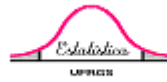




UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA



Estimação em Modelos de Volatilidade Estocástica com Memória Longa

Autor: Gustavo Correa Leite
Orientador: Professor Dr. Cleber Bisognin

Porto Alegre, 22 de Junho de 2011.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Matemática
Departamento de Estatística

Estimação em Modelos de Volatilidade Estocástica com Memória Longa

Autor: Gustavo Correa Leite

Monografia apresentada para obtenção
do grau de Bacharel em Estatística.

Banca Examinadora:
Professor Cleber Bisognin
Professora Liane Werner

Porto Alegre, 22 de Junho de 2011.

Dedico este trabalho ao meu grande Amor...

Resumo

O objetivo deste trabalho é a estimação dos parâmetros em modelos de volatilidade estocástica com memória longa e em processos de memória longa com adição de ruído. Para representar o comportamento da memória longa fizemos uso de séries simuladas seguindo um modelo ARFIMA e na estimação dos parâmetros utilizamos os estimadores GPH (1983), FT (1986) e Beran (1985). Realizamos simulações de Monte Carlo para analisar o comportamento dos estimadores e os comparamos através do valor médio para o parâmetro estimado, vício, erro quadrático médio e variância. De forma geral, o estimador que obteve os melhores resultados nas simulações realizadas foi o FT, estimador esse proposto por Fox e Taqqu.

Conteúdo

1	Introdução.....	1
2	Modelos com Memória Longa	3
2.1	Modelos ARIMA.....	4
2.1.1	Modelo ARMA(p,q).....	4
2.1.2	Modelo ARIMA(p,d,q).....	6
2.2	Modelos ARFIMA.....	7
2.2.1	Propriedade de Memória Longa	8
2.2.2	Modelo ARFIMA($0,d,0$)	10
2.2.3	Modelo ARFIMA(p,d,q)	12
3	Modelos de Volatilidade Estocástica.....	14
3.1	Retornos.....	15
3.2	Modelos de Volatilidade Estocástica.....	15
3.3	Modelos de Volatilidade Estocástica com Memória Longa.....	17
3.3.1	Função de Densidade Espectral dos Processos VE-ARFIMA	18
3.4	Processo de Memória Longa com Adição de Ruído	18
4	Métodos de Estimação.....	20
4.1	Métodos Semiparamétricos	20
4.1.1	Estimador GPH.....	23
4.1.2	Estimador BA	25
4.2	Métodos Paramétricos	25
4.2.1	Estimador FT	25
4.2.2	Estimador FTmod	26
4.2.3	Estimador Beran	26
5	Simulação	27
5.1	Modelos ARFIMA($0,d,0$).....	28
5.2	Modelos ARFIMA(p,d,q).....	46
5.3	Modelos ARFIMA($1,d,0$) e ARFIMA($0,d,1$).....	62
6	Conclusões.....	65
	Referências Bibliográficas.....	67
	Anexo A.....	69
A.1	Função Periodograma	69

Anexo B.....	71
B.1 Convergência do Valor Estimado Quanto ao Número de Replicações	71

Capítulo 1

Introdução

Ao se estudar séries financeiras é muito comum o interesse no comportamento dos retornos, mais do que a própria série. Afinal são os retornos que indicam se houve perda ou ganho por parte dos investidores.

Durante muito tempo estudou-se o comportamento desses retornos com base na suposição que a variabilidade neles existentes era constante. Em estudos mais recentes foi observado que a variabilidade condicional (condicionada a valores passados) dos retornos, conhecida como volatilidade, era variante ao longo do tempo, surgindo então o interesse de modelar essa série.

Nessa tarefa os modelos que obtiveram maior destaque foram os da família ARCH, proposto por Engle (1982) e os de volatilidade estocástica, propostos por Taylor (1994).

Processos de volatilidade estocástica onde a volatilidade segue um processo AR(1) foram muito utilizados até ter sido verificado que em algumas séries a volatilidade apresentava a propriedade de memória longa, isto é, mesmo observações distantes apresentavam correlação significativa. Essa propriedade de memória longa foi primeiramente verificada por Harold Edwin Hurst, em 1951, durante os seus estudos sobre a fertilidade às margens do Rio Nilo. Motivados pelos estudos de Hurst, outros pesquisadores começaram a estudar o comportamento de memória longa em séries temporais.

A memória longa pode ser facilmente observada através do comportamento da função de autocorrelação, a qual decai lentamente de forma hiperbólica. Os processos mais utilizados para capturar essa característica são os modelos ARFIMA, os quais são uma extensão natural dos modelos ARIMA onde o parâmetro da diferenciação é um número real.

Assim, este comportamento nas séries financeiras passou a ser estudado utilizando-se os modelos de volatilidade estocástica com memória longa, tais processos foram denominados de VE-ARFIMA (Harvey, 1993 e Taylor, 2000).

Posto isso, o objetivo desse trabalho é estimar os parâmetros dos modelos de volatilidade estocástica com memória longa e também dos modelos ARFIMA contaminados com um processo de perturbação, dos quais os processos VE-ARFIMA são um caso particular. Para isso utilizamos os estimadores propostos por Geweke e Porter-Hudak (1983) utilizando a função periodograma e a função periodograma suavizado de covariâncias, Fox e Taqu (1986) e Beran (1995).

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 apresentamos os modelos de memória longa. Em seguida, no Capítulo 3, introduzimos os modelos de volatilidade estocástica. No Capítulo 4 apresentamos os métodos de estimação que utilizamos. No Capítulo 5, temos as simulações dos processos de volatilidade estocástica com memória longa e dos processos de memória longa com adição de ruído e a comparação entre os estimadores utilizados. Por fim, no Capítulo 6 temos as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Modelos com Memória Longa

Os modelos de longa memória têm despertado o interesse de muitos pesquisadores de variadas áreas do conhecimento. Tais modelos são de interesse, por exemplo, na análise de estudos climáticos, como no estudo da tendência do aumento das temperaturas globais, denominado de efeito estufa, e também em muitos estudos de Economia e Física.

Mandelbrot e Taqqu (1979), motivados pelos trabalhos de Hurst, passaram a estudar o comportamento da longa memória em séries financeiras. Foi então verificado a partir desses estudos iniciais que os processos de memória longa descrevem de modo satisfatório dados econômicos e financeiros, tais como taxas de juros e de inflação.

Os modelos de memória longa são caracterizados na série por uma dependência significativa mesmo entre observações distantes no tempo. Essa dependência pode ser visualizada, no domínio do tempo, através da função de autocorrelação, a qual apresenta decaimento hiperbólico. Já no domínio da frequência, o fenômeno da longa memória pode ser verificado através da função espectral, a qual é ilimitada em alguma frequência no intervalo $[0, \pi]$.

Um processo de memória longa é um processo estacionário em que a função de autocorrelação apresenta decaimento lento. Temos então um comportamento diferente do que o verificado nos processos $ARMA(p, q)$, pois esses são denominados processos de “memória curta”, uma vez que a sua função de autocorrelação decresce rapidamente para zero, de forma exponencial.

Após ser verificado que a característica de memória longa não podia ser capturada pelos modelos da classe $ARIMA$, Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981) propõem os modelos $ARFIMA$ (autorregressivos fracionariamente integrados e de médias móveis). O modelo $ARFIMA$ é uma generalização do modelo $ARIMA$, o qual o parâmetro de diferença assume valores fracionários.

Dada a importância desses modelos em séries temporais, apresentamos na próxima seção os modelos ARIMA. E após, na seção 2.2, introduzimos os modelos ARFIMA.

2.1 Modelos ARIMA

Uma metodologia muito utilizada para a análise de séries temporais foi a desenvolvida por Box e Jenkins (1976). Essa metodologia consiste em ajustar modelos autorregressivos integrados de médias móveis, $ARIMA(p,d,q)$, a um conjunto de dados e abrange modelos que precisam de diferenciação inteira para ser estacionários. Esse método sugere a descrição de uma série temporal na forma de polinômios, sendo os parâmetros p e q , respectivamente, o número de termos autorregressivos e de médias móveis que o polinômio terá e d o número de diferenças inteiras necessárias para tornar a série estacionária.

Um caso particular dos modelos ARIMA são os modelos estacionários $ARMA(p,q)$, isto é, quando $d=0$, o qual apresentamos a seguir.

2.1.1 Modelo $ARMA(p,q)$

Nessa seção definimos o processo autorregressivo média móvel para séries temporais estacionárias. Para melhor entendimento da definição dos processos ARMA, primeiramente temos a definição de um processo ruído branco.

Definição 2.1. O processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco com média 0 e variância σ_ε^2 finita, ou seja, $RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ se, e somente se, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ tem função de autocovariância dada por

$$\gamma_\varepsilon(k) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases},$$

isto é, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são não-correlacionados. Quando satisfeita a condição de normalidade, temos o ruído branco gaussiano.

Propriedade: A densidade espectral do processo ruído branco $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\omega k} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}, \quad 0 \leq \omega \leq \pi.$$

Definição 2.2. O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo autorregressivo e de médias móveis de ordens p e q , denotado ARMA(p, q), se satisfaz a equação

$$Y_t - \mu = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

em que $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

De forma similar, o processo ARMA(p, q) é dado por

$$\phi(B)(Y_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

onde B é o operador defasagem, isto é, $B^j Y_t = Y_{t-j}$, $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco, $\phi(\cdot)$ e $\theta(\cdot)$ são polinômios de ordem p e q (inteiros), respectivamente, dados por

$$\phi(B) = -\sum_{j=0}^p \phi_j B^j \quad e \quad \theta(B) = -\sum_{i=0}^q \theta_i B^i, \quad (2.2)$$

onde $\phi_0 = -1 = \theta_0$.

Algumas restrições sobre os parâmetros do processo ARMA são necessárias para garantir as propriedades de estacionariedade e invertibilidade.

O teorema a seguir apresenta a função densidade espectral dos processos ARMA(p, q), cuja demonstração pode ser encontrada em Brockwell e Davis (1991).

Teorema 2.1. Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q) com média $\mu = 0$ (sem perda de generalidade), satisfazendo a equação (2.1). Suponha que os polinômios $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$, não possuem raízes em comum. Então são verdadeiras as seguintes afirmações.

i) Se as raízes da equação $\phi(B) = 0$ estão fora do círculo unitário, então o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário.

ii) Se as raízes da equação $\theta(B) = 0$ estão fora do círculo unitário, então o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é invertível.

iii) Se o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário, sua função densidade espectral é dada por

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2}, \quad 0 < \omega \leq \pi.$$

A seguir, apresentamos o modelo ARIMA(p, d, q).

2.1.2 Modelo ARIMA(p, d, q)

Nesta seção definimos o processo autorregressivo integrado média móvel utilizado em séries temporais não estacionárias. Este modelo é uma generalização do processo ARMA(p, q).

Definição 2.3. Um processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é denominado processo autorregressivo integrado e de médias móveis, denotado por ARIMA(p, d, q), onde o parâmetro $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, se satisfaz a equação

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios autorregressivos e de médias móveis definidos na expressão (2.2).

Na próxima seção apresentamos os modelos ARFIMA.

2.2 Modelos ARFIMA

Nesta seção, estenderemos a classe de processos ARIMA para incorporar o comportamento de memória longa. Dessa forma, propõe-se que o parâmetro de diferenciação d dos processos ARIMA também assuma valores fracionários. Esses processos são denominados de ARFIMA – autorregressivos fracionalmente integrados e de médias móveis – e foram introduzidos por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981, 1983) e servem para modelar séries com características de memória longa. Essa nova classe na realidade é uma generalização do processo ARIMA onde agora $d \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4. Um processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ segue um modelo ARFIMA(p, d, q), autorregressivo fracionalmente integrado e de médias móveis de ordens p , d e q , se satisfaz a equação

$$\phi(B)(1-B)^d Y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.4)$$

onde $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios autorregressivos e de médias móveis definidos na expressão (2.2).

O operador de diferença fracionária $(1-B)^d$ quando $d < 0.5$ pode ser escrito como a seguinte expansão binomial

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-B)^k = 1 - dB + \frac{d(d-1)}{2!} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} B^3 + \dots \quad (2.5)$$

onde, $\binom{d}{k} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$ com $\Gamma(\cdot)$ sendo a função Gama definida por

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx, \quad k > 0.$$

Na próxima seção abordamos o conceito de memória longa e a identificação desse comportamento.

2.2.1 Propriedade de Memória Longa

A identificação de processos de memória longa, ou curta, pode ser feita com a análise do comportamento da função de autocorrelação e da função de densidade espectral.

De forma geral, um processo fracamente estacionário é dito ser de memória longa se tiver função de autocorrelação com decaimento hiperbólico, isto é,

$$\rho(k) \sim C_1 k^{2d-1}, \text{ quando } k \rightarrow \infty,$$

para algum $C_1 \neq 0$ e $d \neq 0$.

Ainda é possível verificar que no caso da memória longa, ou longa dependência, $\sum_k |\rho(k)|$ diverge, ou seja, é infinita.

O parâmetro d controla a taxa de decaimento das autocorrelações, as quais não são absolutamente somáveis para $d > 0$. Os processos com memória curta, como os ARMA, tem autocorrelações apresentando um decaimento exponencial.

De outra maneira pode-se dizer que um processo tem memória longa se tiver função de densidade espectral com comportamento da seguinte forma

$$f(\omega) \sim C_2 |\omega|^{-2d}, \text{ quando } \omega \rightarrow 0,$$

onde $C_2 > 0$ e $d \neq 0$.

Para $d > 0$ o espectro diverge em zero, ou seja, $f(\omega) \rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow 0$ e assim a função de densidade espectral é limitada para frequências próximas a zero.

As figuras 1 e 2 apresentam o gráfico das funções de autocorrelação de um processo $ARMA(1,1)$ e de um processo $ARFIMA(0,d,0)$, respectivamente, onde fica evidente o lento decaimento da função de autocorrelação no processo ARFIMA.

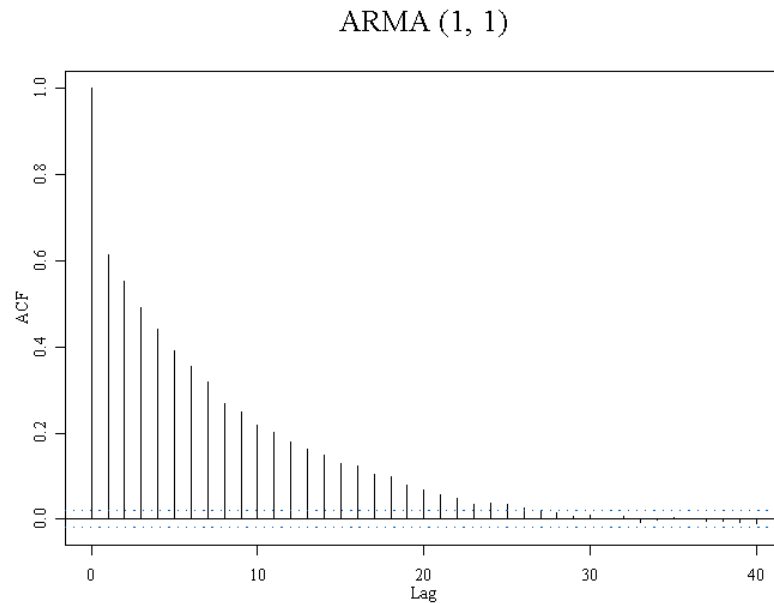


Figura 1: Função de autocorrelação amostral de um processo $ARMA(1,1)$, onde $\phi_1=0,9$ e $\theta_1=0,5$.

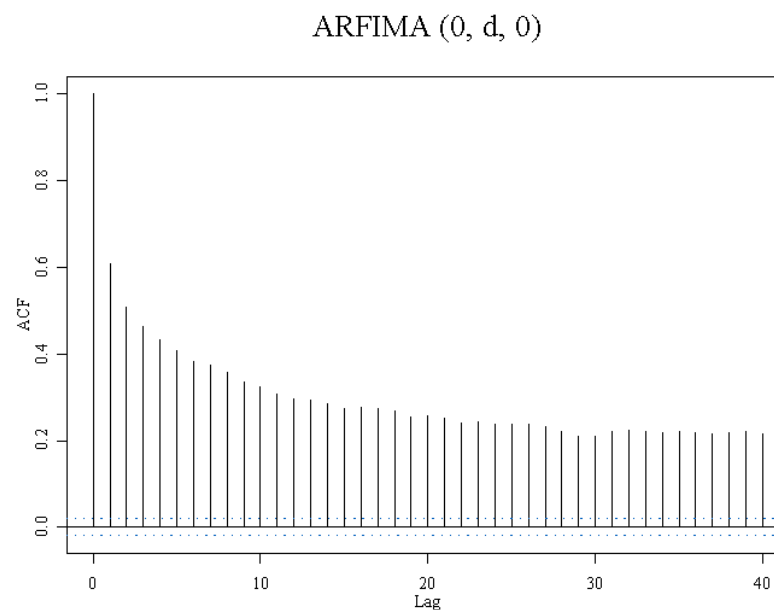


Figura 2: Função de autocorrelação amostral de um processo $ARFIMA(0,d,0)$, onde $d=0,4$.

Os processos da classe ARFIMA têm comportamento de memória longa, ou persistência, quando o parâmetro $d \in (0, 0.5)$ e comportamento de memória intermediária, ou anti-persistência, para $d \in (-0.5, 0)$. Como a característica da memória curta ou longa é definida pelo parâmetro d , este recebe o nome de parâmetro de memória.

Nas próximas seções apresentamos os modelos ARFIMA(0,d,0) e o modelo generalizado ARFIMA(p,d,q), bem como suas principais propriedades.

2.2.2 Modelo ARFIMA(0,d,0)

Na definição 2.4 quando $p=0=q$ o processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é chamado de ruído branco fracionário, denotado ARFIMA(0,d,0), sendo estacionário e invertível quando $d \in (-0.5, 0.5)$, satisfazendo a equação

$$(1-B)^d Y_t = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ruído branco.

Teorema 2.2. Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo ARFIMA(0,d,0) definido por (2.6). Então, valem as seguintes afirmações.

(i) O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário quando $d < 0.5$ e possui representação média móvel infinita, $MA(\infty)$, dada por

$$Y_t = \psi(B)\varepsilon_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k},$$

onde

$$\psi(k) = \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d)}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\psi_k \sim \frac{k^{d-1}}{\Gamma(d)}.$

(ii) O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é invertível quando $d > -0.5$ e possui representação autoregressiva infinita, $AR(\infty)$, dada por

$$\pi(B)Y_t = \sum_{k \geq 0} \pi_k Y_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde

$$\pi(k) = \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\pi_k \sim \frac{k^{-d-1}}{\Gamma(-d)}$.

Assumindo $d \in (-0.5, 0.5)$ no processo ARFIMA(0,d,0), valem as seguintes propriedades.

(iii) A função de densidade espectral do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \left| 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^{-2d}, \quad 0 < \omega \leq \pi.$$

Quando $\omega \rightarrow 0$, $\operatorname{sen} \omega \sim \omega$ e $f_Y(\omega) \sim \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} |\omega|^{-2d}$.

(iv) A função de autocovariância do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_y(k) = \frac{(-1)^k \Gamma(1-2d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(1-k-d)} \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

(v) A função de autocorrelação do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\rho_Y(k) = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$, $\rho_Y(k) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$.

(vi) A função de autocorrelação parcial do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\phi_Y(k, k) = \frac{d}{k-d}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}^+.$$

$$\phi_Y(k, j) = -\binom{k}{j} \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(k-d-j+1)}{\Gamma(-d)\Gamma(k-d+1)}.$$

Observação: Quando $d \in (0, 0.5)$, a função de autocorrelação $\rho_Y(k)$ tem um decaimento hiperbólico e a função densidade espectral $f_Y(\cdot)$ é ilimitada na frequência zero, o que significa que quando $d \in (0, 0.5)$ o processo ARFIMA possui a propriedade de memória longa.

2.2.3 Modelo ARFIMA(p, d, q)

O Teorema 2.3, descrito a seguir, apresenta as propriedades dos modelos ARFIMA(p, d, q).

Teorema 2.3. Seja $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ o processo ARFIMA(p, d, q) definido por (2.4). Suponha que as equações $\phi(B) = 0$ e $\theta(B) = 0$ não possuem raízes em comum e que as suas raízes estão fora do círculo unitário. Então valem as seguintes afirmações.

(i) O processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é estacionário e invertível, isto é, quando $d \in (-0.5, 0.5)$, com as representações $MA(\infty)$ e $AR(\infty)$ dadas, respectivamente, por

$$Y_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k \varepsilon_{t-k} \quad \text{e} \quad \sum_{k \geq 0} \pi_k Y_{t-k} = \varepsilon_t,$$

onde ψ_k e π_k são os coeficientes de B^k na expansão de

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}(1-B)^{-d} \quad \text{e} \quad \pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)}(1-B)^{-d}.$$

ii) a função de densidade espectral do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, denotada por $f_Y(\cdot)$, quando $d \in (-0.5, 0.5)$, é dada por

$$f_Y(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2} \left| 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^{-2d}, \quad 0 < \omega \leq \pi. \quad (2.8)$$

Quando $\omega \rightarrow 0$, $\lim f_Y(\omega) \sim \omega^{-2d}$.

iii) Seja $\rho_Y(\cdot)$ a função de autocorrelação do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Então, quando $k \rightarrow \infty$, $\lim \rho_Y(k) \sim k^{2d-1}$.

Capítulo 3

Modelos de Volatilidade Estocástica

As séries financeiras, em especial, apresentam variâncias condicionais que mudam ao longo do tempo. A variância condicional dos retornos, mais conhecida como volatilidade, tem sido um ponto fundamental dos atuais estudos. Dessa forma uma variedade de modelos dessa natureza tem sido propostos.

Engle (1982) para abordar tal situação sugeriu o modelo ARCH, ou modelo autorregressivo com heterocedasticidade condicional. A idéia básica aqui é que o retorno X_t é não-correlacionado serialmente, mas a volatilidade (variância condicional) depende de retornos passados por meio de uma função quadrática. O modelo ARCH(r) é definido por

$$X_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t,$$
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2,$$

onde $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é independente e identicamente distribuído com média 0 e variância 1.

A partir do modelo ARCH muitos outros modelos surgiram gerando uma família de modelos (ARCH, GARCH, IGARCH, FIGARCH, FIEGARCH, etc.).

Uma alternativa aos modelos ARCH são os modelos de volatilidade estocástica. Nos processos de volatilidade estocástica, a volatilidade segue um processo estocástico latente, pois ela é uma variável não-observável, sendo quase sempre utilizado um processo ARMA(p, q).

No entanto, a utilização do processo ARMA(p, q) não é satisfatória no caso da volatilidade ter comportamento de memória longa, uma sugestão para essa situação é que para o processo estocástico latente seja utilizado processos ARFIMA, sendo essa a abordagem principal desse trabalho.

3.1 Retornos

Em finanças, um dos objetivos é a avaliação dos riscos de uma carteira de ativos. O risco é medido em termos de variações de preços dos ativos. Denotamos por P_t o preço de um ativo no instante de tempo t . Dessa forma, definimos o retorno líquido simples deste ativo, também chamado de taxa de retorno, pela seguinte expressão

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Denotando $p_t = \ln P_t$ definimos o retorno composto continuamente ou simplesmente log-retorno como

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}.$$

Essa definição é a mais comumente utilizada. Normalmente r_t será simplesmente chamado de retorno. Na prática é preferível trabalhar com retornos, que são livres de escala, do que com preços, pois os primeiros tem propriedades estatísticas mais interessantes (como estacionariedade e ergodicidade).

Não é nosso interesse nesse trabalho aprofundar a discussão sobre os retornos. Nessa seção o objetivo foi apenas mostrar que na tarefa de modelar esses retornos é que surgem os modelos de volatilidade estocástica. Apresentamos os modelos de volatilidade estocástica na Seção 3.2.

3.2 Modelos de Volatilidade Estocástica

Os modelos de volatilidade estocástica, conhecidos como SV (*Stochastic Volatility*), primeiramente propostos por Taylor (1980, 1986) não supõem que a volatilidade condicional dependa dos retornos passados como nos modelos da família ARCH. Este modelo supõe que a volatilidade presente dependa dos valores passados da série, mas é independente dos retornos passados.

Uma forma de modelar a volatilidade é considerar que o retorno pode ser escrito como o produto de um processo ruído branco $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ por um processo independente $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, conforme a seguir

$$Y_t = \sigma_t \xi_t, \quad (3.1)$$

onde $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo $RB(0, \sigma_\xi^2)$.

Como a variância do processo $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ condicionada a σ_t é igual a σ_t^2 , σ_t é a volatilidade (condicional) dos retornos. Em geral, assume-se que o processo $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco gaussiano.

No modelo de volatilidade estocástica, σ_t pode ser escrito da seguinte forma

$$\sigma_t = \sigma \exp(v_t / 2) \quad (3.2)$$

onde $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo independente de $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, sendo que $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um ruído branco gaussiano com $\sigma_\xi^2 = 1$. Muitos autores definem $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARMA(p, q).

A análise do modelo de volatilidade estocástica torna-se mais simples quando elevamos ambos os membros da equação (3.1) ao quadrado. Dessa forma, temos então

$$Y_t^2 = \sigma_t^2 \xi_t^2,$$

onde $\sigma_t^2 = \sigma^2 \exp(v_t)$, ou seja,

$$Y_t^2 = \sigma^2 \exp(v_t) \xi_t^2.$$

Aplicando a função logarítmica na expressão anterior, temos

$$\ln Y_t^2 = \ln \sigma^2 + v_t + \ln \xi_t^2$$

Fazendo $X_t = \ln Y_t^2$ temos

$$\begin{aligned} X_t &= \ln \sigma^2 + v_t + \ln \xi_t^2, \\ X_t &= \ln \sigma^2 + v_t + \ln \xi_t^2 + E[\ln \xi_t^2] - E[\ln \xi_t^2], \\ X_t &= \ln \sigma^2 + E[\ln \xi_t^2] + v_t + \ln \xi_t^2 - E[\ln \xi_t^2]. \end{aligned}$$

Portanto

$$X_t = \mu + v_t + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

onde $X_t = \ln Y_t^2$, $\mu = \ln \sigma^2 + E[\ln \xi_t^2]$ e $\varepsilon_t = \ln \xi_t^2 - E[\ln \xi_t^2]$. Para $\{\xi_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ruído branco gaussiano, o processo $\{\ln \xi_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$ possui distribuição Log-qui-quadrado com $E[\ln \xi_t^2] = -1,27$ e $\sigma_\varepsilon^2 = \pi^2 / 2$ (ver Wishart, 1947).

Como os processos $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ são independentes, a função de autocovariância de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$\gamma_X(k) = \text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_v(k) + \sigma_v^2 I\{k=0\},$$

onde

$$I\{k=0\} = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}.$$

Temos ainda que $E[X_t] = \mu$.

3.3 Modelos de Volatilidade Estocástica com Memória Longa

Em muitos casos a volatilidade apresenta a propriedade de memória longa, tornando-se então mais adequado utilizar $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ assumindo um processo que capture tal comportamento. Dessa forma temos então os processos de volatilidade estocástica com memória longa (*LMSVP – Long Memory Stochastic Volatility Processes*) primeiramente

definidos por Breidt, Crato e de Lima (1998). O modelo de volatilidade estocástica que trabalharemos considera $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, na expressão (3.2), um processo ARFIMA(p, d, q), conforme a Definição 2.4. Alguns autores denominam estes processos como VE-ARFIMA, a qual será a denominação que utilizaremos ao longo desse trabalho.

3.3.1 Função de Densidade Espectral dos Processos VE-ARFIMA

Considere $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q) na equação (3.2), onde $d \in (-0.5, 0.5)$, definido como

$$\phi(B)(1-B)^d(v_t) = \theta(B)\eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ na equação (3.3) são independentes, a função de densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dada por

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\eta^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |1 - e^{-i\omega}|^{2d} |\phi(e^{-i\omega})|^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}, \quad 0 < \omega \leq \pi.$$

3.4 Processo de Memória Longa com Adição de Ruído

Nesta seção definimos os processos de memória longa com adição de um processo de perturbação ou ruído. Tal processo é definido como segue.

Seja $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo que satisfaz a equação

$$X_t = \mu + v_t + \varepsilon_t, \tag{3.4}$$

onde $\{v_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) (ver Definição 2.4), o qual pode ser escrito como

$$\phi(B)(1-B)^d v_t = \theta(B)\eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

e $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é qualquer ruído (perturbação) contaminante.

Então $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um processo ARFIMA(p, d, q) com adição de um processo de perturbação, sendo μ a sua média, a qual atribuímos o valor 0, sem perda da generalidade, a partir desse momento.

Neste trabalho utilizamos o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo uma distribuição Normal com média 0 e variância σ_ε^2 e também seguindo uma distribuição Log-qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Neste último caso temos que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é um VE-ARFIMA(p, d, q) definido na Seção 3.3. Desta forma temos que os processos VE-ARFIMA são um caso particular dos processos ARFIMA com adição de um processo de perturbação.

Nosso interesse é verificar o comportamento dos estimadores quando σ_ε^2 cresce. Para tal utilizamos a razão $ns = (\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\eta^2)$, onde $ns \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Nos resultados das simulações apresentadas no Capítulo 5, utilizamos $\sigma_\eta^2 = 1$.

Capítulo 4

Métodos de Estimação

Os métodos de estimação dos modelos ARFIMA são classificados em três grandes grupos: métodos paramétricos, semiparamétricos e não paramétricos. Nesta seção apresentamos alguns métodos semiparamétricos e paramétricos de estimação.

Entre os métodos semiparamétricos, um dos mais utilizados é o método GPH, proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual utiliza a função periodograma que é um estimador não viciado, mas não consistente para a função densidade espectral. Utilizaremos ainda o método BA, que é uma adaptação do método GPH, utilizando a função periodograma suavizado de covariâncias com a Janela de Bartlett que é um estimador não viciado e consistente para a função densidade espectral.

Os métodos paramétricos utilizados são o estimador FT, proposto por Fox e Taqu (1986), o estimador FTmod, o qual é o estimador FT com a utilização da função periodograma modificado, e o estimador proposto por Beran (1995).

4.1 Métodos Semiparamétricos

Métodos semiparamétricos são uma boa alternativa para estimação dos parâmetros, pois estes procedimentos precisam da definição de um modelo específico na estimação do vetor de parâmetros. A estimação consiste em duas etapas, em uma primeira etapa é feita a estimação do parâmetro de integração fracionária e na segunda etapa é feita a estimação dos outros parâmetros do modelo. Isto é, no caso dos processos $ARFIMA(p,d,q)$, estima-se o parâmetro d através dos métodos semiparamétricos e em seguida os parâmetros referentes a curta dependência através de métodos paramétricos.

Os estimadores que abordamos nessa seção utilizam procedimentos de estimação através de regressão linear simples. Inicialmente definimos um modelo de regressão linear geral com m variáveis independentes X_k , $1 \leq k \leq m$ e uma variável aleatória Y independente, a qual possui a seguinte forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_m X_m + \varepsilon,$$

Assumimos então $g(n)$ independentes observações de Y associadas a valores X_k para $k \in \{1, \dots, m\}$. Os erros ε_j satisfazem as seguintes suposições, para todo $j \in \{1, \dots, g(n)\}$:

- i) $E[\varepsilon_j] = 0$,
- ii) $Var[\varepsilon_j] = \sigma_\varepsilon^2$,
- iii) $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$, se $i \neq k$.

Em notação matricial, o sistema apresentado é dado por

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{g(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1m} \\ 1 & X_{21} & \dots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{g(n)1} & \dots & X_{g(n)m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{g(n)} \end{bmatrix},$$

ou seja, $Y = X\beta + \varepsilon$, onde Y é uma matriz $g(n) \times 1$, X é uma matriz $g(n) \times (m+1)$, β é uma matriz $(m+1) \times 1$ e ε é uma matriz $g(n) \times 1$.

Metodologia dos Mínimos Quadrados

O estimador de $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)'$ pelo método de mínimos quadrados, denotado neste trabalho por MQ, é o valor $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m)' \in \mathbb{R}^{m+1}$ que minimiza a função perda

$$\ell_1(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} r_j^2,$$

onde os resíduos r_j são dados por

$$r_j = y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{j1} - \dots - \hat{\beta}_m x_{jm}$$

Pela teoria de regressão linear, se a matriz X possui posto completo, isto é, quando $(m+1) \leq g(n)$, o estimador dos mínimos quadrados de β é dado por

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

cuja esperança e variância são dadas por

$$E(\hat{\beta}) = \beta \text{ e } \text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}.$$

Portanto $\hat{\beta}$ é um estimador não viciado.

Metodologia MQP

Um procedimento de estimação robusta é dos mínimos quadrados podados, denotados aqui por MQP, proposto por Rousseeuw (1984). Tais estimadores de β consistem nos valores $\hat{\beta}$ que minimizam a função perda

$$\ell_2(g(n)) = \sum_{j=1}^{m^*} (r^2)_{j:m},$$

onde $(r^2)_{1:m} \leq \dots \leq (r^2)_{m^*:m}$ são os resíduos ao quadrado ordenados e m^* é o número de pontos usados no procedimento de otimização.

Metodologia MM

Yohai (1987) introduziu outra classe de estimadores robustos baseados na regressão proposta aqui. Tais estimadores de β consistem nos valores $\hat{\beta}$ que minimizam a função perda

$$\ell_3(g(n)) = \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_2\left(\frac{r_j}{k}\right)^2,$$

sujeita à restrição

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{g(n)} \rho_1 \left(\frac{r_j}{k} \right) \leq b,$$

onde ρ_1 e ρ_2 são funções simétricas, limitadas e não decrescentes em $[0, \infty)$, com $\rho_v(0) = 0$, $\lim_{u \rightarrow \infty} \rho_v(u) = 1$, para $v = 1, 2$, k é um parâmetro de escala, b é definido por $E_\phi = (\rho_1(u)) = b$, onde ϕ denota a função de distribuição acumulada da normal padrão.

4.1.1 Estimador GPH

O método denominado GPH foi primeiramente estudado por Geweke e Porter-Hudak (1983) e vem sendo amplamente utilizado por muitos estudiosos do assunto. Consideramos $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ um processo ARFIMA(p, d, q) com $d \in (-0.5, 0.5)$ conforme a expressão (2.4). A função densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ é dado pela expressão (2.8) e tomando o logaritmo de tal expressão temos

$$\ln f_x(\omega) = \ln f_U(\omega) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2,$$

onde $f_U(\omega)$ é a função densidade espectral dos processos ARMA(p, q), conforme item (iii) do Teorema 2.1. Somando a ambos os lados da expressão acima o termo $\ln f_U(0)$ e com alguma álgebra temos a equação

$$\ln f_x(\omega) = \ln f_U(0) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]^2 + \ln \left\{ \frac{f_U(\omega)}{f_U(0)} \right\}. \quad (4.1)$$

Substituindo ω por $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, sendo ω_j as frequências de Fourier, onde $j = 1, \dots, g(n) = n^\alpha$, e adicionando $\ln I(\omega_j)$ em ambos os lados da expressão (4.1), onde $I(\cdot)$ é a função periodograma descrita no Anexo A, conforme a definição A.2, temos

$$\ln I(\omega_j) = \ln f_U(0) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left\{ \frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)} \right\} + \ln \left\{ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right\}.$$

O termo $\ln \left\{ \frac{f_U(\omega_j)}{f_U(0)} \right\}$ é considerado desprezível em comparação com os outros

termos (ver Geweke e Porter-Hudak, 1983). Assim, a equação obtida é aproximada por

$$\ln I(\omega_j) \approx \ln f_U(0) - d \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2 + \ln \left\{ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right\}, \quad (4.2)$$

a qual pode ser expressa como uma equação de regressão da seguinte forma

$$y_j = a + bx_j + e_j, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, g(n),$$

onde $y_j = \ln I(\omega_j)$, $x_j = \ln \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_j}{2} \right) \right]^2$, $e_j = \ln \left\{ \frac{I(\omega_j)}{f_X(\omega_j)} \right\}$, $b = -d$, $a = \ln f_U(0)$,

sendo o estimador de d a constante $-b$ da equação. O estimador de d pelo método de mínimos quadrados é dado por

$$GPH = - \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}. \quad (4.3)$$

Temos que $E(GPH) = d$ e $\operatorname{Var}(GPH) = \frac{\pi^2}{6 \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$, com $\bar{x} = \frac{1}{g(n)} \sum_{j=1}^{g(n)} x_j$.

4.1.2 Estimador BA

O estimador BA é baseado no uso da função periodograma suavizado de covariância (ver a Definição A.3 no Anexo A), ao invés da função periodograma, na equação (4.2), no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983). Essa alteração decorre do fato de que a função periodograma é um estimador não viciado, porém não consistente para a função densidade espectral de um processo. No entanto, a função periodograma suavizado de covariância é um estimador não viciado e consistente. Neste trabalho utilizamos a janela de Bartlett.

4.2 Métodos Paramétricos

Os métodos de estimação paramétricos precisam da especificação prévia de um modelo paramétrico para os dados, implicando então na especificação de toda a estrutura de autocorrelação ou da função de densidade espectral do modelo.

Esses métodos estão baseados na maximização da função de verossimilhança ou de alguma aproximação dela.

4.2.1 Estimador FT

Esse estimador foi proposto por Fox e Taqqu (1986) e trata-se de uma aplicação do método da máxima verossimilhança, com uma aproximação sugerida por Whittle (1951).

O estimador FT envolve a função

$$Q(\boldsymbol{\delta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\omega)}{f_X(\omega, \boldsymbol{\delta})} d\omega,$$

onde $f_X(\cdot, \boldsymbol{\delta})$ é a função densidade espectral de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ e $\boldsymbol{\delta}$ denota o vetor de parâmetros desconhecidos, ou seja, $\boldsymbol{\delta} = (\sigma_\eta^2, \sigma_\varepsilon^2, d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$.

O estimador FT é o valor de $\boldsymbol{\delta}$ que minimiza a função $Q(\cdot)$.

Computacionalmente o estimador FT é obtido minimizando a seguinte função

$$FT(\boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\ln f_x(\omega_j, \boldsymbol{\delta}) + \frac{I(\omega_j)}{f_x(\omega_j, \boldsymbol{\delta})} \right), \quad (4.4)$$

onde n denota o tamanho da série.

4.2.2 Estimador FTmod

O estimador FTmod utilizado nas simulações consiste no estimador FT definido na Seção 4.2.1 com a utilização da função periodograma modificado na equação (4.4). A função periodograma modificado é apresentada no Anexo A desse trabalho através da Definição A.4.

4.2.3 Estimador Beran

Proposto por Beran (1994) este estimador baseia-se na representação autorregressiva infinita do processo para estimação dos parâmetros. Considere a expressão a seguir

$$U_t = Y_t - \sum_{j=1}^{t-1} \pi_j(\boldsymbol{\delta}) Y_{t-j},$$

para $t = 2, \dots, n$. Faça $r_t(\boldsymbol{\delta}) = U_t(\boldsymbol{\delta}) / \sigma_\eta$, sendo $\boldsymbol{\delta}$ o vetor desconhecido de parâmetros, isto é, $\boldsymbol{\delta} = (\sigma_\eta, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)$. Minimizando a equação

$$B(\boldsymbol{\delta}) = 2n \ln(\sigma_\eta) + \sum_{t=2}^n r_t^2(\boldsymbol{\delta}) \quad (4.5)$$

em relação a $\boldsymbol{\delta}$, obtemos o valor estimado de $\boldsymbol{\delta}$ através do método proposto por Beran (1995).

Capítulo 5

Simulação

Nesta seção apresentamos os resultados das simulações de Monte Carlo para os processos de volatilidade estocástica com memória longa – VE-ARFIMA(p,d,q) – e dos processos ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído. Os métodos de estimação aplicados são os descritos no Capítulo 4.

Consideramos o tamanho amostral das séries $n = 1000$. Quando $p=0=q$ utilizamos $re=1000$, onde re denota o número de replicações, e para o parâmetro consideramos $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$. Já quando $p \neq 0$ e ou $q \neq 0$, utilizamos $re=500$ e para os parâmetros consideramos $\phi \in \{0,7;-0,7\}$, $\theta \in \{0,4;0,2;-0,4,-0,2\}$ e $d \in \{0,2;0,3\}$.

Nos processos ARFIMA($1,d,0$) e ARFIMA($0,d,1$), ambos com adição de ruído, utilizamos $\phi = -0,7$ e $\theta = -0,7$, conforme o caso, e $d \in \{0,2;0,3\}$.

Para maiores informações sobre o número de replicações sugerimos a leitura do Anexo B desse trabalho onde discutimos brevemente a convergência do valor médio estimado quanto ao número de replicações.

Com relação aos estimadores GPH e BA consideramos $g(n) = n^\alpha$ com $\alpha \in \{0,4;0,5;0,6;0,7;0,8\}$ e os métodos de regressão descritos na Seção 4.1, ou seja, os métodos MQ, MQP e MM.

Para comparar os métodos de estimação, calculamos a média das estimativas geradas nas replicações, assim como os valores obtidos para o vício, erro quadrático médio (eqm) e variância.

As etapas da simulação são explicitadas a seguir:

- Etapa I: Geramos uma série seguindo um processo ARFIMA($0,d,0$) ou ARFIMA(p,d,q), conforme o caso.

- Etapa II: Geramos a perturbação, ou seja, o processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ constante na equação (3.4). Tal processo vai seguir uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ou uma $Log(\chi^2)$.
- Etapa III: Somamos as séries geradas nas etapas I e II e temos então o modelo de volatilidade estocástica com memória longa, denotado VE-ARFIMA, ou ARFIMA com adição de ruído, conforme a distribuição do processo $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. Maiores detalhes ver Capítulo 3.
- Etapa IV: A última etapa é a estimação dos parâmetros do processo gerado.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 5.1 apresentamos os resultados obtidos com as séries simuladas dos processos VE-ARFIMA(0,d,0) e ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído. Na Seção 5.2 temos os resultados das simulações aplicadas aos processos ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído. Por último, na Seção 5.3, mostramos os resultados das simulações aplicadas aos processos ARFIMA(1,d,0) e ARFIMA(0,d,1).

5.1 Modelos ARFIMA(0,d,0)

Na estimação do parâmetro d no processo ARFIMA(0,d,0) utilizamos os estimadores paramétricos e semiparamétricos descritos no Capítulo 4. O parâmetro considerado foi $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$.

As Tabelas 1 a 12, apresentadas a seguir, detalham os resultados obtidos para as simulações do processo ARFIMA(0,d,0) com $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Tabela 1. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q, d=0,1, re=1000, \alpha \in \{0,4;0,5\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,10$		$\alpha=0,40$						$\alpha=0,50$					
		GPH			BA			GPH			BA		
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP
$ns=1$	média	0,0167	0,0664	0,0537	0,0285	0,0384	0,0421	0,0650	0,0596	0,0473	0,0416	0,0433	0,0446
	vício	-0,0833	-0,0336	-0,0463	-0,0715	-0,0616	-0,0579	-0,0350	-0,0404	-0,0527	-0,0584	-0,0567	-0,0554
	eqm	0,1016	0,0838	0,0962	0,0279	0,0537	0,0461	0,0294	0,0341	0,0229	0,0140	0,0208	0,0203
	variância	0,0947	0,0827	0,0941	0,0228	0,0500	0,0428	0,0282	0,0325	0,0201	0,0106	0,0176	0,0172
$ns=2$	média	0,0118	0,0457	0,0518	0,0071	0,0085	0,0199	0,0486	0,0422	0,0315	0,0215	0,0291	0,0262
	vício	-0,0882	-0,0543	-0,0482	-0,0929	-0,0915	-0,0801	-0,0514	-0,0578	-0,0685	-0,0785	-0,0709	-0,0738
	eqm	0,0943	0,0921	0,0984	0,0333	0,0590	0,0492	0,0302	0,0346	0,0223	0,0169	0,0263	0,0243
	variância	0,0867	0,0892	0,0961	0,0247	0,0507	0,0429	0,0275	0,0313	0,0176	0,0108	0,0213	0,0188
$ns=3$	média	-0,0073	0,0366	0,0227	-0,0024	0,0076	0,0098	0,0318	0,0330	0,0149	0,0109	0,0143	0,0160
	vício	-0,1073	-0,0634	-0,0773	-0,1024	-0,0924	-0,0902	-0,0682	-0,0670	-0,0851	-0,0891	-0,0857	-0,0840
	eqm	0,1049	0,0878	0,0938	0,0335	0,0518	0,0489	0,0314	0,0333	0,0263	0,0180	0,0249	0,0240
	variância	0,0935	0,0838	0,0879	0,0230	0,0433	0,0408	0,0268	0,0289	0,0190	0,0101	0,0176	0,0169
$ns=4$	média	-0,0081	0,0305	0,0255	0,0017	0,0195	0,0148	0,0362	0,0330	0,0107	0,0120	0,0129	0,0143
	vício	-0,1081	-0,0695	-0,0745	-0,0983	-0,0805	-0,0852	-0,0638	-0,0670	-0,0893	-0,0880	-0,0871	-0,0857
	eqm	0,0935	0,0883	0,0964	0,0336	0,0567	0,0473	0,0294	0,0332	0,0243	0,0177	0,0274	0,0235
	variância	0,0819	0,0836	0,0910	0,0240	0,0502	0,0401	0,0254	0,0288	0,0163	0,0100	0,0198	0,0162
$ns=5$	média	-0,0349	-0,0006	-0,0040	-0,0164	0,0047	0,0003	0,0189	0,0170	0,0058	0,0043	0,0091	0,0164
	vício	-0,1349	-0,1006	-0,1040	-0,1164	-0,0953	-0,0997	-0,0811	-0,0830	-0,0942	-0,0957	-0,0909	-0,0836
	eqm	0,1023	0,0953	0,1027	0,0376	0,0604	0,0520	0,0340	0,0380	0,0275	0,0196	0,0279	0,0253
	variância	0,0842	0,0853	0,0920	0,0240	0,0513	0,0421	0,0275	0,0311	0,0187	0,0105	0,0197	0,0183
$ns=6$	média	-0,0321	0,0010	0,0012	-0,0110	-0,0039	-0,0031	0,0061	0,0060	-0,0032	-0,0017	-0,0042	0,0009
	vício	-0,1321	-0,0990	-0,0988	-0,1110	-0,1039	-0,1031	-0,0939	-0,0940	-0,1032	-0,1017	-0,1042	-0,0991
	eqm	0,1030	0,0979	0,0918	0,0356	0,0535	0,0474	0,0395	0,0395	0,0285	0,0211	0,0297	0,0263
	variância	0,0856	0,0882	0,0821	0,0233	0,0428	0,0368	0,0307	0,0307	0,0178	0,0108	0,0189	0,0165
$ns=7$	média	-0,0431	-0,0097	-0,0064	-0,0187	-0,0003	-0,0032	0,0083	0,0063	-0,0009	-0,0033	0,0062	0,0056
	vício	-0,1431	-0,1097	-0,1064	-0,1187	-0,1003	-0,1032	-0,0917	-0,0937	-0,1009	-0,1033	-0,0938	-0,0944
	eqm	0,1022	0,1025	0,0996	0,0361	0,0624	0,0513	0,0357	0,0405	0,0291	0,0208	0,0269	0,0279
	variância	0,0818	0,0905	0,0884	0,0220	0,0524	0,0407	0,0273	0,0317	0,0189	0,0101	0,0181	0,0190
$ns=8$	média	-0,0039	-0,0001	0,0060	-0,0077	-0,0014	0,0069	0,0120	0,0093	0,0023	-0,0022	0,0015	0,0015
	vício	-0,1039	-0,1001	-0,0940	-0,1077	-0,1014	-0,0931	-0,0880	-0,0907	-0,0977	-0,1022	-0,0985	-0,0985
	eqm	0,0903	0,1073	0,0975	0,0361	0,0650	0,0495	0,0332	0,0379	0,0264	0,0209	0,0295	0,0270
	variância	0,0796	0,0974	0,0887	0,0245	0,0547	0,0408	0,0255	0,0297	0,0168	0,0105	0,0199	0,0173
$ns=9$	média	-0,0394	0,0134	0,0035	-0,0244	-0,0144	-0,0150	0,0144	0,0084	-0,0070	-0,0055	0,0017	0,0026
	vício	-0,1394	-0,0866	-0,0965	-0,1244	-0,1144	-0,1150	-0,0856	-0,0916	-0,1070	-0,1055	-0,0983	-0,0974
	eqm	0,1137	0,0956	0,0947	0,0384	0,0597	0,0529	0,0335	0,0382	0,0301	0,0214	0,0273	0,0264
	variância	0,0944	0,0882	0,0854	0,0229	0,0467	0,0397	0,0261	0,0298	0,0187	0,0103	0,0176	0,0169
$ns=10$	média	-0,0639	-0,0244	-0,0323	-0,0295	-0,0118	-0,0122	-0,0028	-0,0081	-0,0089	-0,0103	-0,0027	-0,0044
	vício	-0,1639	-0,1244	-0,1323	-0,1295	-0,1118	-0,1122	-0,1028	-0,1081	-0,1089	-0,1103	-0,1027	-0,1044
	eqm	0,1098	0,1011	0,1088	0,0401	0,0610	0,0535	0,0387	0,0451	0,0300	0,0227	0,0289	0,0282
	variância	0,0831	0,0857	0,0914	0,0233	0,0485	0,0410	0,0282	0,0334	0,0182	0,0105	0,0184	0,0173

Tabela 2. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,1$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,6;0,7\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,10$	$\alpha=0,60$						$\alpha=0,70$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,0497	0,0629	0,0619	0,0472	0,0495	0,0485	0,0554	0,0567	0,0627	0,0525	0,0515	0,0533
	vício	-0,0503	-0,0371	-0,0381	-0,0528	-0,0505	-0,0515	-0,0446	-0,0433	-0,0373	-0,0475	-0,0485	-0,0467
	eqm	0,0148	0,0142	0,0124	0,0075	0,0106	0,0097	0,0071	0,0092	0,0059	0,0046	0,0061	0,0054
	variância	0,0123	0,0128	0,0110	0,0047	0,0080	0,0070	0,0051	0,0073	0,0045	0,0023	0,0038	0,0032
$ns=2$	média	0,0367	0,0466	0,0474	0,0304	0,0324	0,0331	0,0391	0,0407	0,0463	0,0358	0,0375	0,0381
	vício	-0,0633	-0,0534	-0,0526	-0,0696	-0,0676	-0,0669	-0,0609	-0,0593	-0,0537	-0,0642	-0,0625	-0,0619
	eqm	0,0152	0,0143	0,0132	0,0099	0,0126	0,0118	0,0085	0,0104	0,0073	0,0065	0,0079	0,0074
	variância	0,0112	0,0115	0,0104	0,0050	0,0080	0,0074	0,0048	0,0069	0,0044	0,0024	0,0040	0,0035
$ns=3$	média	0,0186	0,0288	0,0302	0,0175	0,0216	0,0204	0,0222	0,0234	0,0314	0,0230	0,0236	0,0247
	vício	-0,0814	-0,0712	-0,0698	-0,0825	-0,0784	-0,0796	-0,0778	-0,0766	-0,0686	-0,0770	-0,0764	-0,0753
	eqm	0,0188	0,0178	0,0165	0,0120	0,0157	0,0141	0,0109	0,0135	0,0095	0,0082	0,0098	0,0089
	variância	0,0122	0,0128	0,0117	0,0052	0,0096	0,0077	0,0048	0,0076	0,0048	0,0023	0,0040	0,0032
$ns=4$	média	0,0146	0,0283	0,0283	0,0152	0,0168	0,0167	0,0185	0,0258	0,0278	0,0195	0,0205	0,0211
	vício	-0,0854	-0,0717	-0,0717	-0,0848	-0,0832	-0,0833	-0,0815	-0,0742	-0,0722	-0,0805	-0,0795	-0,0789
	eqm	0,0180	0,0174	0,0159	0,0120	0,0144	0,0141	0,0113	0,0124	0,0098	0,0088	0,0100	0,0095
	variância	0,0107	0,0123	0,0108	0,0048	0,0075	0,0072	0,0046	0,0069	0,0046	0,0023	0,0037	0,0033
$ns=5$	média	0,0133	0,0267	0,0236	0,0142	0,0174	0,0189	0,0171	0,0211	0,0234	0,0177	0,0190	0,0199
	vício	-0,0867	-0,0733	-0,0764	-0,0858	-0,0826	-0,0811	-0,0829	-0,0789	-0,0766	-0,0823	-0,0810	-0,0801
	eqm	0,0188	0,0176	0,0176	0,0125	0,0155	0,0142	0,0117	0,0129	0,0107	0,0092	0,0105	0,0099
	variância	0,0113	0,0123	0,0117	0,0051	0,0086	0,0076	0,0048	0,0066	0,0048	0,0024	0,0040	0,0035
$ns=6$	média	0,0072	0,0143	0,0189	0,0104	0,0119	0,0104	0,0137	0,0133	0,0184	0,0142	0,0149	0,0147
	vício	-0,0928	-0,0857	-0,0811	-0,0896	-0,0881	-0,0896	-0,0863	-0,0867	-0,0816	-0,0858	-0,0851	-0,0853
	eqm	0,0198	0,0193	0,0183	0,0131	0,0155	0,0152	0,0121	0,0143	0,0113	0,0097	0,0110	0,0106
	variância	0,0112	0,0120	0,0117	0,0051	0,0078	0,0072	0,0047	0,0068	0,0046	0,0024	0,0037	0,0033
$ns=7$	média	0,0010	0,0096	0,0130	0,0041	0,0068	0,0074	0,0059	0,0093	0,0141	0,0075	0,0072	0,0088
	vício	-0,0990	-0,0904	-0,0870	-0,0959	-0,0932	-0,0926	-0,0941	-0,0907	-0,0859	-0,0925	-0,0928	-0,0912
	eqm	0,0219	0,0211	0,0198	0,0142	0,0162	0,0162	0,0140	0,0156	0,0123	0,0110	0,0127	0,0116
	variância	0,0121	0,0129	0,0123	0,0050	0,0075	0,0077	0,0051	0,0073	0,0049	0,0024	0,0041	0,0033
$ns=8$	média	0,0051	0,0091	0,0108	0,0046	0,0021	0,0057	0,0105	0,0087	0,0169	0,0103	0,0107	0,0111
	vício	-0,0949	-0,0909	-0,0892	-0,0954	-0,0979	-0,0943	-0,0895	-0,0913	-0,0831	-0,0897	-0,0893	-0,0889
	eqm	0,0201	0,0210	0,0200	0,0144	0,0196	0,0169	0,0128	0,0161	0,0118	0,0105	0,0118	0,0114
	variância	0,0111	0,0127	0,0120	0,0053	0,0100	0,0080	0,0048	0,0078	0,0049	0,0025	0,0038	0,0035
$ns=9$	média	-0,0023	0,0120	0,0147	0,0020	0,0036	0,0070	0,0048	0,0134	0,0144	0,0062	0,0060	0,0085
	vício	-0,1023	-0,0880	-0,0853	-0,0980	-0,0964	-0,0930	-0,0952	-0,0866	-0,0856	-0,0938	-0,0940	-0,0915
	eqm	0,0222	0,0194	0,0188	0,0144	0,0174	0,0160	0,0138	0,0145	0,0122	0,0111	0,0125	0,0117
	variância	0,0117	0,0117	0,0115	0,0048	0,0081	0,0074	0,0048	0,0070	0,0049	0,0023	0,0036	0,0033
$ns=10$	média	-0,0025	0,0105	0,0097	0,0033	0,0090	0,0091	0,0038	0,0072	0,0107	0,0060	0,0069	0,0077
	vício	-0,1025	-0,0895	-0,0903	-0,0967	-0,0910	-0,0909	-0,0962	-0,0928	-0,0893	-0,0940	-0,0931	-0,0923
	eqm	0,0215	0,0194	0,0193	0,0140	0,0159	0,0157	0,0143	0,0154	0,0128	0,0113	0,0123	0,0120
	variância	0,0110	0,0114	0,0111	0,0047	0,0076	0,0075	0,0050	0,0068	0,0048	0,0024	0,0036	0,0035

Tabela 3. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,1$, $re=1000$, $\alpha=0,8$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,10$		$\alpha=0,80$						BERAN	FT	FTmod
		GPH			BA					
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP			
$ns=1$	média	0,0548	0,0565	0,0585	0,0526	0,0508	0,0537	0,0494	0,1022	0,2026
	vício	-0,0452	-0,0435	-0,0415	-0,0474	-0,0492	-0,0463	-0,0506	0,0022	0,1026
	eqm	0,0042	0,0061	0,0039	0,0033	0,0044	0,0037	0,0032	0,0019	0,0157
	variância	0,0021	0,0042	0,0021	0,0011	0,0020	0,0016	0,0006	0,0019	0,0052
$ns=2$	média	0,0383	0,0392	0,0418	0,0359	0,0360	0,0373	0,0330	0,1024	0,1541
	vício	-0,0617	-0,0608	-0,0582	-0,0641	-0,0640	-0,0627	-0,0670	0,0024	0,0541
	eqm	0,0059	0,0075	0,0054	0,0053	0,0060	0,0055	0,0051	0,0033	0,0095
	variância	0,0021	0,0038	0,0020	0,0011	0,0018	0,0016	0,0007	0,0033	0,0066
$ns=3$	média	0,0267	0,0245	0,0299	0,0263	0,0284	0,0277	0,0236	0,0992	0,1246
	vício	-0,0733	-0,0755	-0,0701	-0,0737	-0,0716	-0,0723	-0,0764	-0,0008	0,0246
	eqm	0,0076	0,0099	0,0070	0,0066	0,0070	0,0069	0,0064	0,0042	0,0069
	variância	0,0022	0,0042	0,0021	0,0011	0,0019	0,0017	0,0006	0,0042	0,0063
$ns=4$	média	0,0176	0,0186	0,0250	0,0192	0,0178	0,0184	0,0181	0,1000	0,1082
	vício	-0,0824	-0,0814	-0,0750	-0,0808	-0,0822	-0,0816	-0,0819	0,0000	0,0082
	eqm	0,0089	0,0109	0,0077	0,0077	0,0086	0,0082	0,0074	0,0057	0,0066
	variância	0,0021	0,0043	0,0021	0,0012	0,0018	0,0016	0,0007	0,0057	0,0066
$ns=5$	média	0,0188	0,0174	0,0221	0,0184	0,0191	0,0195	0,0155	0,1019	0,1010
	vício	-0,0812	-0,0826	-0,0779	-0,0816	-0,0809	-0,0805	-0,0845	0,0019	0,0010
	eqm	0,0087	0,0110	0,0083	0,0079	0,0085	0,0081	0,0078	0,0067	0,0065
	variância	0,0021	0,0041	0,0022	0,0012	0,0020	0,0016	0,0007	0,0067	0,0065
$ns=6$	média	0,0139	0,0148	0,0177	0,0152	0,0147	0,0149	0,0123	0,1035	0,0921
	vício	-0,0861	-0,0852	-0,0823	-0,0848	-0,0853	-0,0851	-0,0877	0,0035	-0,0079
	eqm	0,0096	0,0116	0,0089	0,0084	0,0092	0,0089	0,0083	0,0073	0,0060
	variância	0,0022	0,0043	0,0021	0,0012	0,0019	0,0016	0,0006	0,0073	0,0059
$ns=7$	média	0,0096	0,0115	0,0140	0,0107	0,0116	0,0112	0,0096	0,1030	0,0833
	vício	-0,0904	-0,0885	-0,0860	-0,0893	-0,0884	-0,0888	-0,0904	0,0030	-0,0167
	eqm	0,0104	0,0123	0,0097	0,0092	0,0098	0,0095	0,0088	0,0087	0,0061
	variância	0,0022	0,0044	0,0023	0,0012	0,0020	0,0016	0,0007	0,0087	0,0058
$ns=8$	média	0,0116	0,0095	0,0155	0,0117	0,0122	0,0125	0,0074	0,1054	0,0786
	vício	-0,0884	-0,0905	-0,0845	-0,0883	-0,0878	-0,0875	-0,0926	0,0054	-0,0214
	eqm	0,0100	0,0122	0,0093	0,0090	0,0097	0,0093	0,0092	0,0096	0,0062
	variância	0,0022	0,0040	0,0021	0,0012	0,0020	0,0016	0,0007	0,0096	0,0057
$ns=9$	média	0,0083	0,0109	0,0152	0,0091	0,0072	0,0092	0,0070	0,1071	0,0750
	vício	-0,0917	-0,0891	-0,0848	-0,0909	-0,0928	-0,0908	-0,0930	0,0071	-0,0250
	eqm	0,0106	0,0124	0,0094	0,0094	0,0107	0,0100	0,0093	0,0101	0,0061
	variância	0,0022	0,0044	0,0022	0,0011	0,0021	0,0017	0,0006	0,0100	0,0055
$ns=10$	média	0,0058	0,0088	0,0114	0,0080	0,0089	0,0094	0,0056	0,1068	0,0711
	vício	-0,0942	-0,0912	-0,0886	-0,0920	-0,0911	-0,0906	-0,0944	0,0068	-0,0289
	eqm	0,0109	0,0125	0,0099	0,0096	0,0100	0,0098	0,0095	0,0108	0,0062
	variância	0,0021	0,0042	0,0021	0,0011	0,0017	0,0016	0,0006	0,0108	0,0054

Tabela 4. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,2$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,4;0,5\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,20$	$\alpha=0,40$						$\alpha=0,50$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,1767	0,2011	0,1967	0,1057	0,1201	0,1233	0,1681	0,1893	0,1836	0,1236	0,1291	0,1331
	vício	-0,0233	0,0011	-0,0033	-0,0943	-0,0799	-0,0767	-0,0319	-0,0107	-0,0164	-0,0764	-0,0709	-0,0669
	eqm	0,0935	0,0943	0,0973	0,0319	0,0546	0,0461	0,0316	0,0278	0,0314	0,0167	0,0236	0,0216
	variância	0,0930	0,0944	0,0974	0,0230	0,0482	0,0403	0,0306	0,0277	0,0312	0,0109	0,0186	0,0171
$ns=2$	média	0,1384	0,1639	0,1623	0,0779	0,0871	0,0954	0,1332	0,1437	0,1445	0,0944	0,0982	0,1056
	vício	-0,0616	-0,0361	-0,0377	-0,1221	-0,1129	-0,1046	-0,0668	-0,0563	-0,0555	-0,1056	-0,1018	-0,0944
	eqm	0,0939	0,0979	0,0916	0,0394	0,0641	0,0528	0,0348	0,0355	0,0357	0,0221	0,0294	0,0259
	variância	0,0902	0,0967	0,0903	0,0246	0,0514	0,0419	0,0303	0,0323	0,0326	0,0109	0,0190	0,0170
$ns=3$	média	0,1248	0,1467	0,1353	0,0706	0,0834	0,0895	0,1182	0,1278	0,1212	0,0812	0,0823	0,0877
	vício	-0,0752	-0,0533	-0,0647	-0,1294	-0,1166	-0,1105	-0,0818	-0,0722	-0,0788	-0,1188	-0,1177	-0,1123
	eqm	0,0832	0,0973	0,1043	0,0424	0,0696	0,0577	0,0332	0,0333	0,0407	0,0250	0,0360	0,0304
	variância	0,0776	0,0946	0,1002	0,0257	0,0561	0,0455	0,0265	0,0281	0,0345	0,0109	0,0221	0,0178
$ns=4$	média	0,0769	0,1052	0,1090	0,0508	0,0677	0,0654	0,0857	0,1110	0,1041	0,0667	0,0720	0,0739
	vício	-0,1231	-0,0948	-0,0910	-0,1492	-0,1323	-0,1346	-0,1143	-0,0890	-0,0959	-0,1333	-0,1280	-0,1261
	eqm	0,1141	0,0984	0,1031	0,0461	0,0614	0,0586	0,0465	0,0351	0,0438	0,0292	0,0388	0,0348
	variância	0,0990	0,0895	0,0949	0,0239	0,0439	0,0405	0,0335	0,0272	0,0346	0,0115	0,0224	0,0189
$ns=5$	média	0,0873	0,1105	0,1092	0,0370	0,0456	0,0505	0,0809	0,0942	0,0911	0,0499	0,0534	0,0564
	vício	-0,1127	-0,0895	-0,0908	-0,1630	-0,1544	-0,1495	-0,1191	-0,1058	-0,1089	-0,1501	-0,1466	-0,1436
	eqm	0,1025	0,0920	0,0974	0,0502	0,0675	0,0615	0,0438	0,0409	0,0434	0,0330	0,0432	0,0383
	variância	0,0899	0,0841	0,0893	0,0236	0,0437	0,0392	0,0297	0,0297	0,0316	0,0105	0,0218	0,0177
$ns=6$	média	0,0735	0,1157	0,1037	0,0361	0,0472	0,0480	0,0748	0,0965	0,0931	0,0465	0,0533	0,0544
	vício	-0,1265	-0,0843	-0,0963	-0,1639	-0,1528	-0,1520	-0,1252	-0,1035	-0,1069	-0,1535	-0,1467	-0,1456
	eqm	0,1101	0,0976	0,1026	0,0524	0,0749	0,0646	0,0470	0,0403	0,0436	0,0352	0,0426	0,0411
	variância	0,0942	0,0906	0,0934	0,0256	0,0516	0,0415	0,0313	0,0296	0,0322	0,0116	0,0211	0,0199
$ns=7$	média	0,0793	0,1089	0,1007	0,0437	0,0509	0,0583	0,0716	0,0854	0,0793	0,0474	0,0506	0,0536
	vício	-0,1207	-0,0911	-0,0993	-0,1563	-0,1491	-0,1417	-0,1284	-0,1146	-0,1207	-0,1526	-0,1494	-0,1464
	eqm	0,0977	0,0897	0,0990	0,0483	0,0778	0,0616	0,0450	0,0392	0,0461	0,0341	0,0440	0,0396
	variância	0,0832	0,0815	0,0892	0,0239	0,0556	0,0416	0,0285	0,0261	0,0316	0,0109	0,0216	0,0182
$ns=8$	média	0,0579	0,0774	0,0833	0,0234	0,0254	0,0316	0,0508	0,0653	0,0623	0,0308	0,0291	0,0316
	vício	-0,1421	-0,1226	-0,1167	-0,1766	-0,1746	-0,1684	-0,1492	-0,1347	-0,1377	-0,1692	-0,1709	-0,1684
	eqm	0,1045	0,1022	0,0987	0,0549	0,0789	0,0672	0,0524	0,0460	0,0529	0,0399	0,0510	0,0471
	variância	0,0844	0,0873	0,0852	0,0238	0,0485	0,0389	0,0301	0,0279	0,0340	0,0113	0,0218	0,0188
$ns=9$	média	0,0621	0,0967	0,0907	0,0321	0,0447	0,0407	0,0591	0,0719	0,0697	0,0419	0,0462	0,0447
	vício	-0,1379	-0,1033	-0,1093	-0,1679	-0,1553	-0,1593	-0,1409	-0,1281	-0,1303	-0,1581	-0,1538	-0,1553
	eqm	0,1069	0,0976	0,1000	0,0516	0,0711	0,0654	0,0498	0,0453	0,0488	0,0356	0,0428	0,0422
	variância	0,0880	0,0870	0,0882	0,0234	0,0471	0,0401	0,0300	0,0289	0,0319	0,0106	0,0192	0,0181
$ns=10$	média	0,0329	0,0613	0,0568	0,0157	0,0204	0,0289	0,0428	0,0585	0,0512	0,0277	0,0353	0,0343
	vício	-0,1671	-0,1387	-0,1432	-0,1843	-0,1796	-0,1711	-0,1572	-0,1415	-0,1488	-0,1723	-0,1647	-0,1657
	eqm	0,1128	0,0989	0,1101	0,0584	0,0789	0,0701	0,0544	0,0439	0,0502	0,0407	0,0465	0,0444
	variância	0,0850	0,0798	0,0896	0,0245	0,0467	0,0409	0,0297	0,0239	0,0280	0,0110	0,0193	0,0169

Tabela 5. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q, d=0,2, re=1000, \alpha \in \{0,6;0,7\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,20$	$\alpha=0,60$						$\alpha=0,70$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,1556	0,1620	0,1642	0,1275	0,1271	0,1313	0,1433	0,1408	0,1479	0,1260	0,1261	0,1277
	vício	-0,0444	-0,0380	-0,0358	-0,0725	-0,0729	-0,0687	-0,0567	-0,0592	-0,0521	-0,0740	-0,0739	-0,0723
	eqm	0,0132	0,0142	0,0122	0,0101	0,0132	0,0116	0,0081	0,0110	0,0075	0,0079	0,0096	0,0087
	variância	0,0112	0,0128	0,0110	0,0048	0,0079	0,0068	0,0049	0,0075	0,0048	0,0024	0,0041	0,0035
$ns=2$	média	0,1187	0,1243	0,1251	0,0952	0,0990	0,0972	0,1088	0,1085	0,1139	0,0932	0,0920	0,0939
	vício	-0,0813	-0,0757	-0,0749	-0,1048	-0,1010	-0,1028	-0,0912	-0,0915	-0,0861	-0,1068	-0,1080	-0,1061
	eqm	0,0184	0,0179	0,0174	0,0161	0,0184	0,0185	0,0135	0,0164	0,0125	0,0140	0,0163	0,0151
	variância	0,0118	0,0122	0,0118	0,0051	0,0082	0,0079	0,0052	0,0081	0,0051	0,0026	0,0046	0,0038
$ns=3$	média	0,1059	0,1020	0,1081	0,0817	0,0808	0,0822	0,0922	0,0861	0,0931	0,0777	0,0760	0,0799
	vício	-0,0941	-0,0980	-0,0919	-0,1183	-0,1192	-0,1178	-0,1078	-0,1139	-0,1069	-0,1223	-0,1240	-0,1201
	eqm	0,0192	0,0245	0,0209	0,0192	0,0236	0,0221	0,0163	0,0217	0,0167	0,0175	0,0196	0,0180
	variância	0,0104	0,0149	0,0125	0,0052	0,0094	0,0083	0,0047	0,0088	0,0053	0,0025	0,0042	0,0036
$ns=4$	média	0,0780	0,0845	0,0849	0,0645	0,0652	0,0662	0,0698	0,0649	0,0729	0,0607	0,0591	0,0624
	vício	-0,1220	-0,1155	-0,1151	-0,1355	-0,1348	-0,1338	-0,1302	-0,1351	-0,1271	-0,1393	-0,1409	-0,1376
	eqm	0,0276	0,0281	0,0266	0,0235	0,0267	0,0261	0,0222	0,0267	0,0213	0,0217	0,0242	0,0222
	variância	0,0127	0,0147	0,0134	0,0052	0,0086	0,0082	0,0052	0,0084	0,0051	0,0023	0,0043	0,0033
$ns=5$	média	0,0731	0,0735	0,0751	0,0533	0,0565	0,0569	0,0632	0,0594	0,0658	0,0519	0,0520	0,0538
	vício	-0,1269	-0,1265	-0,1249	-0,1467	-0,1435	-0,1431	-0,1368	-0,1406	-0,1342	-0,1481	-0,1480	-0,1462
	eqm	0,0276	0,0298	0,0271	0,0265	0,0285	0,0278	0,0236	0,0275	0,0231	0,0243	0,0261	0,0248
	variância	0,0115	0,0138	0,0115	0,0050	0,0079	0,0073	0,0049	0,0078	0,0051	0,0024	0,0042	0,0034
$ns=6$	média	0,0685	0,0797	0,0823	0,0524	0,0503	0,0548	0,0563	0,0574	0,0622	0,0472	0,0468	0,0482
	vício	-0,1315	-0,1203	-0,1177	-0,1476	-0,1497	-0,1452	-0,1437	-0,1426	-0,1378	-0,1528	-0,1532	-0,1518
	eqm	0,0285	0,0257	0,0249	0,0267	0,0305	0,0280	0,0255	0,0271	0,0238	0,0257	0,0277	0,0266
	variância	0,0112	0,0113	0,0111	0,0049	0,0081	0,0070	0,0048	0,0068	0,0048	0,0024	0,0042	0,0036
$ns=7$	média	0,0601	0,0625	0,0658	0,0461	0,0468	0,0469	0,0507	0,0476	0,0543	0,0416	0,0372	0,0403
	vício	-0,1399	-0,1375	-0,1342	-0,1539	-0,1532	-0,1531	-0,1493	-0,1524	-0,1457	-0,1584	-0,1628	-0,1597
	eqm	0,0297	0,0318	0,0297	0,0284	0,0314	0,0307	0,0270	0,0310	0,0261	0,0275	0,0307	0,0288
	variância	0,0101	0,0129	0,0117	0,0047	0,0079	0,0073	0,0047	0,0078	0,0049	0,0024	0,0042	0,0033
$ns=8$	média	0,0482	0,0601	0,0562	0,0385	0,0404	0,0392	0,0461	0,0455	0,0509	0,0381	0,0378	0,0390
	vício	-0,1518	-0,1399	-0,1438	-0,1615	-0,1596	-0,1608	-0,1539	-0,1545	-0,1491	-0,1619	-0,1622	-0,1610
	eqm	0,0341	0,0309	0,0327	0,0311	0,0333	0,0333	0,0286	0,0319	0,0273	0,0286	0,0305	0,0292
	variância	0,0111	0,0113	0,0120	0,0050	0,0078	0,0074	0,0049	0,0080	0,0051	0,0024	0,0042	0,0033
$ns=9$	média	0,0515	0,0536	0,0528	0,0375	0,0362	0,0383	0,0420	0,0390	0,0445	0,0344	0,0339	0,0345
	vício	-0,1485	-0,1464	-0,1472	-0,1625	-0,1638	-0,1617	-0,1580	-0,1610	-0,1555	-0,1656	-0,1661	-0,1655
	eqm	0,0331	0,0339	0,0338	0,0313	0,0354	0,0338	0,0298	0,0339	0,0296	0,0299	0,0319	0,0309
	variância	0,0111	0,0125	0,0121	0,0049	0,0085	0,0076	0,0048	0,0080	0,0054	0,0024	0,0043	0,0036
$ns=10$	média	0,0448	0,0542	0,0535	0,0334	0,0347	0,0370	0,0394	0,0344	0,0413	0,0315	0,0323	0,0319
	vício	-0,1552	-0,1458	-0,1465	-0,1666	-0,1653	-0,1630	-0,1606	-0,1656	-0,1587	-0,1685	-0,1677	-0,1681
	eqm	0,0346	0,0330	0,0319	0,0324	0,0350	0,0337	0,0302	0,0343	0,0299	0,0307	0,0319	0,0315
	variância	0,0105	0,0118	0,0105	0,0046	0,0076	0,0071	0,0044	0,0069	0,0047	0,0023	0,0037	0,0032

Tabela 6. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,2$, $re=1000$, $\alpha=0,8$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,20$		$\alpha=0,80$						BERAN	FT	FTmod
		GPH			BA					
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP			
$ns=1$	média	0,1334	0,1291	0,1349	0,1217	0,1218	0,1226	0,1132	0,2148	0,3464
	vício	-0,0666	-0,0709	-0,0651	-0,0783	-0,0782	-0,0774	-0,0868	0,0148	0,1464
	eqm	0,0066	0,0094	0,0066	0,0074	0,0082	0,0077	0,0082	0,0019	0,0240
	variância	0,0022	0,0044	0,0023	0,0012	0,0020	0,0017	0,0007	0,0017	0,0026
$ns=2$	média	0,0970	0,0958	0,1004	0,0882	0,0862	0,0878	0,0800	0,2121	0,2804
	vício	-0,1030	-0,1042	-0,0996	-0,1118	-0,1138	-0,1122	-0,1200	0,0121	0,0804
	eqm	0,0131	0,0156	0,0124	0,0138	0,0150	0,0144	0,0151	0,0030	0,0103
	variância	0,0025	0,0048	0,0024	0,0013	0,0021	0,0018	0,0007	0,0028	0,0038
$ns=3$	média	0,0796	0,0747	0,0794	0,0705	0,0695	0,0709	0,0620	0,2116	0,2418
	vício	-0,1204	-0,1253	-0,1206	-0,1295	-0,1305	-0,1291	-0,1380	0,0116	0,0418
	eqm	0,0166	0,0202	0,0169	0,0180	0,0190	0,0183	0,0197	0,0038	0,0063
	variância	0,0021	0,0045	0,0024	0,0012	0,0019	0,0017	0,0006	0,0037	0,0046
$ns=4$	média	0,0616	0,0584	0,0638	0,0563	0,0544	0,0565	0,0490	0,2030	0,2076
	vício	-0,1384	-0,1416	-0,1362	-0,1437	-0,1456	-0,1435	-0,1510	0,0030	0,0076
	eqm	0,0215	0,0247	0,0208	0,0218	0,0232	0,0222	0,0234	0,0052	0,0053
	variância	0,0023	0,0046	0,0022	0,0011	0,0020	0,0016	0,0006	0,0052	0,0052
$ns=5$	média	0,0558	0,0544	0,0582	0,0482	0,0477	0,0480	0,0415	0,2034	0,1849
	vício	-0,1442	-0,1456	-0,1418	-0,1518	-0,1523	-0,1520	-0,1585	0,0034	-0,0151
	eqm	0,0230	0,0256	0,0224	0,0242	0,0250	0,0248	0,0257	0,0068	0,0062
	variância	0,0022	0,0044	0,0023	0,0012	0,0018	0,0016	0,0006	0,0068	0,0060
$ns=6$	média	0,0485	0,0454	0,0532	0,0425	0,0414	0,0434	0,0361	0,2069	0,1697
	vício	-0,1515	-0,1546	-0,1468	-0,1575	-0,1586	-0,1566	-0,1639	0,0069	-0,0303
	eqm	0,0251	0,0285	0,0239	0,0260	0,0273	0,0263	0,0275	0,0076	0,0076
	variância	0,0021	0,0046	0,0023	0,0012	0,0021	0,0017	0,0007	0,0076	0,0067
$ns=7$	média	0,0406	0,0349	0,0415	0,0356	0,0340	0,0348	0,0310	0,2012	0,1539
	vício	-0,1594	-0,1651	-0,1585	-0,1644	-0,1660	-0,1652	-0,1690	0,0012	-0,0461
	eqm	0,0276	0,0321	0,0276	0,0282	0,0296	0,0289	0,0292	0,0094	0,0088
	variância	0,0022	0,0049	0,0025	0,0011	0,0020	0,0016	0,0006	0,0094	0,0067
$ns=8$	média	0,0378	0,0365	0,0409	0,0334	0,0321	0,0331	0,0272	0,1981	0,1419
	vício	-0,1622	-0,1635	-0,1591	-0,1666	-0,1679	-0,1669	-0,1728	-0,0019	-0,0581
	eqm	0,0284	0,0308	0,0275	0,0290	0,0304	0,0295	0,0305	0,0105	0,0101
	variância	0,0021	0,0041	0,0022	0,0012	0,0022	0,0017	0,0006	0,0105	0,0067
$ns=9$	média	0,0342	0,0282	0,0363	0,0295	0,0290	0,0299	0,0236	0,1961	0,1319
	vício	-0,1658	-0,1718	-0,1637	-0,1705	-0,1710	-0,1701	-0,1764	-0,0039	-0,0681
	eqm	0,0297	0,0341	0,0292	0,0303	0,0314	0,0306	0,0318	0,0118	0,0117
	variância	0,0022	0,0046	0,0024	0,0012	0,0021	0,0017	0,0007	0,0118	0,0070
$ns=10$	média	0,0337	0,0260	0,0352	0,0285	0,0271	0,0269	0,0232	0,2051	0,1296
	vício	-0,1663	-0,1740	-0,1648	-0,1715	-0,1729	-0,1731	-0,1768	0,0051	-0,0704
	eqm	0,0298	0,0347	0,0296	0,0306	0,0320	0,0317	0,0319	0,0121	0,0115
	variância	0,0021	0,0044	0,0024	0,0012	0,0021	0,0018	0,0006	0,0121	0,0065

Tabela 7. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q, d=0,3, re=1000, \alpha \in \{0,4;0,5\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,30$	$\alpha=0,40$						$\alpha=0,50$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,3581	0,3615	0,3639	0,2126	0,2308	0,2395	0,3121	0,3104	0,3057	0,2244	0,2322	0,2306
	vício	0,0581	0,0615	0,0639	-0,0874	-0,0692	-0,0605	0,0121	0,0104	0,0057	-0,0756	-0,0678	-0,0694
	eqm	0,0960	0,1082	0,1117	0,0323	0,0516	0,0442	0,0349	0,0364	0,0395	0,0170	0,0236	0,0233
	variância	0,0927	0,1046	0,1077	0,0247	0,0469	0,0406	0,0348	0,0363	0,0395	0,0113	0,0191	0,0185
$ns=2$	média	0,3126	0,3288	0,3273	0,1792	0,2043	0,2054	0,2789	0,2860	0,2789	0,1949	0,2034	0,2040
	vício	0,0126	0,0288	0,0273	-0,1208	-0,0957	-0,0946	-0,0211	-0,0140	-0,0211	-0,1051	-0,0966	-0,0960
	eqm	0,0920	0,0923	0,0941	0,0382	0,0601	0,0506	0,0322	0,0315	0,0358	0,0221	0,0310	0,0283
	variância	0,0919	0,0916	0,0935	0,0236	0,0510	0,0417	0,0318	0,0314	0,0354	0,0110	0,0217	0,0191
$ns=3$	média	0,3111	0,3169	0,3122	0,1682	0,1880	0,1942	0,2635	0,2642	0,2576	0,1747	0,1831	0,1861
	vício	0,0111	0,0169	0,0122	-0,1318	-0,1120	-0,1058	-0,0365	-0,0358	-0,0424	-0,1253	-0,1169	-0,1139
	eqm	0,0877	0,0914	0,0911	0,0418	0,0658	0,0533	0,0305	0,0282	0,0324	0,0258	0,0312	0,0298
	variância	0,0876	0,0912	0,0910	0,0244	0,0533	0,0421	0,0292	0,0270	0,0306	0,0101	0,0175	0,0168
$ns=4$	média	0,2713	0,2793	0,2676	0,1412	0,1481	0,1576	0,2275	0,2261	0,2173	0,1496	0,1547	0,1599
	vício	-0,0287	-0,0207	-0,0324	-0,1588	-0,1519	-0,1424	-0,0725	-0,0739	-0,0827	-0,1504	-0,1453	-0,1401
	eqm	0,0961	0,0861	0,0976	0,0519	0,0760	0,0634	0,0377	0,0404	0,0463	0,0346	0,0437	0,0401
	variância	0,0953	0,0858	0,0967	0,0267	0,0530	0,0431	0,0325	0,0350	0,0395	0,0120	0,0226	0,0205
$ns=5$	média	0,2767	0,2701	0,2674	0,1372	0,1550	0,1539	0,2211	0,2177	0,2187	0,1386	0,1462	0,1464
	vício	-0,0233	-0,0299	-0,0326	-0,1628	-0,1450	-0,1461	-0,0789	-0,0823	-0,0813	-0,1614	-0,1538	-0,1536
	eqm	0,0910	0,0976	0,0984	0,0535	0,0689	0,0645	0,0370	0,0388	0,0435	0,0378	0,0431	0,0425
	variância	0,0906	0,0968	0,0974	0,0270	0,0479	0,0432	0,0308	0,0320	0,0369	0,0117	0,0194	0,0189
$ns=6$	média	0,2413	0,2650	0,2635	0,1258	0,1309	0,1412	0,1994	0,2059	0,2031	0,1266	0,1279	0,1364
	vício	-0,0587	-0,0350	-0,0365	-0,1742	-0,1691	-0,1588	-0,1006	-0,0941	-0,0969	-0,1734	-0,1721	-0,1636
	eqm	0,0932	0,0963	0,1004	0,0545	0,0735	0,0659	0,0409	0,0386	0,0416	0,0400	0,0456	0,0436
	variância	0,0898	0,0952	0,0992	0,0241	0,0450	0,0407	0,0308	0,0297	0,0322	0,0100	0,0159	0,0169
$ns=7$	média	0,2420	0,2503	0,2358	0,1140	0,1258	0,1265	0,1973	0,1953	0,1891	0,1191	0,1207	0,1228
	vício	-0,0580	-0,0497	-0,0642	-0,1860	-0,1742	-0,1735	-0,1027	-0,1047	-0,1109	-0,1809	-0,1793	-0,1772
	eqm	0,0850	0,0935	0,1034	0,0601	0,0850	0,0708	0,0401	0,0408	0,0445	0,0446	0,0525	0,0507
	variância	0,0817	0,0911	0,0994	0,0255	0,0547	0,0408	0,0296	0,0299	0,0322	0,0119	0,0203	0,0193
$ns=8$	média	0,2166	0,2246	0,2235	0,1094	0,1183	0,1211	0,1802	0,1813	0,1735	0,1121	0,1123	0,1148
	vício	-0,0834	-0,0754	-0,0765	-0,1906	-0,1817	-0,1789	-0,1198	-0,1187	-0,1265	-0,1879	-0,1877	-0,1852
	eqm	0,0896	0,1014	0,1016	0,0601	0,0829	0,0704	0,0427	0,0451	0,0516	0,0464	0,0541	0,0513
	variância	0,0827	0,0958	0,0958	0,0238	0,0500	0,0384	0,0284	0,0311	0,0356	0,0111	0,0189	0,0171
$ns=9$	média	0,2100	0,2077	0,2037	0,0936	0,1101	0,1088	0,1650	0,1637	0,1540	0,0998	0,1057	0,1057
	vício	-0,0900	-0,0923	-0,0963	-0,2064	-0,1899	-0,1912	-0,1350	-0,1363	-0,1460	-0,2002	-0,1943	-0,1943
	eqm	0,0995	0,1063	0,1103	0,0669	0,0847	0,0756	0,0479	0,0508	0,0587	0,0512	0,0568	0,0551
	variância	0,0915	0,0979	0,1011	0,0244	0,0487	0,0391	0,0297	0,0323	0,0375	0,0111	0,0191	0,0173
$ns=10$	média	0,2128	0,2165	0,2081	0,0941	0,1062	0,1077	0,1659	0,1706	0,1656	0,0959	0,0934	0,0980
	vício	-0,0872	-0,0835	-0,0919	-0,2059	-0,1938	-0,1923	-0,1341	-0,1294	-0,1344	-0,2041	-0,2066	-0,2020
	eqm	0,0993	0,1033	0,1044	0,0683	0,0920	0,0784	0,0492	0,0438	0,0474	0,0523	0,0632	0,0576
	variância	0,0918	0,0964	0,0960	0,0259	0,0545	0,0414	0,0312	0,0271	0,0294	0,0107	0,0205	0,0169

Tabela 8. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q, d=0,3, re=1000, \alpha \in \{0,6;0,7\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,30$	$\alpha=0,60$						$\alpha=0,70$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,2801	0,2754	0,2720	0,2252	0,2266	0,2265	0,2513	0,2353	0,2458	0,2161	0,2142	0,2167
	vício	-0,0199	-0,0246	-0,0280	-0,0748	-0,0734	-0,0735	-0,0487	-0,0647	-0,0542	-0,0839	-0,0858	-0,0833
	eqm	0,0132	0,0151	0,0146	0,0110	0,0135	0,0131	0,0078	0,0134	0,0087	0,0096	0,0115	0,0106
	variância	0,0128	0,0145	0,0139	0,0054	0,0081	0,0077	0,0054	0,0092	0,0058	0,0025	0,0041	0,0037
$ns=2$	média	0,2415	0,2338	0,2382	0,1903	0,1941	0,1928	0,2064	0,1883	0,1993	0,1750	0,1734	0,1742
	vício	-0,0585	-0,0662	-0,0618	-0,1097	-0,1059	-0,1072	-0,0936	-0,1117	-0,1007	-0,1250	-0,1266	-0,1258
	eqm	0,0154	0,0190	0,0170	0,0172	0,0206	0,0192	0,0137	0,0220	0,0159	0,0182	0,0205	0,0196
	variância	0,0120	0,0146	0,0132	0,0052	0,0094	0,0077	0,0049	0,0096	0,0057	0,0026	0,0045	0,0038
$ns=3$	média	0,2182	0,2091	0,2095	0,1643	0,1624	0,1633	0,1813	0,1628	0,1729	0,1480	0,1447	0,1473
	vício	-0,0818	-0,0909	-0,0905	-0,1357	-0,1376	-0,1367	-0,1187	-0,1372	-0,1271	-0,1520	-0,1553	-0,1527
	eqm	0,0181	0,0216	0,0216	0,0236	0,0271	0,0268	0,0188	0,0279	0,0213	0,0255	0,0280	0,0271
	variância	0,0114	0,0133	0,0134	0,0052	0,0082	0,0081	0,0048	0,0091	0,0051	0,0024	0,0038	0,0038
$ns=4$	média	0,1894	0,1869	0,1833	0,1424	0,1447	0,1434	0,1554	0,1378	0,1481	0,1270	0,1242	0,1246
	vício	-0,1106	-0,1131	-0,1167	-0,1576	-0,1553	-0,1566	-0,1446	-0,1622	-0,1519	-0,1730	-0,1758	-0,1754
	eqm	0,0242	0,0267	0,0275	0,0303	0,0323	0,0326	0,0259	0,0354	0,0288	0,0325	0,0352	0,0344
	variância	0,0120	0,0139	0,0139	0,0055	0,0082	0,0081	0,0050	0,0091	0,0057	0,0026	0,0043	0,0036
$ns=5$	média	0,1773	0,1686	0,1700	0,1279	0,1262	0,1286	0,1414	0,1286	0,1329	0,1123	0,1074	0,1119
	vício	-0,1227	-0,1314	-0,1300	-0,1721	-0,1738	-0,1714	-0,1586	-0,1714	-0,1671	-0,1877	-0,1926	-0,1881
	eqm	0,0262	0,0315	0,0302	0,0348	0,0381	0,0367	0,0302	0,0379	0,0332	0,0377	0,0415	0,0388
	variância	0,0112	0,0142	0,0133	0,0052	0,0079	0,0074	0,0050	0,0085	0,0053	0,0025	0,0044	0,0034
$ns=6$	média	0,1587	0,1547	0,1585	0,1163	0,1125	0,1149	0,1276	0,1150	0,1218	0,1020	0,0965	0,0989
	vício	-0,1413	-0,1453	-0,1415	-0,1837	-0,1875	-0,1851	-0,1724	-0,1850	-0,1782	-0,1980	-0,2035	-0,2011
	eqm	0,0316	0,0350	0,0329	0,0385	0,0433	0,0416	0,0343	0,0423	0,0372	0,0415	0,0454	0,0440
	variância	0,0117	0,0139	0,0128	0,0048	0,0081	0,0074	0,0046	0,0081	0,0054	0,0023	0,0040	0,0035
$ns=7$	média	0,1496	0,1378	0,1421	0,1035	0,1000	0,1022	0,1171	0,1048	0,1093	0,0883	0,0829	0,0866
	vício	-0,1504	-0,1622	-0,1579	-0,1965	-0,2000	-0,1978	-0,1829	-0,1952	-0,1907	-0,2117	-0,2171	-0,2134
	eqm	0,0331	0,0404	0,0378	0,0437	0,0484	0,0471	0,0382	0,0466	0,0420	0,0473	0,0515	0,0490
	variância	0,0105	0,0141	0,0128	0,0051	0,0084	0,0080	0,0047	0,0085	0,0056	0,0025	0,0043	0,0035
$ns=8$	média	0,1421	0,1335	0,1359	0,1002	0,0951	0,0978	0,1097	0,0947	0,1036	0,0851	0,0815	0,0825
	vício	-0,1579	-0,1665	-0,1641	-0,1998	-0,2049	-0,2022	-0,1903	-0,2053	-0,1964	-0,2149	-0,2185	-0,2175
	eqm	0,0365	0,0421	0,0391	0,0450	0,0503	0,0482	0,0412	0,0515	0,0439	0,0487	0,0520	0,0510
	variância	0,0116	0,0143	0,0122	0,0051	0,0083	0,0073	0,0050	0,0094	0,0053	0,0025	0,0043	0,0037
$ns=9$	média	0,1302	0,1219	0,1212	0,0904	0,0925	0,0917	0,0975	0,0837	0,0904	0,0753	0,0745	0,0758
	vício	-0,1698	-0,1781	-0,1788	-0,2096	-0,2075	-0,2083	-0,2025	-0,2163	-0,2096	-0,2247	-0,2255	-0,2242
	eqm	0,0403	0,0459	0,0449	0,0491	0,0507	0,0509	0,0456	0,0562	0,0494	0,0528	0,0547	0,0537
	variância	0,0115	0,0142	0,0129	0,0052	0,0077	0,0075	0,0047	0,0094	0,0054	0,0023	0,0038	0,0034
$ns=10$	média	0,1306	0,1209	0,1232	0,0873	0,0867	0,0874	0,0984	0,0813	0,0917	0,0716	0,0693	0,0717
	vício	-0,1694	-0,1791	-0,1768	-0,2127	-0,2133	-0,2126	-0,2016	-0,2187	-0,2083	-0,2284	-0,2307	-0,2283
	eqm	0,0409	0,0465	0,0448	0,0502	0,0539	0,0526	0,0456	0,0568	0,0488	0,0546	0,0572	0,0555
	variância	0,0122	0,0144	0,0136	0,0050	0,0084	0,0074	0,0050	0,0089	0,0055	0,0025	0,0040	0,0034

Tabela 9. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,3$, $re=1000$, $\alpha=0,8$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,30$		$\alpha=0,80$						BERAN	FT	FTmod
		GPH			BA					
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP			
$ns=1$	média	0,2208	0,2073	0,2160	0,2003	0,1980	0,1994	0,1825	0,3281	0,4562
	vício	-0,0792	-0,0927	-0,0840	-0,0997	-0,1020	-0,1006	-0,1175	0,0281	0,1562
	eqm	0,0086	0,0134	0,0096	0,0112	0,0124	0,0120	0,0144	0,0025	0,0257
	variância	0,0023	0,0048	0,0025	0,0013	0,0020	0,0019	0,0007	0,0017	0,0013
$ns=2$	média	0,1755	0,1601	0,1690	0,1553	0,1515	0,1531	0,1376	0,3298	0,3934
	vício	-0,1245	-0,1399	-0,1310	-0,1447	-0,1485	-0,1469	-0,1624	0,0298	0,0934
	eqm	0,0177	0,0251	0,0198	0,0221	0,0242	0,0233	0,0270	0,0032	0,0108
	variância	0,0022	0,0055	0,0027	0,0012	0,0022	0,0018	0,0007	0,0023	0,0021
$ns=3$	média	0,1474	0,1286	0,1410	0,1274	0,1246	0,1248	0,1107	0,3308	0,3489
	vício	-0,1526	-0,1714	-0,1590	-0,1726	-0,1754	-0,1752	-0,1893	0,0308	0,0489
	eqm	0,0253	0,0347	0,0278	0,0309	0,0329	0,0326	0,0365	0,0036	0,0047
	variância	0,0021	0,0053	0,0026	0,0011	0,0021	0,0019	0,0006	0,0026	0,0023
$ns=4$	média	0,1264	0,1123	0,1207	0,1080	0,1046	0,1053	0,0933	0,3304	0,3160
	vício	-0,1736	-0,1877	-0,1793	-0,1920	-0,1954	-0,1947	-0,2067	0,0304	0,0160
	eqm	0,0325	0,0401	0,0346	0,0381	0,0403	0,0397	0,0434	0,0047	0,0033
	variância	0,0023	0,0049	0,0025	0,0012	0,0021	0,0018	0,0007	0,0038	0,0031
$ns=5$	média	0,1127	0,1007	0,1068	0,0953	0,0925	0,0941	0,0808	0,3326	0,2902
	vício	-0,1873	-0,1993	-0,1932	-0,2047	-0,2075	-0,2059	-0,2192	0,0326	-0,0098
	eqm	0,0375	0,0444	0,0399	0,0432	0,0452	0,0441	0,0487	0,0056	0,0037
	variância	0,0024	0,0047	0,0026	0,0013	0,0021	0,0017	0,0007	0,0046	0,0036
$ns=6$	média	0,1008	0,0852	0,0954	0,0853	0,0817	0,0824	0,0717	0,3317	0,2711
	vício	-0,1992	-0,2148	-0,2046	-0,2147	-0,2183	-0,2176	-0,2283	0,0317	-0,0289
	eqm	0,0419	0,0515	0,0443	0,0473	0,0497	0,0491	0,0528	0,0058	0,0047
	variância	0,0022	0,0053	0,0025	0,0012	0,0021	0,0018	0,0007	0,0048	0,0038
$ns=7$	média	0,0920	0,0796	0,0863	0,0750	0,0715	0,0738	0,0642	0,3294	0,2518
	vício	-0,2080	-0,2204	-0,2137	-0,2250	-0,2285	-0,2262	-0,2358	0,0294	-0,0482
	eqm	0,0456	0,0537	0,0483	0,0518	0,0546	0,0530	0,0563	0,0069	0,0069
	variância	0,0023	0,0051	0,0026	0,0012	0,0024	0,0018	0,0007	0,0061	0,0046
$ns=8$	média	0,0843	0,0730	0,0793	0,0691	0,0649	0,0674	0,0578	0,3313	0,2375
	vício	-0,2157	-0,2270	-0,2207	-0,2309	-0,2351	-0,2326	-0,2422	0,0313	-0,0625
	eqm	0,0487	0,0564	0,0513	0,0545	0,0575	0,0559	0,0593	0,0078	0,0090
	variância	0,0022	0,0049	0,0026	0,0012	0,0022	0,0018	0,0007	0,0068	0,0051
$ns=9$	média	0,0755	0,0657	0,0705	0,0615	0,0589	0,0608	0,0509	0,3247	0,2194
	vício	-0,2245	-0,2343	-0,2295	-0,2385	-0,2411	-0,2392	-0,2491	0,0247	-0,0806
	eqm	0,0525	0,0599	0,0551	0,0580	0,0603	0,0590	0,0627	0,0083	0,0116
	variância	0,0021	0,0050	0,0025	0,0011	0,0022	0,0018	0,0006	0,0077	0,0052
$ns=10$	média	0,0742	0,0613	0,0692	0,0583	0,0557	0,0568	0,0473	0,3277	0,2090
	vício	-0,2258	-0,2387	-0,2308	-0,2417	-0,2443	-0,2432	-0,2527	0,0277	-0,0910
	eqm	0,0533	0,0620	0,0558	0,0597	0,0619	0,0609	0,0645	0,0100	0,0143
	variância	0,0023	0,0050	0,0025	0,0013	0,0022	0,0017	0,0007	0,0093	0,0060

Tabela 10. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,4$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,4;0,5\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,40$	$\alpha=0,40$						$\alpha=0,50$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,5791	0,5573	0,5473	0,3207	0,3505	0,3539	0,4959	0,4768	0,4659	0,3385	0,3481	0,3528
	vício	0,1791	0,1573	0,1473	-0,0793	-0,0495	-0,0461	0,0959	0,0768	0,0659	-0,0615	-0,0519	-0,0472
	eqm	0,1237	0,1284	0,1281	0,0316	0,0509	0,0473	0,0377	0,0391	0,0403	0,0152	0,0237	0,0208
	variância	0,0917	0,1037	0,1066	0,0254	0,0485	0,0453	0,0286	0,0332	0,0360	0,0114	0,0210	0,0186
$ns=2$	média	0,5483	0,5211	0,5030	0,2991	0,3284	0,3317	0,4644	0,4377	0,4297	0,3105	0,3180	0,3241
	vício	0,1483	0,1211	0,1030	-0,1009	-0,0716	-0,0683	0,0644	0,0377	0,0297	-0,0895	-0,0820	-0,0759
	eqm	0,1091	0,1171	0,1237	0,0383	0,0569	0,0498	0,0340	0,0391	0,0408	0,0207	0,0292	0,0258
	variância	0,0871	0,1026	0,1132	0,0282	0,0518	0,0452	0,0299	0,0377	0,0399	0,0127	0,0225	0,0200
$ns=3$	média	0,5407	0,5031	0,5108	0,2815	0,3052	0,3092	0,4372	0,4039	0,3958	0,2826	0,2792	0,2869
	vício	0,1407	0,1031	0,1108	-0,1185	-0,0948	-0,0908	0,0372	0,0039	-0,0042	-0,1174	-0,1208	-0,1131
	eqm	0,1070	0,1250	0,1209	0,0424	0,0611	0,0536	0,0308	0,0393	0,0416	0,0263	0,0382	0,0340
	variância	0,0873	0,1144	0,1087	0,0284	0,0522	0,0454	0,0294	0,0394	0,0417	0,0126	0,0236	0,0213
$ns=4$	média	0,5019	0,4848	0,4887	0,2681	0,2893	0,2906	0,4076	0,3804	0,3740	0,2637	0,2648	0,2677
	vício	0,1019	0,0848	0,0887	-0,1319	-0,1107	-0,1094	0,0076	-0,0196	-0,0260	-0,1363	-0,1352	-0,1323
	eqm	0,1051	0,1095	0,1173	0,0436	0,0559	0,0523	0,0322	0,0365	0,0391	0,0304	0,0389	0,0367
	variância	0,0948	0,1025	0,1095	0,0262	0,0437	0,0404	0,0322	0,0362	0,0385	0,0118	0,0207	0,0192
$ns=5$	média	0,5025	0,4590	0,4544	0,2482	0,2677	0,2747	0,3976	0,3651	0,3474	0,2485	0,2507	0,2565
	vício	0,1025	0,0590	0,0544	-0,1518	-0,1323	-0,1253	-0,0024	-0,0349	-0,0526	-0,1515	-0,1493	-0,1435
	eqm	0,0960	0,1184	0,1215	0,0502	0,0691	0,0616	0,0295	0,0392	0,0454	0,0356	0,0416	0,0396
	variância	0,0856	0,1151	0,1187	0,0272	0,0517	0,0460	0,0296	0,0380	0,0427	0,0126	0,0193	0,0191
$ns=6$	média	0,4875	0,4775	0,4633	0,2400	0,2550	0,2640	0,3775	0,3462	0,3360	0,2335	0,2398	0,2424
	vício	0,0875	0,0775	0,0633	-0,1600	-0,1450	-0,1360	-0,0225	-0,0538	-0,0640	-0,1665	-0,1602	-0,1576
	eqm	0,0984	0,1147	0,1115	0,0516	0,0731	0,0608	0,0303	0,0413	0,0434	0,0395	0,0444	0,0437
	variância	0,0909	0,1088	0,1076	0,0260	0,0521	0,0423	0,0298	0,0385	0,0394	0,0118	0,0188	0,0189
$ns=7$	média	0,4614	0,4253	0,4219	0,2225	0,2343	0,2406	0,3613	0,3363	0,3289	0,2174	0,2188	0,2250
	vício	0,0614	0,0253	0,0219	-0,1775	-0,1657	-0,1594	-0,0387	-0,0637	-0,0711	-0,1826	-0,1812	-0,1750
	eqm	0,0864	0,1124	0,1046	0,0578	0,0755	0,0675	0,0311	0,0358	0,0413	0,0438	0,0537	0,0468
	variância	0,0827	0,1119	0,1042	0,0263	0,0481	0,0422	0,0296	0,0317	0,0363	0,0104	0,0208	0,0162
$ns=8$	média	0,4555	0,4147	0,4177	0,2150	0,2309	0,2348	0,3497	0,3088	0,3041	0,2087	0,2123	0,2126
	vício	0,0555	0,0147	0,0177	-0,1850	-0,1691	-0,1652	-0,0503	-0,0912	-0,0959	-0,1913	-0,1877	-0,1874
	eqm	0,0840	0,1084	0,1124	0,0616	0,0839	0,0726	0,0314	0,0439	0,0485	0,0483	0,0527	0,0533
	variância	0,0810	0,1083	0,1122	0,0274	0,0554	0,0454	0,0289	0,0356	0,0394	0,0117	0,0175	0,0182
$ns=9$	média	0,4476	0,4061	0,4028	0,2085	0,2160	0,2265	0,3405	0,3099	0,2985	0,1984	0,2005	0,2035
	vício	0,0476	0,0061	0,0028	-0,1915	-0,1840	-0,1735	-0,0595	-0,0901	-0,1015	-0,2016	-0,1995	-0,1965
	eqm	0,0901	0,1176	0,1177	0,0645	0,0876	0,0728	0,0342	0,0456	0,0511	0,0524	0,0628	0,0572
	variância	0,0879	0,1176	0,1178	0,0278	0,0538	0,0427	0,0307	0,0375	0,0409	0,0118	0,0230	0,0186
$ns=10$	média	0,4358	0,3997	0,3914	0,2002	0,2125	0,2214	0,3246	0,2958	0,2816	0,1882	0,1879	0,1940
	vício	0,0358	-0,0003	-0,0086	-0,1998	-0,1875	-0,1786	-0,0754	-0,1042	-0,1184	-0,2118	-0,2121	-0,2060
	eqm	0,0866	0,1103	0,1096	0,0646	0,0818	0,0717	0,0358	0,0473	0,0536	0,0562	0,0628	0,0594
	variância	0,0854	0,1104	0,1097	0,0247	0,0467	0,0399	0,0302	0,0364	0,0396	0,0114	0,0178	0,0170

Tabela 11. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,4$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,6;0,7\}$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,40$	$\alpha=0,60$						$\alpha=0,70$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$ns=1$	média	0,4271	0,4027	0,4033	0,3336	0,3369	0,3393	0,3726	0,3382	0,3497	0,3158	0,3128	0,3155
	vício	0,0271	0,0027	0,0033	-0,0664	-0,0631	-0,0607	-0,0274	-0,0618	-0,0503	-0,0842	-0,0872	-0,0845
	eqm	0,0122	0,0157	0,0134	0,0100	0,0124	0,0113	0,0058	0,0136	0,0087	0,0098	0,0124	0,0111
	variância	0,0115	0,0157	0,0134	0,0056	0,0084	0,0076	0,0050	0,0098	0,0062	0,0027	0,0048	0,0039
$ns=2$	média	0,3855	0,3571	0,3558	0,2942	0,2928	0,2955	0,3222	0,2890	0,2984	0,2675	0,2607	0,2660
	vício	-0,0145	-0,0429	-0,0442	-0,1058	-0,1072	-0,1045	-0,0778	-0,1110	-0,1016	-0,1325	-0,1393	-0,1340
	eqm	0,0116	0,0181	0,0169	0,0172	0,0210	0,0197	0,0108	0,0221	0,0165	0,0203	0,0246	0,0221
	variância	0,0114	0,0163	0,0150	0,0060	0,0095	0,0088	0,0047	0,0098	0,0062	0,0028	0,0052	0,0041
$ns=3$	média	0,3538	0,3227	0,3216	0,2641	0,2624	0,2649	0,2902	0,2521	0,2625	0,2355	0,2288	0,2307
	vício	-0,0462	-0,0773	-0,0784	-0,1359	-0,1376	-0,1351	-0,1098	-0,1479	-0,1375	-0,1645	-0,1712	-0,1693
	eqm	0,0138	0,0217	0,0205	0,0241	0,0278	0,0269	0,0172	0,0312	0,0252	0,0298	0,0340	0,0330
	variância	0,0116	0,0158	0,0143	0,0057	0,0089	0,0087	0,0052	0,0093	0,0063	0,0028	0,0047	0,0043
$ns=4$	média	0,3235	0,2955	0,2974	0,2385	0,2339	0,2390	0,2580	0,2242	0,2337	0,2067	0,2011	0,2042
	vício	-0,0765	-0,1045	-0,1026	-0,1615	-0,1661	-0,1610	-0,1420	-0,1758	-0,1663	-0,1933	-0,1989	-0,1958
	eqm	0,0183	0,0278	0,0252	0,0315	0,0366	0,0339	0,0255	0,0403	0,0339	0,0401	0,0443	0,0424
	variância	0,0125	0,0169	0,0147	0,0054	0,0091	0,0079	0,0053	0,0094	0,0062	0,0027	0,0048	0,0040
$ns=5$	média	0,3122	0,2823	0,2748	0,2236	0,2204	0,2221	0,2431	0,1997	0,2097	0,1904	0,1837	0,1856
	vício	-0,0878	-0,1177	-0,1252	-0,1764	-0,1796	-0,1779	-0,1569	-0,2003	-0,1903	-0,2096	-0,2163	-0,2144
	eqm	0,0188	0,0308	0,0313	0,0367	0,0414	0,0403	0,0297	0,0503	0,0432	0,0467	0,0515	0,0502
	variância	0,0111	0,0169	0,0156	0,0056	0,0091	0,0086	0,0051	0,0102	0,0069	0,0028	0,0047	0,0042
$ns=6$	média	0,2909	0,2573	0,2619	0,2064	0,1994	0,2026	0,2240	0,1919	0,1983	0,1734	0,1672	0,1688
	vício	-0,1091	-0,1427	-0,1381	-0,1936	-0,2006	-0,1974	-0,1760	-0,2081	-0,2017	-0,2266	-0,2328	-0,2312
	eqm	0,0230	0,0362	0,0325	0,0429	0,0494	0,0471	0,0358	0,0528	0,0463	0,0538	0,0592	0,0572
	variância	0,0111	0,0159	0,0134	0,0054	0,0091	0,0082	0,0049	0,0095	0,0056	0,0024	0,0050	0,0038
$ns=7$	média	0,2769	0,2465	0,2473	0,1941	0,1890	0,1924	0,2116	0,1775	0,1858	0,1615	0,1522	0,1568
	vício	-0,1231	-0,1535	-0,1527	-0,2059	-0,2110	-0,2076	-0,1884	-0,2225	-0,2142	-0,2385	-0,2478	-0,2432
	eqm	0,0271	0,0399	0,0374	0,0478	0,0532	0,0514	0,0404	0,0585	0,0515	0,0595	0,0661	0,0630
	variância	0,0120	0,0164	0,0141	0,0054	0,0087	0,0083	0,0050	0,0091	0,0056	0,0026	0,0047	0,0039
$ns=8$	média	0,2665	0,2303	0,2288	0,1836	0,1769	0,1801	0,2002	0,1632	0,1728	0,1505	0,1439	0,1447
	vício	-0,1335	-0,1697	-0,1712	-0,2164	-0,2231	-0,2199	-0,1998	-0,2368	-0,2272	-0,2495	-0,2561	-0,2553
	eqm	0,0289	0,0468	0,0437	0,0521	0,0591	0,0568	0,0446	0,0660	0,0578	0,0647	0,0703	0,0692
	variância	0,0111	0,0180	0,0144	0,0053	0,0094	0,0085	0,0047	0,0100	0,0062	0,0025	0,0048	0,0040
$ns=9$	média	0,2547	0,2179	0,2165	0,1710	0,1667	0,1707	0,1903	0,1532	0,1614	0,1400	0,1309	0,1343
	vício	-0,1453	-0,1821	-0,1835	-0,2290	-0,2333	-0,2293	-0,2097	-0,2468	-0,2386	-0,2600	-0,2691	-0,2657
	eqm	0,0322	0,0488	0,0485	0,0578	0,0634	0,0603	0,0489	0,0707	0,0629	0,0701	0,0773	0,0746
	variância	0,0111	0,0156	0,0149	0,0053	0,0090	0,0077	0,0049	0,0098	0,0060	0,0025	0,0049	0,0040
$ns=10$	média	0,2407	0,2121	0,2093	0,1610	0,1608	0,1625	0,1803	0,1452	0,1560	0,1329	0,1288	0,1301
	vício	-0,1593	-0,1879	-0,1907	-0,2390	-0,2392	-0,2375	-0,2197	-0,2548	-0,2440	-0,2671	-0,2712	-0,2699
	eqm	0,0368	0,0510	0,0507	0,0623	0,0651	0,0638	0,0534	0,0733	0,0653	0,0738	0,0780	0,0766
	variância	0,0115	0,0158	0,0143	0,0052	0,0079	0,0075	0,0051	0,0084	0,0058	0,0025	0,0045	0,0037

Tabela 12. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0=q$, $d=0,4$, $re=1000$, $\alpha=0,8$ e $ns \in \{1,2,\dots,10\}$.

$d=0,40$		$\alpha=0,80$						BERAN	FT	FTmod
		GPH			BA					
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP			
$ns=1$	média	0,3219	0,2926	0,3041	0,2870	0,2811	0,2840	0,2587	0,4530	0,4935
	vício	-0,0781	-0,1074	-0,0959	-0,1130	-0,1189	-0,1160	-0,1413	0,0530	0,0935
	eqm	0,0084	0,0171	0,0120	0,0141	0,0164	0,0154	0,0207	0,0050	0,0091
	variância	0,0023	0,0055	0,0028	0,0013	0,0022	0,0020	0,0007	0,0022	0,0004
$ns=2$	média	0,2670	0,2364	0,2467	0,2331	0,2238	0,2287	0,2044	0,4558	0,4702
	vício	-0,1330	-0,1636	-0,1533	-0,1669	-0,1762	-0,1713	-0,1956	0,0558	0,0702
	eqm	0,0198	0,0324	0,0262	0,0291	0,0338	0,0315	0,0390	0,0058	0,0062
	variância	0,0021	0,0056	0,0027	0,0013	0,0028	0,0022	0,0007	0,0027	0,0013
$ns=3$	média	0,2313	0,1996	0,2104	0,1984	0,1897	0,1909	0,1710	0,4592	0,4351
	vício	-0,1687	-0,2004	-0,1896	-0,2016	-0,2103	-0,2091	-0,2290	0,0592	0,0351
	eqm	0,0308	0,0457	0,0387	0,0420	0,0468	0,0457	0,0532	0,0067	0,0029
	variância	0,0023	0,0055	0,0028	0,0013	0,0026	0,0020	0,0007	0,0032	0,0017
$ns=4$	média	0,2011	0,1704	0,1817	0,1709	0,1628	0,1649	0,1474	0,4581	0,4040
	vício	-0,1989	-0,2296	-0,2183	-0,2291	-0,2372	-0,2351	-0,2526	0,0581	0,0040
	eqm	0,0420	0,0589	0,0506	0,0538	0,0589	0,0573	0,0645	0,0068	0,0020
	variância	0,0024	0,0062	0,0029	0,0013	0,0026	0,0021	0,0007	0,0034	0,0020
$ns=5$	média	0,1860	0,1485	0,1620	0,1547	0,1459	0,1480	0,1325	0,4663	0,3818
	vício	-0,2140	-0,2515	-0,2380	-0,2453	-0,2541	-0,2520	-0,2675	0,0663	-0,0182
	eqm	0,0480	0,0694	0,0594	0,0614	0,0673	0,0655	0,0723	0,0081	0,0025
	variância	0,0022	0,0062	0,0028	0,0012	0,0027	0,0020	0,0008	0,0037	0,0022
$ns=6$	média	0,1680	0,1349	0,1458	0,1375	0,1267	0,1291	0,1177	0,4647	0,3585
	vício	-0,2320	-0,2651	-0,2542	-0,2625	-0,2733	-0,2709	-0,2823	0,0647	-0,0415
	eqm	0,0560	0,0759	0,0673	0,0701	0,0773	0,0755	0,0804	0,0085	0,0040
	variância	0,0022	0,0056	0,0027	0,0012	0,0026	0,0021	0,0007	0,0043	0,0022
$ns=7$	média	0,1567	0,1253	0,1365	0,1277	0,1170	0,1209	0,1076	0,4623	0,3436
	vício	-0,2433	-0,2747	-0,2635	-0,2723	-0,2830	-0,2791	-0,2924	0,0623	-0,0564
	eqm	0,0615	0,0812	0,0722	0,0754	0,0828	0,0801	0,0863	0,0083	0,0058
	variância	0,0023	0,0057	0,0028	0,0013	0,0027	0,0022	0,0007	0,0045	0,0026
$ns=8$	média	0,1472	0,1158	0,1270	0,1174	0,1081	0,1090	0,0990	0,4650	0,3285
	vício	-0,2528	-0,2842	-0,2730	-0,2826	-0,2919	-0,2910	-0,3010	0,0650	-0,0715
	eqm	0,0661	0,0864	0,0771	0,0811	0,0876	0,0867	0,0913	0,0091	0,0078
	variância	0,0022	0,0057	0,0026	0,0012	0,0025	0,0020	0,0007	0,0048	0,0027
$ns=9$	média	0,1398	0,1099	0,1194	0,1100	0,1012	0,1034	0,0923	0,4664	0,3148
	vício	-0,2602	-0,2901	-0,2806	-0,2900	-0,2988	-0,2966	-0,3077	0,0664	-0,0852
	eqm	0,0699	0,0898	0,0814	0,0854	0,0919	0,0900	0,0954	0,0098	0,0104
	variância	0,0023	0,0057	0,0027	0,0013	0,0026	0,0020	0,0007	0,0054	0,0031
$ns=10$	média	0,1310	0,1030	0,1114	0,1032	0,0947	0,0971	0,0856	0,4704	0,3026
	vício	-0,2690	-0,2970	-0,2886	-0,2968	-0,3053	-0,3029	-0,3144	0,0704	-0,0974
	eqm	0,0747	0,0935	0,0860	0,0893	0,0957	0,0938	0,0996	0,0107	0,0127
	variância	0,0023	0,0053	0,0027	0,0012	0,0025	0,0020	0,0007	0,0057	0,0032

Conforme podemos perceber pela análise das Tabelas 1 a 12, os estimadores GPH e BA subestimam o valor do parâmetro d nas simulações com $d \in \{0,1;0,2\}$. Para $d \in \{0,3;0,4\}$ esse comportamento nem sempre é verificado. O estimador Beran subestima o valor do parâmetro em todas as simulações.

À medida que ns aumenta, de modo geral, os estimadores GPH, BA, Beran e FTmod apresentam os valores estimados para o parâmetro decrescendo. O estimador FT não apresenta tal comportamento. O estimador FTmod alcança estimativas boas para o parâmetro d quando $ns \in (3,6)$.

As Figuras 3 a 6 apresentam os gráficos dos valores médios estimados para o parâmetro d . Para fins de comparação utilizamos nesses gráficos o valor dos estimadores GPH e BA obtidos pelo método MM com $\alpha = 0,5$.

Observação: Nos gráficos que apresentamos a seguir, fizemos uso de linhas suavizadas para conectar o valor pontual das estimativas obtidas com o intuito de que possamos visualizar de maneira mais clara o comportamento de cada estimador.

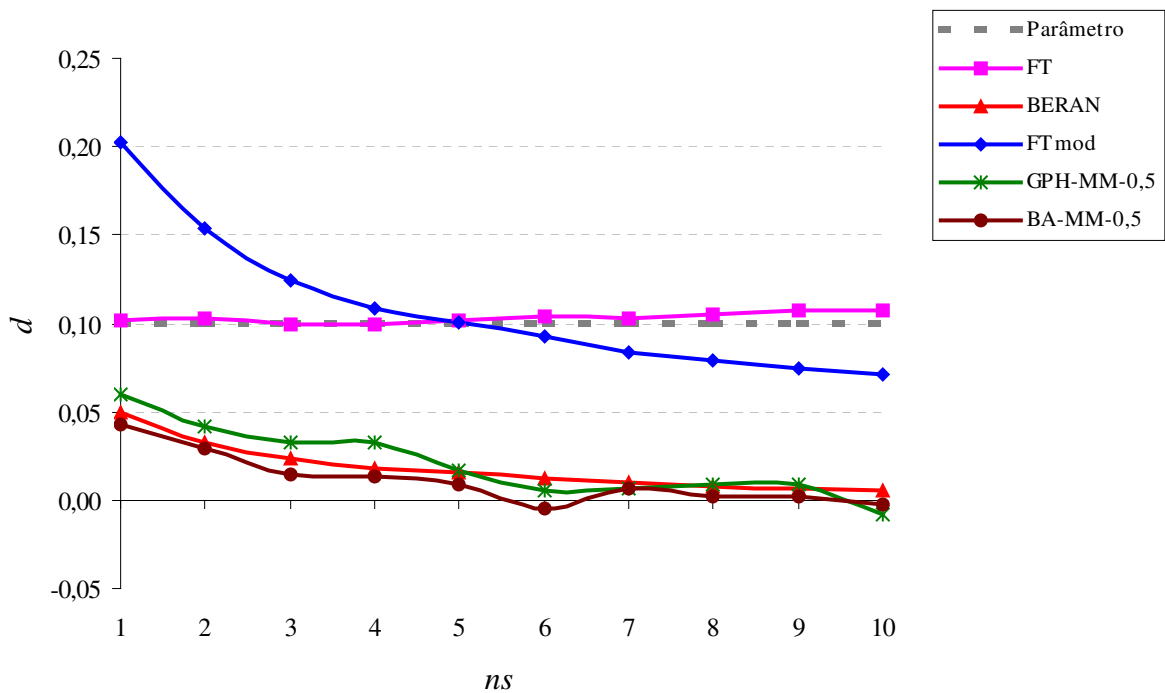


Figura 3: Valores médios dos estimadores no processo ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído, onde $d=0,10$.

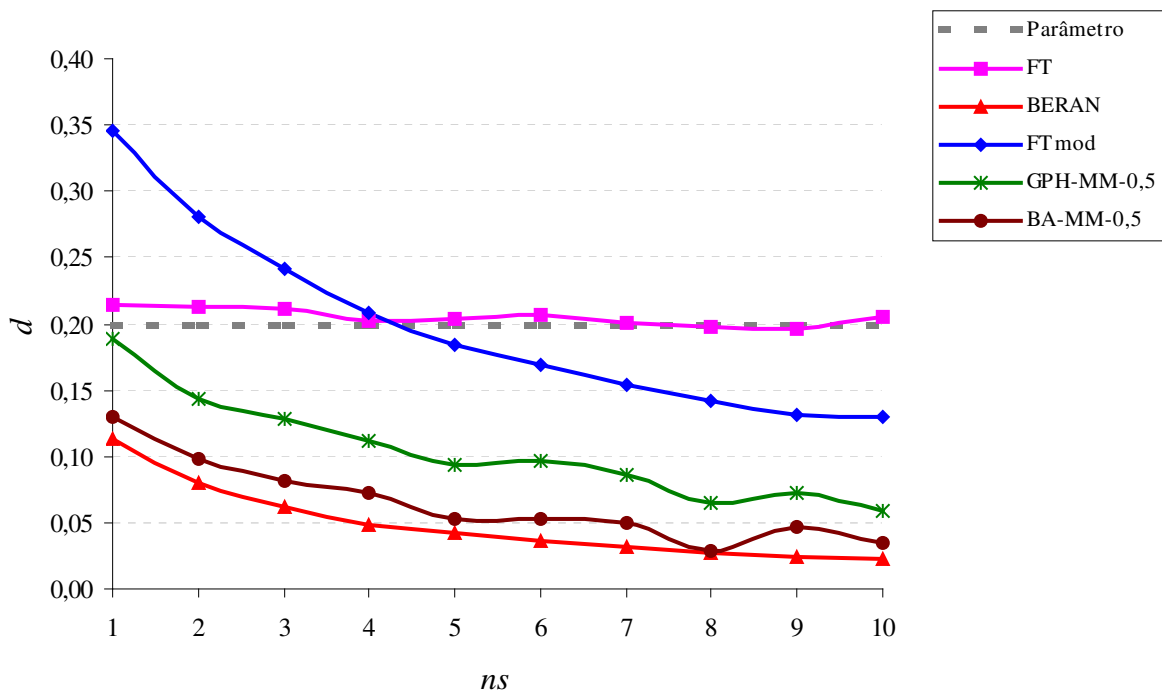


Figura 4: Valores médios dos estimadores no processo ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído, onde $d=0,20$.

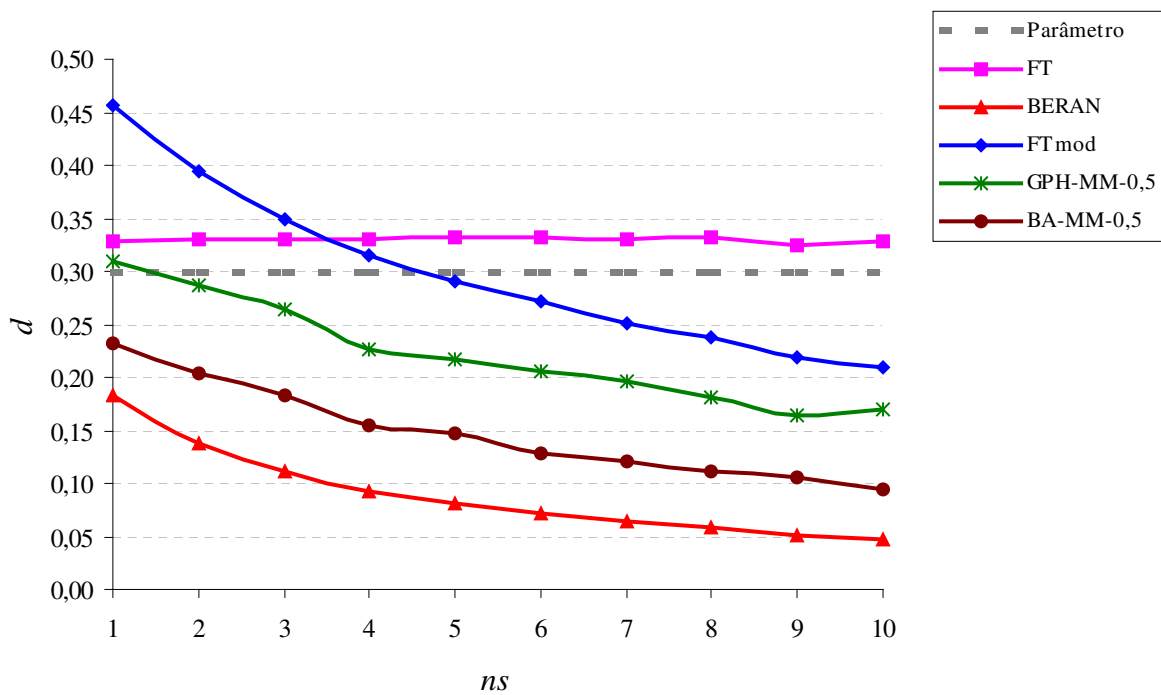


Figura 5: Valores médios dos estimadores no processo ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído, onde $d=0,30$.

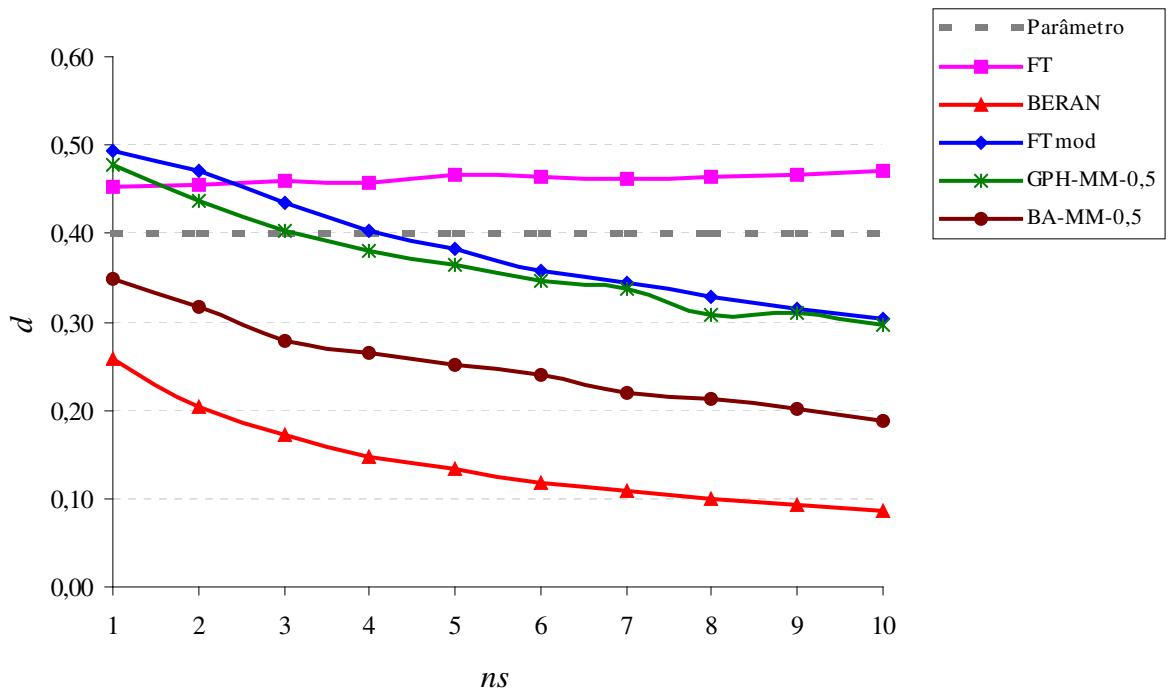


Figura 6: Valores médios dos estimadores no processo ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído, onde $d=0,40$.

O estimador que apresenta os melhores resultados para o parâmetro d nos processos ARFIMA(0,d,0) com $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ é o FT. Enquanto que os demais estimadores apresentam valores estimados decrescendo conforme ns aumenta, o valor obtido pelo estimador FT se mantém praticamente constante e próximo ao real valor do parâmetro. Para $d \in \{0,3; 0,4\}$ o FT superestima o verdadeiro valor do parâmetro. No entanto, mesmo assim permanece sendo o melhor estimador levando-se em conta o crescimento do valor de ns .

As Tabelas 13 a 15, detalham os resultados obtidos para as simulações do processo VE-ARFIMA(0,d,0) com $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo uma distribuição $Log(\chi_1^2)$.

Tabela 13. Estimação no processo VE-ARFIMA(p,d,q), $p=0=q$, $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,4;0,5\}$.

	$\alpha=0,40$						$\alpha=0,50$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$d=0,10$	média	0,6693	0,0789	0,0415	-0,0162	-0,0078	-0,0025	0,3644	0,0237	0,0217	-0,0006	0,0074	0,0082
	vício	0,5693	-0,0211	-0,0585	-0,1162	-0,1078	-0,1025	0,2644	-0,0763	-0,0783	-0,1006	-0,0926	-0,0918
	eqm	0,3546	0,1660	0,1278	0,0374	0,0600	0,0523	0,0835	0,0357	0,0375	0,0204	0,0285	0,0255
	variância	0,0305	0,1657	0,1245	0,0239	0,0485	0,0419	0,0136	0,0299	0,0314	0,0103	0,0200	0,0171
$d=0,20$	média	0,7039	0,2289	0,1954	0,0539	0,0652	0,0678	0,4134	0,1092	0,1069	0,0607	0,0639	0,0672
	vício	0,5039	0,0289	-0,0046	-0,1461	-0,1348	-0,1322	0,2134	-0,0908	-0,0931	-0,1393	-0,1361	-0,1328
	eqm	0,2833	0,1749	0,1554	0,0452	0,0663	0,0571	0,0582	0,0400	0,0410	0,0301	0,0373	0,0341
	variância	0,0295	0,1742	0,1556	0,0238	0,0482	0,0397	0,0126	0,0317	0,0324	0,0107	0,0188	0,0165
$d=0,30$	média	0,7312	0,3720	0,3438	0,1361	0,1486	0,1569	0,4685	0,2207	0,2091	0,1406	0,1432	0,1472
	vício	0,4312	0,0720	0,0438	-0,1639	-0,1514	-0,1431	0,1685	-0,0793	-0,0909	-0,1594	-0,1568	-0,1528
	eqm	0,2177	0,1921	0,1738	0,0543	0,0788	0,0636	0,0428	0,0498	0,0474	0,0376	0,0430	0,0423
	variância	0,0318	0,1871	0,1720	0,0274	0,0559	0,0432	0,0144	0,0436	0,0392	0,0122	0,0184	0,0190
$d=0,40$	média	0,7294	0,5502	0,5299	0,2560	0,2643	0,2776	0,5177	0,3787	0,3605	0,2503	0,2524	0,2574
	vício	0,3294	0,1502	0,1299	-0,1440	-0,1357	-0,1224	0,1177	-0,0213	-0,0395	-0,1497	-0,1476	-0,1426
	eqm	0,1654	0,1628	0,1593	0,0467	0,0733	0,0581	0,0350	0,0471	0,0461	0,0338	0,0401	0,0377
	variância	0,0570	0,1404	0,1426	0,0260	0,0549	0,0432	0,0212	0,0467	0,0446	0,0114	0,0183	0,0174

Tabela 14. Estimação no processo VE-ARFIMA(p,d,q), $p=0=q$, $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$, $re=1000$, $\alpha \in \{0,6;0,7\}$.

	$\alpha=0,60$						$\alpha=0,70$						
	GPH			BA			GPH			BA			
	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP	
$d=0,10$	média	0,2108	0,0175	0,0222	0,0082	0,0109	0,0108	0,1298	0,0182	0,0245	0,0160	0,0171	0,0177
	vício	0,1108	-0,0825	-0,0778	-0,0918	-0,0891	-0,0892	0,0298	-0,0818	-0,0755	-0,0840	-0,0829	-0,0823
	eqm	0,0191	0,0189	0,0167	0,0135	0,0165	0,0155	0,0043	0,0132	0,0100	0,0094	0,0104	0,0099
	variância	0,0068	0,0121	0,0107	0,0051	0,0086	0,0076	0,0034	0,0065	0,0043	0,0023	0,0035	0,0031
$d=0,20$	média	0,2553	0,0787	0,0802	0,0598	0,0606	0,0622	0,1666	0,0627	0,0668	0,0551	0,0544	0,0556
	vício	0,0553	-0,1213	-0,1198	-0,1402	-0,1394	-0,1378	-0,0334	-0,1373	-0,1332	-0,1449	-0,1456	-0,1444
	eqm	0,0095	0,0273	0,0256	0,0247	0,0272	0,0263	0,0044	0,0263	0,0225	0,0234	0,0253	0,0244
	variância	0,0064	0,0126	0,0113	0,0051	0,0078	0,0073	0,0033	0,0074	0,0048	0,0024	0,0041	0,0036
$d=0,30$	média	0,3130	0,1565	0,1551	0,1309	0,1314	0,1308	0,2188	0,1194	0,1304	0,1148	0,1145	0,1146
	vício	0,0130	-0,1435	-0,1449	-0,1691	-0,1686	-0,1692	-0,0812	-0,1806	-0,1696	-0,1852	-0,1855	-0,1854
	eqm	0,0072	0,0337	0,0331	0,0343	0,0368	0,0368	0,0102	0,0415	0,0339	0,0370	0,0388	0,0383
	variância	0,0071	0,0131	0,0122	0,0057	0,0084	0,0082	0,0036	0,0089	0,0051	0,0027	0,0044	0,0039
$d=0,40$	média	0,3793	0,2728	0,2725	0,2256	0,2209	0,2252	0,2810	0,2052	0,2129	0,1927	0,1835	0,1881
	vício	-0,0207	-0,1272	-0,1275	-0,1744	-0,1791	-0,1748	-0,1190	-0,1948	-0,1871	-0,2073	-0,2165	-0,2119
	eqm	0,0096	0,0338	0,0315	0,0358	0,0404	0,0386	0,0181	0,0486	0,0410	0,0455	0,0520	0,0491
	variância	0,0092	0,0177	0,0153	0,0054	0,0084	0,0081	0,0040	0,0107	0,0060	0,0026	0,0051	0,0042

Tabela 15. Estimação no processo VE-ARFIMA(p,d,q), $p=0=q$,
 $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$, $re=1000$, $\alpha = 0,8$.

		$\alpha=0,80$						BERAN	FT	FTmod
		GPH			BA					
		MQ	MM	MQP	MQ	MM	MQP			
$d=0,10$	média	0,0822	0,0148	0,0209	0,0159	0,0158	0,0155	0,0140	0,5027	0,0819
	vício	-0,0178	-0,0852	-0,0791	-0,0841	-0,0842	-0,0845	-0,0860	0,4027	-0,0181
	eqm	0,0020	0,0113	0,0083	0,0083	0,0091	0,0088	0,0081	0,1624	0,0050
	variância	0,0017	0,0040	0,0020	0,0012	0,0020	0,0016	0,0006	0,0003	0,0047
$d=0,20$	média	0,1129	0,0526	0,0530	0,0481	0,0461	0,0479	0,0412	0,5095	0,1614
	vício	-0,0871	-0,1474	-0,1470	-0,1519	-0,1539	-0,1521	-0,1588	0,3095	-0,0386
	eqm	0,0092	0,0260	0,0238	0,0243	0,0259	0,0248	0,0258	0,0962	0,0066
	variância	0,0016	0,0043	0,0022	0,0012	0,0022	0,0017	0,0006	0,0004	0,0052
$d=0,30$	média	0,1567	0,0934	0,1041	0,0958	0,0918	0,0932	0,0825	0,5226	0,2636
	vício	-0,1433	-0,2066	-0,1959	-0,2042	-0,2082	-0,2068	-0,2175	0,2226	-0,0364
	eqm	0,0224	0,0482	0,0408	0,0430	0,0458	0,0446	0,0480	0,0509	0,0047
	variância	0,0019	0,0055	0,0025	0,0013	0,0024	0,0018	0,0007	0,0013	0,0034
$d=0,40$	média	0,2065	0,1530	0,1611	0,1549	0,1441	0,1472	0,1318	0,5414	0,3525
	vício	-0,1935	-0,2470	-0,2389	-0,2451	-0,2559	-0,2528	-0,2682	0,1414	-0,0475
	eqm	0,0394	0,0669	0,0598	0,0613	0,0684	0,0662	0,0726	0,0248	0,0051
	variância	0,0020	0,0059	0,0028	0,0012	0,0029	0,0023	0,0007	0,0048	0,0028

Conforme podemos perceber pela análise das Tabelas 13 a 15, o estimador FT apresenta valor médio em torno de 0,5 não importando o real valor do parâmetro d . Novamente os estimadores Beran e BA subestimam o verdadeiro valor do parâmetro, não apresentando bons resultados quando o ruído contaminante segue uma distribuição $Log(\chi_1^2)$.

O melhor estimador nessa situação é o FTmod que sempre subestima o real valor do parâmetro, mas apresenta o menor vício analisando os resultados obtidos para todos os valores do parâmetro d estimado. O estimador GPH subestima o real valor do parâmetro nas metodologias MM e MQP, enquanto pelo metodologia MQ não apresenta tal comportamento em todos os casos.

A Figura 7, apresentada a seguir, mostra o comportamento dos estimadores. Para melhor visualização em termos comparativos a linha tracejada é o valor real do parâmetro d .

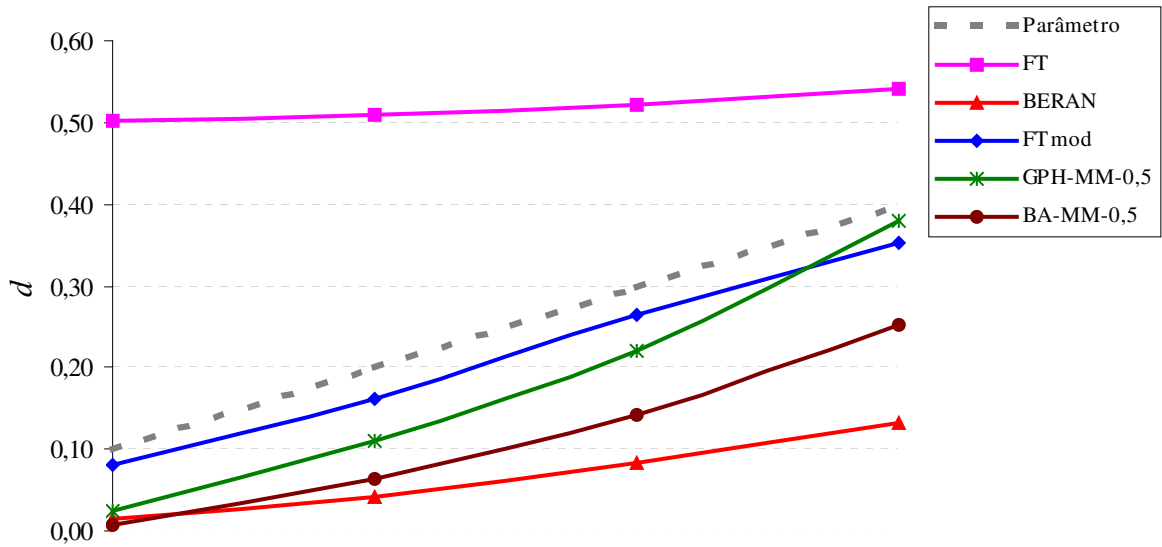


Figura 7: Valores médios dos estimadores no processo VE-ARFIMA(0,d,0), onde $d \in \{0,1;0,2;0,3;0,4\}$ e o ruído contaminante segue uma distribuição $\text{Log}(\chi_1^2)$.

5.2 Modelos ARFIMA(p,d,q)

Na estimação dos parâmetros nos processos ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído utilizamos os estimadores paramétricos descritos na Seção 4.2. Os parâmetros considerados foram $d \in \{0,2;0,3\}$, $\phi \in \{0,7;-0,7\}$ e $\theta \in \{0,4;0,2;-0,4;-0,2\}$ para $ns \in \{1,2,\dots,5\}$. Nessas simulações utilizamos $p=l=q$, resultando então em um processo ARFIMA(1,d,1) com adição de ruído. O ruído contaminante utilizado foi uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Caso 1: ϕ e θ ambos positivos

As Tabelas 16 a 19, detalham os resultados obtidos para as simulações do processo ARFIMA(1,d,1), com $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ seguindo uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e os parâmetros ϕ e θ ambos positivos.

Tabela 16. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,20$, $\phi=0,70$, $\theta=0,40$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=0,70$ $\theta=0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0234	0,7599	0,4949	0,2980	0,3430	0,2124	0,2366	0,7206	0,4981
	vício	-0,1766	0,0599	0,0949	0,0980	-0,3570	-0,1876	0,0366	0,0206	0,0981
	eqm	0,0727	0,0658	0,0623	0,0346	0,5026	0,3181	0,0209	0,0345	0,0373
	variância	0,0416	0,0623	0,0534	0,0250	0,3759	0,2835	0,0196	0,0341	0,0277
$ns=2$	média	0,0600	0,5650	0,4113	0,3100	0,2908	0,1943	0,2568	0,6130	0,4630
	vício	-0,1400	-0,1350	0,0113	0,1100	-0,4092	-0,2057	0,0568	-0,0870	0,0630
	eqm	0,0570	0,2947	0,1989	0,0363	0,5363	0,3389	0,0249	0,1561	0,1288
	variância	0,0375	0,2770	0,1991	0,0242	0,3696	0,2972	0,0217	0,1488	0,1251
$ns=3$	média	0,0577	0,5296	0,4177	0,3086	0,3123	0,2345	0,2550	0,5038	0,3964
	vício	-0,1423	-0,1704	0,0177	0,1086	-0,3877	-0,1655	0,0550	-0,1962	-0,0036
	eqm	0,0617	0,3025	0,1993	0,0368	0,4815	0,3031	0,0302	0,2800	0,2023
	variância	0,0415	0,2740	0,1994	0,0250	0,3318	0,2763	0,0273	0,2419	0,2027
$ns=4$	média	0,0548	0,4913	0,4035	0,3240	0,2616	0,1991	0,2711	0,3658	0,2879
	vício	-0,1452	-0,2087	0,0035	0,1240	-0,4384	-0,2009	0,0711	-0,3342	-0,1121
	eqm	0,0535	0,3491	0,2312	0,0385	0,5282	0,3303	0,0320	0,4247	0,2811
	variância	0,0325	0,3061	0,2316	0,0231	0,3367	0,2906	0,0270	0,3137	0,2691
$ns=5$	média	0,0436	0,5081	0,4260	0,3098	0,2637	0,2049	0,2691	0,2607	0,1980
	vício	-0,1564	-0,1919	0,0260	0,1098	-0,4363	-0,1951	0,0691	-0,4393	-0,2020
	eqm	0,0547	0,3346	0,2382	0,0390	0,5258	0,3308	0,0303	0,5404	0,3419
	variância	0,0303	0,2983	0,2380	0,0270	0,3361	0,2933	0,0256	0,3481	0,3017

Tabela 17. Estimacão no processo ARFIMA(p,d,q) com adio de ruído, quando $p=1=q$, $d=0,30$, $\phi=0,70$, $\theta=0,40$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=0,70$ $\theta=0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0928	0,7603	0,4951	0,3653	0,6444	0,4757	0,3094	0,7493	0,5037
	vício	-0,2072	0,0603	0,0951	0,0653	-0,0556	0,0757	0,0094	0,0493	0,1037
	eqm	0,0954	0,0957	0,0734	0,0226	0,1311	0,1093	0,0187	0,0149	0,0201
	variância	0,0526	0,0922	0,0645	0,0184	0,1283	0,1038	0,0187	0,0125	0,0094
$ns=2$	média	0,0646	0,7610	0,5569	0,3689	0,6043	0,4742	0,2988	0,7144	0,5390
	vício	-0,2354	0,0610	0,1569	0,0689	-0,0957	0,0742	-0,0012	0,0144	0,1390
	eqm	0,1133	0,1176	0,1083	0,0284	0,1848	0,1508	0,0233	0,0743	0,0786
	variância	0,0580	0,1141	0,0838	0,0237	0,1760	0,1456	0,0233	0,0742	0,0594
$ns=3$	média	0,0597	0,6768	0,5140	0,3658	0,6196	0,5061	0,3006	0,6559	0,5197
	vício	-0,2403	-0,0232	0,1140	0,0658	-0,0804	0,1061	0,0006	-0,0441	0,1197
	eqm	0,1079	0,2104	0,1607	0,0293	0,1770	0,1593	0,0235	0,1397	0,1290
	variância	0,0503	0,2103	0,1480	0,0250	0,1709	0,1483	0,0236	0,1380	0,1149
$ns=4$	média	0,0826	0,6009	0,4933	0,3818	0,5726	0,4783	0,3286	0,4786	0,3798
	vício	-0,2174	-0,0991	0,0933	0,0818	-0,1274	0,0783	0,0286	-0,2214	-0,0202
	eqm	0,0867	0,2750	0,1976	0,0308	0,2432	0,2113	0,0251	0,3458	0,2519
	variância	0,0395	0,2657	0,1893	0,0241	0,2274	0,2056	0,0244	0,2974	0,2520
$ns=5$	média	0,0718	0,5647	0,4740	0,3881	0,5120	0,4341	0,3472	0,3260	0,2581
	vício	-0,2282	-0,1353	0,0740	0,0881	-0,1880	0,0341	0,0472	-0,3740	-0,1419
	eqm	0,0844	0,3027	0,2059	0,0331	0,3073	0,2421	0,0263	0,4921	0,3170
	variância	0,0323	0,2849	0,2008	0,0254	0,2725	0,2414	0,0241	0,3529	0,2975

De análise das Tabelas 16 e 17 com os parâmetros $\phi=0,70$, $\theta=0,40$ e $d \in \{0,2;0,3\}$ percebemos que, de modo geral, todos os estimadores apresentam valores estimados de ϕ diminuindo conforme ns aumenta.

O estimador Beran subestima o valor do parâmetro d , mas apresenta resultados razoavelmente bons para os parâmetros ϕ e θ quando $ns=1$. Para o parâmetro ϕ o valor estimado tende a diminuir conforme ns aumenta. Já para o parâmetro θ o valor estimado é razoavelmente bom tanto para $d=0,20$ quanto para $d=0,30$.

O estimador FT apresenta um valor muito ruim para o parâmetro ϕ quando $d=0,2$, apresentando um resultado melhor quando $d=0,3$. O valor  superestimado para o parâmetro d . Para o parâmetro θ o valor fica abaixo do real quando $d=0,2$ e acima quando $d=0,3$.

O estimador FTmod apresenta bons resultados para todos os parâmetros em conjunto, especialmente para d , apresentando pouca variação mesmo com o aumento de ns . Para os outros parâmetros a variação é maior. No entanto, acaba sendo o melhor estimador quando $ns=1$.

Nas Tabelas 18 e 19, apresentadas a seguir, os estimadores FT e FTmod apresentam ambos boas estimativas para o parâmetro d e também para ϕ . No entanto acabam superestimando muito o valor de θ .

Tabela 18. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q$, $d=0,20$, $\phi=0,70$, $\theta=0,20$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=0,70$ $\theta=0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0147	0,7990	0,4018	0,2404	0,7130	0,4154	0,2193	0,7436	0,4035
	vício	-0,1853	0,0990	0,2018	0,0404	0,0130	0,2154	0,0193	0,0436	0,2035
	eqm	0,0792	0,0198	0,0640	0,0215	0,0212	0,0599	0,0183	0,0131	0,0493
	variância	0,0449	0,0100	0,0233	0,0199	0,0211	0,0136	0,0179	0,0112	0,0079
$ns=2$	média	0,0117	0,7868	0,4888	0,2609	0,7083	0,4876	0,2237	0,7446	0,4976
	vício	-0,1883	0,0868	0,2888	0,0609	0,0083	0,2876	0,0237	0,0446	0,2976
	eqm	0,0759	0,0408	0,1161	0,0241	0,0423	0,1152	0,0191	0,0178	0,1011
	variância	0,0405	0,0333	0,0327	0,0204	0,0423	0,0326	0,0186	0,0159	0,0126
$ns=3$	média	0,0083	0,7442	0,5008	0,2640	0,6958	0,5144	0,2188	0,7148	0,5198
	vício	-0,1917	0,0442	0,3008	0,0640	-0,0042	0,3144	0,0188	0,0148	0,3198
	eqm	0,0855	0,1123	0,1747	0,0314	0,0595	0,1457	0,0249	0,0566	0,1475
	variância	0,0488	0,1106	0,0844	0,0273	0,0596	0,0470	0,0246	0,0565	0,0453
$ns=4$	média	0,0306	0,6372	0,4517	0,2733	0,6744	0,5183	0,2312	0,6418	0,4832
	vício	-0,1694	-0,0628	0,2517	0,0733	-0,0256	0,3183	0,0312	-0,0582	0,2832
	eqm	0,0780	0,2322	0,2289	0,0317	0,0804	0,1670	0,0266	0,1361	0,1876
	variância	0,0494	0,2288	0,1659	0,0264	0,0799	0,0658	0,0257	0,1330	0,1077
$ns=5$	média	0,0484	0,5566	0,4165	0,2878	0,6314	0,4984	0,2406	0,5746	0,4440
	vício	-0,1516	-0,1434	0,2165	0,0878	-0,0686	0,2984	0,0406	-0,1254	0,2440
	eqm	0,0634	0,2992	0,2470	0,0363	0,1197	0,1863	0,0288	0,2050	0,2157
	variância	0,0405	0,2792	0,2006	0,0287	0,1152	0,0975	0,0272	0,1897	0,1565

Tabela 19. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q$, $d=0,30$, $\phi=0,70$, $\theta=0,20$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=0,70$ $\theta=0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0683	0,7877	0,3798	0,3480	0,7456	0,4387	0,2775	0,7669	0,4156
	vício	-0,2317	0,0877	0,1798	0,0480	0,0456	0,2387	-0,0225	0,0669	0,2156
	eqm	0,1098	0,0894	0,0911	0,0239	0,0085	0,0614	0,0210	0,0198	0,0563
	variância	0,0562	0,0819	0,0589	0,0217	0,0064	0,0044	0,0206	0,0153	0,0098
$ns=2$	média	0,0603	0,7642	0,4539	0,3614	0,7558	0,5120	0,2835	0,7615	0,4960
	vício	-0,2397	0,0642	0,2539	0,0614	0,0558	0,3120	-0,0165	0,0615	0,2960
	eqm	0,1197	0,1102	0,1295	0,0265	0,0101	0,1031	0,0225	0,0305	0,1068
	variância	0,0623	0,1062	0,0652	0,0228	0,0070	0,0057	0,0223	0,0268	0,0193
$ns=3$	média	0,0494	0,7964	0,5384	0,3738	0,7699	0,5677	0,2954	0,7649	0,5556
	vício	-0,2506	0,0964	0,3384	0,0738	0,0699	0,3677	-0,0046	0,0649	0,3556
	eqm	0,1261	0,0802	0,1639	0,0276	0,0119	0,1433	0,0214	0,0296	0,1451
	variância	0,0608	0,0752	0,0518	0,0232	0,0077	0,0071	0,0212	0,0258	0,0193
$ns=4$	média	0,0291	0,7977	0,5583	0,3820	0,7626	0,5857	0,2858	0,7477	0,5678
	vício	-0,2709	0,0977	0,3583	0,0820	0,0626	0,3857	-0,0142	0,0477	0,3678
	eqm	0,1249	0,0984	0,2000	0,0300	0,0269	0,1696	0,0233	0,0569	0,1797
	variância	0,0516	0,0891	0,0718	0,0233	0,0231	0,0209	0,0231	0,0548	0,0445
$ns=5$	média	0,0420	0,7524	0,5589	0,3735	0,7822	0,6229	0,2915	0,7025	0,5520
	vício	-0,2580	0,0524	0,3589	0,0735	0,0822	0,4229	-0,0085	0,0025	0,3520
	eqm	0,1282	0,1579	0,2425	0,0309	0,0233	0,1954	0,0243	0,1173	0,2203
	variância	0,0617	0,1555	0,1140	0,0255	0,0165	0,0166	0,0243	0,1175	0,0966

Ainda na análise quando $\theta=0,20$, o estimador Beran apresenta comportamento semelhante ao caso anterior com relação ao parâmetro d e também acaba superestimando o valor de θ .

Na primeira situação, em que $\theta=0,40$, o estimador FTmod se sai um pouco melhor na análise conjunta das estimativas dos três parâmetros. De toda forma é difícil apontar o melhor estimador para qualquer uma dessas duas situações. FT e FTmod acabam se equivalendo e o estimador Beran não produz boas estimativas para o parâmetro d , mantendo o mesmo comportamento observado nos processos VE-ARFIMA($0,d,0$) e ARFIMA($0,d,0$) com adição de ruído.

Caso 2: ϕ e θ ambos negativos

As Tabelas 20 a 23, apresentam os resultados obtidos quando os parâmetros ϕ e θ são negativos. O comportamento observado dos estimadores é semelhante ao Caso 1, em que ambos parâmetros eram positivos.

Tabela 20. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q, d=0,20, \phi=-0,70, \theta=-0,40, re=500$.

	$d=0,20$ $\phi=-0,70$ $\theta=-0,40$	BERAN			FT			FTmod		
		d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ
$ns=1$	média	0,1097	-0,6457	-0,4784	0,1943	-0,6365	-0,4825	0,2983	-0,6957	-0,5659
	vício	-0,0903	0,0543	-0,0784	-0,0057	0,0635	-0,0825	0,0983	0,0043	-0,1659
	eqm	0,0152	0,0302	0,0483	0,0033	0,0623	0,0661	0,0142	0,0363	0,0626
	variância	0,0070	0,0273	0,0423	0,0033	0,0584	0,0594	0,0045	0,0363	0,0352
$ns=2$	média	0,0726	-0,4802	-0,3620	0,1928	-0,5847	-0,4727	0,2396	-0,6425	-0,5443
	vício	-0,1274	0,2198	0,0380	-0,0072	0,1153	-0,0727	0,0396	0,0575	-0,1443
	eqm	0,0371	0,2505	0,1952	0,0054	0,1193	0,1146	0,0083	0,0863	0,1028
	variância	0,0218	0,2092	0,1974	0,0055	0,1025	0,1087	0,0064	0,0747	0,0760
$ns=3$	média	0,0519	-0,3133	-0,2275	0,1981	-0,4801	-0,3909	0,2130	-0,5393	-0,4603
	vício	-0,1481	0,3867	0,1725	-0,0019	0,2199	0,0091	0,0130	0,1607	-0,0603
	eqm	0,0454	0,4684	0,3070	0,0084	0,2241	0,1806	0,0082	0,1763	0,1536
	variância	0,0248	0,3241	0,2875	0,0082	0,1826	0,1871	0,0079	0,1578	0,1566
$ns=4$	média	0,0166	-0,0411	0,0011	0,1975	-0,3697	-0,2992	0,1905	-0,4409	-0,3751
	vício	-0,1834	0,6589	0,4011	-0,0025	0,3303	0,1008	-0,0095	0,2591	0,0249
	eqm	0,0677	0,9113	0,5520	0,0105	0,3824	0,2819	0,0099	0,2922	0,2272
	variância	0,0349	0,4507	0,3784	0,0106	0,2678	0,2690	0,0097	0,2265	0,2275
$ns=5$	média	0,0139	0,0620	0,0981	0,1868	-0,3374	-0,2784	0,1729	-0,3516	-0,2943
	vício	-0,1861	0,7620	0,4981	-0,0132	0,3626	0,1216	-0,0271	0,3484	0,1057
	eqm	0,0781	1,0168	0,6347	0,0134	0,4155	0,3003	0,0130	0,4275	0,3144
	variância	0,0424	0,4476	0,3872	0,0128	0,2781	0,2791	0,0116	0,2807	0,2827

Tabela 21. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q$, $d=0,30$, $\phi=-0,70$, $\theta=-0,40$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=-0,70$ $\theta=-0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,1281	-0,4544	-0,3345	0,2999	-0,5935	-0,4451	0,4122	-0,7244	-0,6119
	vício	-0,1719	0,2456	0,0655	-0,0001	0,1065	-0,0451	0,1122	-0,0244	-0,2119
	eqm	0,0786	0,3499	0,1848	0,0055	0,1208	0,1046	0,0154	0,0301	0,0751
	variância	0,0491	0,2901	0,1809	0,0056	0,1097	0,1028	0,0028	0,0296	0,0302
$ns=2$	média	0,0979	-0,3533	-0,2614	0,3090	-0,5171	-0,4067	0,3441	-0,6256	-0,5430
	vício	-0,2021	0,3467	0,1386	0,0090	0,1829	-0,0067	0,0441	0,0744	-0,1430
	eqm	0,0644	0,4527	0,2688	0,0057	0,1878	0,1653	0,0068	0,1166	0,1276
	variância	0,0246	0,3277	0,2556	0,0055	0,1483	0,1603	0,0048	0,1090	0,1058
$ns=3$	média	0,0772	-0,2574	-0,1863	0,3101	-0,4089	-0,3214	0,3090	-0,5084	-0,4391
	vício	-0,2228	0,4426	0,2137	0,0101	0,2911	0,0786	0,0090	0,1916	-0,0391
	eqm	0,0632	0,5794	0,3434	0,0075	0,3139	0,2445	0,0063	0,2190	0,1805
	variância	0,0127	0,3455	0,2805	0,0074	0,2291	0,2380	0,0063	0,1792	0,1756
$ns=4$	média	0,0772	-0,1277	-0,0558	0,3165	-0,2968	-0,2221	0,2806	-0,4029	-0,3439
	vício	-0,2228	0,5723	0,3442	0,0165	0,4032	0,1779	-0,0194	0,2971	0,0561
	eqm	0,0858	0,7087	0,4632	0,0093	0,4551	0,3245	0,0091	0,3358	0,2437
	variância	0,0389	0,3886	0,3406	0,0091	0,2823	0,2886	0,0089	0,2574	0,2521
$ns=5$	média	0,0638	0,0166	0,0792	0,3138	-0,2702	-0,2027	0,2570	-0,3567	-0,3005
	vício	-0,2362	0,7166	0,4792	0,0138	0,4298	0,1973	-0,0430	0,3433	0,0995
	eqm	0,0886	0,8838	0,5814	0,0109	0,4645	0,3382	0,0112	0,3807	0,2707
	variância	0,0328	0,4135	0,3665	0,0107	0,2967	0,3064	0,0089	0,2562	0,2538

Na análise das Tabelas 20 a 23, podemos verificar que os estimadores FT e FTmod se equivalem sendo difícil apontar qual dos dois se sai melhor. O valor das estimativas de ϕ e θ (em módulo) diminui conforme ns aumenta. Esse comportamento também é observado no estimador Beran.

Tabela 22. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q, d=0,20, \phi=-0,70, \theta=-0,20, re=500$.

$d=0,20$ $\phi=-0,70$ $\theta=-0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0899	-0,6783	-0,4135	0,1742	-0,6695	-0,4123	0,2632	-0,6998	-0,4612
	vício	-0,1101	0,0217	-0,2135	-0,0258	0,0305	-0,2123	0,0632	0,0002	-0,2612
	eqm	0,0153	0,0067	0,0609	0,0041	0,0241	0,0683	0,0087	0,0048	0,0761
	variância	0,0031	0,0063	0,0154	0,0034	0,0232	0,0232	0,0047	0,0048	0,0078
$ns=2$	média	0,0743	-0,6606	-0,4573	0,1600	-0,6634	-0,4839	0,2044	-0,6823	-0,5109
	vício	-0,1257	0,0394	-0,2573	-0,0400	0,0366	-0,2839	0,0044	0,0177	-0,3109
	eqm	0,0329	0,0157	0,1187	0,0062	0,0323	0,1105	0,0064	0,0253	0,1193
	variância	0,0170	0,0143	0,0534	0,0045	0,0267	0,0290	0,0061	0,0197	0,0216
$ns=3$	média	0,0520	-0,6159	-0,4566	0,1499	-0,6521	-0,5090	0,1644	-0,6701	-0,5312
	vício	-0,1480	0,0841	-0,2566	-0,0501	0,0479	-0,3090	-0,0356	0,0299	-0,3312
	eqm	0,0381	0,0709	0,1443	0,0094	0,0331	0,1338	0,0096	0,0227	0,1365
	variância	0,0175	0,0590	0,0793	0,0070	0,0331	0,0387	0,0082	0,0212	0,0255
$ns=4$	média	0,0363	-0,4836	-0,3636	0,1600	-0,6180	-0,5023	0,1527	-0,6365	-0,5238
	vício	-0,1637	0,2164	-0,1636	-0,0400	0,0820	-0,3023	-0,0473	0,0635	-0,3238
	eqm	0,0438	0,2622	0,2221	0,0104	0,0765	0,1736	0,0105	0,0572	0,1675
	variância	0,0187	0,2116	0,1960	0,0086	0,0693	0,0772	0,0081	0,0519	0,0571
$ns=5$	média	0,0250	-0,3597	-0,2596	0,1598	-0,5685	-0,4656	0,1390	-0,5932	-0,4927
	vício	-0,1750	0,3403	-0,0596	-0,0402	0,1315	-0,2656	-0,0610	0,1068	-0,2927
	eqm	0,0586	0,4053	0,2637	0,0124	0,1257	0,1810	0,0120	0,1095	0,1819
	variância	0,0290	0,3045	0,2682	0,0108	0,1026	0,1098	0,0085	0,0916	0,0966

Tabela 23. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q$, $d=0,30$, $\phi=-0,70$, $\theta=-0,20$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=-0,70$ $\theta=-0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,1556	-0,6616	-0,3954	0,2738	-0,6533	-0,4046	0,3704	-0,7037	-0,4916
	vício	-0,1444	0,0384	-0,1954	-0,0262	0,0467	-0,2046	0,0704	-0,0037	-0,2916
	eqm	0,0268	0,0082	0,0571	0,0041	0,0319	0,0693	0,0080	0,0156	0,0994
	variância	0,0059	0,0067	0,0190	0,0035	0,0298	0,0275	0,0031	0,0156	0,0144
$ns=2$	média	0,1067	-0,6283	-0,4418	0,2659	-0,6300	-0,4560	0,3077	-0,6806	-0,5247
	vício	-0,1933	0,0717	-0,2418	-0,0341	0,0700	-0,2560	0,0077	0,0194	-0,3247
	eqm	0,0430	0,0453	0,1003	0,0059	0,0467	0,1114	0,0041	0,0179	0,1284
	variância	0,0055	0,0401	0,0417	0,0051	0,0478	0,0488	0,0042	0,0234	0,0256
$ns=3$	média	0,0904	-0,5635	-0,4090	0,2703	-0,5991	-0,4615	0,2679	-0,6529	-0,5287
	vício	-0,2096	0,1365	-0,2090	-0,0297	0,1009	-0,2615	-0,0321	0,0471	-0,3287
	eqm	0,0552	0,1303	0,1578	0,0067	0,0956	0,1561	0,0061	0,0628	0,1649
	variância	0,0118	0,1032	0,1140	0,0057	0,0764	0,0850	0,0050	0,0540	0,0556
$ns=4$	média	0,0651	-0,4340	-0,3156	0,2654	-0,5586	-0,4453	0,2415	-0,6221	-0,5164
	vício	-0,2349	0,2660	-0,1156	-0,0346	0,1414	-0,2453	-0,0585	0,0779	-0,3164
	eqm	0,0695	0,3071	0,2113	0,0102	0,1270	0,1730	0,0101	0,0576	0,1617
	variância	0,0161	0,2283	0,1986	0,0092	0,1095	0,1153	0,0072	0,0611	0,0650
$ns=5$	média	0,0471	-0,3205	-0,2300	0,2787	-0,4853	-0,3864	0,2309	-0,5548	-0,4619
	vício	-0,2529	0,3795	-0,0300	-0,0213	0,2147	-0,1864	-0,0691	0,1452	-0,2619
	eqm	0,0809	0,4783	0,2776	0,0098	0,2192	0,2095	0,0124	0,1512	0,1966
	variância	0,0165	0,3303	0,2800	0,0095	0,1668	0,1751	0,0077	0,1202	0,1260

Caso 3: ϕ e θ com sinais opostos

Nas Tabelas 24 a 31 temos os casos onde ϕ e θ tem sinais opostos. Nessa situação é interessante observar como os três estimadores conseguem captar o sinal de ϕ e apresentar estimativas razoáveis para o seu real valor. No entanto para o parâmetro θ nenhum estimador foi capaz de captar o seu real sinal. As estimativas de d também são comprometidas nos estimadores FT e FTmod que, como vimos até aqui, estavam apresentando estimativas razoáveis para esse parâmetro.

Verifica-se ainda que para ϕ positivo e θ negativo a estimativa de ϕ é superestimada em todos os estimadores. Já quando temos ϕ negativo e θ positivo todos os estimadores subestimam o verdadeiro valor do parâmetro ϕ .

Tabela 24. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,20$, $\phi=0,70$, $\theta=-0,40$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=0,70$ $\theta=-0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0886	0,7841	0,1617	0,2611	0,7369	0,1289	0,2007	0,7460	0,1378
	vício	-0,1114	0,0841	0,5617	0,0611	0,0369	0,5289	0,0007	0,0460	0,5378
	eqm	0,0582	0,0145	0,3491	0,0220	0,0055	0,2821	0,0135	0,0058	0,2915
	variância	0,0458	0,0074	0,0336	0,0183	0,0041	0,0023	0,0135	0,0037	0,0023
$ns=2$	média	0,0443	0,8021	0,2892	0,2687	0,7503	0,2697	0,2007	0,7562	0,2808
	vício	-0,1557	0,1021	0,6892	0,0687	0,0503	0,6697	0,0007	0,0562	0,6808
	eqm	0,0676	0,0186	0,5060	0,0292	0,0066	0,4498	0,0167	0,0074	0,4656
	variância	0,0435	0,0082	0,0280	0,0241	0,0039	0,0025	0,0170	0,0044	0,0026
$ns=3$	média	0,0280	0,7971	0,3540	0,2756	0,7583	0,3509	0,2151	0,7546	0,3616
	vício	-0,1720	0,0971	0,7540	0,0756	0,0583	0,7509	0,0151	0,0546	0,7616
	eqm	0,0713	0,0277	0,5972	0,0303	0,0074	0,5675	0,0174	0,0130	0,5870
	variância	0,0428	0,0239	0,0298	0,0254	0,0044	0,0031	0,0176	0,0104	0,0070
$ns=4$	média	-0,0042	0,8070	0,3869	0,2822	0,7619	0,4011	0,2055	0,7629	0,4146
	vício	-0,2042	0,1070	0,7869	0,0822	0,0619	0,8011	0,0055	0,0629	0,8146
	eqm	0,0886	0,0383	0,6477	0,0347	0,0075	0,6451	0,0191	0,0084	0,6663
	variância	0,0481	0,0245	0,0295	0,0283	0,0038	0,0032	0,0189	0,0044	0,0032
$ns=5$	média	0,0015	0,8077	0,4366	0,3013	0,7639	0,4432	0,2198	0,7623	0,4579
	vício	-0,1985	0,1077	0,8366	0,1013	0,0639	0,8432	0,0198	0,0623	0,8579
	eqm	0,0811	0,0331	0,7312	0,0367	0,0080	0,7140	0,0194	0,0083	0,7388
	variância	0,0427	0,0216	0,0279	0,0264	0,0038	0,0034	0,0187	0,0045	0,0035

Tabela 25. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,30$, $\phi=0,70$, $\theta=-0,40$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=0,70$ $\theta=-0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,1298	0,8232	0,1802	0,3766	0,7550	0,1361	0,2641	0,7536	0,1798
	vício	-0,1702	0,1232	0,5802	0,0766	0,0550	0,5361	-0,0359	0,0536	0,5798
	eqm	0,0762	0,0219	0,3711	0,0237	0,0127	0,2923	0,0187	0,0156	0,3431
	variância	0,0473	0,0067	0,0345	0,0179	0,0097	0,0048	0,0174	0,0128	0,0069
$ns=2$	média	0,0840	0,8285	0,2946	0,3790	0,7792	0,2726	0,2720	0,7710	0,3102
	vício	-0,2160	0,1285	0,6946	0,0790	0,0792	0,6726	-0,0280	0,0710	0,7102
	eqm	0,0876	0,0429	0,5136	0,0253	0,0090	0,4551	0,0180	0,0100	0,5079
	variância	0,0454	0,0221	0,0333	0,0192	0,0025	0,0018	0,0170	0,0047	0,0031
$ns=3$	média	0,0706	0,8040	0,3460	0,3968	0,7867	0,3540	0,2680	0,7788	0,3860
	vício	-0,2294	0,1040	0,7460	0,0968	0,0867	0,7540	-0,0320	0,0788	0,7860
	eqm	0,1030	0,0900	0,6087	0,0297	0,0102	0,5734	0,0232	0,0116	0,6240
	variância	0,0499	0,0732	0,0560	0,0201	0,0026	0,0022	0,0220	0,0053	0,0032
$ns=4$	média	0,0457	0,8182	0,3935	0,3865	0,7991	0,4077	0,2666	0,7890	0,4381
	vício	-0,2543	0,1182	0,7935	0,0865	0,0991	0,8077	-0,0334	0,0890	0,8381
	eqm	0,1188	0,0712	0,6734	0,0315	0,0122	0,6542	0,0216	0,0124	0,7049
	variância	0,0517	0,0565	0,0427	0,0239	0,0024	0,0023	0,0206	0,0046	0,0031
$ns=5$	média	0,0550	0,7839	0,4112	0,4015	0,8018	0,4461	0,2792	0,7841	0,4722
	vício	-0,2450	0,0839	0,8112	0,1015	0,1018	0,8461	-0,0208	0,0841	0,8722
	eqm	0,1147	0,0975	0,7178	0,0329	0,0124	0,7190	0,0199	0,0219	0,7678
	variância	0,0556	0,0957	0,0567	0,0227	0,0024	0,0026	0,0202	0,0102	0,0072

Tabela 26. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,20$, $\phi=0,70$, $\theta=-0,20$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=0,70$ $\theta=-0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0686	0,7951	0,2450	0,2506	0,7334	0,2210	0,2122	0,7462	0,2223
	vício	-0,1314	0,0951	0,4450	0,0506	0,0334	0,4210	0,0122	0,0462	0,4223
	eqm	0,0640	0,0175	0,2336	0,0226	0,0064	0,1799	0,0160	0,0064	0,1810
	variância	0,0468	0,0085	0,0357	0,0201	0,0053	0,0027	0,0159	0,0043	0,0027
$ns=2$	média	0,0371	0,8002	0,3540	0,2658	0,7453	0,3426	0,2149	0,7539	0,3486
	vício	-0,1629	0,1002	0,5540	0,0658	0,0453	0,5426	0,0149	0,0539	0,5486
	eqm	0,0701	0,0280	0,3376	0,0265	0,0071	0,2936	0,0178	0,0073	0,3003
	variância	0,0426	0,0178	0,0313	0,0221	0,0049	0,0030	0,0175	0,0043	0,0029
$ns=3$	média	-0,0090	0,8091	0,3968	0,2721	0,7548	0,4172	0,2108	0,7584	0,4231
	vício	-0,2090	0,1091	0,5968	0,0721	0,0548	0,6172	0,0108	0,0584	0,6231
	eqm	0,0979	0,0300	0,3786	0,0299	0,0079	0,3863	0,0189	0,0202	0,3985
	variância	0,0476	0,0193	0,0267	0,0249	0,0047	0,0037	0,0184	0,0109	0,0079
$ns=4$	média	-0,0064	0,8055	0,4459	0,2863	0,7550	0,4603	0,2162	0,7597	0,4706
	vício	-0,2064	0,1055	0,6459	0,0863	0,0550	0,6603	0,0162	0,0597	0,6706
	eqm	0,0844	0,0342	0,4487	0,0329	0,0081	0,4409	0,0195	0,0089	0,4548
	variância	0,0446	0,0233	0,0285	0,0251	0,0050	0,0041	0,0194	0,0052	0,0041
$ns=5$	média	-0,0062	0,7989	0,4787	0,2836	0,7566	0,4932	0,2138	0,7575	0,5035
	vício	-0,2062	0,0989	0,6787	0,0836	0,0566	0,6932	0,0138	0,0575	0,7035
	eqm	0,0944	0,0370	0,5041	0,0337	0,0090	0,4883	0,0187	0,0105	0,5042
	variância	0,0541	0,0335	0,0375	0,0279	0,0054	0,0048	0,0198	0,0071	0,0057

Tabela 27. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,30$, $\phi=0,70$, $\theta=-0,20$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=0,70$ $\theta=-0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,1125	0,8229	0,2499	0,3721	0,7458	0,2223	0,2725	0,7595	0,2510
	vício	-0,1875	0,1229	0,4499	0,0721	0,0458	0,4223	-0,0275	0,0595	0,4510
	eqm	0,0802	0,0230	0,2320	0,0251	0,0124	0,1837	0,0169	0,0089	0,2071
	variância	0,0452	0,0079	0,0297	0,0199	0,0103	0,0055	0,0162	0,0053	0,0037
$ns=2$	média	0,0758	0,8239	0,3534	0,3743	0,7702	0,3423	0,2617	0,7793	0,3680
	vício	-0,2242	0,1239	0,5534	0,0743	0,0702	0,5423	-0,0383	0,0793	0,5680
	eqm	0,1028	0,0566	0,3377	0,0285	0,0147	0,3012	0,0235	0,0116	0,3266
	variância	0,0469	0,0360	0,0402	0,0229	0,0097	0,0060	0,0214	0,0051	0,0028
$ns=3$	média	0,0654	0,8052	0,4077	0,3931	0,7820	0,4207	0,2889	0,7777	0,4422
	vício	-0,2346	0,1052	0,6077	0,0931	0,0820	0,6207	-0,0111	0,0777	0,6422
	eqm	0,1109	0,0787	0,4087	0,0284	0,0100	0,3883	0,0180	0,0173	0,4204
	variância	0,0497	0,0642	0,0459	0,0196	0,0032	0,0032	0,0171	0,0113	0,0082
$ns=4$	média	0,0510	0,7760	0,4171	0,3846	0,7881	0,4612	0,2770	0,7812	0,4820
	vício	-0,2490	0,0760	0,6171	0,0846	0,0881	0,6612	-0,0230	0,0812	0,6820
	eqm	0,1259	0,1047	0,4397	0,0310	0,0175	0,4435	0,0219	0,0132	0,4719
	variância	0,0608	0,1048	0,0611	0,0241	0,0098	0,0076	0,0218	0,0113	0,0078
$ns=5$	média	0,0195	0,7881	0,4415	0,3912	0,7952	0,5026	0,2788	0,7909	0,5261
	vício	-0,2805	0,0881	0,6415	0,0912	0,0952	0,7026	-0,0212	0,0909	0,7261
	eqm	0,1510	0,0935	0,4665	0,0338	0,0131	0,5019	0,0217	0,0143	0,5314
	variância	0,0683	0,0962	0,0556	0,0250	0,0095	0,0078	0,0205	0,0062	0,0044

Tabela 28. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,20$, $\phi=-0,70$, $\theta=0,40$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=-0,70$ $\theta=0,40$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0329	-0,6923	-0,1625	0,0804	-0,6884	-0,1629	0,1018	-0,6898	-0,1675
	vício	-0,1671	0,0077	-0,5625	-0,1196	0,0116	-0,5629	-0,0982	0,0102	-0,5675
	eqm	0,0400	0,0019	0,3355	0,0185	0,0020	0,3212	0,0157	0,0018	0,3257
	variância	0,0121	0,0019	0,0191	0,0042	0,0018	0,0043	0,0061	0,0017	0,0036
$ns=2$	média	0,0202	-0,6927	-0,2991	0,0781	-0,6858	-0,2968	0,0842	-0,6807	-0,2929
	vício	-0,1798	0,0073	-0,6991	-0,1219	0,0142	-0,6968	-0,1158	0,0193	-0,6929
	eqm	0,0427	0,0031	0,5096	0,0203	0,0139	0,4949	0,0197	0,0282	0,4950
	variância	0,0103	0,0031	0,0201	0,0052	0,0083	0,0087	0,0062	0,0180	0,0149
$ns=3$	média	0,0117	-0,6925	-0,3768	0,0772	-0,6876	-0,3727	0,0751	-0,6841	-0,3687
	vício	-0,1883	0,0075	-0,7768	-0,1228	0,0124	-0,7727	-0,1249	0,0159	-0,7687
	eqm	0,0424	0,0040	0,6213	0,0207	0,0037	0,6020	0,0211	0,0147	0,5996
	variância	0,0070	0,0042	0,0186	0,0058	0,0036	0,0063	0,0055	0,0091	0,0097
$ns=4$	média	0,0056	-0,6918	-0,4255	0,0777	-0,6880	-0,4193	0,0690	-0,6874	-0,4168
	vício	-0,1944	0,0082	-0,8255	-0,1223	0,0120	-0,8193	-0,1310	0,0126	-0,8168
	eqm	0,0407	0,0057	0,6922	0,0216	0,0052	0,6769	0,0225	0,0051	0,6728
	variância	0,0030	0,0051	0,0133	0,0069	0,0046	0,0078	0,0055	0,0044	0,0076
$ns=5$	média	0,0106	-0,6816	-0,4422	0,0793	-0,6702	-0,4359	0,0674	-0,6773	-0,4400
	vício	-0,1894	0,0184	-0,8422	-0,1207	0,0298	-0,8359	-0,1326	0,0227	-0,8400
	eqm	0,0451	0,0077	0,7322	0,0234	0,0185	0,7102	0,0238	0,0066	0,7076
	variância	0,0089	0,0073	0,0277	0,0083	0,0176	0,0183	0,0059	0,0059	0,0089

Tabela 29. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,30$, $\phi=-0,70$, $\theta=0,40$, $re=500$.

	$d=0,30$ $\phi=-0,70$ $\theta=0,40$	BERAN			FT			FTmod		
		d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ
$ns=1$	média	0,0725	-0,6826	-0,1589	0,1704	-0,6764	-0,1578	0,1860	-0,6855	-0,1868
	vício	-0,2275	0,0174	-0,5589	-0,1296	0,0236	-0,5578	-0,1140	0,0145	-0,5868
	eqm	0,0632	0,0027	0,3354	0,0218	0,0029	0,3172	0,0191	0,0022	0,3488
	variância	0,0115	0,0024	0,0231	0,0050	0,0023	0,0061	0,0062	0,0020	0,0044
$ns=2$	média	0,0422	-0,6840	-0,3073	0,1464	-0,6796	-0,3069	0,1394	-0,6858	-0,3210
	vício	-0,2578	0,0160	-0,7073	-0,1536	0,0204	-0,7069	-0,1606	0,0142	-0,7210
	eqm	0,0752	0,0036	0,5181	0,0292	0,0034	0,5032	0,0320	0,0030	0,5233
	variância	0,0095	0,0033	0,0204	0,0067	0,0029	0,0058	0,0071	0,0027	0,0050
$ns=3$	média	0,0263	-0,6768	-0,3778	0,1344	-0,6708	-0,3736	0,1042	-0,6775	-0,3856
	vício	-0,2737	0,0232	-0,7778	-0,1656	0,0292	-0,7736	-0,1958	0,0225	-0,7856
	eqm	0,0846	0,0057	0,6334	0,0371	0,0055	0,6097	0,0460	0,0046	0,6259
	variância	0,0094	0,0054	0,0246	0,0092	0,0048	0,0085	0,0077	0,0042	0,0071
$ns=4$	média	0,0332	-0,6802	-0,4144	0,1405	-0,6805	-0,4272	0,1050	-0,6845	-0,4336
	vício	-0,2668	0,0198	-0,8144	-0,1595	0,0195	-0,8272	-0,1950	0,0155	-0,8336
	eqm	0,0863	0,0076	0,7085	0,0357	0,0059	0,7000	0,0447	0,0054	0,7081
	variância	0,0152	0,0074	0,0392	0,0105	0,0056	0,0091	0,0073	0,0051	0,0082
$ns=5$	média	0,0157	-0,6788	-0,4604	0,1370	-0,6691	-0,4495	0,0961	-0,6758	-0,4567
	vício	-0,2843	0,0212	-0,8604	-0,1630	0,0309	-0,8495	-0,2039	0,0242	-0,8567
	eqm	0,0842	0,0088	0,7570	0,0382	0,0140	0,7348	0,0489	0,0073	0,7431
	variância	0,0035	0,0082	0,0185	0,0115	0,0128	0,0149	0,0072	0,0066	0,0099

Tabela 30. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,20$, $\phi=-0,70$, $\theta=0,20$, $re=500$.

$d=0,20$ $\phi=-0,70$ $\theta=0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,0660	-0,6896	-0,2221	0,1201	-0,6886	-0,2389	0,1607	-0,6938	-0,2535
	vício	-0,1340	0,0104	-0,4221	-0,0799	0,0114	-0,4389	-0,0393	0,0062	-0,4535
	eqm	0,0369	0,0027	0,2118	0,0105	0,0023	0,1977	0,0082	0,0020	0,2099
	variância	0,0190	0,0026	0,0337	0,0041	0,0022	0,0051	0,0067	0,0020	0,0042
$ns=2$	média	0,0312	-0,6908	-0,3617	0,1025	-0,6891	-0,3651	0,1164	-0,6917	-0,3703
	vício	-0,1688	0,0092	-0,5617	-0,0975	0,0109	-0,5651	-0,0836	0,0083	-0,5703
	eqm	0,0366	0,0038	0,3338	0,0153	0,0034	0,3254	0,0143	0,0032	0,3307
	variância	0,0084	0,0038	0,0193	0,0059	0,0032	0,0065	0,0074	0,0031	0,0059
$ns=3$	média	0,0220	-0,6881	-0,4246	0,1016	-0,6865	-0,4270	0,0962	-0,6857	-0,4282
	vício	-0,1780	0,0119	-0,6246	-0,0984	0,0135	-0,6270	-0,1038	0,0143	-0,6282
	eqm	0,0409	0,0057	0,4148	0,0172	0,0044	0,4034	0,0181	0,0155	0,4084
	variância	0,0073	0,0056	0,0211	0,0069	0,0045	0,0075	0,0069	0,0100	0,0109
$ns=4$	média	0,0225	-0,6794	-0,4527	0,1037	-0,6802	-0,4607	0,0939	-0,6812	-0,4613
	vício	-0,1775	0,0206	-0,6527	-0,0963	0,0198	-0,6607	-0,1061	0,0188	-0,6613
	eqm	0,0386	0,0094	0,4560	0,0164	0,0076	0,4469	0,0178	0,0073	0,4470
	variância	0,0090	0,0089	0,0293	0,0077	0,0070	0,0104	0,0069	0,0066	0,0097
$ns=5$	média	0,0208	-0,6770	-0,4747	0,0974	-0,6776	-0,4859	0,0756	-0,6778	-0,4858
	vício	-0,1792	0,0230	-0,6747	-0,1026	0,0224	-0,6859	-0,1244	0,0222	-0,6858
	eqm	0,0488	0,0123	0,5044	0,0200	0,0082	0,4856	0,0224	0,0079	0,4837
	variância	0,0148	0,0118	0,0456	0,0090	0,0083	0,0124	0,0066	0,0079	0,0116

Tabela 31. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=l=q$, $d=0,30$, $\phi=-0,70$, $\theta=0,20$, $re=500$.

$d=0,30$ $\phi=-0,70$ $\theta=0,20$	BERAN			FT			FTmod			
	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	d	ϕ	θ	
$ns=1$	média	0,1006	-0,6767	-0,2336	0,2185	-0,6725	-0,2309	0,2666	-0,6844	-0,2708
	vício	-0,1994	0,0233	-0,4336	-0,0815	0,0275	-0,4309	-0,0334	0,0156	-0,4708
	eqm	0,0412	0,0030	0,1945	0,0108	0,0034	0,1918	0,0056	0,0080	0,2293
	variância	0,0015	0,0025	0,0065	0,0041	0,0027	0,0062	0,0045	0,0078	0,0076
$ns=2$	média	0,0668	-0,6757	-0,3547	0,1921	-0,6749	-0,3638	0,1999	-0,6863	-0,3870
	vício	-0,2332	0,0243	-0,5547	-0,1079	0,0251	-0,5638	-0,1001	0,0137	-0,5870
	eqm	0,0643	0,0057	0,3340	0,0183	0,0055	0,3292	0,0174	0,0042	0,3535
	variância	0,0096	0,0051	0,0244	0,0060	0,0049	0,0090	0,0069	0,0040	0,0070
$ns=3$	média	0,0492	-0,6778	-0,4241	0,1874	-0,6699	-0,4246	0,1686	-0,6870	-0,4473
	vício	-0,2508	0,0222	-0,6241	-0,1126	0,0301	-0,6246	-0,1314	0,0130	-0,6473
	eqm	0,0691	0,0077	0,4122	0,0199	0,0185	0,4084	0,0244	0,0059	0,4275
	variância	0,0075	0,0070	0,0246	0,0077	0,0171	0,0184	0,0082	0,0053	0,0092
$ns=4$	média	0,0509	-0,6566	-0,4308	0,1912	-0,6579	-0,4496	0,1552	-0,6706	-0,4663
	vício	-0,2491	0,0434	-0,6308	-0,1088	0,0421	-0,6496	-0,1448	0,0294	-0,6663
	eqm	0,0756	0,0117	0,4411	0,0201	0,0159	0,4384	0,0287	0,0082	0,4555
	variância	0,0160	0,0103	0,0434	0,0089	0,0141	0,0171	0,0077	0,0073	0,0109
$ns=5$	média	0,0438	-0,6580	-0,4613	0,1792	-0,6631	-0,4828	0,1362	-0,6703	-0,4922
	vício	-0,2562	0,0420	-0,6613	-0,1208	0,0369	-0,6828	-0,1638	0,0297	-0,6922
	eqm	0,0782	0,0158	0,4793	0,0241	0,0141	0,4776	0,0331	0,0112	0,4875
	variância	0,0151	0,0149	0,0499	0,0102	0,0122	0,0176	0,0074	0,0103	0,0150

5.3 Modelos ARFIMA($1,d,0$) e ARFIMA($0,d,1$)

Na estimação dos parâmetros nos processos ARFIMA($1,d,0$) e ARFIMA($0,d,1$) com adição de ruído, conforme o caso, utilizamos $\phi=-0,7$ ou $\theta=-0,7$ e $d \in \{0,2;0,3\}$ para $ns \in \{1,2,\dots,5\}$.

As Tabelas 32 e 33, apresentadas a seguir, mostram os resultados das simulações obtidas.

Tabela 32. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1$, $q=0$, $d \in \{0,2;0,3\}$, $\phi=-0,70$, $re=500$.

$\phi=-0,70$	$d=0,20$						$d=0,30$						
	BERAN		FT		FTmod		BERAN		FT		FTmod		
	d	ϕ	d	ϕ	d	ϕ	d	ϕ	d	ϕ	d	ϕ	
$ns=1$	média	0,1597	-0,4883	0,2574	-0,4621	0,3389	-0,4336	0,2109	-0,4762	0,3368	-0,4447	0,4239	-0,4024
	vício	-0,0403	0,2117	0,0574	0,2379	0,1389	0,2664	-0,0891	0,2238	0,0368	0,2553	0,1239	0,2976
	eqm	0,0025	0,0466	0,0055	0,0584	0,0228	0,0730	0,0090	0,0518	0,0034	0,0669	0,0179	0,0902
	variância	0,0011	0,0016	0,0021	0,0015	0,0029	0,0015	0,0011	0,0017	0,0022	0,0015	0,0025	0,0015
$ns=2$	média	0,1233	-0,3727	0,2441	-0,3380	0,2842	-0,3229	0,1601	-0,3595	0,3184	-0,3190	0,3534	-0,2951
	vício	-0,0767	0,3273	0,0441	0,3620	0,0842	0,3771	-0,1399	0,3405	0,0184	0,3810	0,0534	0,4049
	eqm	0,0070	0,1091	0,0050	0,1329	0,0107	0,1439	0,0210	0,1186	0,0033	0,1475	0,0056	0,1660
	variância	0,0012	0,0021	0,0031	0,0016	0,0036	0,0016	0,0012	0,0021	0,0030	0,0017	0,0031	0,0016
$ns=3$	média	0,1006	-0,2982	0,2335	-0,2625	0,2490	-0,2556	0,1285	-0,2879	0,3078	-0,2484	0,3089	-0,2350
	vício	-0,0994	0,4018	0,0335	0,4375	0,0490	0,4444	-0,1715	0,4121	0,0078	0,4516	0,0089	0,4650
	eqm	0,0111	0,1639	0,0055	0,1931	0,0073	0,1992	0,0303	0,1719	0,0042	0,2053	0,0036	0,2179
	variância	0,0014	0,0023	0,0043	0,0016	0,0048	0,0015	0,0013	0,0024	0,0041	0,0017	0,0036	0,0017
$ns=4$	média	0,0822	-0,2504	0,2243	-0,2183	0,2196	-0,2160	0,1059	-0,2363	0,2969	-0,2000	0,2729	-0,1922
	vício	-0,1178	0,4496	0,0243	0,4817	0,0196	0,4840	-0,1941	0,4637	-0,0031	0,5000	-0,0271	0,5078
	eqm	0,0155	0,2052	0,0062	0,2339	0,0061	0,2360	0,0390	0,2161	0,0046	0,2501	0,0051	0,2580
	variância	0,0014	0,0025	0,0057	0,0016	0,0058	0,0015	0,0014	0,0024	0,0047	0,0015	0,0045	0,0015
$ns=5$	média	0,0698	-0,2107	0,2146	-0,1810	0,1998	-0,1824	0,0918	-0,2014	0,2825	-0,1667	0,2510	-0,1646
	vício	-0,1302	0,4893	0,0146	0,5190	-0,0002	0,5176	-0,2082	0,4986	-0,0175	0,5333	-0,0490	0,5354
	eqm	0,0185	0,2430	0,0072	0,2716	0,0063	0,2702	0,0447	0,2507	0,0075	0,2856	0,0081	0,2879
	variância	0,0016	0,0025	0,0072	0,0015	0,0066	0,0015	0,0015	0,0028	0,0074	0,0017	0,0059	0,0018

Tabela 33. Estimação no processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, quando $p=0$, $q=1$, $d \in \{0,2;0,3\}$, $\theta=-0,70$, $re=500$.

$\theta=-0,70$		$d=0,20$						$d=0,30$					
		BERAN		FT		FTmod		BERAN		FT		FTmod	
		d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ	d	θ
$ns=1$	média	0,1614	-0,2584	0,2899	-0,2810	0,3665	-0,3084	0,2549	-0,2243	0,4225	-0,2704	0,4630	-0,3046
	vício	-0,0386	0,4416	0,0899	0,4190	0,1665	0,3916	-0,0451	0,4757	0,1225	0,4296	0,1630	0,3954
	eqm	0,0027	0,1974	0,0102	0,1773	0,0303	0,1546	0,0032	0,2295	0,0170	0,1867	0,0278	0,1580
	variância	0,0012	0,0018	0,0022	0,0013	0,0024	0,0011	0,0012	0,0019	0,0020	0,0013	0,0010	0,0010
$ns=2$	média	0,1448	-0,1557	0,3116	-0,1916	0,3430	-0,2088	0,2298	-0,1176	0,4360	-0,1860	0,4404	-0,2051
	vício	-0,0552	0,5443	0,1116	0,5084	0,1430	0,4912	-0,0702	0,5824	0,1360	0,5140	0,1404	0,4949
	eqm	0,0089	0,3048	0,0157	0,2604	0,0237	0,2430	0,0108	0,3462	0,0209	0,2653	0,0216	0,2458
	variância	0,0058	0,0076	0,0032	0,0014	0,0032	0,0012	0,0060	0,0075	0,0023	0,0013	0,0017	0,0012
$ns=3$	média	0,1278	-0,1068	0,3135	-0,1469	0,3152	-0,1570	0,2173	-0,0635	0,4467	-0,1449	0,4264	-0,1534
	vício	-0,0722	0,5932	0,1135	0,5531	0,1152	0,5430	-0,0827	0,6365	0,1467	0,5551	0,1264	0,5466
	eqm	0,0132	0,3620	0,0168	0,3072	0,0173	0,2960	0,0150	0,4135	0,0239	0,3099	0,0183	0,3008
	variância	0,0080	0,0097	0,0038	0,0012	0,0039	0,0012	0,0102	0,0115	0,0024	0,0011	0,0020	0,0011
$ns=4$	média	0,1149	-0,0806	0,3180	-0,1203	0,3001	-0,1244	0,2005	-0,0364	0,4485	-0,1208	0,4053	-0,1226
	vício	-0,0851	0,6194	0,1180	0,5797	0,1001	0,5756	-0,0995	0,6636	0,1485	0,5792	0,1053	0,5774
	eqm	0,0127	0,3917	0,0186	0,3376	0,0143	0,3332	0,0213	0,4560	0,0245	0,3372	0,0137	0,3355
	variância	0,0056	0,0071	0,0050	0,0013	0,0043	0,0013	0,0116	0,0133	0,0022	0,0010	0,0023	0,0011
$ns=5$	média	0,0969	-0,0717	0,3168	-0,1046	0,2729	-0,1067	0,1818	-0,0252	0,4468	-0,1056	0,3880	-0,1022
	vício	-0,1031	0,6283	0,1168	0,5954	0,0729	0,5933	-0,1182	0,6748	0,1468	0,5944	0,0880	0,5978
	eqm	0,0161	0,4053	0,0187	0,3566	0,0104	0,3543	0,0233	0,4680	0,0237	0,3541	0,0100	0,3580
	variância	0,0036	0,0047	0,0052	0,0014	0,0049	0,0013	0,0077	0,0093	0,0026	0,0013	0,0025	0,0014

Nesses processos a estimativa dos parâmetros fica comprometida em todos os estimadores. De modo geral, conforme ns aumenta o valor estimado em módulo vai decrescendo para todos os parâmetros. Os três estimadores captam o verdadeiro sinal do parâmetro, seja ele ϕ ou θ , mas não alcançam estimativas próximas do real valor do parâmetro. Enquanto o estimador Beran acaba subestimando o valor do parâmetro d , os estimadores FT e FTmod, na maioria dos casos, superestimam tal valor. Nessas situações, ou seja, nos processos ARFIMA($1,d,0$) e ARFIMA($0,d,1$) com adição de ruído, nenhum dos estimadores estudados é eficaz.

Capítulo 6

Conclusões

Podemos concluir que para o caso dos processos ARFIMA(0,d,0) onde o ruído contaminante segue uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ o melhor estimador é o FT. Os demais estimadores apresentam valores estimados decrescendo conforme ns aumenta, enquanto que o estimador FT consegue obter uma boa estimativa para o real valor do parâmetro independente do valor de ns . Nos processos VE-ARFIMA(0,d,0), ou seja, quando o ruído contaminante segue uma distribuição $Log(\chi_1^2)$ o melhor estimador nessa situação é o FTmod que, embora subestime o real valor do parâmetro, é o que apresenta o menor viés para os diferentes valores do parâmetro d simulados.

Já para os processos ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído onde $p=l=q$ temos problemas na estimação quando ϕ e θ apresentam sinais opostos, onde nenhum estimador avaliado conseguiu obter resultados satisfatórios. Nos casos em que ϕ e θ apresentam o mesmo sinal, os estimadores FT e FTmod acabam se equivalendo, enquanto que o estimador Beran subestima demais o real valor do parâmetro d .

Nos processos ARFIMA(1,d,0) e ARFIMA(0,d,1) com adição de ruído, os três estimadores testados conseguem captar o verdadeiro sinal dos parâmetros ϕ e θ , conforme o caso. No entanto, nenhum deles apresentou bons resultados.

É importante ressaltar que todos os estimadores utilizados nesse trabalho foram propostos para a estimação de processos ARFIMA. Nesse estudo utilizamos esses estimadores sem qualquer adaptação para estimar os parâmetros de um processo VE-ARFIMA ou ARFIMA com adição de ruído, ou seja, um processo modificado, o qual a série gerada foi contaminada por um ruído. Dessa forma era esperado que as estimativas obtidas não fossem tão boas quanto as obtidas caso o processo gerado fosse decorrente de um processo ARFIMA não contaminado. De toda forma, os resultados obtidos nos processos ARFIMA(0,d,0) quando o ruído contaminante segue uma distribuição $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ foram satisfatórios, onde um dos

estimadores testados obteve estimativas boas para o real valor do parâmetro d independente do valor da variância dessa distribuição contaminante.

Referências Bibliográficas

- [1] Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall, New York.
- [2] Breidt, F. J., N. Crato e P. de Lima (1998). “The Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility”. *Journal of Econometrics*, **83**: 325-348.
- [3] Brockwell, P. J. e R. A. Davis (1991). *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Chiepp, L. O. (2003). “Testes de Ajustamento de Modelos em Processos com Longa Dependência”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [5] Crato, N. e B. K. Ray (2002). “Semi-parametric smoothing estimators for long-memory processes with added noise”. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **105**:283-297.
- [6] Ferraz, R. O. (2003). “Estimação por Máxima Quase-Verossimilhança no Domínio do Tempo de Modelos de Volatilidade Estocástica com Memória Longa”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Computação Científica da UNICAMP, Campinas.
- [7] Fox, R. e M. S. Taquq (1986). “Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary gaussian time series”. *The Annals of Statistics*, **14**(2): 517-532.
- [8] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). “The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models”. *Journal of Time Series Analysis*, **4**(4): 221-238.
- [9] Hatadani, I. M. (2004). “Estimação de Parâmetros em Modelos ARFIMA”. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Computação Científica da UNICAMP, Campinas

- [10] Hosking, J. R. M. (1981). “Fractional Differencing”. *Biometrika*, **68**(1):165-167.
- [11] Klüppelberg, C. e T. Mikosch (1992). “Some Limit Theory for the Normalized Periodogram of p-stable Moving Average Processes”. *Stochastic Processes and Their Applications*, **47**:323-344.
- [12] Lopes, S. R. C., B. P. Olbermann e V.A. Reisen (2002). “Nonstationary Gaussian ARFIMA Processes: Estimation and Application”. *Brazilian Review of Econometrics*, **22**: 103-126.
- [13] Machado, M. S.; C. Bisognin; R. R. Linhares e S. R. C. Lopes (2009). “Estimação em Processos ARFIMA Não-Estacionários”.
- [14] Morettin, P. A. e C. M Toloi (2004). *Análise de Séries Temporais*. Blücher, São Paulo.
- [15] Morettin, P. A. (2006). *Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. ABE, São Paulo.
- [16] Palma, W. (2007). *Long Memory Time Series: Theory and Methods*. John Wiley & Sons Inc., New Jersey.
- [17] Reisen, V.A., M. R. Sena Jr. e S. R. C. Lopes (2001). “Error and Model Misspecification in ARFIMA Processes”. *Brazilian Review of Econometrics*, **21**(1):101-135.

Anexo A

A.1 Função Periodograma

Nesta seção definimos a função periodograma, função periodograma suavizado de covariâncias e a função periodograma modificada, utilizadas nos estimadores apresentados no Capítulo 4. Tais funções são estimadores para a função densidade espectral de processos estacionários.

Definição A.1: Seja $\{X_t\}_{t=0}^n$ uma série temporal com n observações de um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A densidade espectral do processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ pode ser estimado pela função periodograma, denotada por $I(\cdot)$, e definida por

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right|^2, \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

Outra forma de se definir a função periodograma é a apresentada a seguir

Definição A.2: Seja $\{X_t\}_{t=0}^n$ uma série temporal com n observações obtida de um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A função periodograma, denotada por $I(\cdot)$ é definida por

$$I(\omega) = 2 \left[\hat{\gamma}_X(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k) \right], \quad \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde $\hat{\gamma}_X(\cdot)$ é a função de autocovariância amostral do processo $\{X_t\}_{t=0}^n$.

Como a função periodograma é um estimador não viciado, mas não consistente da função densidade espectral $f_X(\cdot)$. A seguir apresentamos um estimador não viciado e consistente para a função densidade espectral denominado de função periodograma suavizado de covariâncias.

Definição A.3: A função periodograma suavizado, denotada por $I_S(\cdot)$, satisfaz a equação

$$I_S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq m_p} \lambda\left(\frac{k}{m_p}\right) \hat{\gamma}_X(k) \cos(\omega k), \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

onde $\lambda(\cdot)$ é uma função de ponderação conhecida como janela espectral, sendo m_p o ponto de truncamento da função, o qual depende do tamanho amostral n . Nesse trabalho utilizamos a Janela de Bartlett, cuja expressão é dada por

$$\lambda(x) = \begin{cases} (1 - |x|), & \text{se } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

O ponto de truncamento da Janela de Bartlett é o valor $m_p = n^\tau$, onde $0 < \tau < 1$. Nesse trabalho consideramos $\tau = 0,9$, valor comumente fixado em estudos anteriores.

A seguir, definimos a função periodograma modificado definido por Klüppelberg e Mikosch (1994) para processos ARFIMA(p, d, q) α -estáveis, isto é, com variância infinita.

Definição A.4: Seja $\{X_t\}_{t=0}^n$ uma série temporal obtida a partir de um processo $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. A função periodograma normalizado $I_N(\cdot)$ da série temporal é definida por

$$I_N(\omega) = \left(\sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right|^2, \quad \omega \in [-\pi, \pi],$$

onde $\hat{\rho}_X(\cdot)$ é a função de autocorrelação amostral da série temporal dada por

$$\hat{\rho}_X(h) = \left(\sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{n-|h|} X_t X_{t+|h|} \right)$$

Maiores detalhes podem ser encontrados em Brockwell e Davis (1991), Morettin e Toloi (2004) e Klüppelberg e Mikosch (1994).

Anexo B

B.1 Convergência do Valor Estimado Quanto ao Número de Replicações

Nas simulações apresentadas no Capítulo 5 desse trabalho utilizamos o número de replicações de 1000 para a estimação dos processos VE-ARFIMA(0,d,0) e ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído e de 500 para os processos ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído.

Para verificar se esse número de replicações utilizado é suficiente para identificar o verdadeiro valor estimado, apresentamos agora um breve estudo a respeito de tal situação.

Primeiramente no caso dos processos VE-ARFIMA(0,d,0) e ARFIMA(0,d,0) com adição de ruído, verificamos conforme as Tabelas 1 a 12 que a variância de cada estimador não costuma ser superior ao valor 0,10. Sendo que o estimador GPH é o que apresenta maiores valores de variância. Dessa forma escolhemos esse estimador com a utilização da metodologia MM e com $\alpha=0,40$, quando o parâmetro $d=0,20$ e $ns=1$ para essa primeira análise. Para melhor visualização, extraímos o resultado descrito da Tabela 4 e o colocamos isoladamente na Tabela B1, apresentada a seguir.

Tabela B1. Estimador GPH-MM com $\alpha=0,40$ e $d=0,20$ no processo ARFIMA (0,d,0) com adição de ruído

$d=0,20$	$\alpha=0,40$ GPH - MM
média	0,2011
vício	0,0011
eqm	0,0943
variância	0,0944

A Figura B1 mostra o gráfico do valor médio estimado conforme o número de replicações vai aumentando. Estipulamos nessa análise a tolerância de 10% para mais ou para menos sobre o valor estimado, ou seja, como o valor estimado médio nesse caso foi de 0,2011, temos os limites inferior e superior de, respectivamente 0,1810 e 0,2212. Dessa forma qualquer valor dentro desse intervalo está adequado para o nosso estudo.

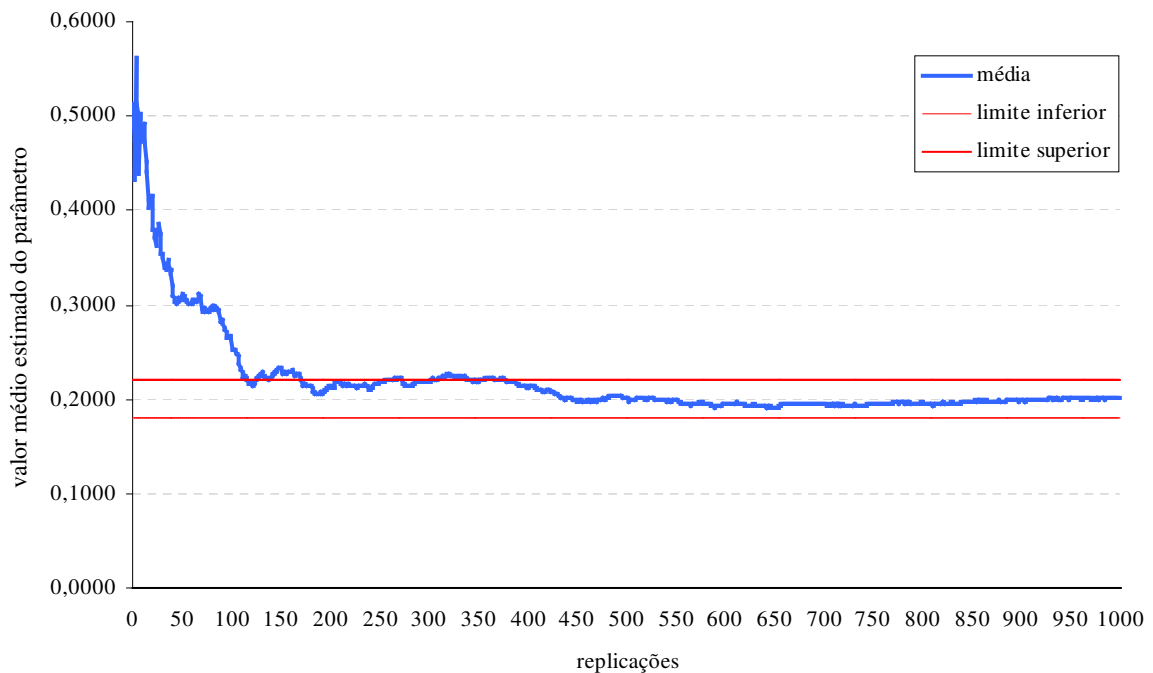


Figura B1: Convergência do valor médio estimado para o parâmetro d quanto ao número de replicações para o estimador GPH-MM-0,40 quando $d=0,20$

De análise da figura apresentada é fácil verificar que após cerca de 400 replicações o valor estimado permanece dentro dos limites estabelecidos indicando a convergência do valor.

Agora vamos analisar um caso de estimação do processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído, onde $p=1=q$, com $\phi=-0,7$ e $\theta=-0,4$, quando $ns=1$ e $d=0,30$ no estimador Beran. Escolhemos esse caso pois a variância das estimativas foi bastante alta chegando a cerca de 0,29 para a estimativa de ϕ . Para melhor visualização extraímos o resultado descrito na Tabela 21 e o colocamos isoladamente na Tabela B2, apresentada a seguir.

Tabela B2. Estimador Beran para $d=0,30$ no processo ARFIMA (p,d,q) com adição de ruído, quando $p=1=q$, com $\phi=-0,70$ e $\theta=-0,4$.

$d=0,30$ $\phi=-0,70$ $\theta=-0,40$	BERAN
	ϕ
média	-0,4544
vício	0,2456
eqm	0,3499
variância	0,2901

Novamente estipulamos o limite de tolerância de 10% para mais ou para menos sobre o valor estimado, ou seja, como o valor estimado médio nesse caso para o parâmetro ϕ foi de $-0,4544$, temos os limites inferior e superior de, respectivamente $-0,4999$ e $-0,4090$. Dessa forma qualquer valor dentro desse intervalo está adequado para o nosso estudo. O gráfico de convergência é apresentado na Figura B2.

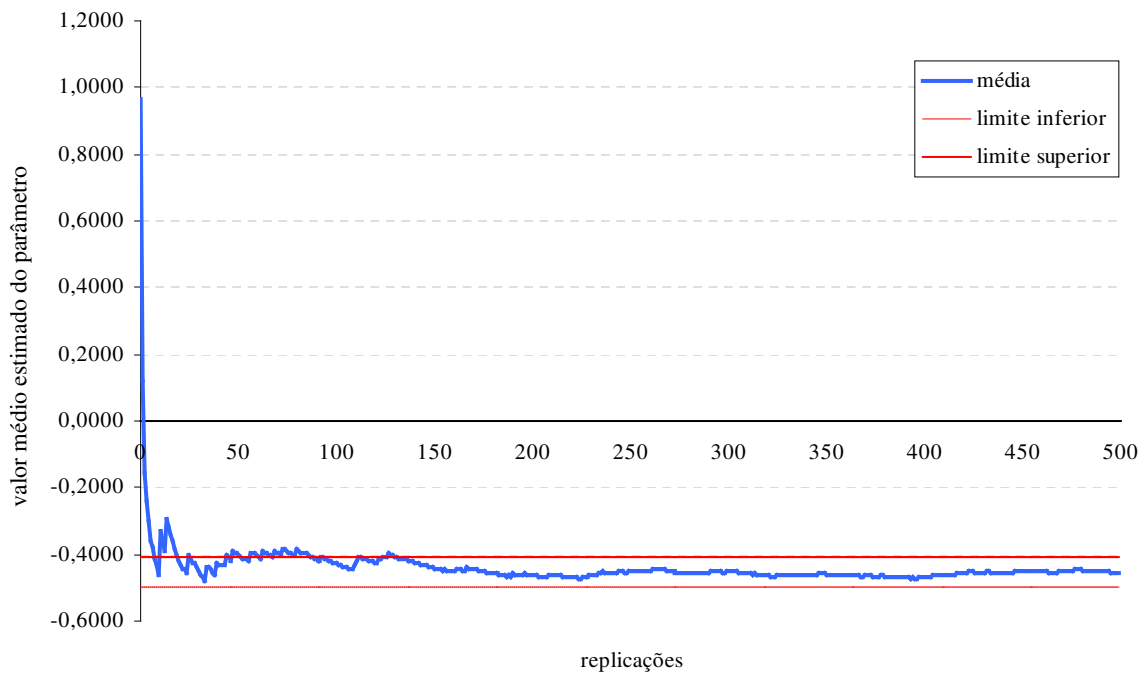


Figura B2: Convergência do valor médio estimado para o parâmetro ϕ quanto ao número de replicações para o estimador Beran quando $d=0,30$

De análise da figura apresentada verificamos que após cerca de 150 replicações o valor médio estimado permanece dentro dos limites estabelecidos indicando a convergência do valor. Dessa forma, o número de replicações igual a 500 que foi utilizado nas simulações do processo ARFIMA(p,d,q) com adição de ruído se mostra bem adequado.

Não é objetivo desse trabalho aprofundar a discussão sobre esse assunto, apenas queremos demonstrar que o número de replicações utilizados nas simulações foi coerente e não prejudicou de qualquer forma na análise dos estimadores propostos nesse estudo.