta \leq 180$. A **rotação** de centro O e ângulo θ é a isometria $\Delta_{O,\theta} : \alpha \rightarrow \alpha$, que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X de α , $X \neq O$, no ponto $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado (OX, OX') é igual a θ , se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq 180$. Além disso $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de XX' , se $\theta = 180$; e $X' = X$ se $\theta = 0$.



**Figura 11: girar um objeto em torno de um ponto, pertencendo ou não ao objeto
rotação de uma figura por um ponto**

Reflexão – Consideremos uma reta r . A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada **reflexão na reta** r , ou simetria de reflexão na reta r . A reta r é chamada de *eixo da reflexão*.

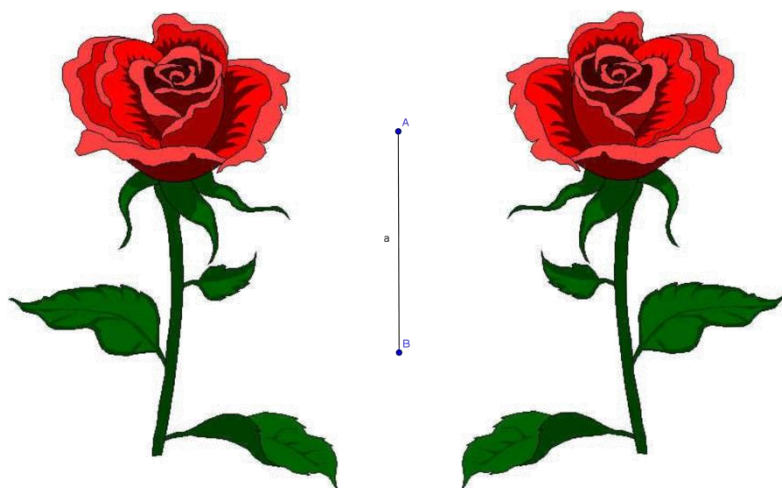


Figura 12: Reflexão de uma figura por um eixo

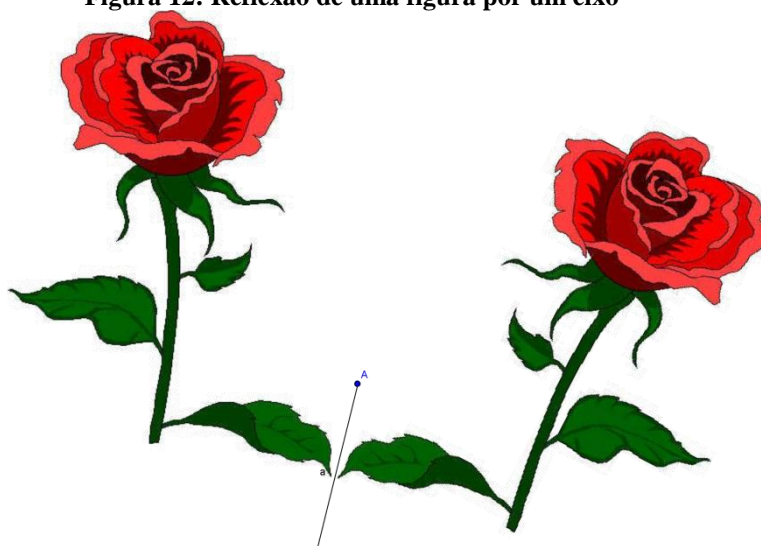


Figura 13: Reflexão de uma figura por um outro eixo

Segundo Murari (2004), utilizando espelhos, percebendo as simetrias e construindo caleidoscópio, observa-se a ideia de reflexão e rotação. Já os softwares Geogebra e MS Paint, utilizados nesse trabalho, auxiliaram para que os alunos manipulassem dinamicamente os conceitos de simetria via espelhos virtuais como será descrito no capítulo 3, na descrição das atividades.

2.3. Escher e a Matemática

Na união da Matemática e da Arte, existe um artista que consegue representar bem essa ligação. Trata-se do holandês Maurits Cornelis Escher. Usando sua obra, é possível trabalhar conceitos geométricos relacionados tridimensionalidade, ilusão de ótica, perspectiva e também, talvez uns dos mais interessantes, a noção de infinito.

Partindo de formas regulares quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos, Escher chega em outras formas e partindo dessas novas produziu vários de seus quadros.

A seguir, apresentamos algumas das obras desse artista nas quais foram utilizadas transformações sobre as formas regulares citadas acima.

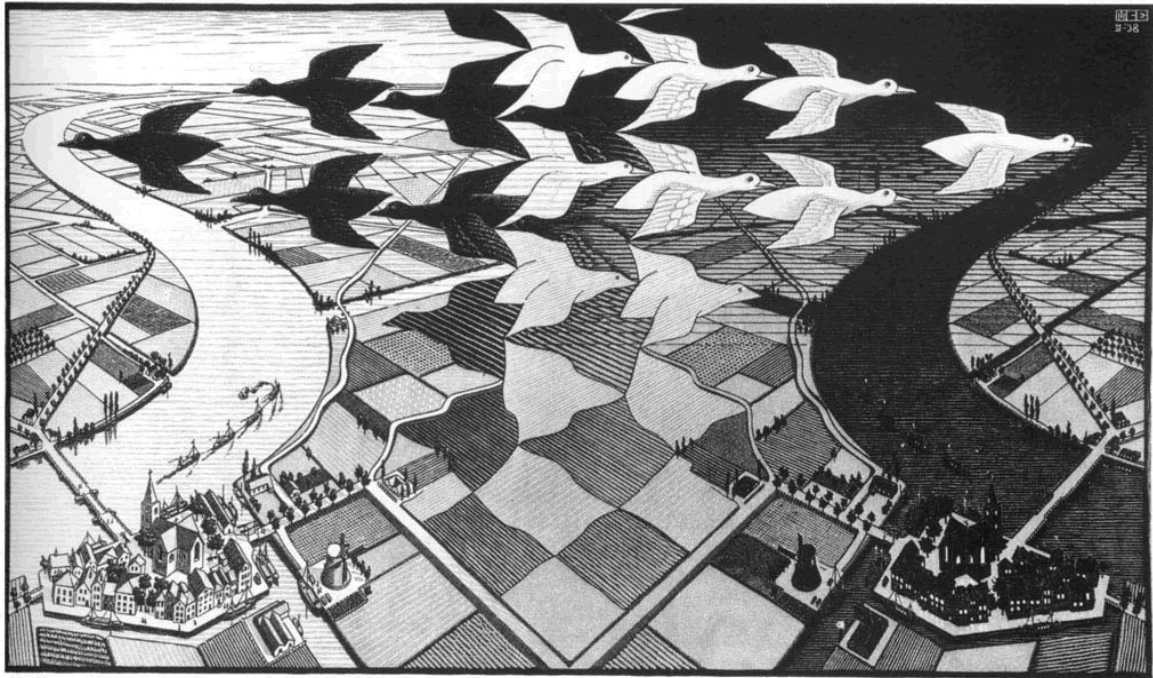


Figura 14: M. C. Escher, Dia e Noite, xilografia, 1939 <<http://www.mcescher.com/>>

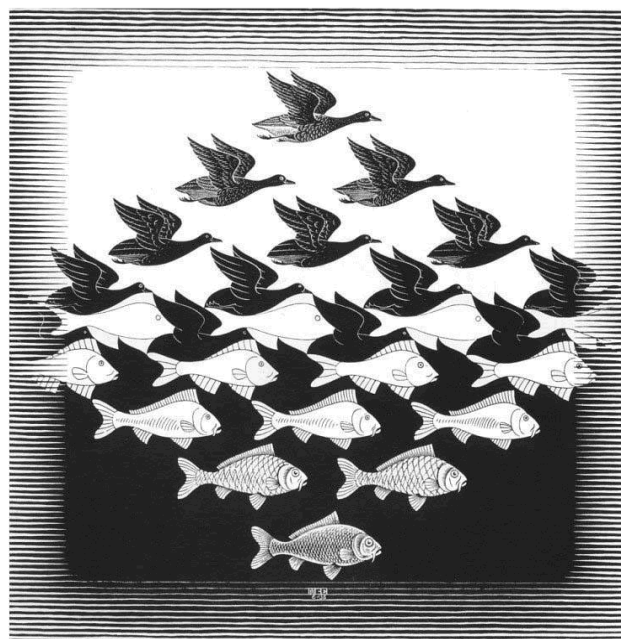


Figura 15: M. C. Escher, Céu e Água, xilografia, 1938 <<http://www.mcescher.com/>>

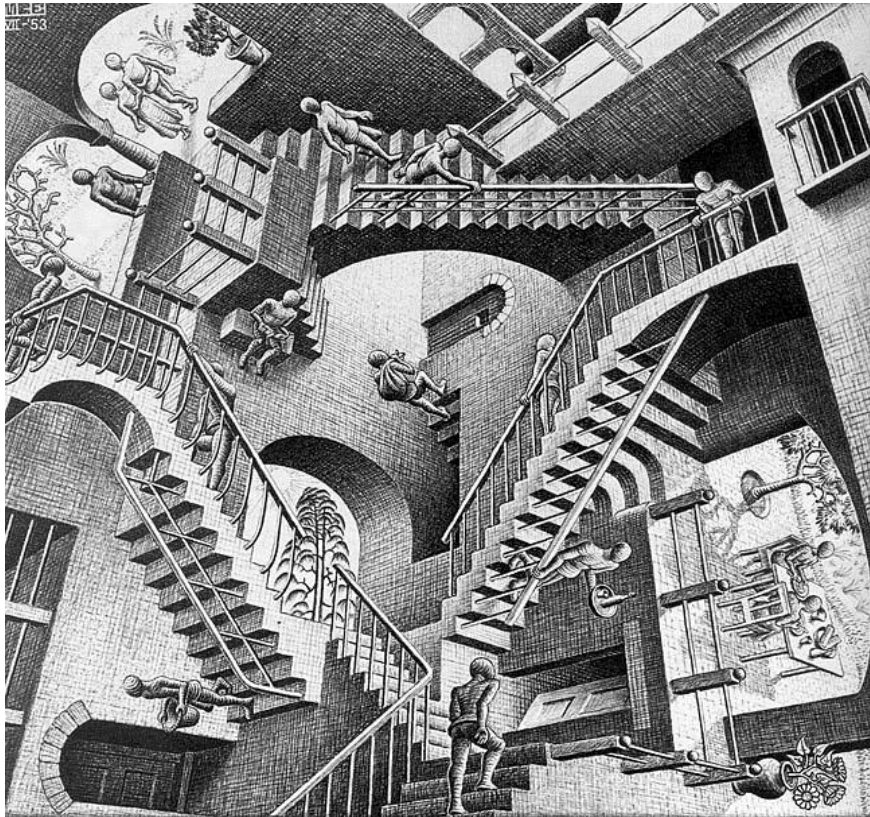


Figura 16: M. C. Escher, Relatividade, litografia, 1953 <<http://www.mcescher.com/>>

Em seus mosaicos podemos observar imagens complexas que se encaixam com perfeição. Por trás dessa complexidade existem conceitos simples da matemática, como translação, reflexão, simetria por um eixo e rotação.

Durante sua vida, suas obras eram pouco atrativas a críticos de artes, que, por não entenderem, simplesmente ignoravam-nas, já os matemáticos e físicos mostravam bastante interesse por seus trabalhos. Esse artista se mostrou muito mais racional do que sentimental, contrariando a ideia de artista que desenha o que sente. As suas obras impressionam por não haver um sentimento encoberto, elas são o que está ali, nos forçando a prestar mais atenção, enchendo nossa mente de dúvidas sobre o possível e o impossível (figura 16). Segundo Ernest (1991), isso é uma das coisas que fascina na obra de Escher: ela surpreende nos por seu racionalismo, não pelo sentimentalismo.

De acordo com um dos biógrafos do artista Ernest (1991), sua obra pode ser dividida no seguintes períodos:

- Estrutura espaço, de 1922 a 1937, compostas de composições paisagísticas, interpenetração de mundos diferentes e sólidos matemáticos, abstratos.

- Estrutura da superfície, de 1937 a 1945, composta de metamorfoses, ciclos e aproximação ao infinito.
- Relação entre espaço e superfície plana, de 1945 a 1956, composta de conflito espaço – superfície, perspectiva e figuras impossíveis.

Posso alegrar-me, com boa consciência, com esta perfeição e testemunhá-la, pois não fui eu que a inventei ou mesmo até descobri. As leis matemáticas não são nenhuma invenções ou criações humanas. Elas são, elas existem completamente independentes da mente humana.

Citação de M.C. Escher do livro de Bruno Ernest, 1991

De acordo do Ernest (1991) para criar seus mosaicos, Escher fazia uso dos conceitos de translação, reflexão, rotação e as possíveis combinações desses conceitos, sem ter conhecimentos matemáticos formais para isso. Em muitos quadros, Escher usou a divisão regular da superfície para a sua base, misturou formas abstratas concretas, possibilitando criar um peixe a partir de suaves transformações de uma ave, como podemos identificar no quadro Céu e Água (figura 15).

3. Metodologia

A proposta de Enriquecimento Curricular Pintando o Cubo, descrita no item 3.3, foi realizada no Colégio de Aplicação (CAp) da UFRGS. A seguir, caracterizarei a escola, cuja proposta didática preconiza o desenvolvimento da autonomia dos alunos, seus alunos e a abordagem que utilizamos no trabalho com eles.

As informações a seguir foram retiradas do site da escola: www.cap.ufrgs.br/interno.php em 03 de junho de 2011.

Princípios Embasadores

O Colégio de Aplicação contribui para o desenvolvimento pessoal e social, considerando as necessidades e interesses da comunidade. Por meio de ações no ensino, pesquisa e extensão, configura-se como um espaço de construção de conhecimento no âmbito do Ensino Fundamental e Médio.

O Colégio de Aplicação tem sua proposta pedagógica referenciada nos seguintes marcos quanto a:

a) Contexto Acadêmico:

- CAp é a Escola de Ensino Fundamental e Médio da UFRGS, com os compromissos sociais e acadêmicos da Universidade Pública a qual pertence.
- A condição privilegiada junto à UFRGS possibilita o desenvolvimento do ensino, pesquisa e extensão voltados para propostas pedagógicas inovadoras e viáveis aos desafios contemporâneos de Educação Fundamental e Média.

b) Metas de Educação:

- O CAp deve assumir a responsabilidade de ser uma Escola envolvida com a construção de alternativas curriculares que atendam a todos nas suas diferenças.
- A concepção de educação deve contemplar uma visão de futuro que considera a condição humana como objeto essencial de todo ensino.
- As proposições educativas devem promover a emancipação e a justiça social com base nas trocas de construções entre o sujeito e o coletivo.
- A proposta educacional, nas diferentes áreas de conhecimento, deve proporcionar ações vinculadas ao ambiente que busquem a compreensão dos aspectos sociais, políticos, históricos e econômicos que interagem no componente ambiental.

c) Ações Pedagógicas:

- O conhecimento é concebido como um processo histórico e dialético cuja apropriação pelos sujeitos é uma construção que se realiza no contexto escolar e fora deste, na interação entre diferentes saberes.
- O currículo deve ser flexível e capaz de conceber a Escola como espaço pedagógico de produção de conhecimento.
- A prática pedagógica deve ser tratada como uma investigação, uma experimentação, um espaço de descoberta e de construção, onde se promovem a liberdade de pensamento e a busca de uma ação crítica e transformadora.
- O conhecimento dentro de sua provisoriidade passa a adquirir sentido quando oportuniza elos entre o saber teórico e a práxis, promovendo a articulação com o mundo do trabalho e a sociedade da informação.

3.1 Sobre o grupo de alunos e professores

Os estudantes do CAp desde o 2º ano do Ensino Médio participam de disciplinas eletivas, as quais fazem parte do currículo da escola. Estas podem abordar qualquer temática, como música, teatro, culinária, matemática, física, português, filmagens, etc. A participação em algum desses ECs é obrigatória, mas cada aluno pode optar pelo EC que deseja participar. Nesse trabalho os alunos desenvolvem a autonomia na medida em são confrontados com situações nas quais precisam buscar os materiais necessários para o desenvolvimento das atividades, realizar entrevistas e, em diversos casos, pesquisar sobre temáticas relacionadas com o EC no qual estão matriculados.

Nossa disciplina foi desenvolvida com dez alunos da 2º ano do Ensino Médio, sendo que a maioria deles está na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental. A turma foi formada por três meninos e sete meninas. O grupo caracterizou-se por ser muito unido, não apresentando divisões internas e demonstrando fraternidade. Estávamos em cinco professoras, duas do CAp, uma de Matemática, Profa Simone Dias Cruz, uma de Artes, Profa Daniela Schneider, três acadêmicas do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, Juliana Müller Silveira, Marilise Oliveira Jorge e Sara Oppermann Cordoni, e um professor do Instituto de Matemática da UFRGS, Prof. Marcus Basso.

Os professores da escola elaboram seus ECs e fazem uma breve apresentação de cada proposta de trabalho para todos os alunos do 2º ano. A partir dessa apresentação cada aluno escolhe um EC para participar e, caso o número de vagas não atenda o número de pedidos para um determinado EC, é realizado um sorteio de vagas. Depois

que a distribuição foi concluída, a presença do aluno passa a ser obrigatória e cada um está sujeitos às avaliações realizadas nessa “nova” disciplina.

3.2 Coleta dos dados

As aulas do EC Pintando o Cubo! Ocorreram nas sextas-feiras, de 06 de agosto até 10 de dezembro de 2010, totalizando dezessete encontros. Cada encontro teve duração de uma hora e trinta minutos, totalizando vinte e cinco horas e meia. No EC trabalhamos com Artes e Matemática, o que representou uma novidade para o grupo de acadêmicas, pois se tratava de realizar um trabalho integrado e de maneira que as duas disciplinas tivessem a mesma importância.

Após cada aula, nós, professoras e professor, discutíamos o que tinha ocorrido, as dúvidas e dificuldades dos alunos e, a partir disso, planejávamos as próximas atividades. Dessas discussões, juntamente com as respostas dos alunos para cada atividade, era feito um registro de cada dia, na forma de um diário de campo. Esses registros serão apresentados no capítulo 4 e neles encontram-se as minhas impressões das atividades bem como os meus registros sobre as reações dos alunos às atividades.

3.3 Descrição das Atividades

Com o objetivo de:

- trabalhar as transformações geométricas abandonando a ideia do tipo “senso comum” que a matemática é ensinada com quadro e giz;
- desenvolver a noção de que a simetria, translação, rotação, reflexão estão ligadas ao nosso cotidiano;
- reconhecer elementos matemáticos em obras de arte;
- incentivar o uso de softwares para a construção de conceitos;

elaboramos um planejamento cujo tema sensibilizador partiria da observação e interpretação de elementos artísticos e matemáticos presentes em imagens de Escher.

Para isso selecionamos e apresentamos para os estudantes imagens de mosaicos, ilusão de ótica, com a intenção que os estudantes se sentissem motivados a pesquisar sobre esses conceitos em obras de arte. A partir disso, pretendíamos verificar a viabilidade dessas construções na realidade e construir mosaicos que apresentassem características similares aos de Escher.

Em nosso plano previmos mais do que foi possível realizar. A seguir, apresento nosso plano de trabalho inicial para o EC Pintando o Cubo.

Conceitos, competências e/ou habilidades que serão enfatizados nesta etapa:

- Valorização do pensar, do perceber e sentir, trabalhando o processo criador como elemento necessário ao equilíbrio entre o intelecto e as emoções.
- Maturidade do sentido da arte como trabalho, bem cultural e forma de comunicação.
- Constância do processo de construção do conhecimento através do seu repertório estético, técnico e histórico por meio do desenvolvimento de uma expressão plástica e poética própria.
- Desenvolvimento do espírito crítico, do gosto artístico e estético, do senso de observação, levando o aluno a expressar sentimentos, conceitos e experiências através das atividades artísticas.

Descrição detalhada dos conhecimentos específicos que serão desenvolvidos:

- Leitura de imagem
- Escher – a arte e a matemática
- Malha bidimensional a partir de módulo
- Rotação, translação e reflexão de figuras
- Formas geométricas
- Caleidoscópio e giroscópio
- Desenho de observação
- Leonardo da Vinci – o artista matemático
- Perspectiva

Abordagem metodológica:

- Criação, desenvolvimento e execução de projetos artísticos individuais e coletivos.
- Leitura de imagens de Obras de Arte e da cultural visual.
- Aulas expositivas e trabalhos de pesquisa.
- Análises e debates da produção própria e dos colegas.

Para a realização deste EC utilizamos as salas informática para as atividades com os softwares e a sala de artes para a realizarmos as outras atividades. A descrição das atividades bem como os materiais e softwares utilizados encontram-se a seguir.

Descrição das atividades desenvolvidas:

ATIVIDADE 1: Pentaminós

Dadas as únicas 12 peças possíveis de serem formadas com 5 quadrados cada, permitindo as rotações espaciais, monte um retângulo com todas as peças. Atividade realizada em trios de estudantes.

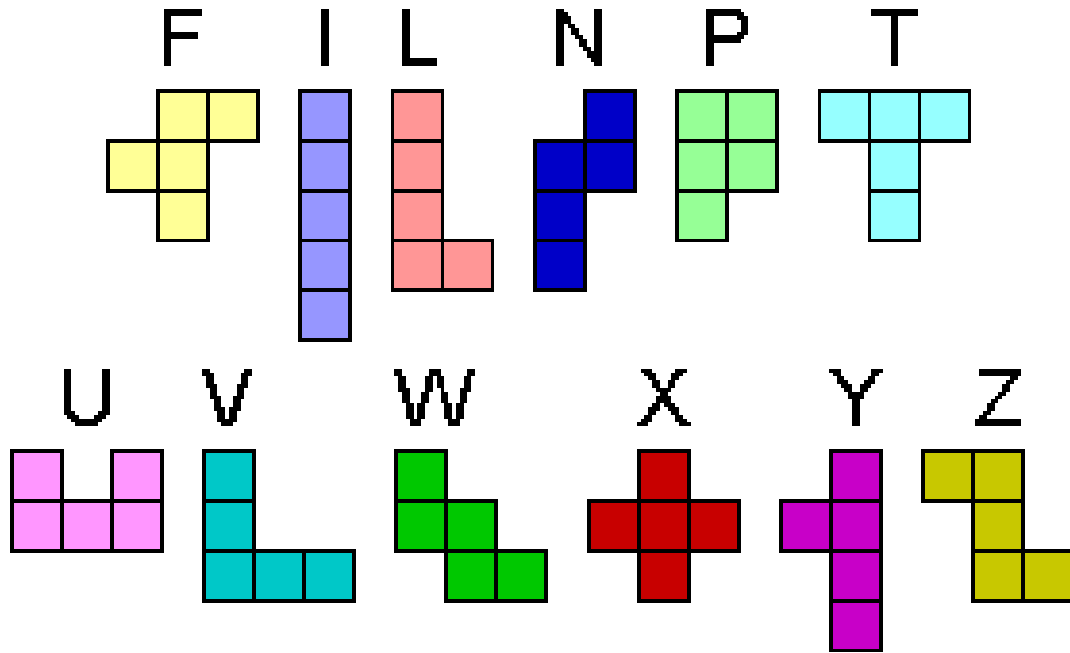


Figura 17: Peças do Pentaminó

ATIVIDADE 2: Leitura de imagem

Dentre um conjunto de imagens disponíveis, o aluno deve escolher uma e, a partir de uma leitura dessa imagem: descrever o que está vendo. Além disso, deve procurar aspectos de matemática na obra e explicitá-la. Atividade realizada individualmente.



Figura 18: Os alunos escolhendo sua imagem

ATIVIDADE 3: Construção de mosaico com formas geométricas com colagem

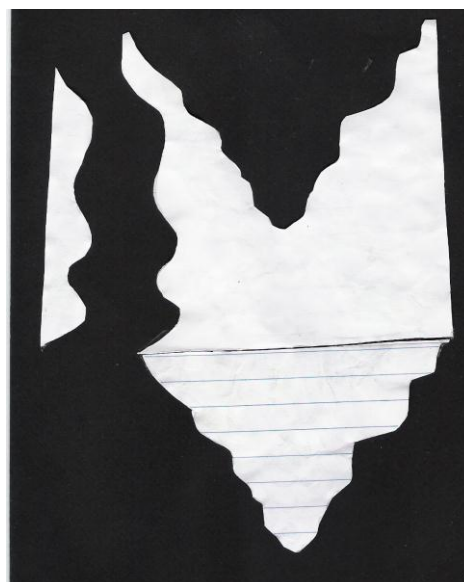
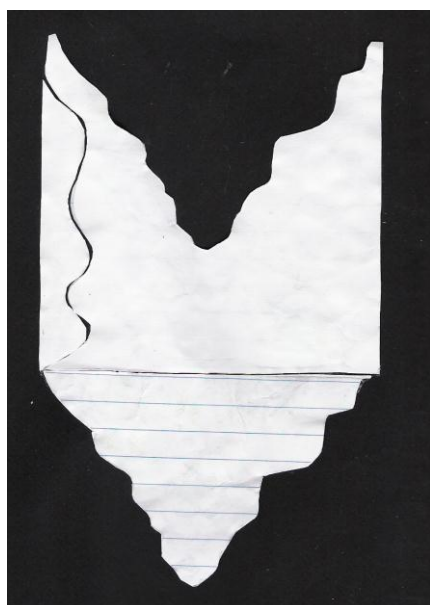
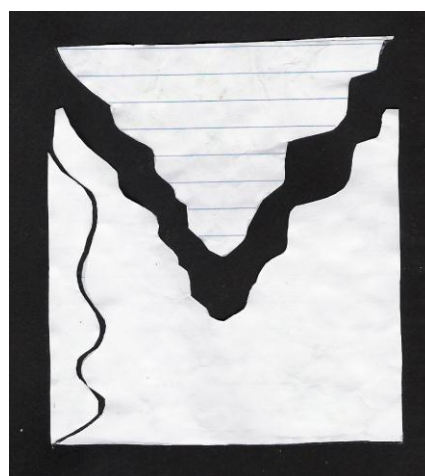
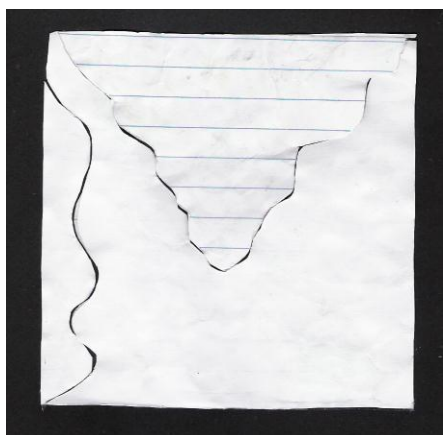
Escolher páginas de revistas coloridas; desenhar nessas folhas figuras geométricas, iguais ou diferentes; recortar e colar numa folha A3, formando um mosaico, de forma que não fiquem espaços em branco e nenhuma figura sobreposta. Atividade realizada em grupos de 5 componentes.



Figura 19: Montagem do mosaico com formas geométricas

ATIVIDADE 4: Construção de mosaico a mão com translação

Numa folha de papel branca, desenhar um quadrado com 7cm de lado e recortar. Deve-se traçar uma linha, desenhando qualquer forma, ligando um vértice a outro adjacente. Recorta-se essa figura e com uma fita adesiva cola-se no lado oposto ao lado do quadrado que se retirou. Desenha a nova figura com apenas dois lados originais e recorta-se. Repete-se esse passo para que não haja nenhum lado original no quadrado. Essa nova figura se encaixa em seus lados paralelos. Com translação, vamos encaixando esse módulo até que a folha a A4 seja recoberta. Atividade realizada individualmente.



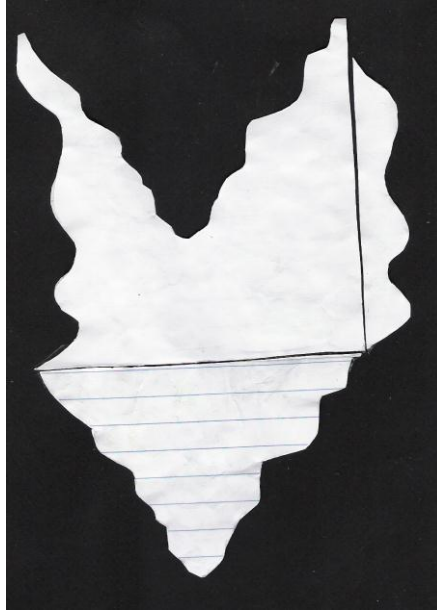
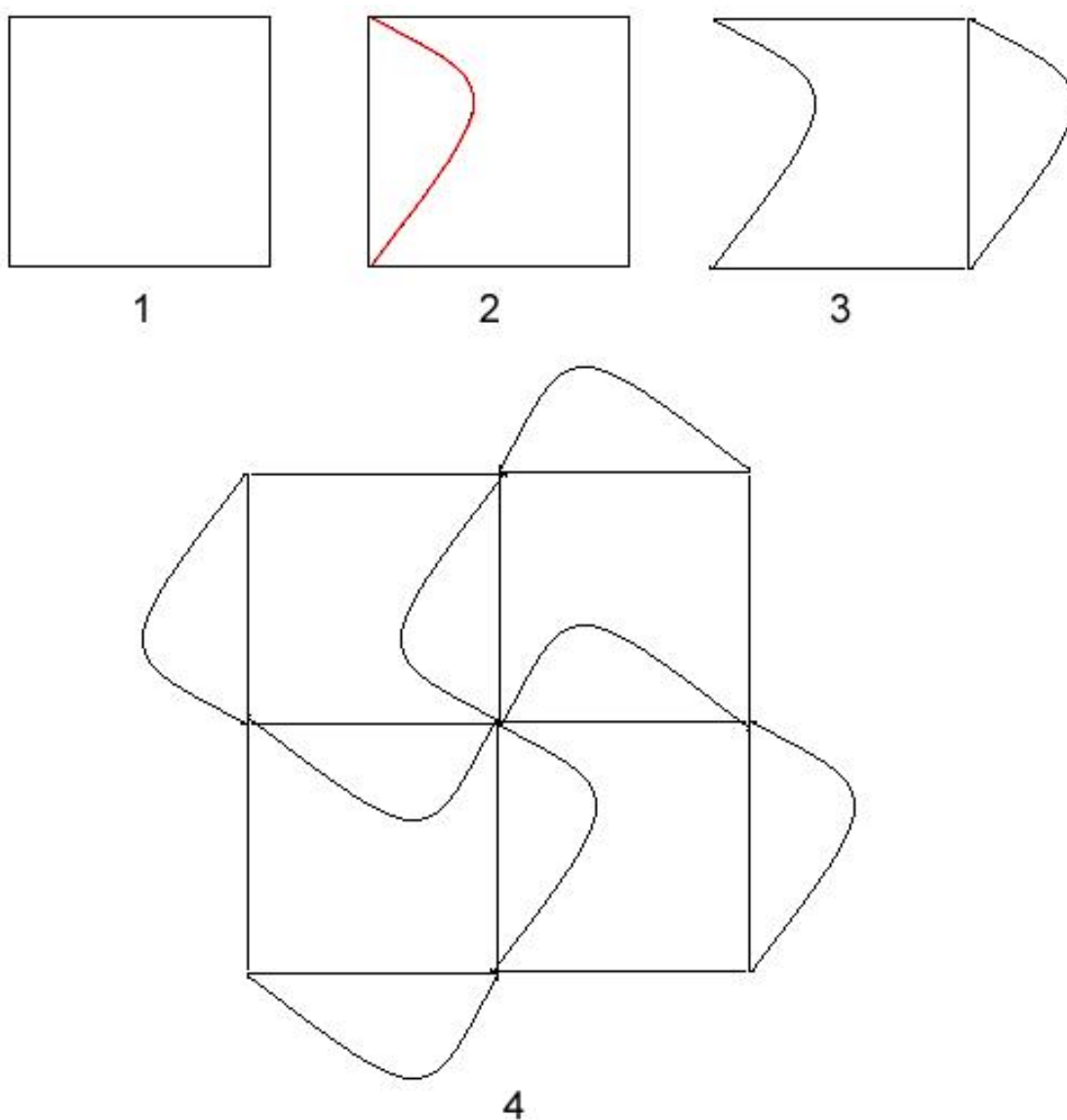


Figura 20: construção do módulo de um mosaico feito a mão, partindo de um quadrado

ATIVIDADE 5: Construção de mosaicos no MS Paint¹ com rotação

Utilizando o software MS Paint, desenha-se um quadrado (etapa 1 na figura 21); liga-se dois vértices adjacentes com uma linha, que não o lado (etapa 2 - linha vermelha na figura 21) e que esteja dentro do quadrado, formando uma forma qualquer; essa forma deve ser recortada, transladada (etapa 3 na figura 21) para o lado oposto ao que foi desenhada e colada. Repete-se esse processo com os demais lados que restam. Com uma nova figura pronta, escolhe-se uma ponta para rotar a figura e fazer um mosaico com um ponto de rotação (etapa 4 na figura 21). Após essa construção, os estudantes colorem o mosaico de acordo com seu gosto pessoal. Atividade realizada individualmente.



¹ Software da Microsoft para desenhos e simples edições de imagem.

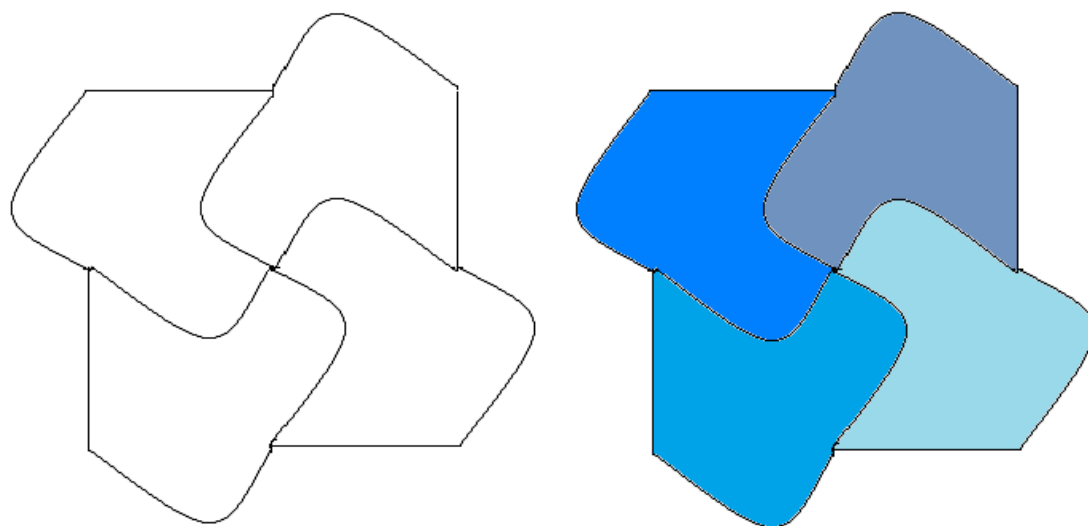


Figura 21: Construção de um mosaico com ponto de rotação a partir de um quadrado no MS Paint

ATIVIDADE 6: Construção de mosaicos no Geogebra² com translação

Usando o software Geogebra, deve-se seguir os seguintes passos: desenhar um quadrado; em seguida, unir dois vértices adjacentes, formando um novo polígono; marcar um vetor para que esse novo polígono seja transladado ao lado oposto do quadrado; repetir o processo, formando uma nova figura; marcar um outro vetor para que possa fazer a translação da nova figura, montando um mosaico. Na figura 22 encontram-se ilustrados os passos descritos acima. A atividade é realizada individualmente.

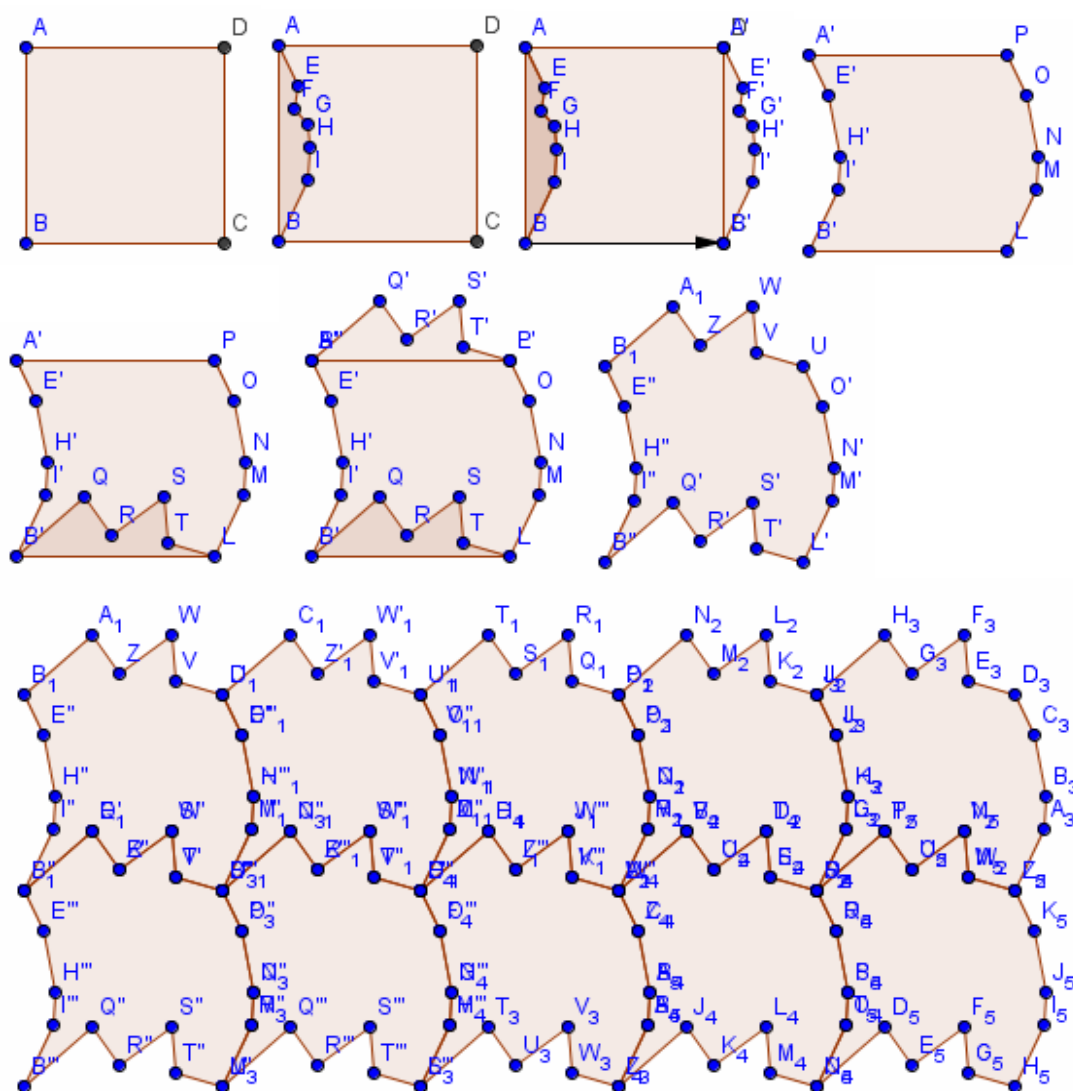


Figura 22: Construção de um mosaico, com módulo a partir de um quadrado

² Software matemático livre de geometria dinâmica e que pode ser encontrado no endereço <http://www.geogebra.org/cms/>

ATIVIDADE 7: Construção de “Flor” no Geogebra com rotação

Utilizando o software Geogebra, deve-se desenhar um quadrado; em seguida, unir dois vértices adjacentes formando um novo polígono; marcar um vetor para que esse novo polígono seja transladado ao lado oposto do quadrado; repetir o processo, formando uma nova figura; escolher um novo vértice da figura e fazer rotações até que se chegue no ponto inicial conforme representado na figura 23. A atividade é realizada individualmente.

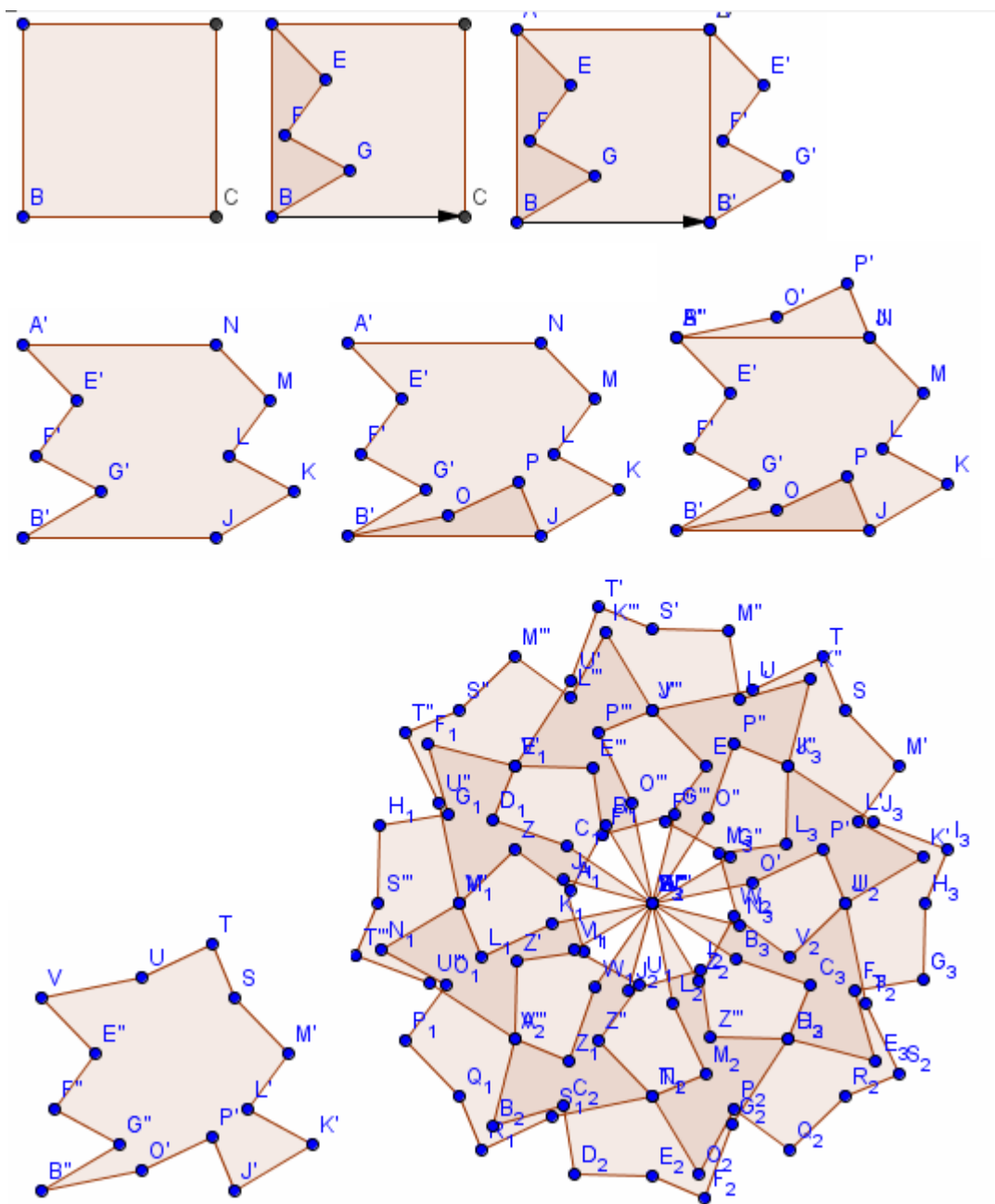


Figura 23: Construção de uma “flor” a partir de um quadrado no Geogebra

ATIVIDADE 8: Construção de mosaico gigante a mão

Dado um módulo para a construção de um mosaico, primeiramente deve-se descobrir de que figura geométrica foi derivada o módulo. Cada um copia em uma folha e recorta-o para a construção do mosaico. Será construído um mosaico único com a turma em três folhas A1³ coladas lado a lado. Então antes de cada um ir passando o módulo para a folha deve verificar de que forma irá se encaixar com o do colega.

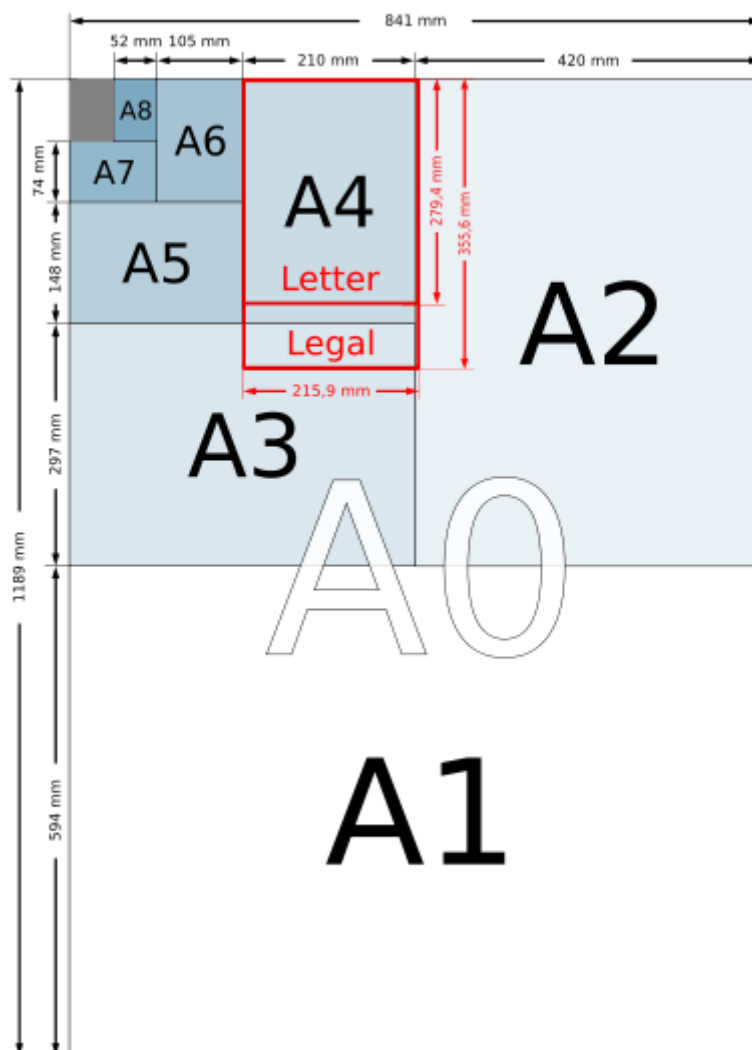


Figura 24: representação dos tamanhos de papel.
< [http://pt.wikipedia.org/wiki/A1_\(28tamanho_de_papel\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/A1_(28tamanho_de_papel))>

³ O tamanho de papel A1 é definido por uma norma denominada ISO 216 e tem as seguintes dimensões: 594mm de largura e 841mm de altura. Fonte: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/A1_\(28tamanho_de_papel\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/A1_(28tamanho_de_papel))>

ATIVIDADE 9: Construção de caleidoscópio

Material necessário: um rolo central de papel toalha, três espelhos retangulares 20cm por 2cm, sacolas de plástico, pedaços bem pequenos de papel, plástico ou tecido coloridos, acetato, tampa transparente de garrafa de 5 litros de água.

Segundo Barbosa (1998), a construção do caleidoscópio se dá por um conjunto de três espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano formando um prisma triangular com as faces espelhadas para o interior. Uma das bases desse prisma é fechada com, neste caso, acetato, para a entrada da luminosidade no interior. A outra base possui um orifício para a observação.

Atividade realizada individualmente.

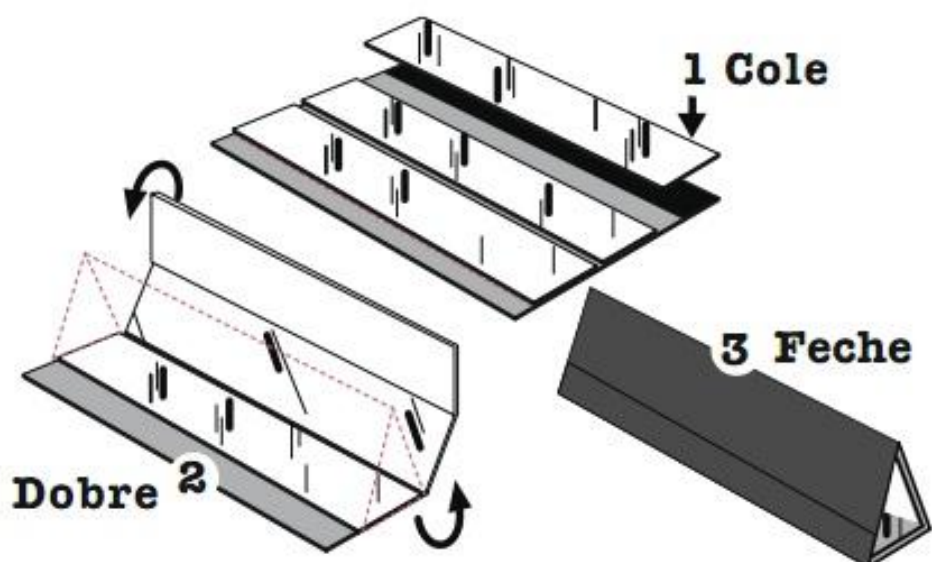


Figura 25: Montagem do Caleidoscópio, retirado do livro *Matemáticas Experimentais*

ATIVIDADE 10: Mirror Cards

Material: um conjunto de cartões com um cartão principal e um espelho. Utilizando o espelho exclusivamente no cartão principal, o estudante deve obter por reflexão as imagens dos demais cartões como na figura 26. O estudante deve explicar o porquê de conseguir ou não obter as imagens dos cartões.



Figura 26: uso de *Mirror Car*

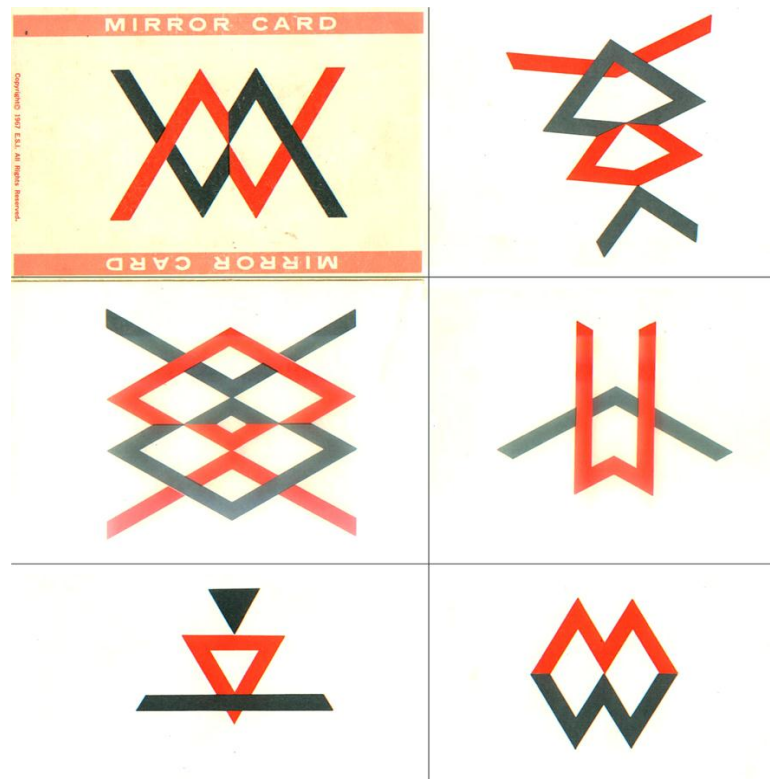


Figura 27: Conjunto de *Mirror Car*, 1967 - McGraw-Hill Book Company

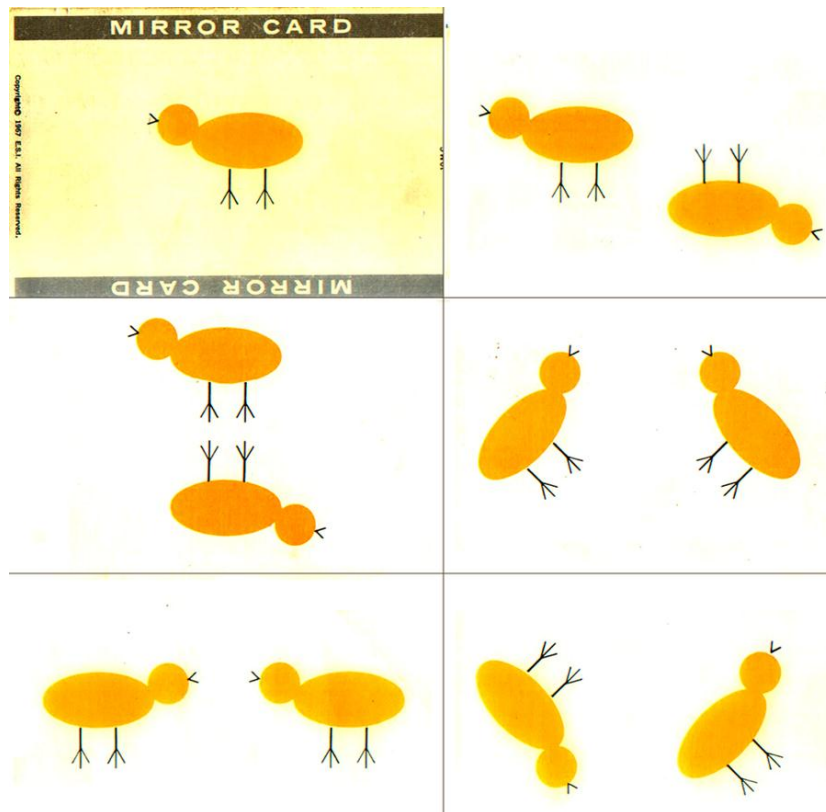
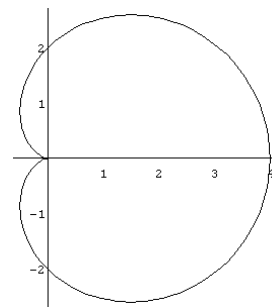
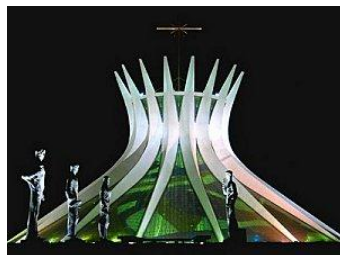


Figura 28: Conjunto de *Mirror Card*, 1967 - McGraw-Hill Book Company

ATIVIDADE 11: Localizar eixo de simetria em imagens variadas

Procurar pelo menos cinco imagens simétricas na internet e determinar a localização de eixo (ou eixos) de simetria. Nesse conjunto de imagens deve existir no mínimo um gráfico, uma imagem da natureza e uma imagem apresentando simetria radial.



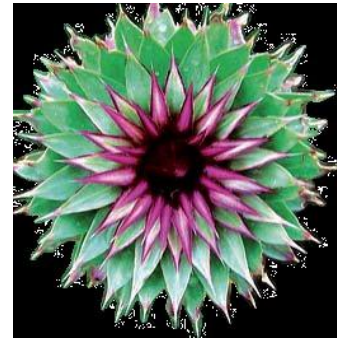
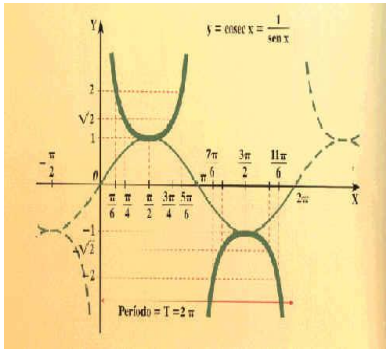


Figura 29: Conjunto de imagens usados como exemplos de simetria

ATIVIDADE 12: Simetria dos rostos

Previamente, cada estudante e professoras foram fotografadas e as fotos foram publicadas em um servidor. Cada aluno deve fazer download de sua foto da internet, dividir o rosto com uma linha (eixo) que passa pela ponta do nariz e entre as sobrancelhas, no MS Paint e recortar uma das metades do rosto; em seguida, dever abrir o arquivo contendo o meio rosto salvo, colocá-lo no software Geogebra e utilizando a ferramenta “reflexão”, refletir sobre o eixo marcado anteriormente. Atividade para ser realizada individualmente.





Figura 30: Montagem da reflexão do rosto

ATIVIDADE 13: Simetrizador

Acessar o endereço: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm, para, em seguida, responder um conjunto de desafios.

O simetrizador é um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA) desenvolvido pela equipe de Mídias Digitais para Matemática (MDMat) do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IM-UFRGS) e que tem por objetivo auxiliar o estudante a compreender conceitos de simetria via pavimentação de um espaço plano com imagens variadas.

Uso do simetrizador

- 1 - Lista de desenhos disponível: clique nas setas para movimentar os desenhos para cima e para baixo. Para escolher alguma, basta clicar no interior dele.
- 2 - Palco: aqui manipula-se as réplicas. Você pode clicar e arrastar as figuras ou movimentá-las com as setas do teclado, a figura a ser arrastada será a última que recebeu um clique.
- 3 - Apagar todos: apaga tudo, deixando o palco limpo.
- Apagar último: apaga a última figura clicada.
- 4 - Paleta de cores: ao clicar na paleta e depois em uma cor, a última figura clicada será pintada.
- 5 - Campo refletor: área sobre qual a figura deve ser colocada para refletir.
- 6 - Critério de reflexão: permite que você escolha o eixo de reflexão da figura do

campo refletor.

- 7 - Eixo de reflexão: eixo em torno do qual a figura será refletida.
- 8 - Refletir figura: reflete a figura que está no campo refletor.
- 9 - Rotor: gira a última figura clicada.

Desafios:

- É possível preencher o palco usando apenas figuras iguais?
- É possível combinar mais de um tipo de figura e ainda assim preencher por completo o palco? Como você faria para conseguir isto?

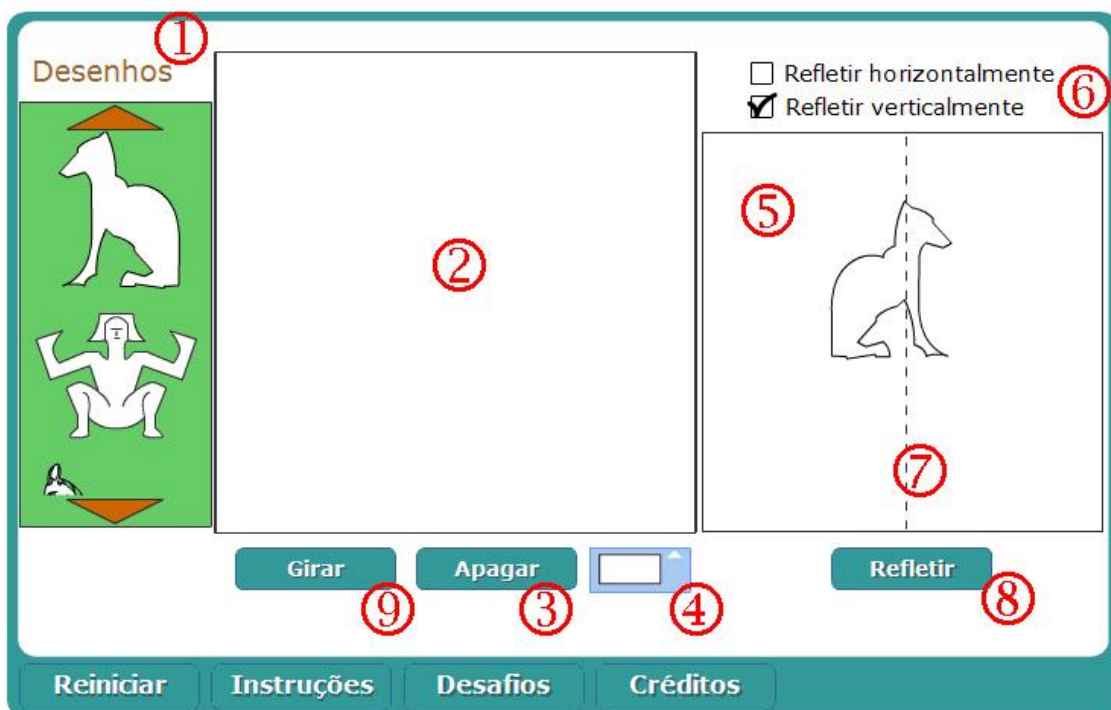


Figura 31: Tela inicial do Simetrizador

Depois de cada aula realizada, as reações e o comportamento dos alunos eram registrados num diário de campo. As anotações encontram-se na análise de dados deste trabalho.

4. Análise da Implementação das Atividades nos encontros com os Estudantes

Este trabalho visou criar e colocar em prática uma proposta didática para a aprendizagem em Matemática, com enfoque na realização de trabalhos artísticos. Abaixo seguem os registros realizados a cada encontro ocorrido com os alunos. Neles estão contempladas as descrições das atividades, as impressões pessoais sobre a execução da proposta e sobre os trabalhos dos estudantes, e ainda, transcrições de impressões manifestadas pelos alunos.

Primeiro Encontro - 06/08

Nesse dia, os estudantes conheceram as propostas de todos os ECs. Depois de escolhido o EC para qual iriam, cada disciplina levou seus alunos para as salas, para começar os respectivos trabalhos.

Em nosso primeiro encontro com os alunos, fizemos uma apresentação do grupo de professores e uma exposição sobre o trabalho que seria desenvolvido ao longo do semestre no EC Pintando o Cubo. Como primeira atividade, levamos um pentaminó, quebra-cabeça composto por 12 peças, cada uma delas formada por 5 quadrados de mesmo tamanho. (Figura 32)

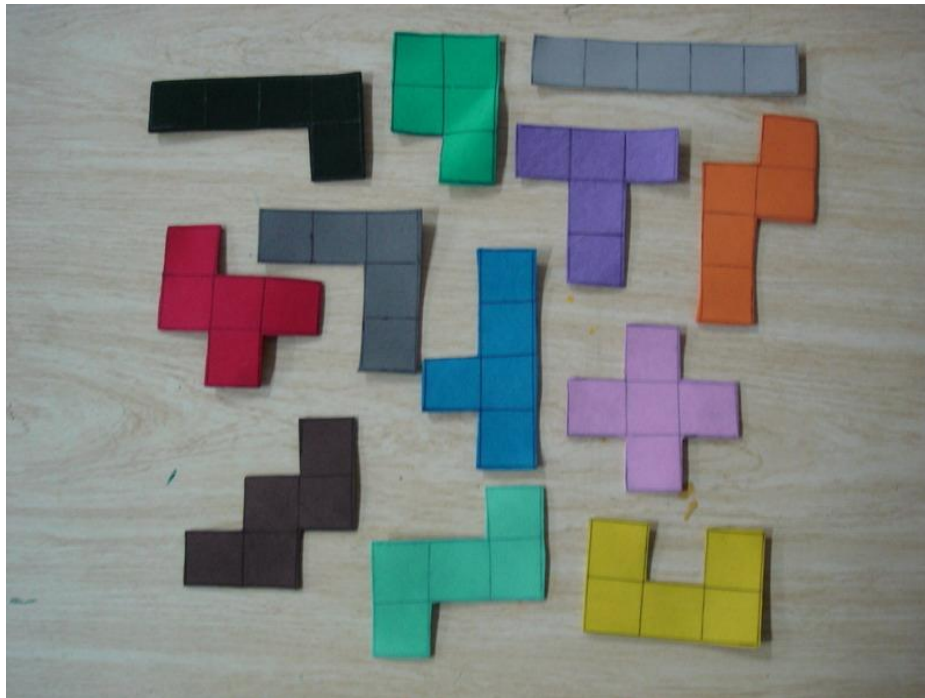


Figura 32: Peças do Pentaminó

Essas peças podem ser encaixadas formando retângulos de vários tamanhos.

Utilizando as 12 peças do pentaminó é possível formar os seguintes retângulos:

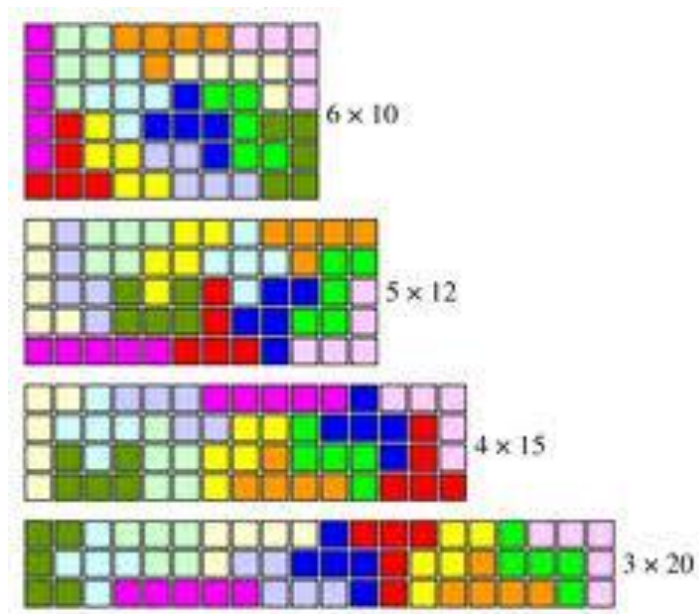


Figura 33: Possíveis retângulos montados com todas do pentaminó

Propusemos aos alunos que eles tentassem formar esses retângulos (figura 33), usando as 12 peças do pentaminó. Cada grupo, de dois ou três integrantes, recebeu um jogo de pentaminós. De início eles acharam que seria uma tarefa simples pois as peças eram fáceis de serem encaixadas. A maioria dos grupos optou pelo método da tentativa e erro. Em apenas um grupo, um aluno calculou a área que teria esse retângulo: $12 \times 5 = 60$. Com isso, ele pensou então nas possíveis combinações para se chegar em 60: 1×60 , 2×30 , 3×20 , 4×15 , 5×12 e 6×10 . Em seguida, ele notou que nem todas poderiam ser geradas com as peças que possuía, concluindo então que os únicos retângulos que poderiam ser criados eram: 3×20 , 4×15 , 5×12 e 6×10 .

O pensamento dele foi surpreendente, ao propor essa tarefa, não imaginávamos que alguém resolveria. Mas nem ele, nem os alunos que fizeram na tentativa e erro conseguiram montar o retângulo com as peças dos pentaminós.



Figura 34: Estudantes utilizando as peças do pentaminó

Segundo Encontro - 13/08

Os alunos receberam um pequeno texto falando de M.C. Escher, artista das obras que seriam vistas por eles na aula. Espalhamos em uma mesa as imagens de mosaicos criados por Escher. Esses mosaicos tinham como característica comum partirem de alguma forma geométrica regular. A professora de Artes fez uma breve leitura artística dessas imagens juntamente com os alunos e coube aos professores de Matemática questioná-los sobre a presença de Matemática nessas mesmas imagens.

Nas aulas de Artes da Escola os alunos já estavam habituados a fazer leituras artísticas. A novidade consistia em também fazer uma observação sobre a Matemática presente nessas imagens. Avaliamos que os aspectos de matemática, nessa atividade, ficaram um pouco prejudicados, tendo em vista ser a primeira vez que os alunos tiveram que observar e abstrair idéias matemáticas em obras de artes.

A imagem é constituída por pássaros, as cores vão do amarelo ao marrom. São simétricas, elas se sobrepõem umas às outras. Formam losângos entre os pássaros que fazem as formas irem aumentando. Os pássaros se intercalam, em cores, onde tem um escuro, embaixo tem um claro e enquanto um está em pé o outro está deitado.

Figura 35: Trabalho de leitura de imagem de uma aluna da 2ª série do E. M.



Figura 36: M. C. Escher, Pássaros no Espaço, tecelagem

A segunda atividade realizada nesse segundo encontro consistiu em utilizar folhas coloridas e montaram um mosaico apenas com formas geométricas regulares em uma folha A3. Essa atividade foi desenvolvida em grupos de 5 pessoas. (figura 19, página 30).

Terceiro Encontro - 20/08

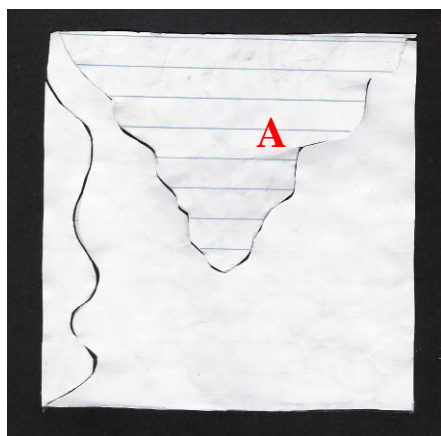
Na atividade desse encontro solicitamos que os alunos, partindo de um quadrado, chegassem em uma forma abstrata, a partir de um módulo.

Como se deu a construção do módulo?

Partindo de um quadrado, se recorta uma forma geométrica como, por exemplo, a indicada em A na figura 37; recorta-se essa forma e a deslocamos de maneira que ela fique colada no lado oposto do quadrado. Repete-se esse procedimento para uma outra forma geométrica como, por exemplo, indicada em B na figura 37. Com esses procedimentos, obtém-se um módulo.

Depois do módulo pronto, os desenhamos em uma folha de raio x, facilitando o trabalho na hora de criar o mosaico. Na construção dos moldes, os alunos apresentaram dificuldade, no momento de transferir o trabalho da folha de rascunho para a folha de raio x, incluindo a pouca prática em recortar com tesoura. Os professores e os alunos que concluíam seus moldes auxiliaram os demais estudantes.

Depois de construídos os moldes, eles deveriam cobrir uma folha de ofício A4 com sua figura, e pintá-la, de forma que cores iguais não ficassem uma ao lado da outra. Nessa parte da atividade foi visível o empenho de alguns alunos. Alguns, em função de imprecisões nas construções, repetiram os passos dessa atividade desde o início.



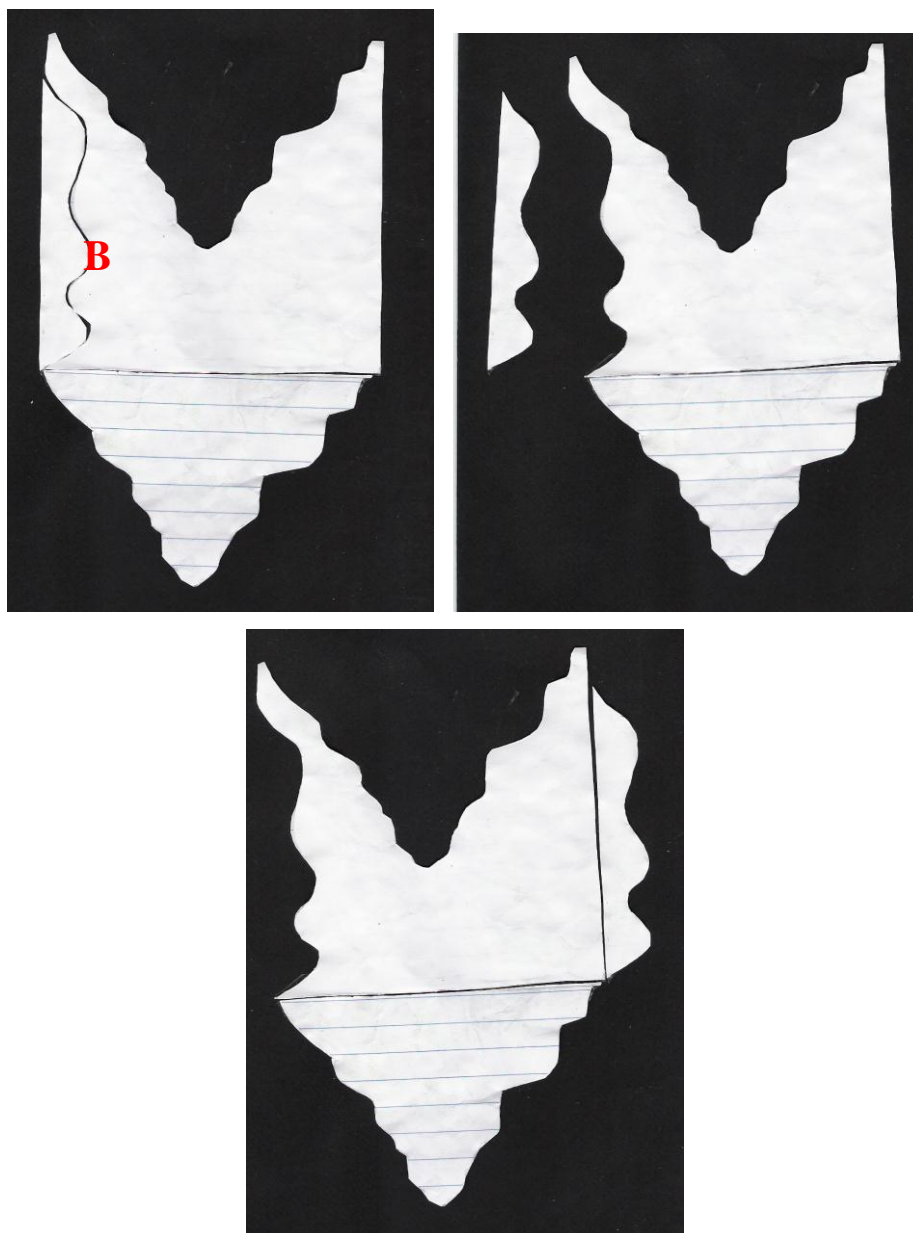


Figura 37: Construção de um módulo feita a mão por uma aluno do 2º ano do E.M.



Figura 38: Mosaico feito a mão por uma aluna da 2º ano do E. M.

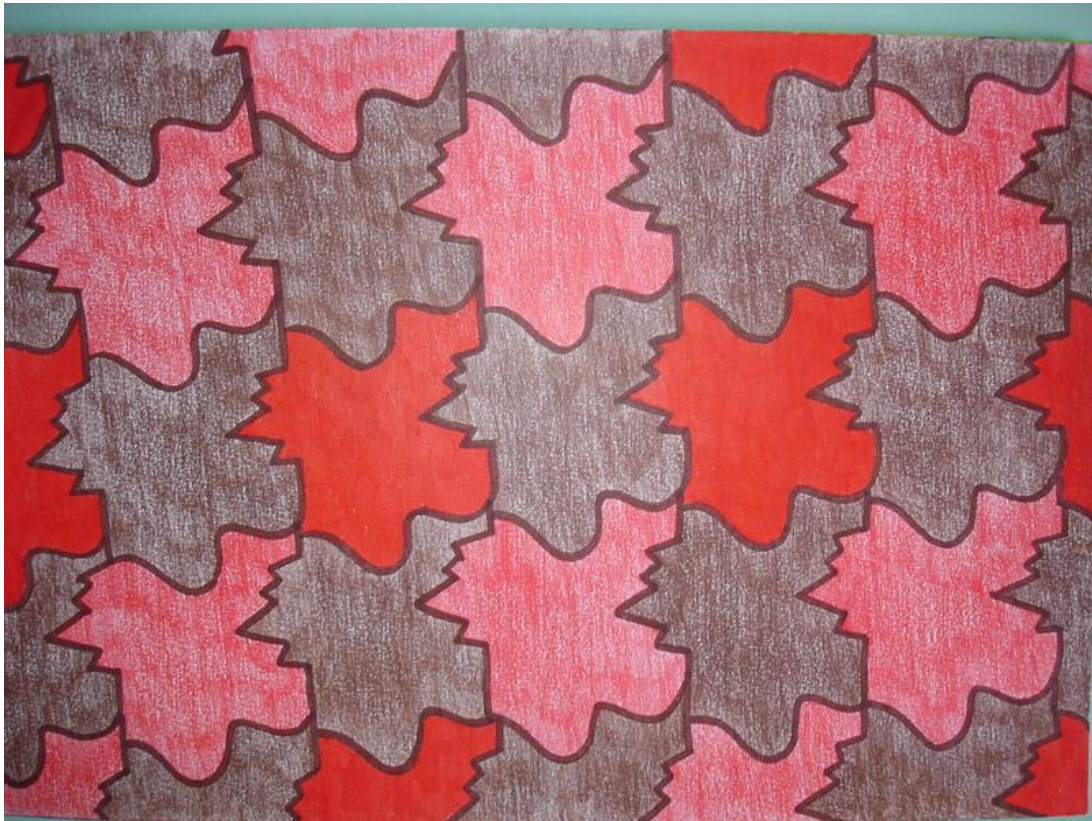


Figura 39: Mosaico feito a mão por uma aluna da 2º ano do E. M.

Quarto Encontro - 27/08

Nesse encontro prosseguimos com a proposta de construção de mosaico a partir de um módulo, mas utilizando recursos computacionais existentes no Laboratório de Informática da Escola. Partindo de um quadrado e realizando as transformações descritas na Atividade 5, página 33, os estudantes criaram um módulo para, em seguida, montar um mosaico. Os alunos fizeram essa atividade usando o MS Paint e rotacionaram esse módulo por um ponto de rotação. Destaca-se que esse ponto deveria ser “bem pensado”, pois para montar o mosaico, as demais figuras deveriam se encaixar de maneira justa.

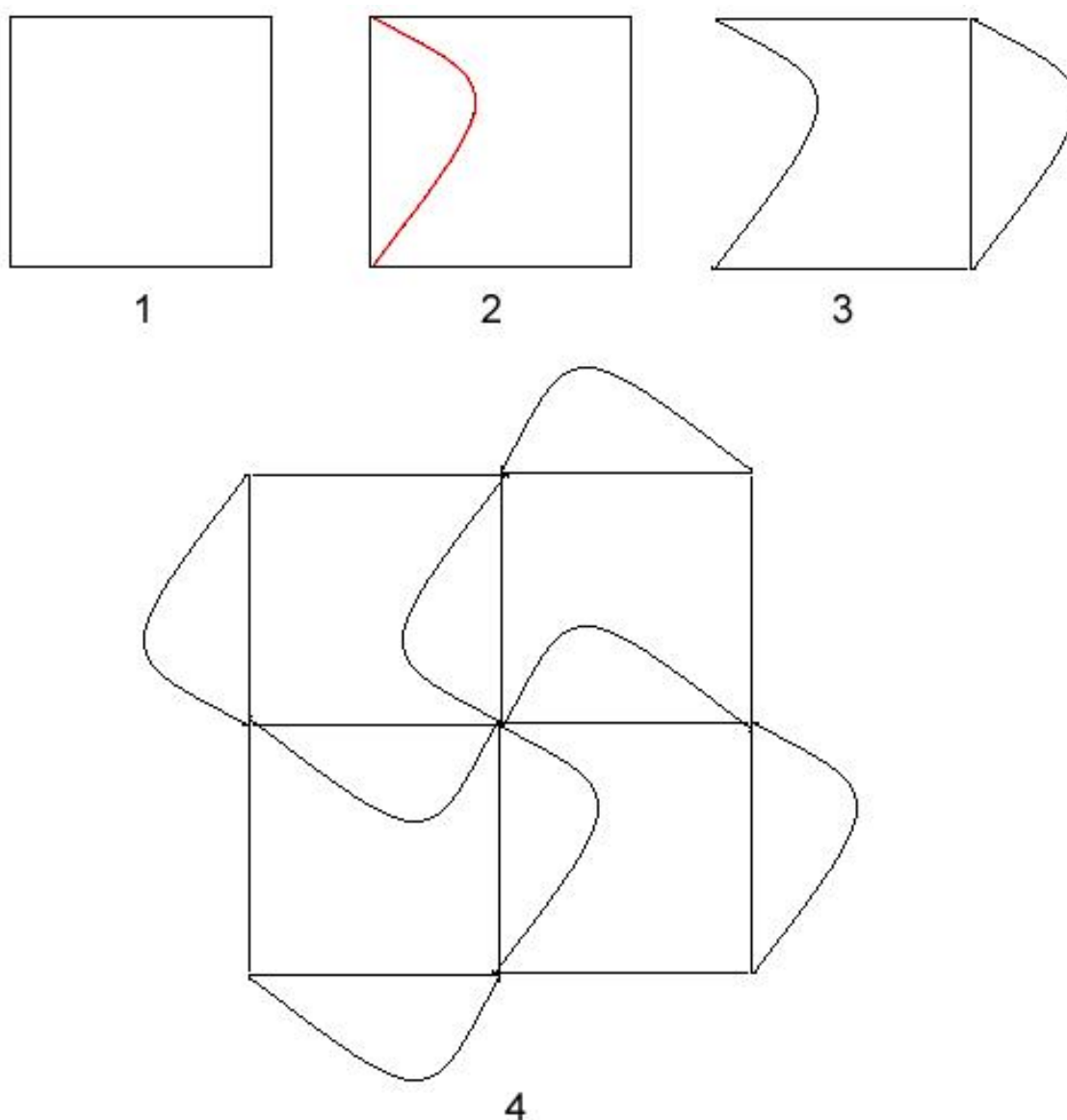


Figura 40: Construção de um mosaico com ponto de rotação a partir de um quadrado no MS Paint

Após essa construção, os estudantes colorem o mosaico de acordo com seu gosto pessoal.

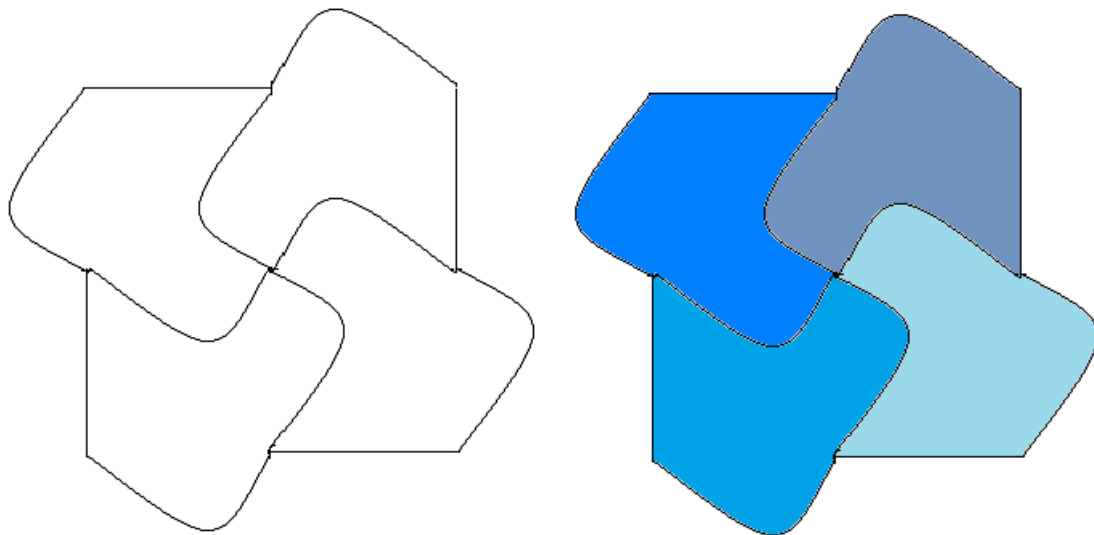


Figura 41: Colorindo o mosaico

A seguir, apresentamos três mosaicos criados pelos estudantes.



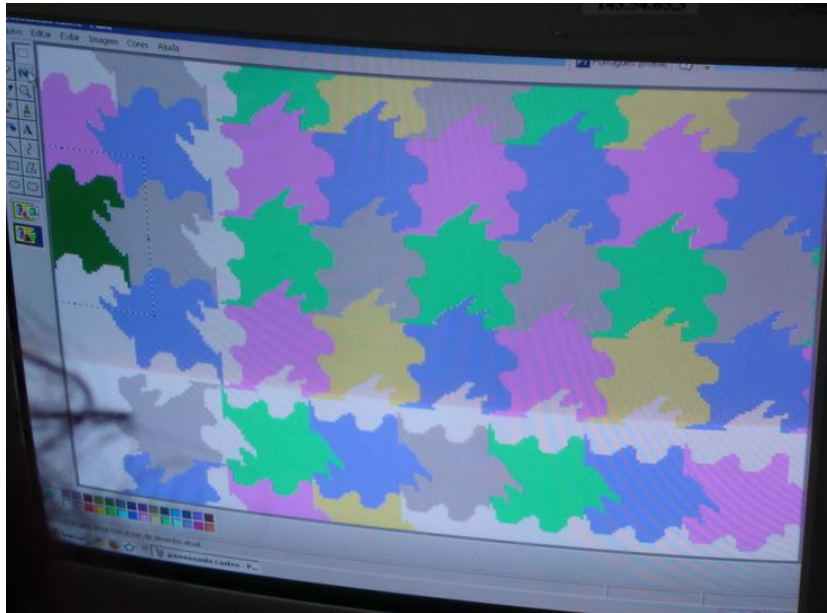


Figura 42: Conjunto de mosaicos feito no MS Paint com um ponto de rotação por alunos da 2ª série do E. M.

Como eles já tinham feito o trabalho no papel, a dificuldade consistiu em utilizar o software. Ao fazer a translação e rotação das peças alguns estudantes se confundiram, ou, talvez devido a rapidez com que tentaram concluir a atividade, não tomaram cuidado com a rotação e, conseqüentemente, não conseguindo produzir os encaixes necessários para gerar um mosaico sem “furos” ou “frestas”. Há que observam também

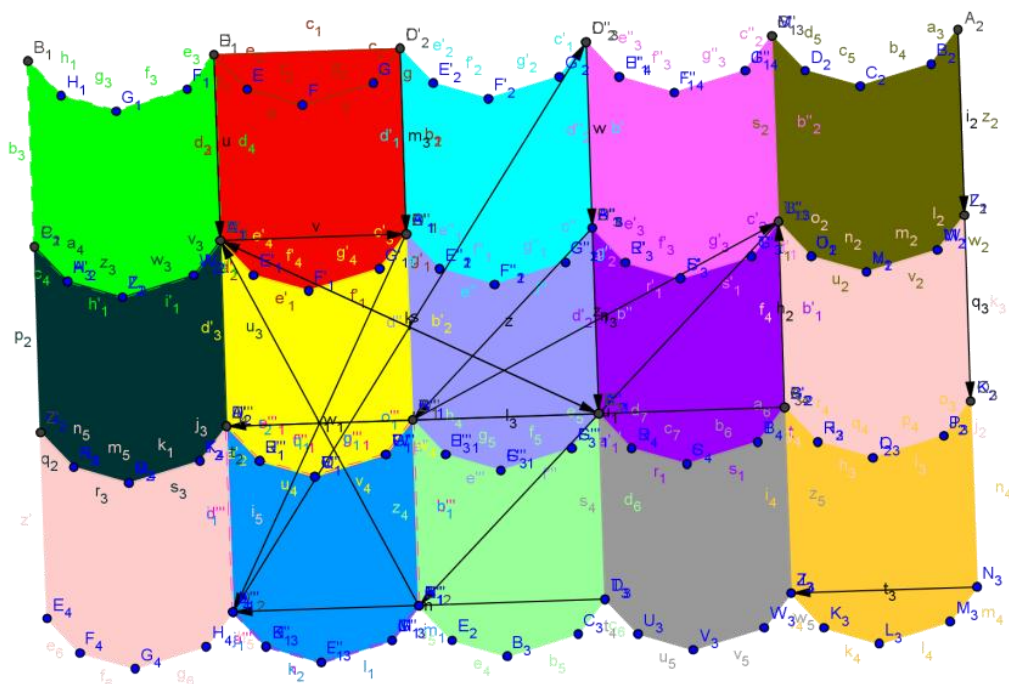
que alguns alunos, pela facilidade que tiveram e pela diversão provocada pela atividade, criaram mais de um mosaico.

Quinto Encontro - 03/09

Até então os trabalhos estavam mais voltados para a linha da Arte.

Nesse quinto encontro trabalhamos com mais conceitos de Matemática. Mantendo essa idéia de construção de módulos e mosaicos dos encontros anteriores, os alunos criaram novos mosaicos. No entanto, e com a intenção de oferecer mais alternativas em termos de utilização de softwares, nesse encontro exploramos o uso do software Geogebra. O Geogebra é um software de geometria dinâmica que permite trabalhar com o conceito de translação, tanto na construção do módulo para o mosaico, quanto na reprodução e “colagem” desse módulo para gerar o mosaico (Figura 43).

Para realizar a translação, os alunos teriam que construir vetores e, nesse ponto, eles exploraram esse conceito para a construção do mosaico. Eles poderiam simplesmente colocar o vetor alinhado ao lado do quadrado e ele se encaixaria perfeitamente. No entanto, alguns alunos criaram vetores maiores e em vários sentidos. Mesmo com essa característica, eles entenderam o processo e conseguiram criar seus mosaicos. Trabalhando desse modo, o aluno precisou entender em que ponto da figura o vetor foi aplicado para poder produzir os encaixes do mosaico.



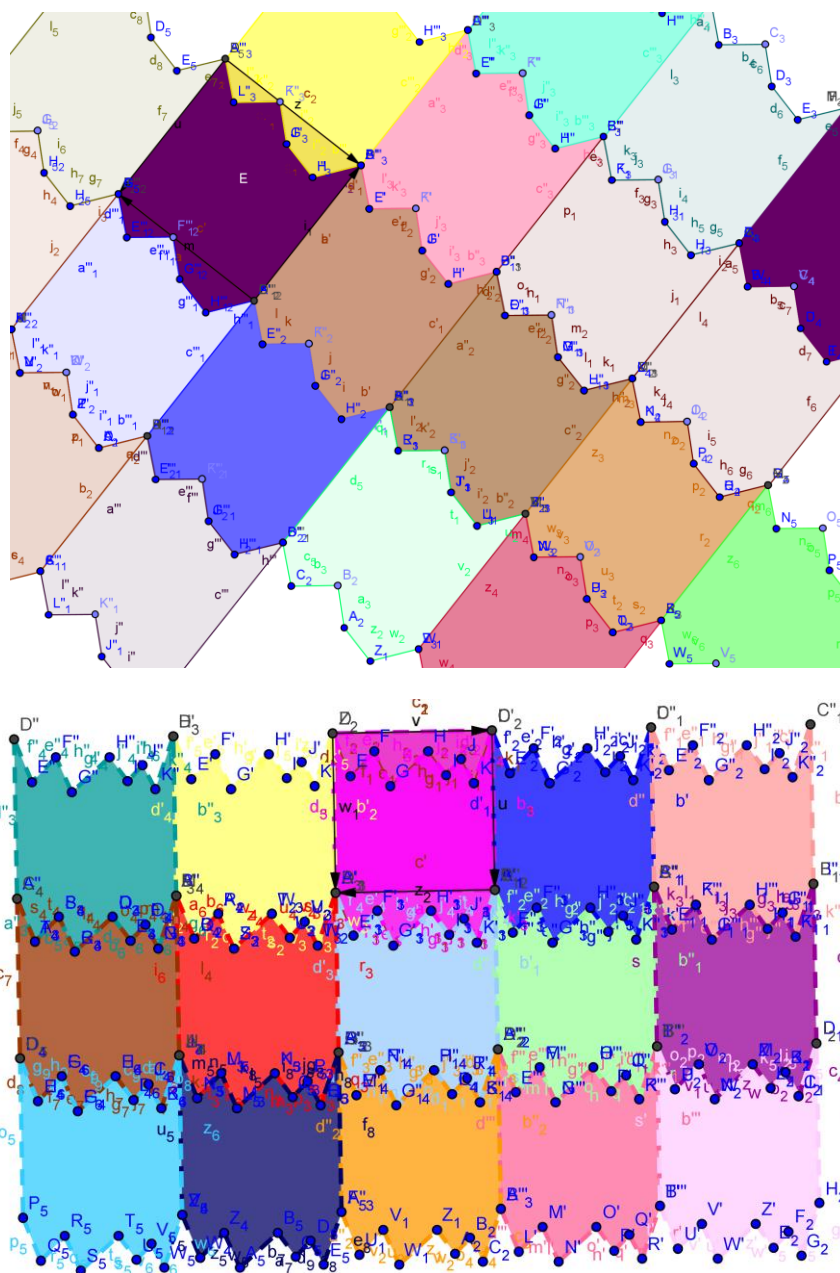


Figura 43: Conjunto de mosaicos feito no Geogebra utilizando vetores para as translações

Nessa aula pudemos dar uma atenção individualizada para os que estavam presentes. Assim que percebíamos as dificuldades apresentadas pelos estudantes na construção do mosaico, os auxiliávamos. Ainda sobre esse encontro, destacamos que o principal problema enfrentado foi a utilização do programa pois os alunos não o conheciam. Ainda assim, depois alguns instantes e ultrapassados os primeiros passos eles se sentiram encorajados a explorar o programa. O grupo de professores considerou que os resultados foram muito criativos.

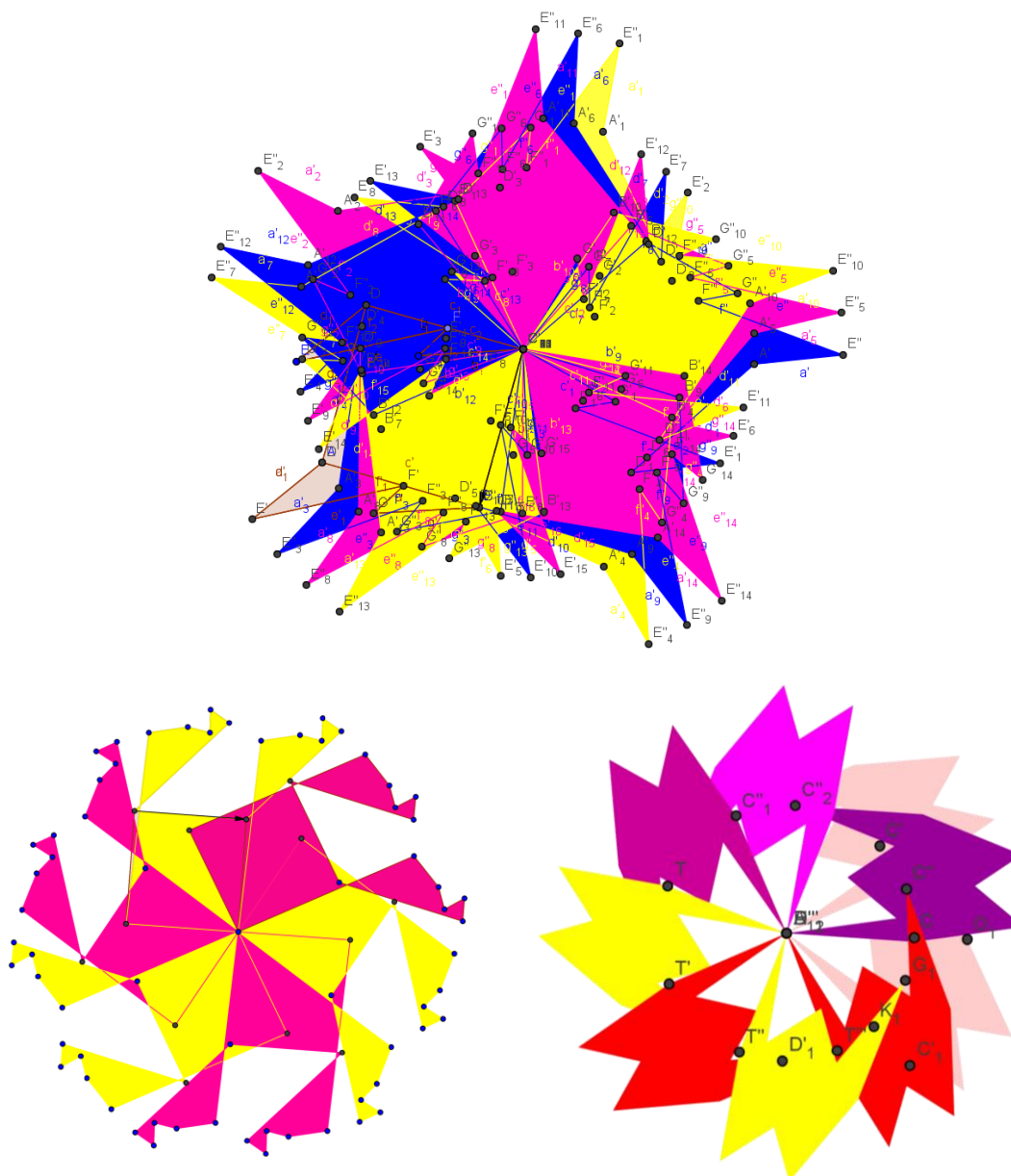


Figura 45: Imagens da mesma 'flor' feita no geogebra, com ângulos de rotação diferentes

Detectando algumas dificuldades dos estudantes nessa atividade, revisamos os comandos básicos do software Geogebra e os ensinamos a utilizar o recurso de rotação. De maneira similar ao encontro anterior, identificamos os problemas usuais de utilização de novos comandos no software. Também de forma similar ao quinto encontro, após a familiarização com os novos comandos, o trabalho foi realizado com êxito por quase todos os estudantes.

Sétimo Encontro - 17/09

Nossa proposta foi que os alunos construíssem um mosaico gigante, com dimensão de três folhas A1 coladas. Dessa vez, no lugar de partir de um quadrado para criar o módulo, eles deveriam partir de um hexágono. Para otimizar o tempo, trouxemos o módulo. Porém, desafiamos os alunos a descobrirem a forma geométrica inicial que permitiu a construção do módulo. Nesse encontro, estiveram presentes 5 alunos.

Descobrir a forma geométrica inicial a partir da qual foi gerado o módulo foi, contrariando nossa expectativa, realizada de forma bastante rápida. Eles logo identificaram tratar-se de um hexágono pelo tipo de encaixe e translações realizadas. O que demorou muito foi cada aluno fazer o seu módulo o que, conseqüentemente, permitiria construir o mosaico de maneira mais rápida.

Nesse encontro os alunos deveriam trabalhar em equipe, porque eles deveriam encaixar seus respectivos módulos, compondo um único mosaico. Assim, cada um desenhava seu módulo e o recortava; no entanto, ao desenhá-los e recortá-los, eles não ficavam encaixados corretamente, deixando o mosaico imperfeito. A ideia do mosaico gigante era boa, mas esbarramos nas dificuldades inerentes a um trabalho que dependa de um número grande de pessoas envolvidas e cuja exigência para trabalhar, seja a realização das tarefas de forma síncrona. Ainda que o grupo de professores tenha auxiliado os alunos a pintar o mosaico, a atividade não foi concluída devido ao pequeno número de presentes ao encontro.

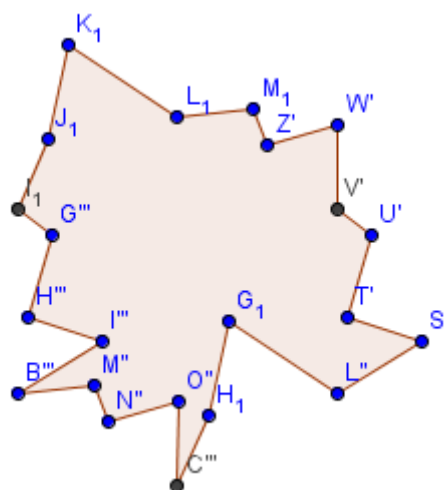
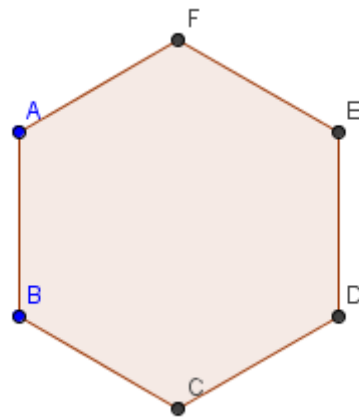
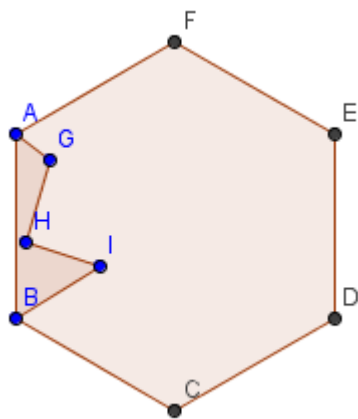
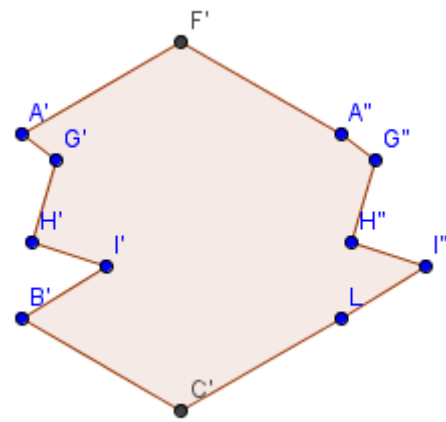
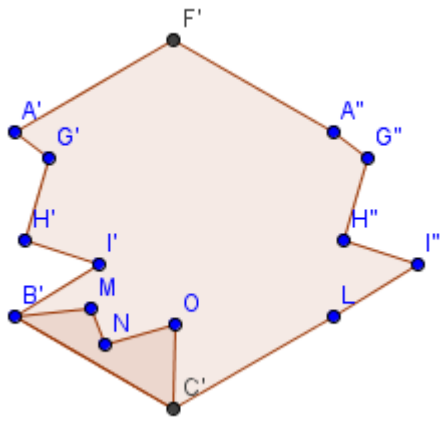
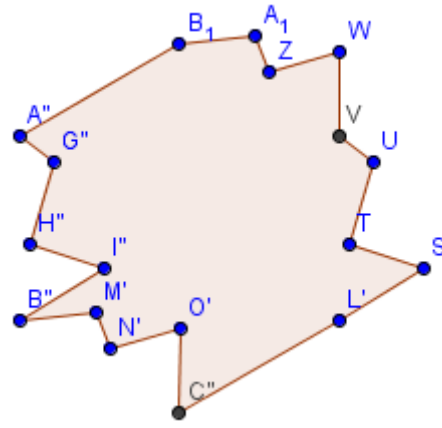
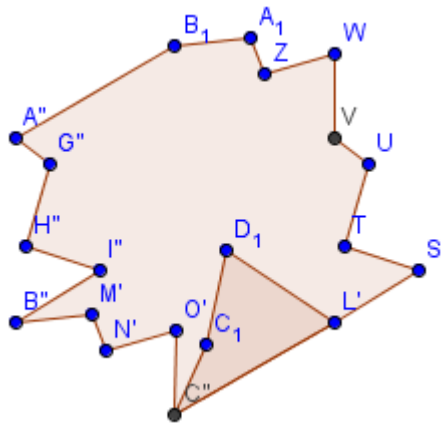
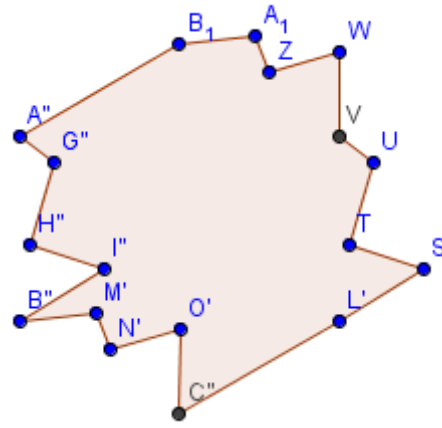
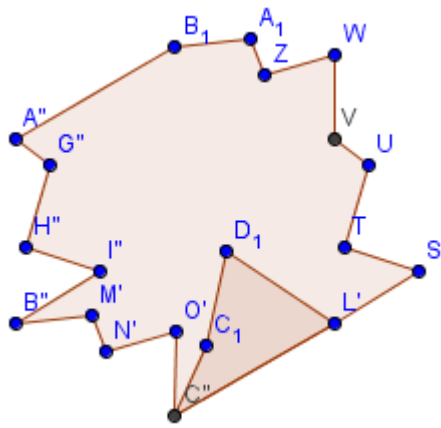


Figura 46: Módulo partindo de um hexágono



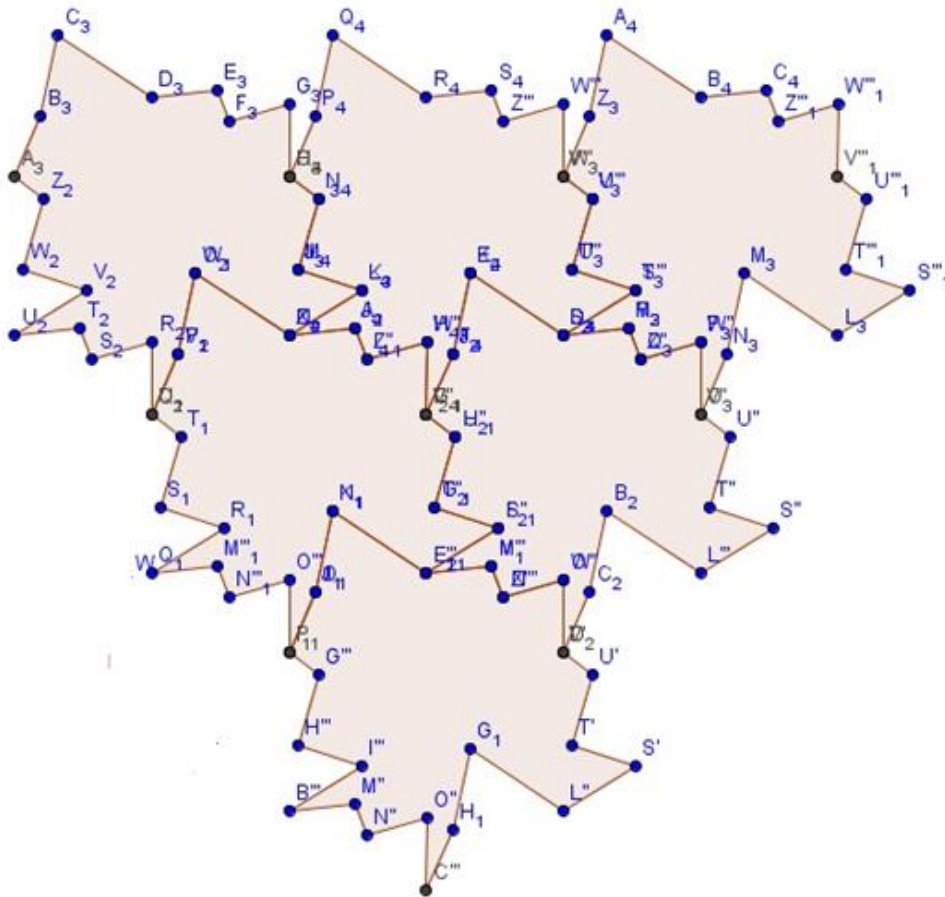


Figura 47: Construção do módulo e encaixe para a formação do mosaico com hexágono

Oitavo Encontro - 24/09

Construção dos caleidoscópios.

Os alunos trouxeram rolos de papel higiênico (dois) ou de papel toalha (um), para o corpo do caleidoscópio. Os professores ficaram responsáveis por levar as três tiras de espelho retangular. Com fita adesiva, os alunos deveriam colar os três espelhos de forma que a parte espelhada fique para dentro, formando um prisma com base de um triângulo equilátero (figura 48) e de maneira que, quando se olha para dentro do prisma, se enxerga um hexágono regular. Os seguintes passos também são necessários para confeccionar o caleidoscópio: enrolar os sacos plásticos em torno dos espelhos; colocar o prisma envolto com as sacolas dentro do rolo de papel toalha; em uma das bases do prisma, deixar um espaço entre a borda do rolo e os espelhos e colar o acetato, de tamanho um pouco menor do que a circunferência do rolo, nesse espaço e rente aos espelhos; finalmente, colocar os pedacinhos coloridos sobre o acetato e encaixar a tampa da garrafa na ponta do rolo. Essa parte de colar o acetato, ficou sob a

responsabilidade da professora de Artes, já que envolvia cola quente e para que os alunos não se queimassem.

Os alunos encontraram alguma dificuldade na hora do encaixe dos vidros corretamente de maneira que fosse gerada a imagem de um hexágono regular quando se olhava por um dos lados. Essa visualização não foi trivial para os alunos. Depois de encaixados corretamente, deveríamos prender os espelhos para que eles ficassem firmes nessa posição. Quando os espelhos estivessem prontos enrolamos sacolas plásticas envolta dos espelhos, para não quebrar e para que ficassem bem presos dentro do rolo.

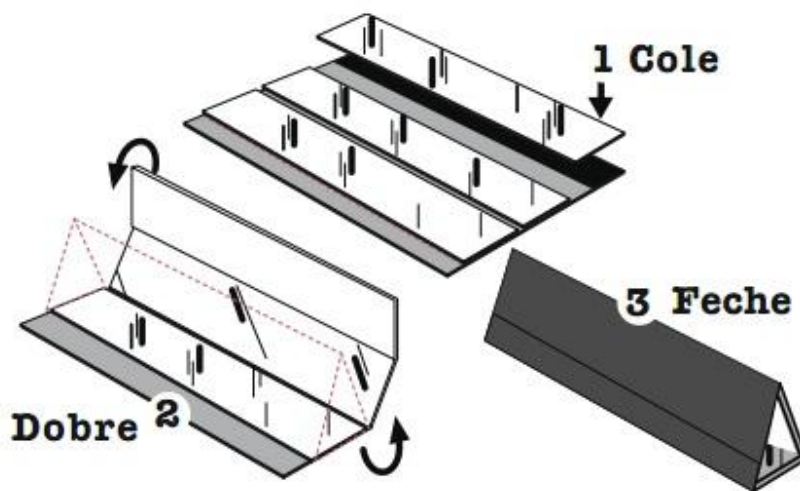


Figura 48: Montagem do Caleidoscópio, retirado do livro *Matemáticas Experimentais*



Figura 49: Construção do Caleidoscópico





Figura 50: Alunos olhando dentro dos caleidoscópios



Figura 51: Imagem interna de um caleidoscópio

Nono Encontro - 01/10

Nesse encontro demos continuidade à construção do caleidoscópio. Encaixamos tampinhas de garrafa de água de 5 litros transparente, em um lado dos rolos ou um pedaço de acetato transparente para que a luz passe por ele. Para produzir as imagens geradas pelos caleidoscópios pedimos que os alunos trouxessem pedacinhos de plástico, de tecidos, de papel, lantejoulas, tudo bem pequeno e colorido.

As dificuldades que apareceram foram de habilidades manuais, mas os alunos se ajudaram, como, por exemplo, na hora de cortar o acetato do tamanho do rolo e colá-lo do lado de fora. Na hora de colocar os pedacinhos coloridos no caleidoscópio, os alunos tinham dúvidas sobre a quantidade e depois que os colocavam, nos mostravam para ver se era muito ou não. Muitos deles colocaram papel picado bem pequenininho em excesso, o que impedia a passagem de luz.

Décimo Encontro - 08/10

Ainda faltava terminar o caleidoscópio e enfeitá-lo por fora. Foram 4 alunos nesse encontro. Levamos uma atividade para que começássemos a trabalhar com simetria, utilizando as imagens dos caleidoscópios. Levando em consideração o número de alunos decidimos não iniciar uma nova atividade.

Décimo Primeiro Encontro - 15/10

Saída de campo.

Na proposta inicial dos EC haveria uma data para que todos fizessem uma saída de campo. Fomos visitar o MARGS, Museu de Arte do Rio Grande do Sul e a Casa de Cultura Mário Quintana. A atividade proposta para essa saída foi que os alunos fotografassem mosaicos pelo centro da cidade, no caminho entre o MARGS e a Casa de Cultura Mário Quintana.

Décimo Segundo Encontro - 22/10

A proposta desse encontro foi trabalhar com o conceito de simetria através da reflexão com espelhos, partindo das imagens do interior dos caleidoscópios dos alunos. Essas imagens foram obtidas por fotografias tiradas com um laptop educacional

existente na escola e disponível para cada um dos estudantes. Tais computadores fazem parte do Projeto UCA⁴ (um computador por aluno).



Figura 52: Fotografia com o UCA do visão interna do Caleidoscópio

Para melhor entendimento dos conceitos relacionados com reflexão, trabalhamos com os *Mirror Cards*.

Segue a descrição do que são os *Mirror Cards*.

Cada conjunto de *Mirror Card* consiste em: um espelho, uma imagem principal, um conjunto de imagens derivadas da principal. Usando a imagem principal e o espelho deve-se tentar formar as outras imagens desse conjunto (figura 46).

No decorrer da atividade, alguns alunos acabaram percebendo quais as figuras que podem ser formadas com a imagem principal e o espelho. Olhavam para a figura a ser formada e diziam se seria possível obtê-la por reflexão. Nesse momento, o espelho era utilizado apenas para confirmar ou não as hipóteses iniciais sobre a existência ou não das imagens. No entanto, eles ainda que não sabiam explicar os “porquês” da existência ou não das imagens. Depois de entendido, cada aluno recebeu uma malha,

⁴ O projeto Um Computador Por Aluno (UCA) é um dos projetos que têm a finalidade de promover a inclusão digital. Fonte: <www.uca.gov.br/institucional/index.jsp>

imitando um caleidoscópio para inventar uma imagem caleidoscópica, usando os conceitos de simetria e reflexão, sendo que esse desafio foi indicado como um tema para casa.



Figura 53: Uso do *Mirror Card*

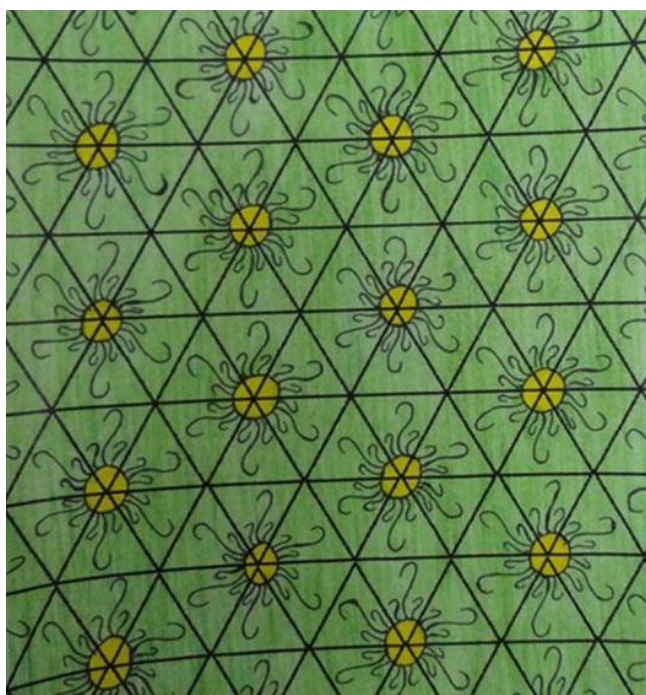


Figura 54: Malha feita por uma aluno

Décimo Terceiro Encontro - 12/11

Projetamos na parede do laboratório de informática imagens que possuíam eixos de simetria. Mostramos várias ideias de simetria: em gráficos, em paisagens, em rostos, em plantas (figura 29 na página 75).

Trabalhamos com as ideias de simetria bilateral e radial. Depois que projetamos as imagens, os alunos deveriam escolher outras na internet e localizar o eixo ou os eixos de simetria de cada uma dessas imagens. Nas imagens de simetria bilateral, os alunos localizaram os eixos com facilidade. No entanto, quando a imagem era de simetria radial eles não apresentaram a facilidade anteriormente identificada por nós, para localizar os outros eixos (figura 48 e 49). Durante esse encontro fotografamos os rostos de cada aluno para a atividade do décimo quarto encontro.

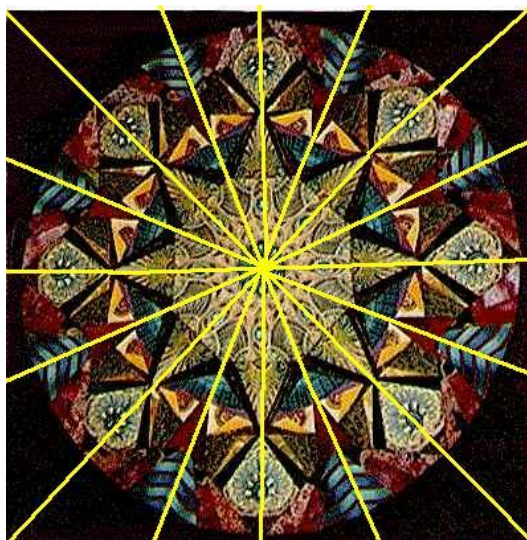


Figura 55: Eixos de simetria marcado por uma aluno da 2º ano do E.M.

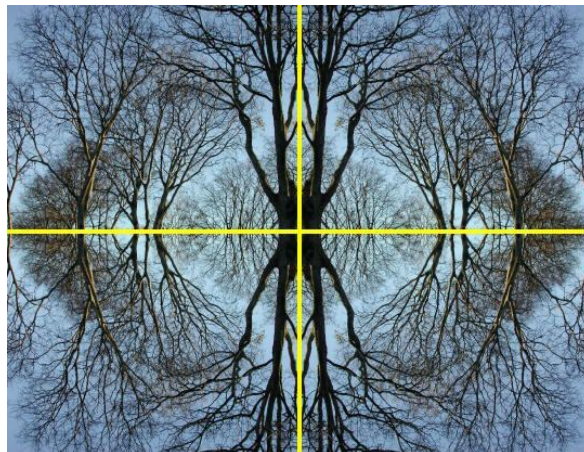


Figura 56: Eixos de simetria marcado por uma aluno da 2º ano do E.M.

Na segunda parte do trabalho, os alunos começaram a se organizar para a apresentação final. Foi solicitado que os alunos montassem uma apresentação do que foi trabalhado durante o EC. A turma foi dividida em dois grupos sendo que cada grupo poderia escolher um conceito que foi trabalhado e montar uma apresentação.

Décimo Quarto Encontro - 19/11

Com as fotos dos rostos dos alunos, tiradas no encontro anterior, cada aluno com sua própria foto, deveria dividi-la em um eixo que passa pela ponta do nariz e entre as

sobrancelhas, recortando metade das fotos. Em seguida, deveriam refletir a metade da foto restante em torno do eixo marcado anteriormente. O resultado é a criação de imagens “engraçadas” e que nos permite verificar que nossos rostos não são perfeitamente simétricos. Primeiramente, mostramos para os alunos as reflexões com os rostos das licenciandas; criamos também uma imagem engraçada figura 50, para que, se o tempo permitisse, os alunos fizessem algo similar.



Figura 56: Reflexão formando uma figura “engraçada”

Os alunos apresentaram alguma dificuldade em recortar a metade do rosto e fazer a reflexão devido à utilização dos novos recursos do software Geogebra, o que já havia sido constatado em encontros anteriores.

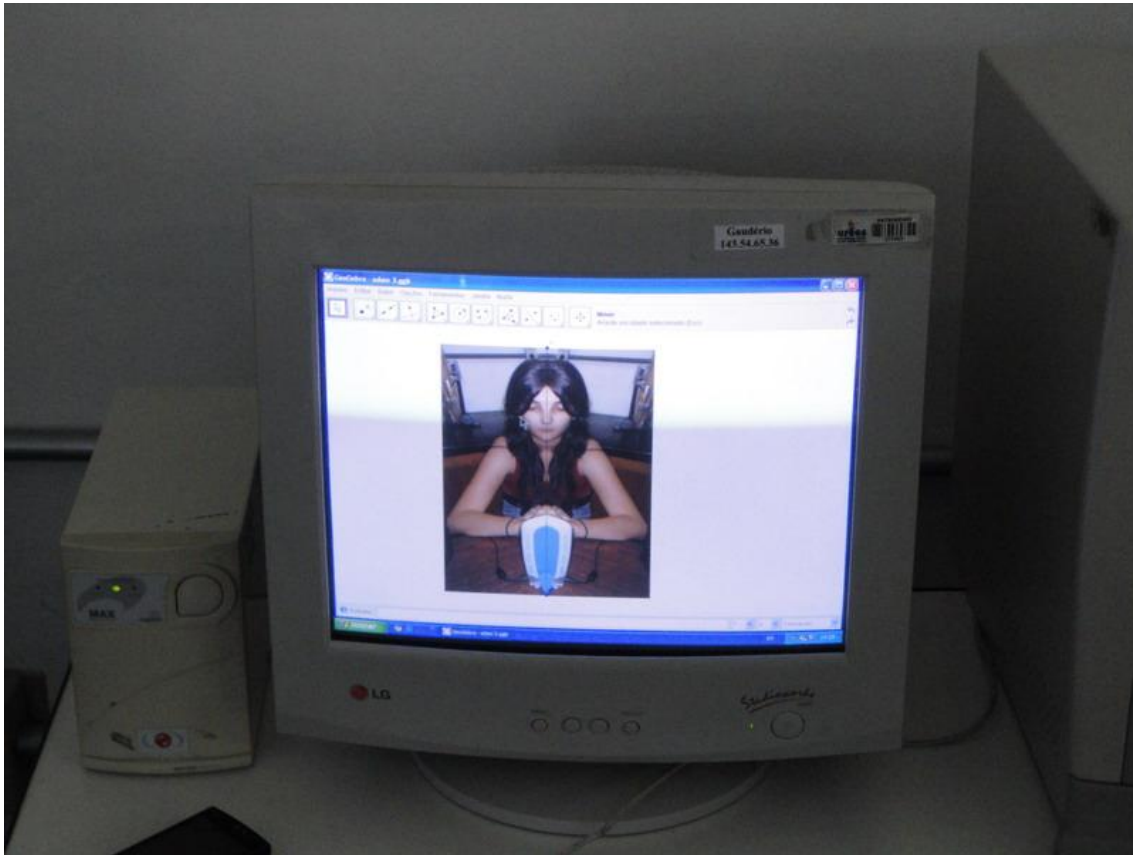


Figura 57: Reflexão do rosto de uma aluna da 2º ano do E.M.

Décimo Quinto Encontro - 26/11

Para o fechamento das nossas atividades levamos um objeto de aprendizagem denominado simetrizador, software disponível em:

http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm. Buscando a ideia inicial dos mosaicos de Escher, cada aluno faria o seu mosaico com algumas imagens do simetrizador. Observamos que as imagens-módulo do simetrizador são imagens retiradas das obras de Escher.

Para a primeira atividade, os alunos deveriam fazer um mosaico com uma imagem só, desde que ela se encaixasse com ela mesma. Para a segunda atividade, o mosaico deveria ser feito com mais de uma figura. As figuras teriam que se encaixar, para que o mosaico ficasse perfeito. Os estudantes realizaram a primeira atividade rapidamente e com sucesso. Já na segunda atividade, eles não conseguiam achar figuras que se encaixavam. Na verdade eles precisariam usar a reflexão para que houvesse o encaixe entre algumas figuras sendo que esse foi o entrave para a plena execução da atividade.

Simetrizador

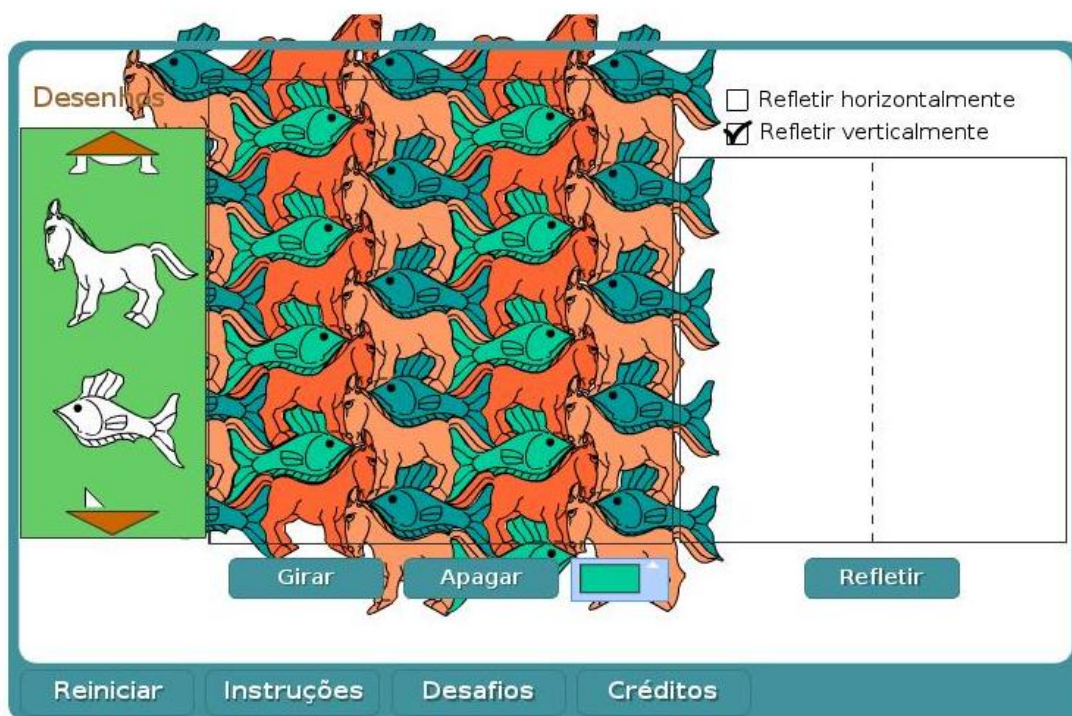


Figura 58: Trabalho feito com o Simetrizador por uma aluno da 2ª série do E.M.

Os alunos nos mostraram as apresentações. Nossa surpresa foi que cada grupo fez um vídeo, com as definições, com referenciais históricos do que haviam aprendido, imagens artísticas e conceitos matemáticos, superando as nossas expectativas.

Décimo Sexto Encontro - 03/12

Encontro cedido para o EC da Educação Física realizar uma gincana com todos os alunos do 2º ano do E.M.

Décimo Sétimo Encontro - 10/12

Foi proposto que cada EC fizesse uma apresentação para os demais mostrando o que foi realizado durante os encontros.



Figura 59: Alunos durante a apresentação

5. Resultados

Durante o EC os alunos foram apresentando maior entendimento do que estava sendo trabalhado. Ao apresentarmos a ideia do Pintando o Cubo para os estudantes, eles tiveram uma primeira noção de como trabalharíamos Artes e Matemática de maneira integrada. Conforme as aulas transcorriam, eles percebiam que as duas disciplinas tinham o mesmo peso para as avaliações das atividades e, com isso, tanto os conceitos matemáticos quanto os conceitos artísticos deveriam estar presentes nos trabalhos.

As transformações geométricas foram abordadas em diferentes momentos, com diferentes propostas, com o objetivo de fazer com que os estudantes operassem com os mesmos conceitos em situações e atividades diferentes, como sugerido por Bittar e Muniz (2009). Esperava-se, com isso, oferecer possibilidades para que os estudantes observassem a presença de objetos matemáticos e artísticos no seu cotidiano e, com isso, favorecer a compreensão dos conceitos.

Como parte da avaliação final, a turma foi dividida em dois grupos para criar uma apresentação do que foi desenvolvido durante o semestre. Pensamos que eles fariam uma apresentação em modo de slides e descrevendo as atividades, mostrando algumas imagens, como avaliaram as aulas e, talvez, falassem de algum tema específico que tivessem gostado.

No entanto, para essas apresentações, eles elaboraram vídeos que superaram as nossas expectativas iniciais. Nessas apresentações, eles demonstraram compreensão dos conteúdos apresentados no EC e percebemos que eles conseguiram constatar a presença de conceitos matemáticos em obras de artes, bem como as transformações geométricas presentes em imagens e em mosaicos.

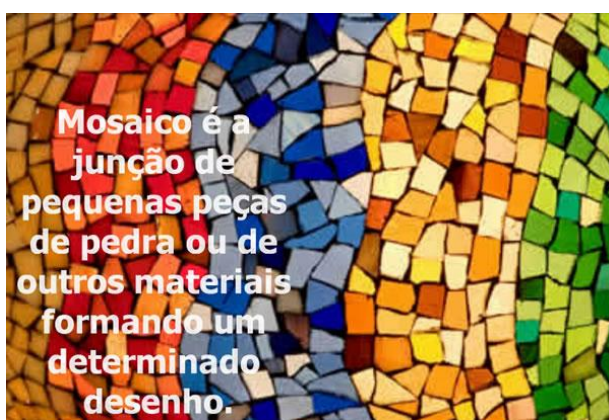




Figura 60: Conjunto de imagens retirada da apresentação em vídeo de um grupo de alunos

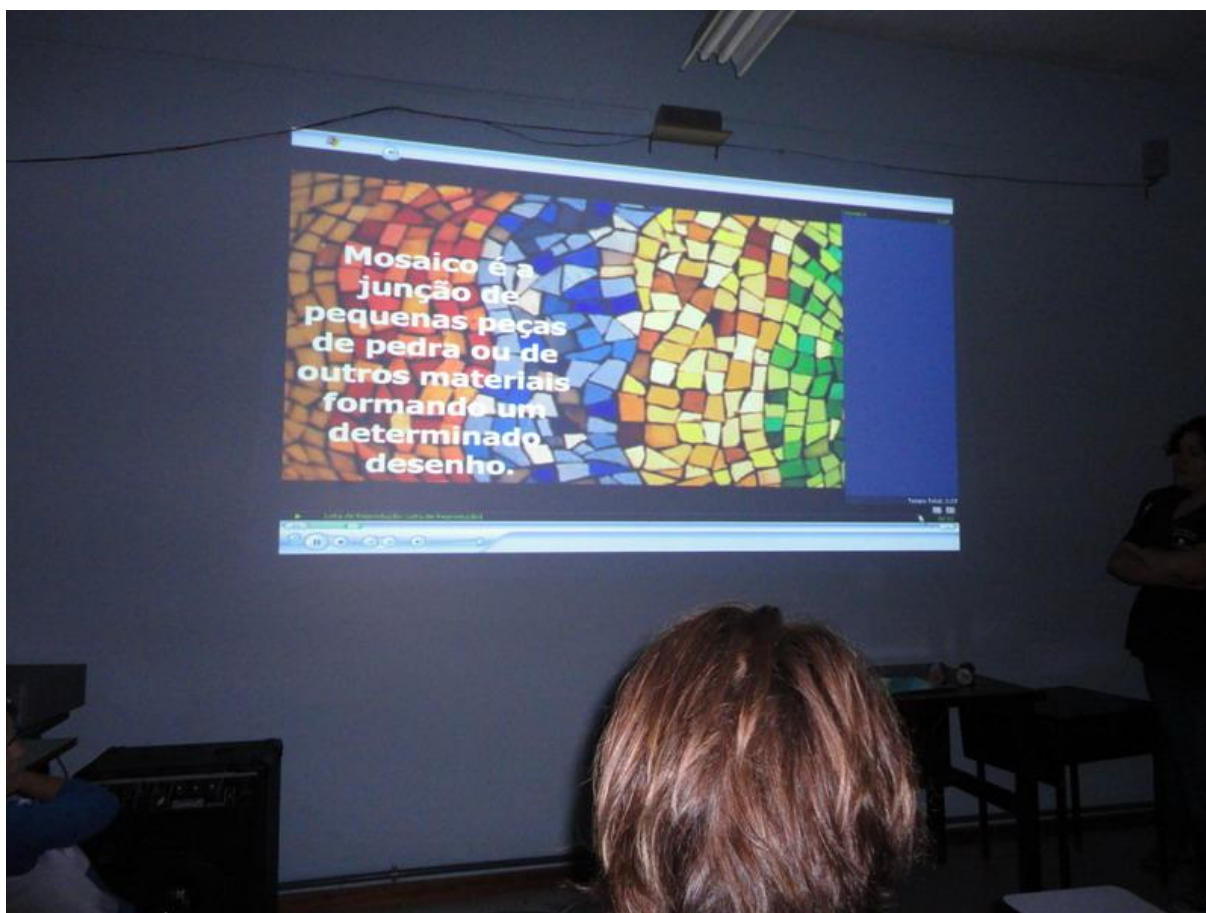


Figura 61: Apresentação do alunos para os outros EC

Os alunos conheceram uma matemática e que não foi necessário utilizar cálculos envolvendo números e foi desenvolvida em estreita parceria com outra disciplina. No decorrer dos encontros, o trabalho realizado de maneira conjunta entre as duas disciplinas foi se tornando natural para os estudantes e, conseqüentemente, também foi natural utilizar conceitos tanto de Matemática quanto de Artes nas atividades propostas.

No início, como na atividade da leitura de imagem (atividade 2 descrita na página 29), eles sabiam fazer isso do ponto de vista de Artes, mas ainda não o haviam feito utilizando conceitos de Matemática. Já na última atividade (atividade 13 - simetrizador, descrita na página 43) depois de feitas as translações, eles pintaram as figuras, embelezando os próprios trabalhos. Observamos também, que os alunos respondiam às atividades realizando com mais vontade àquelas que não se enquadravam no que podemos chamar de atividades mais comuns do currículo escolar de Matemática e Artes.

Do ponto de vista da nossa formação, esse trabalho constituiu-se em uma nova e desafiadora experiência. Trabalhar com outra disciplina nos possibilitou pensar em atividades que abrangessem conceitos além dos de matemática, nos adaptamos a idéia de uma professora de outra disciplina dividindo o mesmo espaço. Tivemos muitas idéias na elaboração inicial das atividades e com o desenvolvimento do EC tivemos que refazer algumas delas. Em termo de avaliação dos trabalhos dos estudantes, em cada atividade os alunos tinham objetivos a ser alcançados e, no momento de analisarmos a realização das tarefas, levamos em conta a disposição e determinação de cada um em atingir os objetivos. Acompanhar o trabalho dos alunos durante o EC nos mostrou o quanto eles aprendem e quais aspectos devem ser mais enfatizados, quais as abordagens que resultaram em trabalhos mais elaborados e, igualmente, aquelas em que os resultados ficaram aquém do que esperávamos.

Finalmente, embora não tenha sido objeto de análise nesse trabalho de conclusão de Curso, acrescentamos como um resultado importante, que o Pintando o Cubo foi reoferecido para uma nova turma de alunos no primeiro semestre de 2011. Nessa reoferta, fizemos um trabalho com atividades mais voltadas para a Matemática, mas sem deixar de lado o aprendizado artístico. Nesse novo enfoque, complementamos o trabalho desenvolvido no primeiro Pintando o Cubo, abordando conceitos como ângulos e construção de caleidociclos. Os estudantes do segundo Pintando o Cubo, assim como os do primeiro, também apresentaram trabalhos ao final da disciplina conforme indicam as figuras 56.

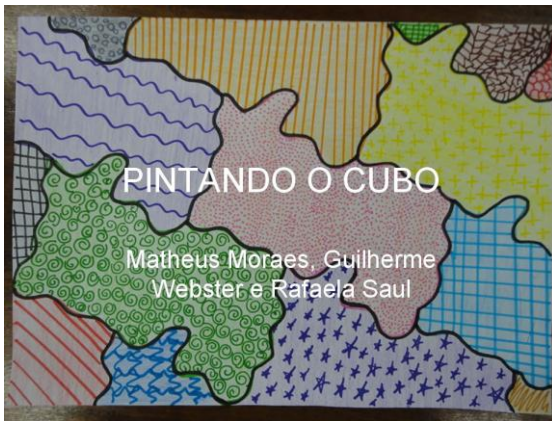


Figura 62: Slide inicial dos trabalhos dos alunos

6. Considerações Finais

Como mencionado anteriormente, em parte das experiências que tive em instituições escolares, constatei que o ensino de Geometria vem sendo baseado quase que exclusivamente em cálculos, deixando esse conteúdo preso a fórmulas e sua aplicação à resolução de exercícios sobre área, perímetro e volume. Diante disso, nossa intenção ao propor o trabalho na disciplina de Enriquecimento Curricular “Pintando o Cubo” para os alunos da 2º ano do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRGS, foi a de tratar conceitos de Geometria em contextos cotidianos. Em particular, tratamos dos conceitos relacionados com transformações geométricas e os utilizamos no estudo e construção de mosaicos. Essa abordagem surpreendeu os estudantes pelo fato de não envolver cálculos rotineiros e por mostrar que há mais matemática em Geometria do que até então muitos deles conheciam. Penso e os resultados desse trabalho confirmam minha posição, que as transformações geométricas podem auxiliar no ensino e aprendizagem de cálculos de área, perímetro e volume, conteúdos usualmente trabalhados na escola. Ademais, a riqueza artística do trabalho envolvendo a construção de mosaicos, oferece a possibilidade dos estudantes se expressarem criativamente e, por que não, perceberem relações entre Matemática e Artes. Ainda sobre nossa proposta, cabe ressaltar que nessa abordagem os estudantes operaram com esses conceitos em ambientes enriquecidos com recursos de informática e aqueles próprios de uma oficina de Artes.

No decorrer da minha vida acadêmica, percebi que os alunos trabalham mais quando estão interessados no assunto. Quando as aulas são rotineiras e parecidas não se tornam interessantes. Abordagens diferentes podem servir de convite para o aluno estar presente e disposto a estudar.

Durante as aulas me deparei com dificuldades que sequer havia imaginado ao iniciar o trabalho nesse EC. Trabalhar em parceria com uma outra disciplina não é simples mas é, sem dúvida, uma tarefa desafiadora. Nas atividades que planejamos, tínhamos que valorizar a parte matemática e a artística; não bastava o trabalho estar matematicamente correto se não estava de acordo com o que foi solicitado em Artes, e vice-versa. Também penso que a Matemática não é uma disciplina independente das outras e, ao trabalharmos com a disciplina de Artes, constatamos que os alunos perceberam que elas podem estar relacionadas, que elas possuem pontos em comum.

Com esse EC pudemos ter um contato diferente com os alunos. Eles não estavam na nossa frente, sentados em classes enfileiradas, de frente para um quadro de

onde copiavam os exercícios. No “Pintando o Cubo” trabalhávamos em grupos e circulávamos entre os estudantes, nos colocando à disposição para trocar idéias e auxiliá-los; não havia um quadro onde as informações eram passadas. Com o atendimento mais próximo dos alunos conseguíamos perceber suas dificuldades e ao planejar as próximas atividades, procurávamos enfatizar esses conteúdos, os abordando de outra maneira. Não ensinamos como em uma convencional aula de matemática e, creio, a maneira como implementamos essa experiência deveu-se em grande parte ao estabelecimento da parceria com Artes.

Retomando os objetivos deste trabalho, quais sejam:

- Criar e implementar atividades que contribuam para :
 - estabelecer uma relação entre Matemática e Artes;
 - tratar de conceitos que não são usualmente tratados na escola;
 - relacionar a simetria, translação, rotação e reflexão com o cotidiano;

é possível afirmar, ao término do trabalho e frente aos resultados obtidos, que eles foram alcançados.

Em cada uma das atividades foram abordados conceitos de Matemática e Arte e tratamos de temas que geométricas não fazem parte da aula usual do ensino de matemática na escola, nesse caso, as transformações geométricas no plano. Além disso, e assim o comprovam as atividades desenvolvidas, criamos ações e exercícios nas quais os estudantes relacionaram esses conceitos com situações do dia-a-dia.

Concluo que o EC foi importante para a minha formação profissional e pessoal, na medida em tive a oportunidade de viver a experiência de uma parceria com profissionais e colegas de áreas do conhecimento humano. Esse trabalho também me proporcionou colocar me prática uma abordagem de geométrica sem cálculos, mostrando para os estudantes uma Matemática que, geralmente eles não conhecem. Neste caso, colocá-los diante do desconhecido, fez com que aproveitassem a disciplina de EC, deixando-os curiosos sobre como Arte e Matemática trabalhariam de forma integrada.

Finalmente, com a realização desse trabalho reafirmo meu gosto pela Geometria e o meu desejo é que muitos mais estudantes tivessem a oportunidade de ver a beleza nela contida.

7. Referencias bibliográficas

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrimdo Padrões em Mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
- BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009.
- BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- ERNST, Bruno. *O espelho mágico de M.C. Escher*. Berlim: Taschen, 1991.
- IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Geometria dos Mosaicos*. São Paulo: Scipione, 2000.
- FEHER, Elsa Rosenvasser. *Simetría izquierda , antes y después, chico y grande em el mundo*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores, 2009.
- FIorentini, Dario; MIORIM, Ângela. *Por trás da porta, que matemática acontece?*. Campinas: Ílion, 2010.
- LOPES, Antonio José. Perspectivas para o ensino da Geometria do século XXI. <http://www.matematicahoje.com.br/telas/autor/artigos/artigos_publicados.asp?aux=Geometria>, acessado em 14 de julho de 2010, s/d
- LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSAR, Lilian. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.
- MURARI, Claudemir. *Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria*. São Paulo: Cortez Editora, 2004.
- ORMEZZENANO, Graciela; SANTOS, Rosângela S. dos. *Para além da geometria da escola: antigas e novas abordagens*. Passo Fundo: UPF, 2005.
- SLAWASKY, Norman. *The artist as mathematician*. Mathematics Teacher, 1977. <www.uca.gov.br/institucional/index.jsp> acessado em 14 de julho de 2011.

Anexo

Autorização para o uso do nome da instituição de ensino.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
COLÉGIO DE APLICAÇÃO



Of. nº 103/11-CA

Porto Alegre, 19 de julho de 2011.

Senhor Diretor:

Autorizo a acadêmica MARILISE OLIVEIRA JORGE do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul que, sob orientação do Professor Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso, desenvolveu o trabalho de Conclusão de Curso intitulado PINTANDO O CUBO: MATEMÁTICA COM ARTES, com estudantes do Ensino Médio e em parceria com a Professora Simone Dias Cruz, professora dessa Instituição de Ensino, a utilizar o nome do Colégio de Aplicação da UFRGS em seu trabalho.

Atenciosamente,

Professor Edson Luiz Lindner
Diretor do Colégio de Aplicação

Edson Luiz Lindner
Diretor do Colégio de Aplicação da UFRGS

Sr.

Rudnei Dias da Cunha

Diretor do Instituto de Matemática

A/C Prof. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

N/U