UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – UFRGS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO

LEANDRO SUBTIL MOURA

A METROLOGIA NO ENSINO DA RETA REAL

PORTO ALEGRE

2011

LEANDRO SUBTIL MOURA

A METROLOGIA NO ENSINO DA RETA REAL

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, curso de Matemática Licenciatura, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profº Dr. Carlos Hoppen

PORTO ALEGRE

2011

LEANDRO SUBTIL MOURA

A METROLOGIA NO ENSINO DA RETA REAL

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à Universidade Federal do Rio Grande do Sul, curso de Matemática Licenciatura, como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profº Dr. Carlos Hoppen

Comissão Examinadora:

Profº. Dr. Alvino Alves Sant'Ana
Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

Profº. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Professor do Instituto de Matemática da UFRGS

Porto Alegre, 08 de julho de 2011

"Muitas descobertas importantes foram feitas investigando a próxima casa decimal".

(F. K. Richtmyer)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo trazer a Metrologia para sala de aula, motivando os alunos no estudo da reta real, melhorar a compreensão da reta real e conhecer a Metrologia como ciência e área de trabalho, através de atividades elaboradas. As práticas ocorreram em uma escola estadual, localizada na zona sul de Porto Alegre, com alunos que frequentam a 8ª Série do ensino fundamental regular, no turno da tarde, no total de três encontros, sendo que cada encontro durou dois períodos de 50 minutos. As atividades consistem em padronizar medidas, perceber as diferenças entre instrumento digital e analógico com o intuito de transferir esta diferença para a reta e, ao realizar medições, os alunos percebam a necessidade de aproximar medidas usando o erro, além da construção da reta. Além de trazer todo o desenvolvimento das atividades realizadas na escola, este trabalho traz aspectos teóricos sobre a reta real, os conceitos que envolvem a Metrologia, o desenvolvimento histórico em busca da padronização do metro e a história da Metrologia no Brasil.

Palavras-chave:

Matemática; Metrologia; Reta Real; Ensino

ABSTRACT

The aim of this work is to devise activities that bring the concept of Metrology into the classroom. Our main objectives include motivating students to study the real line and presenting Metrology as a science and as a field of work. The students are eight-graders in a school ran by the state government in Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brazil. Our activities consisted of three meetings, each lasting two regular 50-minute time-slots. They were designed to address the following subjects: (1) the need of universally-accepted units to measure quantities; (2) the difference between analogical and digital measurements, and its connection with error estimates; (3) the construction of the real line based on successive approximations of real segments. This work contains a full report about these activities. Moreover, it includes theoretical aspects about the construction of the real line, a description of Metrology and of the many concepts associated with it, and a short survey of its development as a science in the world and in Brazil.

Keywords:

Mathematics; Metrology; Real line; Mathematical teaching;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esse trabalho reflete uma tentativa de introduzir conceitos da Metrologia a alunos da 8ª série do ensino fundamental como ferramenta para o estudo da reta real.

A Metrologia é a ciência das medições e de suas aplicações, isto é, de tudo o que envolve medições, avaliando as medidas de modo que o resultado seja confiável. O processo de medição envolve vários conceitos fundamentais para a sua realização, como: grandeza, medição, unidade, calibração, rastreabilidade e incerteza.

Em várias disciplinas que eu cursei na universidade, especialmente as voltadas para a educação, como por exemplo as disciplinas de Laboratório de Ensino e de Estágio Supervisionado, o foco era a formação de um professor que trouxesse alternativas para a educação matemática, de forma que atendesse as necessidades da educação dos alunos. Por experiência em sala de aula, em geral os alunos apresentam dificuldades no aprendizado em Matemática. Mas como ensinar matemática? De acordo com (Alves, 2007, p. 5), “Os educadores matemáticos devem procurar alternativas que motivem a aprendizagem e, desenvolvam a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando as interações do sujeito com outras pessoas.”

Pensando nas dificuldades matemáticas, identifiquei que muitos alunos costumam ter dificuldades em compreender a reta real através de aulas puramente expositivas, principalmente em reconhecer números racionais e irracionais na reta. É com este viés que trago uma proposta de ensino da reta real usando a Metrologia como apoio no ensino da reta real.

Por que usar a Metrologia no ensino da reta real? Além de fazer parte da minha profissão e achar a Metrologia muito interessante, pensei em levar a minha experiência como Metrologista para a sala de aula, com o objetivo de motivar os alunos no estudo da reta real. Além de motivar, também visei melhorar a compreensão da reta real por parte dos alunos e possibilitar que eles conhecessem a Metrologia como ciência e área de trabalho.

Inicialmente, elaborei atividades que trouxessem a Metrologia para a sala de aula usando medições, com o objetivo de auxiliar no estudo da reta real. Depois elaborei atividades complementares que partem das medições, mas que servem de apoio para o prosseguimento das atividades. No total foram elaboradas três atividades, a saber:

a. Padronização de medida.
b. Diferença entre digital e analógico.
c. Descobrindo a incomensurabilidade e a reta.

O item *a* contempla a padronização de medida. Em outras palavras, espera-se que os alunos compreendam a importância de existir padrão nas medidas e olhem a Metrologia como um todo, incluindo os fatos históricos.

O item *b* contempla o preenchimento da reta real. Com o auxílio das medições usando instrumentos analógicos e digitais, espera-se que os alunos percebam a diferença de comportamento dos equipamentos em questão e transfiram este comportamento para a reta real.

O item c é dividido em duas partes. Na primeira parte, ao realizarem as medições, os alunos deveriam identificar a necessidade de aproximar medidas usando o erro, pois é impossível medir indefinidamente até conseguir o resultado *perfeito* das medições. O intuito dessa tarefa é de auxiliar na compreensão dos números com expansão decimal infinita, incluindo os irracionais. Na segunda parte, ao construir a reta real com os blocos de medida padrão, pretende-se que os alunos construam a noção de que a reta é constituída de números racionais e irracionais.

As práticas ocorreram em uma escola estadual, localizada na zona sul de Porto Alegre, com alunos que frequentavam a 8ª Série do ensino fundamental regular, no turno da tarde. Foram três encontros, sendo que cada encontro durou dois períodos.

Esse trabalho está dividido em cinco capítulos. O capítulo 2 fala sobre a Metrologia. Este capítulo está dividido em três seções: *O que é a Metrologia?*, *Um pouco de história da Metrologia* e *A Metrologia no Brasil*. A primeira seção descreve os conceitos básicos fundamentais para o entendimento da Metrologia, como *medição, grandeza, medir, unidade, calibração, rastreabilidade e incerteza*. A segunda seção fala sobre o desenvolvimento da Metrologia no decorrer da nossa história, desde a antiguidade quando se tentava uma padronização de medida até os dias de hoje com a padronização do metro. A terceira seção resume a história da Metrologia no Brasil, desde Dom Pedro II ter inserido a Metrologia no país até a criação do INMETRO.

No terceiro capítulo, serão discutidos aspectos teóricos sobre a reta real, baseados na dissertação de Daiane Scopel Boff, sob título “A construção dos números reais na escola básica” e no livro de Ripoll, Ripoll e Silveira, intitulado “Números racionais, reais e complexos”.

O quarto capítulo é dedicado as experiências em sala de aula. Cada atividade está dividida em: Objetivo, Metodologia, A Aula e a Conclusão da Atividade. Os dois primeiros itens descrevem o planejamento da atividade, o terceiro item descreve o como a aula transcorreu e o último comenta a atividade como um todo e traz algumas sugestões que eu acredito serem úteis a uma próxima aplicação da mesma atividade.

O quinto capítulo traz a conclusão do trabalho em questão, falando o que foi positivo, o que foi negativo e o que pode ser melhorado em relação aos objetivos apresentados no capítulo um.

2. INTRODUÇÃO À METROLOGIA

2.1 O Que é Metrologia?

Quantos não se perguntaram ao medir a febre, a sua altura, a pressão, a quantidade de glicose no sangue, o seu peso, se os valores apresentados eram realmente corretos ou se havia algum erro. Se medirmos o peso de um pacote de arroz aqui no Brasil, o mesmo terá a mesma medida de peso em outro país? Será que as medidas de todas as coisas do nosso cotidiano apresentam o valor correto? Será que não existe nenhuma variação nos valores medidos? Tudo é explicado no estudo da Metrologia.

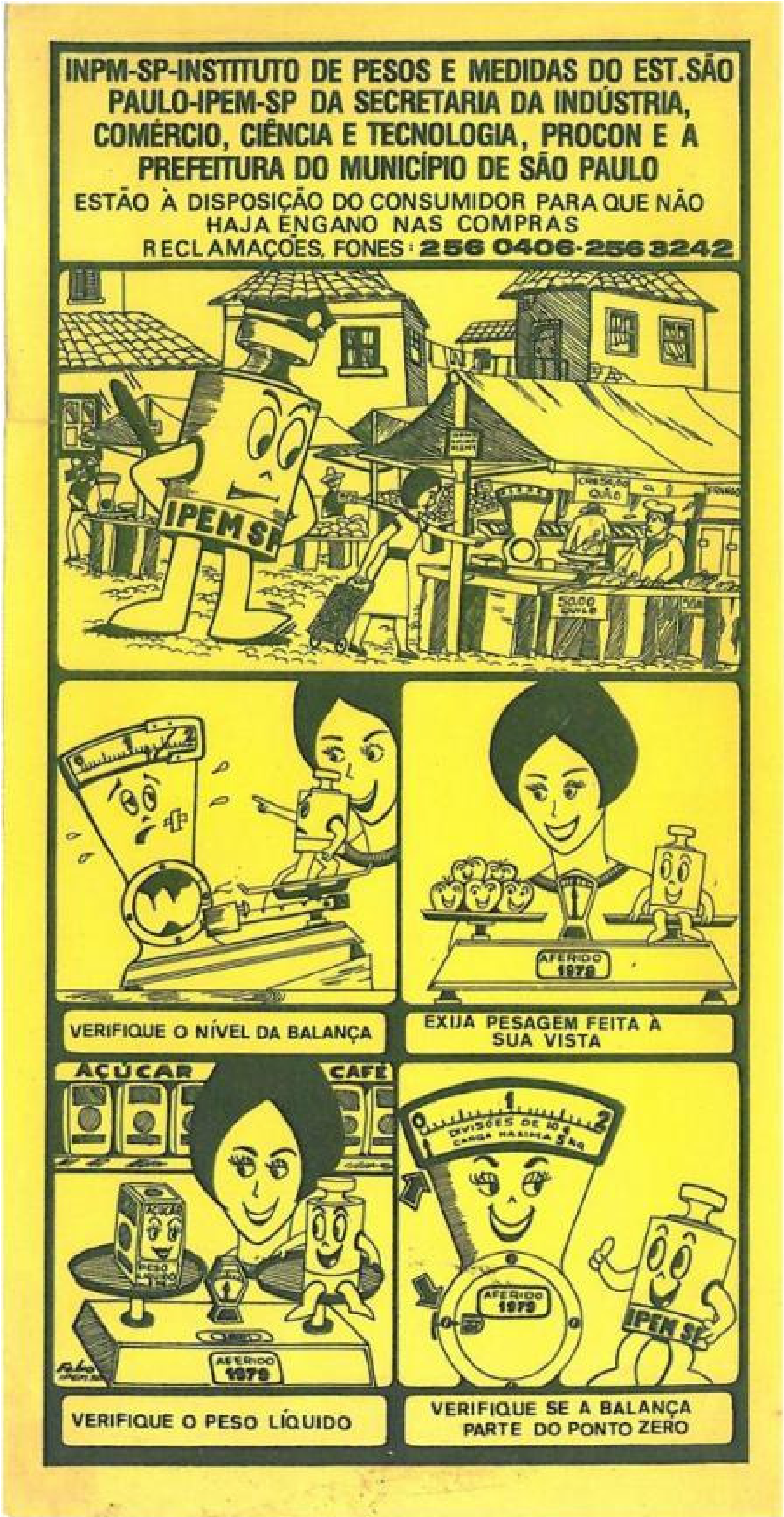

Figura 1: Folheto com quadrinhos ilustrativos, criado por Fábio Simas em 1979, servidor do IPEM, mostra que não é de hoje a preocupação com medições corretas.

Mas o que é Metrologia? Conforme o VIM (Vocabulário Internacional da Metrologia, 2008, p.20), *Metrologia é a Ciência das Medições e suas aplicações*, isto é, a Metrologia - Palavra de Origem grega (*metron:* medida; *logos:* ciência) - é tudo o que envolve medições, avaliando as medidas de modo que o resultado seja confiável.

Quando nos inserimos no mundo da Metrologia, automaticamente surge o ato de medir, mas o que é medir? Para sabermos o que é medir, é importante saber o que é uma grandeza. Conforme VIM, grandeza é a “propriedade de um fenômeno, de um corpo ou de uma substância, que pode ser expressa quantitativamente sob a forma de um número e de uma referência” (VIM, 2008, p.8). Segue abaixo a tabela com as sete grandezas fundamentais escolhidas na 14ª Conferência de Pesos e Medidas.

Tabela 1: Tabela de sete grandezas fundamentais escolhida em 1971, na 14ª Conferência de Pesos e Medidas.

Grandeza	Unidade	
Nome	**Nome**	**Símbolo**
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundo	s
corrente elétrica	ampére	A
temperatura termodinâmica	kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

Sabendo o que é grandeza, medir é o “Processo de obtenção experimental de um ou mais valores que podem ser, razoavelmente, atribuídos a uma grandeza” (VIM, 2008, p. 20). Um exemplo que traduz esta definição é a medição da altura de uma pessoa. Ao fazer a medição, é atribuído um valor à grandeza *comprimento*, usando como recurso algum equipamento que meça a altura.

Como a medição é atribuída a alguma grandeza (comprimento, temperatura, massa, etc.), deve-se determinar em que unidade é feita a medição, quando escolhida a grandeza. Por exemplo, se é escolhida a grandeza temperatura, deve-se escolher em que unidade medir, por exemplo, em kelvin, graus Celsius ou em graus Fahrenheit.

Para realizarmos uma medição, devemos escolher uma unidade que seja convencionalmente definida e aceita na maioria dos países. O Brasil segue o SI (Sistema Internacional de Medidas), sistema adotado e recomendado pela Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM). O SI é baseado em sete unidades de base, conforme Tabela 1.

Apesar de muitos países adotarem o SI, existem países que seguiram o sistema de medidas inglês. Esse sistema de medida utiliza unidades como jarda, pé e polegada, que estão relacionadas assim: uma jarda equivale a três pés, sendo que cada pé vale doze polegadas, logo uma jarda equivale a trinta e seis polegadas. Formalmente, esse sistema foi unificado com o SI utilizando a relação:

1 yd (uma jarda) = 914,4mm

1ft (um pé) = 304,8mm

1inch (uma polegada) = 25,4mm

Claro que, quando se fala em Metrologia, esta não se reduz ao simples fato de medir, mas engloba todo um sistema de operação capaz de dar confiança em sua medição. Para isso surge à *calibração*, que, conforme VIM (2008, p.30) é a

> “operação que estabelece, numa primeira etapa e sob condições especificadas, uma relação entre os valores e as incertezas de medição fornecidos por padrões e as indicações correspondentes com as incertezas associadas; numa segunda etapa, utiliza esta informação para estabelecer uma relação visando à obtenção de um resultado de medição a partir de uma indicação.”

Apesar de muitas pessoas usarem o termo *calibração* quando se ajusta o ar do pneu do carro, essa palavra tem um sentido mais preciso dentro da Metrologia. Para a Metrologia, o correto é “ajustar o pneu” e não “calibrar o pneu”. Para exemplificar o que é calibração nesse caso, usa-se a comparação de horas. Ao olhar a hora de um relógio, será que está correta? Não temos como saber de imediato, o certo é comparar a hora com uma referência. Aqui no Brasil, a referência é o Observatório Nacional. O ato de comparar e descobrir o quão o nosso valor está longe ou perto do valor verdadeiro, ou seja, descobrir o erro de medida chama-se *calibração*. Se o relógio estiver marcando quatorze horas e, ao comparar com a hora do Observatório Nacional (que no momento estava marcando quatorze horas e um minuto), significa que o relógio está um minuto atrasado, ou seja, o seu erro é de um minuto. Ao fazer esta comparação entre o relógio e o Observatório, executamos uma calibração, então toda vez que olharmos a hora, saberemos que a hora estará um minuto atrasada, bastando adicionar a este um minuto para sabermos a hora correta.

Sabemos que o Observatório Nacional serve para comparar a hora, mas se for outra grandeza? Por exemplo, a grandeza *temperatura*, como nós poderíamos comparar o nosso termômetro com alguma referência? Ao usarmos um termômetro para medir a temperatura da água, será que a temperatura que o instrumento está indicando é a correta? Para sabermos, devemos comparar este termômetro com um padrão de referência, ou seja, um termômetro com o seu erro conhecido. Este procedimento aplica-se a qualquer tipo de equipamento de medição que envolva qualquer grandeza, desde que tenhamos como comparar o seu equipamento com alguma grandeza de referência.

Para calibrar um mensurando qualquer (na Metrologia, um instrumento de medição também é denominado *mensurando*), deve-se ter a disposição um padrão de referência para comparar com o mensurando. Um padrão de referência nada mais é outro equipamento de medição, mas com o seu erro conhecido, mesmo que este erro seja zero.

Para ter um padrão de referência e conhecer o erro de medida, basta ter um equipamento de medição que seja confiável. Este equipamento deverá ser encaminhado a um laboratório de calibração, que possa garantir a finalidade das duas medidas.

Pensando nesse laboratório que irá fazer calibração no equipamento, suponha que seja um laboratório A, é necessário que o mesmo tenha um padrão de referência calibrado em um laboratório B, com o seu erro conhecido. Por sua vez o laboratório B, para calibrar outro equipamento de medição, necessita de um padrão de referência calibrado em um laboratório C, e assim por diante, até chegar a um *padrão primário*. O padrão primário nada mais é do que "um padrão estabelecido com auxílio de um procedimento de medição primário ou criado como um artefato, escolhido por convenção" (VIM, 2008, p. 48). Um exemplo de padrão primário é o padrão de massa do SI, guardado no BIPM (Bureau Internacional de Pesos e Medidas), na França. Este padrão primário é um cilindro de uma liga de platina-irídio com um quilo de massa, convencionalmente acordado. Foram feitas cópias perfeitas desta massa e enviadas a laboratórios de referência de vários países, inclusive o Brasil, com o INMETRO representando o país como um laboratório de referência.

Essa rede de calibração, partindo do padrão primário até o equipamento de medição chama-se *cadeia de rastreabilidade*. Cadeia de rastreabilidade, conforme (VIM, 2008, p. 32) é a "Sequência de padrões e calibrações utilizada para relacionar um resultado de medição a uma medição". Segue esquema da cadeia de rastreabilidade:

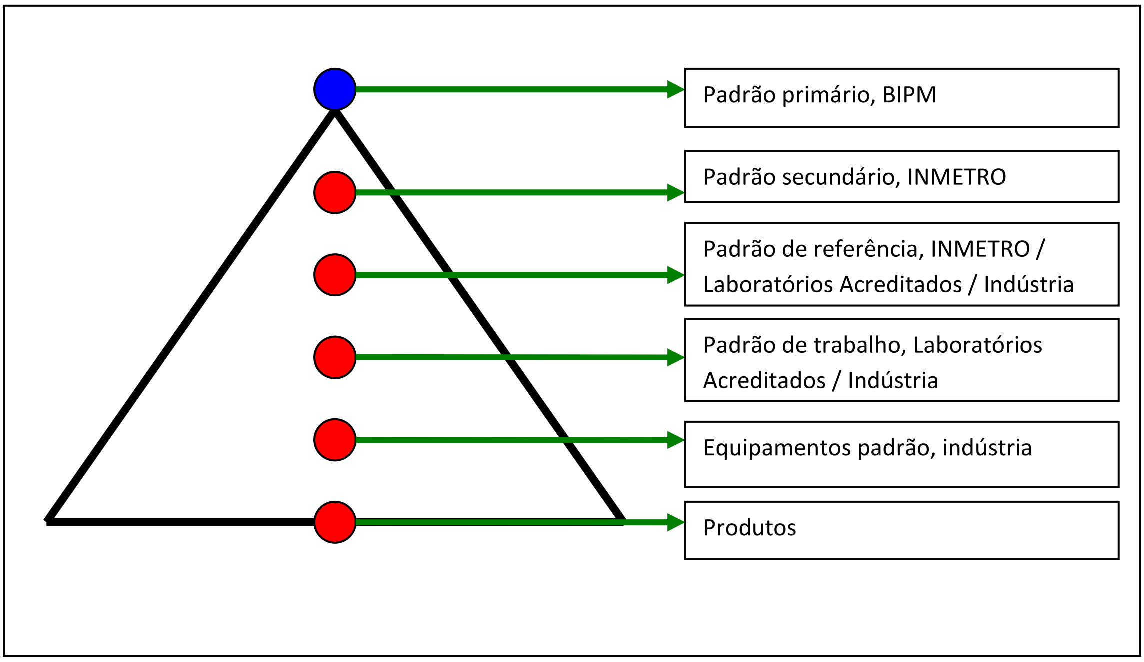

Figura 2: Pirâmide que representa a cadeia de rastreabilidade

Ao executar uma calibração em um equipamento de medição, isto é, ao comparar o equipamento de medição com um padrão de referência, é necessário fazer várias leituras do mesmo equipamento para descobrir se o mesmo varia ou não. Quanto mais os valores do equipamento variam, menos preciso será o instrumento; quanto menos os valores do equipamento variam, mais preciso o instrumento será. Em termos matemáticos, quanto maior o Desvio Padrão das leituras de um equipamento de medição, menos preciso será; quanto menor o

Desvio Padrão das leituras de um equipamento de medição, o instrumento será mais preciso. Para ilustrar, segue a tabela de resultados de uma calibração de dois termômetros digitais com sensor termorresistivo, em um vaso adiabático (é como se fosse uma garrafa térmica em formato de vaso, com o objetivo de segurar o calor) com água+gelo a 0℃:

Tabela 2: Tabela de leituras dos instrumentos calibrados.

Leitura do Padrão de Referência (℃)	**Leitura do instrumento 1 (℃)**	**Leitura do instrumento 2 (℃)**
0,00	0,00	0,00
0,00	0,01	0,05
0,00	0,01	0,08
0,00	0,00	0,03

Olhando a tabela, podemos verificar que o desvio padrão do instrumento 1 é aproximadamente 0,005774 e o desvio padrão do instrumento 2 é de aproximadamente 0,03665, isto é, o desvio padrão do instrumento 1 é menor comparado ao instrumento 2, resultando que o instrumento 1 é mais preciso que o instrumento 2.

Como já vimos, cada instrumento tem o seu erro, ou seja, o erro é inerente ao instrumento de medição, mesmo que o erro seja zero. O erro é o que determina se o instrumento de medição é mais exato ou menos exato. Conforme Tabela 2, calculando a média de ambos os instrumentos calibrados, teremos os seguintes resultados:

Média do padrão de referência: 0,000℃
Média do instrumento 1: 0,005℃
Média do instrumento 2: 0,040℃

Olhando os valores da média dos instrumentos e comparando com o valor da média do padrão de referência, o erro do instrumento 1 será 0,005℃ e o erro do instrumento 2 será 0,040℃. O erro do instrumento 2 é maior que o erro do instrumento 1, resultando que o instrumento 1 será mais exato que o instrumento 2.

Então, a precisão e exatidão estão relacionadas com a característica do instrumento. Mas nem sempre é possível analisar a precisão de um instrumento. Um exemplo é a régua graduada, onde apesar de existir erro inerente à régua (então é possível analisar a sua exatidão), os traços não mudam de lugar, logo não existe a possibilidade de medir a precisão uma régua graduada, diferentemente de um termômetro com indicador digital, onde é comum haver variação nos valores indicados, resultando em uma precisão.

Ao executar uma calibração em um mensurando, vários fatores influenciam no resultado de uma medição. Por exemplo, consideremos a calibração de um termômetro de mercúrio. É necessário comparar a temperatura medida pelo aparelho, disposto em um vaso adiabático, com a temperatura de um líquido, que já é conhecida. Mesmo assim, ao fazer a leitura, é possível que a visão do operador não esteja perpendicular à linha do termômetro, resultando assim em um erro de medida (paralaxe). Outro fator que influencia na calibração de um termômetro é a homogeneidade da temperatura do líquido, podendo alterar a leitura do instrumento em questão. Além destes fatores, existem outros que influenciam na calibração de um equipamento de medição. Na Metrologia, estes fatores são combinados em um único valor numérico. Este valor é apresentado toda vez que é executada uma calibração, e é denominado *incerteza de medição*.

Segue como exemplo, a tabela 3, com o resultado da média dos valores da tabela 2, adicionado o valor da incerteza:

Tabela 3: Exemplo de um resultado de medição com sua incerteza.

Média do Padrão de Referência (℃)	**Média do instrumento 1 (℃)**	**Média do instrumento 2 (℃)**	**Incerteza de medição (±) (℃)**
0,000	0,005	0,040	0,007

Esta tabela indica que, ao fazer a calibração dos instrumentos, existiram dúvidas ao executar as medições. Quando for usado o instrumento 1 e o mesmo estiver marcando 0,005℃, o valor real estará compreendido entre -0,002℃ e 0,012℃. Claro que, para chegar a este valor, é necessário todo um estudo estatístico em função dos fatores que geram dúvidas ao calibrar um mensurando, o que não é a proposta deste trabalho, mas sim uma breve apresentação dos elementos que envolvem a Metrologia.

2.2 Um Pouco de História da Metrologia

O nosso resumo histórico da Metrologia, tanto em nível brasileiro como em nível mundial, está baseado nas aulas do Telecurso 2000 Profissionalizante: módulo Metrologia, bem como no projeto Metrologia: Conhecendo e aplicando na sua empresa.

Não é de hoje que a Metrologia faz parte do nosso cotidiano, a Metrologia existe há séculos para padronizar o que chamamos *medir*. O homem sempre buscou padronizar suas medidas, isto é, criar sistemas de medidas que pudessem ser usados por qualquer pessoa. Porém o resultado nem sempre foi como esperado. Por exemplo, no Egito existia muita confusão quando se falava em medida, principalmente na venda de objetos que necessitassem de medição. Então surgiu um sistema de medida usando o braço como referência, porém as pessoas não tinham os braços do mesmo tamanho, gerando divergências no comércio. Devido ao caos nas medições, o Faraó decidiu criar um sistema de medida que referenciasse o seu braço. Então, em torno de 2900 A.C., ao construir a grande pirâmide, com o faraó Khufu, surgiu o primeiro padrão conhecido no Egito, este chamado de "Cúbito Real Egípcio", um padrão de granito preto, que tinha o comprimento equivalente do antebraço do faraó até o seu dedo médio. Por ser pesado, o granito foi trocado por madeira, para os comerciantes poderem transportar com mais facilidade. Seguindo esta linha, outros povos também adotaram sistemas de medidas que usassem como referência partes do corpo humano, de forma que as pessoas pudessem ter um padrão para medir, com isso surgiram medidas padrão como a polegada, o palmo, o pé, a jarda, a braça e o passo. Algumas dessas medidas são utilizadas até hoje.

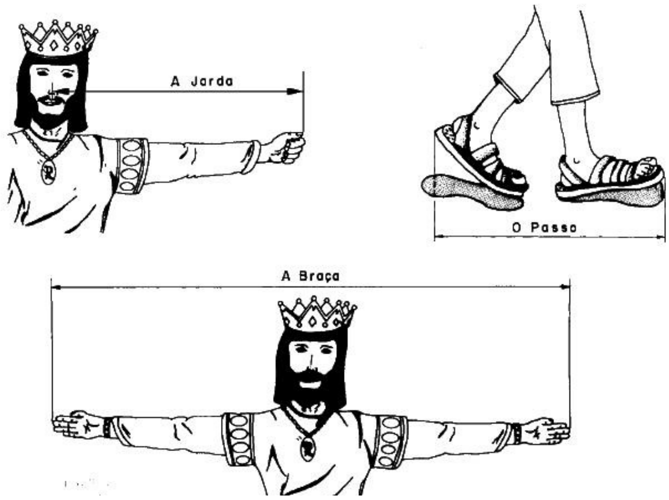

Figura 3: Alguns Exemplos de medidas usando partes do corpo.

Fonte: Apostila Telecurso 2000 profissionalizante

Na Bíblia, especificamente no Velho Testamento, sendo este um dos registros mais antigos da humanidade, também é mencionado um sistema de medida, o *côvado*. Em Gênesis, Deus mandou Noé construir uma arca com dimensões especificas medidas em côvados. Um côvado era equivalente a três palmos, o que em medidas atuais, equivaleria aproximadamente 66 cm.

> "Faze uma arca de tábuas de cipreste; nela fará compartimentos [...]. Deste modo a farás: de trezentos côvados será o comprimento; de cinquenta, a largura; e a altura, de trinta. Farás ao seu redor uma abertura de um côvado de altura; à porta da arca colocarás lateralmente; farás pavimentos na arca: Um em baixo, um segundo e um terceiro."
> Gênesis, 6: 15-16.

Na Inglaterra, o povo usava como medida uma polegada, que equivalia à medida de três grãos secos de cevada, colocados lado a lado. Esta medida foi decretada pelo rei Eduardo I em 1305. Devido à sua popularidade, os sapateiros ingleses começaram a fabricar sapatos usando como medidas os grãos, tornando padrão o tamanho dos sapatos. Se o tamanho do sapato quando medida de ponta a ponta fosse 37 grãos, então o número do sapato seria 37. Esta padronização de tamanhos de sapatos é utilizada até hoje.

No século XVII na França, surgiu uma medida padrão chamada *Toesa*, uma barra de ferro que media aproximadamente 183 cm. Este ferro foi chumbado na parede externa do Grand Châtelet, permitindo a qualquer um comparar o seu instrumento de medida com a barra de ferro. Com o tempo, o ferro foi se desgastando, surgindo então à necessidade de criar um padrão natural.

Devido a essa necessidade, a grande mudança no sistema de medidas surgiu após a Revolução Francesa de 1789, quando foi criada uma nova unidade denominada *metro*. O seu valor foi estabelecido como a décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre. Em seguida, esta unidade foi abandonada por questões práticas, surgindo assim o *metro-padrão*, este referenciado pela distância de dois traços, um em cada extremidade de uma barra, constituída por uma liga de platina-irídio. Esta barra foi mantida no Bureau de Pesos e Medidas, localizada na França. Foram feitas cópias idênticas desta barra, que foram enviadas a vários países, para estes usarem como padrão secundário.

Hoje em dia, devido à necessidade de uma precisão melhor em um padrão de medida, o metro foi redefinido como: "O metro é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo igual a 1/299792458 do segundo".

Assim, como a grandeza *comprimento*, outras grandezas sofreram mudanças ao longo do tempo, sempre em busca de um sistema padrão.

2.3 A Metrologia no Brasil

A Metrologia no Brasil é muito recente, apesar de D. Pedro II já ter se preocupado com o sistema de medida, criando, em 1862, a Lei Imperial 1157, adotando oficialmente o sistema métrico francês.

Com o crescimento industrial no Brasil, em 1961 foi criado o INPM (Instituto Nacional de Pesos e Medidas), com o objetivo de criar mecanismos eficazes de controle que impulsionassem e protegessem os produtores e consumidores brasileiros, surgindo assim a Rede Nacional de Metrologia Legal, instituindo o SI no Brasil. Mas foi em 1973, com a criação do INMETRO (Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial), em substituição ao INPM, a cultura metrológica no Brasil se tornou disseminado, apesar de apenas estar "engatinhando" em termos de Metrologia em nível internacional. Segue a missão do INMETRO:

> "Prover confiança à sociedade brasileira nas medições e nos produtos, através da metrologia e da avaliação da conformidade, promovendo a harmonização das relações de consumo, a inovação e a competitividade do País".
> (Fonte: http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/diretrizesEstrategicas.pdf)

3. ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE A RETA REAL

Neste capítulo, discutiremos aspectos teóricos sobre a reta real baseados na dissertação de Daiane Scopel Boff, sob título "A construção dos números reais na escola básica" e no livro de Ripoll, Ripoll e Silveira, intitulado "Números racionais, reais e complexos".

Quando os matemáticos que faziam parte da Escola Pitagórica, descobriram que existiam números que não podiam ser escritos da forma $\frac{a}{b}$, com *a* e *b* pertencentes aos inteiros, surgiu a necessidade de criar um novo conjunto que contemplasse tanto os números racionais como os irracionais. Então surgiu o conjunto dos números reais, um conjunto que abrange os números racionais e irracionais.

3.1 A Insuficiência Geométrica dos Números Racionais

Nessa seção, discutiremos em mais detalhes a construção da reta real a partir de medições de segmentos de reta.

Afirmação: Existem segmentos de reta que não podem ser medidos através de um número racional.

Primeiramente, demonstraremos a não existência de um número racional cujo quadrado vale 2, após demonstraremos a insuficiência geométrica dos racionais.

Demonstração

1ª Parte: Vamos supor que existe um racional do tipo $x = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros, $b \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$, tal que $x^2 = 2$.

Se $x^2 = 2$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, o que é equivalente a dizer que $\frac{a^2}{b^2} = 2$, logo $a^2 = 2b^2$.

Assim, a^2 é par, portanto a é par, ou seja, a é um inteiro da forma $a = 2m$, com m inteiro. Então $a^2 = (2m)^2 = 4m^2$.

De $a^2 = 2b^2$ temos $4m^2 = 2b^2$, logo $b^2 = 2m^2$, assim podemos concluir que b^2 é par, logo b é par.

Então a é par e b é par, o que é um absurdo, pois supomos que $mdc(a,b) = 1$.

Logo não existe número racional cujo quadrado vale 2.

2ª Parte: Construímos, a partir do segmento unitário δ na reta euclidiana r, um quadrado no plano que tem como um dos lados o segmento δ; a seguir, com um compasso, construímos um segmento S de r que é congruente à diagonal deste quadrado. Se S pudesse ser medido por um racional, digamos, $|S| = \left(\frac{a}{b}\right)$, com $a, b \in \mathrm{N}^*$, teríamos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Porém, isto é um absurdo, pois não existe número racional cujo quadrado vale 2.

Então, se quisermos expressar a medida exata de qualquer segmento de reta através de um número, somos forçados a expandir nosso conjunto numérico.

3.2 Construções dos Números Reais

Quando se trata de números reais, surgem várias construções para descrever o conjunto dos reais, como:

- A construção de Dedekind dos números reais;
- A construção de Cantor dos números reais;
- A construção dos números reais via medição de segmento de reta.

Neste trabalho, o foco será o último item, devido à maneira como o assunto será tratado ao longo do projeto.

3.3 A Construção dos Números Reais via Medição de Segmento de Reta

Como a construção dos números reais se dará via medição de segmento de reta, serão abordados inicialmente alguns conceitos sobre a reta euclidiana.

Definição 1: Na reta euclidiana, dizemos que dois segmentos de reta são congruentes se for possível superpô-los exatamente.

Para operar a superposição de retas, basta usarmos a construção geométrica, usando como auxílio um compasso. Dados dois segmentos $\overline{P_1Q_1}$ e $\overline{P_2Q_2}$, para sabermos se ambos são congruentes, colocamos uma das pontas do compasso em P_1 e a outra em Q_1, determinando uma abertura do compasso. Depois de determinar a abertura, colocar uma das pontas em P_2 e verificar se a outra ponta coincide com Q_2.

Definição 2: Dizemos que um segmento $\overline{AB}$ é menor ou igual a um segmento $\overline{CD}$ se, com a ajuda do compasso, for possível deslocar ou transladar o segmento $\overline{AB}$ de forma a deixar o novo segmento obtido $\overline{A'B'}$ totalmente contido no conjunto $\overline{CD}$, ou seja, $\overline{AB} \subseteq \overline{CD}$.

Obs.: Vale também se $\overline{AB}$ for apenas menor que $\overline{CD}$, ou seja, $\overline{AB} \subset \overline{CD}$.

Propriedade arquimediana: Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com $\overline{AB}$ não reduzido a um ponto e $\overline{AB} < \overline{CD}$, sempre é possível, com a ajuda do compasso, "emendar" várias translações do segmento $\overline{AB}$, de forma a obter um segmento que é maior do que $\overline{CD}$. Em outras palavras, sempre existe um inteiro positivo n tal que $\overline{CD} \subset n\overline{AB}$.

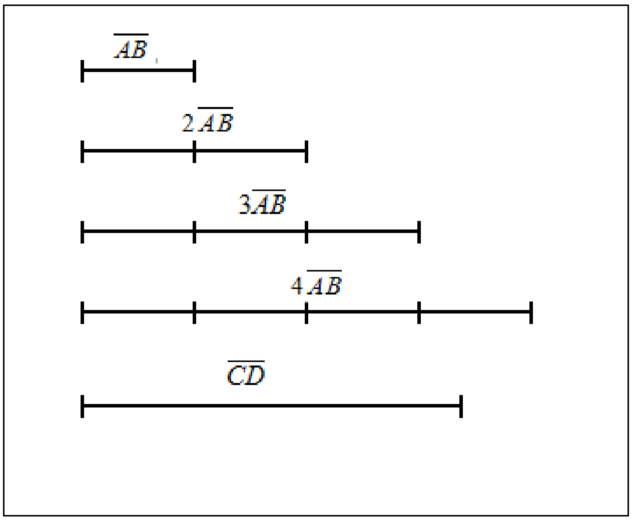

Figura 4: $\overline{AB}$ é menor do que $\overline{CD}$, mas $4\overline{AB}$ é maior do que $\overline{CD}$

Definição 3: Uma sequência (infinita) de segmentos $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$,... é dita *encaixante* se para cada $n \in \mathbb{N}^*$ tivermos $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}} \subseteq \overline{P_nQ_n}$.

Definição 4: Uma sequência (infinita) encaixante de segmentos $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$,... é dita evanescente se, dado um segmento qualquer $\overline{AB}$, com $A \neq B$, sempre pudermos encontrar um n tal que $\overline{P_nQ_n} < \overline{AB}$.

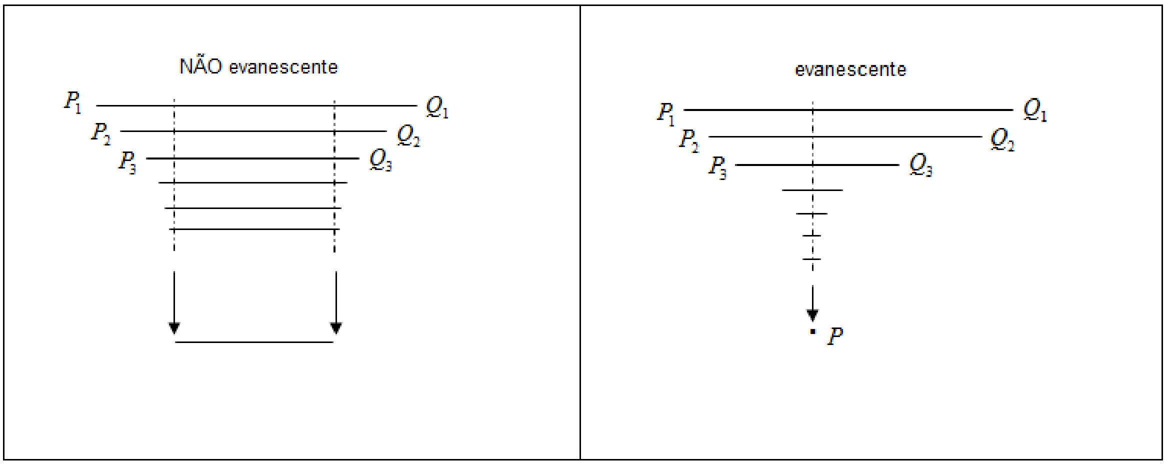

Figura 5: Quadros que representam duas sequencias de segmentos encaixantes

Princípio dos segmentos evanescentes: Se $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\overline{P_3Q_3}$,... é uma sequência de segmentos evanescentes da reta euclidiana, então existe um, e somente um ponto P comum a todos os segmentos desta sequência.

Teorema 1 (Teorema de Thales): Suponha que três retas paralelas r, s, t cortam as retas m, n nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, são congruentes também os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Dado um segmento de reta qualquer $\overline{AB}$ e um número $n \notin \mathrm{N}^*$, consegue-se subdividir $\overline{AB}$ em n segmentos congruentes. Para tal, basta usar a construção geométrica, com o subsídio do Teorema de Thales.

3.3.1 Construção da Régua Decimal Infinita sobre a reta euclidiana

Primeiramente, consideremos a reta euclidiana r. Sobre esta reta, fixemos um segmento de reta qualquer, com a única restrição que o mesmo não seja reduzido a um único ponto. Denotaremos tal segmento por δ, este que será nossa *unidade de medida* ou *segmento unitário*.

Para podermos construir a régua decimal infinita, marca-se uma série de pontos de r, que formarão a *rede de graduação unitária* de r. Além de marcar o ponto O no extremo esquerdo de δ, marca-se o primeiro ponto no ponto extremo direito de δ, denominado $P(1)$. Para marcarmos o segundo ponto na régua, tomamos um compasso tal que suas pontas coincidam com os pontos das extremidades de δ; a seguir, colocamos a ponta seca do compasso em $P(1)$ e marcamos com a outra ponta do compasso um ponto de r à direita de $P(1)$, denotando este novo ponto por $P(2)$. A seguir colocamos a ponta seca do compasso em $P(2)$ e marcamos com a outra ponta um novo ponto de r, à direita de $P(2)$, que denotaremos por $P(3)$. Se repetirmos o processo indefinidamente, obteremos um conjunto de infinitos pontos de r, a saber: $O, P(1), P(2), P(3), P(4), \ldots. P(n), \ldots,$ estes que constituem a *rede de graduação unitária* da régua decimal.

Após, criada a rede de graduação unitária, colocamos no compasso uma abertura igual a um décimo do segmento unitário. Isto pode ser feito dividindo-se OP em dez partes usando, por exemplo, a aplicação do Teorema de Thales. Colocando a abertura do compasso um décimo do segmento unitário, de maneira similar é feita para marcar os pontos da rede unitária, marcamos os pontos $P(1/10)$, $P(2/10)$, $P(3/10)$, ..., $P(10/10)$, $P(11/10)$,... . Ficamos assim, com um novo conjunto, este com infinitos pontos, a saber:

$$O,\ P\left(\frac{1}{10}\right), P\left(\frac{2}{10}\right), P\left(\frac{3}{10}\right), P\left(\frac{4}{10}\right), \ldots, P\left(\frac{10}{10}\right) = P(1)$$

$$P\left(\frac{11}{10}\right), P\left(\frac{12}{10}\right), \ldots, P\left(\frac{20}{10}\right) = P(2)$$

$$P\left(\frac{21}{10}\right), P\left(\frac{22}{10}\right), \ldots$$

O conjunto dos pontos, nos quais foram expostos acima, é denominado *rede de graduação decimal* da régua decimal infinita. Este pode ser representado por números decimais.

$$O,\ P(0{,}1), P(0{,}2),\ P(0{,}3),\ P(0{,}4), \ldots,\ P(1{,}0) = P(1)$$

$$P(1{,}1),\ P(1{,}2), \ldots,\ P(2{,}0) = P(2)$$

$$P(2{,}1),\ P(2{,}2), \ldots$$

Em uma próxima etapa, usaremos o compasso com a abertura de um centésimo de δ e marcando, de maneira análoga, os pontos de rede de graduação centesimal. Seguem os pontos:

$$O,\ P\left(\frac{1}{100}\right), P\left(\frac{2}{100}\right),\ P\left(\frac{3}{100}\right),\ P\left(\frac{4}{100}\right), \ldots,\ P\left(\frac{100}{100}\right) = P(1)$$

$$P\left(\frac{101}{100}\right),\ P\left(\frac{102}{100}\right), \ldots,\ P\left(\frac{200}{100}\right) = P(2)$$

$$P\left(\frac{201}{100}\right),\ P\left(\frac{202}{100}\right), \ldots$$

Usando estes mesmos valores na expansão decimal, teremos o seguinte:

$$O,\ P(0{,}01), P(0{,}02),\ P(0{,}03),\ P(0{,}04), \ldots,\ P(1{,}00) = P(1)$$

$$P(1{,}01),\ P(1{,}02), \ldots,\ P(2{,}00) = P(2)$$

$$P(2{,}01),\ P(2{,}02), \ldots$$

E assim por diante. Para cada número natural n, construímos ou marcamos os pontos da rede de graduação $1/10^n$ da régua decimal. Segue o exemplo ilustrativo da rede de graduação:

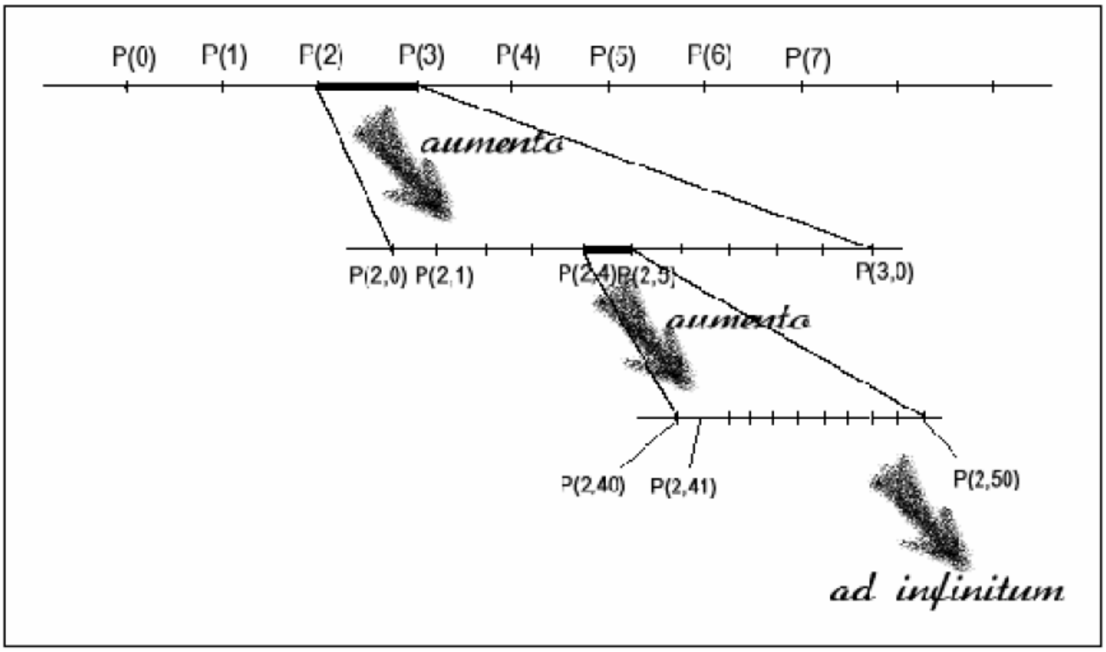

Figura 6: Exemplo ilustrativo da rede de graduação

O conjunto da união de todas as redes de graduação, após a construção das mesmas, denominará *régua decimal infinita de unidade de medida* δ. Este conjunto consta de todos os pontos, à direita de O, da forma $P\left(\frac{m}{10^n}\right)$, onde m, n são inteiros positivos. Estes pontos serão denominados de *pontos graduados da reta*. O ponto O poderá, se necessário, ser indicado por $P(0)$.

Resumindo este processo:

A régua decimal infinita de unidade δ consiste de O e de todos os pontos P que estão à direita de O e que satisfazem a seguinte propriedade: para algum m e algum n, ambos inteiros positivos, o segmento $\overline{OP}$ é a justaposição de m cópias da 10^n -ésima parte de δ, ou seja, $\overline{OP} = \left(\frac{m}{10^n}\right)\delta$. Neste caso, este ponto P é denotado por $P\left(\frac{m}{10^n}\right)$, e, portanto concluímos:

$$OP\left(\frac{m}{10^n}\right) = \frac{m}{10^n}\delta$$

Porém, com este processo, não ficam rotulados todos os pontos à direita de O, pois a medida de qualquer segmento da forma $\overline{OP}$ quando P é um ponto graduado é dada por uma fração decimal. Então, se dividirmos a unidade de medida δ em três partes e denotarmos por $\overline{OP}$ a primeira terça parte, teremos que P não é um ponto graduado da reta, pois, $\overline{OP} = \frac{1}{3}$, que não é igual a nenhuma fração decimal.

O exemplo acima nos garante então que existem pontos, à direita de O, que não são graduados, o que não é difícil convencer-se que eles são infinitos.

3.3.2 Medindo segmentos de reta via Régua Decimal Infinita – 1

Primeiramente, denotaremos a medida de $\overline{AB}$ por $|AB|$. Como denotado anteriormente, δ será nossa unidade de medida, logo $|\delta| = 1$.

Para satisfazer nosso processo de medição, serão listadas algumas propriedades naturais:

- Se $\overline{AB}$ for congruente a um segmento $\overline{CD}$, então $|AB| = |CD|$;
- Se $A = B$, então $|AB| = 0$;
- Se C é um ponto entre A e B, então $|AB| = |AC| + |CD|$;
- Para cada $m \in \mathrm{N}^*$, temos que $m\overline{AB}$ denota m cópias de $\overline{AB}$ juntas, de modo que estabeleçamos que $|mAB| = m|AB|$.

Com estas propriedades, teremos condições de medir alguns segmentos de reta via a régua decimal infinita.

Definição 5: Dizemos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *comensuráveis* se existem números naturais m, n tais que $m\overline{AB}$ e $n\overline{CD}$ são congruentes. Por consequência, um segmento $\overline{AB}$ é comensurável com a unidade δ se existirem números naturais não nulos m, n tais que $m\overline{AB}$ e $n\delta$ são congruentes.

Para medirmos um segmento de reta, vamos supor que $A \neq B$. Pois se $A = B$, $|AB| = 0$.

Com a ajuda do compasso, podemos transladar $\overline{AB}$ de tal forma que uma das suas extremidades coincida com a origem O da régua decimal infinita e a outra extremidade fique à direita de O. Denotemos este segmento transladado por $\overline{OP}$, que é então congruente ao segmento original $\overline{AB}$. Assim, pelas propriedades acima, $\overline{AB} = \overline{OP}$.

Definida a congruência, resta definir a medida $\overline{OP}$ quando P é um ponto graduado da reta.

Sabemos que, quando P é um ponto graduado da reta, a medida $|OP|$ é uma fração decimal da forma $\left(\frac{m}{10^n}\right)$. Sabemos também que existem pontos não graduados da reta que originam segmentos da forma $\overline{OP}$ para os quais também não temos problema nenhum em expressar sua medida. Então, será que qualquer segmento de reta da forma $\overline{OP}$ com P à direita de O é tal que $|OP|$ pode ser expressa por um número racional? Claro que a resposta é negativa, devido à insuficiência geométrica dos racionais.

3.3.3 Medindo segmentos de reta via Régua Decimal Infinita – 2

O objetivo agora é desenvolver um processo geral para medir qualquer segmento de reta, inclusive aqueles discutidos anteriormente.

Seja P um ponto à direita de O. Para medirmos o segmento $\overline{OP}$, desdobraremos o processo de medição em uma sequência de etapas, sendo que, em cada etapa, procuraremos obter uma medida aproximada do segmento, nos aproximando pela esquerda o mais possível do ponto P por pontos graduados de uma rede pré-fixada da régua decimal infinita; e fazemos isto determinando pontos consecutivos desta rede que cercam P.

1. Em uma primeira etapa, determinaremos inteiros consecutivos m e $m+1$ tais que: ou P está entre $P(m)$ e $P(m+1)$ ou P coincide com $P(m)$.

Se P coincide com $P(m)$, ou seja, $P = P(m)$, então nosso processo de medição está encerrado. Neste caso, $\overline{OP} = OP(m) = mOP(1) = m\delta$, ou seja, δ cabe exatamente m vezes em $\overline{OP}$, de modo que $|OP| = m|\delta| = m$, já que $|\delta| = 1$.

Se $\overline{OP} \neq OP(m)$, ou seja, $OP(m) \subset \overline{OP} \subset OP(m+1)$. Neste caso, m não pode ser tomado como a medida exata de $\overline{OP}$; podemos apenas dizer que m é uma medida aproximada do que imaginamos ser a medida de $\overline{OP}$, com um erro menor que 1, pois: o segmento $P(m)P(m+1) \equiv |\delta| = 1$ e como $\overline{OP} \neq OP(m)$, m não pode ser tomado como a medida exata de $\overline{OP}$.

Para buscarmos uma melhor aproximação para a medida de $\overline{OP}$, recorreremos à rede de graduação decimal.

2. Em uma segunda etapa, verificamos quantos segmentos congruentes a $\frac{1}{10}\delta$ cabem, a partir de $P(m)$, no segmento $\overline{OP}$.

Seja a_1 número tal que $a_1 \in (0,1,...,9)$, ou seja, a_1 é um dígito tal que:

Ou $P = P\left(m + \frac{a_1}{10}\right)$, ou P está entre $P\left(m + \frac{a_1}{10}\right)$ e $P\left(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right)$, isto é:

$$OP\left(m + \frac{a_1}{10}\right) \subset \overline{OP} \subset OP\left(m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right), \text{ ou melhor:}$$

$$OP(m,a_1) \subseteq \overline{OP} \subset OP\left(m,a_1 + \frac{1}{10}\right)$$

Se $P = P(m,a_1)$, então P é um ponto da rede de graduação decimal e, neste caso, o processo de medição está encerrado, pois $\overline{OP} = OP(m,a_1) = (m,a_1)\delta$, ou seja, δ cabe exatamente m,a_1 vezes dentro de $\overline{OP}$, de modo que $|OP| = m,a_1$.

Se $\overline{OP} \neq OP(m,a_1)$, ou seja, $OP(m,a_1) \subset \overline{OP} \subset OP\left(m,a_1 + \frac{1}{10}\right)$. Neste caso, m,a_1 não pode ser tomado como a medida exata de $\overline{OP}$; podemos apenas dizer que m,a_1 é uma medida aproximada do que imaginamos ser a medida de $\overline{OP}$, com um erro menor que $\frac{1}{10}$.

Para buscarmos uma melhor aproximação para a medida de $\overline{OP}$, recorreremos à rede de graduação centesimal.

3. Em uma terceira etapa, verificamos quantos segmentos congruentes a $\frac{1}{10^2}\delta$ cabem, a partir de $P(m,a_1)$, no segmento $\overline{OP}$.

Seja a_2 número tal que $a_2 \in (0,1,...,9)$, ou seja, a_2 é um dígito tal que

$$OP(m,a_1a_2) \subseteq \overline{OP} \subset OP\left(m,a_1a_2 + \frac{1}{100}\right)$$

Se $P = P(m,a_1a_2)$, então P é um ponto da rede de graduação centesimal e, neste caso, o processo de medição está encerrado, pois $\overline{OP} = OP(m,a_1a_2) = (m,a_1a_2)\delta$, ou seja, δ cabe exatamente m,a_1a_2 vezes dentro de $\overline{OP}$, de modo que $|OP| = m,a_1a_2$.

Se $\overline{OP} \neq OP(m,a_1a_2)$, ou seja, $OP(m,a_1a_2) \subset \overline{OP} \subset OP\left(m,a_1a_2 + \frac{1}{100}\right)$. Neste caso, m,a_1a_2 não pode ser tomado como a medida exata de $\overline{OP}$; podemos apenas dizer que m,a_1a_2 é uma medida aproximada do que imaginamos ser a medida de $\overline{OP}$, com um erro menor que $\frac{1}{10^2}$.

Podemos repetir este processo quantas vezes forem necessárias. Mas naturalmente surge a seguinte questão: *Será que qualquer ponto P à direita de O pertence a alguma rede de graduação da reta?* Claro que a resposta é negativa, como vimos no exemplo que $\overline{OP} = \frac{1}{3}$.

Continuando o processo de medição do segmento $\overline{OP}$, se P não é um ponto graduado da reta, o máximo que conseguiríamos, através do processo de medição via régua decimal infinita, seriam valores de medida $\overline{OP}$ com erro arbitrariamente pequeno; ou seja, se P é um ponto não graduado da reta, através do processo visto, para qualquer $n \in \mathrm{N}$ dado, pode-se construir um racional $m, a_1 a_2 ... a_n$, este que é um valor aproximado da medida $\overline{OP}$, com erro menor que $\frac{1}{10^n}$. Evidente que este erro nunca será zero. O “erro zero” apenas será obtido quando n for infinito.

Portanto, no caso em que P não é um ponto graduado na reta, para obtermos a medida exata de $\overline{OP}$, não basta considerarmos como valor exato uma lista do tipo $m, a_1 a_2 ... a_n$, mas uma lista completa, ou seja, infinita do tipo $m, a_1 a_2 ... a_k ...$, este que expressa um processo de medição infinito.

Ressaltando, este método, pelo fato de fornecer medidas “tão aproximadas quanto se queira” na medição de comprimentos, é suficiente para fornecer respostas adequadas aos problemas práticos de medição que surgem nas aplicações técnicas.

A maneira de expressar a medida exata de um segmento nos permite encaminhar, de forma inteiramente satisfatória, o problema da medição de um segmento qualquer de reta:

Definição: A medida exata de um segmento é expressa por uma lista da forma $|OP| = m, a_1 a_2 ...$, onde $m \in \mathrm{N}$ e $a_1 a_2 ....$ são dígitos, com o seguinte significado: para cada n, o racional $m, a_1 ... a_n$ é uma aproximação da medida de $\overline{OP}$ com erro menor do que $\frac{1}{10^n}$.

Sabemos que, dados quaisquer naturais a e b com $b \neq 0$, podemos construir um segmento $\overline{OP}$ tal que $\overline{OP} = P\left(\frac{a}{b}\right) = a\left(\frac{1}{b}\delta\right)$, mas para obtermos uma lista que represente esta medida, partimos da tradução geométrica do processo da determinação da expansão decimal do número racional $\frac{a}{b}$. Portanto, quando $\overline{OP} = a\left(\frac{1}{b}\delta\right)$, podemos escrever: $|OP| = m, a_1 a_2 ... = \frac{a}{b}$, sem ambiguidade de interpretação.

Agora pensando no problema inverso, se pegarmos uma lista obtida através do processo de medição de um segmento via régua decimal infinita, tal que, esta lista seja igual à lista que representa a expansão decimal de um racional, então este racional é a medida deste segmento. Mais precisamente: se pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento $\overline{OP}$ obtivemos uma lista finita ou infinita periódica, de período não composto só por $9's$, e se $\frac{p}{q}$ é o racional cuja expansão decimal é dada por esta mesma lista, então $\overline{OP} = \frac{p}{q}\delta$ e, portanto $|OP| = \frac{p}{q}$.

Assim, para que possamos medir de maneira exata *todos* os segmentos de reta através da régua decimal infinita, incluímos números representados por listas do tipo $m, a_1 a_2 ...$, com $m \in \mathrm{N}$ e a_i dígito, para todo i, e que não provêm da expansão decimal de nenhum racional. Mas será que listas deste tipo sempre representam a medida de um segmento de reta? Para responder esta questão, segue:

Consideramos inicialmente uma lista infinita $x = m, a_1 a_2 ...$. Então, procuramos um ponto P à direita de O tal que $|OP| = m, a_1 a_2 ... a_n ...$. Se tal ponto existir, então ele deve ser um ponto pertencente a cada um dos segmentos

$$
\begin{aligned}
&P(m)P(m+1) \\
&P(m, a_1)P\left(m, a_1 + \frac{1}{10}\right) \\
&P(m, a_1 a_2)P\left(m, a_1 a_2 + \frac{1}{100}\right) \\
&\dots \\
&P(m, a_1 a_2 \dots a_n)P\left(m, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}\right) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Como esta sequência é encaixante e evanescente, então existe exatamente um ponto comum a todos os segmentos listados acima, ou seja, pelo Princípio dos Segmentos Evanescentes, existe um único ponto Q comum a todos os seus segmentos. Assim, se existir um ponto P à direita de O tal que

$|OP| = m, a_1 a_2 ... a_n ...$, então necessariamente ele terá que ser igual a este ponto Q. Tentamos então determinar, via régua decimal infinita, a lista que expressa o comprimento do segmento $\overline{OQ}$.

Primeiro: a lista não tem período só formado por $9's$. Neste caso, podemos usar o Princípio dos Segmentos Evanescentes para verificar que a lista obtida, via régua decimal infinita, para medir o segmento $\overline{OQ}$, sendo Q o ponto acima construído, é precisamente a lista $m, a_1 a_2 \ldots$.

Segundo: a lista é periódica de período apenas formado por $9's$, mas existem dígitos na lista diferentes de 9. Neste caso, podemos associar esta lista a uma segunda lista que representa um segmento que pode ser construído em um número finito de passos. Para dar a ideia do argumento, segue o exemplo:

Consideremos a lista infinita $23{,}234999\ldots$, isto é, uma lista que tem período formado apenas por $9's$, mas que contém uma parte aperiódica. A tal lista, associamos a seguinte sequência de segmentos evanescentes:

$$
\begin{aligned}
&P(23)P(24),\\
&\ldots,\\
&P(23{,}234)P(23{,}235),\\
&P(23{,}2349)P(23{,}235),\\
&P(23{,}23499)P(23{,}235),\ldots,
\end{aligned}
$$

que tem o ponto $P(23{,}235)$ presente em todos os seus segmentos, de modo que, como estes são evanescentes, $P(23{,}235)$ é o único ponto comum a todos estes segmentos. Mas $P(23{,}235)$ é um ponto graduado, e então, pelo método da régua decimal infinita, já conhecíamos a lista que expressa sua medida, a saber, a lista finita $23{,}235$, que obviamente, em termos de lista, não é igual a $23{,}234999\ldots$.

Finalmente, se considerarmos uma lista periódica de período formado por $9's$, mas que tenha a forma $m{,}999\ldots$, poderemos associá-la, como no caso anterior, à sequência $m+1{,}000\ldots$.

Portanto, todas as possíveis listas da forma $m, a_1 a_2 \ldots$ com $m \in \mathrm{N}$ e $a_1, a_2, \ldots$ dígitos expressam a medida de algum segmento da forma $\overline{OP}$ com P

um à direita de O. Além disso, vimos que os segmentos associados a listas periódicas de período formado apenas por $9's$, são iguais a segmentos formados por outras listas. Formalmente, podemos restringir o conjunto de listas, identificando as listas de período 9 com uma lista que dá origem ao mesmo segmento.

Definição: Dizemos que uma lista $m, a_1a_2\ldots a_s999\ldots$ com $m \in \mathrm{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_s$ dígitos expressa a mesma quantidade numérica que a lista $m, a_1a_2\ldots a_{S-1}b000\ldots$, onde $b = a_S + 1$, a saber, a medida do segmento $OP(m, a_1a_2\ldots a_{S-1}b)$, enquanto que uma lista da forma $m,999\ldots$ expressa à mesma quantidade numérica que a lista $b,000\ldots$, onde $b = m+1$.

Então, através da definição acima, duas listas distintas podem representar uma mesma medida.

Lema: Sejam $c, a_1a_2\ldots$ e $d, b_1b_2\ldots$ duas listas distintas, e sejam P_1 e P_2 pontos à direita de O tais que $|OP_1| = c, a_1a_2\ldots$ e $|OP_2| = d, b_1b_2\ldots$. Então se $P_1 = P_2$, existem dois casos a considerar:

i) Existe $n \in \mathrm{N}$ tal que elas coincidem até a posição n e, a partir daí, digamos, se $a_{n+1} < b_{n+1}$, então:
$$\begin{array}{l} b_{n+1} = 1 + a_{n+1}, \\ 9 = a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots \\ 0 = b_{n+2} = b_{n+3} = \ldots \end{array}$$

ii) Se $c \neq d$, digamos, $c < d$ então $d = 1 + c$ e, para todo i, $\begin{array}{l} a_i = 9 \\ b_i = 0 \end{array}$

Considerando as conclusões sobre as listas do tipo $m, a_1a_2\ldots$, somos levados a ampliar o conceito de número, considerando também como números tais listas infinitas, criando assim os chamados reais absolutos. Segue a definição:

Definição: O conjunto dos números reais absolutos é o conjunto de todas as listas infinitas $m, a_1a_2\ldots$, (onde m é um inteiro não negativo e a_i é dígito, para $i = 1,2,\ldots$) submetidas ao seguinte critério de igualdade: escrevemos

$m_1, a_1a_2 \ldots = m_2, b_1b_2 \ldots$ quando, e só quando, ambas as listas medirem um mesmo segmento da reta euclidiana.

Com isso, o conjunto dos números reais absolutos inclui todos os números racionais positivos (as listas periódicas). As listas não periódicas são chamadas de números irracionais absolutos. Continuamos a denominar qualquer lista que representa um real absoluto x de expansão decimal x.

3.4 Representação dos Números Reais Absolutos

Ao construirmos um número real, via medição exata de segmento de reta, associamos ao segmento $\overline{OA}$ a lista $a_0, a_1a_2a_3 \ldots$ a esta lista chamamos de medida do segmento $\overline{OA}$, ou seja, $\overline{OA} = a_0, a_1a_2a_3 \ldots$ e dessa forma expressamos a medida de qualquer segmento de reta através de uma lista (talvez infinita).

Por esta construção, o conjunto dos Números Reais Absolutos é o conjunto de todas as expressões da forma $m, a_1a_2a_3 \ldots$, onde m é o número natural e os demais a_n são números naturais entre 0 e 9 (chamados algarismos ou dígitos), com o seguinte significado numérico:

i) $0{,}000\ldots = 0$

ii) Um número real absoluto não nulo $x = m, a_1a_2a_3 \ldots$ expressa uma quantidade tal que:

$$
\begin{aligned}
& m \le x \le m+1 \\
& m, a_1 \le x \le m, a_1 + \frac{1}{10} \\
& m, a_1a_2 \le x \le m, a_1a_2 + \frac{1}{100} \\
& \vdots \\
& Donde: x = m, a_1a_2 \ldots a_r \ldots
\end{aligned}
$$

3.5 Números Reais Apresentados em Livros Didáticos

Quando se fala em números reais em livros didáticos, naturalmente os autores iniciam o conteúdo explicando que o conjunto dos números reais é a união dos conjuntos dos racionais com o conjunto dos números irracionais, isto é, $IR = \{x \mid x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$. Em relação à definição, os quatro livros pesquisados foram unânimes no uso da definição e de sua relação biunívoca com os pontos da reta; porém, a partir da definição do conjunto dos números reais e da relação, distintamente os autores estabelecem o que é a reta real. Por exemplo, um dos livros, o autor define a reta real através de construção. Segue:

> "[...] associamos o número 0 (zero) a um ponto O qualquer de r; a cada ponto A de uma das semi-retas determinadas por O em r, associamos um número positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u; a cada ponto A', simétrico de A em relação à O, associamos o oposto de x. A esse sistema damos o nome de **eixo real**, cuja origem é o ponto O e o sentido é o que concorda com o crescimento dos valores numéricos." (PAIVA, 2003, p.13)

A mesma ideia de construção da reta real é usada por DANTE, conforme construção a seguir:

> "[...] dizemos que existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim a reta real, que é construída desta forma: numa reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela o zero), um sentido de percurso e uma unidade de comprimento [...]" (DANTE, 2004, p.28)

Diferentemente de PAIVA e DANTE, BIANCHINI apenas apresenta a reta como definição. Segue: "A representação de todos os números racionais e irracionais, isto é, dos números reais, preenche completamente a reta numerada. A essa reta chamamos de **reta real**." (BIANCHINI, 2001, p. 16). Após, o mesmo fala da correspondência biunívoca, ou seja, "a cada número real corresponde um único ponto da reta" (BIANCHINI, 2001, p. 16). Porém, pesquisando outro livro didático, BIGODE define a reta real, além da relação biunívoca, como: "A reta real pode ser traçada deslizando um *lápis ideal* – que não gasta – sobre uma *folha ideal* – que não acaba – sem sair da folha." (BIGODE, 2002, p.35), complementando com construções de alguns números racionais e irracionais sobre a reta usando régua e compasso.

São abordadas propriedades dos números reais, como comutatividade, distributividade, elemento neutro, entre outras, apenas em livros de Ensino

Fundamental. Em livros de Ensino Médio que tratam de números reais, não vi uma discussão dessas propriedades algébricas dos números reais. Seguem as propriedades dos números reais, conforme BIANCHINI:

Tabela 4: Propriedades dos reais. (BIANCHINI, 2001, p.17)

Propriedades	Adição	Multiplicação
Comutativa	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Associativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Elemento neutro	$a+0=0+a=a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento oposto	$a+(-a)=(-a)+a=0$	
Elemento inverso		$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \; (a \neq 0)$
Distributiva		$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Conforme os livros pesquisados, estes seguem o conteúdo “os intervalos reais”, com exceção do livro “Matemática: Hoje é feito assim” de BIGODE, que é mais focado na construção rigorosa de alguns números irracionais ao longo do capítulo. Segue a introdução do conteúdo, conforme (PAIVA, 2003, p.13):

> Sejam a e b números reais tais que $a<b$. Chamam-se **intervalos reais** os subconjuntos de IR apresentados a seguir:
>
> **Intervalo** limitado **fechado**
> $\{x \in IR \mid a \leq x \leq b\} = [a,b]$
>
> **Intervalo limitado** aberto
> $\{x \in IR \mid a < x < b\} =]a,b[$
>
> **Intervalo** limitado **semi-aberto**
> $\{x \in IR \mid a < x \leq b\} =]a,b]$
>
> $\{x \in IR \mid a \leq x < b\} = [a,b[$
>
> **Intervalo** ilimitado
> $\{x \in IR \mid x \geq a\} = [a,+\infty[$

$$\{x \in IR \mid x > a\} =]a,+\infty[$$

$$\{x \in IR \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$$

$$\{x \in IR \mid x < a\} =]-\infty, a[$$

$$IR =]-\infty,+\infty[$$

4 EXPERIÊNCIAS EM SALA DE AULA

As práticas ocorreram em uma escola estadual, localizada na zona sul de Porto Alegre, com alunos que frequentavam a 8ª Série do ensino fundamental regular, no turno da tarde. Foram três encontros, sendo que cada encontro durou dois períodos.

Nenhum dos livros didáticos de matemática voltados para o ensino fundamental, continha alguma atividade que envolvesse Metrologia e a reta real. Por isso, foram elaboradas atividades envolvendo noções de metrologia, com o objetivo de auxiliar na aprendizagem da reta real, envolvendo manipulação de instrumentos de medição, como termômetros e paquímetros. Também foram utilizados instrumentos que simularam equipamentos de medição, neste caso os blocos de Cuisinaire.

Figura 7: Instrumentos utilizados nas atividades

4.1 Atividade 1 – Padronização de Medida

Objetivo: Que os alunos percebam a importância de existir padrão nas medidas e olhem a Metrologia como um todo, incluindo fatos históricos da Metrologia.

Metodologia: Dividir a turma em grupos de quatro alunos cada. Entregar para cada grupo um *kit medição* (um kit contém: uma fita, uma folha, um cordão e várias peças de mesmo tamanho do Cuisinaire). As fitas e os cordões têm o mesmo tamanho em todos os kits, diferentemente das peças do Cuisinaire, que têm tamanhos distintos em kits diferentes.

Solicitar a cada grupo medir os componentes do seu kit, com o auxílio das peças do Cuisinaire (estas usadas como blocos-padrão), e anotando no caderno os resultados.

Após os alunos anotarem no caderno os valores obtidos, os grupos negociarão entre si os componentes de cada kit, de modo que:

- em um primeiro momento, o professor determinará o valor a ser negociado (neste caso, por exemplo, um cordão poderá valer duas unidades de blocos-padrão);
- em um segundo momento, cada grupo terá a liberdade de negociar (o professor apenas determinará quantas peças devem ser vendidas);
- indagar os alunos as dificuldades encontradas e quais foram os meios que os alunos usaram para negociar (se houve)

Depois da atividade, a metrologia será apresentada juntamente com a sua importância no decorrer da história da humanidade, conforme a figura 8.

Aula expositiva

O que é Metrologia? Metrologia é a ciência das medições.

Quantos não se perguntaram ao medir a: Febre, peso, hora, pressão, altura

Por que a Metrologia é importante? Há milhares de anos, no comércio de tecidos, foi adotado como padrão de medida: o início do antebraço humano até a ponta do dedo médio. Os comerciantes começaram a contratar apenas pessoas com braços curtos para vender os tecidos de sua loja, com isso lucrando muito mais.

Mas existiram povos que adotaram padrões de medidas e foram felizes no que fizeram. Seguem os exemplos:

Cúbito Real, polegada, metro

No decorrer da nossa história, a humanidade sempre buscou um padrão de medida que pudesse se referenciar. Seguem os exemplos:

(Idade Feudal) Uma polegada: Três grãos de cevada

(Revolução Francesa) Um metro: décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre, passado para uma barra de platina

Depois foi adicionado na definição que a barra tinha que estar a zero graus Celsius

Hoje: metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299792458 do segundo.

Existem vários outros padrões de medidas, como por exemplo: o peso, a temperatura, o tempo, etc.

Figura 8: Cada parágrafo corresponde a um slide

A aula: A turma foi dividida em seis grupos, variando de quatro a cinco alunos por grupo. Os kits foram entregues para os grupos e solicitei que cada grupo fizesse suas medições na fita e no cordão, usando os blocos Cuisinaire como medida padrão, e anotasse os valores em seus cadernos. Depois solicitei aos grupos que negociassem entre si, determinando que cada fita valia duas unidades de seus blocos-padrão e o cordão valia três unidades de seus blocos-padrão. Segue a tabela com as medições feitas pelos grupos:

Tabela 5: Tabela referente às medições feita pelos grupos.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
Cordão	3,1	2	6	2,5	2,5	9
Fita	3,2	2	6,5	2,5	2,4	9,7

Os diferentes valores apresentados na tabela acima se devem ao fato de que os blocos não terem os mesmos tamanhos entre os grupos. Vale ressaltar que a maioria dos alunos tinha alguma noção de números decimais. Depois desta tarefa, iniciamos a atividade de troca de peças entre os grupos.

A ideia da atividade era que os grupos se atrapalhassem na hora das negociações, já que o tamanho dos blocos pertencentes a cada grupo era diferente. Porém, todos os grupos não se ativeram aos tamanhos dos blocos, considerando apenas a quantidade de blocos envolvidos na troca.

Em um segundo momento, eu deixei livre a negociação entre os grupos, considerando o bloco maior como se valesse “dez reais”, mas os alunos não se preocuparam muito, continuando a troca como na atividade anterior.

Porém, como os alunos não procederam conforme o esperado, depois da atividade, foi solicitado que cada grupo somasse os valores dos blocos com que cada um ficou, com a intenção de mostrar para turma que alguns grupos saíram perdendo. Em nenhum momento foi dito aos alunos que se desejava “maximizar” o lucro. Colocando no quadro a tabela de valores dos blocos que cada grupo ficou. O total por grupo ficou assim:

Tabela 6: Tabela referente a soma de blocos-padrão que cada grupo obteve

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
82	120	64	87	105	100

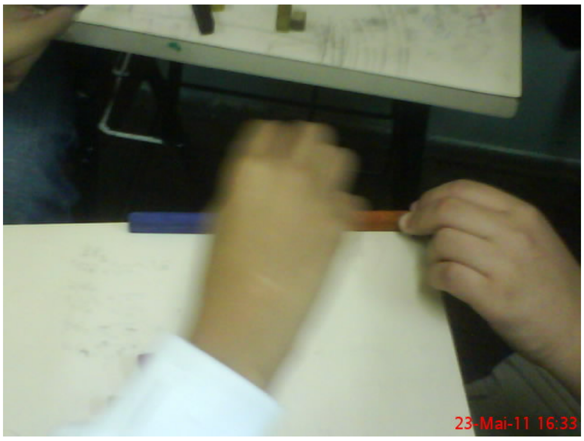

Figura 9: Foto tirada no momento da atividade

Depois de revelar os resultados e determinar que o grupo 2 lucrou mais, os alunos foram instigados a justificar as diferenças encontradas entre eles. Houve várias respostas, como um dos grupos respondeu: “por causa do tamanho das fitas”. Mas apenas um grupo respondeu que o problema consistia nos tamanhos diferentes dos blocos, por isso da diferença nas negociações.

Concluí a aula com o assunto metrologia, expondo alguns de seus aspectos históricos, falando sobre a importância do mesmo. Quando se falou em polegadas, chamei alguns alunos para que medissem seus polegares, com o auxílio do paquímetro, e comparar com a medida padrão e descobrir que seus polegares eram bem menores que a polegada padrão.

Figura 10: Paquímetro usado nas medições das polegadas dos alunos

Conclusão da primeira atividade: Quando planejei esta atividade, foi com o objetivo de empolgar os alunos, para que estes compreendessem a importância de existir uma unidade padrão e que olhassem com outros olhos ao medirem qualquer coisa. Os alunos se envolveram bastante durante as atividades, não se dispersaram. Porém, apenas alguns alunos se preocuparam em executar as medições de modo correto e, por consequência, não houve divergência entre os grupos durante as negociações. Em relação à compreensão da importância de existir uma unidade padrão, não obtive uma resposta positiva. Acredito que o principal motivo para isso foi a falta de clareza quanto aos objetivos da atividade e os alunos não compreenderam o que era esperado.

4.2 Atividade 2 – Diferença de Digital e Analógico

Objetivo: Ao realizar as leituras da temperatura da água, com o auxílio de um termômetro digital e de um termômetro analógico, que os alunos diferenciem o comportamento dos mesmos, observando os valores do termômetro digital "saltarem", enquanto os valores do termômetro analógico "percorrem" a escala graduada, auxiliando na ilustração da reta real. O mesmo se espera nas medições usando os termômetros de febre e o paquímetro e a régua.

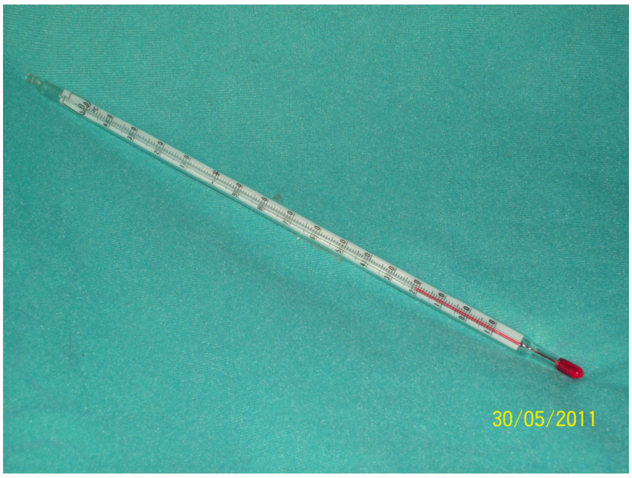

Figura 11: Termômetro analógico (faixa de -10℃ a 150℃)

Metodologia: Primeiro serão apresentados os instrumentos de medição. Seguem eles: Um termômetro digital com espeto (-50℃ a 300℃, divisão: 0,1℃), um termômetro analógico (-10℃ a 150℃, divisão: 1℃), um termômetro digital para febre, um termômetro analógico para febre, um paquímetro digital, uma régua graduada e um barômetro (apenas para demonstração), que estão ilustrados na figura 7.

Dividir a turma em seis grupos, sendo que o professor dará um instrumento para cada grupo. O primeiro grupo receberá o termômetro digital com espeto, o segundo receberá o termômetro analógico, o terceiro receberá o termômetro digital para febre, o quarto receberá o termômetro analógico para febre, o quinto receberá o paquímetro digital e o sexto receberá a régua graduada.

Os seis grupos serão divididos em três pares, e cada par receberá um instrumento analógico e um instrumento digital, sendo que, depois de executarem as medições e anotarem os valores indicados nos equipamentos, o par trocará os instrumentos analógicos e digitais. O par que usar o paquímetro (Figura 10) e a régua graduada medirá algum material escolar (que pode ser decidido na hora). O par de grupos que usar os termômetros de febre fará as medições em seus integrantes. Os grupos restantes farão as medições usando os termômetros digitais e analógicos, de acordo com o seguinte procedimento: Uma vasilha com água é aquecida com auxílio de um aquecedor portátil. Um dos grupos medirá a temperatura da água usando o termômetro digital e o outro grupo usará o termômetro analógico. Depois disso, os termômetros serão trocados.

Figura 12: Termômetro analógico de febre

Realizadas as tarefas, haverá um questionário que os alunos deverão responder. Segue:

Qual a diferença de ler o valor de um instrumento digital para um instrumento analógico?

Qual o número de casas decimais (números depois da vírgula) que se lê em um instrumento digital? E em um instrumento analógico?

Comparando o valor obtido no seu grupo com outro grupo, que diferença pode ser encontrada entre esses valores?

Figura 13: Questionário respondido pelos alunos

Analisar com os alunos as diferenças de valores encontradas nos instrumentos, desde a quantidade de casas decimais até a temperatura e comprimentos indicados.

Pedir que cada grupo agrupe os valores obtidos no experimento em ordem crescente. Depois pedir para cada grupo que desenhe uma reta e, na mesma, coloque os valores obtidos na tarefa.

Expor as diferenças entre um instrumento analógico e um instrumento digital.

A aula: A turma foi dividida em seis grupos, variando de quatro a cinco alunos por grupo. Foram entregues os equipamentos para os grupos conforme a metodologia descrita anteriormente. Também foram entregues folhas para os grupos anotarem os valores medidos.

O primeiro par de grupos, que ficou com o termômetro digital e analógico, fez suas medições em uma vasilha de metal com água aquecida por um aquecedor portátil. Após as medições, os grupos revezaram os instrumentos para continuar suas medições. Os valores foram anotados.

Figura 14: Foto do lado esquerdo mostra a medição da temperatura da água e a foto do lado direito mostra o indicador digital

Ambos os grupos tiveram dificuldades em ler o termômetro analógico. Por exemplo, um dos grupos em vez de ler 30℃, leu 3.0℃, devido ao analógico ter o número decimal de um lado e o número unitário do outro.

Os grupos que ficaram com os termômetros de febre fizeram as medições em seus integrantes e anotaram os valores identificados. Após as medições, os grupos trocaram os instrumentos e repetiram as medições. Não houve dificuldades em executar as medições, comparando os valores dos termômetros de febre, tanto digital como analógico em termos de casas decimais.

O terceiro par de grupos, que ficou com o paquímetro digital e a régua graduada, fez suas medições em vários materiais escolares. Depois trocaram os instrumentos entre si. O grupo que usou primeiro a régua graduada, não levou em conta as casas decimais, diferentemente do grupo que usou o paquímetro primeiro, ao medir usando régua graduada, usaram uma casa depois da vírgula.

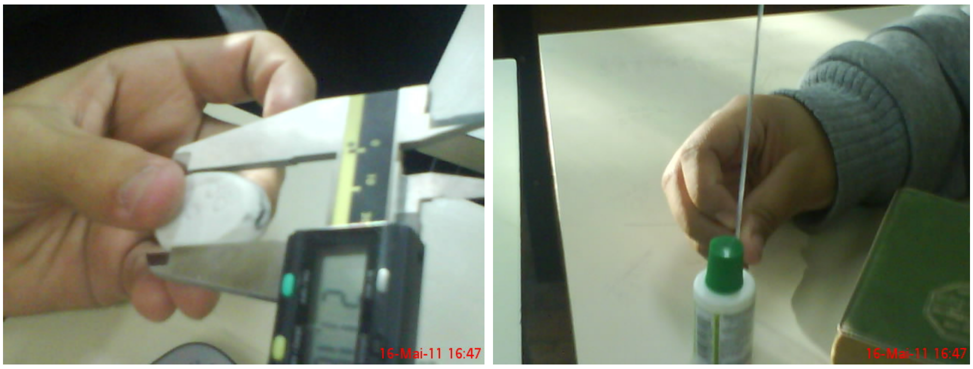

Figura 15: Foto do lado esquerdo mostra um aluno medindo a largura da borracha com o auxílio do paquímetro digital e a foto do lado direito mostra um aluno medindo a altura da embalagem.

Após a atividade, os alunos receberam o questionário previsto no planejamento e foram orientados sobre o significado das perguntas. Depois houve discussão sobre os resultados. Em relação à primeira pergunta, o que me chamou a atenção foi a resposta do grupo 2 (este grupo executou as medições usando primeiro a régua graduada, depois executou as medições usando o paquímetro digital), que se expressou como segue: *"a diferença é que os valor digitais não exatos diferentes do analógico, pois a medida não é precisa"*. Ao questionar os alunos sobre o significado da resposta, eles explicam que, com o paquímetro digital, os alunos não conseguiam parar em um valor, resultando em uma não exatidão; porém com a régua graduada, os alunos se deram conta que não obtinham um valor melhor na hora de medir.

Na segunda pergunta, dos seis grupos que responderam o questionário, apenas dois grupos acertaram a resposta, apesar de a definição ter sido dada na apresentação do questionário. Três grupos confundiram-se na hora de definir o número de casas decimais, principalmente os instrumentos analógicos. Por exemplo, o grupo 6 (este grupo executou as medições usando primeiro o termômetro digital, depois executou as medições usando o termômetro analógico), ao ler no termômetro digital o valor *48.3*, colocou como resposta 3 casas decimais. Um grupo não apresentou resposta. Após o exercício, os alunos foram orientados novamente em relação às respostas.

A ideia do terceiro questionamento era instigar os alunos a olharem a divergência no número de casas depois da vírgula, comparando os valores entre os grupos, porém a pergunta não ficou clara para os alunos, tendo como resultado diversas respostas distintas, mas nenhuma de acordo com o que eu esperava. Por exemplo: “Os valores do outro grupo são maiores”, “Usar o paquímetro é mais fácil que usar a régua”, “não sei”.

Em relação à terceira tarefa em que os alunos tinham que ordenar os números e colocá-los na reta, em geral não houve dificuldade por parte dos alunos, com exceção de um grupo que ao ler a temperatura dos termômetros digitais e analógicos, colocaram na reta, primeiro os valores do termômetro analógico e depois os valores do termômetro digital, conforme Foto 8.

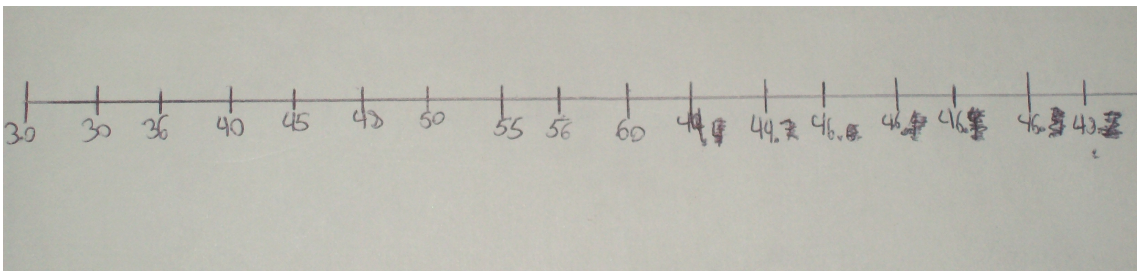

Figura 16: Uma das retas desenhadas pelos alunos

Depois houve discussão sobre os resultados. Era esperado que os alunos se dessem conta de que os equipamentos analógicos percorrem toda a reta, diferentemente dos equipamentos digitais. Porém os alunos não se ativeram na reta “preenchida” após os resultados obtidos por eles.

Conclusão da segunda atividade: Foi satisfatório verificar o comportamento dos grupos em relação ao medir usando primeiro, ou instrumento analógico, ou instrumento digital. Todos os grupos que usaram primeiro os instrumentos digitais, consideraram as casas decimais nos instrumentos analógicos, diferentemente dos grupos que usaram primeiro o analógico, que não consideraram as casas decimais na hora das medições. Em relação ao questionário, as respostas referentes à primeira questão, focaram mais nas características dos instrumentos, o que era natural, já que era novidade para os alunos ao manusearem os equipamentos. Na segunda pergunta, conforme já discutido anteriormente, acredito que o erro ao definir o número de casas é devido à falta de atenção que as crianças têm quando algum professor explica o conteúdo. No terceiro questionamento, a ideia era que, conforme os valores achados pelos grupos, estes discutissem os valores encontrados, o que acabou não ocorrendo, talvez porque a pergunta não é clara ou não foi explicitado corretamente. Em relação ao objetivo, talvez para que tenha um melhor aproveitamento, mudaria a ordem da atividade, começando com a apresentação da reta e depois partiria para a parte prática da atividade. Na utilização dos instrumentos digitais, rapidamente os alunos aprenderam a usá-los, diferentemente dos analógicos, percebi que eles obtinham valores que não condiziam com o que os instrumentos analógicos apresentavam.

4.3 Atividade 3 – Descobrindo a incomensurabilidade e a reta

Objetivo: Na primeira etapa, ao realizar as medições, os alunos identifiquem a necessidade de aproximar medidas usando o erro, pois é impossível medir infinitamente até conseguir o resultado *perfeito* das medições. Isso será o auxílio para a compreensão dos números com expansão decimal infinita, concomitante a segunda etapa que, ao construir a reta real com o Cuisinaire, os alunos tenham a noção de que a reta é constituída de números racionais e irracionais.

Metodologia da primeira etapa: Dividir a turma em grupos (no máximo três alunos por grupo).

O material a ser utilizados por cada grupo será os blocos de Cuisinaire (cada grupo receberá um conjunto de blocos de diversos tamanhos, sendo que são dez tamanhos diferentes e, a partir do bloco maior, os restantes vão diminuindo 1/10 de tamanho, até chegar o bloco menor, este que vale 1/10 do bloco maior).

Figura 17: Conjunto de Blocos Cuisinaire

O professor determinará a medida de referência (de preferência o maior bloco como unidade e os demais como subdivisão do bloco maior).

O docente solicitará aos alunos que meçam suas classes, tanto o horizontal como o vertical, usando como auxílio o bloco de Cuisinaire, com erro máximo de um bloco menor. Segue a figura abaixo (Figura 18) para o auxílio das medições:

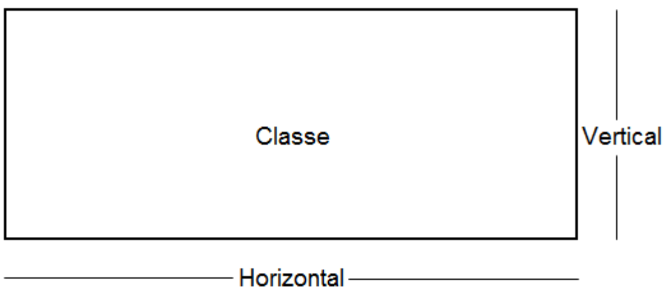

Figura 18: Esquema referente à medição de uma classe de aula

Como os blocos não se encaixam perfeitamente ao medir a mesa, será solicitado aos alunos que aproximem a medida com o auxílio de peças menores.

Se ainda o problema persistir, será recomendado aos alunos estimarem a medição, claro que considerando o erro estipulado.

Todos os valores encontrados serão anotados pelos alunos.

Após a tarefa, serão comparados os valores obtidos por cada grupo no quadro e será questionado porque houve diferença ou não dos valores obtidos por eles.

Metodologia da segunda etapa: O professor poderá manter os mesmos grupos formados na etapa anterior.

Ao iniciar a atividade, o professor distribuirá vários blocos de Cuisinaire. Dentre os pares de blocos do mesmo tamanho.

Solicitar que cada grupo desenhe uma reta paralela ao comprimento maior de uma folha de caderno. Nesta reta, o professor solicitará que cada grupo transfira a medida do bloco maior na reta desenhada, de modo que tenha uma origem e pontos que definam a distância de cada unidade.

Depois o professor solicitará que os alunos desenhem na mesma reta as subunidades com o auxílio do Cuisinaire.

Após a atividade, o professor construirá a reta com os alunos, com base na reta construída pelos mesmos, mostrando que pode colocar “infinitos” números na reta.

A seguir, pedirá aos grupos que coloquem $\sqrt{2}$ e π na reta, com base em aproximações decimais.

Após, serão discutidas os números racionais e irracionais na reta real.

A aula: Após dividir a turma em grupos de tal forma que ficassem três por grupo, distribuí o conjunto de blocos Cuisinaire que serviram como blocos-padrão. Solicitei que cada grupo medisse suas classes conforme o planejamento da primeira etapa.

Figura 19: Aluno durante a atividade

A resposta esperada na medição horizontal da mesa era de 5,8 unidades dos blocos de Cuisinaire e na medição vertical era de 3,9 unidades dos blocos de Cuisinaire. Os resultados foram os seguintes:

Tabela 7: Tabela referente aos valores obtidos pelos alunos

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7
Horizontal	5,5	5,8	5,8	5,8±0,1	5,6	5,9	5,8
Vertical	3,8	3,9	3,9	3,9	1,72	3,7	4,0

Após estes valores passados para o quadro, os alunos foram questionados porque houve diferença nos valores. Foram diversas respostas, destaco algumas:

"Por que as classes foram fabricadas erradas"

"Por que os blocos têm tamanhos diferentes"

"Por que fizemos errado"

Destaquei que a maioria das respostas poderia ser verdadeira, bastando para tirar a dúvida, usar blocos que tivessem medidas realmente conhecidas, medidas por um laboratório.

Conforme acompanhava os alunos nas medições, reparei que alguns alunos se preocupavam em medir corretamente a mesa, alinhando bem os blocos, diferentemente de outros alunos que simplesmente colocavam os blocos na beirada da mesa sem se preocupar em alinhar os mesmos. Em relação ao erro, apenas o grupo 4 considerou esta hipótese. Os demais simplesmente arredondaram os valores, ou para mais, ou para menos.

Depois desta atividade, comecei a segunda parte, conforme o planejamento. Solicitei aos grupos que desenhassem a reta com a origem e desenhassem pontos na reta com o auxílio dos blocos, começando com o bloco maior. Para as subdivisões da reta, os alunos poderiam usar todos os blocos disponíveis. Durante o acompanhamento, observei que os alunos tinham dificuldades em desenhar as subunidades, necessitando de intervenções para o prosseguimento da atividade. Vale ressaltar que ninguém usou os blocos menores (estes que representavam 1/10 do bloco maior) para traçar as subunidades na reta.

Após, construí a reta com os alunos no quadro, baseado na reta construída pelos alunos a partir de 1/10 do intervalo do mesmo. Usando este intervalo, mostrei para os alunos que, se existissem blocos menores que este intervalo, poderia subdividi-lo. A partir do novo subintervalo, subdividi em mais subintervalos, mostrando que poderia fazer o mesmo processo infinitamente. Usando esta ideia de aproximações, trouxe em aula a ideia dos números irracionais, apresentando como exemplo o valor de $\sqrt{2}$ e suas aproximações para chegar ao valor de $1{,}414214\ldots$.

Depois, questionei os alunos em que parte da reta iria os valores $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e π. A dificuldade que os alunos tiveram foi em colocar o número π na reta, precisei revisar rapidamente o número π por desconhecerem o que era este número. Porém, de acordo com o professor da turma, o número π tinha sido assunto de aula no início do ano.

Concluí a aula que a reta é constituída por números racionais e irracionais, formando assim a reta real.

Conclusão da terceira atividade: Consegui perceber que alguns alunos captaram a ideia de que para preencher a reta são necessárias infinitas subdivisões. Único problema que eu percebi é que, após as atividades, na parte teórica, uma boa parte dos alunos estavam dispersos, talvez devido ao tempo de aula estar quase no fim.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho elaborei atividades que podem ser aplicados para turmas de 8ª série do Ensino Fundamental, usando como recurso a Metrologia, com o objetivo de motivar os alunos no estudo da reta real, melhorar a compreensão da reta real e conhecer a Metrologia como ciência e área de trabalho. As atividades foram realizadas com uma turma de 8ª série, em uma escola estadual. No total foram três atividades que atendessem os objetivos desse trabalho.

Quando eu elaborei a primeira atividade (Padronização de Medida), eu esperava que os alunos se atrapalhassem na hora das negociações, divergindo na hora de fazer as trocas devido aos blocos terem tamanhos distintos entre os grupos, porém não foi o que ocorreu, conforme descrito no Capítulo 4, fazendo com que na hora eu solicitasse que os grupos somassem o total do valor dos blocos. Se essa atividade fosse realizada novamente, deixo como sugestão em os grupos fazerem negociações apenas trocando objetos com unidades-padrão de tecidos, isto é, se o grupo A quiser trocar três objetos por três unidades-padrão de tecidos com o grupo B, este medirá o tecido com os seus próprios padrões, porém o tamanho dos blocos do grupo B é menor do que os blocos do grupo A, resultando em um menor tecido esperado pelo grupo A, gerando assim divergência nas negociações.

Em relação ao questionário da segunda atividade (Diferença de Digital e Analógico), nas primeiras duas questões, acredito que os alunos precisam ter um melhor fundamento no conhecimento de casas decimais. Talvez não seja necessário aplicar a terceira questão em uma próxima atividade, já que os alunos não pareceram compreender o seu objetivo. Sugiro que as diferenças de medida sejam discutidas pelos alunos no final da atividade, partindo de um questionamento do professor, com base nos resultados obtidos. Como comentado na conclusão da atividade, talvez eu mudasse a ordem da atividade, começando com a apresentação da reta, para depois partir para as medições e após pediria aos alunos colocarem os valores na reta.

Menciono aqui, em relação à terceira atividade, a falta de preparo dos alunos em relação ao conhecimento do número π. Todos os alunos tiveram dificuldades em colocar este valor na reta por não conhecerem este número.

Pensando nos objetivos estipulados antes de iniciar as atividades, acredito que consegui atingi-los plenamente ao apresentar a Metrologia como ciência e área de trabalho. Os alunos captaram bem a ideia de medição, as diferenças de sistema de padrão e da Metrologia como um todo, já que amiúde relacionava a minha profissão durante as aulas. Em relação à motivação dos alunos no estudo da reta real, atingi parcialmente o objetivo. Durante as atividades os alunos ficaram bastante empolgados, sempre se preocupando em executar as atividades da melhor maneira possível, porém, não senti esta motivação transferida ao estudo da reta real, apenas poucos alunos ficaram interessados pelo conteúdo formal. Mas mesmo não ter trazido a maioria dos alunos para o conteúdo, acredito que estes conseguiram compreender melhor a reta real, conseguindo ordenar os valores na reta, usando estes valores advindos das atividades propostas em aula.

Esta experiência em aliar Metrologia e a reta real foi de grande valia para mim, como futuro professor de Matemática e formação profissional. Durante este período de trabalho, aprendi muito sobre a reta real e educação matemática.

Concluo este trabalho deixando para os professores de Matemática que, mesmo surgindo dificuldades em elaborar atividades para um determinado conteúdo de Matemática e não obtendo respostas totalmente plenas, vale a pena investir tempo para preparar algo diferente para os alunos, que estes possam se sentir motivados para um aprendizado melhor e mais qualificado.

6. REFERÊNCIAS

ALVES, Sandra de Oliveira. O lúdico como motivação nas aulas de matemática. **Jornal Mundo Jovem**, Guanambi, n. 377, Junho. 2007, p. 5.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática:** 7ª Série. São Paulo: Editora Moderna, 2001.

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática:** Hoje é feita assim. 8ª Série. São Paulo: Editora FTD, 2002.

BOFF, Daiane Scopel. **A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 253 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DA INDÚSTRIA. **METROLOGIA:** Conhecendo e aplicando na sua empresa. Brasília, 2002. Disponível em: < http://www.cni.org.br/portal/data/pages/FF808081228660920122A8D0BFBC1A23.htm#>. Acesso em: 15 de abril de 2011.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto e aplicações. Volume 1. São Paulo: Editora Ática, 2004.

FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO. **TELECURSO 2000:** Curso Profissionalizante. 2002. Disponível em: <http://www.aditivocad.com/apostilas.php?de=telecurso_2000_metrologia>. Acesso em: 15 de abril de 2011.

PAIVA, Manoel. **Matemática***:* Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2003.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números Racionais, reais e complexos**: Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

Vocabulário Internacional de Metrologia – Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM). Versão brasileira da 3ª edição do *“International Vocabulary of Metrology – Basic and general concepts and associeted terms* (IVM)”