

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

**A INTERAÇÃO BÁRION-BÁRION  
NA APROXIMAÇÃO DE ESTADO LIGADO  
AO MODELO DE SKYRME**

Gilberto Lima Thomas

Tese realizada sob orientação da Dra. Victoria E. Herscovitz e co-orientação do Dr. Norberto N. Scoccola, apresentada ao Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre, março de 2000

Aos meus filhos,  
Bruno, Isadora e Natália.

## Agradecimentos

Aos Profs. Victoria E. Herscovitz e Norberto N. Scoccola pela orientação e discussões que conduziram a este trabalho.

A Carlos L. Schat, pela acolhida e pelas discussões portenhas.

Aos colegas e amigos Eliane A. Veit e Paulo M. Mors pelo constante incentivo.

A Carlos H. Mancuso Jr., o grande amigo das horas difíceis.

A Zuleika Berto pela correção bibliográfica.

E aos familiares e amigos que me ajudaram a concluir este trabalho.

## Resumo

Estudamos, neste trabalho, em uma das extensões do modelo de Skyrme a  $SU(3)$  – a aproximação de estado ligado – o setor estranho de número bariônico igual a 2.

Analizamos situações em que os dois bárions envolvidos são ligados, constituindo o que conhecemos como *dibárions*, e em que dois bárions livres são simplesmente espalhados.

No primeiro caso o espectro dos dibárions é calculado com o uso da configuração axialmente simétrica generalizada, sendo comparado com o obtido no modelo não relativístico de quarks. É feita, também, uma predição sobre a existência da partícula  $H$ .

No segundo caso desenvolvemos, com o uso da configuração produto, um formalismo para o estudo da interação bárion-bárion, calculando o potencial correspondente. Expressões detalhadas e resultados numéricos são apresentados para a interação  $\Lambda N$ , com as componentes central, spin-spin e tensorial do potencial sendo obtidas e comparadas com outros resultados fenomenológicos.

## Abstract

In this work we study, in the framework of the bound state approach to the  $SU(3)$  Skyrme model, the baryonic number-two strange sector.

We analyze situations where the two baryons involved are bound to form the so called dibaryons and where two free baryons are simply scattered.

In the first case, with the help of the generalized axially symmetric ansatz, the dibaryon spectrum is calculated and compared with the one obtained in the non relativistic quark model. A prediction about the existence of the  $H$ -particle is also made.

In the second case we have used the product ansatz to develop a formalism to study the baryon-baryon interaction, calculating the corresponding potential. Detailed expressions and numeric results are presented for the  $\Lambda N$  interaction, with the central, spin-spin and tensor components of the potential being obtained and compared with other phenomenological results.

# SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b> . . . . .	8
<b>2. O Modelo</b> . . . . .	16
2.1 Modelo de Skyrme . . . . .	16
2.2 Extensões a $SU(3)$ . . . . .	23
2.3 Aproximação de estado ligado . . . . .	25
2.4 Alguns resultados numéricos . . . . .	34
<b>3. Dibárions</b> . . . . .	37
3.1 Estados ligados . . . . .	38
3.2 Configuração axialmente simétrica . . . . .	40
3.3 Autofunções dos dibárions . . . . .	45
3.4 Resultados e discussão . . . . .	52
3.5 Conclusões . . . . .	57
<b>4. Interação <math>\Lambda N</math></b> . . . . .	59
4.1 Interação bárion-bárion . . . . .	60
4.2 Lagrangeano de interação híperon-núcleon na aproximação produto . . . . .	62

---

4.3	Potencial $\Lambda N$ na aproximação adiabática . . . . .	68
4.3.1	Contribuições diretas . . . . .	69
4.3.2	Contribuições de troca . . . . .	71
4.4	Resultados e discussão . . . . .	73
4.5	Conclusões . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Comentários Finais . . . . .</b>	<b>83</b>
 <b>Apêndices</b>		
<b>A.</b>	<b>O setor <math>SU(2)</math> . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>B.</b>	<b><math>V^{ef}</math> em <math>AEL</math> para <math>B = 1</math> . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>C.</b>	<b>Funções de onda dos híperons . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>D.</b>	<b>Regras de quantização e isospin dos dibárions . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>E.</b>	<b>Elementos de matriz coletivos . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>F.</b>	<b>Formas explícitas para <math>\mathcal{L}_4^k</math> . . . . .</b>	<b>110</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>121</b>

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Em 1961, T. H. R. Skyrme inicia a publicação de um conjunto de trabalhos em que descreve os bárions a partir de uma densidade lagrangeana quiral não-linear, à qual concorrem somente campos mesônicos [1, 2, 3].

A hipótese fundamental do modelo é a de que os bárions emergem como *sólitons topológicos* estáveis, o que é corroborado pela identificação da carga topológica conservada do modelo com o número bariônico.

A idéia de férmions gerados a partir de bósons não é, porém, levada muito a sério na época e o modelo é esquecido por mais de duas décadas.

Poucos anos depois surge o *modelo de quarks*, proposto independentemente por Gell-Mann [4] e Zweig [5], em que os bárions são compostos por três quarks (férmions) e os mésons por um par quark-antiquark. Experimentos em espalhamento profundamente inelástico mostram que, de fato, a estrutura dos bárions compreende subestruturas de cargas localizadas.

Nos anos 70 surge a *Cromodinâmica Quântica – CDQ*, uma teoria de calibre não-abeliana no grupo  $SU(3)$  de cor, hoje aceita como a teoria fundamental para as interações fortes. Em *CDQ* os hádrons são estruturas complexas compostas por quarks (férmions constituintes dos campos de matéria) que interagem intermediados por glúons (bósons de calibre) (vide, p. ex., [6]).



Processos de espalhamento na região de grande momentum transferido são calculados com muito sucesso em *CDQ*. Isto se deve ao fato de, a curtas distâncias, a teoria apresentar *liberdade assintótica*, ou seja, nesta região as constantes de acoplamento quark–glúon são pequenas. Deste modo, o tratamento com técnicas perturbativas desenvolvidas para a *Eletrodinâmica Quântica (EDQ)* pode ser usado no regime de pequenas distâncias (vide, p. ex., [7]).

Entretanto, na região de grandes distâncias (pequeno momentum transferido), que é, em geral, a região de interesse para a física nuclear e onde ocorrem fenômenos como *confinamento* e *quebra da simetria quiral*, as técnicas perturbativas tradicionais não podem ser usadas pois as constantes de acoplamento são grandes e não é adequado tratá-las como parâmetros de expansão.

Defrontamo-nos, então, com uma situação um tanto insólita: temos à disposição uma densidade lagrangeana que, em princípio, contém toda a dinâmica do sistema, mas não somos capazes de extrair da mesma as informações físicas de interesse, como propriedades e interações hadrônicas, por exemplo, para comparação com a grande quantidade de dados experimentais acumulados.

Várias abordagens à *CDQ* têm sido desenvolvidas na tentativa de resolver suas equações de movimento. Destas, uma, a *teoria de calibre na rede*, de fato consegue tal objetivo (vide, p. ex., [8]), tendo, porém, seus próprios problemas. Além da exigência de supercomputadores com *gigaflops* de velocidade de processamento para a execução de cálculos razoáveis em tempos aceitáveis, ocorrem, por exemplo, problemas com a inclusão de férmions numa rede discreta, de modo que aproximações, mesmo aqui, são necessárias.

Uma alternativa em física hadrônica é, então, propor modelos descritos por densidades lagrangeanas mais simples mas que contemplem as caracterís-

tivas básicas da  $CDQ$  e que sejam matematicamente acessíveis para descrever as propriedades dos hádrons a baixas energias.

't Hooft [9, 10] propõe generalizar a  $CDQ$  no número de cores,  $N_c$ , do valor físico ( $N_c = 3$ ) para um valor arbitrário grande, i.e.,  $SU(3) \rightarrow SU(N_c)$ . Desta forma o inverso,  $1/N_c$ , pode ser usado como parâmetro de expansão, inclusive no caso de interesse físico,  $N_c = 3$ . A idéia é que a teoria pode se tornar mais simples no limite  $N_c \rightarrow \infty$ , uma vez que nesta situação apenas uma classe especial de diagramas de Feynman, os diagramas *planares*, sobrevive.

Seguindo esta linha, Witten, levando em consideração as propriedades de simetria quiral, unitariedade e confinamento mostra [11] que, em tal limite, a  $CDQ$  é equivalente a uma teoria efetiva de mésons fracamente interagentes, da qual os bárions emergem como soluções solitônicas<sup>1</sup> das equações de Euler-Lagrange estáticas caracterizadas pelo número bariônico ( $B$ ).

Esta é, contudo, a idéia apresentada por Skyrme, antes da introdução dos quarks e glúons e do surgimento da  $CDQ$ .

A revisitação ao modelo de Skyrme, tendo em vista sua conexão com a  $CDQ$ , ocorreu no início dos anos 80. Adkins, Nappi e Witten aplicaram o modelo original de Skyrme ao cálculo de observáveis do núcleon e da delta [12]. O relativo sucesso de suas previsões fez renascer, com alguma intensidade, o interesse no modelo, seus principais resultados podendo ser encontrados, por exemplo, em [13, 14].

Respeitando as propriedades de simetria da  $CDQ$ , como a simetria quiral e sua quebra espontânea, o modelo foi ampliado ao longo do tempo, com o objetivo de melhor descrever os resultados experimentais. É o que ocorre, por exemplo, com a inclusão na densidade lagrangeana da contribuição dos

---

<sup>1</sup> Soluções ondulatórias de equações diferenciais não-lineares que se propagam sem dispersar energia e preservando a forma mesmo após colisões.

mésons vetoriais leves  $\rho(770)$  e  $\omega(783)$ , que permitem a descrição dos acoplamentos mesônicos vetoriais e trazem à tona a fenomenologia da *dominância mesônica vetorial* (vide, p. ex., [15, 16]).

Após a aplicação na determinação das propriedades individuais dos hádrons não-estranhos, o modelo original em  $SU(2)$  de sabor foi utilizado para descrever a interação núcleon-núcleon ( $NN$ ). Embora recorrendo a algumas hipóteses simplificadoras, o modelo contabilizou alguns importantes sucessos como os da descrição da interação de troca de um pión a longas distâncias [3], da repulsão de curto alcance [17] e da interação spin-órbita dependente de isospin [18]. A atração central de médio alcance da interação  $NN$ , entretanto, não é reproduzida em intensidade, falha esta imputada à inexistência de contribuições oriundas das flutuações quânticas do campo piônico.

Soluções alternativas, como a da inclusão explícita de um campo mesônico escalar na densidade lagrangeana [19, 20], ou a construção de um hamiltoniano específico para o sistema  $NN$  com expansão tanto na constante de acoplamento como no alcance da interação [21], conseguem reproduzir, em boa parte, a atração central intermediária. (Vide, contudo, a nota de rodapé 2.)

Uma análise preliminar nossa [22] para estudar a interação  $NN$  no contexto de mecanismos de estabilização alternativos [23] para o skyrmion indica que estes podem simplificar bastante os cálculos estimativos da força entre os núcleons.

O modelo em  $SU(2)$  de sabor descreve os bárions não-estranhos. Uma descrição que abarque também os bárions estranhos (híperons) conduz à extensão do modelo ao grupo  $SU(3)$ , propiciando o estudo do octeto e do decupletos bariônicos completos (Fig. 1.1). Embora nas primeiras abordagens, onde as variáveis de isospin e estranheza são tratadas da mesma forma, os multipletos bariônicos estejam corretamente reproduzidos no limite quiral, o

cálculo das massas dos híperons mais leves, no regime de quebra de simetria quiral, apresenta resultados insatisfatórios [24, 25, 26].

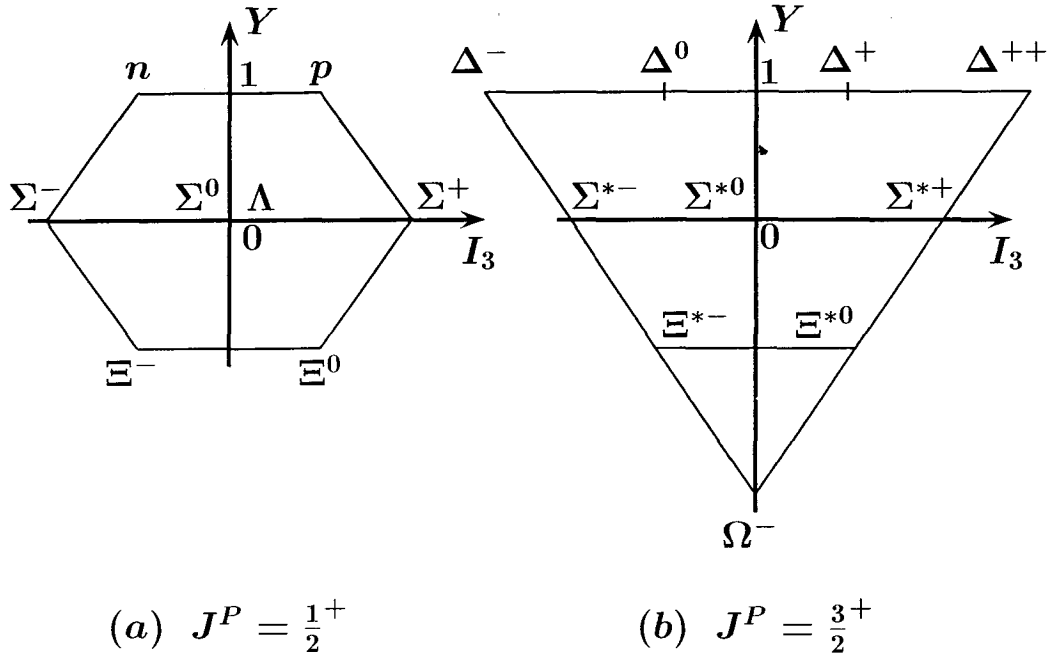


Fig. 1.1: Representações  $SU(3)$  de sabor do octeto (a) e decupeto (b) bariônicos. Os bárions estão caracterizados pelos números quânticos  $I_3$  (projeção do isospin) e  $Y$  (hipercarga).

Atualmente são duas as aproximações de modelo que melhor reproduzem as propriedades dos bárions estranhos. Uma delas é o *modelo de coordenadas coletivas - MCC* [27], em que se admite que a simetria de sabor é exata para todo o  $SU(3)$  (limite quiral), em que os graus de liberdade de spin, isospin e estranheza são tratados como coordenadas coletivas e em que o hamiltoniano resultante é exatamente diagonalizado. A outra é a *aproximação de estado ligado - AEL (bound state approach)* [28], que trata os graus de liberdade de estranheza como vibracionais [29, 30]. O progresso obtido na extensão deste modelo pode ser acompanhado em [31, 32, 33].

A análise da qualidade dos modelos impõe que se investigue, ainda, as características da interação básica entre bárions. Resultados relativos ao *MCC* podem ser encontrados em [34, 35, 36].

O presente trabalho versa sobre a *aproximação de estado ligado – AEL* – e sua aplicação ao estudo da interação de sistemas bariônicos estranhos caracterizados pelo número bariônico  $B = 2$ . São estudados, como casos típicos da interação bárion–bárion, sistemas ligados de duas partículas e a formulação do potencial híperon–núcleon.

No Cap. 2 são apresentados um resumo sobre o modelo de Skyrme original em  $SU(2)$  e uma revisão sobre a *AEL*.

Os Caps. 3 e 4 compreendem nossas contribuições ao assunto. Especificamente a aplicação da *AEL* a sistemas ligados, os *dibárions*, é objeto do Cap. 3, sendo o espectro dos mesmos [37] obtido com a hipótese de *interação axialmente simétrica* [38], que reproduz a configuração toroidal de mais baixa energia do sóliton com  $B = 2$ , conforme numericamente determinado na Ref. [39]. Em particular, é realizada uma predição sobre a existência da partícula *H*.

No Cap. 4, a densidade lagrangeana da interação bárion–bárion na aproximação *AEL* é formulada especificamente para o sistema híperon–núcleon [40], com vistas à determinação do potencial correspondente. Com o auxílio da *configuração produto* que, utilizada em  $SU(2)$  para o estudo da interação *NN* [17, 41, 42], se revela adequada para descrever a interação entre as partículas a médias<sup>2</sup> e grandes distâncias, obtém-se as componentes central, spin–spin e tensorial do potencial, dependentes ou não de isospin. Como aplicação, são apresentadas predições numéricas para a interação  $\Lambda N$ .

A utilização de configurações distintas para cada aplicação da *AEL* pode

---

<sup>2</sup> Na Ref. [43] mostra-se, entretanto, que uma nova configuração permite corrigir a falta de atração a médias distâncias no canal escalar do potencial *NN*.

ser entendida com o auxílio da Fig. 1.2, extraída da Ref. [44]. A figura mostra uma seqüência de quatro tomadas resultantes de cálculo de um evento de espalhamento sóliton-sóliton (caso  $NN$ ).

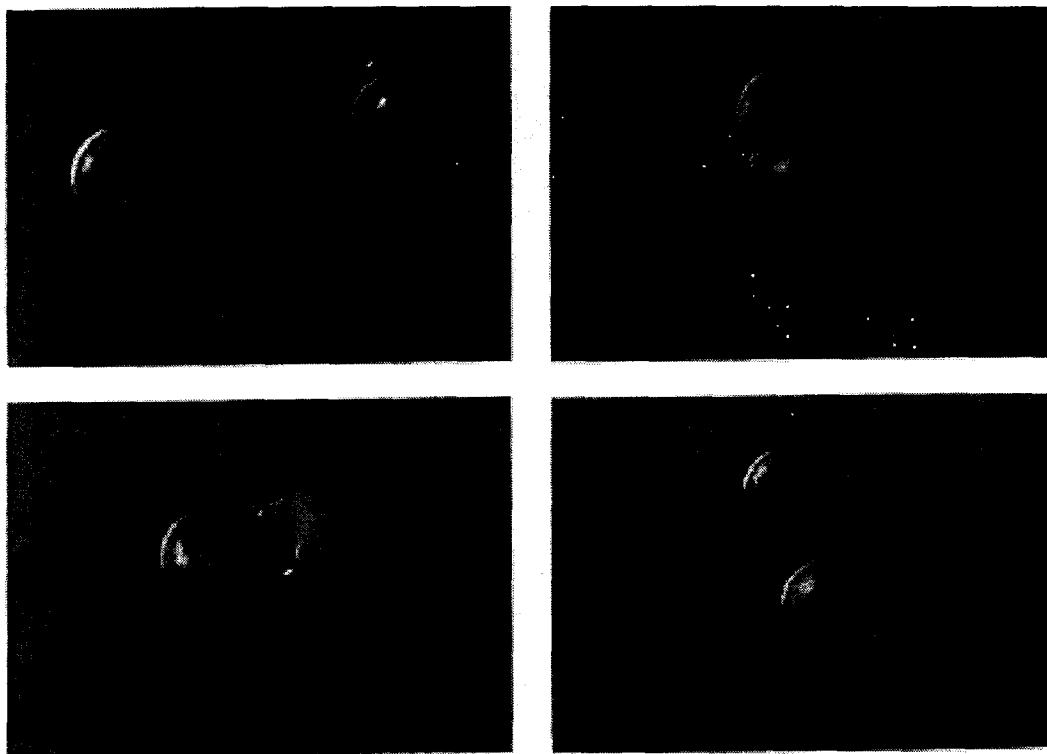


Fig. 1.2: Espalhamento sóliton-sóliton. (Extraída da Ref. [44].)

Na tomada superior esquerda dois sólitons de Skyrme separados, e portanto esfericamente simétricos, se aproximam; nas duas tomadas seguintes (inferior esquerda e superior direita) os sólitons estão em interação criando um di-sóliton com simetria toroidal. Na última tomada os dois sólitons separam-se e espalham-se a  $90^\circ$ . Vemos então que, quando os sólitons integrentes estão afastados, a *configuração produto* (dada pelo produto de duas configurações esfericamente simétricas, cada uma para  $B = 1$ ), pode ser usada para representar o sistema com  $B = 2$ . Entretanto, quando a distância

entre os dois sólitons diminui, eles tendem a se fundir em um único sistema ( $B = 2$ ) com simetria toroidal, de modo que a *configuração axialmente simétrica* é mais adequada na situação de estado ligado e, em geral, a pequenas distâncias.

Comentários finais e conclusões deste trabalho são apresentados no Cap. 5.

Fórmulas e definições que complementam o texto principal são apresentadas em seis apêndices.

## Capítulo 2

# O MODELO

As características gerais do modelo de Skyrme em  $SU(2)$  e sua generalização a  $SU(3)$ , bem como o detalhamento da chamada *aproximação de estado ligado*, serão apresentados a seguir.

### 2.1 Modelo de Skyrme

Witten, em sua análise sobre a Cromodinâmica Quântica no limite  $N_c \rightarrow \infty$  e a baixas energias [11], mostra que a *CDQ* pode ser modelada por teorias não-lineares de campos mesônicos que apresentem soluções solitônicas estáveis com carga topológica não-nula conservada. O mais simples destes modelos, desenvolvido muito antes da *CDQ*, é o modelo de Skyrme.

O ponto de partida para esta aproximação, comum a várias teorias mesônicas efetivas, é o conhecido modelo  $\sigma$  não-linear [45]. Considerando o regime de baixas energias, espera-se que os graus de liberdade mais relevantes sejam os relativos aos mésons mais leves, i.e., os píons.

Para incorporar estas características, a simetria quirial  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  é realizada pela adoção de uma representação não-linear para o campo de



píons

$$U(\vec{r}) = \exp \left[ \frac{i}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(\vec{r}) \right], \quad (2.1)$$

onde  $\vec{\tau}$  é o isovetor usual, cujas componentes são os operadores de Pauli,  $f_\pi$  é a constante de decaimento do pión obtida do decaimento  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ ,  $\vec{r}$  é o vetor posição do campo piônico e  $\pi_i(r)$  são as componentes do campo de píons.

Frente às transformações quirais globais  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , parametrizadas pelos operadores unitários (matrizes constantes)  $L$  e  $R$ ,  $U$  transforma-se como

$$U \rightarrow U' = LUR^\dagger. \quad (2.2)$$

Pode-se ver assim que o vácuo ( $\pi_i = 0 \rightarrow U = 1$ ) é invariante apenas no subgrupo  $L = R$ , o que reflete a *quebra espontânea* da simetria quiral. O modelo deve, então, incorporar termos que levem em conta tal quebra de simetria.

A densidade lagrangeana do modelo  $\sigma$  não-linear, expressa como função de  $U$ , é dada por

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.3)$$

Usando argumentos de transformação de escala do tipo  $\vec{r} \rightarrow \alpha \vec{r}$ , verifica-se que  $\mathcal{L}_\sigma$  não possui soluções solitônicas estáveis  $U$  que conduzam à minimização da energia,  $E$ , pois para qualquer função tentativa  $U(\vec{r})$  ter-se-á  $E_\sigma \propto \frac{1}{\alpha}$ , que não possui mínimo.

A estabilização do sóliton foi obtida por Skyrme adicionando um termo que envolve quatro derivadas do campo  $U$  à lagrangeana, das quais duas, no máximo, são temporais [1]:

$$\mathcal{L}_{Sk} = \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left( [\partial_\mu U, \partial_\nu U^\dagger][\partial^\mu U, \partial^\nu U^\dagger] \right), \quad (2.4)$$

com  $e$  uma constante dimensional a ser ajustada.

Frente à transformação de escala citada acima, a energia associada ao termo quártico,  $E_{Sk}$ , se mostra proporcional a  $\alpha$ , de modo que ocorre uma solução estável com energia minimizada para o modelo de Skyrme original, em que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk} . \quad (2.5)$$

Entretanto, tendo em vista a quebra de simetria quiral já mencionada, é usual incluir-se no modelo um termo dependente da massa do pión,  $m_\pi$ , da forma [46]

$$\mathcal{L}_{SB} = \frac{1}{4} m_\pi^2 f_\pi^2 \text{Tr}(U + U^\dagger - 2) . \quad (2.6)$$

Do ponto de vista geométrico, pode-se explicar a existência de soluções solitônicas estáveis da seguinte forma. Para configurações solitônicas estáticas (independentes do tempo), o campo unitário  $U(\vec{r})$  representa um mapeamento  $U : R^3 \rightarrow SU(2)$ . Impor que o sóliton possua energia finita, implica na condição de contorno  $U(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  (i.e., o campo de píons deve se anular no infinito). Isto permite que todos os pontos do infinito espacial sejam identificados com um único ponto, de modo que  $R^3$  pode ser compactificado a uma esfera  $S^3$ . Como o grupo  $SU(2)$  também é isomorfo a  $S^3$ , podemos escrever  $U : S^3 \rightarrow S^3$ .

Estes mapeamentos agrupam-se em diferentes classes discretas de homotopia (que congregam funções que podem se deformar continuamente umas nas outras), caracterizadas por números inteiros, os “números de voltas” (do inglês *winding numbers*), definidos por

$$\mathcal{Z}[U] = \int d^3x \mathcal{B}^0(x) , \quad \text{onde} \quad \mathcal{B}^\mu(x) = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(L_\nu L_\alpha L_\beta) , \quad (2.7)$$

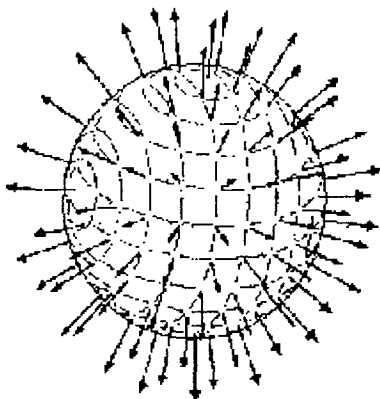
com  $\varepsilon^{0123} = -1$ ,  $\varepsilon_{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$  e  $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ . Estes números explicitam o número de vezes em que a esfera espacial é completamente mapeada na esfera quiral. Como estes números de voltas são preservados frente a transformações homotópicas contínuas dos mapeamentos como, por exemplo, aquelas

que descrevem a evolução temporal do sistema, pode-se dizer que uma configuração de campos com  $\mathcal{Z}[U] \neq 0$  é topologicamente estável. Consequentemente  $\mathcal{B}^\mu$  representa uma corrente topológica que quantifica o número de voltas conservado.

A principal hipótese de Skyrme foi a de identificar a corrente topológica com a corrente bariônica (verificado posteriormente por Witten [11]). Como a parte da energia estática associada ao Lagrangeano (2.3) envolve apenas quadrados das derivadas de  $U$ , uma dependência puramente radial do campo piônico  $\vec{\pi}$  de (2.1) resulta na minimização da energia total do sóliton. Assim, Skyrme utilizou [1] para o campo solitônico a configuração *ouriço* (*hedgehog*) [47], em que o campo piônico é radial, ou seja,

$$U_o(\vec{r}) = u_\pi(\vec{r}) = \exp[i\vec{\tau} \cdot \hat{r}F(r)] , \quad (2.8)$$

onde  $F(r)$  é uma função escalar dita *ângulo quirral*. Geometricamente, a estrutura radial desta configuração está mostrada na Fig. 2.1.



**Fig. 2.1:** Configuração ouriço. As flechas indicam a direção  $\hat{r}$  do campo isovetorial.

Esta configuração envolve uma correlação entre isospin  $\vec{T}$  e momentum angular  $\vec{J}$  tal que nenhum deles é, separadamente, um bom número quântico e sim sua soma, o *grande-spin*  $\vec{\Lambda} = \vec{J} + \vec{T}$ .

Substituindo (2.8) na (densidade) lagrangeana total em  $SU(2)$

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk} + \mathcal{L}_{SB} , \quad (2.9)$$

obtem-se para a energia estática (visto que  $u_\pi$  independe do tempo) em função do ângulo quiral

$$E[F] = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[ \frac{f_\pi^2}{2} \left( F'^2 + 2\frac{s^2}{r^2} \right) + \frac{s^2}{2e^2 r^2} \left( 2F'^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) + m_\pi^2 f_\pi^2 (1 - c) \right] , \quad (2.10)$$

onde  $F' \equiv dF/dr$ ,  $s \equiv \text{sen } F$  e  $c \equiv \text{cos } F$ . No Apêndice A encontram-se as expressões relativas ao modelo de Skyrme em  $SU(2)$  para um número bariônico  $B$  qualquer. A equação acima pode ser obtida da eq.(A.2) quando  $n = 1$ , ou diretamente, como nos trabalhos pioneiros de Skyrme [3].

A massa do sóliton é obtida da minimização de  $E[F]$ , o que implica na determinação de  $F(r)$  como solução da equação diferencial [ $n = 1$  em (A.8)]

$$f_\pi^2 \left( F'' + \frac{2}{r} F' - m_\pi^2 s - \frac{2sc}{r^2} \right) = -\frac{1}{e^2} \left[ \frac{2}{r^2} (s^2 F'' + sc F'^2) - \frac{2}{r^4} s^3 c \right] . \quad (2.11)$$

As condições de contorno para  $F$  são

$$F(r = \infty) = 0, \text{ de modo a satisfazer } U(r = \infty) = 1 \text{ e}$$

$$F(r = 0) = \pi, \text{ visto que } \mathcal{Z}[U] = -[F(\infty) - F(0)]/\pi \text{ deve fornecer o número bariônico } B = 1.$$

A solução da eq.(2.11) é obtida numericamente<sup>1</sup> e depende da escolha do par de parâmetros ( $e, f_\pi$ ). Na literatura são encontradas duas alternativas para esta escolha. Em uma delas os parâmetros são fixados de modo a reproduzir as massas experimentais do núcleon e da delta (3/2). A Fig. 2.2 mostra as soluções  $F(r)$  para as situações de pión com e sem massa, com esta escolha.

<sup>1</sup> Obtemos, contudo, excelente ajuste a este ângulo quiral por soma de funções [48, 49], o mesmo ocorrendo na literatura com o emprego do método de aproximantes de Padé [50].

Na outra alternativa, adota-se o valor empírico de  $f_\pi$  e ajusta-se o parâmetro  $e$  de modo a reproduzir o valor experimental da constante axial  $g_A$  ou da diferença entre as massas do nêutron e do próton.

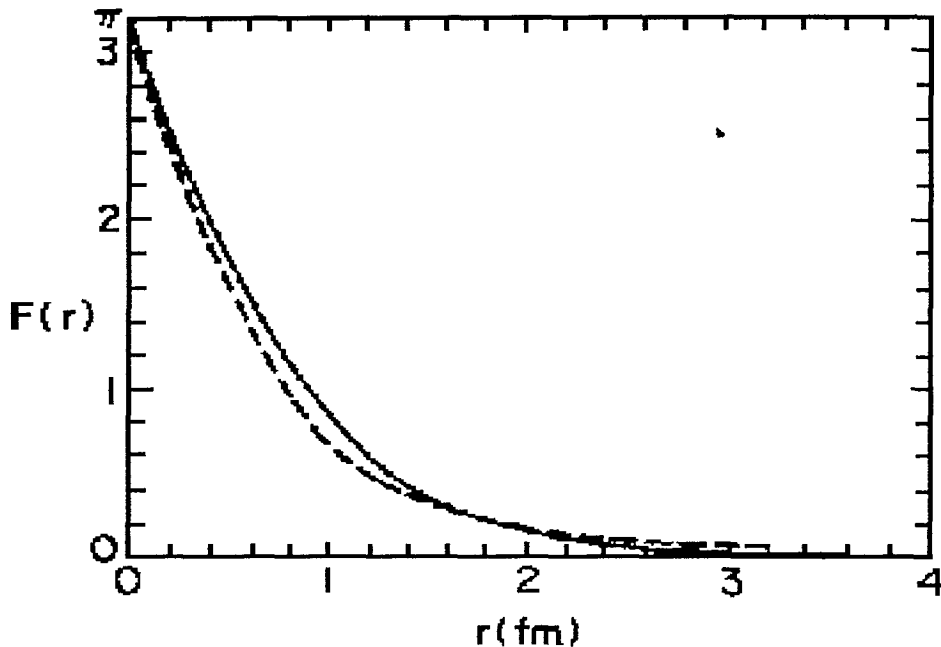


Fig. 2.2: Ângulo quiral  $F(r)$ , solução da eq.(2.11) com condições de contorno  $F(0) = \pi$  e  $F(\infty) = 0$ , para a configuração ouriço. A linha tracejada representa o caso quiral  $m_\pi = 0$  e a linha contínua o caso  $m_\pi \neq 0$ . Os parâmetros são fixados de modo a reproduzir as massas experimentais de  $N$  e  $\Delta$ .

Para descrever os bárions o modelo deve fornecer uma estrutura de spin e isospin aos skyrmions. Entretanto, para isso, são necessárias soluções dependentes do tempo para a lagrangeana da eq.(2.9), visto que somente assim se pode construir momenta canônicos,  $\delta\mathcal{L}/\delta\dot{U}$ , não-nulos e obter as constantes de movimento de Noether. Não dispomos destas soluções  $U(\vec{r}, t)$ , de modo que, infelizmente, serão impostas aproximações. Na seção 2.3 o processo de

quantização via coordenadas coletivas usado será visto com detalhes.

É possível, porém, apresentar agora os primeiros resultados do modelo para as propriedades estáticas do núcleon [12, 46], o que está feito na Tabela 2.1.

Grandeza	$m_\pi = 0$	$m_\pi \neq 0$	Experimento
$M_N$	dada	dada	938,9 MeV
$M_\Delta$	dada	dada	1232 MeV
$m_\pi$	0	dada	138 MeV
$f_\pi$	64,5 MeV	54 MeV	93 MeV
$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$	0,59 fm	0,68 fm	0,72 fm
$\langle r^2 \rangle_{I=1}^{1/2}$	$\infty$	1,04 fm	0,88 fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=0}^{1/2}$	0,92 fm	0,95 fm	0,81 fm
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1}^{1/2}$	$\infty$	1,04 fm	0,80 fm
$\mu_p$	1,87	1,97	2,79
$\mu_n$	-1,31	-1,24	-1,91
$ \mu_p/\mu_n $	1,46	1,59	1,43
$g_A$	0,61	0,65	1,23
$g_{\pi NN}$	8,9	11,9	13,5
$g_{\pi N\Delta}$	13,2	17,8	20,3
$g_{N\Delta}$	2,3	2,3	3,3
$\sigma$	0	49 MeV	$36 \pm 20$ MeV

**Tab. 2.1:** Propriedades estáticas de  $N$  e de  $\Delta$  obtidas no modelo de Skyrme em  $SU(2)$ , com píons não-massivos [12] e massivos [46]. As três primeiras linhas da tabela compreendem dados de entrada para os parâmetros de massa.

Nesta tabela,  $\sigma$  (termo  $\sigma$  píon-núcleon) é uma medida do desvio da massa nucleônica devido à quebra da simetria quiral, sendo nulo quando  $m_\pi = 0$ .

## 2.2 Extensões a $SU(3)$

Considerando o sucesso qualitativo do modelo de Skyrme na descrição dos bárions não-estranhos e sua vinculação com a  $CDQ$ , procurou-se naturalmente estudar sua extensão a  $SU(3)$ , de modo a incorporar a descrição dos bárions estranhos, os híperons, ao modelo.

Formalmente esta extensão é facilmente efetivada se imposto que o campo  $U$  é, agora, pertencente a  $SU(3)$ . As primeiras estimativas para as massas do octeto bariônico [24, 51] feitas sob esta hipótese, entretanto, não foram satisfatórias levando à conclusão, na linguagem da  $CDQ$ , de que a quebra da simetria quiral pela presença do quark estranho,  $s$ , não pudesse ser considerada pequena e tratada perturbativamente [26, 52].

Dois modelos em que a estranheza (a presença do quark  $s$ ) é tratada de maneiras distintas surgiram na década passada: a *aproximação de rotor rígido* ou *modelo de coordenadas coletivas - MCC* [27] e a *aproximação de estado ligado - AEL* [28].

No primeiro modelo ( $MCC$ ), são introduzidas coordenadas coletivas para todo o  $SU(3)$ , o que permite uma diagonalização exata do Hamiltoniano do sistema. Temos assim, em linguagem de quarks, um tratamento não-perturbativo para o quark  $s$ .

Por outro lado, na segunda aproximação ( $AEL$ ) as coordenadas coletivas são introduzidas apenas para o subgrupo  $SU(2)$ , sendo dado um tratamento diferenciado à estranheza.

A extensão de  $SU(2)$  a  $SU(3)$  impõe, qualquer que seja o modelo adotado, a inclusão de um termo adicional ao Lagrangeano do sistema. Este termo, conhecido como *termo de Wess-Zumino (WZ)*, decorre de uma comparação de  $\mathcal{L}_{SU(2)}$  com o Lagrangeano da  $CDQ$ . Embora existam várias maneiras de compreender sua origem, apresentamos a seguir a formulada por Witten [53].

Considerando  $U$  como pertencente a  $SU(3)$ ,  $\mathcal{L}_{SU(2)}$  apresenta duas simetrias não respeitadas separadamente pela  $CDQ$ , a saber, paridade ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ) e conjugação ( $U \rightarrow U^\dagger$ ), embora a combinação  $U(\vec{r}, t) \rightarrow U^\dagger(-\vec{r}, t)$  seja uma simetria da  $CDQ$ . Tais simetrias, impostas separadamente, impediriam a descrição, por exemplo, do processo  $K^+K^- \rightarrow \pi^+\pi^0\pi^-$ . É necessário, portanto, um termo adicional ao Lagrangeano, que quebre as duas simetrias mas preserve sua combinação.

A sugestão de Witten foi a de modificar a equação de movimento relativa a  $\mathcal{L}_{SU(2)}$  com a inclusão do segundo termo abaixo, que é único, se nos restringirmos ao menor número de derivadas,

$$\frac{f_\pi^2}{2} \partial^\mu L_\mu + \lambda \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta = 0. \quad (2.12)$$

Infelizmente não existe um Lagrangeano local que origine um termo como este, pois não conseguimos construir uma função invariante de Lorentz de  $L_\mu(R_\mu)$  que seja invariante quiral em 4 dimensões envolvendo o tensor de Levi-Civita  $\varepsilon$ . Entretanto uma ação, dada como uma integral sobre um disco 5-dimensional, cujo contorno é o espaço-tempo, existe. Tal ação é justamente o termo de  $WZ$  e sua expressão é

$$\Gamma_{WZ} = -\frac{iN_c}{240\pi^2} \int d^5x \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta\gamma} \text{Tr}(L_\mu L_\nu L_\alpha L_\beta L_\gamma), \quad (2.13)$$

identificada através do estudo do processo  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , após a inclusão do campo de fótons em  $\mathcal{L}_{SU(2)}$  [53, 54, 55].

O aparecimento explícito do número de cores na ação é responsável pela dependência da estatística dos sólitons em  $N_c$ . Witten mostrou que o sólito é um férmion para  $N_c = \text{ímpar}$  e um bóson para  $N_c = \text{par}$ . Ressalte-se que tal resultado só é obtido após a extensão a  $SU(3)$ , visto que  $\Gamma_{WZ}$  se anula em  $SU(2)$ .



## 2.3 Aproximação de estado ligado

A aproximação de estado ligado, como já mencionado, baseia-se fisicamente no fato de a quebra da simetria quiral  $SU(3)$  ser significativa e trata os graus de liberdade de estranheza de maneira diversa dos demais: o campo  $U$  desdobra-se em duas partes – a parte  $SU(2)$ , que engloba os graus de liberdade de isospin do campo solitônico e é quantizada através das coordenadas coletivas [12] e a parte referente ao campo mesônico  $K$  (e, portanto, à estranheza), que é expandido como uma flutuação de pequena amplitude na direção em que o sóliton pode oscilar. Em outras palavras, a aproximação conduz à interpretação dos híperons como *estados ligados* káon-sóliton (este último em  $SU(2)$ ) [28].

Tendo em conta as contribuições mencionadas anteriormente, pode-se considerar a ação efetiva completa para o modelo de Skyrme generalizado a  $SU(3)$  como

$$\Gamma = \int d^4x (\mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk} + \mathcal{L}_{SB}) + \Gamma_{WZ} , \quad (2.14)$$

com  $\mathcal{L}_\sigma$ ,  $\mathcal{L}_{Sk}$  e  $\Gamma_{WZ}$  dados por (2.3), (2.4) e (2.13), respectivamente. Quanto a  $\mathcal{L}_{SB}$ , considerando as diferenças entre as massas dos mésons  $\pi$  e  $K$ ,  $m_\pi$  e  $m_K$ , e entre as constantes de decaimento,  $f_\pi$  e  $f_K$ , adotaremos no presente trabalho ao invés de (2.6) (usada em  $SU(2)$ ), a expressão [56]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SB} = & \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 + 2f_K^2 m_K^2}{12} \text{Tr} [U + U^\dagger - 2] \\ & + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 - f_K^2 m_K^2}{6} \text{Tr} [\sqrt{3}\lambda_8 (U + U^\dagger)] \\ & - \frac{f_K^2 - f_\pi^2}{12} \text{Tr} [(1 - \sqrt{3}\lambda_8) (UL_\mu L^\mu + U^\dagger R_\mu R^\mu)] . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aqui  $\lambda_8$  é uma das matrizes de Gell-Mann, com a normalização usual  $\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}$ , e  $R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger$ . A presença de termos que levam em consideração a diferença entre as constantes de decaimento mesônicas diminui para  $\simeq 20 \text{ MeV}$  [57] a super ligação káon-sóliton encontrada anteriormente (cerca de  $90 \text{ MeV}$

[30]). Esta expressão se reduz ao termo (2.6) usual no limite  $f_K \rightarrow f_\pi$  e  $m_K \rightarrow m_\pi$ . Na expressão (2.15) os dois primeiros termos renormalizam o termo de massa e o terceiro termo renormaliza o termo de energia cinética do méson.

As flutuações quânticas em torno do sóliton, devido à estranheza, são descritas perturbativamente na *AEL*, após escolha da parametrização [28]

$$U = \sqrt{U_\pi} U_K \sqrt{U_\pi}, \quad (2.16)$$

que denominaremos aqui de escolha *CK* (Callan e Klebanov)<sup>2</sup>, sendo

$$U_K = \exp \left[ i \frac{\sqrt{2}}{f_K} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right], \quad K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

o campo que carrega a estranheza e

$$U_\pi = \begin{pmatrix} u_\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_\pi = \exp [i \vec{\tau} \cdot \hat{r} F(r)], \quad (2.18)$$

o campo solitônico de fundo, uma extensão direta a  $SU(3)$  do campo  $u_\pi$  de  $SU(2)$ .

Considerando a expansão do campo  $U$  até segunda ordem no campo de káons obtém-se uma lagrangeana que é a soma de dois termos – um originado puramente de  $SU(2)$ , idêntico à lagrangeana de Skyrme com píons massivos, e outro que exhibe a interação káon-sóliton. No Apêndice B encontram-se as expressões destes dois termos.

A lagrangeana de interação (vide B.2 – B.7) conduz a uma equação de movimento para os káons no campo solitônico de fundo. Para tanto recorrendo à configuração ouriço, eq.(2.8), para o campo  $u_\pi$ , obtemos (vide (B.2))

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & f(r) \dot{K}^\dagger \dot{K} - h_1(r) \vec{\nabla} K^\dagger \cdot \vec{\nabla} K - h_2(r) \partial_r K^\dagger \partial_r K \\ & + i\lambda(r) (K^\dagger \dot{K} - \dot{K}^\dagger K) - K^\dagger [V^{ef}(r) + m_K^2] K, \end{aligned} \quad (2.19)$$

<sup>2</sup> Outra possibilidade, também ocorrente na literatura, é  $U = \sqrt{U_K} U_\pi \sqrt{U_K}$  [58].

com  $\dot{K} \equiv \frac{\partial K}{\partial t}$ ,  $\partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial r}$  e

$$V^{ef}(r) = V_0(r) + V_1(r)\vec{T} \cdot \vec{L} + V_2(r)\vec{L}^2 . \quad (2.20)$$

As funções radiais  $f(r)$ ,  $h_1(r)$ ,  $h_2(r)$  e  $\lambda(r)$ , bem como os potenciais radiais  $V_0(r)$ ,  $V_1(r)$  e  $V_2(r)$ , obtidos ao estabelecer-se o potencial efetivo para a interação káon-sóliton, estão apresentados no Apêndice B. (Mais detalhes encontram-se no Cap. 3.)

A presença do termo  $\vec{T} \cdot \vec{L}$ , bem como o fato de a configuração ouriço (2.8) ser autoestado do operador *grande-spin*  $\vec{\Lambda}$ , sugerem decompor o campo kaônico em ondas parciais

$$K(\vec{r}, t) = \sum_{\Lambda} k_{\Lambda}(r, t) \mathcal{Y}_{\Lambda \Lambda_z}(\hat{r}) , \quad (2.21)$$

onde  $\mathcal{Y}_{\Lambda \Lambda_z}$  são os harmônicos esféricos espinoriais que surgem pelo acoplamento do momentum angular orbital  $\vec{L}$  e do isospin do káon,  $\vec{\tau}/2$ , gerando o *grande-spin*  $\vec{\Lambda}$ . Os campos  $k_{\Lambda}$  são funções radiais que independem da projeção  $\Lambda_z$ , visto que o sóliton tem  $\Lambda = 0$ . Deste modo, canais com diferentes valores de  $\Lambda$  se desacoplam.

A decomposição (2.21) leva a eq.(2.19) à forma (suprimindo os índices  $\Lambda l$  em  $k$ )

$$\mathcal{L}_{int} = f(r) \dot{k}^\dagger \dot{k} - h(r) k^{\dagger'} k' + i\lambda(r) (k^\dagger k - k^\dagger k) - [V_{\Lambda}^{ef}(r) + m_K^2] k^\dagger k , \quad (2.22)$$

para cada canal (com  $k' \equiv \frac{\partial k}{\partial r}$  e  $h(r) = h_1(r) + h_2(r)$ ) e, finalmente, à equação de movimento para  $k_{\Lambda l}$

$$\left[ f(r) \partial_t^2 + 2i\lambda(r) \partial_t + \hat{O}(r) \right] k(r, t) = 0 , \quad (2.23)$$

sendo  $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$  e

$$\hat{O} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 h \frac{\partial}{\partial r} \right) + m_K^2 + V_{\Lambda}^{ef} . \quad (2.24)$$

Analisando a eq.(2.23), vê-se que possui um termo linear na derivada temporal, o que a diferencia de uma equação de Klein–Gordon. Esta contribuição se origina do termo de Wess–Zumino e é de importância fundamental no modelo, pois sua presença faz com que apenas os estados com estranheza  $S = -1$  (antikáons), adequada para a descrição de híperons físicos, sejam ligados ao sóliton, impedindo a existência daqueles com  $S = 1$ , em concordância com o espectro bariônico observado e com os modelos de quarks.

A expansão do campo kaônico em modos normais possibilita sua quantização, i.e.,

$$k(r, t) = \sum_{n>0} \left[ k_n(r) e^{i\varepsilon_n t} b_n^\dagger + \tilde{k}_n(r) e^{-i\tilde{\varepsilon}_n t} a_n \right], \quad (2.25)$$

com  $\varepsilon_n$  e  $\tilde{\varepsilon}_n$  energias positivas. A determinação dos autovalores de energia se dá pela resolução das equações

$$\left[ f\varepsilon_n^2 + 2\lambda\varepsilon_n - \hat{O} \right] k_n(r, t) = 0, \quad (2.26)$$

$$\left[ f\tilde{\varepsilon}_n^2 - 2\lambda\tilde{\varepsilon}_n - \hat{O} \right] \tilde{k}_n(r, t) = 0, \quad (2.27)$$

obtidas de (2.24) e (2.25). Ocorrerão estados ligados se  $\varepsilon_n < m_K^2$ .

As condições de ortonormalidade das funções  $k_n$  são obtidas considerando-se que o operador  $\hat{O}$  é auto-adjunto, ou seja,

$$\int dr r^2 k_n^* k_m [f(r) (\varepsilon_n + \varepsilon_m) + 2\lambda(r)] = \delta_{nm}, \quad (2.28)$$

$$\int dr r^2 \tilde{k}_n^* \tilde{k}_m [f(r) (\tilde{\varepsilon}_n + \tilde{\varepsilon}_m) + 2\lambda(r)] = \delta_{nm} \quad \text{e} \quad (2.29)$$

$$\int dr r^2 k_n^* \tilde{k}_m [f(r) (\varepsilon_n - \tilde{\varepsilon}_m) + 2\lambda(r)] = 0. \quad (2.30)$$

Realizando a quantização canônica obtém-se o momentum conjugado a  $k(r, t)$ , i.e.,

$$\pi^\dagger(r, t) = f(r) \dot{k}^\dagger(r, t) - i\lambda(r) k^\dagger(r, t). \quad (2.31)$$

As relações de comutação entre os campos e seus conjugados

$$\left[ k^\dagger(r, t), k(r', t) \right] = 0, \quad (2.32)$$

$$[\pi^\dagger(r, t), \pi(r', t)] = 0, \quad (2.33)$$

$$[k^\dagger(r, t), \pi(r', t)] = i \frac{\delta(r - r')}{r^2}, \quad (2.34)$$

implicam na álgebra usual para os operadores de criação e destruição

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad [b_n, b_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad (2.35)$$

sendo nulos os demais comutadores.

Obtidos os campos canonicamente conjugados, o Hamiltoniano  $H$  se expressa como

$$H = \int dr r^2 \mathcal{H}, \quad (2.36)$$

com

$$\mathcal{H} = \frac{1}{f} \pi^\dagger \pi + i \frac{\lambda}{f} (k^\dagger \pi - \pi^\dagger k) + \hbar k^\dagger k' + \left( V_{\Lambda l}^{ef} + m_K^2 + \frac{\lambda^2}{f} \right) k^\dagger k \quad (2.37)$$

que, em termos dos operadores de criação e destruição, se torna

$$H = \sum_{n>0} (\tilde{\varepsilon}_n a_n^\dagger a_n + \varepsilon_n b_n^\dagger b_n), \quad (2.38)$$

mostrando o conhecido fato de que os níveis de energia quânticos são determinados pelas autofreqüências clássicas.

Por sua vez, o operador de estranheza é dado por

$$S = i \int dr r^2 (k^\dagger \pi - \pi^\dagger k) = \sum_{n>0} (a_n^\dagger a_n - b_n^\dagger b_n), \quad (2.39)$$

de onde se pode deprender que  $a_n$  e  $b_n$  aniquilam modos de estranheza iguais a 1 e  $-1$ , respectivamente.

A solução (numérica) da equação diferencial (2.23) mostra que existem dois estados ligados com autovalores de estranheza  $S = -1$ , e que os estados com  $S = 1$  estão no contínuo [29, 30, 58]. O estado fundamental para o sistema possui  $(\Lambda, l) = (1/2, 1)$ , sendo portanto um estado p, e não s. Tal efeito de inversão é devido ao termo isospin-órbita  $\vec{T} \cdot \vec{L}$  e é necessário para

produzir a paridade correta para o estado fundamental. Ocupando-se este estado com káons, cada um contribuindo com  $S = -1$  à estranheza total e com  $\varepsilon_n$  à energia, pode-se construir tanto o octeto ( $J^P = 1/2^+$ ) como o decuplo (  $J^P = 3/2^+$ ) bariônicos.

A solução da eq.(2.23) é degenerada em spin e isospin, visto que a configuração de campo estática (2.16) não comuta com os correspondentes geradores. Assim, para se obter o espectro dos híperons constituintes dos multipletos, é preciso construir os autoestados destes observáveis.

O processo de quantização via coordenadas coletivas permite atribuir números quânticos de spin e isospin aos bárions dos multipletos. Além disso possibilita a obtenção da estrutura hiperfina para o espectro de massas dos mesmos.

Vejamos como isso acontece. A exemplo do que ocorre em Física Nuclear e no modelo de Skyrme tradicional, a definição dos números quânticos no processo de quantização adotado se dá através da rotação (global) lenta do sólito e do káon ligado [28], frente à qual o Lagrangeano do sistema é invariante. Assim

$$u_\pi(\vec{r}, t) = A(t)u_\pi(\vec{r})A^\dagger(t) \quad \text{e} \quad (2.40)$$

$$K(\vec{r}, t) = A(t)\tilde{K}(\vec{r}, t), \quad (2.41)$$

sendo  $A(t) \in SU(2)$  a matriz de rotação coletiva (i.e., cujos elementos são as coordenadas coletivas). Nas definições acima,  $\tilde{K}$  é o operador kaônico definido no sistema girante do sólito e  $K$  é o operador kaônico definido no sistema de referência do laboratório.

Frente a uma rotação  $M$  do sólito em isospin, ou seja,  $u_\pi(\vec{r}, t) \rightarrow Mu_\pi(\vec{r}, t)M^\dagger$ , verifica-se que

$$A \rightarrow MA \quad \text{e} \quad (2.42)$$

$$\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}, \quad (2.43)$$

o que significa que o campo kaônico *perdeu* seu isospin no sistema girante do sóliton.

Frente a uma rotação espacial

$$u_\pi \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} u_\pi e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} u_\pi e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \quad e \quad (2.44)$$

$$\tilde{K} \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} \tilde{K} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} \tilde{K}, \quad (2.45)$$

onde se fez uso da invariança de  $u_\pi$  frente a  $\vec{\Lambda} = \vec{L} + \vec{T}$  ( $e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} u_\pi e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} = u_\pi$ ).

Pode-se concluir então, neste caso, que

$$A \rightarrow A e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{T}} \quad e \quad (2.46)$$

$$\tilde{K} \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\Lambda}} \tilde{K}. \quad (2.47)$$

A última equação mostra que o operador momentum angular total para  $\tilde{K}$  é o grande-spin. Como o estado ligado de menor energia tem  $\Lambda = 1/2$ , o káon é visto a partir do sistema de referência do sóliton como possuindo spin  $1/2$ . Isto mostra que no referencial girante, o isospin *perdido* pelo káon transmutou-se em spin.

Podemos agora construir os possíveis autoestados  $(I, J)$  ocupando o estado fundamental com káons. Cada káon contribui com  $(I_K, J_K, S) = (0, 1/2, -1)$ . Como o káon não deixa de ser um bóson com a transmutação isospin-spin e como o sistema káon-sóliton representa um bárion (e, portanto, um férmion), a quantização coletiva do sóliton deve mudar conforme o número de káons seja par ou ímpar. Assim, para um número par (ímpar) de káons deve-se ter o momentum angular total do sóliton semi-inteiro (inteiro). Tendo o sóliton  $I_C = J_C$ , os possíveis estados com apenas um káon são dados por  $(I, J) = (I_C, I_C) + (0, 1/2)$ , com  $I_C = 0, 1, 2, \dots$ . Os três primeiros estados correspondem seqüencialmente às partículas  $\Lambda, \Sigma, \Sigma^*$ , outros estados sendo provavelmente não-físicos. Ocupações kaônicas múltiplas do estado fundamental originam bárions com estranheza maior.

A Tabela 2.2 a seguir apresenta os números quânticos constituintes e totais dos bárions assim construídos.

Partícula	$I$	$J_K$	$S$	$J^P$
$N$	$\frac{1}{2}$	$-$	$0$	$\frac{1}{2}^+$
$\Delta$	$\frac{3}{2}$	$-$	$0$	$\frac{3}{2}^+$
$\Lambda$	$0$	$\frac{1}{2}$	$-1$	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma$	$1$	$\frac{1}{2}$	$-1$	$\frac{1}{2}^+$
$\Sigma^*$	$1$	$\frac{3}{2}$	$-1$	$\frac{3}{2}^+$
$\Xi$	$\frac{1}{2}$	$1$	$-2$	$\frac{1}{2}^+$
$\Xi^*$	$\frac{1}{2}$	$1$	$-2$	$\frac{3}{2}^+$
$\Omega$	$0$	$\frac{3}{2}$	$-3$	$\frac{3}{2}^+$

**Tab. 2.2:** Números quânticos dos bárions não-estranhos e estranhos do octeto  $J^P = \frac{1}{2}^+$  e do decuplete  $J^P = \frac{3}{2}^+$ , construídos por estados ligados káon-sóliton.

Uma previsão interessante do modelo é a da existência de um estado ligado de paridade negativa  $(0, 1/2, -1)$  justo abaixo do limiar  $KN$  e que provavelmente corresponde à  $\Lambda(1405)$  [28, 30].

Os estados assim previstos separam-se em energia em função dos termos de  $O(N_c^{-1})$  surgidos no Lagrangeano após a rotação. Tais termos dependem da velocidade angular  $\vec{\Omega}$  do sóliton, definida por

$$A^\dagger \dot{A} = \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\Omega}. \quad (2.48)$$

A substituição dos campos após rotações (2.40) e (2.41), no Lagrangeano total, origina um termo

$$\delta L = \frac{1}{2} \Theta \Omega^2 - c \vec{\Omega} \cdot \vec{J}_K, \quad (2.49)$$

responsável pela estrutura hiperfina dos estados de energia. Nesta equação,



$\Theta$  é o momento de inércia do sólton

$$\Theta = \frac{8\pi}{3} f_\pi^2 \int_0^\infty dr r^2 \text{sen}^2 F \left[ 1 + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right], \quad (2.50)$$

e  $c$  é a chamada *constante de estrutura hiperfina*, que depende do perfil clássico do sólton e da função radial do káon. No Apêndice B é apresentada uma expressão geral para  $c$ .

As componentes do momentum angular coletivo canonicamente conjugado são, pois,

$$J_c^i = \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = \Theta \Omega^i - c J_K^i, \quad (2.51)$$

de modo que o Hamiltoniano (para os antikáons) se escreve

$$H = M_{sol} + \varepsilon |S| + \frac{1}{2\Theta} (\vec{J}_c + c \vec{J}_K)^2, \quad (2.52)$$

mostrando que os híperons são, de fato, autoestados de  $\vec{J}^2$ , com  $\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_K$ . Com  $H$  escrito nesta forma, fica explícita a contagem para grande  $N_c$  adotada no modelo. Neste limite, o sólton  $SU(2)$  contribui com uma massa,  $M_{sol}$ , que é de ordem  $\mathcal{O}(N_c)$ ; o campo kaônico, que se liga principalmente devido ao termo WZ, proporciona uma contribuição de estrutura fina  $\varepsilon |S|$  de ordem  $\mathcal{O}(N_c^0)$  e a quantização coletiva do sólton gera uma correção rotacional, relativa à estrutura hiperfina,  $\frac{1}{2\Theta} (\vec{J}_c + c \vec{J}_K)^2$ , de ordem  $\mathcal{O}(N_c^{-1})$ .

Calculando-se os elementos de matriz diagonais de (2.52) para os membros do octeto e do decuplo bariônicos, obtém-se a fórmula de massa para o bárion  $(I, J, S)$ ,

$$M_{I,J,S} = M_{sol} + \varepsilon |S| + \frac{1}{2\Theta} \left[ cJ(J+1) + (1-c)I(I+1) + \frac{c(c-1)}{4} |S|(|S|+2) \right]. \quad (2.53)$$

As funções de onda adequadas  $|I I_z ; J J_z \rangle_{\Lambda, I}$  encontram-se no Apêndice C. Explicitamente, para o estado fundamental  $|0 0 ; 1/2 J_z \rangle$ , tem-se

$$\psi_K^{1/2,1} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{i\vec{e}t \cdot \vec{k}(r)} \vec{\tau} \cdot \hat{r} \chi_{J_z}, \quad (2.54)$$

com  $\chi_{J_z}$  um espinor de 2 componentes.

A constante hiperfina  $c$  para este caso é

$$c_1 = 1 - 2\varepsilon_1 \int dr k^2 \left\{ \frac{4}{3} f(r) r^2 \cos^2 \frac{F}{2} - \frac{1}{2e^2 f_K^2} \left[ \frac{d}{dr} (r^2 F' \operatorname{sen} F) - \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 F \cos^2 \frac{F}{2} \right] \right\}. \quad (2.55)$$

## 2.4 Alguns resultados numéricos

Nesta seção apresentamos alguns resultados numéricos para o espectro de massas dos bárions não-estranhos e estranhos pertencentes ao octeto  $J^P = 1/2^+$  e ao decuplo  $J^P = 3/2^+$ , obtidos com o modelo.

O espectro de massas é obtido a partir da eq.(2.53) após o cálculo da constante hiperfina  $c_1$ , dada em (2.55). A solução radial do campo mesônico utilizada,  $k(r)$ , é, por seu turno, obtida via eq.(2.23). Para tal, necessitamos dos valores das massas e das constantes de decaimento dos mésons  $\pi$  e  $K$ .

A Tabela 2.3 apresenta os três conjuntos de parâmetros mais comumente adotados na literatura, aqui identificados por  $CJ1$ ,  $CJ2$  e  $CJ3$ , bem como as respectivas constantes hiperfinas e energias de ligação káon-sóliton necessárias ao cálculo das massas [eq.(2.53)].

$CJ1$  (limite quiral em  $SU(2)$ ) e  $CJ2$  são conjuntos originalmente obtidos ajustando-se  $f_\pi$  e  $e$  de modo a reproduzir as massas do núcleon e da delta [12, 46]. Por outro lado,  $CJ3$  adota o valor empírico para  $f_\pi$  (93 MeV), enquanto o ajuste de  $e$  é feito respeitando a diferença entre as massas do núcleon e da delta (vide, por ex., [33]).

Para o cálculo das energias de ligação do estado fundamental do sistema káon-sóliton,  $\varepsilon$ , e das constantes hiperfinas correspondentes,  $c$ , foram usados o valor experimental para a massa do káon,  $m_K = 495 \text{ MeV}$  e a relação  $f_K \simeq 1,22 f_\pi$  para a constante de decaimento do káon.

	<i>CJ1</i>	<i>CJ2</i>	<i>CJ3</i>
$f_{\pi}(MeV)$	64,5	54	93
$e$	5,45	4,84	4,26
$m_{\pi}(MeV)$	0	138	138
$M_{sol}(MeV)$	864	863	1646
$\Theta(fm)$	1,01	1,01	0,87
$\varepsilon(MeV)$	222	211	255
$c$	0,50	0,39	0,33

**Tab. 2.3:** Conjuntos de parâmetros mais usados, com as respectivas energias de ligação e constantes hiperfinas obtidas. Os valores correspondem ao estado ligado com momentum angular orbital  $l = 1$ .

Com esses números foi determinado o espectro de massas cujas diferenças, relativas à massa do núcleon, estão apresentadas na Tabela 2.4.

Partícula	<i>CJ1</i>	<i>CJ2</i>	<i>CJ3</i>	exp	<i>MCC</i>
$\Lambda$	165	147	187	177	154
$\Sigma$	264	265	318	254	242
$\Xi$	392	371	462	379	366
$\Delta$	293	292	293	293	278
$\Sigma^*$	413	380	415	446	410
$\Xi^*$	541	486	559	591	544
$\Omega$	681	610	724	733	677
$\Lambda(1405)$	386	358	441	468	–

**Tab. 2.4:** Diferenças de massas (*MeV*) relativas à massa do núcleon para os conjuntos *CJ1* [12], *CJ2* [46] e *CJ3* [33] da Tab. (2.3), bem como os valores empíricos das mesmas e os obtidos via *MCC* [27].

---

Nesta tabela encontram-se também os valores obtidos via *MCC* [27], e o valor obtido para o estado de mais baixa energia com paridade negativa,  $\Lambda(1405)$ , anteriormente citado.

## Capítulo 3

# DIBÁRIONS

O estudo da interação bárion–bárion engloba conhecimentos sobre estados ligados e processos de espalhamento. O *dêuteron*, estado ligado  $NN$ , tem sido exaustivamente estudado, propiciando informações de grande importância sobre a interação forte.

O modelo de Skyrme primitivo em  $SU(2)$  foi também aplicado ao sistema  $NN$  [3, 17, 41]. Revisões sobre esta aplicação podem ser encontradas nas Refs. [32, 59, 60].

Quando pelo menos um dos bárions em interação é *estranho*, contudo, é preciso recorrer a alguma das extensões a  $SU(3)$  para analisar a interação bárion–bárion.

Neste capítulo aplicaremos a *AEL* ao estudo de dibárions estranhos, com o auxílio de uma configuração axialmente simétrica generalizada para representar o sóliton de fundo. Ver-se-á que, se os vínculos impostos pelas simetrias da configuração toroidal de menor energia (vide Fig. 1.2) são satisfeitos, todos os estados espúrios são removidos do espectro dibariônico. Em particular, o estado de mais baixa energia permitido no canal de estranheza  $S = -2$  carrega os números quânticos da partícula  $H$  que, nas aproximações ora adotadas, resulta ligada. Entretanto, efeitos do vácuo, como a energia de Casimir, desprezados no presente cálculo, muito provavelmente impedem

a existência do sistema ligado  $H$ .

### 3.1 Estados ligados

Estados ligados de dois bárions, os *dibárions*, constituem-se, em princípio, em uma generalização do estado  $NN$  ligado.

Desde que foi inicialmente proposto por Jaffe [61] que um estado hexa-quark (dois quarks  $u$ , dois quarks  $d$  e dois  $s$ ), singlete de sabor, com  $J^P = 0^+$  e  $M = 2150 \text{ MeV}$ , poderia ser estável contra decaimentos fortes, tem sido dedicada grande atenção, tanto teórica quanto experimentalmente, a este assunto. A sugestão de Jaffe fundamenta-se em um cálculo em modelo de sacola onde se obtém como resultado que interações color-magnéticas favorecem a existência de um estado singlete de sabor, estável,  $S = -2$  (conhecido como dibárion  $H$ ). Entretanto, a inclusão de efeitos desprezados por Jaffe, como efeitos de quebra de simetria, correção do centro de massa e presença de nuvem piônica em torno da sacola, diminuem a contribuição à energia de ligação significativamente [62, 63, 64], tornando a existência de tal dibárion um tanto incerta. Além disso, conforme discutido por Maltman [65], previsões via *modelo de sacola* do MIT parecem ser muito sensíveis a variações dos parâmetros do modelo (energia de volume, energia do ponto zero etc), que não são bem determinados pelos dados empíricos. Experimentalmente a situação também ainda não é clara. Apesar de que uns poucos eventos de decaimento fraco do dibárion  $H$  tenham sido relatados [66], análises posteriores não forneceram indicação de um sistema  $H$  estável [67]. Embora atualmente não estejam disponíveis nos principais aceleradores existentes feixes de píons com a energia necessária, estão sendo propostos experimentos para investigar este assunto (vide, por ex., [68, 69]).

Cálculos teóricos efetuados com outras abordagens, como  $CDQ$  na rede,

modelo não-relativístico de quarks e modelos de sólitons (para uma extensa lista de referências vide [67, 68, 69]), também apresentam resultados inconclusivos. No caso de modelos de sólitons, a maioria dos estudos realizados utiliza o modelo coletivo  $SU(3)$  (vide, p. ex., [70, 71, 72] e referências ali contidas). Neste capítulo apresentamos trabalho com a aproximação de estado ligado ( $AEL$ ) usada por nós [37], em que se investiga também a existência do estado ligado  $H$ .

Uma tentativa anterior de investigar a estrutura dos dibárions recorrendo à  $AEL$  [73], concluiu que  $H$  seria não-ligada. Naquele estudo foi adotada uma configuração axialmente simétrica simplificada [74], para o campo solitônico. Efetivamente, tal configuração prediz que a massa do sólito com  $B = 2$  é duas vezes maior do que a relativa a  $B = 1$ , e é instável. Em nossa abordagem, contudo, recorreremos à interação axialmente simétrica melhorada, proposta na Ref. [38]. Embora tal hipótese não corresponda exatamente à configuração axialmente simétrica de mais baixa energia, as propriedades dos di-skyrmions (como massa e energias rotacionais) calculadas com ela são muito próximas em valor àquelas obtidas numericamente com a configuração toroidal de mais baixa energia encontrada na Ref. [39].

Um ponto intrigante discutido por Kunz e Mulders [73] é a existência, na  $AEL$ , de estados que são proibidos no modelo de quarks e que, então, são ditos espúrios. Situação similar havia sido obtida para os dibárions não-estranhos [74, 38]. Mostraremos aqui, entretanto, que tais estados espúrios são removidos do espectro desde que os vínculos impostos pelas simetrias do problema sejam corretamente levados em consideração [37]. Em particular, no esquema ora apresentado, o estado dibariônico de mais baixa energia com  $S = -2$ , permitido, é o singlete de sabor, em concordância com o modelo de quarks.

Na seção seguinte introduzimos a configuração *axialmente simétrica me-*

*lhorada*, em substituição à configuração *ouriço* (2.8) e calculamos as expressões generalizadas para o potencial efetivo  $V^{ef}$  e para o Hamiltoniano rotacional  $H_{rot}$  da *AEI*.

## 3.2 Configuração axialmente simétrica

Considere-se a ação efetiva expressa na eq.(2.14). Para obter a configuração solitônica de fundo, introduzimos uma configuração axialmente simétrica relativa a um número bariônico geral

$$u_\pi = \exp [i\vec{\tau} \cdot \hat{\pi}_n F(\vec{r})] , \quad (3.1)$$

com

$$\hat{\pi}_n = \sin \Theta \cos \Phi \hat{i} + \sin \Theta \sin \Phi \hat{j} + \cos \Theta \hat{k} , \quad (3.2)$$

sendo  $\Theta = \Theta(\theta)$  e  $\Phi = \Phi(\phi)$  definidas adiante.

Na Ref. [73] foi adotada a configuração *ouriço* (denominada aqui de *simplificada*), em que  $F(\vec{r}) = F(r)$ ,  $\Theta(\theta) = \theta$  e, devido à unicidade do campo quiral,  $\Phi(\phi) = n\phi$ , sendo  $(r, \theta, \phi)$  as coordenadas esféricas usuais e  $n$  o número bariônico. Tal escolha prediz uma razão entre as massas dos sólitons  $B = 2$  e  $B = 1$ ,

$$\vartheta \equiv \frac{M_{sol}(B = 2)}{M_{sol}(B = 1)} = 2,14 \quad (3.3)$$

e conduz a uma configuração solitônica instável. Contudo, uma configuração de dois skyrmions, de energia mínima, foi encontrada numericamente por Kopeliovich e Stern [39] e um método variacional para esta solução foi proposto por Kuryhara *et al.* [38]. Neste caso  $F$  ainda é função apenas de  $r$ , mas a dependência angular em  $\theta$  é expressa na função variacional

$$\Theta(\theta) = \theta + \sum_{k=1}^m g_k \text{sen}(2k\theta) , \quad (3.4)$$



os coeficientes  $g_k$  sendo determinados pela minimização da energia do sóliton no correspondente setor bariônico. Usando esta hipótese encontramos [37]  $\vartheta = 1,94$ , que se compara muito bem à razão obtida com a solução numérica [39],  $\vartheta_{min} = 1,92$ . Também, como já citado anteriormente, resultados de cálculos de energias rotacionais, raio bariônico e outros, são numericamente muito parecidos com aqueles das Refs. [39, 75]. Como o uso da premissa variacional conduz a bons resultados e a uma considerável simplificação dos cálculos, recorreremos a ela para descrever o sóliton de fundo.

As expressões correspondentes ao setor  $SU(2)$  do modelo [38] estão resumidas no Apêndice A.

Está claro que, para  $n = 1$ , a energia mínima para o sóliton é obtida para  $\Theta(\theta) = \theta$ , i.e,  $g_k = 0$ . Portanto, neste caso, o sóliton de fundo adotado é ainda simétrico frente a rotações combinadas espaço-isospin  $\vec{\Lambda} = \vec{J} + \vec{T}$  e o campo de káons pode ser expandido em ondas parciais como em (2.21). Entretanto, para  $n \neq 1$  o campo de fundo não é mais invariante frente a  $\Lambda$ -rotações. Neste caso, para o campo kaônico, usamos a configuração [73]

$$K(\vec{r}, t) = k(r, t) \vec{\tau} \cdot \hat{\pi}_n(\vec{r}) \chi, \quad (3.5)$$

onde  $\chi$  é um espinor geral de duas componentes. Note-se que, para  $n = 1$ , esta hipótese se reduz à decomposição em ondas parciais usual (2.21) para o caso particular  $\Lambda = 1/2$ ,  $l = 1$  apresentado na eq.(2.54). Como já citado no capítulo anterior, estes são os números quânticos do estado ligado káon-sóliton de mais baixa energia para  $n = 1$ .

A expressão (3.5) conduz ao mesmo Lagrangeano de interação, (2.22),

$$\mathcal{L}_{int} = f(r) \dot{k}^\dagger \dot{k} - h(r) k^{\dagger'} k' + i\lambda(r) (k^\dagger k - k^\dagger k) - [V_{\Lambda}^{ef}(r) + m_K^2] k^\dagger k.$$

Entretanto as funções radiais apresentadas no Apêndice B (B.11 – B.15), são generalizadas a

$$h(r) = 1 + \frac{\alpha_1}{4e^2 f_K^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2}, \quad (3.6)$$

$$f(r) = 1 + \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( F'^2 + \alpha_1 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \quad \text{e} \quad (3.7)$$

$$\lambda(r) = -\frac{\alpha_3 N_c}{8\pi^2 f_K^2} F' \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} . \quad (3.8)$$

Neste caso, o potencial efetivo generalizado (correspondente àquele da eq.(B.16)) se torna

$$\begin{aligned} V^{ef} = & \left[ \frac{\alpha_1}{4e^2 f_K^2 r^2} \left( \cos^4 \frac{F}{2} - 2 \text{sen}^2 F \right) - \frac{1}{4} \right] F'^2 \\ & - \frac{1}{r^2} \left( \text{sen}^2 F - 4 \cos^4 \frac{F}{2} \right) \left( \frac{2\alpha_2}{4e^2 f_K^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} + \frac{\alpha_1}{4} \right) \\ & - \frac{3\alpha_1}{4e^2 f_K^2 r^2} \frac{d}{dr} \left[ F' \text{sen} F \cos^2 \frac{F}{2} \right] - \frac{1}{2} \frac{f_\pi^2}{f_K^2} m_\pi^2 (1 - \cos F) , \quad (3.9) \end{aligned}$$

onde as constantes  $\alpha_i$  são

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \left( \Theta'^2 + n^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \right) , \\ \alpha_2 &= \frac{n^2}{2} \int_0^\pi d\theta \left( \Theta'^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}\theta} \right) , \\ \alpha_3 &= \frac{n}{2} \int_0^\pi d\theta \text{sen}\Theta \Theta' , \quad (3.10) \end{aligned}$$

com  $\Theta' \equiv d\Theta/d\theta$ . Observe-se que para  $n = 1$  as eqs.(3.6) a (3.9) se reduzem às eqs.(B.11), (B.14)–(B.16), respectivamente.

A equação diferencial para  $k_{\Lambda t}$ , entretanto, não se modifica, sendo aquela apresentada na eq.(B.10). Portanto, a equação de movimento para  $k_{\Lambda t}$  ainda é a apresentada no capítulo anterior (eq.(2.23)), qual seja,

$$\left[ f(r) \partial_t^2 + 2i\lambda(r) \partial_t + \hat{O}(r) \right] k(r, t) = 0 .$$

De acordo com o apresentado na seção 2.3, para obter as correções hiperfinas ao espectro de massas dos dibárions aplica-se uma vez mais o processo de quantização via coordenadas coletivas. No presente caso, tendo em vista a simetria axial do sóliton de fundo, introduzimos separadamente as rotações

espaciais,  $R$ , e as de isospin,  $A$ , dependentes do tempo, tais que

$$u_\pi \rightarrow R A u_\pi A^{-1} \text{ e} \quad (3.11)$$

$$K \rightarrow R A K . \quad (3.12)$$

As velocidades angulares relativas ao sistema do sóliton são dadas por

$$\left(R^{-1}\dot{R}\right)_{ab} = \varepsilon_{abc}\Omega_c \text{ e} \quad (3.13)$$

$$A^{-1}\dot{A} = \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\omega} . \quad (3.14)$$

Representando as componentes superior e inferior do espinor  $\chi$  (eq.(3.5)) por  $a_1$  e  $a_2$ , respectivamente, as rotações indicadas acima resultam, para o Lagrangeano total eq.(B.2), na expressão

$$\begin{aligned} L = & - M_{sol} + L_K - \vec{T} \cdot \vec{\omega} + (T_1\omega_1 + T_2\omega_2)s_2 + T_3\omega_3s_1 - (T_1\Omega_1 + T_2\Omega_2)t_2 \\ & - T_3\Omega_3t_1 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2}\mathcal{I}_2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \mathcal{I}_4\delta_{n,1}(\Omega_1\omega_1 + \Omega_2\omega_2) \\ & + \frac{1}{2}\mathcal{I}_3(n\Omega_3 - \omega_3)^2 , \end{aligned} \quad (3.15)$$

com <sup>1</sup>

$$s_1 = 3[2\alpha_4 d_1 + (\alpha_5 - \alpha_1\alpha_4) d_2] , \quad (3.16)$$

$$s_2 = 3\left\{(1 - \alpha_4) d_1 + \frac{1}{2}[\alpha_1(1 + \alpha_4) - \alpha_5] d_2\right\} , \quad (3.17)$$

$$t_1 = n s_2 , \quad (3.18)$$

$$t_2 = 2(d_1 + d_2) \delta_{n,1} , \quad (3.19)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$  dados por

$$d_1 = 2\varepsilon_n \int_0^\infty dr k^* k \left[ \frac{2}{3}r^2 f \cos^2 F/2 - \frac{1}{4e^2 f_K^2} \frac{d}{dr}(r^2 F' \text{sen} F) \right] , \quad (3.20)$$

$$d_2 = \frac{2\varepsilon_n}{4e^2 f_K^2} \int_0^\infty dr k^* k \frac{4}{3} \cos^2 F/2 \text{sen}^2 F , \quad (3.21)$$

<sup>1</sup> No que segue consideramos  $\Theta = \theta$  para  $n = 1$ .

com  $f(r)$  dada em (B.14) e as integrais angulares  $\alpha_4$  and  $\alpha_5$  por

$$\alpha_4 = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta \, \text{sen}\theta \, \text{sen}^2\Theta \quad \text{e} \quad (3.22)$$

$$\alpha_5 = \int_0^\pi d\theta \, \text{sen}\theta \, \text{sen}^2\Theta \, \Theta'^2 . \quad (3.23)$$

Além disso, no Lagrangeano total apresentado acima,  $T^l = a_i^* T_{ij}^l a_j$  e  $\mathcal{I}_i$  são os momentos de inércia do setor  $SU(2)$ , com expressões explícitas apresentadas no Apêndice A, fórmula (A.9).

As componentes de spin e isospin no sistema fixo do sóliton,  $J_i^{fix}$  and  $I_i^{fix}$ , respectivamente, são calculadas via

$$J_i^{fix} = \frac{\partial L}{\partial \Omega_i} \quad \text{e} \quad I_i^{fix} = \frac{\partial L}{\partial \omega_i} . \quad (3.24)$$

Diferentemente do caso  $n = 1$ , onde a configuração ouriço do skyrmion reforça o vínculo  $\vec{J} + \vec{I} = \vec{T}$ , para  $n \neq 1$  existe apenas o vínculo

$$J_3^{fix} = -n(I_3^{fix} + T_3) , \quad (3.25)$$

devido à simetria axial.

A quantização do Hamiltoniano rotacional conduz a

$$\begin{aligned} H_{rot} &= \frac{1}{2\mathcal{I}_1} [\vec{J}^2 - (J_3^{fix})^2] + \frac{1}{2\mathcal{I}_2} [\vec{I}^2 - (I_3^{fix})^2] + \frac{c_2^2}{2\mathcal{I}_2} (\vec{T}^2 - T_3^2) \\ &+ \frac{1}{2\mathcal{I}_3} (I_3^{fix} + c_1 T_3)^2 + \frac{c_2}{2\mathcal{I}_2} (I_+^{fix} T_- + I_-^{fix} T_+) , \end{aligned} \quad (3.26)$$

com as constantes hiperfinas  $c_1$  and  $c_2$  dadas por

$$c_1 = 1 - s_1 \quad \text{e} \quad (3.27)$$

$$c_2 = 1 - s_2 . \quad (3.28)$$

Estabelecido o Hamiltoniano rotacional, devem ser determinadas as correspondentes autofunções, condicionado a que satisfaçam os vínculos impostos pelas simetrias do sistema. Isto será feito na seção seguinte.

### 3.3 Autofunções dos dibárions

Em geral, as funções que representam os estados dos dibárions são dadas pelo produto das matrizes de rotação  $D_{J_3, J_3^{fix}}^J(\Omega)$  para o momentum angular,  $D_{I_3, I_3^{fix}}^I(\omega)$  para isospin e das autofunções  $k_{T_3}(\vec{r}, t)$ , ou seja,

$$D_{J_3, J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, I_3^{fix}}^I(\omega) k_{T_3}(\vec{r}, t) \quad (3.29)$$

onde, face à simetria axial

$$J_3^{fix} = -2(I_3^{fix} + T_3). \quad (3.30)$$

Aqui  $I_3$  e  $J_3$  são respectivamente as projeções do isospin e do momentum angular no sistema laboratório,  $I_3^{fix}$  e  $J_3^{fix}$  as projeções no sistema fixo do sóliton e  $T_3$  a projeção do isospin do káon também no sistema fixo do sóliton.

Observemos que nestes estados–produto, para um dado valor da estranheza  $S$ , nem todos os valores de isospin são permitidos. Isto pode ser mostrado usando–se uma generalização do método utilizado para  $n = 1$ , os detalhes desta demonstração sendo dados no Apêndice D. Obtém–se como valores de isospin, para estados nas representações mínimas,

$$I = \frac{p}{2} \quad (3.31)$$

onde  $p \leq 6 + S$  deve ser ímpar (par) se  $S$  for ímpar (par). Esta relação, juntamente com o vínculo da simetria axial (3.30), implica em  $J_3^{fix}$  sempre par.

Para determinar a combinação linear correta de estados–produto para cada conjunto de números quânticos, deve–se levar em consideração todas as simetrias do problema. Como discutido por Kurihara *et al.* [38], em adição à simetria axial, a configuração usada para  $\hat{\pi}_n$  apresenta, para  $n = 2$ , as

simetrias de reflexão

$$\hat{\pi}_2(-x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \hat{\pi}_2(x, y, z), \quad (3.32)$$

$$\hat{\pi}_2(x, -y, z) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \hat{\pi}_2(x, y, z), \quad (3.33)$$

$$\hat{\pi}_2(x, y, -z) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \hat{\pi}_2(x, y, z). \quad (3.34)$$

Representando por  $\mathcal{R}_i^J(\phi)$  as rotações espaciais de ângulo  $\phi$  em relação ao eixo  $i$  e por  $\mathcal{R}_j^I(\theta)$  as iso-rotações de ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $j$ , as transformações de simetria podem também ser vistas como geradas por

$$\mathcal{R}_1^J(\pi) \mathcal{R}_1^I(\pi), \quad (3.35)$$

$$\mathcal{R}_2^J(\pi) \mathcal{R}_1^I(\pi) \text{ e} \quad (3.36)$$

$$\mathcal{P} \mathcal{R}_3^I(\pi), \quad (3.37)$$

respectivamente.  $\mathcal{P}$ , aqui, representa o operador paridade, que promove uma inversão espacial e que resulta em uma troca de sinal de todas as componentes do campo piônico.

A importância da primeira destas transformações de simetria para a construção das autofunções dos dibárions foi destacada primeiramente por Braaten e Carson [76]. De fato, como discutido em detalhes por Bohr e Mottelson [77], para sistemas com simetria axial a existência de uma simetria adicional em relação a uma rotação de ângulo  $\pi$  em torno de um eixo perpendicular ao eixo de simetria implica em ser esta rotação (de ângulo  $\pi$ ) parte dos graus de liberdade intrínsecos e portanto não pode ser incluída nos graus de liberdade rotacionais.

Pode-se expressar este vínculo impondo que o operador  $\mathcal{R}_{ext}$ , que realiza uma rotação atuando sobre os ângulos de orientação coletivos (variáveis externas), seja idêntico ao operador  $\mathcal{R}_{int}$ , que realiza a mesma rotação atuando nas variáveis intrínsecas,

$$\mathcal{R}_{ext} = \mathcal{R}_{int} . \quad (3.38)$$

Como no presente caso a rotação pode ser dada ou por (3.35) ou por (3.36) tem-se, em princípio, dois vínculos independentes. Veremos, entretanto, que quando aplicadas aos estados-produto, as duas operações de simetria produzem o mesmo resultado e portanto se terá ao final um único vínculo.

Assim, para satisfazer os vínculos impostos pelas simetrias da configuração escolhida, recorreremos à seguinte combinação linear para os estados-produto:

$$N \left[ 1 + (\mathcal{R}_{ext})^{-1} \mathcal{R}_{int} \right] D_{J_3, J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, J_3^{fix}}^I(\omega) k_{T_3}(\vec{r}, t) , \quad (3.39)$$

sendo  $N$  um fator de normalização. Ao escrever esta expressão usamos o fato de que, atuando sobre os estados-produto,  $(\mathcal{R}_{ext})^2 = (\mathcal{R}_{int})^2$ , como se verá a seguir.

A forma explícita da função de onda de um dibárion pode ser obtida aplicando os operadores de simetria à função de onda produto. Para os operadores coletivos tem-se

$$\left[ \mathcal{R}_1^J(\pi) \mathcal{R}_1^I(\pi) \right]^{-1} D_{J_3, J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, J_3^{fix}}^I(\omega) = (-)^{I+J} D_{J_3, -J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, -I_3^{fix}}^I(\omega) \quad \text{e} \quad (3.40)$$

$$\left[ \mathcal{R}_2^J(\pi) \mathcal{R}_1^I(\pi) \right]^{-1} D_{J_3, J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, J_3^{fix}}^I(\omega) = (-)^{I+J-J_3^{fix}} D_{J_3, -J_3^{fix}}^J(\Omega) D_{I_3, -I_3^{fix}}^I(\omega) . \quad (3.41)$$

Para determinar o efeito das transformações de simetria sobre a função de onda intrínseca observa-se que, além da transformação do campo de káons, deve-se incluir a do sóliton. Esta última contribuição [76, 78], usando-se a

natureza fermiônica do sóliton com  $B = 1$ , é<sup>2</sup>

$$\mathcal{R}_{1(2)}^J(\pi)\mathcal{R}_1^I(\pi)\psi_{sol} = -\psi_{sol}. \quad (3.42)$$

Quanto ao efeito das transformações de simetria sobre o campo kaônico, encontra-se

$$\mathcal{R}_{1(2)}^J(\pi)\mathcal{R}_1^I(\pi)k_{T_3}(S = \pm 1) = \mp i k_{-T_3}(S = \pm 1). \quad (3.43)$$

Na obtenção destas últimas equações, usamos a forma dada na relação (3.5) para káons ( $S = +1$ ) e a conjugada de carga para antikáons ( $S = -1$ ). Portanto, para um estado com valor de estranheza  $S$  arbitrário obtemos

$$\mathcal{R}_{1(2)}^J(\pi)\mathcal{R}_1^I(\pi)k_{T_3} = (-)^{-S/2}k_{-T_3}. \quad (3.44)$$

A única diferença entre as transformações de simetria (3.35) e (3.36) é, então, a presença de uma fase extra  $(-)^{J_3^{fix}}$  na eq.(3.41). Como aqui  $J_3^{fix}$  é sempre par vê-se que, como escritas acima, as duas operações de simetria produzem o mesmo efeito quando atuando sobre os estados-produto. Além disso, usando os vínculos para  $J_3^{fix}$  e  $I$  em conjunto com o efeito das operações de simetria sobre as funções de onda coletiva e intrínseca, eqs.(3.40) – (3.44), é fácil mostrar que  $\mathcal{R}_{ext}^2 = \mathcal{R}_{int}^2$ , quando aplicadas aos estados-produto.

Portanto, as funções de onda dos dibárions que satisfazem todos os vínculos impostos pelas simetrias do sistema têm a estrutura

$$\begin{aligned} \psi_{II_3, JJ_3, S}(\vec{r}, t) = & N \left( D_{J_3, -2K}^J(\Omega) D_{I_3, K-T_3}^I(\omega) k_{T_3}(\vec{r}, t) \right. \\ & \left. - (-)^{I+J-S/2} D_{J_3, 2K}^J(\Omega) D_{I_3, -K+T_3}^I(\omega) k_{-T_3}(\vec{r}, t) \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde aqui  $K = I_3^{fix} + T_3$ . A constante de normalização  $N$  pode ser facilmente calculada, obtendo-se

$$N = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{I_3^{fix}, 0} \delta_{T_3, 0})}} \frac{\sqrt{(2J+1)(2I+1)}}{8\pi^2}. \quad (3.46)$$

<sup>2</sup> Note-se que quando se estende o grupo de sabor de  $SU(2)$  para  $SU(3)^f$ , a fase negativa é obtida do termo de  $WZ$ .



Para determinar a paridade destas funções de onda recorreremos à operação de simetria dada em (3.37). De fato, como discutido por Bohr e Mottelson [77] a existência de tal tipo de simetria implica em que o operador paridade  $\mathcal{P}$  pode ser escrito como

$$\mathcal{P} = \mathcal{S} \mathcal{R}^{-1} , \quad (3.47)$$

onde  $\mathcal{S}$  ( $= \mathcal{P}\mathcal{R}_3^I(\pi)$  na presente situação) atua sobre as coordenadas intrínsecas, enquanto  $\mathcal{R}^{-1}$  ( $= [\mathcal{R}_3^I(\pi)]^{-1}$  aqui) atua sobre as coordenadas coletivas. Usando o fato de que  $K$  é sempre inteiro e que

$$\mathcal{S} \psi_{sol} = \psi_{sol} , \quad (3.48)$$

$$\mathcal{S} k_{\pm T_3} = (-)^{\pm T_3} k_{\pm T_3} \text{ e} \quad (3.49)$$

$$\mathcal{R}_3^I(\pi) D_{J_3, \mp 2K}^J(\Omega) D_{I_3, \pm(K-T_3)}^I(\omega) = (-)^{\pm(K-T_3)} D_{J_3, \mp 2K}^J(\Omega) D_{I_3, \pm(K-T_3)}^I(\omega), \quad (3.50)$$

resulta para a função de onda dada em (3.45)

$$\psi(-\vec{r}, t) = (-)^K \psi(\vec{r}, t). \quad (3.51)$$

A partir da forma explícita da função de onda vê-se que para  $K = 0$ ,  $T_3 = 0$ , apenas as combinações *Fermi-permitidas* (que satisfazem o vínculo  $(-)^{I+J-S/2} = -1$ ) sobrevivem, enquanto as combinações *Fermi-proibidas* têm norma nula. Para o caso particular de um sistema de dois núcleons ( $S = 0$ ), tem-se o vínculo  $(-)^{I+J} = -1$ , que nada mais é do que a forma generalizada do princípio de Pauli. É interessante notar que aqui este princípio se manifesta em uma forma mais convencional do que aquela da Ref. [78]. Isto se deve a uma escolha possivelmente mais conveniente das coordenadas espaciais. Em geral, usando o vínculo para isospin,  $I = \frac{p}{2}$ , em conjunto com a forma explícita dos autoestados dos dibárions, eq.(3.45), encontramos que os estados espúrios, tais como  $0^+(\overline{10})$  e outros, obtidos nas Refs. [73, 74, 38] são *removidos* do espectro. Os números quânticos dos estados ligados permitidos com  $J \leq 2$ , constam da Tabela 3.1.

$S$	$I$	$ I_3^{fix} $	$ T_3 $	$( J_3^{fix} )_{deg}^P$	$J^\pi$ (repr. $SU(3)$ ) $\leq 2$
0	0	0	0	$0_1^+$	$1^+(\overline{10})$
	1	0,1	0	$0_1^+; 2_1^-$	$0^+(27); 2^\pm(27)$
	2	0,1,2	0	$0_1^+; 2_1^-$	$1^+(35); 2^-(35)$
	3	0,1,2,3	0	$0_1^+; 2_1^-$	$0^+(28); 2^\pm(28)$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0_2^+; 2_1^-$	$1^+(\overline{10}), 0^+(27); 2^\pm(27)$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0_2^+; 2_2^-$	$0^+(27), 1^+(35); 2^\pm(27), 2^-(35)$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0_2^+; 2_2^-$	$0^+(28), 1^+(35); 2^\pm(28), 2^-(35)$
-2	0	0	0,1	$0_1^+; 2_1^-$	$0^+(27); 2^\pm(27)$
	1	0,1	0,1	$0_3^+; 2_2^-$	$0^+(27), 1^+(35, \overline{10}); 2^\pm(27), 2^-(35)$
	2	0,1,2	0,1	$0_3^+; 2_3^-$	$0^+(28, 27), 1^+(35); 2^\pm(28, 27), 2^-(35)$
-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$0_2^+; 2_2^-$	$0^+(27), 1^+(35); 2^\pm(27), 2^-(35)$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$0_4^+; 2_3^-$	$0^+(28, 27), 1^+(35, \overline{10}); 2^\pm(28, 27), 2^-(35)$
-4	0	0	0,1,2	$0_1^+; 2_1^-$	$1^+(35); 2^-(35)$
	1	0,1	0,1,2	$0_3^+; 2_3^-$	$0^+(28, 27), 1^+(35); 2^\pm(28, 27), 2^-(35)$
-5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$	$0_2^+; 2_2^-$	$0^+(28), 1^+(35); 2^\pm(28), 2^-(35)$
-6	0	0	0,1,2,3	$0_1^+; 2_1^-$	$0^+(28); 2^\pm(28)$

**Tab. 3.1:** Números quânticos permitidos para os estados ligados do sistema  $B = 2$ . Nas colunas estão relacionadas: (1) estranheza  $S$ , (2) valores permitidos para o isospin  $I$ , (3) projeção do isospin no sistema fixo,  $|I_3^{fix}| \leq I$ , (4) projeção do grande-spin do káon no sistema fixo  $|T_3| \leq |S/2|$ , (5) projeção do momentum angular no sistema fixo,  $|J_3^{fix}| = 2|I_3^{fix} + T_3|$ ,  $|J_3^{fix}| \leq 2$ , paridade  $P$  (eq.(3.51)) e número de estados (degenerados) com mesmo número quântico  $J_3^{fix}$ , (6) momentum angular  $J \leq 2$  e correspondentes representações  $SU(3)$  de sabor.

É importante observar que a função de onda obtida em (3.45) não é auto-função do Hamiltoniano rotacional  $H_{rot}$ . Como o termo de Coriolis (último termo da eq.(3.26)) não comuta com  $T_3$ , as autofunções de  $H_{rot}$  serão combinações daquelas dadas na eq.(3.45), com os mesmos números quânticos  $II_3, JJ_3, (J_3^{fix})^2$ , mas diferentes valores de  $T_3^2$ .

Usando as eqs.(3.26) e (3.45) pode-se finalmente obter a fórmula de massa para os dibárions. Para o estado fundamental

$$M = M_{sol} + \varepsilon |S| + M_{rot}(S) , \quad (3.52)$$

onde  $M_{rot}(S)$  é a contribuição rotacional. Como tanto para  $S = 0$  como para  $S = -1$  apenas um valor de  $T_3^2$  é permitido ( $T_3^2 = 0$  para  $S = 0$  e  $T_3^2 = 1/4$  para  $S = -1$ ),  $M_{rot}$  é simplesmente dada pelo valor médio de  $H_{rot}$  no correspondente estado dibariônico.

Para  $S = 0$  obtém-se

$$M_{rot}^{S=0} = \frac{1}{2\mathcal{I}_1} [J(J+1) - (J_3^{fix})^2] + \frac{1}{2\mathcal{I}_2} [I(I+1) - (I_3^{fix})^2] + \frac{1}{2\mathcal{I}_3} (I_3^{fix})^2, \quad (3.53)$$

o mesmo resultado de Weigel, Schwesinger e Holzwarth [74].

Para  $S = -1$ , a contribuição rotacional é

$$M_{rot}^{S=-1} = \frac{1}{2\mathcal{I}_1} [J(J+1) - (J_3^{fix})^2] + \frac{1}{2\mathcal{I}_3} \left\{ (1 - c_1) \left[ (I_3^{fix})^2 - \frac{c_1}{4} \right] + \frac{c_1 (J_3^{fix})^2}{4} \right\} + \frac{1}{2\mathcal{I}_2} \left[ I(I+1) - (I_3^{fix})^2 + c_2 \left( \frac{c_2}{2} - (-)^{I+J+\frac{1}{2}} \delta_{J_3,0} \sqrt{I(I+1) + \frac{1}{4}} \right) \right]. \quad (3.54)$$

Para  $S = -2$ , dois valores de  $T_3^2$  (0 e 1) são em geral permitidos<sup>3</sup>. Portanto,  $M_{rot}$  é dada pelos autovalores de

$$M_{rot}^{S=-2} = \frac{1}{2\mathcal{I}_1} [J(J+1) - (J_3^{fix})^2] + \frac{1}{2\mathcal{I}_2} [I(I+1) + c_2^2] + \frac{c_1 K^2}{2\mathcal{I}_3}$$

<sup>3</sup> Dependendo dos valores dos outros números quânticos, *ambos* os valores poderão ser permitidos para um dado estado.

$$+ \left( \begin{array}{cc} \frac{c_2^2 - K^2}{2I_2} + \frac{1-c_1}{2I_3} K^2, & \frac{c_2}{I_2\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \delta_{K,0})(I \mp K)(I \pm N)} \\ \frac{c_2}{I_2\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \delta_{K,0})(I \mp K)(I \pm N)}, & \frac{1-c_1}{2I_3} (N^2 - c_1) - \frac{N^2}{2I_2} \end{array} \right) \quad (3.55)$$

com  $N = K \pm 1$ . Na construção da matriz  $2 \times 2$  usamos a base dada na eq.(3.45), ordenada de acordo com  $T_3^2$  crescente.

Note-se que, embora em alguns casos particulares as expressões para as correções rotacionais para os dibárions com  $S = -1$  e  $S = -2$  concordem com aquelas apresentadas na Ref. [73], em geral, são diferentes. Isto se deve ao fato de que, em geral, as autofunções usadas naquela referência não satisfazem os vínculos impostos pelas transformações de simetria, eqs.(3.35) e (3.36).

### 3.4 Resultados e discussão

Em nossos cálculos consideramos dois dos três conjuntos de valores para os parâmetros da ação efetiva apresentados anteriormente, a saber os conjuntos  $CJ1$  e  $CJ2$ . O conjunto  $CJ3$ , conduz a uma massa muito grande para o sóliton e não será, então, utilizado aqui.

Ao comparar nossos resultados com os da Ref. [73], deve ser salientado que ali a razão entre as constantes de decaimento,  $f_K/f_\pi$ , foi tomada como igual a 1, enquanto aqui a razão usada é igual a 1,22.

Quando o conjunto  $CJ2$  é usado e apenas  $g_1$ , constante da expressão (3.4), é tomado como parâmetro variacional, o mínimo para a massa do sóliton com  $B = 2$  é encontrado para

$$g_1 = -0,339, \quad g_{i \neq 1} = 0. \quad (3.56)$$

A inclusão de um segundo parâmetro variacional  $g_2$  não conduz a melhora significativa na energia mínima. Além disso, verifica-se que para o conjunto

$CJ1$  o mínimo aparece sempre no mesmo valor que o de  $g_1$  na situação em que só concorre um parâmetro variacional. Por esta razão usamos de fato somente  $g_1 \neq 0$  (3.56) em todos os cálculos efetuados.

Na Tabela 3.2, apresentamos os valores calculados para os parâmetros constantes da fórmula de massa dos dibárions, tanto para o caso de píons não-massivos quanto para o de píons massivos. Os parâmetros do setor não-estranho correspondentes ao conjunto  $CJ2$  foram dados na Ref. [38], mas estão aqui repetidos por completicidade. Os valores de  $\varepsilon$  (238  $MeV$  para  $CJ1$  e 226  $MeV$  para  $CJ2$ ) indicam que os káons são menos ligados ao sóliton do que no caso  $B = 1$ , pois usando as autoenergias dos káons do sistema  $B = 1$  (vide Tab. 2.3) obtemos

$$\Delta\varepsilon \equiv \varepsilon(B = 2) - \varepsilon(B = 1) = 16 \text{ MeV} \quad (3.57)$$

para os conjuntos  $CJ1$  e  $CJ2$ . Resultado similar foi encontrado por Kunz e Mulders [73], embora o valor de  $\Delta\varepsilon$  tenha sido um pouco menor ( $\Delta\varepsilon \simeq 10 \text{ MeV}$ ).

	$M_{sol}$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$	$\varepsilon$	$c_1$	$c_2$
	$MeV$	$fm$	$fm$	$fm$	$MeV$		
$CJ1$	1675	2,62	1,75	1,17	238	0,623	0,436
$CJ2$	1675	3,22	2,11	1,42	226	0,554	0,334

**Tab. 3.2:** Valores dos parâmetros constantes da fórmula de massa dos dibárions.  $CJ1$  corresponde ao caso de píons não-massivos e  $CJ2$  ao de píons massivos (vide Tab. 2.3).

Note-se que quando o valor empírico da razão entre as constantes de decaimento mesônicas é usado, além de se eliminar a ligação excessiva do káon encontrada na Ref. [73],  $\Delta\varepsilon$  torna-se menor. De fato, adotando para todos os  $g_i$  o valor 0 e usando o conjunto  $CJ1$ , como em [73], mas mantendo

$f_K/f_\pi = 1,22$ , encontra-se  $\Delta\varepsilon = 0$ . Por outro lado, o uso da configuração axialmente simétrica melhorada aumenta o valor de  $\Delta\varepsilon$ , sendo o efeito maior para  $f_K/f_\pi = 1,22$  ( $16 \text{ MeV}$ ) do que para  $f_K/f_\pi = 1$  ( $8 \text{ MeV}$ ). Os mesmos comentários aplicam-se ao conjunto  $CJ2$ .

As correções rotacionais às massas dos dibárions calculadas,  $M_{rot}$ , encontram-se na Tabela 3.3. Estão relacionados apenas os estados permitidos com  $M_{rot} \leq 250 \text{ MeV}$ . Para comparação, apresentamos também os resultados da Ref. [73] e a soma das contribuições ao estado bárion-bárion de mais baixa energia em cada canal particular. Observamos que as energias rotacionais aqui obtidas são dependentes da escolha dos parâmetros, sendo menores para o conjunto  $CJ2$ . Para o conjunto  $CJ1$  tais energias são, em geral, muito similares àquelas apresentadas por Kunz e Mulders. Uma exceção importante é o estado fundamental com  $S = -2$ , para o qual nossa predição está em torno de metade do valor da energia referida em [73]. Esta diferença é principalmente devida ao menor valor de  $c_2$  em nosso modelo. Os reflexos deste resultado são de alguma importância, visto que em nosso trabalho a energia rotacional deste estado jaz abaixo do correspondente limiar para ambos os conjuntos, em contraste com a situação apresentada na Ref. [73].

Outro estado  $S = -2$  interessante para a discussão é o estado  $(1, 1^+)$ . Este é o estado de mais baixa energia para o qual os termos não-diagonais em (3.55) são não nulos. Portanto, para calcular a correspondente energia rotacional,  $\mathcal{M}_{rot}^{S=-2}$  deve ser diagonalizada. Deve ser enfatizado que ao assim proceder vai-se além de  $\mathcal{O}(N_c^{-1})$  na expansão em potências de  $N_c$ . Estritamente falando, isto não parece consistente com o fato de outras contribuições de mesma ordem terem sido sistematicamente desprezadas. Entretanto, considerando apenas o termo diagonal de  $\mathcal{M}_{rot}^{S=-2}$  como se fôsse a correção rotacional a tal estado, obteríamos  $M_{rot}(1, 1^+) = 154 \text{ MeV}$  ( $CJ1$ ). Esta grande correção rotacional está em desacordo com outros cálculos (vide, p. ex., [72]) que predizem a existência de um estado fundamental com os números

	$(I, J^\pi)$	$CJ1$	$CJ2$	Ref. [73]
$S = 0$	$0, 1^+$	75	61	76
	$1, 0^+$	113	93	120
	NN	147	147	147
	$1, 2^-$	216	177	212
$S = -1$	$1/2, 0^+$	61	46	76
	$1/2, 1^+$	87	75	83
	$\Lambda\Lambda$	92	85	90
	$3/2, 0^+$	157	138	160
	$1/2, 2^-$	165	129	169
$S = -2$	$0, 0^+$	21	11	39
	$\Lambda\Lambda$	37	22	33
	$1, 0^+$	79	66	88
	$1, 1^+$	107	98	115
	$0, 2^-$	119	88	130
	$1, 2^-$	187	152	182
	$0, 2^+$	247	195	> 250

**Tab. 3.3:** Correções rotacionais às massas dos dibárions, calculadas no presente modelo, relativas aos estados permitidos com  $M_{rot} \leq 250 \text{ MeV}$ .  $NN$ ,  $\Lambda\Lambda$  e  $\Lambda\Lambda$  representam as somas das contribuições rotacionais para as correspondentes partículas e servem como limiar rotacional em cada canal particular.

quânticos  $(1, 1^+)$ .

Focalizemos agora nossa atenção no problema da estabilidade da partícula  $H$  [37, 80]. As diferentes contribuições à energia de ligação neste caso estão dadas na Tabela 3.4. Como se observa, nosso modelo prediz que para os dois conjuntos de parâmetros,  $CJ1$  e  $CJ2$ ,  $H$  é ligada. Como a atração encontrada em nível das interações hiperfinas (rotacionais) não é suficiente para compensar o fato de que os káons são menos ligados ao di-skyrmion, a principal fonte de atração decorre do valor mais baixo da massa do sóliton com  $B = 2$ , obtido com a configuração axialmente simétrica melhorada. Situação similar ocorre em cálculos em modelos de sólitons com o modelo coletivo  $SU(3)$ . É importante lembrar que, embora o estado de menor energia no canal  $S = 0$  tenha os números quânticos do dêuteron, sua identificação com esta partícula não é completamente clara, visto que o sistema aqui analisado tem aproximadamente 1,6 vezes o tamanho do núcleon enquanto que o  $r_{rms}$  do dêuteron é, experimentalmente,  $2,6 < r^2 >^{\frac{1}{2}}_{núcleon}$  [74].

	$CJ1$	$CJ2$
$\Delta M_{sol}$	-52	-54
$2\Delta\varepsilon$	32	32
$\Delta M_{rot}$	-15	-12
$M(H) - 2M(\Lambda)$	-34	-34

**Tab. 3.4:** Contribuições (em  $MeV$ ) à massa da partícula  $H$  em relação ao dobro da correspondente contribuição para a massa de  $\Lambda$ .

Em particular, uma grande energia de ligação ( $\simeq 130 MeV$ ) é predita para este estado no presente modelo. Como uma considerável parte desta ligação excessiva vem da contribuição de  $\mathcal{O}(N_c)$  à massa do dibárion, isto poderia ser uma indicação de que o torus axialmente simétrico estático não fornece a descrição correta para os bárions com  $B = 2$ . Usando-se esta con-



figuração apenas a energia potencial do dibárion está contemplada, enquanto toda a contribuição da energia cinética é desprezada. De fato, mostra-se na Ref. [44], onde uma configuração de di-skyrmion ligado foi estudada numericamente em uma rede discreta, que o estado toroidal se forma apenas quando da mínima separação entre os dois skyrmions, enquanto na maior parte do tempo o sistema de dois skyrmions consiste de dois bárions bem separados, como esperado para o dêuteron.

Outro efeito, ignorado em nossos cálculos, que se pode relacionar com a perda das correções cinéticas mencionadas acima é o efeito de Casimir, que descreve os desvios na energia do vácuo produzidos pela presença do sólito. Uma estimativa deste efeito, usando-se a configuração  $SO(3)$  [81], indica que o mesmo tende a deslocar a massa da configuração  $B = 2$ , em relação a dois ouriços  $B = 1$ , para cima. Se considerarmos ser esta a principal fonte de repulsão que leva a massa do dêuteron a seu valor físico, então tal repulsão seria suficiente para impedir a formação da partícula  $H$ .

### 3.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos a estrutura dos dibárions estranhos ligados no contexto da  $AEL$ . Nesta aproximação tais sistemas são considerados como estados ligados de káons com um sólito topológico com número bariônico  $B = 2$ . Para descrever a configuração de di-skyrmion recorreremos a uma configuração *axialmente simétrica melhorada*, onde a dependência no ângulo azimutal  $\theta$  é encontrada através de um processo variacional. Tal configuração fornece uma aproximação muito boa à solução para a energia mínima encontrada numericamente, que também tem simetria axial. Mostramos que, se os vínculos impostos pelas simetrias da configuração toroidal de fundo são satisfeitos, todos os estados espúrios são eliminados do espectro. Em particular, obte-

mos uma forma generalizada do princípio de Pauli para os estados de mais baixa energia com  $B = 2$ , com valores pares de estranheza. No setor  $S = 0$  isto implica em que o estado de menor energia permitido tem os números quânticos da partícula  $H$ . Isto está em acordo com as predições de modelos de quarks.

Encontramos ainda que, embora os káons sejam menos ligados ao di-skyrmion do que na situação de um único sóliton, o dibárion  $H$  é levemente ligado dentro de nossas aproximações. Esta energia de ligação é principalmente devida a uma massa um tanto menor do di-skyrmion em relação à soma das massas de dois skyrmions individuais. Entretanto, norteados pela fenomenologia no caso do dêuteron (que é fortemente ligado neste modelo [38]), diríamos que a configuração toroidal estática tende a subestimar a massa do sóliton com  $B = 2$ . Além disso, estudos numéricos [44] mostram que o torus é formado apenas quando da separação mínima dos dois skyrmions. Sob este aspecto, seria interessante analisar se os desvios dinâmicos da solução de menor energia podem ser parametrizados em função de alguma coordenada coletiva. Flutuações de ponto-zero desta coordenada poderiam então fornecer um mecanismo para aumentar a massa do sóliton com  $B = 2$  sem afetar a massa do sóliton com  $B = 1$ . Outro efeito que pode diminuir as energias de ligação (provavelmente muito relacionado com o anterior) é o efeito de Casimir, que conduz a contribuições de  $\mathcal{O}(N_c^0)$  [81]. Como se espera que estes dois efeitos dêem contribuições similares a todos os estados dibariônicos, independentemente de suas estranhezas, fica claro que se eles forem intensos o suficiente para aumentar a massa do dêuteron até seu valor empírico, deverão, então, conduzir a uma estrutura não ligada para a partícula  $H$ .

## Capítulo 4

# INTERAÇÃO $\Lambda N$

A escassez de dados experimentais relativos às interações *híperon-núcleon* e *híperon-híperon* exige um maior suporte teórico para a descrição destes dados. As análises e predições mais frequentes encontradas na literatura utilizam os modelos de troca de bósons.

O modelo de Skyrme em  $SU(2)$  foi usado com algum sucesso no cálculo dos potenciais *núcleon-núcleon*. A generalização ao estudo dos potenciais *bárion-bárion* pode ser feita em extensões a  $SU(3)$ , encontrando-se na literatura contribuições relativas ao *modelo de coordenadas coletivas - MCC*. Conforme mencionado anteriormente, utilizamos neste trabalho a *aproximação de estado ligado - AEL* - para o estudo de sistemas de dois bárions. Considerando sobretudo os resultados experimentais existentes, optamos por apresentar aqui o desenvolvimento do formalismo para o potencial *híperon-núcleon*. A extensão ao potencial *híperon-híperon* não apresenta maiores dificuldades. O esquema geral é ilustrado pela aplicação ao potencial  $\Lambda N$  para o qual encontra-se a maior quantidade de informação. As componentes central, spin-spin e tensorial desta interação são obtidas e comparadas com aquelas derivadas no *MCC*.

## 4.1 Interação bárion–bárion

Como no caso do sistema  $NN$ , o interesse na interação de dois corpos híperon–núcleon se prende a múltiplas razões.

Tal interação é, por exemplo, o constituinte fundamental para o entendimento microscópico dos hipernúcleos (vide, p. ex., [82]). Além disso, a inclusão do grau de liberdade de estranheza dentre as características dos bárions, reunindo de certa forma núcleons e híperons, impõe a extensão dos modelos de potencial núcleon–núcleon, de modo a fornecer um quadro coerente e unificado da interação bárion–bárion.

Ainda que a  $CDQ$  seja considerada como a teoria fundamental para as interações fortes, as regiões de pequena energia transferida e baixo momento, relevantes para a Física Nuclear, não podem ser descritas por processos perturbativos, o que tem inviabilizado até agora um cálculo primário da interação bárion–bárion em termos de quarks e glúons.

No modelo fenomenológico de troca de um bóson (*one boson exchange – OBE*) (vide, p. ex., [83]), a interação núcleon–núcleon é descrita através da troca de diferentes mésons, suplementada por uma repulsão de curto alcance. No caso da interação híperon–núcleon, os potenciais de Nijmegen [84, 85, 86] e de Jülich [87, 88] são obtidos pela extensão do modelo *OBE* de modo a incluir os graus de liberdade de estranheza.

Desta maneira, os dados de espalhamento híperon–núcleon, predominantemente  $\Lambda N$ , podem ser descritos em um esquema unificado ao preço da introdução de um considerável número de parâmetros ajustáveis. De fato, como os dados experimentais são poucos, podem ser reproduzidos com o uso de vários conjuntos de parâmetros, dos quais dois exemplos representativos são aqueles que definem os chamados modelos D e F do grupo de Nijmegen [84, 85, 86].

O modelo de Skyrme em  $SU(2)$  foi usado na literatura para a construção e análise do potencial núcleon-núcleon [17, 41], o surgimento das diversas componentes do potencial sendo um dos sucessos do modelo (vide, por ex., [42, 59, 89]). Neste capítulo recorreremos à *AEI* para incluir a estranheza no esquema de cálculo dos potenciais híperon-núcleon, comparando resultados da interação  $\Lambda N$  aos das Refs.[34, 35, 36], onde foram estudados no modelo coletivo (*MCC*).

Assim como nos cálculos do potencial  $NN$  anteriormente realizados com o modelo de Skyrme em  $SU(2)$ , com razoável sucesso qualitativo, são geradas aqui as diversas componentes (central, spin-spin, tensorial etc) do potencial.

No caso da interação híperon-núcleon, o potencial pode ser escrito na forma geral

$$V_{YN}(\vec{r}) = V_C(r) \mathcal{O}_C + V_S(r) \mathcal{O}_S + V_T(r) \mathcal{O}_T, \quad (4.1)$$

em que  $\mathcal{O}_C = I_{2 \times 2}^Y I_{2 \times 2}^N$ ,  $\mathcal{O}_S = \vec{\sigma}_Y \cdot \vec{\sigma}_N$ ,  $\mathcal{O}_T = 3 \vec{\sigma}_Y \cdot \hat{r} \vec{\sigma}_N \cdot \hat{r} - \vec{\sigma}_Y \cdot \vec{\sigma}_N$  são operadores que envolvem os graus de liberdade de spin e  $V_C(r)$ ,  $V_S(r)$ ,  $V_T(r)$  são, respectivamente, as partes central, spin-spin e tensorial da interação. Tais componentes podem ainda ser analisadas em isospin, decompondo-se as mesmas em contribuições independentes de isospin,  $V^+$ , e dependentes de isospin,  $V^-$ , de modo que

$$V_{C,S,T}(r) = V_{C,S,T}^+(r) + V_{C,S,T}^-(r) \vec{\tau}_Y \cdot \vec{\tau}_N. \quad (4.2)$$

As contribuições dependentes de momentum angular, como o acoplamento spin-órbita por exemplo, não estão aqui incluídas porque são inacessíveis sob as aproximações usadas, i.e., são de ordem mais alta no parâmetro de expansão. A nova peculiaridade do caso  $SU(3)$  (em relação a  $SU(2)$ ) é a interação na qual a troca de estranheza é intermediada por káons. Na linguagem dos modelos *OBE*, estas interações são de primeira ordem em trocas de káons, mas assim como as contribuições diretas, incluem ordens superiores

(mais do que um bóson trocado) no setor  $SU(2)$ . O esquema geral é ilustrado pelo cálculo explícito da componente diagonal ao potencial  $\Lambda N^1$  que, além do grande interesse físico como mencionado anteriormente, proporciona resultados com um tratamento matemático mais despojado, em vista da ausência de interações dependentes de isospin, o que torna mais transparente sua análise.

## 4.2 Lagrangeano de interação

### híperon–núcleon na aproximação produto

Com o intuito de obter o potencial híperon–núcleon, diferentemente do estudo de estados ligados apresentado no capítulo anterior em que recorremos a uma configuração axialmente simétrica, a configuração de número bariônico  $B = 2$  será aproximada pelo produto de duas soluções para  $B = 1$ , centradas em pontos  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$  distintos. Esta é a conhecida *aproximação produto*, muito adequada para o estudo do comportamento do potencial a longas e médias distâncias, visto que nestas distâncias os sólitons mantêm a simetria esférica original.

Além disso, a aproximação é razoável a curtas distâncias, conforme os argumentos apresentados na seção (3.4). A rigor, esta aproximação falharia [90] para distâncias muito curtas quando a solução exata tem a forma toroidal usada no estudo dos dibárions. Contudo, como mostrado na Ref. [44], o estado toroidal se forma apenas quando da separação mínima entre os skyrmions.

Na *aproximação produto*, o campo para número bariônico  $B = 2$  é escrito

---

<sup>1</sup> As contribuições dos canais acoplados  $\Sigma N$  e  $\Lambda N$  têm sido objeto de análise nos modelos de troca de mésons [82].

como

$$U_{B=2}(\vec{x}; \vec{x}_1, \vec{x}_2) = U_{B=1}(\vec{x} - \vec{x}_1)U_{B=1}(\vec{x} - \vec{x}_2) \equiv U_1 U_2 \quad , \quad (4.3)$$

os índices 1, 2 indicando a dependência nas coordenadas dos sólitons individuais. O Lagrangeano do sistema pode ser obtido, então, substituindo-se o campo  $U$  nos diversos termos constituintes da interação.

Usando a premissa (4.3), a densidade lagrangeana relativa ao termo quadrático  $\mathcal{L}_2$ , eq.(2.3), pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [L_\mu^1 L_1^\mu] - \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [L_\mu^2 L_2^\mu] + \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [L_\mu^1 R_2^\mu + L_\mu^2 R_1^\mu] \quad , \quad (4.4)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito de (4.4) são termos de partícula única e o terceiro é o termo de interação entre as partículas, com  $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$  e  $R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger$ . Aqui e no que segue efetuamos uma simetrização explícita nos índices 1 e 2 para assegurar a invariância da interação frente à troca das duas partículas.

Descontadas as contribuições de partícula única, o termo quadrático se reduz, então, a

$$\mathcal{L}_2^{(int)} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} [L_\mu^1 R_2^\mu + L_\mu^2 R_1^\mu] \quad . \quad (4.5)$$

O termo quártico, eq.(2.4), já descontadas as contribuições de partícula única, conduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{(int)} = \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [ & -4L_\mu^1 L_\nu^1 L_1^\mu R_2^\nu + 2L_\mu^1 L_1^\mu L_\nu^1 R_2^\nu + 2L_\mu^1 L_\nu^1 L_1^\nu R_2^\mu \\ & -4L_\mu^1 R_\nu^2 R_2^\mu R_2^\nu + 2L_\mu^1 R_2^\mu R_\nu^2 R_2^\nu + 2L_\mu^1 R_\nu^2 R_2^\nu R_2^\mu \\ & +4L_\mu^1 L_\nu^1 R_2^\mu R_2^\nu - 2L_\mu^1 L_1^\mu R_\nu^2 R_2^\nu - 2L_\mu^1 L_\nu^2 R_2^\nu R_2^\mu \\ & +2L_\mu^1 R_\nu^2 L_1^\mu R_2^\nu - L_\mu^1 R_2^\mu L_\nu^1 R_2^\nu - L_\mu^1 R_\nu^2 L_1^\nu R_2^\mu \\ & + (1 \leftrightarrow 2) ] \quad , \quad (4.6) \end{aligned}$$

enquanto para o termo de quebra de simetria, eq.(2.15), obtém-se, para a contribuição do termo de interação,

$$\mathcal{L}_{SB}^{(int)} = \frac{f_\pi^2 m_\pi^2 + 2f_K^2 m_K^2}{24} \text{Tr} [(U_1 - 1)(U_2 - 1) - 2]$$

$$\begin{aligned}
 & +\sqrt{3}\frac{f_\pi^2 m_\pi^2 - f_K^2 m_K^2}{12}\text{Tr}[\lambda_8((U_1 - 1)(U_2 - 1) - 1) + (1 \leftrightarrow 2)] \\
 & -\frac{f_K^2 - f_\pi^2}{24}\text{Tr}\left[U_2(1 - \sqrt{3}\lambda_8)U_1(L_\mu^1 - R_\mu^2)(L_\mu^1 - R_\mu^2) + (1 \leftrightarrow 2)\right] \\
 & +h.c. , \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

onde  $h.c.$  representa conjugado hermitiano e  $(1 \leftrightarrow 2)$  representa a troca dos índices 1 e 2 (simetrização).

A contribuição ao termo de interação, que se origina do termo de Wess-Zumino (2.13), é

$$\mathcal{L}_{WZ}^{(int)} = -\frac{iN_c}{96\pi^2}\text{Tr}\left[L_1^3 R_2 - R_2^3 L_1 - \frac{1}{2}L_1 R_2 L_1 R_2 + (1 \leftrightarrow 2)\right] , \tag{4.8}$$

onde a ausência dos índices de Lorentz indica o uso da notação de 1-forma da geometria diferencial, i.e.,

$$L_1^3 R_2 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} L_1^\mu L_1^\nu L_1^\alpha R_2^\beta . \tag{4.9}$$

O uso da parametrização  $CK$  (vide relação (2.16)) para os campos quirais individuais e a subsequente expansão até segunda ordem nas componentes kaônicas conduz a uma densidade lagrangeana de interação que pode ser escrita como a soma de três diferentes tipos de contribuições, a saber

$$\mathcal{L}^{(int)} = \mathcal{L}^{\pi d} + \mathcal{L}^{kd} + \mathcal{L}^{ke} . \tag{4.10}$$

O termo direto  $\mathcal{L}^{\pi d}$  é uma contribuição puramente piônica ( $SU(2)$ ), enquanto  $\mathcal{L}^{kd}$  e  $\mathcal{L}^{ke}$  compreendem as contribuições devidas aos campos de káons presentes nas interações direta e de troca, respectivamente.

Uma representação esquemática destas interações é apresentada na Fig. 4.1 a seguir.

A Fig. 4.1.a que representa o termo direto  $\mathcal{L}^{\pi d}$ , de ordem  $N_c^1$ , apresenta o káon ligado atuando como espectador, enquanto as Figs. 4.1.b e c que



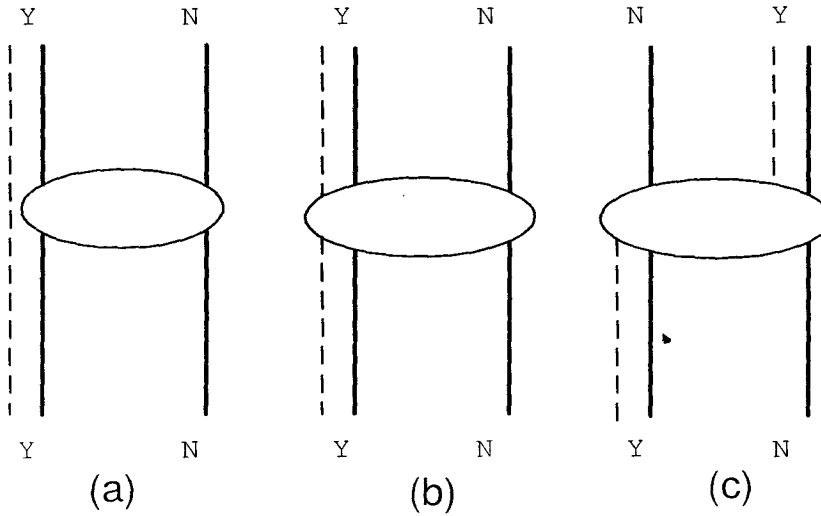


Fig. 4.1: Representação esquemática dos diferentes tipos de contribuições ao potencial híperon-núcleon. (a) Contribuições "piônicas" diretas  $\mathcal{L}^{\pi d}$ , (b) contribuições "kaônicas" diretas,  $\mathcal{L}^{kd}$ , e (c) contribuições "kaônicas" de troca,  $\mathcal{L}^{ke}$ .

representam os dois termos de ordem  $N_c^0$ , a saber  $\mathcal{L}^{kd}$  e  $\mathcal{L}^{ke}$ , evidenciam os campos kaônicos presentes nas interações direta e de troca, respectivamente.

Os termos  $\mathcal{L}^{\pi d}$  e  $\mathcal{L}^{kd}$  são ambos contribuições diretas, visto que as partículas do estado final não são intercambiadas em relação ao estado inicial.

O termo  $\mathcal{L}^{kd}$  corresponde aos processos em que os graus de liberdade kaônicos são apenas excitados, enquanto a contribuição  $\mathcal{L}^{ke}$  envolve a troca de um káon entre os bárions, sendo por isto chamada de *interação de troca*.

Em geral, cada termo na ação efetiva (2.14) contribui para as três partes distintas  $\mathcal{L}^{\pi d}$ ,  $\mathcal{L}^{kd}$  e  $\mathcal{L}^{ke}$  nas quais foi decomposta a densidade lagrangeana de interação. Para o termo quadrático de interação, incluído na eq.(4.4), temos

$$\mathcal{L}_2^{\pi d} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} \left[ l_\mu^1 r_2^\mu + l_\mu^2 r_1^\mu \right], \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2^{kd} = & \frac{1}{4} \left( (D^\mu K_2)^\dagger n_2^\dagger l_\mu^1 n_2 K_2 - K_2^\dagger n_2^\dagger l_\mu^1 n_2 D^\mu K_2 \right) \\
 & + \frac{1}{4} \left( (D^\mu K_1)^\dagger n_1 r_\mu^2 n_1^\dagger K_1 - K_1^\dagger n_1 r_\mu^2 n_1^\dagger D^\mu K_1 \right) \\
 & - \frac{1}{8} \left( K_2^\dagger n_2^\dagger r^{2\mu} l_\mu^1 n_2 K_2 + K_2^\dagger n_2^\dagger l_\mu^1 r^{2\mu} n_2 K_2 \right. \\
 & \quad \left. + K_1^\dagger n_1 l_\mu^1 r^{2\mu} n_1^\dagger K_1 + K_1^\dagger n_1 r^{2\mu} l_\mu^1 n_1^\dagger K_1 \right) + (1 \leftrightarrow 2) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2^{ke} = & \frac{1}{2} \left( (D_\mu K_1)^\dagger n_1 n_2 D^\mu K_2 + (D_\mu K_2)^\dagger n_2^\dagger n_1^\dagger D^\mu K_1 \right) \\
 & + \frac{1}{4} \left( (D_\mu K_1)^\dagger n_1 r^{2\mu} n_2 K_2 + (D_\mu K_2)^\dagger n_2^\dagger l^{1\mu} n_1^\dagger K_1 \right) \\
 & - \frac{1}{4} \left( K_1^\dagger n_1 l^{1\mu} n_2 D_\mu K_2 + K_2^\dagger n_2^\dagger r^{2\mu} n_1^\dagger D_\mu K_1 \right) \\
 & - \frac{1}{8} \left( K_1^\dagger n_1 l^{1\mu} r_\mu^2 n_2 K_2 + K_2^\dagger n_2^\dagger r^{2\mu} l_\mu^1 n_1^\dagger K_1 \right) + (1 \leftrightarrow 2) \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

onde  $n = \sqrt{u_\pi}$  e

$$l_\mu = u_\pi^\dagger \partial_\mu u_\pi, \quad r_\mu = u_\pi \partial_\mu u_\pi^\dagger \quad e \quad (4.14)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} (n^\dagger \partial_\mu n + n \partial_\mu n^\dagger). \quad (4.15)$$

Na notação adotada, a derivada covariante  $D_\mu$  atua na mesma coordenada  $i$  do campo kaônico  $K_i$ . No caso do termo de Wess–Zumino, a contribuição  $SU(2)$  pura,  $\mathcal{L}_{WZ}^{\pi d}$ , é nula e as duas contribuições restantes são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WZ}^{kd} = & -\frac{\omega N_c}{48\pi^2 f_\pi^2} \left[ K_2^\dagger n_2^\dagger l_1 r_2 n_2 D K_2 + (D K_2)^\dagger n_2^\dagger l_1 r_2 n_2 K_2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} K_2^\dagger n_2^\dagger (l_1^3 + l_1 r_2^2 - l_1 r_2 l_1) n_2 K_2 \right. \\
 & \quad \left. - (F_i \leftrightarrow -F_i) + h.c. \right] + (1 \leftrightarrow 2) \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WZ}^{ke} = & \frac{\omega N_c}{48\pi^2 f_\pi^2} \left[ K_1^\dagger n_1^\dagger S n_2^\dagger D K_2 + (D K_1)^\dagger n_1^\dagger S n_2^\dagger K_2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} K_1^\dagger n_1^\dagger (S l_2 - r_1 S) n_2^\dagger K_2 - (F_i \leftrightarrow -F_i) \right] + (1 \leftrightarrow 2), \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

sendo  $F_i$  a função perfil do sóliton  $i$  (ângulo quiral) e  $S = l_2^2 + r_1^2 - l_2 r_1$ . A substituição ( $F_i \leftrightarrow -F_i$ ), implica nas substituições  $l \leftrightarrow r$  e  $n \leftrightarrow n^\dagger$ . Note-se também que ainda usamos a notação de 1-forma nas contribuições  $WZ$ , i.e.,

$$K_2^\dagger n_2^\dagger l_1 r_2 n_2 D K_2 \equiv \varepsilon_{ijk} K_2^\dagger n_2^\dagger l_1^i r_2^j n_2 D^k K_2 . \quad (4.18)$$

Além disso, usamos para os antikáons ligados,

$$\dot{K} = i\omega K , \quad (4.19)$$

com  $\omega > 0$ .

Expressões similares podem ser obtidas para os termos de Skyrme,  $\mathcal{L}_4$ , e de quebra de simetria,  $\mathcal{L}_{SB}$ , respectivamente. Como suas formas explícitas são extensas e não são particularmente instrutivas, optamos por apresentá-las no Apêndice F.

A quantização dos sistemas de dois sólitons é efetuada através do uso de coordenadas coletivas. Os estados ligados são submetidos a rotações independentes

$$\begin{aligned} u_1 &\rightarrow A_1 u_1 A_1^\dagger , & u_2 &\rightarrow A_2 u_2 A_2^\dagger , \\ K_1 &\rightarrow A_1 K_1 , & K_2 &\rightarrow A_2 K_2 , \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são matrizes de  $SU(2)$ . A dependência nas coordenadas coletivas pode ser reexpressa na coordenada relativa

$$C = A_1^\dagger A_2 . \quad (4.21)$$

A fim de descrever as partículas físicas, efetuam-se projeções nos estados de bons números quânticos de spin e isospin. As correspondentes funções de onda dos híperons são aquelas apresentadas em (2.21), i.e.,

$$K(\vec{r}, t) = \sum_{\Lambda} k_{\Lambda l}(r, t) \mathcal{Y}_{\Lambda l \Lambda_z}(\hat{r}) ,$$

### 4.3 Potencial $\Lambda N$ na aproximação adiabática

Para construir o potencial de interação bárion-bárion na *aproximação produto* é necessário determinar os elementos de matriz de  $\mathcal{L}^{(int)}$  entre as funções de onda relevantes para os dois bárions e integrar na coordenada do centro de massa do sistema,  $\vec{R}$ . Para tanto, é conveniente expressar as posições individuais das partículas em função de  $\vec{R}$  e da coordenada relativa  $\vec{r}$ , i.e.,

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \vec{x}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r},\end{aligned}\quad (4.22)$$

em que  $m_1$  e  $m_2$  são as massas (físicas) das partículas individuais. Considerando a direção  $\hat{z}$  alinhada com  $\vec{r}$  e efetuando as integrações em  $\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{R}$ , se obtém

$$V_{YN}^{(int)}(r) = - \int_0^\infty dR R^2 \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi \langle \mathcal{L}^{(int)} \rangle \quad (4.23)$$

onde  $\eta = \hat{r} \cdot \hat{R}$  e  $\varphi$  o ângulo azimutal.

A integração em  $\varphi$  pode ser realizada analiticamente, obtendo-se um operador com uma estrutura geral que permite identificar as diferentes componentes do potencial, a saber, a componente central, a componente spin-spin etc. As integrações restantes relativas às variáveis  $R$  e  $\eta$  são realizadas numericamente.

O formalismo desenvolvido até aqui se aplica aos híperons em geral. Entretanto, como vários passos no procedimento acima mencionado implicam em longos cálculos, restringir-nos-emos a seguir à discussão do potencial de interação  $\Lambda N$ . Sendo  $\Lambda$  uma partícula isoescalar, o número de termos que contribuem ao potencial é razoavelmente reduzido em relação ao caso geral, mas as peculiaridades físicas de interesse, relativas à interação híperon-núcleon ficam adequadamente representadas.

Ilustremos agora o procedimento geral usado para derivar o potencial de interação, considerando alguns termos específicos do Lagrangeano de interação. Desconsideraremos termos dependentes das velocidades rotacionais coletivas (termos não-adiabáticos), que dão origem, por exemplo, a contribuições spin-órbita e que são, pelo menos, de uma ordem a mais em  $N_c^{-1}$ , em relação às contribuições já consideradas.

Mesmo nesta aproximação, contudo, o cálculo de todos os termos que contribuem para o potencial  $\Lambda N$  é bastante extenso<sup>2</sup>.

### 4.3.1 Contribuições diretas

Consideremos inicialmente uma interação direta do tipo  $\mathcal{L}^{\pi d}$ . Pode-se ver que não existe contribuição  $\mathcal{L}_2$  desta espécie ao potencial  $\Lambda N$ . De fato a eq.(4.11), após a introdução das coordenadas coletivas, contém a expressão

$$C^\dagger l_1^j C = l_{1a}^j C^\dagger \tau_a C = l_{1a}^j R_{ab}(C) \tau_b, \quad (4.24)$$

sendo  $R_{ab}$  um elemento de matriz do operador de rotação, apresentado no Apêndice E. Como indicado na eq.(E.17), isto conduz a um elemento de matriz  $\Lambda N$  nulo.

A contribuição direta do tipo  $\mathcal{L}^{\pi d}$  mais importante se origina de  $\mathcal{L}_4$ , que é responsável pela repulsão central. Tal contribuição pode ser facilmente obtida pela substituição de  $L$  e  $R$  da eq.(4.6) por seus equivalentes  $SU(2)$ , eq.(4.14), visto que o káon atua apenas como espectador neste caso.

Após determinar os elementos de matriz de interesse e substituí-los na

---

<sup>2</sup> Foi possível conferir manualmente todas as expressões, à exceção das contribuições kaônicas em  $\mathcal{L}_4$ , calculadas com a ajuda de um código computacional algébrico, que apresentamos no Apêndice F.

eq.(4.23) obtêm-se

$$V_C^{\pi d}(r) = \frac{2\pi}{3e^2} \int_0^\infty dR R^2 \int_{-1}^1 d\eta \left[ (F_1' F_2')^2 + \left( F_1' \frac{s_2}{x_2} \right)^2 + \left( F_2' \frac{s_1}{x_1} \right)^2 + 3 \left( \frac{s_1 s_2}{x_1 x_2} \right)^2 - \left( F_1'^2 - \left( \frac{s_1}{x_1} \right)^2 \right) \left( F_2'^2 - \left( \frac{s_2}{x_2} \right)^2 \right) (\hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2)^2 \right], \quad (4.25)$$

onde  $F_i \equiv F(x_i)$ ,  $s_i \equiv \text{sen } F_i$ ,  $c_i \equiv \text{cos } F_i$  e  $F_i' \equiv dF_i/dx_i$ .

Como exemplo do tratamento das contribuições a  $V^{kd}$ , consideremos as contribuições originárias do termo de Wess-Zumino, eq.(2.13). Novamente, após a introdução das coordenadas coletivas, todos os termos contendo a expressão (4.24) se anulam. Entretanto, neste caso, existem dois termos adicionais. Um destes termos, que gera a única contribuição não nula, fornece simplesmente

$$C^\dagger l_1^3 C = -6F_1' \frac{s_1^2}{x_1^2}, \quad (4.26)$$

visto que  $l^3 (\equiv \varepsilon_{ijk} l^i l^j l^k)$  é um isoscalar proporcional à contribuição  $SU(2)$  para a densidade bariônica. O outro termo contém a expressão

$$\begin{aligned} C^\dagger l_1 C r_2 C^\dagger l_1 C &= \varepsilon_{ijk} l_{1a}^i r_{2b}^j l_{1c}^k C^\dagger \tau_a C \tau_b C^\dagger \tau_c C \\ &= \varepsilon_{ijk} l_{1a}^i r_{2b}^j l_{1c}^k \tau_d \tau_b \tau_f R_{ad}(C) R_{cf}(C) \end{aligned} \quad (4.27)$$

e, embora o correspondente elemento de matriz coletivo seja não-nulo, o elemento de matriz total se anula devido à anti-simetria do tensor  $\varepsilon$ . Portanto, da contribuição (4.26) finalmente obtemos

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \langle \Lambda_2 N_1' | \mathcal{L}_{WZ}^{kd} | \Lambda_2 N_1 \rangle = -\frac{\omega N_c}{8\pi^2 f_\pi^2} k_2^2 F_1' \frac{s_1^2}{x_1^2} \mathcal{O}_C. \quad (4.28)$$

Deve ser mencionado aqui que termos que contenham mais que dois pares  $C^\dagger C$  dão contribuições não nulas às interações diretas  $\mathcal{L}_4$ , visto que o tensor  $\varepsilon$  não mais comparece, neste caso.

### 4.3.2 Contribuições de troca

Para ilustrar o cálculo das contribuições de troca, consideremos os dois primeiros termos da forma simetrizada de  $\mathcal{L}_2^{ke}$  apresentada em (4.13). Após a introdução das coordenadas coletivas e desconsiderando contribuições não adiabáticas, tais termos se reduzem a

$$\frac{1}{2}(D_\mu K_1)^\dagger n_1 C n_2 D^\mu K_2 + (F_i \leftrightarrow -F_i) + h.c. \quad (4.29)$$

Usando a eq.(E.19) o elemento de matriz relevante resulta em

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda'_1 N'_2 | \frac{1}{2} (D_\mu K_1)^\dagger n_1 C n_2 D^\mu K_2 | \Lambda_2 N_1 \rangle = \\ & \frac{1}{4} \delta_{I_3^N, I_3^{N'}} \langle J_3^{\Lambda'} | (D_\mu K_1)^\dagger n_1 | J_3^N \rangle \langle J_3^{N'} | n_2 D^\mu K_2 | J_3^\Lambda \rangle . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Os elementos de matriz individuais envolvidos podem ser calculados recorrendo-se a teoremas de projeção (vide, p. ex., [91]). Usando a forma explícita da configuração ouriço, se obtém

$$\begin{aligned} n_2 D^0 K_2 &= \frac{\omega k_2}{2\sqrt{\pi}} (\not{k}_2 - i\phi_2 \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{x}_2) \quad e \\ n_2 D^a K_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[ ik'_2 \not{k}_2 \hat{x}_2^a + \left( \phi_2 k'_2 - \phi_2^3 \frac{k_2}{x_2} \right) \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{x}_2 \hat{x}_2^a + \phi_2^3 \frac{k_2}{x_2} \sigma_2^a \right. \\ & \quad \left. + \phi_2^2 \frac{k_2}{x_2} \not{k}_2 (\hat{x}_2 \times \vec{\sigma}_2)^a \right] , \end{aligned} \quad (4.31)$$

com

$$k'_2 = \frac{dk_2}{dx_2}, \quad \not{k}_2 = \text{sen} \frac{F_2}{2} \quad e \quad \phi_2 = \text{cos} \frac{F_2}{2} . \quad (4.32)$$

Expressões similares são obtidas para o termo  $(D_\mu K_1)^\dagger n_1$ . Desta maneira, se chega à forma explícita do elemento de matriz de  $\mathcal{L}_2^{ke}$ .

Ao considerar a integração em relação à coordenada centro de massa é conveniente introduzir os operadores

$$\begin{aligned} \hat{O}_C &= (I_1)_{\Lambda'N} (I_2)_{N'\Lambda} , \\ \hat{O}_S &= (\vec{\sigma}_1)_{\Lambda'N} \cdot (\vec{\sigma}_2)_{N'\Lambda} \quad e \\ \hat{O}_T &= 3 \hat{r} \cdot (\vec{\sigma}_1)_{\Lambda'N} \hat{r} \cdot (\vec{\sigma}_2)_{N'\Lambda} - (\vec{\sigma}_1)_{\Lambda'N} \cdot (\vec{\sigma}_2)_{N'\Lambda} \end{aligned} \quad (4.33)$$

e fazer uso da relação

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{x}_i \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{x}_j = \frac{2\pi}{3} (x_{ij} \hat{O}_S + G_{ij} \hat{O}_T), \quad (4.34)$$

sendo  $x_{ij} = \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j$  e

$$G_{ij} = \frac{3R^2}{2x_i x_j} (\eta^2 - 1) + x_{ij}, \quad (4.35)$$

com  $\eta$  já definido.

Usando as expressões acima obtém-se o resultado completo

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \langle \Lambda_1' N_2' | \left[ \frac{1}{2} (D_\mu K_1)^\dagger n_1 C n_2 D^\mu K_2 + (F_i \leftrightarrow -F_i) + h.c. \right] | \Lambda_2 N_1 \rangle = \\ = & -\frac{1}{12} \delta_{I_3^N, I_3^{N'}} \left\{ \omega^2 k_1 k_2 \left( 3\beta_1 \beta_2 \hat{O}_C - \phi_1 \phi_2 x_{12} \hat{O}_S - \phi_1 \phi_2 G_{12} \hat{O}_T \right) \right. \\ & + \hat{O}_C (-3k_1' k_2' \beta_1 \beta_2 x_{12}) \\ & + \hat{O}_S \left[ \frac{k_1 k_2}{x_1 x_2} \phi_1^2 \phi_2^2 (\phi_1 \phi_2 (1 + x_{12}^2) - 2\beta_1 \beta_2 x_{12}) \right. \\ & \quad + \frac{k_1 k_2'}{x_1} \phi_1^3 \phi_2 (1 - x_{12}^2) + \frac{k_1' k_2}{x_2} \phi_1 \phi_2^3 (1 - x_{12}^2) \\ & \quad \left. + k_1' k_2' \phi_1 \phi_2 x_{12}^2 \right] \\ & + \hat{O}_T \left[ -\frac{k_1 k_2}{x_1 x_2} \phi_1^2 \phi_2^2 (\phi_1 \phi_2 (G_{11} + G_{22} - G_{12} x_{12}) - \beta_1 \beta_2 G_{12}) \right. \\ & \quad + \frac{k_1 k_2'}{x_1} \phi_1^3 \phi_2 (G_{22} - G_{12} x_{12}) + \frac{k_1' k_2}{x_2} \phi_1 \phi_2^3 (G_{11} - G_{12} x_{12}) \\ & \quad \left. + k_1' k_2' \phi_1 \phi_2 G_{12} x_{12} \right] \left. \right\}. \quad (4.36) \end{aligned}$$

A fim de recuperar a estrutura operatorial do potencial como dada na eq.(4.1) efetua-se, ainda, uma transformação de Fierz (vide, p. ex., [92]) reescrevendo-se  $\hat{O}_C$ ,  $\hat{O}_S$  e  $\hat{O}_T$  em função dos operadores  $\mathcal{O}_C$ ,  $\mathcal{O}_S$  e  $\mathcal{O}_T$  que aparecem naquela equação. A relação entre os dois conjuntos de operadores é, neste caso,

$$\alpha \hat{O}_C + \beta \hat{O}_S + \gamma \hat{O}_T = \frac{1}{2} (\alpha + 3\beta) \mathcal{O}_C + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \mathcal{O}_S + \gamma \mathcal{O}_T, \quad (4.37)$$



onde  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são funções que dependem apenas da distância relativa  $r$ .

As outras contribuições de troca ao potencial de interação, a saber,  $\mathcal{L}_{WZ}^{ke}$ ,  $\mathcal{L}_4^{ke}$  e  $\mathcal{L}_{SB}^{ke}$ , são tratadas da mesma forma que a exemplificada.

No Apêndice F encontram-se expressões relativas aos termos quártico e de quebra de simetria obtidas com recursos algébricos computacionais.

## 4.4 Resultados e discussão

Usamos nos cálculos numéricos deste trabalho os valores físicos para os diferentes parâmetros dos mésons que aparecem no Lagrangeano, i.e.,

$$m_\pi = 138 \text{ MeV} , \quad m_K = 495 \text{ MeV}, \quad (4.38.a)$$

$$f_\pi = 93 \text{ MeV} , \quad f_K/f_\pi = 1,22 \quad (4.38.b)$$

e adotamos  $e = 4,26$  (valores que correspondem ao conjunto  $CJ3$ ) a fim de reproduzir a diferença de massas entre o núcleon e a delta. Com estes valores as diferenças de massas dos híperons para o núcleon são bem reproduzidas, como se observa na Tab. 2.4.

Os valores absolutos das massas bariônicas, porém, resultam muito grandes quando se adota o conjunto  $CJ3$ , de fato cerca de  $800 \text{ MeV}$  acima dos valores observados experimentalmente. Este é um problema partilhado pelos modelos de sólitons topológicos, que pode ser amenizado se fôrem consideradas as correções quânticas à massa do sóliton [93, 94]. No caso da  $AEL$  isto foi recentemente mostrado quando, usando os valores empíricos para os parâmetros mesônicos, obteve-se  $\simeq 880 \text{ MeV}$  para a massa do núcleon [95].

As contribuições de cada um dos diferentes termos diretos e de troca ao potencial  $\Lambda N$ , algumas das quais foram detalhadas em seções anteriores deste capítulo (cujas expressões podem ser determinadas com o auxílio do

Apêndice F), após calculadas, tiveram seus resultados compactados na Fig. 4.2 e na Fig. 4.3.

Como se pode apreciar na Fig. 4.2a, existem apenas duas contribuições piônicas ao potencial central. Uma, originária do termo quártico, é repulsiva e domina a outra, pequena e atrativa, devida ao termo de quebra de simetria. Os termos quadrático e de  $WZ$  não fornecem contribuições deste tipo.

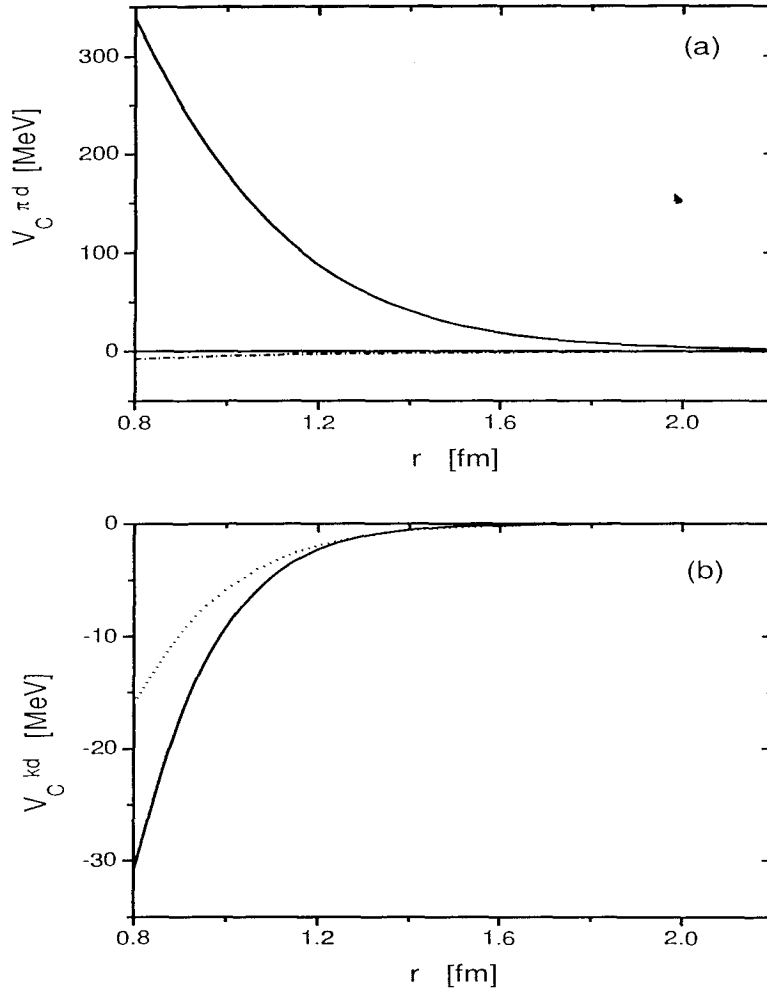
Os termos kaônicos diretos, que no presente esquema só contribuem ao potencial central, estão apresentados na Fig. 4.2b. Ocorrem contribuições quártica e de  $WZ$ , ambas atrativas e similares em magnitude. Existe também uma muito pequena contribuição devida ao termo de quebra de simetria (não visível no gráfico), mas não ocorre contribuição kaônica direta oriunda do termo quadrático.

Comparando as Figs. 4.2a e b podemos ainda notar que a contribuição piônica ( $SU(2)$ ) é muito maior, em valor absoluto, do que as contribuições kaônicas, como esperado da *contagem* (em ordens de)  $N_c$ .

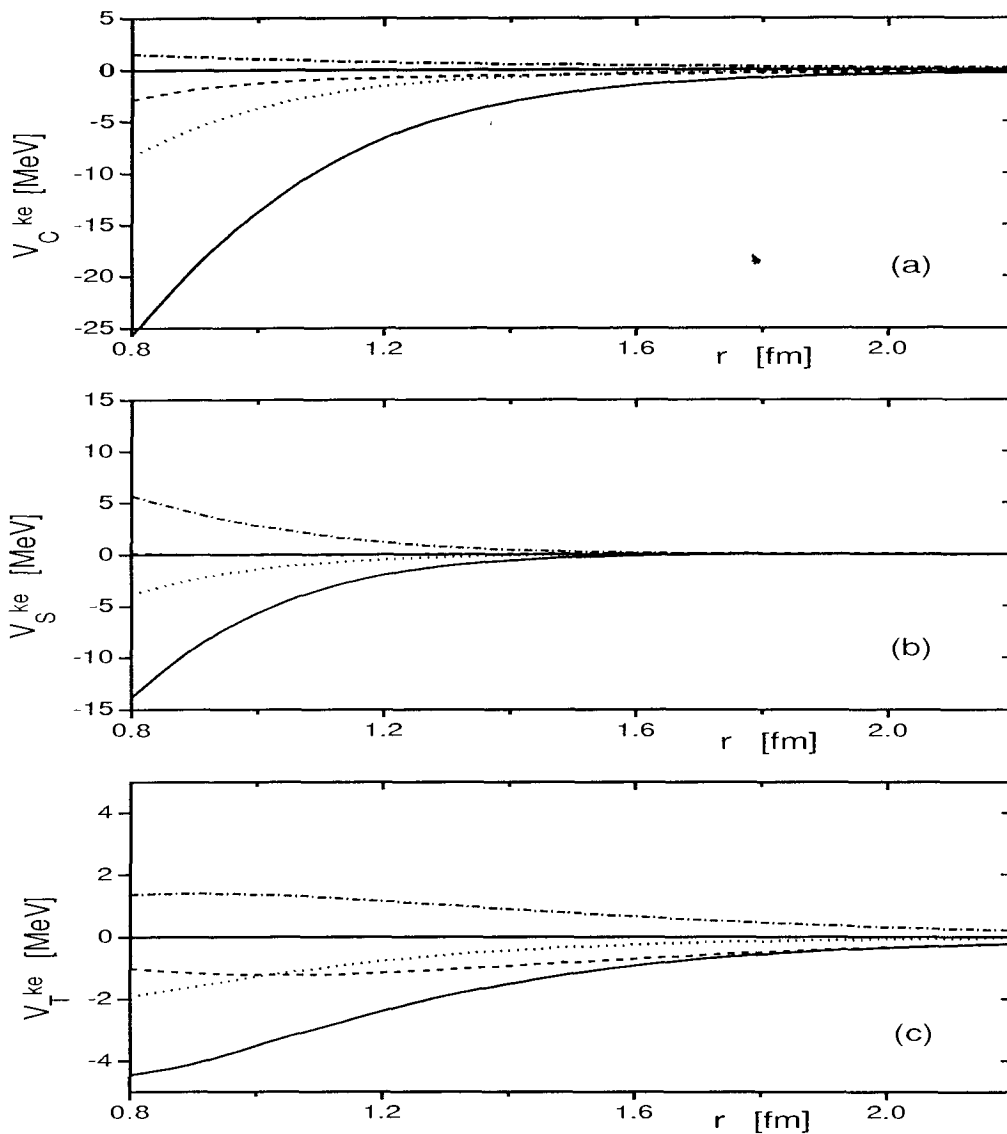
A Fig. 4.3 apresenta em separado as componentes central (Fig. 4.3a), spin-spin (Fig. 4.3b) e tensorial (Fig. 4.3c), relativas aos termos de troca kaônicos. Como se observa, todos os termos do Lagrangeano contribuem neste caso. Estas contribuições são atrativas, à exceção das oriundas do termo de quebra de simetria ( $\mathcal{L}_{SB}$ ) que são, contudo, sempre muito pequenas. Os termos kaônicos de troca são, em geral, da mesma ordem de grandeza que os kaônicos diretos e não desprezíveis frente às contribuições piônicas, embora quase uma ordem de grandeza menores.

Nossas predições para a soma total nas componentes central, spin-spin e tensorial estão apresentadas na Fig. 4.4 onde também se encontram os resultados do *MCC* [36].

A análise comparativa entre os resultados do modelo *AEL* e do *MCC*



**Fig. 4.2:** Contribuições centrais ao potencial  $\Lambda N$  (a) originárias dos termos piônicos diretos; (b) originárias dos termos kaônicos diretos. As linhas cheias representam as contribuições do termo quártico, a linha pontilhada a do termo de  $WZ$  e a traço-ponto a do termo de quebra de simetria.

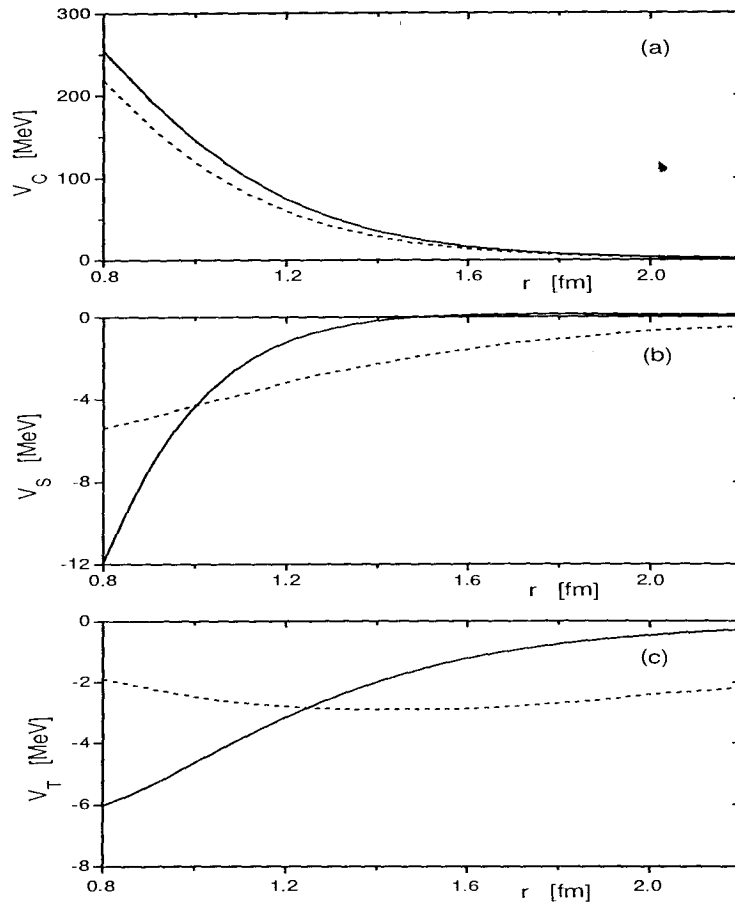


**Fig. 4.3:** Contribuições dos termos kaônicos de troca  $\mathcal{L}^{ke}$  ao potencial  $\Lambda N$ : (a) componente central; (b) componente spin-spin; (c) componente tensorial. A linha tracejada representa as contribuições do termo quadrático, a linha cheia aquelas do termo quártico, a linha pontilhada as do termo de  $WZ$  e as traço-ponto as do termo de quebra explícita de simetria.

mostra que as ordens de grandeza e os sinais dos resultados, nos dois casos, são concordantes.

Como antecipado na discussão anterior, tanto no modelo *AEL*, como no *MCC*, as interações spin-spin e tensorial são suprimidas por uma ordem de magnitude em relação à interação central, que se mostra repulsiva em qualquer distância. Já que o potencial central ( $V_C$ ) é dominado pelas contribuições piônicas, fica claro que tal comportamento está muito relacionado com o conhecido problema da ausência de atração central a distâncias intermediárias do modelo de Skyrme em  $SU(2)$ . Muitos mecanismos têm sido propostos para resolver este problema como, por exemplo, o do acoplamento a graus de liberdade vibracionais e rotacionais [35]. Qualquer que seja a solução que venha a corrigir tal deficiência, os presentes cálculos em  $SU(3)$  mostram que a inclusão dos graus de liberdade de estranheza provavelmente não a prejudicará, visto que as contribuições kaônicas centrais, ora adicionadas, são atrativas.

O sinal da contribuição spin-spin predita neste trabalho é negativo, o que implica em maior atração no canal  ${}^3S_1$  do que no canal  ${}^1S_0$ . Este resultado ocorre também no *MCC*. Contudo, é importante observar que a informação sobre o sinal da interação spin-spin não é clara, pois dos dados de espalhamento  $\Lambda p$  existentes não há condições ainda para uma conclusão definitiva. De fato, várias versões dos modelos de troca de bósons, que reproduzem de modo igual os comprimentos de espalhamento, conduzem a predições um pouco diferentes para os comprimentos de espalhamento nos canais  ${}^3S_1$  e  ${}^1S_0$ , com valores variando entre  $-2,18$  (modelo A) e  $-1,75$  (modelo F) para  ${}^3S_1$  e entre  $-0,71$  (modelo A) e  $-2,51$  (modelo F) para  ${}^1S_0$  (vide, p. ex., [96]). De outra parte, os dados disponíveis sobre  $\Lambda$ -hipernúcleos tendem a favorecer uma interação spin-spin  $\Lambda N$  repulsiva, embora novamente a questão não esteja completamente definida. A indicação mais clara vem dos estados dubletos  ${}^4_{\Lambda}H$  e  ${}^4_{\Lambda}He$ , mas a análise do comportamento destes estados depende



**Fig. 4.4:** Componentes do potencial  $\Lambda N$ : (a) componente central  $V_C$ ; (b) componente spin-spin  $V_S$ ; (c) componente tensorial  $V_T$ . A linha cheia representa resultados do presente cálculo (*AEL*) e a linha tracejada resultados do *MCC* [36].

de cálculos bastante elaborados envolvendo quatro corpos.

Existe também alguma informação empírica de outros  $\Lambda$ -hipernúcleos, como, por exemplo,  ${}_{\Lambda}^{11}B$ . Para este, a situação é um pouco mais complexa ainda, devido ao papel exercido pelas interações spin-órbita. Experimentos propostos tanto em espalhamento híperon-próton [97], como em espectroscopia  $\gamma$  hipernuclear [98] poderão talvez, em breve, fornecer testes críticos sobre este assunto.

Do ponto de vista do modelo de sólitons topológicos de Skyrme, nossos resultados são consistentes com aqueles obtidos em cálculos embasados nas coordenadas coletivas [34, 35, 36] na ausência de canais acoplados. Poderíamos argumentar que, como no presente modelo as trocas de píons são consideradas além do modelo *OBE*, uma certa quantidade de mistura com o canal  $\Sigma N$  é levada em conta. Nossa aproximação, entretanto, ainda permite contribuições não-diagonais,  $N\Lambda - N\Sigma$ , não nulas. Existem indicações de que quando tal mistura com configurações rotacionais excitadas é incluída, o sinal da interação spin-spin no modelo de Skyrme pode ser revertido [34, 35].

Consideremos, também, a componente tensorial do potencial. Para distâncias grandes ( $r > 1,2 \text{ fm}$ ) nossa predição para tal componente concorda com a dos modelos *OBE*. Para distâncias menores, entretanto, existem discrepâncias entre os próprios modelos *OBE*. Por exemplo, para  $r \approx 0,9 \text{ fm}$  tem-se  $V_T^{OBE-D} \approx -14 \text{ MeV}$ , enquanto  $V_T^{OBE-F} \approx +9 \text{ MeV}$ . Em tais regiões nossos resultados se assemelham mais àqueles do modelo D.

A comparação (compacta) de nossos resultados com os do modelo *MCC* que se encontra na Fig. 4.4, permite as seguintes considerações. Analisando os resultados da aproximação coletiva [36] ao modelo de Skyrme em  $SU(3)$ , vê-se que a magnitude e o sinal dos potenciais do *MCC* e da *AEL* são similares. Entretanto a situação é diferente para o comportamento a longas distâncias. Embora nos dois casos o potencial central  $V_C$  decaia basicamente

do mesmo modo, o *alcance* dos potenciais spin-spin  $V_S$  e tensorial  $V_T$  no *MCC* é muito mais longo do que na *AEL*. Isto é compreensível, visto que no *MCC* o único méson que determina a atenuação das funções radiais é o pión, enquanto na *AEL* as componentes kaônicas são responsáveis pelas contribuições spin-spin e tensorial do potencial  $\Lambda N$ . O alcance correspondente está, portanto, associado à massa do káon, cerca de três vezes maior do que a do pión. No potencial central estas diferenças não ocorrem devido à dominância da contribuição piônica  $\mathcal{L}_4$  já discutida. Deve ser mencionado que em todos os casos o comportamento dos potenciais a grandes distâncias obtido na *AEL* está em boa concordância com os resultados dos modelos *OBE*.

## 4.5 Conclusões

Neste capítulo estudamos a interação híperon-núcleon na aproximação de estado ligado – *AEL* – ao modelo de Skyrme em  $SU(3)$ . Vale enfatizar o fato de que o modelo de Skyrme incorpora a simetria quirial e a expansão da *CDQ* em grande  $N_c$ , de uma maneira bem elegante.

No caso da utilização da *AEL*, destacamos que relacionando a física de setores com diferentes números bariônicos foi possível obter previsões praticamente livres de parâmetros, em contraste com outras aproximações fenomenológicas.

Nossos cálculos estão fundamentados na *aproximação produto* para o campo solitônico com  $B = 2$ , aproximação esta bastante adequada para as regiões de médias e longas distâncias de separação enfocadas nos processos de espalhamento.

Cabe lembrar que, a muito curtas distâncias, em princípio, a aproximação recomendada seria a *axialmente simétrica*, de modo a melhor reproduzir a simetria toroidal favorecida numericamente.



Como já referido, as expressões utilizadas na *AEI* correspondem às de uma aproximação adiabática. Neste contexto, encontramos três classes de contribuições ao potencial híperon-núcleon. Um primeiro conjunto corresponde a contribuições envolvendo os píons e oriundas do termo  $SU(2)$ , de ordem  $N_c^1$  e em que os káons atuam simplesmente como espectadores. As outras duas modalidades são de ordem  $N_c^0$  e correspondem às interações kaônicas direta e de troca. Interações de ordem  $N_c^{-1}$  foram desconsideradas no presente trabalho.

Embora o formalismo desenvolvido neste capítulo seja adequado para qualquer elemento de matriz da interação híperon-núcleon (diagonal ou não), concentramo-nos nas expressões para a interação diagonal  $\Lambda N$ . Estas são ricas o suficiente para exemplificar as diversas etapas de cálculo do modelo, ao mesmo tempo em que resultam em simplificações nas expressões para os potenciais, que levam a relações mais compactas e de mais fácil visualização ao leitor. Soma-se a isto o fato de que os dados mais abundantes de que se dispõe, referem-se à interação  $\Lambda N$ .

O potencial central no modelo, resulta repulsivo em qualquer distância. Este resultado está fortemente relacionado com a deficiência da atração central intermediária do potencial de dois corpos obtida no modelo de Skyrme em  $SU(2)$ . Qualquer uma das soluções sugeridas para este problema na literatura acarretará, em nossa formulação, em contribuição atrativa adicional no caso  $\Lambda N$ .

Em geral, os resultados por nós obtidos são similares àqueles da aproximação de coordenadas coletivas (*MCC*) ao modelo de Skyrme em  $SU(3)$ . Exceção a isto refere-se ao alcance das interações spin-spin e tensorial. Para estes alcances, os valores obtidos no presente cálculo, menores que os do *MCC*, parecem ser mais realísticos.

Finalmente, existem indicações de que o acoplamento a graus de liberda-

de vibracionais e rotacionais poderia originar a atração central não ocorrente no modelo de Skyrme original, enquanto o acoplamento a estados rotacionalmente excitados poderia mudar o sinal da interação spin-spin [35]. O formalismo ora desenvolvido fornece o esquema básico para futuras investigações de tais questões com o uso da *AEL*.

## Capítulo 5

# COMENTÁRIOS FINAIS

Embora a *Cromodinâmica Quântica* – *CDQ* – seja aceita como a teoria fundamental das interações fortes, apresentando os hádrons como intrincadas estruturas compostas de *quarks* e *glúons* e possibilitando cálculos consistentes com os dados experimentais na região de grande momentum transferido, enfrentamos grandes dificuldades para aplicá-la na região de pequeno momentum transferido. Neste intervalo os grandes valores da constante de acoplamento quark–glúon impedem o uso de técnicas perturbativas, o que leva à busca de soluções mais simples, com aproximações de modelo embasadas na *CDQ* e em suas *simetrias*.

O trabalho pioneiro de 't Hooft usando *CDQ* no limite de grande número de cores,  $N_c$ , foi fundamental para o aparecimento de toda uma classe de tais modelos. Identificando  $1/N_c$  como um parâmetro de expansão, 't Hooft mostrou que no limite  $N_c \rightarrow \infty$  apenas os diagramas de Feynman planares sobrevivem [9], o que permitiu a Witten demonstrar que, nesta situação, a *CDQ* se reduz a uma *teoria efetiva* de *mésons* interagentes, de onde os *bárions* emergem como *sólitons*.

Tais sólitons topológicos já haviam sido construídos por Skyrme muito tempo antes, tendo seu trabalho despertado pouco interesse à época. A conexão do modelo de Skyrme com a *CDQ* fez reviver o modelo e a partir do

trabalho de Adkins, Nappi e Witten, a descrição de propriedades estáticas do  $N$  e da  $\Delta$  mostraram a adequação do modelo em  $SU(2)$  o que motivou a proposição, pouco tempo depois, de extensões do modelo a  $SU(3)$ .

Estas extensões do modelo de sólitons topológicos a  $SU(3)$  visam descrever não apenas os hádrons não-estranhos, mas também os estranhos. As primeiras tentativas de extensão do modelo, entretanto, onde o quark  $s$  era considerado como *leve*, fracassaram tanto na descrição do espectro de massas, quanto na das propriedades estáticas dos bárions.

Fundamentalmente, duas extensões do modelo de Skyrme em  $SU(2)$  a  $SU(3)$ , com bons resultados na descrição dos hádrons com número bariônico  $B = 1$ , tanto para o octeto quanto para o decuplo bariônicos, são propostas na literatura. Uma, o *modelo de coordenadas coletivas - MCC* - trata os graus de liberdade de isospin e de estranheza de mesma forma, enquanto a outra, a *aproximação de estado ligado - AEL* - dá um tratamento diferenciado a eles, tendo em vista a quebra de simetria relativa a estranheza, refletida na grande diferença de massa entre os mésons não-estranhos e os estranhos.

O estudo da interação entre dois bárions exige a investigação de sistemas estranhos com  $B = 2$ . Na literatura são encontrados resultados referentes à utilização do *MCC*. Tendo em vista os interessantes achados correspondentes a  $B = 1$  com a *AEL*, e considerando a importância de investigar as diferenças de efeitos destas duas aproximações, recorreremos, neste trabalho, ao modelo de Skyrme em sua extensão *AEL*, para o estudo da interação de dois corpos em sistemas bariônicos estranhos caracterizados pelo número bariônico  $B = 2$ . O modelo utilizado constitui-se em uma aproximação relativamente simples para a *CDQ*, no regime de baixas energias.

Dentre os principais méritos da *AEL*, podemos citar a capacidade de unir os setores mesônico ( $B = 0$ ), bariônico ( $B = 1$ ) e dibariônico ( $B = 2$ ) de uma maneira concisa e elegante e praticamente livre de parâmetros, visto

que os existentes estão, em princípio, ligados a dados experimentais no setor mesônico.

A principal característica da *AEL*, é a de descrever os *híperons* como estados ligados sólito–káon, dando um tratamento diferenciado aos graus de liberdade de estranheza do sistema analisado, em relação aos de isospin. Enquanto o sólito é considerado como um objeto rígido no setor  $SU(2)$  de isospin e quantizado pelo método das coordenadas coletivas, os graus de liberdade de estranheza, encontrados nos káons, são tratados como modos vibracionais. Esta imagem física de um híperon como um estado ligado káon–sólito, pretende ressaltar, em nível de modelo, que a quebra da simetria de sabor entre os bárions é importante, como evidenciamos nas diferenças entre as massas dos bárions não estranhos e estranhos.

A boa descrição das propriedades estáticas e dinâmicas dos híperons, em particular a marcante concordância dos valores calculados para massas e momentos magnéticos das partículas com os valores experimentais e com predições do modelo de quarks, sugere que o conteúdo físico do modelo adotado, de fato, se aproxima da realização na natureza.

Para uma visão mais abrangente da interação bárion–bárion estudamos, neste trabalho, dois tipos de sistemas com número bariônico  $B = 2$ . O primeiro, em que as partículas se encontram ligadas, consiste dos denominados *dibárions* e o outro, em que as partículas *interagentes* não estão ligadas, propicia a obtenção do potencial bárion–bárion a distâncias variadas.

As contribuições originais desta tese encontram-se sobretudo descritas nos capítulos 3 e 4 relativos, respectivamente, aos sistemas ligados e aos não–ligados estudados com a *AEL*, os resultados e conclusões para cada sistema sendo apresentados ao final do capítulo correspondente.

Resumimos aqui os pontos mais relevantes deste trabalho e algumas de suas conseqüências.

Para o estudo dos dibárions utilizamos a *configuração axialmente simétrica*. Tal escolha, mais adequada para sistemas ligados que a da *configuração esfericamente simétrica* justifica-se, inclusive, por ser uma aproximação mais próxima para a configuração de energia mínima toroidal obtida numericamente. Extremamente importante em suas consequências é o fato de que os vínculos impostos pela simetria toroidal eliminam os estados espúrios do espectro dibariônico encontrados em cálculos anteriores [73] que utilizaram a configuração esférica, levando o espectro a concordar com aquele obtido no modelo de quarks. Em particular, uma forma generalizada do princípio de Pauli é obtida para os estados com estranheza par.

Prediz-se ainda, neste modelo, que a partícula  $H$ , um estado hexaquark (2 quarks  $u$ , 2 quarks  $d$  e 2 quarks  $s$ ) proposto por Jaffe no modelo de quarks, é ligada, o que se deve principalmente à menor massa do sóliton com  $B = 2$  em relação à soma das massas de dois sólitons com  $B = 1$ . Esta ligação, entretanto, pode desaparecer se uma contribuição de ordem  $N_c^0$ , à energia, os efeitos de Casimir, que tendem a aumentar a massa do di-skyrmion, fôrem considerados.

Para o estudo da interação bárion-bárion, para sistemas ligados, partimos do princípio de que o modelo de Skyrme em  $SU(2)$  já foi usado com algum sucesso na obtenção do potencial de interação  $NN$ , de modo que o estudo das interações núcleon-híperon  $NY$  e híperon-híperon  $YY$  servem como um teste adicional para a aplicabilidade do modelo e permitem destacar os efeitos adicionais do conteúdo de estranheza dos híperons.

Como configuração inicial, usamos a *aproximação produto*, uma vez que o comportamento dos potenciais a distâncias muito curtas não é prioritário na questão. Na aproximação em foco o sóliton com número bariônico  $B = 2$  é representado pelo produto de dois sólitons esféricos na configuração ouriço, com  $B = 1$ , refletindo o fato de que, nas médias e grandes separações entre

eles, os sólitons não se fundem em uma configuração toroidal, permanecendo esféricos. O modelo mostra a existência de três tipos de contribuições ao potencial na aproximação adotada. Uma puramente devida aos sólitons, com estranheza nula (contribuição  $SU(2)$ ), de ordem  $N_c^1$ , onde os káons não desempenham qualquer papel e outras duas, de ordem  $N_c^0$ , que correspondem às interações kaônicas ditas *direta* e *de troca*. Efeitos de ordem  $N_c^{-1}$  são ignorados na presente formulação.

O formalismo desenvolvido é aplicável a sistemas estranhos de dois bárions, sendo os resultados numéricos apresentados para a interação  $\Lambda N$ , quer por apresentar o maior número de dados experimentais, quer pela relativa simplicidade dos cálculos. Em particular, mostramos que os três tipos de componentes do potencial estudados, a saber o potencial central, o potencial spin-spin e o potencial tensorial, são gerados naturalmente no modelo. A falta de atração central, deficiência herdada do modelo de Skyrme em  $SU(2)$  e já ocorrente no cálculo da interação  $NN$ , se faz também presente aqui.

Em geral, os resultados obtidos concordam com os de outras variantes do modelo de Skyrme em  $SU(3)$ , em particular com os do *MCC*, no que tange à magnitude e sinal da interação, parecendo, entretanto, mais realísticos quanto ao alcance das interações spin-spin e tensorial e também quanto à comparação com predições de modelos *OBE*. Em particular, a dependência em spin do potencial  $\Lambda N$  é a mesma estimada por Millener *et al.* [99].

A crítica maior às predições do modelo relativas à deficiência de atração central pode ser abrandada pelas indicações de que o acoplamento a vibrações radiais e a ressonância Ropper poderiam originar tal atração.

Embora originalmente proposta como uma aproximação adequada ao estudo dos híperons do octeto e do decuplete de menor massa, a *AEL* relativa ao modelo de Skyrme tem se mostrado muito eficiente também na descrição de híperons com sabores pesados, *charm* e *bottom*, e na descrição de bárions

ons exóticos, como híperons pentaquarks, multibárions e quarkonia pesados [100, 101]. A principal incerteza no espectro de massas decorre provavelmente das energias de Casimir para as configurações solitônicas toroidais (aproximadas pela *configuração axialmente simétrica*), um problema ainda em aberto.

No que diz respeito a sistemas interagentes, os resultados aqui obtidos, e o grande interesse nos  $\Lambda$ - e  $\Sigma$ -hipernúcleos, sugerem que se detalhe os cálculos adicionais das interações  $\Sigma N$  e canais acoplados  $\Lambda N - \Sigma N$ , em particular, e também da interação *híperon - híperon*, em geral, no modelo ( $\Lambda\Lambda$ , por exemplo).

A atração central intermediária, já ausente na interação  $NN$ , certamente está a merecer estudos mais cuidadosos, podendo ser citadas, além das já mencionadas, abordagens para a melhora da configuração inicial para os dois sólitons interagentes e, ainda, a inclusão de termos estabilizantes de ordens superiores no Lagrangeano do sistema.

Acreditamos que o trabalho apresentado contribui para o estudo das propriedades dos sistemas bariônicos estranhos, na avaliação da importância das diferenças entre as massas dos mésons “geradores” dos bárions sobre a interação entre eles, na sistemática de determinação das interações bariônicas e inclusive, em particular, no que diz respeito à possibilidade de existência de estados estáveis em relação a decaimentos fortes.



## Apêndice A

### O SETOR $SU(2)$

Neste apêndice são apresentadas as expressões para o setor  $SU(2)$  do modelo de sólitons para a *configuração axialmente simétrica* relativa a um número bariônico genérico  $n$ .

A densidade lagrangeana  $\mathcal{L}_{SU(2)}$ , eq.(2.9) é, explicitamente

$$\mathcal{L}_{SU(2)} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu u_\pi \partial^\mu u_\pi^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([\partial_\mu u_\pi, \partial_\nu u_\pi^\dagger][\partial^\mu u_\pi, \partial^\nu u_\pi^\dagger]) - f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - \cos F). \quad (\text{A.1})$$

Recorrendo à configuração modificada (eq.(3.1))  $u_\pi = \exp[i\vec{\tau} \cdot \hat{\pi}_n F(r)]$  com  $\hat{\pi}_n = \text{sen } \Theta \cos \Phi \hat{i} + \text{sen } \Theta \text{sen } \Phi \hat{j} + \cos \Theta \hat{k}$ , a massa clássica torna-se um funcional de  $F(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  and  $\Phi(\varphi)$ , cuja expressão explícita é

$$\begin{aligned} M[F, \Theta, \Phi] &= \int_V d^3 r \left\{ \frac{f_\pi^2}{2} \left[ F'^2 + \left( \Theta'^2 + \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \Phi'^2 \right) \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right] \right. \\ &+ \frac{1}{2e^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \left[ \left( \Theta'^2 + \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \Phi'^2 \right) F'^2 \right. \\ &\left. \left. + \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \Theta'^2 \Phi'^2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right] + f_\pi^2 m_\pi^2 (1 - \cos F) \right\}, \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

com

$$F' \equiv \frac{dF}{dr}, \quad \Theta' \equiv \frac{d\Theta}{d\theta} \quad \text{e} \quad \Phi' \equiv \frac{d\Phi}{d\varphi}. \quad (\text{A.3})$$

A minimização de  $M$ , em relação a cada variável esférico-polar, conduz a uma equação de Euler-Lagrange relativa a cada uma das funções  $F(r)$ ,  $\Theta(\theta)$  and  $\Phi(\varphi)$ . A primeira e mais simples, é

$$\Phi''(\varphi) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Devido à unicidade do campo quiral deve-se ter  $\Phi(\varphi) = n\varphi$ , sendo  $n$  o número bariônico. Usando esta função para  $\Phi$ , resulta para  $\Theta(\theta)$  a equação

$$\begin{aligned} \left( C_1 \text{sen } \theta + C_2 \frac{n^2}{\text{sen } \theta} \text{sen}^2 \Theta \right) \Theta'' + \left( C_1 - C_2 n^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \right) \cos \theta \Theta' \\ - \left( C_1 - C_2 \Theta'^2 \right) n^2 \frac{\text{sen } \Theta}{\text{sen } \theta} \cos \Theta = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

com

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\pi \int_0^\infty dr \text{sen}^2 F \left( \frac{f_\pi^2}{2} + \frac{1}{2e^2} F'^2 \right) \quad e \\ C_2 &= 2\pi \int_0^\infty dr \frac{1}{2e^2} \frac{\text{sen}^4 F}{r^2}. \end{aligned}$$

Como mencionado por Kurihara *et al.* [38], usando  $\Theta(\theta) = \theta$ , a equação (A.5) se reduz a

$$C_1(1 - n^2) \cos \theta = 0, \quad (\text{A.6})$$

satisfeita apenas para  $n = \pm 1$ . Portanto, para  $n^2 \neq 1$  existe instabilidade local. Desta forma, a solução para  $\Theta = \theta$  e  $n = 1$  corresponde ao sóliton esfericamente simétrico obtido com o ansatz *ouriço* (2.8). Substituindo, assim, os valores de  $\Theta$  e  $n$  na expressão genérica da massa (A.2), obtém-se a eq.(2.10).

Ao invés de resolver a eq.(A.5) numericamente, Kurihara *et al.* propõem o uso da função tentativa apresentada na eq.(3.4),

$$\Theta(\theta) = \theta + \sum_{k=1} g_k \text{sen}(2k\theta), \quad (\text{A.7})$$

com os coeficientes  $g_k$  sendo determinados pela minimização da massa no correspondente setor bariônico.

Finalmente, para o ângulo quirral  $F(r)$  a equação resultante é

$$\begin{aligned} & \left( f_\pi^2 r^2 + \frac{\alpha_1}{e^2} \text{sen}^2 F \right) F'' + 2f_\pi^2 r F' - f_\pi^2 \alpha_1 \text{sen} F \cos F \\ & + \frac{\alpha_1}{e^2} F'^2 \text{sen} F \cos F - 2 \frac{\alpha_2}{e^2} \frac{\text{sen}^3 F \cos F}{r^2} - m_\pi^2 f_\pi^2 r^2 \text{sen} F = 0 \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

com condições de contorno  $F(0) = \pi$  e  $F(\infty) = 0$ .

As expressões explícitas para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , já apresentadas na eq.(3.10), são

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \left( \Theta'^2 + n^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \right) \quad \text{e} \\ \alpha_2 &= \frac{n^2}{2} \int_0^\pi d\theta \left( \Theta'^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen} \theta} \right). \end{aligned}$$

O uso do método de coordenadas coletivas para a quantização do Lagrangeano  $SU(2)$  conduz a termos dependentes de quatro momentos de inércia  $\mathcal{I}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , os quatro últimos termos da eq.(3.15), sendo as formas explícitas destes momentos de inércia

$$\mathcal{I}_i = \int_0^\infty dr r^2 \text{sen}^2 F \left[ \left( f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} F'^2 \right) \zeta_i + \frac{1}{e^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \eta_i \right], \quad (\text{A.9})$$

onde os coeficientes  $\zeta_i$  e  $\eta_i$  são dados pelas integrais angulares abaixo

$$\zeta_1 = \pi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \left( \Theta'^2 + n^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\tan^2 \theta} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\zeta_2 = \pi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta (1 + \cos^2 \Theta), \quad (\text{A.11})$$

$$\zeta_3 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \text{sen}^2 \Theta, \quad (\text{A.12})$$

$$\zeta_4 = \frac{8}{3} \pi, \quad (\text{A.13})$$

$$\eta_1 = n^2 \pi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta (1 + \cos^2 \theta) \Theta'^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta}, \quad (\text{A.14})$$

$$\eta_2 = \pi \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \left( \Theta'^2 \cos^2 \Theta + n^2 \frac{\text{sen}^2 \Theta}{\text{sen}^2 \theta} \right), \quad (\text{A.15})$$

$$\eta_3 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \, \text{sen } \theta \, \Theta'^2 \text{sen}^2 \Theta, \quad (\text{A.16})$$

$$\eta_4 = \frac{8}{3}\pi. \quad (\text{A.17})$$

Observe-se que para  $\Theta = \theta$  e  $n = 1$  os coeficientes acima se reduzem a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2, \quad \alpha_2 = 1 \text{ e} \\ \zeta_i &\equiv \eta_i \equiv \frac{8\pi}{3}, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

o que conduz ao modelo de Skyrme em  $SU(2)$ , em que a equação diferencial para  $F(r)$  está dada em (2.11) e em que

$$\mathcal{I}^{SU(2)} = \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty dr \, r^2 \text{sen}^2 F \left[ f_\pi^2 + \frac{1}{e^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right]. \quad (\text{A.19})$$

## Apêndice B

### $V^{ef}$ EM AEL PARA $B = 1$

Neste apêndice são apresentadas as expressões explícitas constituintes do potencial efetivo da AEL, condensado na eq.(2.20), e da massa de um híperon.

Expandindo o campo que carrega a estranheza,  $U_K$ , até segunda ordem nos operadores de káons, a configuração

$$U = \sqrt{U_\pi} U_K \sqrt{U_\pi}$$

referida na eq.(2.16) torna-se

$$U \simeq U_\pi + i \frac{\sqrt{2}}{f_K} \sqrt{U_\pi} K \sqrt{U_\pi} - \frac{1}{f_K^2} \sqrt{U_\pi} K K \sqrt{U_\pi} . \quad (\text{B.1})$$

Nesta ordem de aproximação a ação efetiva

$$\Gamma = \int d^4x (\mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk} + \mathcal{L}_{SB}) + \Gamma_{WZ} ,$$

apresentada na eq.(2.14), conduz a um Lagrangeano em que é possível identificar claramente dois tipos de termos, um envolvendo puramente o campo de píons massivos,  $\mathcal{L}_{SU(2)}$ , de ordem  $N_c^1$ , idêntico à densidade lagrangeana de Skyrme [46] e apresentado na eq.(A.1) e outro, de ordem  $N_c^0$ , responsável pela interação entre o sôliton e o káon,  $\bar{\mathcal{L}}$ . Assim,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SU(2)} + \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_{SU(2)} + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_{WZ} + \mathcal{L}_{SB} , \quad (\text{B.2})$$

com

$$\mathcal{L}_2 = (D_\mu K)^\dagger D^\mu K - K^\dagger a_\mu a^\mu K, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2e^2 f_K^2} \left\{ \text{Tr}([a_\mu, a^\nu]^2) K^\dagger K - \text{Tr}(a_\nu a^\nu) (D_\mu K)^\dagger D^\mu K \right. \\ & \left. + \text{Tr}(a^\mu a^\nu) (D_\mu K)^\dagger D_\nu K - 3(D_\mu K)^\dagger [a^\mu, a^\nu] D_\nu K \right\}, \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{WZ} = -i \frac{N_c}{4f_K^2} B^\mu \left[ K^\dagger D_\mu K - (D_\mu K)^\dagger K \right] \quad \text{e} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{L}_{SB} = - \left[ m_K^2 - \frac{1}{2} \frac{f_\pi^2}{f_K^2} m_\pi^2 (1 - \cos F) \right] K^\dagger K. \quad (\text{B.6})$$

Nestas expressões

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + v_\mu, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{Bmatrix} v_\mu \\ a_\mu \end{Bmatrix} \equiv \frac{1}{2} (\sqrt{u_\pi}^\dagger \partial_\mu \sqrt{u_\pi} \pm \sqrt{u_\pi} \partial_\mu \sqrt{u_\pi}^\dagger) \quad (\text{B.8})$$

e

$$B^\mu(x) = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr}(L_\nu L_\alpha L_\beta). \quad (\text{B.9})$$

Recorrendo à configuração *ouriço*, eq.(2.8), para o campo de píons e à expansão em ondas parciais, eq.(2.21), para o campo de káons, obtemos a equação de movimento (2.23) para as funções radiais  $k_{\Lambda l}(r)$  do káon, i.e.,

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 h(r) \frac{d}{dr} \right] - m_K^2 - V_{\Lambda l}^{ef}(r) + \varepsilon_{\Lambda l}^2 f(r) - 2\varepsilon_{\Lambda l} S \lambda(r) \right\} k_{\Lambda l}(r) = 0, \quad (\text{B.10})$$

onde  $S$  é a estranheza do sistema,  $\varepsilon_{\Lambda l}$  é a autoenergia do modo  $(\Lambda l)$  (convenção sempre positiva),

$$h(r) = h_1(r) + h_2(r) = 1 + \frac{1}{2e^2 f_K^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2}, \quad (\text{B.11})$$

$$h_1(r) = 1 + \frac{F'^2}{4e^2 f_K^2}, \quad (\text{B.12})$$

$$h_2(r) = \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( 2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} - F'^2 \right), \quad (\text{B.13})$$

$$f(r) = 1 + \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( F'^2 + 2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \cdot e \quad (\text{B.14})$$

$$\lambda(r) = \frac{N_c}{8\pi f_K^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} F' = \frac{N_c}{4f_K^2} \mathcal{B}_0. \quad (\text{B.15})$$

Finalmente, as componentes  $V_0(r)$ ,  $V_1(r)$  e  $V_2(r)$ , coeficientes dos termos central, isospin-órbita e orbital do potencial, conforme definido em (2.20), e que, após a inserção na equação radial (2.23), originam

$$V_M^{ef}(r) = V_0(r) + V_1(r) \frac{\Lambda(\Lambda + 1) - l(l + 1) - 3/4}{2} + V_2(r) l(l + 1), \quad (\text{B.16})$$

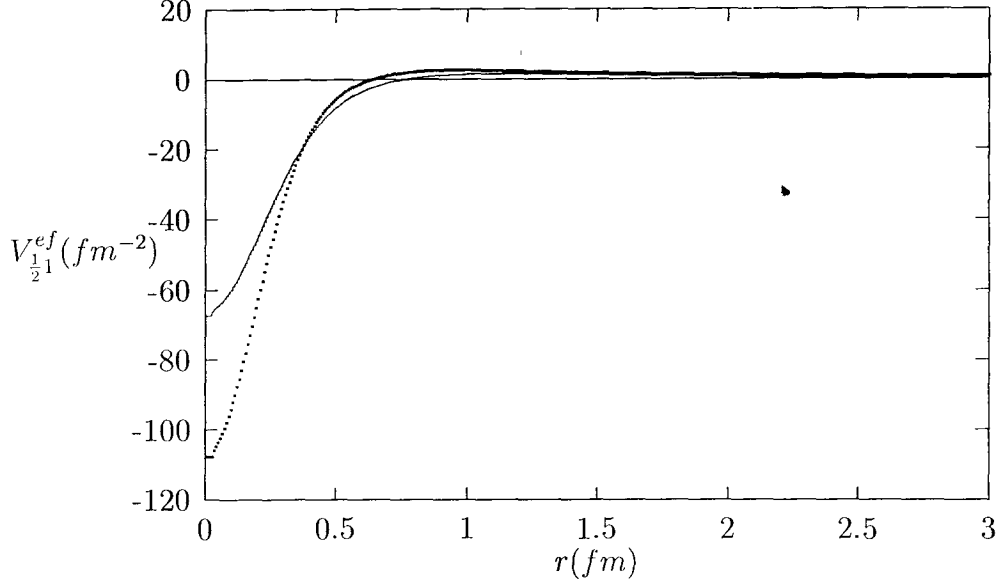
podem agora ser identificadas:

$$\begin{aligned} V_0(r) = & \frac{2\text{sen}^4 F/2}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right] - \frac{1}{4} \left( F'^2 + 2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \\ & - \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left[ 2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \left( 2F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) - \frac{6}{r^2} \left( \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \text{sen}^4 F/2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{d}{dr} \left( F' \text{sen} F \text{sen}^2 F/2 \right) \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{f_\pi^2}{f_K^2} m_\pi^2 (1 - \cos F), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} V_1(r) = & \left\{ \frac{4\text{sen}^4 F/2}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{3}{2e^2 f_K^2} \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \cos F - \frac{d}{dr} (F' \text{sen} F) \right] \right\} \cdot e \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$V_2(r) = \frac{1}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{4e^2 f_K^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right]. \quad (\text{B.19})$$

A figura B.1 mostra o potencial  $V_{\Lambda}^{ef}(r)$  para o estado fundamental  $\Lambda = \frac{1}{2}$  e  $l = 1$ , nos casos não-massivo e massivo.



**Fig. B.1:** Potencial  $V_{\frac{1}{2}}^{ef}$ . A curva de linha contínua refere-se ao caso  $m_{\pi} = 0$  (parâmetros CJ1) e a de linha pontilhada, ao caso  $m_{\pi} \neq 0$  (parâmetros CJ3).

Ademais, apresentamos a seguir as expressões gerais para a massa  $M$  de um híperon que contém  $n_1$  mésons do tipo 1 (indicando sabor e estado orbital) com energia  $\omega_1$  e momentum angular  $j_1$  e  $n_2$  mésons do tipo 2 com energia  $\omega_2$  e momentum angular  $j_2$  e para a constante hiperfina que define o espectro de massas [100]. A massa  $M$ , referida em (2.53), escreve-se como

$$\begin{aligned}
 M(I, J, n_1, n_2, J_1, J_2, J_m) = & \\
 & M_{sol} + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \\
 & + \frac{1}{2\Theta} \left\{ I(I+1) + (c_1 + c_2) [c_1 J_1(J_1+1) - c_2 J_2(J_2+1)] \right. \\
 & \quad + c_1 c_2 J_m(J_m+1) + [J(J+1) + J_m(J_m+1) \\
 & \quad \left. - I(I+1) \left[ \frac{c_1 + c_2}{2} + \left( \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \frac{J_1(J_1+1) - J_2(J_2+1)}{J_m(J_m+1)} \right] \right\}, \tag{B.20}
 \end{aligned}$$



onde  $I$  é o isospin,  $M_{sol}$  é a massa e  $\Theta$  é o momento de inércia do sólito.  $J_1$  e  $J_2$  são os momenta angulares dos mésons, do tipo 1 e do tipo 2, definidos como  $n_1 j_1$  e  $n_2 j_2$ , respectivamente, e  $J_m$  pode adotar os valores  $|J_1 - J_2|, \dots, (J_1 + J_2)$ . Para o caso de um único sabor pesado, a fórmula de massa acima se reduz à eq. (2.53). As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são os coeficientes de estrutura fina para os estados mesônicos 1 e 2, obtidos como elementos de matriz do Hamiltoniano rotacional surgido da quantização do sólito como um rotor rígido. A expressão geral para um dado estado mesônico com momentum angular  $j$  e momentum angular orbital  $l$  é

$$c = 1 - 2\omega \int_0^\infty dr r^2 k_{ij}^2 \left\{ d(r) + \langle l, \frac{1}{2}, j | |\vec{r}| | l, \frac{1}{2}, j \rangle_r a(r) + \frac{1}{2j(j+1)} b(r) + \langle l, \frac{1}{2}, j | |\vec{L}| | l, \frac{1}{2}, j \rangle_r g(r) \right\}, \quad (\text{B.21})$$

onde

$$a(r) = \gamma(r) - \frac{1}{2}d(r) + \frac{3}{8e^2 f_H^2} \left\{ \text{sen } F \left( \frac{2F'}{r} + F'' \right) - \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} + \left[ 1 - 4 \text{sen}^2 \frac{F}{2} \right] F'^2 \right\}, \quad (\text{B.22})$$

$$b(r) = -\gamma(r) + \frac{3}{8e^2 f_H^2} \left\{ \frac{3 \text{sen}^2 F}{r^2} - \text{sen } F \left( \frac{2F'}{r} + F'' \right) - \left[ 1 - 4 \text{sen}^2 \frac{F}{2} \right] F'^2 \right\}, \quad (\text{B.23})$$

$$g(r) = -\frac{1}{4e^2 f_H^2} \frac{\text{sen}^2 F}{r^2}, \quad (\text{B.24})$$

$$\gamma(r) = \text{sen}^2 \frac{F}{2} \left[ 1 + \frac{1}{e^2 f_H^2} \left( F'^2 + \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right) \right] \quad \text{e} \quad (\text{B.25})$$

$$d(r) = 1 + \frac{1}{4e^2 f_H^2} \left( F'^2 + 2 \frac{\text{sen}^2 F}{r^2} \right). \quad (\text{B.26})$$

Os elementos de matriz reduzidos relativos são

$$\langle l, \frac{1}{2}, j || \vec{\tau} || l, \frac{1}{2}, j \rangle_r = \begin{cases} \frac{-2}{2l+1}, & j = l - \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2l+1}, & j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

e

$$\langle l, \frac{1}{2}, j || \vec{L} || l, \frac{1}{2}, j \rangle_r = \begin{cases} \frac{2l+2}{2l+1}, & j = l - \frac{1}{2} \\ \frac{2l}{2l+1}, & j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Nestas expressões,  $f_H$  representa a constante de decaimento do méson considerado.

## Apêndice C

# FUNÇÕES DE ONDA DOS HÍPERONS

Neste apêndice apresentamos as funções de onda dos híperons na *aproximação de estado ligado*.

A caracterização de um híperon, considerado como um estado ligado káon-sóliton no presente modelo, é obtida através do acoplamento do *grande-spin* do káon ligado, com o momentum angular total do sóliton. Os estados assim obtidos são autoestados de momentum angular, de isospin e de estranheza.

Deve-se enfatizar que o isospin é totalmente oriundo do sóliton, pois o isospin do káon ligado ( $I_K = 1/2$ ) acopla-se ao momentum angular orbital deste como se fosse o spin 1/2 de uma partícula (transmutação isospin  $\rightarrow$  spin).

Assim, para um híperon  $Y$ , o estado

$$|Y \rangle = |I, I_z; J, J_z \rangle_{\Lambda} \quad (\text{C.1})$$

é representado pela função

$$\psi_Y = \sum_{\Lambda_z} \langle J, J_z | I, J_z - \Lambda_z; \Lambda, \Lambda_z \rangle \chi_{I_z, J_z - \Lambda_z}^{(I)} K_{\Lambda \Lambda_z}, \quad (\text{C.2})$$

onde

$$\chi_{I_z, J_z}^{(I)} = \varphi^I \sqrt{\frac{2I+1}{2\pi^2}} (-)^{I+I_z} D_{-I_z, J_z}^{(I)} \quad (\text{C.3})$$

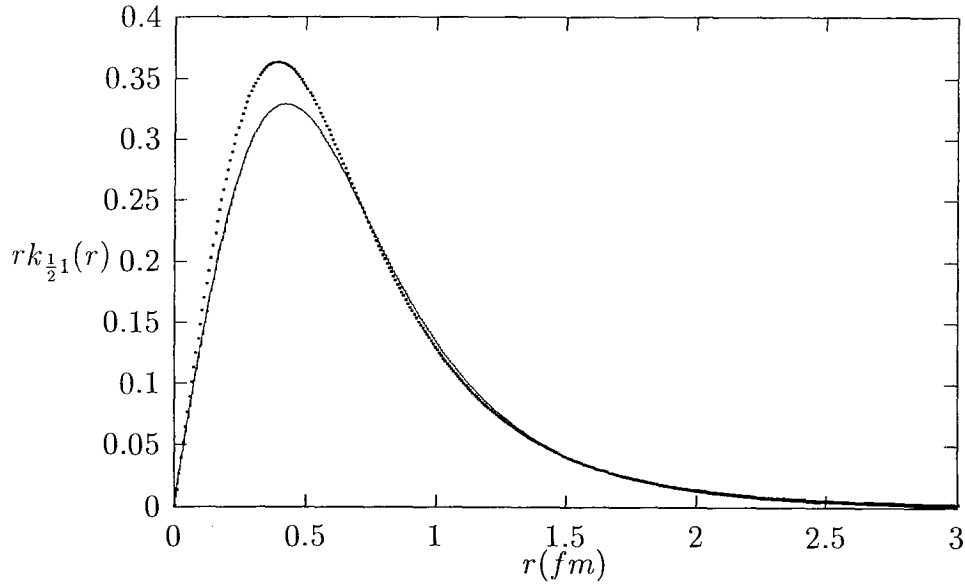
representa o estado  $|I, I_z; J_z\rangle$ , ou seja, é a função de onda do sóliton [102] com vínculo  $|\vec{I}^2| = |\vec{J}^2|$  e com uma fase arbitrária para a qual adotamos o valor  $\varphi^I = (-)^{2I}$ .

Além disto,  $D_{-I_z, J_z}^{(I)}$  são os elementos das matrizes de rotação de Wigner [103] e  $K_{\Lambda\Lambda_z}$  é a onda parcial do káon ligado

$$K_{\Lambda\Lambda_z} = k_{\Lambda}(r) \mathcal{Y}_{\Lambda\Lambda_z}(\hat{r}), \quad (\text{C.4})$$

com os harmônicos esféricos espinoriais dados por

$$\mathcal{Y}_{\Lambda\Lambda_z}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} \langle \Lambda, \Lambda_z | l, \Lambda_z - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle Y_{l, \Lambda_z - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \\ \langle \Lambda, \Lambda_z | l, \Lambda_z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{l, \Lambda_z + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$



**Fig. C.1:** Funções de onda radiais  $rk_{\frac{1}{2},1}$  para  $\Lambda = \frac{1}{2}$  e  $l = 1$ . A linha contínua mostra o resultado para o caso  $m_\pi = 0$  (parâmetros  $CJ1$ ) e a linha pontilhada para o caso  $m_\pi \neq 0$  (parâmetros  $CJ3$ ).

Particularizando para o estado fundamental,  $\Lambda = \frac{1}{2}$  e  $l = 1$ , obtém-se

$$\psi_{\frac{1}{2}1} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}k(r)\vec{\tau} \cdot \hat{r}\chi_{J_z}, \quad (\text{C.6})$$

com  $\chi_{J_z}$  um espinor de 2 componentes.

A Fig. C.1 mostra as funções radiais reduzidas e normalizadas do estado fundamental, para os casos de píons não-massivos e massivos.

## Apêndice D

# REGRAS DE QUANTIZAÇÃO E ISOSPIN DOS DIBÁRIONS

Existe na *aproximação de estado ligado*, assim como no caso do modelo de Skyrme, uma ambiguidade, quanto à estatística (fermiônica ou bosônica), na quantização do sôlton como um bárion  $B$  quando o campo de fundo está restrito ao  $SU(2)$ . Além disso, não se tem informação sobre a qual multiplete  $SU(3)$  deve pertencer um estado ligado quantizado com momentum angular, isospin e estranheza dados. A fim de evitar estas ambiguidades na *AEL*, Scoccola e Wirzba [104] sugerem introduzir um terceiro sabor – degenerado com  $u$  e  $d$  – por eles denominado de *funny strange* – e embutir a premissa sobre o campo  $U$  da eq.(2.16) ( $U = \sqrt{U_\pi} U_K \sqrt{U_\pi}$ ), em  $SU(4)^{(f)}$  como segue:

$$U^{(f)} = \begin{pmatrix} \sqrt{U_\pi^{(f)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_K^{(f)} \begin{pmatrix} \sqrt{U_\pi^{(f)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

onde o índice  $(f)$  indica tratar-se do grupo *funny* de sabor e não do grupo  $SU(4)$  tradicional. Aqui,  $U_\pi^{(f)}$  pertence a  $SU(3)^{(f)}$ ,

$$U_\pi^{(f)} = \begin{pmatrix} u_\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

e  $U_K^{(f)}$  tem, como função de  $K^{(f)}$ , a mesma forma que  $U_K$  tem como função de  $K$ ,  $K^{(f)}$  sendo dado por

$$K^{(f)} = \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Após a quantização via coordenadas coletivas dos graus de liberdade de  $SU(3)^{(f)}$  ( $u$ ,  $d$  e  $f$ ), o termo de Wess-Zumino<sup>1</sup> conduz a um vínculo para a hipercarga-direita  $Y_D^{(f)}$  [104],

$$Y_D^{(f)} = \frac{N_c B + S}{3}, \quad (\text{D.4})$$

onde  $S$  é a estranheza física. (No que segue, a ausência do índice ( $f$ ) indica a situação física real). A derivação desta relação considera apenas que o campo do sóliton  $u_\pi$  pertence a  $SU(2)$  e que  $K$  tem a forma do isodublete

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix},$$

apresentado em (2.17). O resultado acima é também aplicável ao sistema rotor axial ( $SU(3)^{(f)}$ -extendido) com  $n \geq 2$ , onde  $n = B$ . Para  $B = 2$  e  $N_c = 3$  tem-se, portanto, o vínculo

$$Y_D^{(f)} = 2 + \frac{S}{3}. \quad (\text{D.5})$$

De todos os possíveis multipletos  $SU(3)^{(f)}$  com  $Y_D^{(f)}$  dado pela equação acima, apenas aqueles *mínimos* (que são os de menor energia) nos interessam aqui. *Mínimos* significa que são compostos de modo mínimo por representações triplete  $p$  e antitriplete  $q$   $SU(3)^{(f)}$ , onde  $p$  e  $q$  identificam a representação irreduzível. Portanto

$$Y_D^{(f)} = \frac{p + 2q}{3} \quad \text{e} \quad I_D^{(f)} = \frac{p}{2}, \quad (\text{D.6})$$

<sup>1</sup> A derivação deste resultado é análoga àquela realizada para a quantização de um skyrmion  $SU(3)$ , onde, entretanto, o termo WZ conduz ao vínculo  $Y_D = \frac{N_c B}{3}$  [70].

onde  $I_D^{(f)}$  é o isospin-direito.

Os multipletos são então descritos por matrizes de rotação  $SU(3)^{(f)}$

$$D_{Y^{(f)}I^{(f)}I_3^{(f)}, Y_D^{(f)}I_D^{(f)}I_{D,z}^{(f)}}^{p,q}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8) , \quad (D.7)$$

onde  $Y^{(f)}$  é a hipercarga de um membro do multipletto,  $I^{(f)}$  seu isospin,  $I_3^{(f)}$  a projeção do isospin no sistema laboratório e  $I_{D,z}^{(f)}$  a projeção do isospin direito no sistema fixo no sólito.

Como a estranheza ( $f$ ) foi introduzida apenas como uma grandeza auxiliar, os estados físicos devem pertencer àqueles submultipletos  $SU(2)$  de um dado multipletto  $SU(3)^{(f)}$  que não apresentem qualquer componente ( $f$ ) estranha. Na prática isto significa que se trabalha apenas com a linha superior de um dado multipletto mínimo  $SU(3)^{(f)}$ . Assim tem-se

$$Y = Y^{(f)} = Y_D^{(f)} \quad \text{e} \quad I = I^{(f)} = I_D^{(f)} = p/2 , \quad (D.8)$$

onde  $Y$  e  $I$  são a hipercarga e o isospin dos estados físicos usuais. Neste caso, a matriz de rotação  $SU(3)^{(f)}$  (D.7) se torna

$$D_{Y_D I I_3, Y_D I I_3^{fix}}^{p,q}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8) , \quad (D.9)$$

que é equivalente, no que diz respeito ao conteúdo de isospin, à matriz usual de rotação de isospin em  $SU(2)$

$$D_{I_3, I_3^{fix}}^I(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) , \quad (D.10)$$

onde  $I_3$  é a projeção do isospin no sistema laboratório,  $I_3^{fix}$  a projeção no sistema fixo no sólito e  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  são os ângulos de Euler físicos para as rotações do isospin.

As eqs.(D.5) e (D.6) possibilitam construir os multipletos ( $f$ ) permitidos  $SU(3)^{(f)}$ , para uma configuração de estado ligado com  $B = 2$  e uma dada estranheza  $S$ . Para  $S = 0$  os valores possíveis de  $(p, q)$  são  $(p, q) =$



$(0, 3)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(4, 1)$  e  $(6, 0)$ , que correspondem aos multipletos de sabor de 6 quarks usuais, a saber,  $\bar{10}$ , 27, 35 e 28. Para  $S = -1$ , encontra-se  $(p, q) = (1, 2)$ ,  $(3, 1)$  e  $(5, 0)$ , que correspondem respectivamente aos multipletos  $SU(3)^{(f)}$ :  $\bar{15}$ , 24 e 21. Note-se que estes números são os mesmos que os dos multipletos de 5 quarks  $SU(3)$  que se obtém depois de remover um quark do sistema de 6 quarks.

$S$	$Y_D^{(f)}$	$p$	$q$	$SU(3)^{(f)}$ repres.	$I = I_D$
0	2	0	3	$\bar{10}$	0
		2	2	27	1
		4	1	35	2
		6	0	28	3
-1	5/3	1	2	$\bar{15}$	1/2
		3	1	24	3/2
		5	0	21	5/2
-2	4/3	0	2	$\bar{6}$	0
		2	1	15	1
		4	0	15	2
-3	1	1	1	8	1/2
		3	0	10	3/2
-4	2/3	0	1	$\bar{3}$	0
		2	0	6	1
-5	1/3	1	0	3	1/2
-6	0	0	0	1	0

Tab. D.1: Multipletos  $(f)$   $(p, q)$  permitidos, para os estados ligados do sistema  $B = 2$ .

Na Tabela D.1 estão relacionados todos os multipletes  $(f)$  *mínimos*  $(p, q)$  para configurações de estado ligado com  $B = 2$  e estranheza  $S$  entre 0 e  $-6$ . Da tabela se pode deduzir que os estados caracterizados pela matriz de rotação (D.9) do campo de fundo correspondem, no modelo de quarks, àquelas configurações de sabor de quarks mínimas que envolvem apenas os quarks  $u$  e  $d$  de um dado estado com  $B = 2$ . Por exemplo, para  $S = -6$  o multiplete  $(f)$  é um singlete, assinalando que não existe conteúdo de  $u$  e  $d$ . O papel dos quarks estranhos (6 no sistema  $S = -6$ ) é assumido pelos káons acoplados ao campo solitônico de fundo com  $n = 2$ . Observe-se que qualquer estado  $B = 2$  com  $S \leq -7$  ou  $S \geq 1$  corresponde a um multiplete *não-mínimo*  $SU(3)^{(f)}$  para o rotor.

Com este formalismo consegue-se, então, resolver a ambiguidade associada à estatística das partículas estranhas construídas na *AEL*.

## Apêndice E

# ELEMENTOS DE MATRIZ COLETIVOS

Reunimos neste apêndice algumas das expressões utilizadas para o cálculo dos elementos de matriz dos diversos termos do Lagrangeano de interação do Cap. 4 quantizado coletivamente.

A rotação lenta do isospin do sóliton (2.40) apresenta-se como equivalente a uma rotação espacial. Explicitamente,

$$\begin{aligned} C u_\pi C^\dagger &= C e^{i\vec{\tau}\cdot\hat{r} F(r)} C^\dagger \\ &= e^{iC\vec{\tau}\cdot\hat{r}C^\dagger F(r)} \\ &= e^{i\tau_a R_{ab}\hat{r}_b F(r)} \\ &= u_\pi(R\hat{r}) , \end{aligned} \tag{E.1}$$

onde  $C\tau_j C^\dagger = \tau_a R_{aj}$ . Em base cartesiana tem-se

$$R_{ab}(C) = \frac{1}{2} \text{Tr} [\tau_a C \tau_b C^\dagger] \tag{E.2}$$

e em função do tensor esférico de componentes  $D_{\alpha\beta}(C)$ ,

$$R_{ab} = \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_a \hat{e}_\beta^* \cdot \hat{e}_b D_{\alpha\beta} , \tag{E.3}$$

sendo  $\hat{e}_\alpha$ , com  $\alpha = +1, 0, -1$ , os vetores unitários esféricos usuais e  $\hat{e}_a$  os cartesianos.

Usando (E.3) e as seguintes relações envolvendo coeficientes de Wigner

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \hat{e}_a^i \hat{e}_b^j \hat{e}_c^k = \frac{i}{\sqrt{6}} \epsilon^{ijk} \quad \text{e} \quad (\text{E.4})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \hat{e}_a^{*i} \hat{e}_b^{*j} \hat{e}_c^{*k} = -\frac{i}{\sqrt{6}} \epsilon^{ijk}, \quad (\text{E.5})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ a & m & -m' \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}+m'}}{\sqrt{6}} \langle m' | \tau^a | m \rangle \quad (\text{E.6})$$

$$= \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}+m'+a}}{\sqrt{6}} \langle m | \tau^{-a} | m' \rangle, \quad (\text{E.7})$$

onde, na última linha, utilizamos

$$(-1)^a \langle \frac{1}{2} m' | \tau_a | \frac{1}{2} m \rangle = \langle \frac{1}{2} m | \tau_{-a} | \frac{1}{2} m' \rangle, \quad (\text{E.8})$$

pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} (D_{mn}^{(1/2)})^* D_{m'n'}^{(1/2)} &= (-1)^{m-m'} \sum_{j,m'',n''} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j \\ m & m' & m'' \end{pmatrix} D_{m''n''}^j \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & j \\ n & n' & n'' \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{1}{2} (\delta_{mm'} \delta_{nn'} + \langle m' | \sigma^a | m \rangle R_{ab} \langle n | \sigma^b | n' \rangle), \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

expressão bastante útil ao cálculo dos elementos de matriz. Esta determinação implica em uma integração em  $SU(2)$ . Resultam, para produtos de 2 e 3 operadores de rotação  $R_{ab}$ , as integrais sobre as variáveis coletivas  $C$

$$\frac{1}{2\pi^2} \int dC R_{ab} R_{cd} = \frac{1}{3} \delta_{ac} \delta_{bd}, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \int dC R_{ab} R_{cd} R_{ef} = \frac{1}{6} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf}. \quad (\text{E.11})$$

Usando as formas explícitas das funções de onda coletivas que representam os vetores de estado das partículas  $\Lambda$  e  $N$  no modelo de sólitons,

$$|\Lambda\rangle = |I^\Lambda, J_z^\Lambda, J_z^\Lambda\rangle \rightarrow \frac{1}{\pi\sqrt{2}} D_{-I_z^\Lambda, J_z^\Lambda - \Lambda_z}^{(I^\Lambda)}, \quad (\text{E.12})$$

$$|N\rangle = |I_z^N, J_z^N\rangle \rightarrow \frac{i}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2}+I_3^N} D_{-I_3^N, J_3^N}^{(1/2)}, \quad (\text{E.13})$$

os elementos de matriz relevantes podem ser facilmente calculados.

Para os termos diretos, por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda'_2 N'_1 | \Lambda_2 N_1 \rangle &= \frac{1}{4\pi^4} (-)^{1+I_3^{N'}+I_3^N} \int dA_1 (D_{-I_3^{N'}, J_3^{N'}}^{(\frac{1}{2})})^* D_{-I_3^N, J_3^N}^{(\frac{1}{2})} \\
 &\quad \times \int dA_2 (D_{-I_3^{\Lambda'}, J_3^{\Lambda'} - \Lambda_3}^{(0)})^* D_{-I_3^{\Lambda}, J_3^{\Lambda} - \Lambda_3}^{(0)} \\
 &= \delta_{I_3^N, I_3^{N'}} \delta_{J_3^N, J_3^{N'}} \delta_{I_3^{\Lambda}, I_3^{\Lambda'}} , \tag{E.14}
 \end{aligned}$$

onde usamos (4.21),  $C = A_1^\dagger A_2$ , e as propriedades

$$D_{ij}(BA) = D_{ik}(B)D_{kj}(A) \quad \text{e} \tag{E.15}$$

$$(D_{ij}(A))^* = (-)^{i-j} D_{-i, -j}(A) . \tag{E.16}$$

Da mesma forma,

$$\langle \Lambda'_2 N'_1 | R_{ab}(C) | \Lambda_2 N_1 \rangle = 0 , \tag{E.17}$$

$$\langle \Lambda'_2 N'_1 | R_{ab}(C) R_{cd}(C) | \Lambda_2 N_1 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ac} \delta_{bd} \langle \Lambda'_2 N'_1 | \Lambda_2 N_1 \rangle \tag{E.18}$$

e para os termos de troca,

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda'_1 N'_2 | \mathcal{O}_\mu^\dagger(K_1) C_{\mu\nu} \mathcal{O}_\nu(K_2) | \Lambda_2 N_1 \rangle &= \frac{\delta_{I_3^N, I_3^{N'}}}{2} \langle J_3^{\Lambda'} | \mathcal{O}^\dagger(K_1) | J_3^N \rangle \langle J_3^{N'} | \mathcal{O}(K_2) | J_3^\Lambda \rangle \text{ e} \\
 &\tag{E.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \Lambda'_1 N'_2 | \mathcal{O}_\mu^\dagger(K_1) C_{\mu\nu} \mathcal{O}_\nu(K_2) R_{ab}(C) | \Lambda_2 N_1 \rangle &= \frac{\delta_{I_3^N, I_3^{N'}}}{6} \langle J_3^{\Lambda'} | \mathcal{O}^\dagger(K_1) \sigma_a | J_3^N \rangle \langle J_3^{N'} | \sigma_b \mathcal{O}(K_2) | J_3^\Lambda \rangle . \\
 &\tag{E.20}
 \end{aligned}$$

## Apêndice F

# FORMAS EXPLÍCITAS PARA $\mathcal{L}_4^k$

As contribuições ao potencial  $\Lambda N$  oriundas dos termos quártico e de quebra de simetria do Lagrangeano são, como mencionado no Cap. 4, muito extensas, o que nos fez optar por indicar em apêndice como procedemos ao calculá-las.

Da mesma forma que os outros termos da densidade lagrangeana, podemos escrever cada uma destas contribuições como a soma de tres partes, de acordo com a relação (4.10), i.e.,

$$\mathcal{L}^{(int)} = \mathcal{L}^{\pi d} + \mathcal{L}^{kd} + \mathcal{L}^{ke},$$

o que perfaz um total de 240 termos após a substituição da *aproximação produto* (4.3), expandida até segunda ordem nos campos kaônicos.

A obtenção destes termos, bem como da forma final para a integração numérica para o potencial, foi possível mediante a elaboração de códigos computacionais algébricos com o programa *Mathematica*<sup>®</sup>.

A título de exemplo vamos apresentar o uso destes códigos na obtenção da contribuição kaônica direta ao potencial central  $\Lambda N$ .

O programa *l4terms.m* a seguir calcula e relaciona os 240 termos de  $\mathcal{L}_4$ , a soma dos mesmos constando em *l4int*.

De posse de tal relação, o passo seguinte é promover a quantização via

coordenadas coletivas, expressas na coordenada relativa  $C$  dada em (4.21), e classificar os termos como *diretos* ou *de troca*, bem como identificar as componentes que dão contribuições nulas ao potencial (i.e., termos que contêm expressões como (4.24)). Isto é feito com o código *sortl4.m* e a listagem encontra-se em *terms*.

Finalmente, o código *l4d.m* calcula explicitamente a expressão a ser integrada numericamente e que fornece a contribuição kaônica direta ao potencial central  $\Lambda N$ . Códigos auxiliares (*u2e.m*, *repe.m*, *commone.m*, *dots.m*, *intd.m* e *addd4.m*), não explicitados aqui, são necessários para a forma final da contribuição e devem ser processados antes de *l4d.m*. Finalmente o código *addd4.m* soma todas as contribuições e as escreve em formato Fortran (*l4d*).

As contribuições kaônicas *de troca*, bem como as contribuições devidas ao termo de quebra de simetria são calculadas de maneira análoga.

```

(*) =====
(*) 14terms.m
(*)
(*) Calculation of
(*)
(*) L_4 ~ Tr[ [L^mu, L^nu] ^ 2 ]
(*)
(*) = 2 Tr[ L_mu L_nu L^mu L^nu - L_mu L^mu L_nu L^nu L^nu ]
(*)
(*) =====
(*) c2[a_,p_] := Table[Coefficient[a.p.nx],{nx,0,2}]
(*)
(*) pr2[l1_,l2_] := ( l1[[1]],l2[[1]] + l1[[2]],l2[[2]] + l1[[3]],l2[[3]] )
(*)
(*) pair[a_] := If[Length[a]==0,{1,a},List @@ a]
(*)
(*) fdot[hd_] := Module[{mt},
(*)   mt = Transpose[Pair /@ (List @@ hd)];
(*)   Times[Times @@ mt[[1]], Dot @@ mt[[2]] ]
(*)
(*) flatdot[exp_] := MapAt[fdot, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]][[1]]
(*)
(*) mp[m1_,m2_] := Table[Sum[If[NumberQ[m1[[ix,kx]]] || NumberQ[m2[[kx,jx]]],
(*)   m1[[ix,kx]] m2[[kx,jx]], m1[[ix,kx]] m2[[kx,jx]] ],
(*)   {kx,1,2}],
(*)   {ix,1,2},{jx,1,2}]
(*)
(*) dot[X_] := Module[{m,l,i}, l = {x};
(*)   m = l[[1]];
(*)   Do[m = mp[m,l[[i]]],{i,2,Length[l]}];
(*)   m]
(*)
(*) expdot[exp_] := MapAll[Distribute[#, Plus, Dot] &, exp]
(*)
(*) replm = { m1 -> {{ l, 0},{ 0, 0}},
(*)   mr -> {{ r, 0},{ 0, 0}},
(*)   s -> {{ 0,s12},{s21, 0}},
(*)   w -> {{ 0,w12},{w21, 0}},
(*)   t -> {{t11, 0},{ 0,t22}},
(*)   z -> {{z11, 0},{ 0,z22}} }
(*)
(*) replK = { s12 -> nd.DK + 1/2 l.nd.K,
(*)   s21 -> DKd.n - 1/2 Kd.n.l,
(*)   "w12 -> n.DK + 1/2 r.n.K,
(*)   w21 -> DKd.nd - 1/2 Kd.nd.r,
(*)   t11 -> nd.(K.DKd - DK.Kd).n - 1/2 nd.K.Kd.n.l - 1/2 l.nd.K.Kd.n,
(*)   t22 -> Kd.DK - DKd.K + Kd.n.l.nd.K,
(*)   z11 -> n.(K.DKd - DK.Kd).nd - 1/2 n.K.Kd.nd.r - 1/2 r.n.K.Kd.nd,
(*)   z22 -> Kd.DK + Kd.nd.r.n.K }
(*)
(*) rot[hd_,s_] := Module[{pos,n}, pos=Flatten[Position[hd,s]];
(*)   If[Length[pos]==0,n=0,n=pos[[1]]];
(*)   RotateLeft[hd,n] ]
(*)
(*) rotK[hd_] := rot[hd,K]
(*) rotDK[hd_] := rot[hd,DK]
(*)
(*) traceK[exp_] := MapAt[rotK, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]][[1]]
(*) traceDK[exp_] := MapAt[rotDK, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]][[1]]
(*)
(*) =====
(*) tr[m_] := Sum[m[[ix,ix]],{ix,1,2}]
(*)
(*) (* ===== *)
(*) addindx [symb_,char_] := ToExpression[StringJoin[{ToString[symb],char}]]
(*) addindxrule[symb_,char_] := symb -> addindx[symb, char]
(*)
(*) repl = {m1, mr, s, w, t, z }
(*) repl2 = { l, r, DK, DKd, s12, s21, w12, w21, t11, t22, z11, z22 }
(*) repl3 = { K, Kd, n, nd }
(*)
(*) replMA = addindxrule[#, "MA"] & /@ repl
(*) replMB = addindxrule[#, "MB"] & /@ repl
(*) repl2MA = addindxrule[#, "MA"] & /@ repl2
(*) repl2MB = addindxrule[#, "MB"] & /@ repl2
(*)
(*) replNA = addindxrule[#, "NA"] & /@ repl
(*) replNB = addindxrule[#, "NB"] & /@ repl
(*) repl2NA = addindxrule[#, "NA"] & /@ repl2
(*) repl2NB = addindxrule[#, "NB"] & /@ repl2
(*)
(*) repl3A = addindxrule[#, "A"] & /@ repl3
(*) repl3B = addindxrule[#, "B"] & /@ repl3
(*)
(*) replmMA = replm /. replMA /. replMA /. repl2MA
(*) replmMB = replm /. replMB /. replMB /. repl2MB
(*) replkMA = replk /. repl2MA /. repl3A
(*) replkMB = replk /. repl2MB /. repl3B
(*)
(*) replmNA = replm /. replNA /. repl2NA
(*) replmNB = replm /. replNB /. repl2NB
(*) replkNA = replk /. repl2NA /. repl3A
(*) replkNB = replk /. repl2NB /. repl3B
(*)
(*) (* ===== *)
(*) cD[exp_] := Length[Position[exp, Dot]]
(*) posDot[exp_] := Position[exp, Dot]
(*)
(*) tra[exp_] := Module[{res}, res = exp;
(*)   pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[res];
(*)   ndi = Length[pd];
(*)   ix = 1;
(*)   ndf = ndi;
(*)   While[ ix <= ndi,
(*)     jx = 1;
(*)     While[ ndi == ndf && jx <= 3,
(*)       aux = MapAt[RotateLeft[#, jx] &, res, pd[[ix]] ]
(*)     ];
(*)     ndf = cD[aux];
(*)     jx = jx + 1;
(*)     If[ndi == ndf, ix = ix + 1, ix = 1; res = aux; ndi = ndf];
(*)   ];
(*)   pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[res] ]
(*)
(*) res ]
(*)
(*) exchMXNM = { lMA -> lXA, lNA -> lMA, rMB -> rXB, rNB -> rNB,
(*)   DKdMA -> DKdXA, DKdMB -> DKdXB,
(*)   DKdNA -> DKdNA, DKdNB -> DKdNB,
(*)   DKMA -> DKXA, DKMB -> DKXB,
(*)   DKNA -> DKMA, DKNB -> DKMB }
(*)
(*) exchXN = { lXA -> lNA, rXB -> rNB,
(*)
(*) ===== *)

```



```

DKXNA -> DKdNA , DKdXB -> DKdNB ,
DKXA -> DKNA , DKXB -> DKNB )

traMN[exp_] := Module[{res}, res = exp;
  pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[res];
  ndi = Length[pd];
  ix = 1;
  nDf = ndi;
  While[ ix <= ndi ,
    jx = 0;
    While[ ndi == nDf && jx <= 3 ,
      aux = MapAt[RotateLeft[#, ., exchXNM /. exchXN , jx] & , res , pd[[ix]] ]
    ];
    nDf = cd[aux];
    jx = jx + 1;
    If[ndi == nDf , ix = ix + 1, ix = aux; nDi = nDf
  ];
  pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[res] ]
];

res ]

exMN[exp_] := Module[{res}, res = exp;
  pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[res];
  ndi = Length[pd];
  ix = 1;
  nDf = ndi;
  While[ ix <= ndi ,
    aux = MapAt[#, ., exchXNM /. exchXN & , {res} , pd[[ix]] ][[1]]
  ];
  nDf = cd[aux];
  If[ndi == nDf , ix = ix + 1, ix = aux; nDi = nDf
];
  pd = Drop[#, -1] & /@ posDot[{res} ] ]
];

aux ]

first = {kd, DKdN , DKdM }
last = {k , DkN , DkM }

firstA = addindx[#, "A"] & /@ first
firstB = addindx[#, "B"] & /@ first
lastA = addindx[#, "A"] & /@ last
lastB = addindx[#, "B"] & /@ last

sdeDot[hd_] := Module[{a1, an, fA, lA, fB, lB}, a1 = First[hd]; an = Last[hd];
  fA = Or @@ {a1 == # & /@ firstA};
  lA = Or @@ {an == # & /@ lastA};
  fB = Or @@ {a1 == # & /@ firstB};
  lB = Or @@ {an == # & /@ lastB};
  If[ ( fA && lA ) , AA hd ,
  If[ ( fA && lB ) , AB hd ,
  If[ ( fB && lA ) , BA hd ,
  If[ ( fB && lB ) , BB hd , Print["Error"]]] ] ]

sde[exp_] := Module[{aux},
  aux = MapAt[sdeDot, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
];

Coefficient[aux, #] & /@ {AA, BB, AB, BA} ]

(* ===== *)

```

```

(* functions *)
con[a_, b_] := a.b - b.a

lstA[symb_] := If[StringMatchQ[ToString[symb], "A"], 1, 0]
findA[hd_] := lstA[#] & /@ List @@ hd
cA[hd_] := Plus @@ findA[hd]
coefA[hd_] := ToExpression[StringJoin[{"A", ToString[cA[hd]]}]]

sABDot[hd_] := coefA[hd] hd
sAB[exp_] := Module[{aux},
  aux = MapAt[sABDot, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
];

Coefficient[Expand[aux], #] & /@ {A0, A1, A2, A3, A4} ]

adpre
adpreRule[symb_, char_] := symb -> adpre[char, symb]

pr[x_] := Module[{l13, lol, i}, lol = {x};
  l3 = lol[[1]];
  Do[l13 = pr2[l3, lol[[i]]], {i, 2, Length[lol]}];
  l3 ]

rotKA[hd_] := rot[hd, KA]
rotDKMA[hd_] := rot[hd, DKMA]
rotDKNA[hd_] := rot[hd, DKNA]

traceKA [exp_] := MapAt[rotKA , {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
[[1]]
traceDKMA[exp_] := MapAt[rotDKMA, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
[[1]]
traceDKNA[exp_] := MapAt[rotDKNA, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
[[1]]

rotKB[hd_] := rot[hd, KB]
rotDKMB[hd_] := rot[hd, DKMB]
rotDKNB[hd_] := rot[hd, DKNB]

traceKB [exp_] := MapAt[rotKB , {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]][[1]]
traceDKMB[exp_] := MapAt[rotDKMB, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
[[1]]
traceDKNB[exp_] := MapAt[rotDKNB, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
[[1]]

cDnest[exp_] := Map[cd, exp, {length[Dimensions[exp]]}]
sAB9[exp_] := Module[{aux},
  aux = MapAt[sABDot, {exp}, Drop[#, -1] & /@ Position[{exp}, Dot]]
];

Coefficient[Expand[aux], #] & /@ {A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8} ]

(* ===== *)
con11 = con[lM, lN];
con112 = flatdot[expdot[con11, con11]]
l4 = tra[con112]
l4NM = List @@ l4
l4NMA = l4NM /. {lM -> lMA - rMB , lN -> lNA - rNB }
el4AB = flatdot[expdot[l4NMA]]

```

```

(* ===== *)

```

```

14AB = trAMN[e14AB]
14ABS = Transpose[ sAB[14AB] ]
repl4 = { lMA , lNA , rMB , rNB }
brule = addprefrule[#, "b"] & /@ repl4
h14ABs = l4ABs /. Dot -> hdot
hb14ABs = h14ABs /. brule
b1 = m1 + I b s + 1/2 b^2 t      (* big L *)
br = mr - I b w + 1/2 b^2 z      (* big R *)
blc = c2[b1, b]
brc = c2[br, b]
blMA = blc /. replMA
brMB = brc /. replMB
blNA = blc /. replNA
brNB = brc /. replNB
b14ABs = Expand[ flatdot[expdot[hb14ABs /. hdot -> pr]]]
h14m = b14ABs /. Dot -> hdot
rh14m = h14m /. replmMA /. replmNA /. replmMB /. replmNB
rl4m = rh14m /. hdot -> dot
rk14 = rl4m /. replkNA /. replkMA /. replkNB /. replkMB
resl4 = Expand[flatdot[expdot[rk14]]]

rotrresl4 = traceKA[traceKB[traceDKMA[tracedKMA[tracedKMA[tracedKMB[tracedKMB[
[resl4]]]]]]]];
res = Map[tr, rotrresl4, {3}]
resKKMN = Map[Last, res, {2}]
resk = Map[#[[2]] & , res, {2}]
resSU2 = Map[#[[1]] & , res, {2}]
resKK = Map[exMN, resKKMN, {2}]
cDresKK = Map[cD , resKK, {2}]
result = $de[resKK]
resdim = Dimensions[result]
resAA = result[[1]]
resBB = result[[2]]
resAB = result[[3]]
resBA = result[[4]]
CDAA = cDnest[resAA]
CDEB = cDnest[resBB]
CDAB = cDnest[resAB]
CDEA = cDnest[resBA]
fresAA = Plus @@ # & /@ resAA
fresAA9 = sAB9[fresAA]
fresBB = Plus @@ # & /@ resBB
resBB9 = sAB9[fresBB]
fresAB = Plus @@ # & /@ resAB
resAB9 = sAB9[fresAB]
resBA9 = sAB9[fresBA]
resBA = Plus @@ # & /@ resBA
resBA9 = sAB9[fresBA]
cDAA9 = cDnest[resAA9]
cDEB9 = cDnest[resBB9]
cDAB9 = cDnest[resAB9]
cDEA9 = cDnest[resBA9]
cDresult = Map[cD, result, {3}]
cDtot = Plus @@ Flatten[cDresult]      (* gives the same as cD[resKK] *)
l4int = fresAA + fresBB + fresAB + fresBA
Save["l4int.inp", l4int]              (* Input for sortl4.m *)

```

```

(*****
(*)
(*)      sortl4.m
(*)
(*)      classification of terms: L4
(*)      input file: l4int.m generated by l4terms.m
(*****
(*) functions *)

cd::usage = "cd[exp] counts the number of Dot in exp."
cd[exp_] := Length[Position[exp, Dot]]
SetAttributes[cd, Listable]

cdflat::usage = "cdflat[exp] gives the total number of Dot in exp."
cdflat[exp_] := Plus @@ Flatten[cd[exp]]

sort::usage = "sort[exp, test, XXX] splits exp according to test[hd, lst_] into
classes[test] pieces. hd_ stands for an expression with head Dot."
sort[exp_, test_, dummy_] := Module[{aux, coef, i},
coef = Table[ToExpression[StringJoin[ToString[dummy], ToString[i]]],
{i, 1, classes[test]}];
aux = MapAt[test[#, coef] & {exp},
Coefficient[aux, #] & /@ Position[{exp}, Dot]][{1}];
SetAttributes[sort, Listable]

addindx::usage = "addindx[symb, char] appends char at the end of symb, returns
a Symbol."
addindx[symb_, char_] := ToExpression[StringJoin[{ToString[symb], char}]]
SetAttributes[addindx, Listable]

first = {Kd, DkAn, DKm}
last = {K, DkN, DKM}

firstA = addindx[first, "A"]
firstB = addindx[first, "B"]
lastA = addindx[last, "A"]
lastB = addindx[last, "B"]

sde::usage = "sde[hd, lst] classifies into {AA, BB, AB, BA}."
classes[sde] ^= 4

sde[hd_, lst_] := Module[{al, an, fA, lA, fB, lB}, al = First[hd]; an = Last[hd];
fA = Or @@ (al == # & /@ firstA);
lA = Or @@ (an == # & /@ lastA);
fB = Or @@ (al == # & /@ firstB);
lB = Or @@ (an == # & /@ lastB);
If[ ( fA && lA ) , lst[[1]] hd ,
If[ ( fB && lB ) , lst[[2]] hd ,
If[ ( fA && lB ) , lst[[3]] hd ,
If[ ( fB && lA ) , lst[[4]] hd , "Error" ]]]]

begchQ::usage = "begchQ[symb, char] gives True (False) if the first characters
in symb are (are not) equal to char."
begchQ[symb_, char_] := StringMatchQ[ToString[symb], StringJoin[char, "***]]

dotlQ::usage = dot2Q::usage = dot3Q::usage = "dot{l23}Q[hd] test the matching
with DK ... DK, K ... DK or DK ... K ... K ... K respectively."

```

```

dotlQ[hd_] := begchQ[First[hd], "DK"] && begchQ[Last[hd], "DK"]
dot2Q[hd_] := (begchQ[First[hd], "K"] && begchQ[Last[hd], "DK"]) ||
(begchQ[First[hd], "DK"] && begchQ[Last[hd], "K"])
dot3Q[hd_] := begchQ[First[hd], "K"] && begchQ[Last[hd], "K"]

s3::usage = "s3[hd, lst] classifies into {DK DK, K DK or DK K, K K}."
classes[s3] ^= 3

s3[hd_, lst_] := Module[{al, an}, al = First[hd]; an = Last[hd];
If[ dotlQ[hd] , lst[[1]] hd ,
If[ dot2Q[hd] , lst[[2]] hd ,
If[ dot3Q[hd] , lst[[3]] hd ,
]]]

lstA::usage = "lstA[symb] returns 1 if the last character is A, 0 otherwise."
lstA[symb_] := If[StringMatchQ[ToString[symb], "*A"], 1, 0]
SetAttributes[lstA, Listable]

findA::usage = "findA[hd] returns a pattern of 1's & 0's matching the AB
pattern."
findA[hd_] := lstA[List @@ hd]

cA::usage = "cA[hd] counts the number of factors that end with A."
cA[hd_] := Plus @@ findA[hd]

sAB::usage = "sAB[hd, lst] classifies into {0A, lA, 2A, 3A, ...}."
classes[sAB] ^= 11 (* for 14 we only need 9 *)

sAB[hd_, lst_] := lst[{cA[hd] + 1}] hd

collective::usage = "collective[hd, c, cd] inserts coll. coord. c and cd,
returns a list {hdcol, nc} where nc is the number of c's."
collective[hd_, c_, cd_] :=
Module[{i, ilast, j, col, patt},
patt = findA[hd];
col = hd;
ilast = Length[patt] - 1; j = 0;
Do[ If[patt[[i]] == 1 && patt[[i+1]] == 0,
col = insert[col, c, i+j+1]; j = j + 1;
If[patt[[i]] == 0 && patt[[i+1]] == 1,
col = insert[col, cd, i+j+1]; j = j + 1,
{i, 1, ilast}];
{col, j} ]

col::usage = "col[hd, lst] classifies according to the number of c's (collective
coordinates)."
classes[col] ^= 6 (* for 14 we only need 5 *)

col[hd_, lst_] := Module[{aux},
aux = collective[hd, c, cd];
lst[{aux[[2]] + 1}] aux[[1]] ]

nonz::usage = "nonz[exp] removes the zeros from the nested list exp. Returns
the list {no. of nonz. contributions, no. of Dot, class, class. contributions
}."

```

```

nonz[exp_] := Module[{x,i,l,n,lst,ter,pos},
  n = Length[Dimensions[exp]]; (* Depth *)
  l = Position[exp, x, /; x!=0, {n}];
  pos = Delete[l,Position[l,lst_ /; MemberQ[lst,0],{1}]];
  ter = Table[exp[[Apply[Sequence, pos[[i]] ] ]], {i,1,Length
[pos] }];
  (Length[pos],cd[ter],pos,ter) ]

index::usage = "index[n] generates {#1, #2, ..., #n}."
index[n_] := Table[StringJoin["#",ToString[i]],{i,1,n}]

text::usage = "text[{c1,c2,c3,c4,c5}] gives text output describing the class."

text[class_] := Module[{c2,c3}, c2 = {"AA","BB","AB","BA"};
  c3 = {"DK DK", "K DK or DK K", "K K"};
  (If[class[[1]]==1,"NNNNM","NNNNN"],
  c2[[ class[[2]] ]],
  c3[[ class[[3]] ]],
  StringJoin[ToString[class[[4]] - 1], "A"],
  StringJoin[ToString[class[[5]] - 1], "c's" ] ]

(*****
(*classification of I4 *)
(*input : l4 = {l4NN l4NN } *)
(*****
f1 = sort[l4int ,sde ,XXX] (* direct & exchange : {AA,BB,AB,BA} *)
f2 = sort[f1 ,s3 ,XXX] (* derivative D : {DK DK, K DK or DK K , K K} *)
f3 = sort[f2 ,sAB ,XXX] (* # of A *)
f4 = sort[f3 ,col ,XXX] (* # of coll. coord. c *)

If[cdflat[l4int]!= cdflat[f4] , Print["\n\n Error"]; Abort[];
Print[cdflat[l4int], " Dot terms \n\n" ]

l4s = nonz[f4] (* final result : l4 sorted *)

(* formatting the output *)
ind = index[ l4s[[1]] ]

classstxt = Table[ text[ l4s[[3]][[i]] ],{i,1,Length[l4s[[1]] ] } ]

classif =Transpose[{ind,Transpose[{l4s[[2]],l4s[[3]]}]} ]
classiftxt =Transpose[{ind,Transpose[{l4s[[2]],classstxt}]} ]

terms = Transpose[{ind,Table[l4s[[4]][[i]],{i,1,Length[l4s[[1]]}]} ] } ]
Do[Print[terms[[i]],"\n\n" ],{i,1,Length[l4s[[1]]}]]

```

```

cscB = replB[csc]
expD[2] = iss1[csaB,csbA,r12] + iss1[cscB,csbA,r12]
14int[15,2] = HoldForm[expD[2]]

(*****
)
14int[16,1] = 14int[16,2] = 14int[16,3] = 14int[16,4] = 0 (* pvi[1] = 0 *)
(*****
)
mDikndrj = rten[sDikndrj] (* m... stands for matrix with replacements *)
mnk = resc[snk]
mDikndrjnk = Table[mDikndrj[[i]][[j]],{j},{i,1,3},{j,1,3}]
tDikndrjnk = dten[mDikndrjnk]
sDikndrjnk = rtrig2[tDikndrjnk]
ct = -2 sDikndrjnk
cq = slj
ctB = replB[ct]
cgA = replA[cq]
expD[3] = itq1[ji[ctB,cgA,r12]
14int[17,1] = HoldForm[expD[3]]

mDkndr = Sum[mDikndrj[[i,i]],{i,1,3}]
mDkndrnk = mDkndr.mnk
tDkndrnk = desc[mDkndrnk]
sDkndrnk = rtrig2[tDkndrnk]
csa = -2 sDkndrnk
csb = sl2
csaB = replB[csa]
csbA = replA[csb]
expD[4] = iss1[csaB,csbA,r12]
14int[17,2] = HoldForm[expD[4]]
14int[17,3] = HoldForm[14int[17,2] /. I -> -I]
14int[17,4] = HoldForm[14int[17,1] /. I -> -I]
(*****
)
14int[18,1] = -1/3 14int[17,1]

```

```

(*****
)
(* 14d.m - Direct terms in L4 : <N'_1 H'_2 | L4_symm. | N'_1 H'_2> ; 1:A ; 2:B *)
(* H = Lambda *)
(*****
)
(* We start with the BB terms of type NNMM, #13 - #24 *)
(*****
)
14int[13,1] = 14int[13,2] = 'one particle contribution'
(*****
)
14int[14,1] = 14int[14,2] = 14int[14,3] = 14int[14,4] = 0 (* pvi[1] = 0 *)
(*****
)
DikDjk = Table[Dk[[i]],Dk[[j]],{i,1,3},{j,1,3}]
cdiDjk = dten[DikDjk]
tdiDjk = repl[cdiDjk]
sdiDjk = rtrig2[tdiDjk]
ct = 4 sdiDjk
cq = slj
ctB = replB[ct]
cgA = replA[cq]
expD[1] = itq1[ctB,cgA,r12]
14int[15,1] = HoldForm[expD[1]]

DkDk = e_scm[Dk,Dk]
cdkDk = desc[DkDk]
tdkDk = repl[cdkDk]
sDkDk = rtrig2[tdkDk]
kk = k11.k11
ckk = desc[kk]
tkk = repl[ckk]
skk = rtrig2[tkk]
csa = 4 sDkDk
csb = sl2
csc = -4 en2 skk
csaB = replB[csa]
csbA = replA[csb]

```

(\* time derivatives \*)

```

14int[18,2] = 14int[18,1]

14int[18,3] = HoldForm[14int[18,1] /. I -> -I]
14int[18,4] = HoldForm[14int[18,2] /. I -> -I]

(*****
)

14int[19,1] = 14int[19,2] = 14int[19,3] = 14int[19,4] = 0 (* p1v[12,1] = 0
*)

(*****
)

14int[20,1] = 14int[20,2] = "one particle contribution"

(*****
)

14int[21,1] = 14int[21,2] = 14int[21,3] = 14int[21,4] = 0 (* pvl[1] = 0
*)
14int[21,5] = 14int[21,6] = 14int[21,7] = 14int[21,8] = 0 (* pvl[1] = 0
*)

(*****
)

mkndr2nk = resc[sknd].resc[sr2].resc[snk]
tkndr2nk = desc[mkndr2nk]
skndr2nk = rtrig2[tkndr2nk]

csa = skndr2nk
csb = sl2

csaB = replB[csa]
csbA = replA[csb]

expD[5] = issl[csaB,csbA,r12]

14int[22,1] = HoldForm[expD[5]]

mkndrirjnk = Table[resc[sknd].rten[srij][i,j].resc[snk],{i,1,3},{j,1,3}]
tkndrirjnk = dten[mkndrirjnk]
skndrirjnk = rtrig2[tkndrirjnk]

ct = skndrirjnk
cq = slj

ctB = replB[ct]
cqA = replA[cq]

expD[6] = itqjji[ctB,cqA,r12]

14int[22,2] = HoldForm[expD[6]]

14int[22,3] = 14int[22,2]

14int[22,4] = 14int[22,1]

14int[22,5] = HoldForm[14int[22,2] /. I -> -I]
14int[22,6] = HoldForm[14int[22,1] /. I -> -I]

(*****
)

14int[23,1] = -1/3 14int[22,2]
14int[23,2] = 14int[23,1]
14int[23,3] = HoldForm[14int[23,1] /. I -> -I]
14int[23,4] = HoldForm[14int[23,2] /. I -> -I]

(*****
)

14int[24,1] = 14int[24,2] = 14int[24,3] = 14int[24,4] = 0 (* p1v[12,1] = 0
*)

(*****
)

(* Next, we calculate the BB terms of type NNMN, #65 - #76 *)

(*****
)

14int[65,1] = "one particle contribution"

(*****
)

14int[66,1] = 14int[66,2] = 0 (* pvl[1] = 0 *)

(*****
)

14int[67,1] = -2 14int[15,1]

(*****
)

14int[68,1] = 14int[68,2] = 0 (* pvl[1] = 0 *)

(*****
)

14int[69,1] = 6 14int[18,1]
14int[69,2] = HoldForm[14int[69,1] /. I -> -I]

(*****
)

14int[70,1] = 2/3 14int[17,2]
14int[70,2] = HoldForm[14int[70,1] /. I -> -I]

```

```

(* ***** *)
14int[71,1] = 14int[71,2] = 0          (* pvl[1^j 1^i 1^j] = 0
*)
(* ***** *)
14int[72,1] = "one particle contribution"
(* ***** *)
14int[73,1] = 14int[73,2] = 14int[73,3] = 14int[73,4] = 0      (* pvl[1] = 0
*)
(* ***** *)
14int[74,1] = - 2 14int[22,2]
14int[74,2] = 14int[74,1]
14int[74,3] = HoldForm[14int[74,1] /. I -> -I]
(* ***** *)
14int[75,1] = 2/3 14int[22,4]
14int[75,2] = HoldForm[14int[75,1] /. I -> -I]
(* ***** *)
14int[76,1] = 14int[76,2] = 0          (* pvl[1^j 1^i 1^j] = 0
*)
(* ***** *)
(* printing out the results , needs "dots.m" *)
(* ***** *)
Print["\n", "The DIRECT contributions for nucleon-lambda:", "\n\n"]
Module[{i,j,prl},
prl[n_] := Do[Print["\n", "i, "] = 14int[n,i], "\n"], {i,1,dots[n]}];
Do[
Print
["*****",
*\n*];
prl[j], {j,13,24}];
Print
["*****",
*\n*];
Do[
Print
["*****",
*\n*];
Print
["*****"]
]

```

```

*\n*];
prl[j], {j,65,76}];
Print
["*****",
*\n*];
Do[expD[i] = rtrigAB[expD[i]];
Print["expD[" , i, "] = ", expD[i], "\n"], {i,1,6}];
Print
["*****",
*\n*];
Do[symmexpD[i]=symm[expD[i]];
Print["symmexpD[" , i, "] = ", symmexpD[i], "\n"], {i,1,6}];
Print
["*****",
*\n* ]
Save["14dint.m",14int]
Module[{aux1,aux2,i,j},
Do[
aux1 = StringJoin[ToString[ff4d[i,j]], "="];
PutAppend[OutputForm[aux1], PosttranForm[expD[i][[j]]], "ff4d.for"];
, {i,1,6}, {j,1,3}];
]
(* checks if expd and symmexpD are equal *)
equal[i_] := nAB[expD[i]-symmexpD[i]]
indexIn_ := Table[ToString["#", ToString[i]], {i,1,n}]
Transpose[{index[6], Table[equal[i], {i,1,6}]}]

```

```

l4d = (36*one particle contribution" + 12*en2*KB**2*LA - 12*kpB**2*LA +
- 13*KB**2*LA*LB - 13*fPA**2*fPB**2*KB**2*r12**2 +
- 12*fPA**2*kpB**2*r12**2 - 13*fPB**2*KB**2*srA**2 +
- 12*KB**2*srA**2 + 13*fPB**2*KB**2*r12**2*srA**2 -
- 12*kpB**2*r12**2*srA**2 -
- 12*chB**4*krB**2*(-fPA**2 + 2*LA + fPA**2*r12**2 - srA**2 -
- r12**2*srA**2) - 13*fPA**2*KB**2*srB**2 +
- 13*fPA**2*KB**2*r12**2*srB**2 - 13*KB**2*srA**2*srB**2 -
- 13*KB**2*r12**2*srA**2*srB**2)/6.

```



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SKYRME, T. H. R. A non-linear field theory. *Proc. R. Soc. A*, London, v. 260, n. 1300, p. 127–138, Feb. 1961.
- [2] SKYRME, T. H. R. Particle states of a quantized meson field. *Proc. R. Soc. A*, London, v.262, n. 1309, p. 237–245, July 1961.
- [3] SKYRME, T. H. R. A unified field theory of mesons and baryons. *Nucl. Phys.*, Amsterdam, v. 31, p. 556–569, 1962.
- [4] GELL-MANN, M. A schematic model of baryons and mesons. *Phys. Lett.*, Amsterdam, v. 8, n. 3, p. 214–215, Feb. 1964.
- [5] ZWEIG, G. *An  $SU(3)$  model for strong interaction symmetry and its breaking*. Geneva: CERN, 1964. (Tech. Rep. 8419/TH 412).
- [6] MUTA, T. *Foundations of quantum chromodynamics: an introduction to perturbative methods in gauge theories*. Singapore: World Scientific, 1987. (World Scientific Lecture Notes in Physics; v. 5).
- [7] GEORGI, H. *Weak interactions and modern particle theory*. Menlo Park: Benjamin/Cummings, 1984.
- [8] KOGUT, J. B., SINCLAIR, D. K., WANG, K. C. Towards the continuum limit of the thermodynamics of lattice  $QCD$  with a realistic quark spectrum. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 263, n. 1, p. 101–106, July 1991.

- [9] 't HOOFT, G. A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 72, n. 3, p. 461–473, Apr. 1974.
- [10] 't HOOFT, G. A two-dimensional model for mesons. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 75, n. 3, p. 461–470, June 1975.
- [11] WITTEN, E. Baryons in the  $1/N$  expansion. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 160, n. 1, p. 57–115, Nov. 1979.
- [12] ADKINS, G. S., NAPPI, C. R., WITTEN, E. Static properties of nucleons in the Skyrme model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 228, n. 3, p. 552–566, Dec. 1983.
- [13] ZAHED, I., BROWN, G. E. The Skyrme model. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 142, n. 1/2, p. 1–102, Sept. 1986.
- [14] HOLZWARTH, G., SCHWESINGER, B. Baryons in the Skyrme model. *Rep. Prog. Phys.*, Bristol, v. 49, n. 8, p. 825–871, Aug. 1986.
- [15] MEISSNER, U.-G. Low-energy hadron physics from effective chiral lagrangians with vector mesons. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 161, n. 5/6, p. 213–362 May 1988.
- [16] VINH MAU, R. Skyrme solitons and effective lagrangians for low energy hadron physics. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, Oxford, v. 20, p. 221–242 1988.
- [17] JACKSON, A., JACKSON, A. D., PASQUIER, V. The skyrmion-skyrmion interaction. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 432, n. 3, p. 567–609, Jan. 1985.
- [18] NYMAN, E. M., RISKÅ, D. O. Symmetrized product ansatz in the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 203, n. 1/2, p. 13–17, Mar. 1987.
- [19] GOMM, H., JAIN, P., JOHNSON, R., SCHECHTER, J. Scale

- anomaly and the scalars. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v.33, n. 3, p. 801–812, Feb. 1986.
- [20] GOMM, H., JAIN, P., JOHNSON, R. SCHECHTER, J. Bag formation in a chiral model. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 33, n. 11, p. 3476–3478, June 1986.
- [21] YAMAGISHI, H., ZAHED, I. Nucleon–nucleon hamiltonian from skyrmions. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 43, n. 3, p. 891–903, Feb. 1991.
- [22] THOMAS, G. L., HERSCOVITZ, V. E. *NN* interaction in a Dalarsson massive model. In: HADRON PHYSICS, 94. Topics on the structure and interaction of hadronic systems, 1994, Gramado. *Proceedings of the ...* Edited by V. E. Herscovitz et al. Singapore: World Scientific, 1995. p. 322–325.
- [23] DALARSSON, N. Chiral quantum baryons. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 6, n. 25, p. 2345–2349, Aug. 1991.
- [24] GUADAGNINI, E. Baryons as solitons and mass formulae. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 236, n. 1, p. 35–47, Apr. 1984.
- [25] MAZUR, P. O., NOVAK, M. A., PRASZALOWICZ, M. *SU(3)* extension of the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 147, n. 1/3, p. 137–140, Nov. 1984.
- [26] CHEMTOB, M. Skyrme model of baryon octet and decuplet. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 256, n. 4, p. 600–608, Aug. 1985.
- [27] YABU, H., ANDO, K. A new approach to the *SU(3)* Skyrme model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 301, n. 4, p. 601–626, May 1988.
- [28] CALLAN, C. G., KLEBANOV, I. Bound-state approach to strangeness in the Skyrme model. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 262, n. 2, p. 365–382, Dec. 1985.

- [29] SCOCCOLA, N. N., NADEAU, H., NOWAK, M. A., RHO, M. The hyperons as skyrmions with vector mesons. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 201, n. 4, p. 425–431, Feb. 1988.
- [30] CALLAN, C. G., HORNBOSTEL, K., KLEBANOV, I. Baryon masses in the bound state approach to strangeness in the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 202, n. 2, p. 269–275, Mar. 1988.
- [31] KLEBANOV, I. Strangeness in the Skyrme model. In: VAUTHERIN, D. et al. (Eds.) *Hadrons and hadronic matter: proceedings*. New York: Plenum Press, 1990. (NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics, v. 228) p.223-262.
- [32] NYMAN, E. M., RISKÅ, D. O. Low-energy properties of baryons in the Skyrme model. *Rep. Prog. Phys.*, Bristol, v. 53, n. 9, p. 1137–1181, Sept. 1990.
- [33] WEIGEL, H. Baryons as three-flavor solitons. *Int. J. Mod. Phys. A*, Singapore, v. 11, n. 14, p. 2419–2544 June 1996.
- [34] KÄLBERMANN, G., EISENBERG, J. M. Baryon octet interactions in the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 235, n. 1/2, p. 6–10, Jan. 1990.
- [35] KÄLBERMANN, G., EISENBERG, J. M. Baryon–octet interactions in the Skyrme model with vibrations and rotations. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 46, n. 1, p. 446–452, July 1992.
- [36] SCHWESINGER, B., SCHOLTZ, F. G., GEYER, H. B. Loosely bound hyperons in the  $SU(3)$  Skyrme model. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 51, n. 3, p. 1228–1242, Feb. 1995.
- [37] THOMAS, G. L., SCOCCOLA, N. N., WIRZBA, A. Dibaryons as

- axially symmetric skyrmions. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 575, n. 4, p. 623–644, Aug. 1994.
- [38] KURIHARA, T., KANADA, H., OTOFUJI, T., SAITO, S. Baryon number-two skyrmion with axially symmetric configuration. *Prog. Theor. Phys.*, Kyoto, v. 81, n. 4, p. 858–865, Apr. 1989.
- [39] KOPELIOVICH, V. B., SHTERN, B. E. Exotic skyrmions. *JETP Lett.*, Woodbury, v. 45, n. 4, p. 203–207, Feb. 1987.
- [40] THOMAS, G. L., HERSCOVITZ, V. E., SCHAT, C. L., SCOCCOLA, N. N. The hyperon–nucleon interaction potential in the bound–state soliton model: the  $\Lambda N$  case. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 646, n. 1, p. 108–124, Feb. 1999.
- [41] VINH MAU, R., LACOMBE, M., LOISEAU, B., COTTINGHAM, W. N., LISBOA, P. The static baryon–baryon potential in the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 150, p. 259–264, Jan. 1985.
- [42] NYMAN, E. M., RISKÅ, D.-O. Nucleon–nucleon interaction in the Skyrme model. *Phys. Scripta*, Oxford, v. 34, n. 6A, p. 533–540, Dec. 1986.
- [43] CAVALCANTE, I. P. *A interação núcleon–núcleon no modelo de Skyrme*. São Paulo: Instituto de Física - USP, 1999. Tese.
- [44] SNYDERMAN, N. J. Soliton dynamics of the  $B = 2$  sector of the Skyrme model. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON BARYONS AS SKYRME SOLUTIONS, 1992, Siegen. *Proceedings of the ...* Edited by G. Holzwarth. Singapore: World Scientific, 1993. p. 379–409.
- [45] GELL-MANN, M., LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cimento*, Bologna, v. 16, n. 4, p. 705–726, mag. 1960.

- [46] ADKINS, G. S., NAPPI, C. R. The Skyrme model with pion masses. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 233, n. 1, p. 109–115, Feb. 1984.
- [47] PAULI, W. *Meson theory of nuclear forces*. New York: Interscience, 1946.
- [48] HERSCOVITZ, V. E., STEFFENS, F. M., THOMAS, G. L. Um ajuste ao ângulo quirial da solução ouriço de Skyrme por soma de funções. In: ENCONTRO NACIONAL DE FÍSICA DE PARTÍCULAS E CAMPOS, 11, 1990, Caxambú. *Anais do ...* São Paulo: SBF, 1991. p. 398-401.
- [49] HERSCOVITZ, V. E., THOMAS, G. L., STEFFENS, F. M. Static Skyrme soliton analytic representation in a massive-pion theory. In: *ESCOLA DE VERÃO JORGE ANDRÉ SWIECA*, 5, 1991, Campos do Jordão.
- [50] ANANIAS NETO, J., GALAIN, R. M., FERREIRA, E. Properties of the skyrme soliton configuration. *J. Math. Phys.*, Woodbury, v. 32, n. 7, p. 1949–1957, July 1991.
- [51] ADKINS, G. S., NAPPI, C. R. Model independent relations for baryons as solitons in mesonic theories. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 249, n. 3, p. 507–518, Jan. 1985.
- [52] PRASZALOWICZ, M. A comment on the phenomenology of the SU(3) Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 158, n. 3, p. 264–269, Aug. 1985.
- [53] WITTEN, E. Global aspects of current algebra. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 223, n. 2, p. 422–432, Aug. 1983.
- [54] KAYMAKCALAN, Ö., RAJEEV, S., SCHECHTER, J. Nonabelian anomaly and vector meson decays. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 30, n. 3, p. 594–602, Aug. 1984.

- [55] KAYMAKCALAN, Ö., SCHECHTER, J. Chiral lagrangian of pseudoscalars and vectors. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 31, n. 5, p. 1109–1113, Mar. 1985.
- [56] PARI, G., SCHWESINGER, B., WALLISER, H. Baryon properties in  $SU(3)$  from an alternate fourth order Skyrme term. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 255, n. 1, p. 1–6, Jan. 1991.
- [57] RISKÁ, D., SCOCCOLA, N. N. Chiral symmetry breaking in the bound state hyperon model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 265, n. 1/2, p. 188–191, Aug. 1991.
- [58] BLOM, U., DANNBOM, K., RISKÁ, D. O. Hyperons as bound states in the Skyrme model. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 493, n. 3/4, p. 384–396, Mar. 1989.
- [59] EISENBERG, J. M., KÄLBERMANN, G. Two-baryons forces from skyrmions. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON HADRON PHYSICS 96. Topics on the structure and interaction of hadronic systems, 1996, Mangaratiba. *Proceedings of the ...* Edited by E. Ferreira et al. Singapore: World Scientific, 1997. p. 55–123.
- [60] OKA, M., HOSAKA, A. Nucleons as skyrmions. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, Palo Alto, v. 42, p. 333–365, 1992.
- [61] JAFFE, R. L. Perhaps a stable dihyperon. *Phys. Rev. Lett.*, New York, v. 38, n. 5, p. 195–198, Jan. 1977.
- [62] AERTS, A. Th M., MULDER, P. J. G., SWART, J. J. de. Multibaryon states in the bag model. *Phys. Rev. D*, New York, v. 17, n. 1, p. 260–274, Jan. 1978.
- [63] LIU, K. F., WONG, C. W. MIT bag model with center-of-mass correction. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 113, n. 1, p. 1–5, June 1982.

- [64] MULDER, P. J., THOMAS, A. W. Pionic corrections and multi-quark bags. *J. Phys. G*, Bristol, v. 9, n. 10, p. 1159–1167, Oct. 1983.
- [65] MALTMAN, K. How secure are predictions for dibaryons in the MIT bag model? *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 291, n. 4, p. 371–374, Oct. 1992.
- [66] SHAHBAZIAN, B. A., SASHIN, V. A., KECHECHYAN, A. O., MARTYNOV, A. S. The observation of a stable dibaryon. *Phys. Lett. B*, Amsterdam v. 235, n. 1/2, p. 208–210, Jan. 1990.
- [67] IMAI, K. Quark and nuclear matter with strangeness. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 527, p. 181c–194c, May 1991.
- [68] QUINN, B. Search for the H particle with the Brookhaven 2.0-GeV kaon beam. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE STRUCTURE OF BARYONS AND RELATED MESONS, 1992, New Haven. *Proceedings of the...* Edited by M. Gai. River Edge: World Scientific, 1992. p.278-287.
- [69] GOLDMAN, T., MALTMAN, K., STEPHENSON JR., G. J., PING, J.-L., WANG, F. Systematic theoretical search for dibaryons in a relativistic model. *Mod. Phys. Lett. A*, Singapore, v. 13, n. 1, p. 59–70, Jan. 1998.
- [70] BALACHANDRAN, A. P., LIZZI, F., RODGERS, V. G. J., STERN, A. Dibaryons as chiral solitons. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 256, n. 3, p. 525–556, July 1985.
- [71] JAFFE, R. L., KORPA, C. L. Semiclassical quantization of the dibaryon skyrmion. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 258, n. 2, p. 468–482, Aug. 1985.
- [72] KOPELIOVICH, V. B., SCHWESINGER, B., STERN, B. E.



- $SU(3)$ -symmetry breaking in strange-dibaryon configurations. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 549, n. 4, p. 485-497, Nov. 1992.
- [73] KUNZ, J., MULDER, P. J. Bound state approach for strange dibaryons in the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 215, n. 3, p. 449-456, Dec. 1988.
- [74] WEIGEL, H., SCHWESINGER, B., HOLZWARTH, G. Exotic baryon number  $B = 2$  states in the  $SU(2)$  Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 168, n. 4, p. 321-325, Mar. 1986.
- [75] VERBAARSCHOT, J. J. M. Axial symmetry of bound baryon number-two solution of the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 195, n. 2, p. 235-239, Sept. 1987.
- [76] BRAATEN, E., CARSON, L. Deuteron as a soliton in the Skyrme model. *Phys. Rev. Lett. B*, Woodbury, v. 56, n. 18, p. 1897-1900, May 1986.
- [77] BOHR, A., MOTTELSON, B. *Nuclear structure*. New York: Benjamin, 1975. v. 2.
- [78] VERBAARSCHOT, J. J. M., WALHOUT, T. S., WAMBACH, J., WYLD, H. W. Symmetry and quantization of the two-skyrmion system: the case of the deuteron. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 468, n. 3/4, p. 520-538, July 1987.
- [79] OH, Y., MIN, D.-P., RHO, M., SCOCCOLA, N. N. Massive-quark baryons as skyrmions: magnetic moments. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 534, n. 3/4, p. 493-512, Nov./Dec. 1991.
- [80] THOMAS, G. L., SCOCCOLA, N. N.  $H$ -Dibaryon in the bound state approach. In: Dillenburg, D. et al. (Eds.). *Current topics in nuclear physics and quantum field theory: festschrift for Theodor*

- A. J. Maris. Porto Alegre: Ed. da Universidade/UFRGS, 1994. p. 231-239.
- [81] SCHOLTZ, F. G., SCHWESINGER, B., GEYER, H. B. The Casimir energy of strongly bound  $B = 2$  configurations in the Skyrme model. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 561, n. 4, p. 542-556, Sept. 1993.
- [82] DOVER, C. B., GAL, A. Hyperon nucleus potentials. *Progr. Part. Nucl. Phys.*, Oxford, v. 12, p. 171, 1985.
- [83] HOLINDE, K. Two-nucleon forces and nuclear matter. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 68, n. 3, p. 121-188, Jan. 1981.
- [84] NAGELS, M. M., RIJKEN, T. A., SWART, J. J. de. Baryon-baryon scattering in a one-boson-exchange-potential approach. I. Nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev. D*, New York, v. 12, n. 3, p. 744-758, Aug. 1975.
- [85] NAGELS, M. M., RIJKEN, T. A., SWART, J. J. de. Baryon-baryon scattering in a one boson exchange potential approach. II. Hyperon-nucleon scattering. *Phys. Rev. D*, New York, v. 15, n. 9, p. 2547-2564, May 1977.
- [86] NAGELS, M. M., RIJKEN, T. A., SWART, J. J. de. Baryon-baryon scattering in a one-boson-exchange-potential approach. III. A nucleon-nucleon and hyperon-nucleon analysis including contributions of a nonet of scalar mesons. *Phys. Rev. D*, New York, v. 20, n. 7, p. 1633-1645, Oct. 1979.
- [87] HOLZENKAMP, B., HOLINDE, K., SPETH, J. A meson exchange model for the hyperon-nucleon interaction. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 500, n. 3, p. 485-528, Aug. 1989.
- [88] REUBER, A., HOLINDE, K., SPETH, J. Meson-exchange

- hyperon–nucleon interactions in free scattering and nuclear matter. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 570, n. 3/4, p. 543–579, Apr. 1994.
- [89] WALHOUT, T. S., WAMBACH, J. From skyrmions to the nucleon–nucleon potential. *Int. J. Mod. Phys. E*, Singapore, v. 1, n. 4, p. 665–738, Dec. 1992.
- [90] STERNHEIM, M. M., KALBERMANN, G. Baryon number ambiguities in the symmetrized product ansatz for the Skyrme model. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 225, n. 1/2, p. 27–30, July 1989.
- [91] GOBBI, C., RISKA, D. O., SCOCCOLA, N. N. Strong and electro magnetic meson–hyperon couplings in the bound state soliton model. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 544, n. 3/4, p. 671–691, July 1992.
- [92] ITZYKSON, C., ZUBER, J. B. *Quantum field theory*. Singapore: McGraw–Hill, 1985.
- [93] MOUSSALLAM, B. Chiral expansion, large  $N_c$  expansion, and the skyrmion mass. *Ann. Phys.*, Brugge, v. 225, n. 2, p. 264–289, Aug. 1993.
- [94] MEIER, F., WALLISER, H. Quantum corrections to baryon properties in chiral soliton models. *Phys. Rep.*, Amsterdam, v. 289, n. 6, p. 383–448, Oct. 1997.
- [95] SCOCCOLA, N. N., WALLISER, H. Casimir corrections in the bound state soliton model. *Phys. Rev. D*, Woodbury, v. 58, n. 9, 094037 6p. Nov. 1998.
- [96] RIJKEN, Th. A., STOKS, V. G. J., YAMAMOTO, Y. Soft–core

- hyperon–nucleon potentials. *Phys. Rev. C*, Melville, v. 59, n. 1, p. 21–40, Jan. 1999.
- [97] IEIRI, M. Hyperon–proton scattering experiments with a scintillating fiber detector at KEK. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 639, n. 1/2, p. 21c–28c, Aug. 1998.
- [98] TAMURA, H. Hypernuclear  $\gamma$  spectroscopy with a Ge ball. *Nucl. Phys. A*, Amsterdam, v. 639, n. 1/2, p. 83c–92c, Aug. 1998.
- [99] MILLENER, D. J., GAL, A., DOVER, C. B., DALITZ, R. H. Spin dependence of the  $\Lambda N$  effective interaction. *Phys. Rev. C*, Woodbury, v. 31, n. 2, p. 499–509, Feb. 1985.
- [100] RHO, M., RISKI, D. O., SCOCCOLA, N. N. The energy levels of the heavy flavour baryons in the topological soliton model. *Z. Phys. A*, Berlin, v. 341, n. 3, p. 343–352, Feb. 1992.
- [101] KOPELIOVICH, V. B. Baryonic systems with charm and bottom in the bound–state soliton model. *JETP Lett.*, Woodbury, v. 67, n. 11, p. 896–902, June 1998.
- [102] ADKINS, G. S. Static properties of skyrmions. In : LIU, K.-F. (Ed.) *Chiral solitons*. Singapore: World Scientific, 1987. p. 99–170.
- [103] EDMONDS, A. R. *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press. 1957.
- [104] SCOCCOLA, N. N., WIRZBA, A. On the quantization rules for meson soliton bound systems. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 258, n. 3/4, p. 451–456, Apr. 1991.