UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Uma Certa Identidade de Ramanujan Demonstrada Via Dominós, Ladrilhamentos e q-Contagem

EDUARDO CASAGRANDE STABEL

PORTO ALEGRE, 20 DE MAIO DE 2011

Tese submetida por EDUARDO CASAGRANDE STABEL[1] como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador

Dr. Artur Oscar Lopes (PPG-MAT/UFRGS)

Banca Examinadora

Dra. Bárbara Pogorelsky (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (PPG-MAT/UFRGS)
Dr. José Plínio de Oliveira Santos (UNICAMP)
Dr. Vilmar Trevisan (PPG-MAT/UFRGS)

Data de Defesa: 21 de maio de 2011.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Resumo: Neste trabalho, colaboramos com o desenvolvimento das técnicas combinatórias que utilizam a q-contagem e ladrilhamentos. O principal resultado que provamos é a seguinte identidade, devida a Ramanujan

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-q^{2n+1}}{1-q^{2n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}{[(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})]^2}q^{n^2}.$$

Além deste resultado, encontramos novas interpretações combinatórias para várias identidades da teoria das partições. Destacam-se nesta lista de identidades, as seguintes: o teorema q-binomial, a série q-binomial, uma identidade de Gauss, uma identidade de Jacobi e o produto triplo de Jacobi. Damos também uma interpretação nova para os números q-binomiais. No trabalho, apresentamos algumas ideias novas (dentro deste contexto combinatório com a q-contagem): a ideia do empilhamento de peças na mesma posição e uma noção de peso de peças não-absoluta, isto é, que não depende unicamente da posição da peça mas da posição relativa à outras peças.

Abstract: In this work, we contribute with the development of the combinatorials techniques involving q-enumaration and tilings. The principal result we prove is the following identity of Ramanujan

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-q^{2n+1}}{1-q^{2n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}{[(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})]^2}q^{n^2}.$$

Besides that, we find new combinatorial interpretations for several identities of the theory of partitions. In this list, the most important identities are the following: q-binomial theorem, q-binomial serie, a Gauss' identity, a Jacobi's identity and the Jacobi triple product. We also give a new interpretation to the q-binomial numbers. In this work, we present some new ideas (within the combinatorial context of q-enumeration): the idea of pilling up tiles in the same position and a non-absolute weight notion, i.e., which doesn't depend solely on the position of the tile but as well to its relative position to other tiles.

Agradecimentos. Meu maior agradecimento, de forma não mecânica, é dirigido a Deus. Nos tempos de hoje, são poucos os que tem uma fé definida num Deus pessoal. Eu aprendi a conhecê-Lo e amá-Lo e posso assegurar, sem risco de me equivocar, que vejo Sua mão operando em minha vida. Esta mão muito me auxiliou na realização deste trabalho.

Agradeço também ao Brietkze, pelo enorme carinho nos momentos difíceis, pelo grande coração, e pelo apoio na minha pesquisa. Com certeza, sua ajuda foi vital para tornar mais suave o meu caminho. Muito obrigado!

Sumário

Introdução

A teoria das partições lida com as *partições* de números naturais. Uma partição é um modo de quebrar um número em somas de outros naturais. A título de exemplo, suponhamos que para cada número natural n, existem $\mathrm{f}(n)$ maneiras de particioná-lo, seguindo certas restrições (definidas anteriormente). Para se lidar com funções aritméticas $\mathrm{f}(n)$ deste tipo, a técnica mais poderosa tem se demonstrado ser lançar mão do recurso de uma *função geradora*, tipicamente da forma

$$\mathrm{F}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{f}(n)\, q^n = \sum \mathrm{f}(n)\, q^n.$$

A função $\mathrm{F}(q)$ – na maioria dos casos, analítica – descreve a função $\mathrm{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ inteiramente. Existem muitas técnicas algébricas e analíticas eficientes para se trabalhar com funções deste tipo.

Apesar disto, continua-se tendo o interesse de compreender as funções $\mathrm{f}(n)$ somente com operações e técnicas finitas, e com o mínimo de recurso algébrico. Estamos falando de uma *abordagem combinatória*. É bom se ter um argumento algébrico/analítico que prove uma identidade da teoria das partições em duas linhas. Entretanto, continuamos querendo "pegar na mão" as partições e trabalhar com elas, como num jogo de quebra-cabeça, até chegarmos onde queremos, isto é, provar identidades e resultados da teoria das partições (como o teorema de Euler).

Por que se estudar uma técnica que é bem mais simples e menos poderosa do que outra? Por diversas razões. Uma primeira razão seria o fato de que nós, seres humanos, gostamos de compreender as coisas. Tudo aquilo que pode ser compreendido nos instiga a ir avante na pesquisa. E em segundo lugar, pois nenhum conhecimento é inútil. Todo conhecimento termina, de um modo ou de outro, agregando compreensão a outras temas relacionados.

Neste trabalho, vemos uma abordagem que embora não seja inédita quebra com alguns paradigmas. O primeiro é o fato de pararmos de contar e passarmos a q-contar. Isto muda tudo de figura. Uma contagem nos dá um número como resultado. Uma

q-contagem nos dá uma função geradora, como $1+q+5q^4$. Desta forma, continuamos "contando", mas trabalhamos com polinômios e séries formais como resultados, ao invés de números.

O outro ponto de mudança é a utilização de tabuleiros ladrilhados com peças (pensemos num dominó como modelo de peça). Estes objetos combinatórios são muito mais versáteis do que os tipicamente utilizados nas abordagens combinatórias da teoria das partições, como os grafos de Ferrer. Um grafo de Ferrer é um objeto combinatório com certa rigidez, difícil de operar. Já um tabuleiro, com peças, possui uma versatilidade de operações muito grande – basta colocar pecinhas para lá e para cá.

Aliando ladrilhamentos com q-contagens, saímos da zona agreste e dura dos grafos de Ferrer — que são muitas vezes, pouco intuitivos — e das provas bijetivas, mas não vamos tão longe a ponto de uma abordagem analítica/algébrica que nos faz perder completamente a intuição do que está acontecendo, de fato, com as partições com as quais estamos trabalhando. O que queremos dizer com isto? Queremos dizer que com as técnicas de ladrilhamento e q-contagem, podemos provar muitas identidades complicadas (difíceis e pouco esclarecedoras pelos grafos de Ferrer) de forma simples, e mantendo uma visão combinatória do problema.

Esta abordagem tem o poder de revolucionar muitas áreas estagnadas há muito tempo, que estavam à espera da abordagem combinatória adequada, para que pudéssemos *"ver" combinatoriamente* com muito mais clareza do que antes. Esta clareza com que vemos identidades complicadas (um exemplo é o Produto Triplo de Jacobi, que aparece no teorema 17) justifica a importância desta área de pesquisa.

Esta tese se divide em três capítulos. O primeiro apresenta a base de todo o trabalho. Nele, aparecem todos os conceitos importantes, com alguns exemplos ilustrativos. Também são demonstradas duas propriedades importantes, que são utilizadas ao longo de todo o trabalho. Estamos nos referindo às projeções, que apareceram primeiramente no artigo [6].

O segundo capítulo apresenta inúmeras identidades clássicas da teoria das partições que são revistas pelo ponto de vista combinatório dos ladrilhamentos e da q-contagem. Ressaltamos a simplicidade com que são vistos o Teorema q-Binomial e a Série q-Binomial (conferir a seção 2.2). Algumas ideias são desenvolvidas, em meio às identidades apresentadas. O capítulo foi escrito em ordem crescente de complexidade e há várias seções dependentes umas das outras. São apresentados o Teorema de Stanley, o Teorema de Euler, o Teorema Pentagonal de Euler, além de identidades de Gauss e de Jacobi.

É importante ressaltar que conseguimos dar uma interpretação combinatória para o Produto Triplo de Jacobi e que, seguindo esta linha, é apresentado um Projeto para se chegar a uma demonstração combinatória da Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan.

Por fim, o último capítulo apresenta o resultado mais importante da tese. Trabalhamos sobre uma identidade dos Cadernos Perdidos de Ramanujan e conseguimos prová-la com as técnicas que desenvolvemos. Este resultado deu origem ao artigo [10].

A ideia de utilizar tabuleiros finitos (do tipo $1 \times n$) e infinitos (do tipo $1 \times \infty$), utilizando-se de q-contagens, a fim de demonstrar identidades não é inédito. Algumas referências sobre desenvolvimentos recentes na área podem ser encontrados nos artigos [2, 5, 6, 7]. O importante conceito de projeção, e um resultado central que lhe está associado (a projeção de peças juntas) também já havia sido definido no artigo [6].

Embora, nesta bibliografia, e em outros trabalhos sobre ladrilhamentos e dominós (que não utilizam o conceito de q-contagem) já houvesse aparecido alguns dos conceitos novos apresentados aqui, destacamos as contribuições feitas neste trabalho. Apresentamos um resultado sobre projetar peças juntas num tabuleiro finito, o que envolve os números q-binomiais. Este resultado não aparece em artigos anteriores de conhecimento do autor. Além disto, o conceito de empilhamentos, embora apareça em outros trabalhos, não aparece associado à q-contagem como é apresentado aqui. Por fim, o modo como definimos o peso de uma peça (no teorema 24), não mais de modo absoluto (dependendo apenas de sua posição) mas de um modo relativo (dependendo do número de peças que lhe antecedem, além de sua posição) também não aparece na literatura.

Capítulo 1

Tabuleiros, Dominós e q–Contagem

Os objetos combinatórios e as ferramentas (conceitos, operações e resultados) que utilizamos em nosso trabalho são definidos neste capítulo. Primeiramente, definimos os objetos que utilizamos – os tabuleiros e suas peças – e discutimos um pouco sobre eles. Em seguida, introduzimos a noção do peso de peças e de ladrilhamentos, e apresentamos a ideia de contagem que lhe está associada — a q–contagem. Por fim, definimos uma operação muito importante – a projeção de peças no tabuleiro – e demonstramos dois resultados importantes relacionados este conceito: no caso de um tabuleiro de tamanho finito e no caso de um tabuleiro de tamanho infinito.

Em meio à apresentação de cada conceito, discutimos alguns exemplos ilustrativos, para facilitar a compreensão sobre os conceitos e desenvolver a intuição sobre eles.

Antes de começarmos. salientamos que utilizamos a notação usual para as partições. A saber, uma *partição* λ de um número inteiro positivo n consiste em uma sequência de inteiros positivos $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j$, onde os λ_i são denominados as *partes* da partição λ, e a *soma* das partes da partição deve ser igual a n e é definida por

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j = \sum \lambda_i.$$

1.1 Tabuleiros e Peças

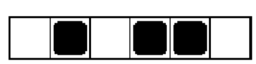
Utilizamos, essencialmente, dois tipos de *tabuleiros*. O primeiro é o *tabuleiro finito* (isto é, de tamanho finito), pois possui apenas uma quantidade finita de casas, e tem a forma $1 \times n$ onde n é um número natural. O segundo tipo de tabuleiro que utilizamos é o *tabuleiro infinito* (isto é, de tamanho infinito), possuindo uma quantidade infinita de casas, sendo que o mais utilizado em nosso trabalho tem a forma $1 \times \infty$. O tabuleiro é formado de quadrados 1×1, que são suas casas. Cada uma destas *casas* ou *posições* pode ser caracterizada por um par de coordenadas $(1, i)$. Nos referimos a esta casa (ou posição) simplificadamente através do número i, isto é, tratamos da casa i ou da posição i para nos referirmos à $(1, i)$.

Utilizamos certos objetos que denominamos de *peças* (o *dominó* é delas o mais conhecido, por isto o título do capítulo) para *ladrilhar* (ou preencher) um tabuleiro deste tipo. Denotamos por *quadrado branco* a peça de formato 1×1 que é desenhada como branca (ou sem preenchimento) e representa uma posição vazia no tabuleiro. Outras peças são também utilizadas, como o *quadrado preto*, que é uma peça preta, também de formato 1×1. Usa-se, além destes, quadrados de várias cores. Um outra peça é o dominó, cujo formato é 1×2, e que pode ser de diferentes cores.

Dado um tabuleiro (finito ou infinito) e certas peças, chamamos de *ladrilhamento* a uma maneira $\mathtt{T}$ de ladrilhar completamente o tabuleiro com as peças (isto é, dispô-las no tabuleiro) sem que reste qualquer casa não preenchida, sem que peças se sobreponham e com apenas uma quantidade finita de peças distintas do quadrado branco. Esta última restrição só tem realmente importância, ao tratarmos de tabuleiros infinitos.

Utilizaremos o termo ladrilhamento também para nos referirmos a um *ladrilhamento com empilhamento* de peças na mesma posição. Por vezes, será útil considerarmos a possibilidade de que, em cada posição, possamos empilhar peças, como, por exemplo, vários quadrados pretos. Neste caso, o quadrado branco continua tendo a função de peça vazia (a menos que dito explicitamente o contrário). Poderia-se utilizar uma definição análoga ao conceito de empilhamento, pensando-se em peças numeradas, sendo que o número associado à peça representaria a quantidade de peças empilhadas na dada posição. Alguns autores, por vezes, utilizam esta definição alternativa, que tem suas vantagens e desvantagens. Acreditamos que, nos problemas deste trabalho em que surge a necessidade de empilhamentos, a noção de peças numeradas seria menos natural.

Exemplo. Eis o exemplo de um tabuleiro 1×6, ladrilhado com quadrados brancos e pretos.



Associado a um ladrilhamento como este está uma partição. As partes da partição são representadas pelas casas ocupadas por peças pretas, isto é, aí temos representada a partição $2+4+5$, já que as casas $\{2, 4, 5\}$ são as casas ocupadas por peças pretas. $\blacksquare$

1.2 Peso e q–Contagem

A *contagem* é um conceito fundamental da combinatória, e para o nosso trabalho, precisamos de uma generalização deste conceito, denominada de *q–contagem* ou *contagem com peso*. Para ilustrar o conceito, vamos partir do conceito da contagem usual até chegarmos ao conceito da q–contagem.

Consideremos o seguinte conjunto

$$\mathbf{X} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},$$

para a ilustração. Este conjunto possui 4 elementos pois existe uma bijeção φ entre o conjunto $\mathbf{X}$ e o conjunto $[\mathbf{4}]$, onde $[\mathbf{4}] = \{1, 2, 3, 4\}$. Denotamos isto pela notação $|\mathbf{X}| = 4$. Um outro modo de visualizar esta contagem é "percorrer" os elementos do conjunto $\mathbf{X}$ contando uma unidade (isto é, um 1), para cada elemento, e somando ao final estes 1's. Em notação matemática, escrevemos

$$|\mathbf{X}| = \sum_{x \in \mathbf{X}} 1.$$

Cada elemento do conjunto $\mathbf{X}$ acrescenta um 1 na contagem total. Vamos partir do conceito de *contagem com peso* ou *q-contagem*. Suponhamos, ao contrário, que cada elemento possua um *peso* qualquer, não necessariamente igual a 1. A palavra inglesa para peso é *weight* e é por isto que utilizamos a notação $\mathrm{w}(x)$ para denotar o peso de um elemento x. Suponhamos que os elementos do conjunto $\mathbf{X}$ possuam seus pesos dados por $\mathrm{w}(x) = q^i$, onde i é igual ao número de letras no LaTeX da letra grega correspondente e q é uma variável. As quatro letras gregas iniciais são: *alpha*, *beta*, *gamma* e *delta*. Três delas possuem cinco letras e uma delas possui quatro letras. Se contássemos o conjunto $\mathbf{X}$, tendo os elementos estes pesos, a contagem com peso (ou q–contagem) seria dada por

$$\sum_{x \in \mathbf{X}} \mathrm{w}(x) = \mathrm{w}(\alpha) + \mathrm{w}(\beta) + \mathrm{w}(\gamma) + \mathrm{w}(\delta) = q^5 + q^4 + q^5 + q^5 = q^4 + 3q^5.$$

A escolha dos pesos como sendo da forma $\mathrm{w}(x) = q^i$ não é por acaso. Notemos que se a variável q assume o valor 1, obtemos $\mathrm{w}(x) = q^i = 1$.Ou seja, o peso de cada elemento se reduz a 1 quando a variável q assume o valor 1. Portanto a informação da q–contagem *refina* (isto é, aumenta) as informações que temos a respeito do conjunto $\mathbf{X}$. A q–contagem que obtivemos para o conjunto $\mathbf{X}$ é dada pelo polinômio $\mathrm{f}(q) = q^4 + 3q^5$. Como vimos, a contagem usual de $\mathbf{X}$ é obtida meramente tomando-se $q = 1$ e é dada por $\mathrm{f}(1) = 1 + 3 = 4$. Como dissemos, a q–contagem, dada por $\mathrm{f}(q) = q^4 + 3q^5$, nos fornece mais informações sobre o conjunto $\mathbf{X}$. Ela nos informa que há 1 elemento em $\mathbf{X}$ cujo nome possui quatro letras e há 3 elementos cujo nome possui cinco letras.

O termo mais adequado seria dizermos *contagem com peso* e não *q–contagem*. O termo q–contagem nos dá a ideia de que há apenas a variável q sendo utilizada, na definição do peso. De fato, ela será a variável mais significativa ao longo de todo nosso trabalho. Contudo, utilizamos também outras variáveis, como a variável z, e outras. Apesar de a notação *contagem com peso* ser a mais adequada, o termo *q–contagem* é mais curto e é por isto que o utilizamos. Na verdade, por um abuso de linguagem, utilizamos indistintamente o termo *contagem*, significando *q–contagem*. Certamente, isto não será motivo de confusão, pois ao longo de todo o texto, estamos sempre realizando q-contagens.

Neste trabalho, fazemos q–contagens de conjuntos de ladrilhamentos de tabuleiros. Dado um tabuleiro, utilizamos frequentemente a letra $\mathtt{T}$ para designar um ladrilhamento deste tabuleiro e utilizamos a letra $\mathtt{t}$ para denotar uma peça deste ladrilhamento. Também representamos o fato de a peça $\mathtt{t}$ pertencer ao ladrilhamento $\mathtt{T}$ pela notação de pertinência $\mathtt{t} \in \mathtt{T}$.

Nem sempre definimos o peso de ladrilhamentos da mesma maneira. Mas a maneira que enunciamos, no parágrafo seguinte, é a maneira mais utilizada ao longo do trabalho. Se utilizarmos outro modo de definirmos o peso, isto será explicitado.

Seja dado um ladrilhamento $\mathtt{T}$ de um tabuleiro. Antes de definirmos o peso do ladrilhamento $\mathtt{T}$, definimos o peso das peças do ladrilhamento. Tipicamente, definimos o peso de uma peça $\mathtt{t}$ que é um quadrado branco como sendo a unidade $\mathrm{w}(\mathtt{t}) = 1$. O peso das demais peças (quadrados pretos, dominós, etc) é *tipicamente* dado em termos do *tipo* da peça (cor, tamanho, etc) e da *posição i* que ela ocupa (ou no caso do dominó, da primeira casa ocupada por ele). Alguns pesos utilizados são: q^i, zq^i, z, etc. O *peso do ladrilhamento* $\mathtt{T}$ é, então, definido por

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t}).$$

Dado um conjunto de ladrilhamentos $\mathbf{X}$, a *q–contagem deste conjunto* é definida, usando o símbolo de contagem, com um subíndice q (indicando q–contagem), pela expressão

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{\mathtt{T} \in \mathbf{X}} \mathrm{w}(\mathtt{T}).$$

Vamos considerar um exemplo simples de como definimos o peso de ladrilhamentos.

Exemplo. Considere um tabuleiro finito 1×4 que é ladrilhado com dois tipos de peças: quadrados brancos e quadrados pretos. Seja $\mathtt{t}$ uma peça que ocupa a posição i. Definimos o peso desta peça por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado branco,} \\ q^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto.} \end{cases}$$

Definimos o peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$ por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t}\in\mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Consideremos $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos possíveis deste tabuleiro. Como cada uma das 4 casas do tabuleiro pode ser preenchida livremente por um quadrado branco ou por um quadrado preto, a quantidade total de ladrilhamentos é dada por $|\mathbf{X}| = 2^4 = 16$ (estamos utilizando o chamado Princípio Fundamental da Contagem, que faz multiplicar as contagens independentes). Vejamos quanto é a q–contagem deste conjunto $\mathbf{X}$ utilizando-nos dos pesos que acabamos de definir. Um dos ladrilhamentos é mostrado na figura abaixo.

O seu peso é dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = q^1q^3q^4 = q^{1+3+4} = q^8$. Se calcularmos o peso de cada um destes 16 ladrilhamentos, e somarmos todos eles (o trabalho fica a cargo do leitor), obteremos

$$\mathrm{f}(q) = |\mathbf{X}|_q = 1 + q^1 + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 2q^7 + q^8 + q^9 + q^{10}.$$

Repare que $\mathrm{f}(1) = 16 = |\mathbf{X}|$. Neste exemplo simples, vejamos qual a ligação com a teoria das partições. Cada ladrilhamento é determinado pelas peças brancas e pretas nas posições $\{1, 2, 3, 4\}$. Se numa destas posições, há um quadrado branco, o peso do ladrilhamento não é alterado por ele. Entretanto, um quadrado preto multiplica o peso por q^i, onde i é a posição deste quadrado. Portanto, temos uma correspondência biunívoca entre os ladrilhamentos deste tipo e as partições λ cujas partes são distintas e pertencentes a $[\mathbf{4}] = \{1, 2, 3, 4\}$ (cosidere $\mathbf{D}_4$ o conjunto destas partições). Se denotarmos por $|\lambda|$ a soma da partição λ, então

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}} \mathrm{w}(\mathtt{T}) = \sum_{\lambda\in\mathbf{D}_4} q^{|\lambda|} = \mathrm{g}(q),$$

onde $\mathrm{g}(q)$ é a função geradora de $\mathbf{D}_4$. Ora, podemos obter a função geradora $\mathrm{g}(q)$ diretamente de sua definição. Cada parte é diferente e pertencente ao conjunto $[\mathbf{4}] =$

$\{1,2,3,4\}$, portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}(q) &= (1+q^1)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\\
&= 1+q^1+q^2+2q^3+2q^4+2q^5+2q^6+2q^7+q^8+q^9+q^{10}\\
&= \mathrm{f}(q)\,.
\end{aligned}$$

Diversas expressões, como por exemplo $\mathrm{f}(q)$, serão "interpretadas" de forma combinatória, com o auxílio de ladrilhamentos, dominós (peças) e q–contagem. Neste caso, vimos que a expressão algébrica que define $\mathrm{f}(q)$ tem a seguinte interpretação combinatória: ela q–conta os ladrilhamentos de um tabuleiro 1×4, com quadrados brancos e pretos, e com os pesos definidos acima. Utilizando-nos deste tipo de interpretação podemos trabalhar com estes objetos combinatórios (ladrilhamentos) ao invés de trabalhar com as identidades originais (no caso $\mathrm{f}(q)$), e assim podemos, não apenas interpretar expressões algébricas de forma combinatória, mas também provar identidades, isto é, provar que elas se igualam a outras expressões algébricas. ∎

Os passos que utilizamos para provar identidades através desta técnica são os seguintes. Suponhamos que queremos provar uma certa identidade $\mathrm{f}(q) = \mathrm{g}(q)$. Suponhamos, também, que encontramos uma interpretação combinatória para $\mathrm{f}(q)$, como por exemplo a q–contagem de um certo conjunto de ladrilhamentos $\mathbf{X}$ de um determinado tabuleiro, com certas peças e pesos. Admitamos, ainda, que encontramos um modo diferente de q–contar o conjunto $\mathbf{X}$ (assim como o caso de uma dupla contagem de um mesmo conjunto), de tal forma que esta nova q–contagem seja igual a $\mathrm{g}(q)$. Desta forma, estabelecemos a identidade desejada $\mathrm{f}(q) = \mathrm{g}(q)$, por meios combinatórios. Nem sempre utilizamos meramente uma dupla q–contagem. Por vezes, utilizamos involuções, bijeções que preservam pesos, equações funcionais, etc. Em alguns casos, utilizaremos manipulações algébricas de forma substancial. O leitor pode ficar um pouco decepcionado, imaginando que estamos fazendo demonstrações que não são puramente combinatórias. De fato, ele terá razão se assim pensar. Entretanto, o *insight* combinatório das técnicas que utilizamos justifica a nossa "perda" de uma abordagem "puramente" combinatória.

Antes de exemplificarmos esta técnica, definimos o importante conceito de projeção e discutimos dois importantes resultados ligados a ele, que serão utilizados muitas vezes ao longo de nosso trabalho.

1.3 Projeções

Este conceito, e um dos resultados discutidos nesta seção, aparecem no artigo [6] de Little e Sellers.

O conceito de projeção é definido dentro do contexto de ladrilhamentos de tabuleiros com peças. O primeiro conceito importante é o conceito de *peça projetável* (em inglês, *projectile*). Algumas das peças do tabuleiro serão consideradas como projetáveis, outras não. Projeção é a ideia de mover peças no tabuleiro. As peças projetáveis são aquelas que serão movidas. Para que elas se movam livremente, é preciso colocar certas restrições na projeção, a fim de que possamos trabalhar satisfatoriamente com estes movimentos, quando fizermos contagens.

Somente as peças projetáveis podem ser projetadas. Dado um tabuleiro, considere um ladrilhamento $\mathtt{T}$ e uma peça projetável $\mathtt{t}$ deste ladrilhamento. Uma *projeção* desta peça é uma operação que satisfaz algumas propriedades. A projeção não acrescenta nem remove peças do tabuleiro, ou seja, as peças são apenas "embaralhadas" no tabuleiro. A segunda propriedade é a de que a ordem de aparecimento no tabuleiro (da esquerda para a direita) das peças projetáveis não se altera. Em outras palavras, uma peça projetável não pode "pular por cima" de outra peça projetável. A terceira propriedade é de que o resultado final da projeção altera o peso do ladrilhamento multiplicando-o por uma constante que independe de qual peça foi projetada e de qual era sua posição. Tipicamente, o ladrilhamento $\mathtt{T}$, após uma de suas peças sofrer uma projeção, torna-se no ladrilhamento $\mathtt{T}'$, onde $\mathrm{w}(\mathtt{T}') = q^k \mathrm{w}(\mathtt{T})$. Esta constante, no caso q^k, é denominada de *peso da projeção*. A quarta e última propriedade é que após uma projeção, a peça projetada "pula por cima" sempre da mesma quantidade de peças brancas. O termo "pular" se refere a ideia de aparecer depois no tabuleiro.

Esta última propriedade não é totalmente necessária para se definir adequadamente uma projeção, entretanto esta é uma propriedade necessária na maior parte dos casos considerados, pois precisamos ter um controle de quantas peças brancas há à esquerda e à direita de cada peça projetável. Este fato aparece implicitamente nos argumentos (quando afirmamos, por exemplo, que a operação de projetar peças juntas, que será definida mais adiante, dá origem a todos os ladrilhamentos possíveis). O leitor atento observará isto.

Algo também a ser notado é que esta definição aplica-se somente ao caso de ladrilhamentos sem peças empilhadas. Quando tratamos de peças empilhadas, é importante também considerar uma "ordem" de aparecimento das peças, da esquerda para a direita, e, caso elas estejam na mesma posição, de baixo para cima. Daí a definição é boa para ambos os casos. O primeiro exemplo deste caso aparece na Seção 2.2, na discussão da série q–Binomial. Passemos a tratar de duas importantes aplicações deste conceito.

Seja um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, com um ladrilhamento $\mathtt{T}$, onde são escolhidas certas peças projetáveis $\{\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n}\}$, que ocupam as posições $i_1 < \cdots < i_n$ (no caso de ladrilhamentos com empilhamentos, a ideia é considerar as peças em sua ordem de aparecimento, ainda que haja mais do que uma peça projetável em certas posições). Vamos considerar uma operação que produz infinitos ladrilhamentos. Esta operação será denominada *projetar todas as peças projetáveis juntamente*.

Inicialmente, considere a operação de projetar a última peça projetável $\mathtt{t_n}$ uma quantidade igual a $p_n \geq 0$ de vezes. Em seguida, projetamos a penúltima peça projetável $\mathtt{t_{n-1}}$ uma quantidade $p_{n-1} \geq 0$ de vezes, com a restrição $p_{n-1} \leq p_n$. E assim sucessivamente, até à primeira peça projetável, com a restrição $0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_n$. Devido às propriedades da operação de projeção é possível, para qualquer sequência $0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_n$, realizar estas projeções sucessivas. Se o peso da projeção for igual a q^k então, como realizamos exatamente $(p_1 + \cdots + p_n)$ projeções ao todo, o ladrilhamento final $\mathtt{T}'$ terá peso $\mathrm{w}(\mathtt{T}') = (q^k)^{p_1+\cdots+p_n}\mathrm{w}(\mathtt{T})$.

Projetar todas as peças projetáveis juntamente consiste em considerar todas as possibilidades de ladrilhamentos obtidos através de operações deste tipo. A q–contagem de todas estas possibilidades é dada por

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq p_1 \leq \cdots \leq p_n} (q^k)^{p_1+\cdots+p_n}\mathrm{w}(\mathtt{T}) &= \sum_{\lambda \text{ partição em } \leq n \text{ partes}} (q^k)^{|\lambda|}\mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= \sum_{\lambda \text{ partição em partes } \leq n} (q^k)^{|\lambda|}\mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= \frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(1-q^k)(1-q^{2k})\cdots(1-q^{nk})} \\
&= \frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(q^k;q^k)_n}.
\end{aligned}$$

Utilizamos a notação usual $(a;q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-aq^{i-1})$ e $(a;q)_\infty = \prod_{i=1}^{\infty}(1-aq^{i-1})$, além de um resultado clássico da Teorias das Partições. Assim, chegamos ao nosso primeiro resultado relacionado com projeções.

Proposição 1 *Dado um ladrilhamento* $\mathtt{T}$ *de um tabuleiro infinito, com uma projeção definida de peso* q^k*, com* n *peças projetáveis, que aparecem na ordem como* $\{\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n}\}$*, então a* q*–contagem da operação de projetar todas as peças projetáveis juntamente é dada por*

$$\frac{w(\mathtt{T})}{(q^k;q^k)_n}.$$

Utilizamos, no enunciado, a restrição de que o peso da projeção seja da forma q^k. Esta restrição é apenas didática, pois estes são os pesos que aparecem em nosso trabalho. Poderíamos muito bem substituir o peso da projeção por um w qualquer.

Outro caso, semelhante a este, é o caso de projetar peças juntamente, quando o tabuleiro é finito. Neste caso, tudo feito no caso anterior é análogo, com exceção a uma única restrição da forma $p_n \leq m$, onde m é a quantidade máxima de vezes que a última peça projetável pode ser projetada. A q–contagem de todos os ladrilhamentos possíveis de serem obtidos por meio desta operação é então dado por

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_n \leq m} (q^k)^{p_1 + \cdots + p_n} \mathrm{w}(\mathtt{T}) &= \sum_{\lambda \text{ partição em } \leq n \text{ partes } \leq m} (q^k)^{|\lambda|} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \\ &= \begin{bmatrix} n+m \\ n \end{bmatrix}_{q^k} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \,.\end{aligned}$$

Estamos utilizando a notação para o número q–binomial, dada por

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}}.$$

Para mais informações com relação a estes números, conferir a Seção 2.2.

Proposição 2 *Dado um ladrilhamento* $\mathtt{T}$ *de um tabuleiro finito, com uma projeção definida de peso* q^k*, com* n *peças projetáveis, que aparecem na ordem como* $\{\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n}\}$*, sendo que a última peça projetável pode ser projetada no máximo* m *vezes, então a* q*–contagem da operação de projetar todas as peças projetáveis juntamente é dada por*

$$\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_{q^k} w(\mathtt{T}) \,.$$

Vejamos, para finalizar o Capítulo, um exemplo simples de aplicação destas ideias até agora apresentadas.

Vamos provar, por meios combinatórios, utilizando-nos de um tabuleiro ladrilhado com peças, com pesos definidos e q—contagens, a seguinte identidade clássica da Teoria das Partições.

Teorema 3 *Para a variável* q*, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+q^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}.$$

Prova. Primeiramente, interpretamos de forma combinatória ambos os lados da identidade acima. Para isto, consideremos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, que será ladrilhado com peças quadradas brancas e pretas. Dada uma peça $\mathtt{t}$, na posição i, definimos o seu peso por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado branco,} \\ q^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto.} \end{cases}$$

O peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$ será dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t}\in\mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Considere $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos possíveis com esta definições. Vamos q–contar este conjunto, de duas formas distintas.

A primeira forma de contar consiste em percorrer todas as posições do tabuleiro (e utilizar-se de uma generalização do Princípio Fundamental da Contagem para o contexto da q–contagem – aliás, este é um argumento utilizado implicitamente ao longo de todo este trabalho). Para cada posição, fazemos uma escolha: ou colocamos uma peça branca ou colocamos uma peça preta. Esta decisão pode ser traduzida, na contagem, como uma multiplicação do peso do tabuleiro pelo fator $(1 + q^i)$. Percorremos todas as casas do tabuleiro, e a q–contagem de todas as escolhas possíveis (que é igual ao conjunto $\mathbf{X}$) é igual a

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + q^i) = |\mathbf{X}|_q .$$

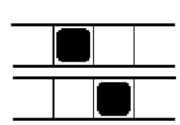
Desta forma, fizemos nossa primeira contagem.

A segunda forma consiste em contar de acordo com o número n de peças pretas no tabuleiro. Seja $\mathbf{X}_n$ o conjunto de todos os ladrilhamentos com exatamente n peças pretas. Para contar este conjunto, principiamos dispondo n peças pretas nas posições iniciais do tabuleiro $\{1, 2, \ldots, n\}$. Este ladrilhamento $\mathtt{T}$ possui peso igual a

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = q^{1+2+\cdots+n} = q^{n(n+1)/2}.$$

Agora, consideremos que as peças projetáveis são todas as peças pretas. A projeção de uma peça preta que definimos é muito simples, consiste em "trocar" a peça preta com a peça branca que lhe sucede (se houver uma, pois se não houver, a peça não pode ser projetada, pois está frente a uma outra peça projetável).

Na figura abaixo, é exemplificada esta projeção.



Vejamos que ela se enquadra, de fato, na definição de projeção (esta verificação não será feita na maior parte das definições apresentadas, deixamos esta tarefa a cargo do leitor). Ela não retira nem acrescenta peças no tabuleiro. Uma peça preta (que é projetável) não "pula por cima" de outra peça preta, mas "pula por cima" de exatamente 1 peça branca. Finalmente, o resultado sobre o peso da tabuleiro é multiplicá-lo por q^1, portanto este é o peso da projeção.

Podemos, então, projetar todas as n peças projetáveis juntamente do ladrilhamento $\mathtt{T}$, e q–contar o resultado desta operação, obtendo a contagem do conjunto $\mathbf{X}_n$, por meio da Proposicão 1, como

$$\frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(q;q)_n} = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}.$$

É claro que o conjunto $\mathbf{X}$ pode ser representado como a união disjunta dos conjuntos $\mathbf{X}_n$. Portanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}|_q &= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbf{X}_n|_q \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}. \end{aligned}$$

Assim, estabelecemos que

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^i) = |\mathbf{X}|_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}.$$

O que prova combinatoriamente a identidade do teorema. Este é o modelo de demonstração que utilizamos em todo o nosso trabalho. ∎

No próximo capítulo, veremos diversos resultados conhecidos, reinterpretados sob o ponto de vista de ladrilhamentos de tabuleiros com peças. Como veremos, diversas identidades tornam-se muito naturais e suas demonstrações simples. Este ponto de vista combinatório possui um poder por tratar das identidades, sem lidar diretamente com os coeficientes, que aparecem implicitamente nas q-contagens. Este fato, aliado à grande "mobilidade" das peças nos tabuleiros, nos permite ir bem além de outros métodos combinatórios, como os grafos de Ferrer, para provar identidades por meios combinatórios.

Capítulo 2

Diversas Identidades da Teoria das Partições

Neste capítulo, utilizamos as ideias básicas desenvolvidas no capítulo anterior, a fim de darmos interpretações e demonstrações combinatórias para várias identidades da Teoria das Partições. Consideramos as identidades de um ponto de vista puramente *formal*, isto é, não nos preocupamos com o problema da convergência das séries nem com seus raios de convergência. Dividimos o capítulo em diferentes seções, cada uma delas contendo uma (ou mais) identidade(s) que lidam com diferentes tipos de técnicas e argumentos. Vamos esboçar os conteúdos deste capítulo.

A Seção 2.1 começa a familiarizar o leitor com as técnicas utilizadas ao longo do trabalho. A Seção 2.2 lida com os clássicos teorema q-Binomial e série q-Binomial, é independente da anterior, e introduz a ideia de *empilhamento de peças*, que será muito útil nas seções posteriores. Também é fundamental para o trabalho a Seção 2.3, que discute algumas identidades do artigo [4] e introduz a noção de *bijeções que preservam pesos* – que auxiliam na q–contagem de diversos conjuntos. As duas seções que seguem – as Seções 2.4 e 2.5 – utilizam a ideia de bijeções que preservam pesos, definida na Seção 2.3, e apresentam os clássicos teorema de Euler e teorema Pentagonal de Euler.

Em seguida, temos uma seqüência de quatro seções que estão relacionadas. O objetivo delas é estabelecer um Projeto (conferir teorema 21) para a prova da Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan. A primeira é a Seção 2.6, que é independente das anteriores, e que lida com uma identidade de Gauss e apresenta os quadrados de Durfee. A segunda é a Seção 2.7, que contém uma identidade clássica de Jacobi (um caso limite da identidade de Gauss), utilizando a seção que lhe antecede. A terceira é a Seção 2.8, que trata do importante Produto Triplo de Jacobi, e depende também da seção que lhe antecede. A quarta é a Seção 2.9, que depende da que lhe antecede, e apresenta um projeto de demonstração da Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan.

Por fim, a Seção 2.10 depende da Seção 2.3 e apresenta um importante teorema de Stanley, referente às partições.

É recomendado ao leitor seguir lendo o capítulo, sem pular seções, pois, embora haja certas seções independentes, elas foram escritas de forma a apresentarem, gradualmente, ao leitor um encadeamento de ideias. Todas elas servem também de preparação para a leitura do Capítulo 3, que apresenta o resultado central desta tese.

2.1 Quadrados Pretos e Congruências

Nesta seção, vamos provar dois resultados. Para os dois, utilizaremos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$ e peças quadradas pretas e brancas. Dada uma peça $\mathtt{t}$, na posição i, definimos seu peso por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado branco,} \\ zq^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto.} \end{cases}$$

O peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$ será dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Repare que a variável z indica a quantidade de peças pretas num ladrilhamento, isto é, um ladrilhamento $\mathtt{T}$ possui peso $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^n q^j$, onde n é igual ao número de peças pretas e j é igual a soma das posições ocupadas por peças pretas.

O primeiro resultado é o que segue.

Teorema 4 *Para as variáveis z e q, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + zq^{2i-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n}.$$

Prova. Consideremos o conjunto $\mathbf{X}^i$ que consiste de todos os ladrilhamentos de $1 \times \infty$ com peças quadradas pretas e brancas, sendo que as peças pretas ocupam unicamente as posições ímpares do tabuleiro. Contemos este conjunto (isto é, q-contemos) de dois modos diferentes.

O primeiro é o mais natural e consiste em percorrer as posições ímpares do tabuleiro $\{1, 3, 5, \ldots\}$, decidindo se colocamos uma peça branca ou uma peça preta em cada uma dessas posições. Para cada i natural, a decisão referente à posição do i-ésimo ímpar, isto é, da posição $(2i-1)$, equivale a multiplicar o peso do ladrilhamento por $(1+zq^{2i-1})$ (aqui, e em muitos outros lugares, utilizamos uma generalização do Princípio Fundamental da Contagem). Portanto a contagem com peso é dada por

$$\left|\mathbf{X}^i\right|_q = \prod_{i=1}^{\infty}(1+zq^{2i-1}).$$

Por outro lado, podemos contar o mesmo conjunto $\mathbf{X}^i$, de acordo com o número n de peças pretas. Chamemos de $\mathbf{X}_n^i$ o conjunto dos ladrilhamentos de $\mathbf{X}^i$ com exatamente n peças pretas. Para realizarmos a contagem de $\mathbf{X}_n^i$, iniciamos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$, com n peças pretas nas n primeiras posições ímpares $\{1,3,\ldots,2n-1\}$. Este ladrilhamento possui peso

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = (zq^1)(zq^3)\cdots(zq^{2n-1}) = z^n q^{1+3+\cdots+(2n-1)} = z^n q^{n^2}.$$

Agora consideramos as peças pretas (nas posições ímpares) como as peças projetáveis do tabuleiro. A projeção de uma peça preta, ocupando a posição $(2i-1)$, é a mais natural e consiste em substitui-la pela peça branca da posição ímpar seguinte, isto é, da posição $(2i+1)$, como mostra a figura a seguir

Esta operação é, de fato, uma projeção, e não é difícil de calcular seu peso, que é q^2.

Projetamos, então, as n peças pretas do ladrilhamento $\mathtt{T}$ juntamente, obtendo assim o conjunto $\mathbf{X}_n^i$, o que, pela proposição 1, possui a q–contagem

$$\frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(q^2;q^2)_n} = \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.$$

Como o conjunto $\mathbf{X}^i$ é a união disjunta dos conjuntos $\mathbf{X}_n^i$, temos

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{X}^i\right|_q &= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\mathbf{X}_n^i\right|_q \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+zq^{2i-1}) = \left|\mathbf{X}^i\right|_q = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.$$

O que conclui a prova do teorema. ∎

Vejamos uma pequena generalização deste resultado.

Teorema 5 *Para as variáveis z e q, e para $0 < j \leq k$ inteiros, vale a seguinte identidade*

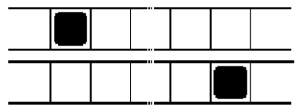
$$\prod_{i=1}^{\infty}\left[1+zq^{j+(i-1)k}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{n\left[j+\frac{k(n-1)}{2}\right]}}{(q^k;q^k)_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n q^{n\{j+(j+k)+\cdots+[j+(n-1)k]\}}}{(1-q^k)(1-q^{2k})\cdots(1-q^{nk})}.$$

Prova. A prova é análoga à prova do teorema anterior. Utilizamos o mesmo tabuleiro $1 \times \infty$, com peças quadradas brancas e pretas, com os pesos definidos no começo desta seção. Definimos, neste caso, o conjunto $\mathbf{Y}^j$, que consiste de todos os ladrilhamentos deste tabuleiro, onde aparecem peças pretas unicamente nas posições congruentes a j módulo k, isto é, nas posições $\{j, j+k, j+2k, \ldots\}$. Contemos o conjunto $\mathbf{Y}^j$ de dois modos distintos.

A primeira contagem consiste em percorrer todas as posições que podem possuir um quadrado preto, e escolher se colocamos um quadrado branco ou preto, multiplicando assim o peso do ladrilhamento por $\left[1+zq^{j+(i-1)k}\right]$, onde i percorre os naturais positivos $\{1,2,3,\ldots\}$. As demais posições são preenchidas por quadrados brancos. A contagem, portanto, do conjunto $\mathbf{Y}^j$ é dada por

$$\left|\mathbf{Y}^j\right|_q = \prod_{i=1}^{\infty}\left[1+zq^{j+(i-1)k}\right].$$

Por outro lado, o conjunto $\mathbf{Y}^j$ pode ser contado de acordo com o número n de peças pretas. Para isto, é preciso definir um conceito de projeção. As peças projetáveis serão as peças pretas. As peças pretas aparecem unicamente nas posições congruentes a j módulo k. Suponhamos que uma peça preta, de uma ladrilhamento $\mathtt{T}$, está na i-ésima das posições disponíveis (para peças projetáveis), ou seja, na posição $j+(i-1)k$ e que há uma peça branca na i-ésima posição disponível, isto é, na posição $j+ik$. Neste caso, podemos definir a projeção, e ela consiste em fazer uma substituição dessas duas peças que acabamos de considerar, uma delas sendo preta e a outra sendo branca, como nos mostra a figura a seguir. Repare que não estamos representando adequadamente as demais posições do tabuleiro, pois elas poderiam (ou não) estar ocupadas por outras peças pretas. Em nosso caso, elas não podem (pela natureza do conjunto considerado), entretanto, mesmo que fosse possível, ainda assim representaríamos, de forma simplificada, a projeção de modo gráfico, ressaltando unicamente as peças nas quais temos interesse.



O efeito sobre o peso do ladrilhamento é multiplicá-lo por q^k – este é portanto o peso da projeção recém definida.

Seja $\mathbf{Y}^j_n$ o conjunto dos ladrilhamentos de $\mathbf{Y}^j$ com exatamente n peças pretas. Vamos contar este conjunto. Suponhamos que dispomos n peças pretas nas primeiras n posições iniciais congruentes a j módulo k, isto é, nas posições $\{j, j+k, \ldots, j+(n-1)k\}$. Este ladrilhamento $\mathtt{T}$ possui peso

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(\mathtt{T}) &= z^n q^{n\{j+(j+k)+\cdots+[j+(n-1)k]\}} \\ &= z^n q^{n\left[j+\frac{k(n-1)}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a operação de projetar todas as peças projetáveis juntamente do ladrilhamento $\mathtt{T}$. A contagem de todos os ladrilhamentos obtidos, por meio desta operação, é obtida pela proposição 1, e é igual a

$$\left|\mathbf{Y}^j_n\right|_q = \frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(q^k;q^k)_n} = \frac{z^n q^{n\left[j+\frac{k(n-1)}{2}\right]}}{(q^k;q^k)_n}.$$

Como o conjunto $\mathbf{Y}^j$ pode ser escrito como a união disjunta dos conjuntos $\mathbf{Y}^j_n$, temos

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{Y}^j\right|_q &= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\mathbf{Y}^j_n\right|_q \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{n\left[j+\frac{k(n-1)}{2}\right]}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left[1 + zq^{j+(i-1)k}\right] = \left|\mathbf{Y}^j\right|_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{n\left[j+\frac{k(n-1)}{2}\right]}}{(q^k;q^k)_n}.$$

O que conclui a demonstração. ∎

Este teorema é, de fato, uma generalização do teorema anterior, bastando definirmos as constantes como sendo $k = 2$ e $j = 1$.

2.2 Números q–Binomiais, o Teorema q-Binomial e a Série q–Binomial

Os números q–binomiais, ou números Gaussianos, são uma generalização dos coeficiente binomiais. Um número binomial é definido pela expressão

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Seguindo a mesma ideia da generalização da contagem para a q–contagem (ou contagem com peso), os números q–binomiais refinam os números binomiais, aparecendo uma variável q, e sendo que o caso limite $q \longrightarrow 1$ recai no número binomial. A definição do número q–binomial é a seguinte, com algumas variações,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q &= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_m (q;q)_{n-m}} \\
&= \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m) \times (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-m})}. \\
&= \frac{\frac{(1-q)}{(1-q)}\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\cdots\frac{(1-q^n)}{(1-q)}}{\frac{(1-q)}{(1-q)}\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\cdots\frac{(1-q^m)}{(1-q)} \times \frac{(1-q)}{(1-q)}\frac{(1-q^2)}{(1-q)}\cdots\frac{(1-q^{n-m})}{(1-q)}} \\
&= \frac{(1+q)\cdots(1+q+\cdots+q^n)}{(1+q)\cdots(1+q+\cdots+q^m) \times (1+q)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-m})}.
\end{aligned}$$

Portanto, de fato, se fizermos $q \longrightarrow 1$, teremos

$$\lim_{q \longrightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \binom{n}{m}.$$

Vale também (ainda que não provemos aqui) que os números q–binomiais são polinômios na variável q e não funções racionais (como seria de se esperar, a princípio, dada a sua definição), e que

$$\begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q$$

é a função geradora das partições com no máximo n partes, sendo cada uma delas no máximo m. Foi este fato utilizado nos argumentos da demonstração da proposição 2. Passemos a tratar do importante teorema q–Binomial. Este teorema generaliza o teorema do Binômio de Newton. Ele pode ser escrito da seguinte forma.

Teorema 6 (Binômio de Newton) *Para a variável z e um número natural n, vale a seguinte identidade*

$$(1+z)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^m.$$

Este teorema pode ser generalizado, utilizando-se dos números q–binomiais.

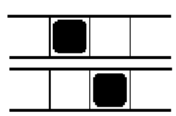
Teorema 7 (Teorema q–Binomial) *Para as variáveis q e z e um número natural n, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{i=1}^{n} (1+zq^i) = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^{m(m+1)/2}.$$

A fim de demonstrarmos este teorema, devemos definir o contexto combinatório com o qual trabalharemos. Utilizamos um tabuleiro finito $1 \times n$, o qual ladrilhamos com peças quadradas brancas e pretas. O peso de uma peça $\mathtt{t}$ de um ladrilhamento $\mathtt{T}$, na posição i, é definido por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado branco,} \\ zq^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto.} \end{cases}$$

O peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$ será dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Vamos definir, antes de começarmos a demonstração, qual será o conceito de projeção utilizado. As peças projetáveis serão as peças pretas. Se uma peça preta $\mathtt{t}$ está na posição i, e na posição seguinte $i+1$ (ainda sendo menor do que ou igual a n) há uma peça branca, podemos projetar esta peça, trocando as duas de lugar, como mostra a figura abaixo.



O resultado desta operação é multiplicar o peso do ladrilhamento por q, portanto este é o peso da projeção.

Prova. Vamos considerar, num conjunto $\mathbf{X}$, todas as possibilidades de ladrilhamento deste tabuleiro $1 \times n$ e q–contá-las de duas maneiras distintas. O primeiro modo de contagem é o mais natural. Percorremos todas as posições i do tabuleiro, que variam em $\{1, 2, \ldots, n\}$, e decidimos se colocamos uma peça branca ou uma peça preta. O resultado sobre a q–contagem de todos os ladrilhamentos é multiplicá-la por $(1+zq^i)$. Portanto, a contagem de todos os ladrilhamentos possíveis é dada pela expressão

$$|\mathbf{X}|_q = \prod_{i=1}^{n} (1+zq^i).$$

Por outro lado, podemos contar o conjunto $\mathbf{X}$ segundo o número m de peças pretas, que também varia no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Denotamos por $\mathbf{X}_m$ o conjunto dos ladrilhamentos com exatamente m peças pretas. Escolhamos, a princípio, um m qualquer em $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dispomos, então, num ladrilhamento $\mathtt{T}$, nas m primeiras posições, peças pretas. O peso deste ladrilhamento é dado por

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^m q^{1+2+\cdots+m} = z^m q^{m(m+1)/2}.$$

Em seguida, projetamos estas m peças pretas juntas. Como vimos na proposição 2, a contagem de todos os ladrilhamentos obtidos é dada por

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \mathrm{w}(\mathtt{T}) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^{m(m+1)/2}.$$

Pelo fato de que o conjunto $\mathbf{X}$ é igual a união disjunta dos conjuntos $\mathbf{X}_m$, então temos

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} (1+zq^i) = |\mathbf{X}|_q &= \sum_{m=0}^{n} |\mathbf{X}_m|_q \\ &= \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^{m(m+1)/2}. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do teorema. ∎

Passemos a considerar a interpretação combinatória da série q-Binomial. Antes, vejamos qual é a série Binomial. Esta série é a "versão com expoente negativo" do binômio de Newton. Podemos escrevê-la da seguinte forma.

Teorema 8 (Série Binomial) *Para a variável z e um número natural n, vale a seguinte identidade*

$$(1-z)^{-n} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} z^m.$$

A generalização que utiliza números q–binomiais é a seguinte.

Teorema 9 (Série q–Binomial) *Para as variáveis q e z e um número natural n, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-zq^i} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^m.$$

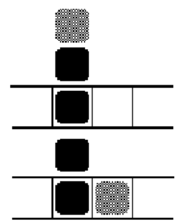
A fim de interpretarmos e provarmos esta identidade de forma combinatória, precisamos definir o tipo de objeto combinatório com o qual trabalhamos. Pela primeira vez, utilizamos o conceito de *empilhamento* de peças. Veremos que este conceito torna muito natural a interpretação que faremos.

Trabalhamos com um tabuleiro finito $1 \times n$, onde dispomos peças brancas e pretas. Em verdade, neste caso, as peças brancas representarão espaços vazios. Em cada posição, podemos dispor, de forma empilhada, uma quantidade qualquer de peças pretas. É importante estabelecer uma noção de ordenamento nas peças. O ordenamento determina qual peça vem antes de qual na ordem lógica do tabuleiro. Duas peças pretas em posições distintas (isto é, em casas diferentes) estão na ordem natural do número da posição. Ou seja, uma peça numa posição i vem antes de uma peça na posição j, caso $i < j$. Se duas peças pretas estiverem na mesma posição i, então elas são ordenadas de baixo para cima, isto é, a mais de baixo é a primeira e a mais de cima é a última. Este ordenamento é importante para compreendermos adequadamente o conceito de projeção que utilizaremos.

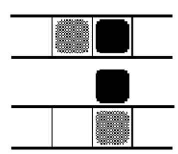
O peso de uma peça, neste caso, é definido levando-se em consideração unicamente a sua posição. Uma peça branca (ou espaço vazio) continua a ter peso 1. Uma peça preta na posição i continua tendo o peso usual zq^i. Entretanto, numa mesma posição pode haver várias peças pretas, e cada uma delas contribuirá com um fator do peso total do tabuleiro. A definição de peso do tabuleiro permanece sendo $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$.

Na prova combinatória que faremos, utilizaremos o conceito de projeção. Vamos definir a operação de projeção com certo detalhamento, visto que se trata da primeira vez que utilizamos o conceito de empilhamento. O conceito de ordenamento é importante para a definição.

As peças projetáveis serão todas as peças pretas. Em primeiro lugar, precisamos saber se uma peça preta pode ser projetada. A projeção de uma peça preta na posição i sempre tem o efeito de colocá-la na posição $i+1$. Por isto, precisamos de duas restrições. A primeira é que jamais uma peça na última posição do tabuleiro (a saber, a posição n) possa ser projetada, pois “cairia fora” do tabuleiro. A segunda restrição diz respeito ao ordenamento. Desde que a peça preta esteja em uma posição $i < n$, ela pode ser projetada somente se for a última peça de sua posição (isto é, a mais de cima) e, caso ela seja a mais de cima, ela sempre pode ser projetada (ainda que haja peças pretas na posição seguinte). A projeção tem o efeito de movê-la para a posição mais inferior da casa (posição) seguinte. Abaixo vemos o exemplo de uma projeção da peça (que destacamos em cinza), de uma posição que possuía 3 peças pretas empilhadas.



Percebemos uma diferença prática no conceito de projeção utilizado até aqui. Suponhamos que haja uma peça preta na posição i e uma peça preta na posição $i+1$. A peça preta na posição i não teria como ser projetada sem o conceito de empilhamento, pois não haveria um "espaço vazio" à frente dela. Entretanto, com o conceito de empilhamento este "espaço vazio" existe debaixo da peça preta da posição $i+1$. Uma vez projetada, temos duas peças pretas na posição $i+1$. A peça de baixo não pode ser projetada pois teria de "ultrapassar" (no ordenamento) a peça preta que está em cima dela. Destacamos, na figura abaixo, a peça que é projetada, tendo a cor cinza.



O efeito da projeção é multiplicar o peso do tabuleiro por q, portanto este é o peso da projeção. Repare que podemos utilizar ainda a proposição 2 (do capítulo anterior), pois embora o conceito de projeção que definimos seja ligeiramente diferente do utilizado noutros casos, as propriedades necessárias continuam valendo de igual forma para utilizarmos a proposição 2. Munidos destes conceitos preliminares, podemos continuar com a prova do teorema.

Prova. Dados um tabuleiro finito $1 \times n$, as peças pretas e brancas, que podem ser empilhadas, e a projeção considerada acima, defina o conjunto $\mathbf{X}$ de todos os ladrilhamentos possíveis deste tabuleiro. Vamos q–contar este conjunto de duas formas distintas.

A primeira forma de contar consiste em percorrer as n posições do tabuleiro e, para cada posição i, considerar todas as possibilidades de ladrilhamento desta posição. Cada posição pode estar vazia, ter uma peça preta, ter duas peças pretas, e assim por diante. Na contagem, a escolha da situação desta posição contribui com um fator

$$(1 + zq^i + z^2q^{2i} + \ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q^{ki} = \frac{1}{1 - zq^i}.$$

A q–contagem do conjunto $\mathbf{X}$ é o produto destes fatores. Portanto, temos

$$|\mathbf{X}|_q = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - zq^i}.$$

Para contarmos uma segunda vez o conjunto $\mathbf{X}$, considere, para cada m natural, o conjunto $\mathbf{X}_m$, que consiste dos ladrilhamentos de $\mathbf{X}$ com exatamente m peças pretas. Vamos contar o conjunto $\mathbf{X}_m$. Para tal, comecemos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$, onde dispomos m peças pretas nas primeiras m possibilidades. Neste caso, como vimos anteriormente ao início da demonstração, as m primeiras possibilidades encontram-se todas na posição 1, bastando que empilhemos estas m peças pretas. O peso deste ladrilhamento é $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = (zq)^m = z^m q^m$. Em seguida, fazemos projeções.

Consideramos as peças pretas como as peças projetáveis. A última peça preta do ladrilhamento $\mathtt{T}$ pode ser projetada no máximo $n-1$ vezes. Além disto, há m peças projetáveis. A q–contagem após a operação de projetar todas as m peças juntas, segundo a proposição 2, é

$$\begin{bmatrix} m + (n-1) \\ m \end{bmatrix}_q \mathrm{w}(\mathtt{T}) = \begin{bmatrix} n + m - 1 \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^m.$$

Como o conjunto $\mathbf{X}$ é a união disjunta dos conjuntos $\mathbf{X}_m$, então

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}|_q &= \sum_{m=0}^{\infty} |\mathbf{X}_m|_q \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n + m - 1 \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^m. \end{aligned}$$

Portanto

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - zq^i} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n + m - 1 \\ m \end{bmatrix}_q z^m q^m,$$

o que conclui a prova do teorema. ∎

2.3 Construindo Bijeções Que Preservam Pesos

No artigo [4], os autores utilizam matrizes $2 \times k$ para representar partições. Em nosso estudo de ladrilhamentos com dominós, em muitos casos, as partições também aparecem como o expoente da variável q de um ladrilhamento `T` (como já vimos). Nesta seção, tentaremos reinterpretar duas das identidades daquele artigo, a saber, as identidades (4.2) e (4.14), seguindo a numeração do artigo.

Veremos que, no processo de reinterpretá-las, chegamos a uma ideia simples, mas interessante, para se fazer q-contagens, que consiste em construir bijeções entre conjuntos de ladrilhamento, preservando o peso.

A primeira das identidades, que escrevemos num teorema, é a seguinte.

Teorema 10 *Para as variáveis q e z, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+zq^{2n+1}}{1-q^{2n}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+zq)(1+zq^3)\cdots(1+zq^{2k-1})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k}.$$

A demonstração combinatória mais simples desta identidade envolve a interpretação de ambos os lados em termos de partições. O lado esquerdo pode ser interpretado como as partições em partes ímpares distintas, sem ter uma parte igual a 1, e com as partes pares podendo ser repetidas. Em termos mais formais, trata-se de um somatório do tipo $\sum z^{i(\lambda)} q^{|\lambda|}$, onde $i(\lambda)$ é o número de partes ímpares da partição λ e $|\lambda|$, a soma da partição, e sendo que o somatório é tomado sobre todas as partições com partes ímpares diferentes, não sendo nunca 1, e com partes pares quaisquer. Já o lado direito pode ser interpretado (de forma similar) como as partições cujas partes ímpares são distintas, as partes pares podem ser repetidas, mas a maior de todas as partes é sempre par.

Construamos a bijeção (de forma abreviada), tomando por domínio as partições do lado direito da identidade e por contra-domínio as partições do lado esquerdo. Se uma partição não tem uma parte 1, ela é levada na própria partição. Se ela possui uma parte igual a 1, fundimos esta parte 1 com a maior parte (que é par) e assim obtemos uma partição do contra-domínio que possui exatamente o mesmo número de partes ímpares (afinal, a parte 1 desapareceu mas surgiu uma parte da fusão desta com a maior parte par). Pode-se ver facilmente que esta função é uma bijeção e que, além disto, preserva o número de partes ímpares e a soma da partição. Vamos considerar o que este fato quer dizer nos termos combinatórios com os quais estamos trabalhando.

O tabuleiro que utilizamos é o tabuleiro infinito $1 \times \infty$. As peças que utilizamos são os quadrados brancos e pretos. Temos, entretanto, a particularidade de que nas posições pares podemos empilhar peças pretas, e nas posições ímpares, podemos colocar apenas uma peça preta. O peso de uma peça $\mathtt{t}$, na posição i, é definido por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado branco,} \\ q^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto numa posição par,} \\ zq^i & \text{caso } \mathtt{t} \text{ seja um quadrado preto numa posição ímpar.} \end{cases}$$

Finalmente, o peso de um ladrilhamento T é definido da forma usual como $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Agora, vamos à demonstração do teorema.

Prova. Os ladrilhamentos que consideramos são aqueles de um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, com a restrição de que não se pode empilhar peças pretas nas casas ímpares e se pode empilhar nas casas pares. Vamos considerar dois conjuntos de ladrilhamentos. O primeiro é o conjunto $\mathbf{X}$, dos ladrilhamentos que não possuem uma peça preta na posição 1. O segundo é o conjunto $\mathbf{Y}$, dos ladrilhamentos cuja posição maior ocupada por uma peça preta é par. Vamos construir uma bijeção

$$\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}.$$

Esta bijeção é construída da seguinte forma. Dado um ladrilhamento $\mathtt{T} \in \mathbf{X}$, ele não possui uma peça preta na primeira posição. Vamos definir um ladrilhamento $\varphi(\mathtt{T}) \in \mathbf{Y}$. Caso a peça preta na maior posição ocupada por uma peça preta do ladrilhamento $\mathtt{T}$ esteja numa posição par, então $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}$. Caso a peça preta na maior posição do ladrilhamento $\mathtt{T}$ esteja numa posição ímpar (igual a $2k+1$), então construímos um ladrilhamento $\mathtt{T}'$, a partir de $\mathtt{T}$, quebrando a peça preta da posição $2k+1$ em duas peças pretas, uma na posição 1 e a outra na posição $2k$. Desta forma

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}') = \frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{zq^{2k+1}}(zq)(q^{2k}) = \mathrm{w}(\mathtt{T})\,.$$

Daí definimos $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$. A função φ é uma bijeção (isto pode ser verificado facilmente). Além disto, ela preserva pesos, isto é, para todo $\mathtt{T} \in \mathbf{X}$, vale

$$\mathrm{w}(\varphi(\mathtt{T})) = \mathrm{w}(\mathtt{T})\,.$$

O fato de que ela é uma bijeção que preserva pesos implica que ela também preserva q–contagens. Este foi o princípio referido no início desta seção. De fato, utilizando a definição de q–contagem, temos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}|_q &= \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= \sum_{\varphi(\mathtt{T})\in\varphi(\mathbf{X})} \mathrm{w}(\varphi(\mathtt{T})) \\
&= \sum_{\mathtt{T}'\in\mathbf{Y}} \mathrm{w}(\mathtt{T}') \\
&= |\mathbf{Y}|_q .
\end{aligned}$$

Para finalizarmos, basta verificarmos que de fato isto representa a expressão da identidade do teorema. O conjunto $\mathbf{X}$ é o de todos os ladrilhamentos sem que haja peças pretas na posição 1. Vamos q–contar este conjunto. Percorremos as posições ímpares, a partir da terceira, e decidimos se colocamos uma peça preta ou branca. Isto contribui com o fator $\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{2n+1})$. Depois percorremos as posições pares, decidindo, em cada uma delas, se deixamos sem peças pretas, se colocamos uma, se colocamos duas, e assim por diante. Isto contribui, na posição $2n$, com um fator $(1+q^{2n}+q^{4n}+\cdots)$, o que, por sua vez, vale $\frac{1}{1-q^{2n}}$. Portanto

$$|\mathbf{X}|_q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+zq^{2n+1}}{1-q^{2n}}.$$

Finalmente, a q–contagem do conjunto $\mathbf{Y}$ pode ser feita da seguinte forma. Lembremos que $\mathbf{Y}$ consiste dos ladrilhamentos cuja maior posição ocupada por uma peça preta é par. Contemos de acordo com a maior posição (par) ocupada por uma peça preta. Seja $2k$ esta maior posição. Deve haver ao menos uma peça preta nesta posição, o que contribui com um peso de q^{2k}. Em seguida percorremos as posições ímpares, que são $\{1,3,\ldots,2k-1\}$ e decidimos se colocamos uma peça preta ou não. Isto contribui com um fator $(1+zq)(1+zq^3)\cdots(1+zq^{2k-1})$. Em seguida, percorremos as posições pares, que são $\{2,4,\ldots,2k\}$, e decidimos se as deixamos sem peças pretas, ou com uma, duas, e assim por diante (note que no caso da última, o que estamos decidindo é se não colocamos mais nenhuma peça preta, ou mais uma, ou mais duas, e assim por diante, afinal já há uma peça preta nesta posição). O fator de contribuição na contagem é $\frac{1}{1-q^2}\frac{1}{1-q^4}\cdots\frac{1}{1-q^{2k}}$. Portanto, considerando todas as possibilidades de k, a q–contagem do conjunto $\mathbf{Y}$ é

$$|\mathbf{Y}|_q = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+zq)(1+zq^3)\cdots(1+zq^{2k-1})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k}.$$

Como já provamos que $|\mathbf{X}|_q = |\mathbf{Y}|_q$, finalizamos o resultado. $\blacksquare$

A prova pode parecer um pouco artificial, entretanto ela introduz esta importante noção de uma *função (bijetora) que preserva pesos*, o que nos possibilita q–contar conjuntos diferentes de ladrilhamentos que estão relacionados através de certas operações. Vamos enunciar este resultado numa proposição, pois ele é utilizado repetidas vezes.

Proposição 11 *Suponhamos que definimos uma função peso $w(\cdot)$ para os elementos de dois conjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Além disto, suponhamos que existe uma função bijetora $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ que preserva pesos, isto é, para a qual vale que $w(\mathtt{T}) = w(\varphi(\mathtt{T}))$ para todo $\mathtt{T} \in \mathbf{X}$. Então os dois conjuntos possuem a mesma q-contagem, isto é,*

$$|\mathbf{X}|_q = |\mathbf{Y}|_q \,.$$

A segunda das identidades do artigo mencionado que tratamos é a que segue. Veremos que a demonstração tem elementos muito similares à demonstração anterior.

Teorema 12 *Para as variáveis q e z, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}} = \frac{1}{1-q^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k-1}.$$

Antes de começarmos a demonstração, definamos o ambiente combinatório com o qual trabalhamos. Utilizamos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, o qual ladrilhamos com peças quadradas brancas e pretas. Assim como no caso do teorema anterior, podemos empilhar peças pretas nas posições pares, mas só podemos dispor uma peça preta nas posições ímpares. Além disto, o peso de uma peça branca é, como de costume, igual a 1 e o peso de uma peça quadrada preta é dada por q^i, onde i é a posição onde ela se encontra. O peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$ é dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Vamos à demonstração.

Prova. Inicialmente, vamos definir dois conjuntos de ladrilhamentos. Desta vez, a q–contagem destes conjuntos não será igual aos dois lados da identidade do teorema (como foi o caso de todos os resultados até agora). Teremos, antes, de fazer uma curta manipulação algébrica até chegarmos à identidade. O primeiro dos conjuntos é $\mathbf{X}$, que contem todos os ladrilhamentos tais que a maior posição ocupada por uma peça preta ou é ímpar ou é par mas antecedida (na posição anterior) por uma peça preta. O segundo conjunto é $\mathbf{Y}$, que consiste de todos os ladrilhamentos que não possuem peças pretas na posição 1. Vamos contar estes dois conjuntos.

Vimos na demonstração do teorema anterior que a contagem do conjunto $\mathbf{Y}$ é igual a

$$|\mathbf{Y}|_q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}}.$$

Contemos, então, o conjunto $\mathbf{X}$. Façamos isto segundo a maior posição ocupada por uma peça preta (se for ímpar) ou segundo a segunda maior posição ocupada por uma peça preta (se a maior posição ocupada por uma peça preta for par). Podemos escrever esta duas possibilidade com um fator

$$\frac{1}{(1-q^{2k})} q^{2k-1}.$$

Lembremo-nos de que na posição ímpar podemos ter no máximo uma peça preta, já na posição par podemos ter qualquer quantidade delas e que

$$(1+q^{2k}+q^{4k}+\cdots) = \frac{1}{1-q^{2k}}.$$

Em seguida, percorremos todas as posições ímpares disponíveis, que são as do conjunto $\{1, 3, \ldots, 2k-3\}$, e decidimos se colocamos ou não uma peça preta. Isto resulta num fator, na q-contagem, igual a $(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})$. Finalmente, percorremos as posições pares disponíveis, que são as do conjunto $\{2, 4, \ldots, 2k-2\}$ e decidimos, em cada uma delas, se colocamos uma peça branca, ou uma preta, ou duas pretas, ou três pretas, e assim por diante. Assim, resultará num fator da contagem igual a $\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k-2})}$. Portanto, temos a contagem igual a

$$\frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k-2})} \frac{1}{(1-q^{2k})} q^{2k-1}.$$

Reescrevendo esta expressão de uma forma mais simples e considerando todas as possibilidades de k, chegamos à contagem do conjunto $\mathbf{X}$

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k-1}.$$

Agora, vamos construir uma função $\varphi : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{Y}'$ bijetora, onde os conjuntos $\mathbf{X}'$ e $\mathbf{Y}'$ são ligeiras modificações dos conjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, respectivamente. Considere um ladrilhamento $\mathtt{T} \in \mathbf{X}$. Caso $\mathtt{T}$ não possua peças pretas na posição 1, então definimos $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}$. Caso $\mathtt{T}$ possua uma peça preta na posição 1 e a maior posição ímpar ocupada por uma peça preta em $\mathtt{T}$ seja $(2k-1)$ então removemos as peças pretas das posições 1 e $(2k-1)$ e colocamos uma peça preta na posição $2k$, obtendo assim um ladrilhamento $\varphi(\mathtt{T}) \in \mathbf{Y}'$ e tal que

$$\mathrm{w}(\varphi(\mathtt{T})) = \frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{q^1 q^{2k-1}} q^{2k} = \mathrm{w}(\mathtt{T})\,.$$

Portanto a função φ preserva pesos. Esta função está definida em todo conjunto $\mathbf{X}$, a não ser nos ladrilhamentos cuja maior posição ímpar ocupada por peça preta é 1 (e que possui uma quantidade qualquer de peças pretas na posição 2). Cada um destes ladrilhamentos possui peso q^{1+2s}, onde s é a quantidade de peças pretas na posição 2. Esta função atinge todo conjunto $\mathbf{Y}$, a não ser os ladrilhamentos que só possuem peças pretas no posição 2. Cada um destes ladrilhamentos possui peso q^{2s}, onde s é a quantidade de peças pretas na posição 2. Portanto

$$|\mathbf{X}|_q = |\mathbf{X}'|_q + \sum_{s=0}^{\infty} q^{1+2s} = |\mathbf{X}'|_q + \frac{q}{1-q^2}.$$

e

$$|\mathbf{Y}|_q = |\mathbf{Y}'|_q + \sum_{s=0}^{\infty} q^{2s} = |\mathbf{Y}'|_q + \frac{1}{1-q^2}.$$

Como a função φ é uma bijeção que preserva pesos, seguindo o mesmo raciocínio da demonstração anterior (ver proposição 11), podemos concluir que o domínio e o contra-domínio possuem a mesma contagem, portanto

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}'|_q &= |\mathbf{Y}'|_q \\
|\mathbf{X}|_q - \frac{q}{1-q^2} &= |\mathbf{Y}|_q - \frac{1}{1-q^2} \\
\left[\frac{q}{1-q^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2k-3})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})} q^{2k-1}\right] - \frac{q}{1-q^2} &= \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n}}\right] \\
&\quad - \left(\frac{1}{1-q^2}\right).
\end{aligned}$$

Após simplificarmos esta expressão final, chegamos à identidade do teorema. ∎

2.4 Teorema Pentagonal de Euler

O Teorema Pentagonal de Euler procura fazer um balanço das partições de um determinado inteiro positivo n, vendo se há mais partições em uma quantidade par de partes distintas ou partições em uma quantidade ímpar de partes distintas. O resultado deste balanço está ligado com os números pentagonais.

Teorema 13 (Teorema Pentagonal de Euler) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[q^{\frac{k(3k+1)}{2}} + q^{\frac{k(3k-1)}{2}}\right].$$

A demonstração que faremos é uma reescrita, para nossa linguagem combinatória, da demonstração usual que constrói uma involução envolvendo partições.

Utilizamos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, ladrilhado com peças quadradas brancas e pretas. As peças brancas tem peso 1. Já as peças pretas possuem peso igual a $(-q^i)$, se na posição i. O peso de um ladrilhamento $\mathtt{T}$, como usualmente, é definido por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t}\in\mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Neste caso, não podemos empilhar peças na mesma posição.

Repare que o peso de um ladrilhamento ou é da forma $+q^s$ ou é da forma $-q^s$ para algum s. Podemos deduzir da definição que o sinal indica se há uma quantidade par (sinal $+$) ou se há uma quantidade ímpar (sinal $-$) de peças pretas no ladrilhamento.

Prova. Seja $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos possíveis. Vamos contar este conjunto. Percorremos todas as posições n, e, para cada uma delas, decidimos se colocamos uma peça branca ou uma peça preta. Cada decisão destas é independente e contribui com um fator $(1-q^n)$. Portanto a contagem do conjunto de todos os ladrilhamentos é

$$|\mathbf{X}|_q = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n).$$

Vamos, então, construir uma involução φ em um subconjunto de $\mathbf{X}$. Lembremos que uma involução é uma função que tem a propriedade de que φ^2 é a função identidade. Para cada ladrilhamento $\mathtt{T} \in \mathbf{X}$ consideremos dois números que lhe são associados. O primeiro é $i_0(\mathtt{T})$, ou mais simplificadamente i_0, que é a menor posição de $\mathtt{T}$ ocupada por uma peça preta. O segundo número é $n_0(\mathtt{T})$, ou mais simplificadamente n_0, que é igual ao número de peças pretas consecutivas nas últimas posições ocupadas por peças pretas no ladrilhamento $\mathtt{T}$.

Caso $i_0 \le n_0$: Então removemos a peça preta da posição i_0 e aumentamos em uma unidade a posição de cada uma das últimas i_0 peças pretas, que existem e são consecutivas, pois $i_0 \le n_0$ (em verdade, só não podemos fazer isto se a peça retirada fizer parte das últimas n_0, ou seja, se $i_0 = n_0$). Desta forma obtemos um ladrilhamento $\mathtt{T}'$, que terá uma peça a menos e satisfaz $\mathrm{w}(\mathtt{T}') = \mathrm{w}(\mathtt{T}) \times \frac{q^{i_0}}{(-q^{i_0})} = -\mathrm{w}(\mathtt{T})$. Daí definimos $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$.

Caso $i_0 > n_0$: Então diminuímos as posições das n_0 maiores peças pretas em uma unidade e incluímos uma peça preta na posição n_0 (em verdade, só não podemos fazer isto se a menor posição de uma peça preta for exatamente uma unidade menor do que n_0, ou seja, $i_0 = n_0 - 1$). Desta forma, obtemos um ladrilhamento $\mathtt{T}'$, que satisfaz $\mathrm{w}(\mathtt{T}') = -\mathrm{w}(\mathtt{T})$, como antes. Definimos também $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$.

A função φ é em verdade uma função do tipo $\varphi : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{X}'$, ou seja, o seu domínio é igual a $\mathbf{X}'$, que difere por pouco de $\mathbf{X}$. Pode-se ver que esta função é uma involução (e portanto uma bijeção) e que, pela sua definição, vale sempre a propriedade de que $\mathrm{w}(\varphi(\mathtt{T})) = -\mathrm{w}(\mathtt{T})$, para todo $\mathtt{T} \in \mathbf{X}'$.

Os primeiros ladrilhamentos que não pertencem a $\mathbf{X}'$ são aqueles em que $i_0 = n_0$. Quais são estes ladrilhamentos? Para cada $k \geq 1$, existe um ladrilhamento com $k = i_0 = n_0$. É o ladrilhamento $\mathtt{T}$ que possui peças pretas somente nas posições $\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$. Este ladrilhamento possui peso

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = (-1)^k q^{k+(k+1)+\cdots+(2k-1)} = (-1)^k q^{k\frac{k+(2k-1)}{2}} = (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}},$$

a saber, estes números que aparecem da forma $\frac{k(3k-1)}{2}$ são os números pentagonais.

O segundo tipo de ladrilhamento que não pertence a $\mathbf{X}'$ são aqueles em que $i_0 = n_0 - 1$. Quais são estes? Para cada $k \geq 1$, existe um ladrilhamento com $k = n_0 = i_0 - 1$. É o ladrilhamento $\mathtt{T}$ que possui peças pretas somente nas posições $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$. Este ladrilhamento possui peso

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = (-1)^k q^{(k+1)+(k+2)+\cdots+2k} = (-1)^k q^{k\frac{(k+1)+2k}{2}} = (-1)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2}}.$$

Faltou apenas considerar o ladrilhamento somente com peças brancas, que possui peso 1, que também não está em $\mathbf{X}'$. Agora vamos contar o conjunto $\mathbf{X}$. Temos que a função φ é uma involução em $\mathbf{X}$ portanto os ladrilhamentos estão relacionados dois-a-dois, neste conjunto, de tal forma que se $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$ então $\mathrm{w}(\mathtt{T}') = -\mathrm{w}(\mathtt{T})$. Portanto, sempre vale que a soma dos pesos dos dois se anula, isto é, $\mathrm{w}(\mathtt{T}) + \mathrm{w}(\varphi(\mathtt{T})) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
|\mathbf{X}|_q &= \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}'} \mathrm{w}(\mathtt{T}) + \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}/\mathbf{X}'} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= \sum_{\mathtt{T}\in\mathbf{X}/\mathbf{X}'} \mathrm{w}(\mathtt{T}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[q^{\frac{k(3k+1)}{2}} + q^{\frac{k(3k-1)}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Esta é a expressão que queríamos demonstrar. ∎

2.5 Teorema de Euler

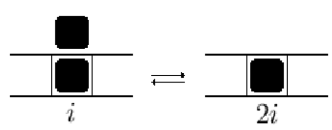
O teorema de Euler a que nos referimos é aquele que diz que o número de partições de um natural n em partes ímpares (podendo haver repetições) é igual ao número de partições de n em partes distintas. Aqui seguimos a abordagem de [1, cáp. 2]. A ideia básica do capítulo é o processo que o autor chama, em inglês, de *merge/split*, que pode ser traduzido por *fundir/quebrar*. Podemos utilizar repetidamente o processo de fundir duas peças em uma só e de quebrar uma peça em duas, a fim de obter várias identidades. Nas duas seções anteriores, utilizamos um pouco esta ideia, mas não como uma cadeia sucessiva de quebras, por exemplo, como faremos agora.

Teorema 14 (Euler) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^k).$$

O ambiente combinatório com o qual trabalharemos é um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, que será ladrilhado com peças quadradas brancas e pretas, com possíveis empilhamentos, e sendo que o peso da peça branca é 1 e o peso da peça preta é dado por q^i, se i for sua posição. O peso de um ladrilhamento é dado por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$.

Utilizaremos repetidamente duas operações. A primeira é a operação de *quebrar* uma peça preta. Isto é, se uma peça preta $\mathtt{t}$ está em uma posição par $2i$, e ela for quebrada, ela some do tabuleiro e aparecem em seu lugar duas peças pretas, cada uma na posição i. O peso do ladrilhamento não se altera com esta operação. A segunda é a operação de *fundir* duas peças pretas que ocupam uma mesma posição i. O resultado da operação é retirar do tabuleiro estas duas peças e colocar uma peça preta na posição $2i$. O peso da ladrilhamento também não se altera com esta operação e é fácil de ver que uma operação é exatamente o inverso da outra. As operações são ilustradas na figura abaixo.



Prova. Inicialmente, definimos dois conjuntos. O primeiro é o conjunto **I** dos ladrilhamentos com peças pretas que podem se empilhar, mas que só podem ocupar posições ímpares. O segundo é o conjunto $\mathbf{D}$ dos ladrilhamentos com peças pretas que não podem se empilhar, ou seja, ocupam sempre posições distintas. Vamos contar os dois conjuntos.

Para o primeiro, percorremos todas as posições ímpares do tabuleiro, isto, as posições do conjunto $\{1,3,5,\ldots\}$, e decidimos quantas peças pretas colocamos em cada uma. Esta decisão dá origem a um fator $(1+q^{2n-1}+q^{2(2n-1)}+...)$, quando na posição $(2n-1)$. O que resulta numa contagem

$$|\mathbf{I}|_q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{2n-1}}.$$

Para o segundo conjunto, percorremos todas as posições k e decidimos se colocamos uma peça branca ou preta no tabuleiro, o que resulta numa contagem

$$|\mathbf{D}|_q = \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^k).$$

Falta relacionar os dois conjuntos e, para isto, utilizamos as operações definidas antes do início da prova. Vamos construir uma bijeção que preserva pesos $\varphi : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{I}$. A ideia é a seguinte. Partimos de um ladrilhamento $\mathtt{T} \in \mathbf{D}$ e vamos quebrando as peças que estão em posições pares. Quebramos uma peça preta em uma posição par, se houver. Em seguida, se ainda houver alguma peça preta numa posição par, a quebramos. E prosseguimos fazendo isto. Em algum momento, o processo precisa terminar em um tabuleiro $\mathtt{T}'$ com somente peças pretas em posições ímpares. Daí defina $\varphi(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$. Dito de uma outra forma, se uma peça preta em $\mathtt{T}$ está numa posição $i2^s$ (onde i é ímpar e s é inteiro), então esta peça se repartirá em 2^s peças pretas na posição i.

A função inversa $\varphi^{-1} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{D}$ faz o processo inverso, só que fundindo peças pretas que estão na mesma posição, até que só sobrem peças pretas em posições distintas. Uma forma mais direta de ver este processo é tomar, por exemplo, uma posição ímpar i ocupada por k peças. Daí escrevemos k na base 2, isto é, $k = \sum_j 2^{s_j}$. Então estas peças pretas na posição i resultarão, no processo final (depois de todas as fundições) em uma peça preta em cada uma das posições $i2^{s_j}$, para cada j.

Segue daí que a função φ é uma bijeção que preserva pesos, portanto, pela proposição 11, temos

$$|\mathbf{D}|_q = |\varphi(\mathbf{D})|_q = |\mathbf{I}|_q.$$

E isto conclui a demonstração. $\blacksquare$

Este resultado pode ser estendido até dar origem ao teorema de Andrews descrito no final de [1, cáp. 2] (só que as quebras e fundições envolvem k peças pretas simultaneamente). O mesmo processo pode ser aplicado como fizemos acima. Mas deixamos aqui apenas este teorema (que é o resultado mais clássico) para exemplificar o uso do método.

2.6 Uma Identidades de Gauss

A identidade de Gauss que provaremos, por meios combinatórios, diz respeito aos, já apresentados, números q-binomiais. Em verdade, é uma generalização da clássica fórmula

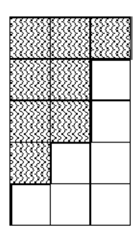
$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2.$$

A generalizaçao é a que segue.

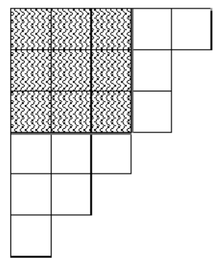
Teorema 15 (Gauss) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2.$$

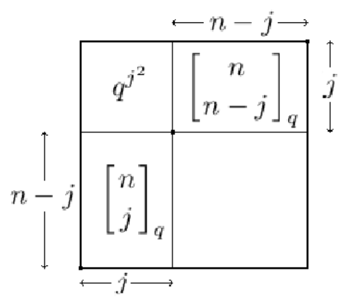
A prova usual utiliza-se dos grafos de Ferrer e um esboço dela é o seguinte. Podemos interpretar $\left[\begin{smallmatrix} n+m \\ n \end{smallmatrix}\right]_q$ como a q–contagem dos caminhos (dentro do retângulo $n \times m$) que partem do ponto $(0,0)$ até o ponto (m,n), percorrendo segmentos de tamanho 1 no sentido horizontal para direita e vertical para cima. Cada um destes caminhos determina um grafo de Ferrer e, portanto, uma partição (cada linha determina uma parte da partição, até o último quadrado que esbarra no caminho desenhado). Logo, cada caminho pode ser definido como possuindo um peso igual a q^s, onde s é a soma da partição correspondente ao caminho (desenhada como um grafo de Ferrer, que vem a ser a parte do desenho somente com a região hachurada da figura que segue). A figura abaixo ilustra um caminho, correspondente à partição $3+2+2+1$ e o seu peso correspondente é $q^{3+2+2+1} = q^8$.



Dada esta interpretação, podemos então definir, para cada partição, o que vem a ser o seu *quadrado de Durfee*. Vem a ser o maior quadrado, com um dos vértices em $(0, n)$ (de acordo com a representação dada acima), cuja sua representação está inteira dentro do grafo de Ferrer. Vejamos um exemplo para a partição $(5, 4, 4, 3, 2, 1)$, cujo quadrado de Ferrer tem lado igual a $j = 3$.



Podemos, então, demonstrar a identidade de Gauss por meio desta representação. Como já vimos, $\left[{2n \atop n}\right]_q$ faz a q–contagem de todos os caminhos de um quadrado de $n \times n$, como descrito acima. Podemos fazer esta contagem de acordo com o lado do quadrado de Durfee de cada partição. O fato de uma partição ter quadrado de Durfee igual a j indica que o seu caminho correspondente passa pelo ponto $(j, n-j)$. Então, para construirmos todos os caminhos que passam por este ponto dividimos o quadrado $n \times n$ através de duas linhas (uma vertical e uma horizontal) passando pelo ponto $(j, n-j)$ (veja a figura abaixo). Podemos, então, contar independentemente o caminho que vai de $(0, 0)$ até $(j, n-j)$ e o caminho que vai de $(j, n-j)$ até (n, n).



Então a contagem fica igual a

$$q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q = q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 .$$

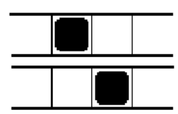
Ao contarmos todos os possíveis lados dos quadrados de Durfee (que variam de 0 até n) chegamos à fórmula desejada

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 .$$

Vamos provar este mesmo resultado, por meio das técnicas combinatórias que estamos estudando. Diferentemente de outras demonstrações feitas até aqui, apesar de ela ser simples, ela possui um conteúdo combinatório diferente da demonstração (clássica) dada acima, isto é, ela não utiliza o conceito dos quadrados de Durfee, e, apesar disto, é bastante natural.

Consideremos um tabuleiro finito $1 \times 2n$, que ladrilhamos, sem empilhamentos, com peças quadradas brancas (de peso igual 1) e peças quadradas pretas (de peso igual a q^i, quando na posição i). O peso de um ladrilhamento é definido por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Precisamos também definir um conceito de projeção para as peças pretas.

A definição que utilizamos aqui é a que já utilizamos outras vezes. As peças projetáveis são as peças pretas. Se uma peça preta está na posição i, e à sua frente há uma peça branca, então a projeção desta peça consiste em trocar estas duas peças de lugar no tabuleiro, o resultado é multiplicar o peso do ladrilhamento por q, portanto este é o peso da projeção.



Prova. Seja $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos que possuem exatamente n peças pretas. Vamos contar este conjunto de duas maneiras distintas.

A primeira maneira consiste em começarmos por um ladrilhamento $\mathtt{T}$, no qual dispomos n peças pretas nas posições iniciais, a saber, nas posições do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Este ladrilhamento possui peso

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = q^{1+2+\cdots+n} = q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Em seguida, projetamos estas n peças pretas juntas, seguindo a proposição 2. O limite de projeção da última peça preta (isto é, a que está na posição n) é de n projeções e o número total de peças projetáveis é igual a n. Além disto, o peso da projeção é igual a q, portanto a q–contagem de todos os ladrilhamentos após esta operação é igual a

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} n+n \\ n \end{bmatrix}_q .$$

Em outros termos

$$|\mathbf{X}|_q = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q .$$

A segunda maneira pela qual contamos o conjunto $\mathbf{X}$ é através do número de peças pretas j que estão nas posições $> n$. Consequentemente, há $(n-j)$ peças pretas nas posições $\leq n$. Lembramos que o tabuleiro é da forma $1 \times 2n$. As duas contagens são independentes. Comecemos pelo lado direito (da posição n). Vamos fazer a contagem das formas de ladrilhar as posições $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ com j peças pretas. Dispomos j peças pretas nas primeiras posições possíveis, a saber, nas posições $\{n+1, \ldots, n+j\}$ e, em seguida, as projetamos juntas (o número de peças projetáveis é j e o limite de projeção da última peça é de $(n-j)$ projeções). Portanto a contagem é igual a

$$q^{(n+1)+\ldots+(n+j)} \begin{bmatrix} j+(n-j) \\ j \end{bmatrix}_q = q^{\frac{j(2n+j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q .$$

Vamos, agora, fazer a contagem das formas de ladrilhar as posições iniciais $\{1, 2, \ldots, n\}$, com exatamente $(n-j)$ peças pretas. Inicialmente, dispomos $(n-j)$ peças pretas nas posições iniciais $\{1, 2, \ldots, j\}$ e as projetamos, sem que ultrapassem a posição n (repare que o número de peças projetáveis é igual a $(n-j)$ e o limite de quantidade de projeções da última peça é igual a j). Portanto a contagem é igual a

$$q^{1+2+\ldots+(n-j)} \begin{bmatrix} (n-j)+j \\ n-j \end{bmatrix}_q = q^{\frac{(n-j)(n-j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q .$$

Portanto o número de ladrilhamentos de $\mathbf{X}$ tendo exatamente j peças pretas à direita da posição n é igual a

$$\begin{aligned} q^{\frac{j(2n+j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-j)(n-j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q &= q^{\frac{j(2n+j+1)+(n-j)(n-j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 \\ &= q^{\frac{2j^2+n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 \\ &= q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 . \end{aligned}$$

Considerando todas as possibilidades de j, chegamos à segunda contagem do conjunto $\mathbf{X}$, que é

$$|\mathbf{X}|_q = q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 .$$

Se igualarmos esta contagem com a contagem que havíamos feito anteriormente do conjunto $\mathbf{X}$ e simplificarmos o fator $q^{\frac{n(n+1)}{2}}$, chegamos à expressão

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q^2 .$$

Esta é a identidade de Gauss. ▮

2.7 Uma Identidade de Jacobi

A identidade de Gauss que provamos na seção anterior dá origem, quando tomamos $n \longrightarrow \infty$, a uma identidade devida a Jacobi. Nesta identidade, que colocamos abaixo, um de seus componentes representa a função geradora das partições irrestritas. Em outras palavras, o termo $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}$ é a função geradora de todas as partições, sem qualquer tipo de restrição.

Teorema 16 (Jacobi) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{[(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)]^2}.$$

Tomar limites foge bastante do esperado para uma prova combinatória. Vamos provar esta identidade, utilizando as técnicas que temos estudado, sem fazermos uso de limites. Para este caso, entretanto, faremos uso dos quadrados de Durfee. Por isto, antes de começarmos, vamos interpretar o lado do quadrado de Durfee para o contexto de tabuleiros e peças.

O conceito de projeção que utilizamos é o mesmo que foi definido na demonstração do teorema 9. Como a discussão, neste caso, seria um pouco extensa, não vamos repeti-la aqui. Sugerimos ao leitor dirigir-se àquela demonstração. A única diferença daquele caso para o que estamos tratando aqui é o peso de uma peça preta que, ao invés de ser definido como sendo zq^i, é definido como q^i. Isto, entretanto, não altera substancialmente a definição de projeção com empilhamentos para o nosso caso.

Inicialmente, vamos interpretar o lado do quadrado de Durfee para o contexto no qual estamos trabalhando. Seja $\mathtt{T}$ um ladrilhamento deste tabuleiro que estamos considerando. Vamos definir o que vem a ser $j(\mathtt{T})$, ou simplesmente j, que é o *lado do quadrado de Durfee* do ladrilhamento $\mathtt{T}$. Percorremos as posições n do tabuleiro, partindo de uma posição muito grande, até à posição 1. Para cada posição n, definimos D_n que nos diz quantas são as peças pretas que estão nas posições $\geq n$.

Certamente que quando n é suficientemente grande, $D_n = 0$. Desde que o ladrilhamento não seja trivial (isto é, somente com peças brancas), teremos $D_1 \geq 1$. Temos, além disto, que D_n é uma sequência não-crescente em n. Seja j o maior n tal que temos $D_n \geq n$. Em termos mais formais

$$j = j(\mathtt{T}) = \max_{D_n \geq n} \{n\}.$$

Este é o lado do quadrado de Durfee do ladrilhamento $\mathtt{T}$. Munidos desta definição, vamos provar a identidade de Jacobi.

Prova. Seja $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos (no contexto definido acima). Um modo de contar este conjunto é percorrermos cada posição n do tabuleiro e decidirmos, em cada uma delas, quantas peças pretas colocamos, se nenhuma, ou uma, ou duas, e assim por diante. Cada uma destas escolhas contribui com um fator na contagem igual a $(1 + q^n + q^{2n} + \ldots)$. Este fator é, por sua vez, igual a $\frac{1}{1-q^n}$. Portanto

$$|\mathbf{X}|_q = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}.$$

Por outro lado, podemos contar o conjunto $\mathbf{X}$ de acordo com o tamanho do quadrado de Durfee j. Vamos contar todos os ladrilhamentos que possuem este quadrado de Durfee. Comecemos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$ com n peças pretas na posição n. Este ladrilhamento possui peso $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = q^{n^2}$. Daí projetamos estas n peças, utilizando-nos da proposição 1. Obtemos um conjunto de ladrilhamentos cuja contagem é dada por

$$\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}.$$

Em seguida, percorremos as n primeiras posições e decidimos, para cada posição i, se deixamos sem peças pretas, ou colocamos uma peça preta, ou duas, e assim por diante (observe que, na posiçao n pode ser que já houvesse peças pretas anteriormente, daí estaremos acrescentando peças pretas). Cada uma dessas escolhas contribui com um fator $(1 + q^i + q^{2i} + \ldots) = \frac{1}{1-q^i}$. Portanto a contagem de todos os ladrilhamentos é dada por

$$\left[\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right] \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2}.$$

Note que, para qualquer ladrilhamento obtido a partir deste processo, temos $D_n \geq n$, pois dispusemos, a princípio, n peças na posição n e as projetamos. Além disto, como há no máximo n peças após a posição n, temos que $D_{n+1} \leq n$ e, portanto, vale que $D_{n+1} < n+1$. Portanto todo ladrilhamento obtido terá quadrado de Durfee de tamanho igual a n. Finalmente, não é difícil de ver que todo o ladrilhamento cujo quadrado de Durfee possui tamanho igual a n foi obtido a partir deste processo.

Se contarmos todos os possíveis n, chegamos à

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2}.$$

Cruzando esta informação com a contagem que já fizemos do conjunto $\mathbf{X}$, terminamos a demonstração. ∎

2.8 Produto Triplo de Jacobi

Nesta seção, vamos lidar com um resultado mais elaborado do que o das seções anteriores. O resultado que vamos provar é o famoso Produto Triplo de Jacobi. Além de ser um resultado de grande importância, ele é uma peça fundamental em provas clássicas das identidades de Rogers-Ramanujan. Portanto, estabelecer uma prova combinatória (e como veremos até bastante simples, dada a complexidade da expressão de Jacobi) é um pedaço do caminho para estabelecer uma prova combinatória das identidades de Rogers-Ramanujan. Nesta seção, veremos algo que discutimos na introdução desta tese. Veremos como são versáteis e poderosas as técnicas combinatórias que estamos utilizando.

Eis a expressão mencionada no parágrafo anterior.

Teorema 17 (Produto Triplo de Jacobi) *Para as variáveis q e z, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

A prova será um pouco comprida e a dividiremos em algumas partes. Inicialmente, vamos reescrever a identidade da forma como trabalharemos com ela. Definimos também quatro funções auxiliares, para segmentar as partes do Produto Triplo de Jacobi.

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+zq^n)$$

$$H(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1}q^{n-1})$$

$$J(z)=G(z)H(z)$$

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^nq^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Dadas estas definições, o que queremos provar é que

$$J(z)=L(z).$$

Comecemos estabelecendo o ambiente combinatório com o qual trabalhamos. Consideremos um tabuleiro infinito (para ambos os lados), isto é, da forma $1\times\mathbb{Z}$. Vamos ladrilhá-lo com peças quadradas brancas e pretas, sem a possibilidade de empilhamentos. As peças brancas terão peso 1 e as peças pretas terão peso definido da seguinte forma. Seja uma peça preta $\mathtt{t}$, ocupando a posição n, o seu peso é dado por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t})=\begin{cases} zq^n & \text{caso } n\geq 1,\\ z^{-1}q^m & \text{caso } m=-n\geq 0.\end{cases}$$

Prova. Seja $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos, de acordo com o contexto combinatório definido acima. Vamos contar este conjunto. Cada posição é independente da outra, e percorremos cada uma delas, decidindo se colocamos uma peça branca ou uma peça preta. Se a posição é $n\geq 1$, a decisão contribui com um fator $(1+zq^n)$. Se a posição é $n\leq 0$ (possivelmente sendo negativa) definimos $m=-n$ e a decisão de colocar uma peça branca ou preta em n contribui com um fator $(1+z^{-1}q^m)$. Portanto a contagem de $\mathbf{X}$ é dada por

$$|\mathbf{X}|_q=\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)\prod_{m=0}^{\infty}(1+z^{-1}q^m)=G(z)H(z)=J(z).$$

Portanto, já temos uma interpretação combinatória de $J(z)$, isto é, a q-contagem de todos os ladrilhamentos possíveis, no contexto em que estamos trabalhando.

Agora, vamos reinterpretar $J(z)$. Para isto, fazemos uma segunda contagem. Esta contagem é de acordo com $k(\mathtt{T})$ (ou simplesmente k), que vem a ser a diferença, no ladrilhamento $\mathtt{T}$, do número de peças pretas nas posições ≥ 1 e do número de peças pretas nas posições ≤ 0. Não é difícil vermos que uma característica de um ladrilhamento $\mathtt{T}$, com $k=k(\mathtt{T})$, é que $\mathrm{w}(\mathtt{T})=q^sz^k$, para certo s, isto é, o número k, associado a $\mathtt{T}$, representa a potência de z no cálculo de seu peso. Assim, podemos contar o conjunto $\mathbf{X}$ de acordo com k e obter

$$|\mathbf{X}|_q = J(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(q) z^k,$$

onde $A_k(q)$ é alguma série formal em q, para cada índice inteiro k.

A próxima parte da demonstração é calcular quem são os "coeficientes" $A_k(q)$. Para isto, precisamos de um resultado que diz

$$J(zq) = z^{-1} q^{-1} J(z).$$

Este resultado será provado mais adiante, no lema 18, de forma combinatória. Tendo este resultado, podemos interpretá-lo em termos da série que obtivemos para $J(z)$.

$$\begin{aligned}
J(zq) &= z^{-1} q^{-1} J(zq) \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(q)(zq)^k &= z^{-1} q^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(q) z^k \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_k(q) q^k\right] z^k &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(q) q^{-1} z^{k-1} \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_k(q) q^k\right] z^k &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[A_{k+1}(q) q^{-1}\right] z^k
\end{aligned}$$

Portanto obtemos que, para cada k, vale

$$A_k(q) q^k = A_{k+1}(q) q^{-1},$$

ou ainda, que

$$A_{k+1}(q) = A_k(q) q^{k+1}.$$

Basta obtermos a expressão de $A_0(q)$ e concluir a expressão dos demais $A_k(q)$. Veremos no lema 19, que

$$A_0(q) = \sum_{j=0}^{n} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j^2}.$$

Já encontramos, no teorema 16, uma expressão diferente da que encontramos para $A_0(q)$, portanto

$$A_0(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)}.$$

Para finalizar, utilizando-nos da equação de recorrência que descobrimos $A_{k+1}(q) = A_k(q)q^{k+1}$, e aplicando-a repetidamente, chegamos à conclusão de que

$$J(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(q)z^k = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^n)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k q^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

O que conclui a prova do teorema, desde que provemos os dois lemas que faltaram.

$\blacksquare$

Vamos, então, provar os dois lemas que foram utilizados na demonstração do teorema acima.

Lema 18 *Para as variáveis q e z, vale a identidade*

$$J(zq) = z^{-1}q^{-1}J(z).$$

Prova. Como, por definição, temos $J(z) = G(z)H(z)$, vamos provar por partes esta identidade.

Primeiro, vamos tratar de $G(z)$. Lembremos que $G(z)$ considera os ladrilhamentos nas posições inteiras positivas $\{1, 2, \ldots\}$ e que as peças pretas tem peso zq^n, na posição n. Queremos relacionar $G(zq)$ com $G(z)$. Se subsituimos z por zq, em $G(z)$, cada peça preta, em cada ladrilhamento, desloca-se uma casa para a direita. Portanto $G(zq)$ conta os ladrilhamentos sem peças pretas na posição 1. Assim, $zqG(zq)$ conta aqueles ladrilhamentos que tem uma peça preta na posição 1. Portanto podemos pensar na contagem de todos os ladrilhamentos como a contagem daqueles que não tem uma peça preta na primeira posição mais a contagem daqueles que tem uma peça preta na primeira posição e obter a expressão

$$G(z) = G(zq) + zqG(zq) = (1 + zq)G(zq).$$

Em seguida, temos de tratar de $H(z)$. Façamos, inicialmente a relação de $H(z)$ com $H(z/q)$. Lembremos que $H(z)$ considera os ladrilhamentos das posições não-positivas, isto é, do conjunto $\{\ldots, -2, -1, 0\}$, e o peso de uma peça preta é dado por $z^{-1}q^m$, se na posição $m = -n$. Para simplificar, vamos pensar em posições positivas, indexadas por m. Se substituirmos z por z/q, em $H(z)$, todas as peças pretas se deslocam para a direita (após inverter o tabuleiro), portanto $H(z/q)$ conta os ladrilhamentos sem peças pretas na posição 0. Portanto $z^{-1}q^0H(z/q)$ conta os ladrilhamentos com uma peça preta na posição 0. Podemos pensar na contagem dos ladrilhamentos como a soma da contagem daqueles que não possuem peças pretas na posição 0 com aqueles que possuem peças pretas na posição 0, daí

$$H(z) = H(z/q) + z^{-1}H(z/q) = (1 + z^{-1})H(z/q).$$

Se substituirmos z por zq, nesta fórmula, chegamos à expressão

$$H(zq) = \left(1 + \frac{1}{zq}\right) H(z).$$

Se unirmos as duas equações que obtivemos, para $G(z)$ e para $H(zq)$, obtemos

$$J(zq) = G(zq)H(zq) = \left(1 + \frac{1}{zq}\right) \frac{1}{1+zq} G(z)H(z) = z^{-1}q^{-1}J(z).$$

Assim, concluímos a prova. ∎

Lema 19 *Para a variável q, vale a identidade*

$$A_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2}.$$

Prova. Pela definição e interpretação que fizemos, $A_0(q)$ é igual a q-contagem dos ladrilhamentos que possuem a mesma quantidade de peças pretas nas posições ≥ 1 do que nas posições ≤ 0. Para realizar esta contagem, a façamos de acordo com n, o número de peças pretas nas posições ≥ 1.

Inicialmente, começamos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$ com n peças pretas nas posições iniciais positivas descritas pelo conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ e n peças pretas nas posições iniciais não-positivas $\{-(n-1), \ldots, -1, 0\}$. O peso deste ladrilhamento é

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^n q^{1+2+\ldots+n} z^{-n} q^{0+1+\ldots+(n-1)} = q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{(n-1)n}{2}} = q^{n^2}.$$

Em segundo lugar, devemos realizar duas projeções de n peças pretas juntas. Vamos assumir, neste caso, que o leitor já tenha lido algo sobre projeções, para não gastarmos muitas linhas com definições longas (afinal esta seção já está bastante extensa). As peças projetáveis são as peças pretas. Só precisamos lidar separadamente com as posições positivas e as posições não-positivas. A projeção das peças pretas nas posições positivas consiste em substituir a peça preta com a peça branca à direita (se houver uma). O peso da projeção é igual a q. Já a projeção das peças pretas nas posições não-positivas consiste em substituir a peça preta com a peça branca à sua esquerda (se houver uma). Repare que este é o primeiro caso de projeção para o sentido negativo que consideramos. O peso da projeção também é q.

Projetamos juntas todas as n peças pretas nas posições positivas e depois todas as n peças pretas nas posições não-positivas. As duas contribuem, pela proposição 1, com um fator $\frac{1}{(q;q)_n}$. Daí a contagem fica

$$\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2}.$$

Basta somar todas as possibilidades de n, para obtermos

$$A_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n^2}.$$

E assim, está terminada a prova. $\blacksquare$

2.9 Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan

O leitor ficará descontente de descobrir que não encontramos uma prova combinatória para a Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan. Demos, apenas, alguns passos neste sentido. É convicção do autor deste trabalho de que alguma prova será em breve encontrada, utilizando-se das ferramentas utilizadas neste trabalho (ladrilhamentos e q-contagem). Também é convicção do autor, como exemplificado neste trabalho, o grande potencial combinatório das ideias aqui apresentadas. Um dos fatores mais importantes para este potencial, segundo a visão do autor, é de que podemos "ver" identidades muito complicadas de forma muito simples. Este poder de *"ver" combinatoriamente* nos permite compreender identidades complicadas de forma mais simples. Aliado a isto, a grande versatilidade de operações com os objetos combinatórios e a noção da q-contagem, configuram um panorama de poderosas aplicações e interpretações combinatórias.

A identidade considerada aqui é a seguinte.

Teorema 20 (Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})}.$$

Nós não daremos uma prova completa. A parte que faltará é conseguirmos interpretar e provar combinatoriamente o teorema a seguir. Ele já foi demonstrado, mas nós não conseguimos prová-lo, neste trabalho, de forma combinatória.

Teorema 21 (Projeto) *Para a variável q, vale a seguinte identidade*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(q;q)_j} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^m)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}.$$

Suponhamos que conseguimos provar este resultado. Vamos utilizá-lo, associado com o Produto Triplo de Jacobi, para provarmos a Primeira Identidade de Rogers-Ramanujan. O caminho de demonstração que estamos utilizando aqui é o apresentado em [1, cáp. 8]. Vamos então provar o teorema 20.

Prova. Supondo estabelecida a identidade do teorema 21, aplicamos o teorema 17 na expressão

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}.$$

Para isto, utilizamos o teorema 17 fazendo algumas substituições. Substituímos a variável q por q^5 e a variável z por $-q^{-2}$. Daí obtemos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3}).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^m)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}} &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3})}{(1-q^m)} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4})}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos se aplicarmos o teorema 21 ao lado esquerdo da identidade acima. ∎

2.10 Teorema de Stanley

Antes de enunciarmos e provarmos o teorema de Stanley, começaremos por um lema inicial, que será peça importante em sua demonstração.

Lema 22 *Sejam dois números inteiros positivos k e r. Então, para cada n inteiro positivo, vale que há tantas partições de n com pelo menos k partes iguais a r quanto partições de n com pelo menos r partes iguais a k.*

Vamos provar este lema por meio de ladrilhamentos e q-contagem. Inicialmente, vamos definir o ambiente combinatório com o qual trabalhamos. Consideremos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, que será ladrilhado com peças quadradas brancas e pretas, sendo que permitimos o empilhamento de peças pretas na mesma posição. O peso de uma peça branca é 1 e o peso de uma peça preta é dado por q^i quando na posição i. Além disto, o peso de um ladrilhamento é definido por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$.

Prova. Começamos definindo, para cada par de inteiros positivos k e r, um conjunto $\mathbf{X}_k^r$. Este conjunto consiste de todos os ladrilhamentos $\mathtt{T}$ que possuem ao menos k peças pretas na posição r. Vamos construir uma função

$$\varphi_k^r : \mathbf{X}_k^r \longrightarrow \mathbf{X}_r^k.$$

Dado um ladrilhamento $\mathtt{T} \in \mathbf{X}_k^r$, sabemos que ele possui pelo menos k peças pretas na posição r. Assim, construímos um ladrilhamento $\mathtt{T}'$ após remover k peças pretas de $\mathtt{T}$ que estão na posição r e colocarmos r peças pretas na posição k. Daí definimos $\varphi_k^r(\mathtt{T}) = \mathtt{T}'$. Não é difícil ver que a função φ_k^r é inversível. Para isto basta ver que φ_r^k é sua inversa. Pela construção, fica também estabelecido que

$$\mathrm{w}(\varphi_k^r(\mathtt{T})) = \mathrm{w}(\mathtt{T})\,.$$

Portanto a função φ_k^r é uma bijeção que preserva pesos. Como vimos na seção 2.3 (mais especificamente na proposição 11), isto implica que a contagem do domínio e do contra-domínio são iguais. Portanto

$$\left|\mathbf{X}_k^r\right|_q = \left|\mathbf{X}_r^k\right|_q.$$

Para finalizarmos, precisamos estabelecer uma relação entre partições e ladrilhamentos. Isto não é difícil. A relação é biunívoca da seguinte forma. Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j)$ de um inteiro positivo n, temos, por definição que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j = n.$$

Associamos à partição λ o ladrilhamento $\mathtt{T}_\lambda$ com peças pretas nas posições do conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j\}$. Repare que estes λ's podem se repetir, o que indica repetição de peças pretas na mesma posição. Vale que

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}_\lambda) = q^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_j} = q^n.$$

Desta forma, neste contexto combinatório no qual estamos trabalhando, a q-contagem de um conjunto de ladrilhamentos é igual à função geradora do conjunto de partições que lhe está associado. Para o nosso problema específico, temos que a função geradora das partições que possuem ao menos k partes iguais a r é igual a q-contagem do conjunto de ladrilhamentos $\mathbf{X}_k^r$. Como estabelecemos que $|\mathbf{X}_k^r|_q = |\mathbf{X}_r^k|_q$, terminamos a prova do lema. ∎

Na demonstração do teorema abaixo, utilizamos o mesmo ambiente combinatório da discussão do lema recém demonstrado.

Teorema 23 (Teorema de Stanley) *Seja k um inteiro positivo. Então, para cada n, o total de aparecimentos de partes k em todas as partições de n é igual ao número de ocorrências de pelo menos k partes iguais nas partições de n.*

Prova. Deixamos k fixo e permitimos que r varie. Pelo lema 22, obtemos uma família de bijeções que preservam pesos φ_k^r, onde r varia nos inteiros positivos. Desta forma, concluímos que

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\mathbf{X}_k^r|_q = \sum_{r=1}^{\infty} |\mathbf{X}_r^k|_q.$$

Vamos interpretar o que querem dizer os dois lados desta igualdade. Vejamos o lado esquerdo primeiro. Cada $|\mathbf{X}_k^r|_q$ conta o número de ladrilhamentos com ao menos k peças pretas na posição r. Como r varia, o resultado da soma, sobre todos os r, conta o número de aparecimentos de ladrilhamentos com ao menos k peças pretas em cada uma das posições. Portanto

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\mathbf{X}_k^r|_q$$

é a função geradora do número de aparecimentos de pelo menos k partes iguais nas partições.

Agora, vamos ver a interpretação do lado direito. Cada $|\mathbf{X}_r^k|_q$ conta o número de ladrilhamentos com ao menos r peças pretas na posição k. Se um ladrilhamento $\mathtt{T}$ possui r' peças pretas na posição k, então ele pertence aos r' conjuntos $\{\mathbf{X}_1^k, \mathbf{X}_2^k, \ldots, \mathbf{X}_{r'}^k\}$.

Portanto

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| \mathbf{X}_r^k \right|_q$$

é a função geradora do número de aparecimentos de partes k nas partições. Isto conclui a demonstração. ■

Finalmente, vamos ao último capítulo, que trata do problema mais importante desta tese. Nele, utilizamos muitas das ideias desenvolvidas até aqui, além de apresentar algumas ideias novas, principalmente no modo como definimos o peso de peças de um ladrilhamento.

Capítulo 3

Uma Identidade de Ramanujan

Neste capítulo, vamos discutir o problema central desta tese. A identidade com a qual lidamos é a seguinte.

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}{[(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})]^2} q^{n^2}.$$

Comecemos discutindo a origem do problema. Em um de seus trabalhos [8, page 30, problem 4.4.2], Pak sugere que seria interessante descobrirmos uma prova combinatória desta identidade. Como já mencionamos antes, os autores de [3], os quais também apresentaram uma prova combinatória desta identidade – embora não por meio de ladrilhamentos –, perceberam um pequeno erro na expressão da identidade, da forma como está escrita no trabalho de Pak. Alem disto, é mencionado, em [3, theorem 4.2], que esta identidade aparece primeiramente nos Cadernos Perdidos de Ramanujan (ver referência [9, page 41]).

Em verdade, nós provaremos a seguinte generalização

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1+zq^{2n+1}}{1-zq^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}{[(1-q^2)\cdots(1-q^{2n})][(1-zq^2)\cdots(1-zq^{2n})]} z^n q^{n^2},$$

que pode também ser escrita de forma simplificada como

$$(-zq;q^2)_\infty = (zq^2;q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n(zq^2;q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

Provaremos esta identidade por meio de ladrilhamentos. Em artigos recentes, [2, 5, 6, 7], os autores Benjamin, Briggs, Little, Plott e Sellers têm utilizado as ideias de "ladrilhamentos com pesos", que procuramos desenvolver um pouco neste trabalho, para apresentarem provas combinatórias de várias identidades. Em um artigo recente [6], Little e Sellers definiram o conceito de "projeção" de ladrilhamentos, tão extensamente utilizado aqui.

O ambiente combinatório de nossa demonstração é o de um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, o qual ladrilhamos com peças quadradas brancas e dominós (isto é, peças 1×2) de duas cores. O que há de inovador em nosso trabalho é o modo pelo qual definimos o peso de uma peça. Os autores citados (ao menos nos trabalhos citados) definiram o peso de uma peça *baseado unicamente na posição.* Aqui, definimos o peso de algumas peças baseado em sua posição e em sua *posição relativa a outras peças.* Ainda assim, conseguiremos utilizar o conceito de projeção – tão importante na demonstração.

Vamos enunciar o resultado que queremos demonstrar.

Teorema 24 (Ramanujan) *Para as variáveis q e z, vale a identidade*

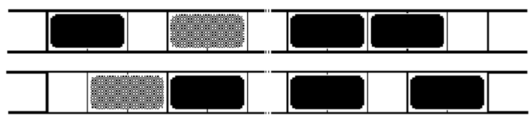
$$(-zq;q^2)_\infty = (zq^2;q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n(zq^2;q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

Antes, de começarmos a demonstração, vamos definir todos os detalhes do ambiente combinatório que utilizamos. Utilizamos um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, o qual, como já dissemos, ladrilhamos com peças quadradas brancas e dominós de duas cores (preta e cinza), sem empilhamentos. Dado um ladrilhamento $\mathtt{T}$, seja $\mathtt{t} \in \mathtt{T}$ uma de suas peças, que está ocupando a posição i. Ressaltamos que a posição de um dominó é definida como a posição do quadrado mais à esquerda da peça. Dizemos, também, que um dominó é *par* (*ímpar*) caso sua posição seja um número *par* (*ímpar*). Faremos a restrição, daqui em diante, de que *todos os dominós cinzas serão ímpares.* O peso de um peça é então definido por

$$\mathrm{w}(\mathtt{t}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathtt{t} \text{ é um quadrado branco,} \\ -zq^i & \text{se } \mathtt{t} \text{ é um dominó preto par,} \\ zq^i & \text{se } \mathtt{t} \text{ é um dominó preto ímpar,} \\ zq^{i+(2m+1)} & \text{se } \mathtt{t} \text{ é um dominó cinza com } m \text{ dominós ímpares à esquerda.} \end{cases}$$

O peso do ladrilhamento é definido por $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = \prod_{\mathtt{t} \in \mathtt{T}} \mathrm{w}(\mathtt{t})$. Devemos definir uma projeção para os dominós pares e uma projeção para os dominós ímpares.

A discussão é idêntica e por isto discutiremos apenas uma. Suponhamos que as peças projetáveis são os dominós pares (ímpares). Seja $\mathtt{t}$ um dominó par (ímpar) que está na posição i, seguidos por um quadrado branco (na posição $i+2$), seguido por j (j pode ser igual a zero) dominós ímpares (pares), que estão nas posições $\{i+3, i+5, \ldots, i+2j+1\}$, seguido por um quadrado branco (na posição $i+2j+3$). A projeção da peça `t` consiste em removê-la de sua posição, e mover todas as peças (desde a posição $i+2$ até a posição $i+2j+3$) duas posições à esquerda, e então reinserir a peça `t` na posição $i+2j+2$.



Repare que a paridade de cada dominó não se altera neste processo. Note também que no caso dos dominós projetáveis serem os pares (ímpares), a peça projetada não "passa por cima" de nenhum outro dominó par (ímpar), apenas por dominós ímpares (pares). É interessante ver que `t` "passa por cima" de duas peças brancas. As demais propriedades da operação de projeção são facilmente verificadas. Vamos verificar apenas a propriedade referente ao peso do ladrilhamento.

Cada dominó ímpar (par) teve seu peso multiplicado por q^{-2}, dando uma contribuição total de q^{-2j}. O dominó par (ímpar) teve seu peso multiplicado por q^{2j+2}. Portanto o efeito da projeção é multiplicar o peso do ladrilhamento por $q^{-2j}q^{2j+2} = q^2$. Este é, portanto, o peso da projeção.

Considere $\mathbf{X}$ o conjunto de todos os ladrilhamentos com estas condições. Nosso primeiro resultado é demonstrar que o lado direito da identidade do teorema 24 é igual a q-contagem do conjunto $\mathbf{X}$.

Lema 25 *Para as variáveis q e z, vale a seguinte identidade*

$$|\mathbf{X}|_q = (zq^2; q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n (zq^2; q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

Prova. Vamos realizar a contagem de acordo com o número n de dominós ímpares (repare que aí estão incluídos os pretos e os cinzas).

Iniciamos com um ladrilhamento `T`, com n dominós pretos nas posições iniciais $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Este ladrilhamento possui peso $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^n q^{1+3+\ldots+(2n-1)} = z^n q^{n^2}$. Então, nós percorremos estes n dominós e decidimos se os deixamos como dominós pretos ou os trocamos para dominós cinzas. Se o i–ésimo dominó é deixado preto, ele mantém o mesmo peso, já se ele é trocado por um dominó cinza, o seu peso é multiplicado por $q^{2(i-1)+1} = q^{2i-1}$, pois ele possui $m = (i-1)$ dominós ímpares à sua esquerda. A decisão de mudança de cada cor é independente das demais. Assim, a contagem de todas as possibilidades é dada por

$$\mathrm{w}(\mathtt{T})\,(1+q^1)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1}) = (-q;q^2)_n z^n q^{n^2}.$$

Agora, percorremos desde a primeira posição par disponível para um dominó, em diante, decidindo se colocamos um dominó par ou não. A contagem de todas as possibilidades até aqui é

$$\left[(-q;q^2)_n z^n q^{n^2}\right]\left[(1-zq^{2n+2})(1-zq^{2n+4})\cdots\right] = (zq^2;q^2)_\infty \frac{(-q;q^2)_n}{(zq^2;q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

Finalmente, projetamos os n dominós ímpares juntos. Pela proposição 1, temos que a contagem das possibilidades é dada por

$$(zq^2;q^2)_\infty \frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n (zq^2;q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

Esta construção produz todos os ladrilhamentos com exatamente n dominós ímpares. Portanto,

$$|\mathbf{X}|_q = (zq^2;q^2)_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n (zq^2;q^2)_n} z^n q^{n^2}.$$

E terminamos a prova do lema. ∎

De forma mais simples, podemos interpretar o lado esquerdo da identidade do teorema 24. Considere o conjunto $\mathbf{Y}$ dos ladrilhamentos somente com dominós pretos ímpares. Para contar este conjunto, podemos percorrer as posições ímpares e decidir se colocamos ou não um dominó preto. Assim a contagem fica

$$|\mathbf{Y}|_q = \left[(1+zq)(1+zq^3)\cdots\right] = (-zq;q^2)_\infty.$$

Para provarmos o teorema 24, nos basta provar que

$$|\mathbf{Y}|_q = |\mathbf{X}|_q\,.$$

Com este intuito, vamos fazer uma segunda contagem dos conjunto $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

Lema 26 *Para as variáveis q e z, valem as identidades*

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(q) z^n$$

$$|\mathbf{Y}|_q = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(q) z^n$$

onde

$$A_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{n-j} (-q;q^2)_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \right]$$

$$B_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.$$

Prova. Vamos contar o conjunto $\mathbf{X}$ de acordo com o número n de dominós (e não somente de dominós ímpares). Começamos com n dominós. Há, entretanto, $n+1$ possibilidades que devemos considerar, de acordo com o número j de dominós ímpares. Vamos começar contando os ladrilhamentos com j dominós ímpares e $(n-j)$ dominós pares. Começamos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$, tendo j dominós pretos ímpares das posições iniciais $\{1, 3, \ldots, (2j-1)\}$ e $(n-j)$ dominós pretos pares nas posições seguintes $\{2j+2, 2j+4, \ldots, 2n\}$. O peso deste ladrilhamento é

$$\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^n q^{1+3+\ldots+(2j-1)} (-1)^{n-j} q^{(2j+2)+(2j+4)+\ldots+2n} = (-1)^{n-j} z^n q^{n^2+(n-j)}.$$

Agora, realizamos três passos. Vamos descrevê-los de modo resumido, pois eles se assemelham a passos já feitos neste capítulo, e para reduzir o tamanho da demonstração. O primeiro é decidir se cada um dos j dominós ímpares são deixados pretos ou são alterados para dominós cinzas. Isto resulta em multiplicar a contagem por $(-q;q^2)_j$. Em seguida, consideramos os $(n-j)$ dominós pretos pares como as peças projetáveis e os projetamos todos juntos. Esta operação contribui com um fator na contagem de $1/(q^2;q^2)_{n-j}$. Finalmente, consideramos os j dominós ímpares (de ambas as cores) como as peças projetáveis e projetamos todas as peças juntas. Esta última operação contribui com um fator $1/(q^2;q^2)_j$. Portanto a contagem de todos os ladrilhamentos com j dominós ímpares e $(n-j)$ dominós pares é dada por

$$(-1)^{n-j} z^n q^{n^2+(n-j)} \frac{(-q;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{n-j}}.$$

Concluímos que a contagem de todos os ladrilhamentos com n dominós é dada por (repare que estamos definindo o termo $A_n(q)$ implicitamente na expressão abaixo)

$$A_n(q)z^n = z^n q^{n^2} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{n-j} \frac{(-q;q^2)_j}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{n-j}} \right].$$

Podemos, finalmente, multiplicar e dividir a expressão por $(q^2;q^2)_n$ e obter a fórmula

$$A_n(q)z^n = \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} \left[\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{n-j} (-q;q^2)_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} \right].$$

Concluímos, assim, se considerarmos todas as possibilidades de n, uma nova contagem do conjunto $\mathbf{X}$ e a primeira parte do lema

$$|\mathbf{X}|_q = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(q) z^n.$$

Vamos fazer uma segunda contagem do conjunto $\mathbf{Y}$, de acordo com n, o número de dominós (pretos e ímpares). Começamos com um ladrilhamento $\mathtt{T}$, com n peças pretas nas posições iniciais $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Este ladrilhamento possui peso $\mathrm{w}(\mathtt{T}) = z^n q^{n^2}$. Então, consideramos todos os dominós pretos e ímpares como as peças projetáveis e os projetamos juntos. A contagem de todos os ladrilhamentos obtidos é dada por

$$\frac{\mathrm{w}(\mathtt{T})}{(q^2;q^2)_n} = \frac{z^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.$$

Assim, se considerarmos todos os possíveis n, temos a contagem

$$|\mathbf{Y}|_q = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(q) z^n,$$

se colocarmos

$$B_n(q) = \frac{q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n}.$$

Desta forma, concluímos a demonstração do lema. ∎

Antes de provarmos o teorema central deste capítulo, vamos provar mais um lema preliminar. O primeiro enunciado é uma das formas do teorema q-Binomial.

Lema 27 *Para as variáveis x, a e q, e um número natural n, valem as identidades*

$$(x-a)(x-aq)\cdots(x-aq^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n} (-a)^{n-j} q^{\binom{n-j}{2}} x^j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q$$

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} a^{n-j}(x-a)(x-aq)\cdots(x-aq^{j-1}) \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q .$$

O leitor observará que as duas expressões acima estão relacionadas. São como que a "inversa", em certo sentido, uma da outra, aparecendo uma expressão com somatórios e certos coeficientes. Os pontos em comum entre elas são dois polinômios. O primeiro é igual a x^n e o segundo é igual a $(x-a)(x-aq)\cdots(x-aq^{n-1})$.

Prova. A primeira identidade pode ser obtida do teorema 7. Basta substituirmos a variável z por $-a/(qx)$ e realizar algumas manipulações algébricas simples. Quanto à segunda identidade, ela pode ser obtida por meio de algumas manipulações e utilizando-se da primeira, vejamos como. De fato, a segunda identidade também pode ser considerada como uma versão modificada (ou, ao menos, relacionada) do teorema q-Binomial.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} a^{n-j}(x-a)(x-aq)\cdots(x-aq^{j-1}) \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \\
&= \sum_{j=0}^{n} a^{n-j} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \left(\sum_{l=0}^{j} (-a)^{j-l} q^{\binom{j-l}{2}} x^l \begin{bmatrix} j \\ l \end{bmatrix}_q \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{l=0}^{j} (-1)^{j-l} a^{n-l} q^{\binom{j-l}{2}} x^l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-l \\ n-j \end{bmatrix}_q \\
&= \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=l}^{n} (-1)^{j-l} a^{n-l} q^{\binom{j-l}{2}} x^l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-l \\ n-j \end{bmatrix}_q \\
&= \sum_{l=0}^{n} a^{n-l} x^l \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_q \left(\sum_{i=0}^{n-l} (-1)^i q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n-l \\ i \end{bmatrix}_q \right).
\end{aligned}$$

Aplicamos uma vez mais a primeira identidade, e concluímos que

$$\sum_{i=0}^{n-l} (-1)^i q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n-l \\ i \end{bmatrix}_q = \begin{cases} 0 & \text{se } (n-l) \neq 0, \\ 1 & \text{se } (n-l) = 0. \end{cases}$$

Assim, concluímos que

$$\sum_{j=0}^{n} a^{n-j}(x-a)(x-aq)\cdots(x-aq^{j-1})\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = a^0 x^n \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = x^n.$$

Esta é a segunda identidade. ∎

Finalmente, vamos à prova do teorema 24, que é o teorema central deste capítulo.

Prova. Primeiro, havíamos estabelecido que provar a identidade do teorema 24 era equivalente a demonstrar que

$$|\mathbf{Y}|_q = |\mathbf{X}|_q .$$

Em seguida, vimos que podíamos contar uma segunda vez estes dois conjuntos, pelo lema 26, tornando assim o teorema 24 equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(q) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(q) z^n.$$

Para isto, basta mostrarmos que, para todo n, temos a identidade $A_n(q) = B_n(q)$. Uma vez mais, pelo lema 26, esta identidade equivale a

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} q^{n-j} (-q;q^2)_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = 1.$$

Se trocarmos a variável q por $-q$, ela se torna equivalente a

$$q^{n-j}(q;q^2)_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = \sum_{j=0}^{n} q^{n-j}(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{2j-1}) \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^2} = 1.$$

Esta última é um caso particular da segunda parte do lema 27, se trocarmos a variável q por q^2 e definirmos $x = 1$ e $a = q$. Isto conclui a demonstração. ∎

Como um corolário do teorema 24, se definirmos $z = 1$, temos o resultado abaixo, que é o problema original do trabalho de Pak.

Corolário 28 *Para uma variável q, vale a seguinte identidade*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{2n+1}}{1-q^{2n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q)(1+q^3)\cdots(1+q^{2n-1})}{[(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})]^2} q^{n^2}.$$

Referências Bibliográficas

[1] G. E. Andrews and K. Eriksson, *Integer partitions*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2004.

[2] A. T. Benjamin, S. S. Plott, and J. A. Sellers, *Tiling proofs of recent sums identites involving Pell numbers*, Annals of Combinatorics, **12** (2008), 271–278.

[3] B. C. Berndt, B. Kim, and A. J. Yee, *Ramanujan's lost notebook: combinatorial proofs of identities associated with Heine's transformation or partial theta functions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **117** (2010), 957–973.

[4] E. H. de M. Brietzke and J. P. de O. Santos *Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions.*, Ramanujan Journal, **23** (2010), 265–295.

[5] K. S. Briggs, D. P. Little, and J. A. Sellers, *Combinatorial proofs of various q–Pell identites via tilings*, Annals of Combinatorics, **14** (2011), 407-418.

[6] D. P. Little and J. A. Sellers, *A tiling approach to eight identities of Rogers*, European Journal of Combinatorics, **31** (2010), 694–709.

[7] D. P. Little and J. A. Sellers, *New proofs of identites of Lebesgue and Göllnitz via tilings*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **116** (2009), 223–231.

[8] I. Pak, *Partition bijections, a survey*, Ramanujan Journal, **12** (2006), 5–75.

[9] S. Ramanujan, *The lost notebook and other unpublished papers*, Narosa, New Delhi, 1988.

[10] E. C. Stabel, *A Combinatorial Proof of an Identity of Ramanujan Using Tilings*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **42** N.2 (2011), 203–212.