

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Aplicação de homogeneização inversa para a obtenção de estrutura básica ótima para
propriedades elásticas prescritas

por

Otávio Teixeira Pinto

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, Junho de 2011



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

Aplicação de homogeneização inversa para a obtenção de estrutura básica ótima para as propriedades prescritas

por

Otávio Teixeira Pinto

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof.
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Jun Sérgio Ono Fonseca

Comissão de Avaliação:

Prof. Edson Hikaro Aseka

Prof. Herbert Martins Gomes

Prof. Jakson Manfredini Vassoler

Porto Alegre junho de 2011.

Pinto,O.T. Aplicação de homogeneização inversa para a obtenção de microestrutura ótima para as propriedades prescritas. 2011.24. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

RESUMO

Este trabalho consiste na tentativa de reproduzir parcialmente os resultados da literatura em que se encontra a configuração da célula unitária microscópica de um material composto periódico que corresponde a um certo conjunto de parâmetros constitutivos prescritos. Este problema foi chamado de homogeneização inversa. Aqui serão estudados os casos em que a configuração microscópica é modelada como um arranjo de barras. Os resultados obtidos pela formulação original não foram satisfatórios. Utilizou-se outra abordagem para resolver o problema, e foram obtidos bons resultados para coeficientes de Poisson maiores que zero.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização, homogeneização, barras, material composto periódico.

Pinto,O.T. Application of inverse homogenization to obtaining a optimal microstructure for the properties required. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

ABSTRACT

This work consists on an attempt to reproduce literature results for the design of the microscopic unity cell of a periodic composite material, for a set of prescribed constitutive parameters. This problem was called inverse homogenization. The particular case studied in this work is a truss like unity cell. The results obtained with the original approach were not satisfactory. An alternative formulation was developed and succeeded for a limited set of properties.

KEYWORDS: Optimization, homogenization, truss, periodic composite material.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
2 DESCRIÇÃO DO TRABALHO	1
2.1 ANÁLISE DA ESTRUTURA DE BARRAS	3
2.2 HOMOGENEIZAÇÃO	4
2.2.1 PROCEDIMENTO DE HOMOGENEIZAÇÃO ADOTADO POR SIGMUND	5
2.2.2. MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO POR FORÇAS E POR DESLOCAMENTOS	6
2.3 OTIMIZAÇÃO	7
2.3.1 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTO POR SIGMUND	8
2.3.2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADO	8
2.4 ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA	10
3. RESULTADOS	11
3.1 FORMULAÇÃO DE SIGMUND	11
3.2 RESULTADOS PARA A FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DE HOMOGENEIZAÇÃO ...	12
4. CONCLUSÕES	14
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
Anexos	

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho busca-se reproduzir parcialmente os resultados obtidos por Sigmund (1994) em que são utilizados métodos matemáticos, como a otimização e a homogeneização, para resolver um problema inverso de homogeneização. Além destes conceitos são utilizados outros como: cálculo variacional e modelagem computacional de materiais. Uma abordagem semelhante pode ser vista em Fonseca (1997).

Tem-se como objetivo a construção de materiais com propriedades mecânicas quaisquer. Para isto considera-se que o material é heterogêneo, ou seja, ele é constituído por fases. Nos casos abordados o domínio é descrito como um plano formado por uma estrutura de barras, as fases em questão são duas, uma formada pelo material da barra e outra formada pela inexistência de material. Busca-se então qual a configuração desta estrutura que resulta em um determinado conjunto de propriedades mecânicas.

Ao realizar a modelagem matemática de um dado material faz-se uma série de simplificações ou considerações. Hipóteses geométricas, podem ser feitas para simplificar a forma do material, como por exemplo quando considera-se uma viga como uma linha, ou uma estrutura muito fina como uma superfície; em ambos os casos transforma-se uma ou mais dimensões do material em uma propriedade geométrica (ex. Área (a) e segundo momento de área (I)). Também podem ser feitas considerações físicas para simplificar a resposta que o material tem a um determinado estímulo, uma consideração comum é a de que o material responde de forma linear, ou seja, a resposta ao estímulo é zero quando ele não existe e linearmente proporcional ao estímulo quando ele esta presente.

Neste trabalho são feitas as seguintes considerações. O modelo matemático que descreve o material é o modelo de barra, que diferentemente dos modelos de contínuo possuem um número finito de graus de liberdade. Isto torna possível modelar o comportamento do material com um conjunto finito de equações algébricas. Considera-se também que o material é elástico linear e utiliza-se a formulação para pequenos deslocamentos.

A principal motivação para este trabalho é o desafio de sua execução. Por se tratar de um trabalho de conclusão para um curso de graduação, procurou-se um trabalho que correspondesse a isto, e, além disto, que completasse o currículo do curso de graduação em engenharia mecânica. Isto impôs ao estudante um grande empenho para entender conceitos avançados de análise estrutural e mecânica computacional. É importante que se diga que não se tem a pretensão de alegar que o domínio sobre temas como otimização e homogeneização foi alcançado, mas sim o conhecimento necessário para a solução deste problema específico.

2. DESCRIÇÃO DO TRABALHO.

Para realizar os procedimentos necessários para este trabalho foi desenvolvido pelo estudante um programa em MATLAB. Os dados de entrada deste programa são uma estimativa inicial das barras na célula básica e o tensor constitutivo que se busca. A saída do programa é um vetor contendo a área de cada uma das barras da célula básica que corresponde ao tensor constitutivo fornecido na entrada (fig. 2.1). Em um material periódico é possível relacionar as propriedades mecânicas da célula básica que o constitui com as propriedades mecânicas macroscópicas.



Fig 2.1. Ilustração das entradas e saídas do programa.

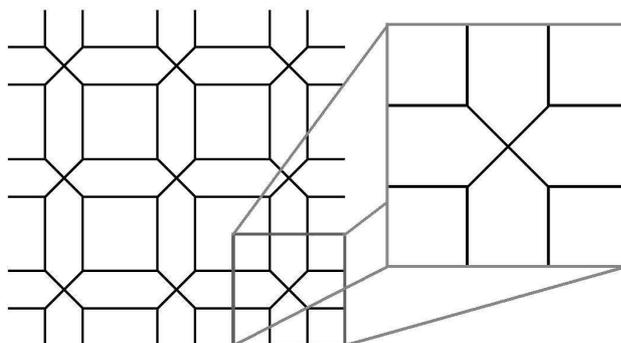


Fig 2.2. Material com microestrutura periódica com a célula básica em destaque.

A relação entre as propriedades microscópicas (célula básica) e as propriedades macroscópicas pode ser obtida fazendo-se uma média (equação 2.1). Relaciona-se então a média das tensões com a média das deformações. O tensor constitutivo que é usado para esta relação é chamado então de tensor constitutivo homogeneizado. Este procedimento é chamado de homogeneização e é utilizado neste trabalho para a obtenção do tensor constitutivo macroscópico do material.

$$\sigma^M = E^H \cdot \varepsilon^M \quad (2.1)$$

Onde:

σ^M = Tensor de tensões médio.

ε^M = Tensor de deformações médio.

E^H = Tensor constitutivo homogeneizado.

É importante definir o que é entendido como macroscópico e microscópico. Neste trabalho usa-se a palavra microscópico quando trata-se de um valor de escala da mesma ordem de grandeza da célula básica do material, e a palavra macroscópico quando trata-se de dimensões grandes o suficiente para que o material possa ser tratado como homogêneo.

Um problema de homogeneização consiste, portanto, em fazer o caminho do microscópico para macroscópico. Parte-se de considerações sobre a estrutura microscópica e chega-se ao comportamento macroscópico do material, aqui se busca o contrário, ou seja, parte-se do comportamento macroscópico e busca-se as propriedades microscópicas do material. Por se tratar do caminho inverso do usual para um problema de homogeneização, ele pode ser chamado de um problema de homogeneização inversa.

Um problema de homogeneização inversa pode ser resolvido acoplado-se um problema de homogeneização com um problema de otimização. Parte-se de uma estrutura inicial para a célula básica e resolve-se o problema de homogeneização. Caso o resultado não seja o desejado, altera-se a estrutura inicial e resolve-se novamente. Repete-se este procedimento até que a configuração utilizada corresponda as propriedades desejadas.

Como a resolução do problema de homogeneização demanda um custo computacional, busca-se que as alterações realizadas durante cada passo seja o mais eficiente possível, ou seja, deseja-se realizar o menor número de passos ou procedimentos de homogeneização possível. Para isto, usa-se métodos de otimização que indicam o “caminho” para as alterações.

2.1 ANÁLISE DA ESTRUTURA DE BARRAS.

Como parte do procedimento de homogeneização deve-se analisar a resposta da célula básica a um certo carregamento. A forma como este carregamento é aplicado será definido mais adiante (Tabelas 2.1 e 2.2). Para obter os deslocamentos resultantes deste carregamento deve-se solucionar um sistema de equações lineares.

O modelo de barra descreve a relação entre as forças (F) e os deslocamentos (U) em dois ou mais pontos do espaço. Diz-se que existe uma relação linear entre F e U , que pode ser vista como uma ou mais barra(s) ou mola(s), quando ocorre um deslocamento de um dos nós em relação ao(s) outro(s), surge uma força linearmente proporcional a variação do comprimento da barra (ou mola) que une este ponto a algum outro. A constante de proporcionalidade desta relação é a constante K ou rigidez, que para barras é igual ao produto do módulo de elasticidade da barra por sua área dividido pelo comprimento da barra, como segue:

$$F = K \cdot U \quad (2.2)$$

$$K = \frac{E \cdot a}{L} \quad (2.3)$$

onde: F é a força na barra, K é a rigidez da barra, U é a variação no comprimento da barra, E é o módulo de elasticidade da barra, a é a área da seção transversal da barra e L é o comprimento da barra.

Para o caso bidimensional a relação acima pode ser escrita como um vetor de forças uma matriz de rigidez e um vetor de deslocamentos:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E \cdot a}{L} & 0 & -\frac{E \cdot a}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E \cdot a}{L} & 0 & \frac{E \cdot a}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$F_i = K_{ij} \cdot U_j \quad i = 1 \dots 4 \quad j = 1 \dots 4 \quad (2.5)$$

O conjunto de equações acima é um sistema de quatro equações, uma para cada grau de liberdade. Onde i e j são os subíndices correspondentes aos termos do sistema na forma matricial. O sistema acima corresponde ao caso em que a barra esta alinhada com a direção de U_1 (e conseqüentemente U_3), para obter-se a forma geral deve-se definir um sistema de coordenadas de referencia, e então decompor a rigidez da barra em componentes alinhadas com os eixos do sistema de referencia. Esta decomposição é feita de forma similar a decomposição de um vetor, e pode ser escrita em função do ângulo que a barra forma em relação ao sistema de referência (equação 2.6):

$$K' = R \cdot K \cdot R^T \quad (2.6)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Onde:

K' = rigidez da barra rotacionada.

θ = ângulo de rotação da barra.

Quando se tem um arranjo de barras, soma-se a contribuição de cada barra ao deslocamento correspondente a um certo grau de liberdade e cria-se um sistema de equações com tantas equações e tantas variáveis quanto graus de liberdade, que pode ser escrito na forma da equação (2.5) onde $i=1\dots m$ e $j=1\dots m$ com m igual ao número de graus de liberdade da estrutura.

Para este trabalho analisa-se repetidas vezes um arranjo de 120 barras com diferentes valores de áreas. O número 120 é resultante de uma malha quadrada com 16 nós com todas as conectividades possíveis como pode ser visto na figura 2.3.

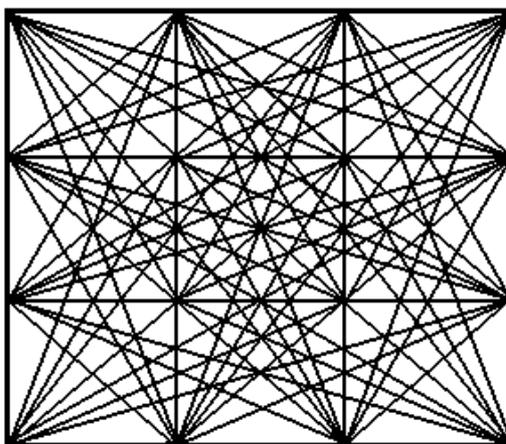


Figura 2.3. Visualização de todas as barras da estrutura com exceção das barras sobrepostas.

2.2 HOMOGENEIZAÇÃO

Como já foi dito o procedimento de homogeneização consiste em encontrar o comportamento médio de um material heterogêneo. O nome homogeneização vem de tratar o material como homogêneo. Isto é equivalente a forma como é modelado matematicamente o concreto. Sabe-se que o concreto é um material composto de diversas fases, contudo, adota-se um módulo de elasticidade único para o material ao invés de modelar as suas diversas fases separadamente.

No caso do concreto o processo de homogeneização é uma consequência da forma como são feitos os ensaios experimentais para a obtenção de suas propriedades mecânicas. Após o ensaio não se tem o valor das constantes elásticas de cada um dos componentes do concreto, mas sim uma constante elástica que representa o seu comportamento macroscópico. Na prática todos os materiais são heterogêneos basta olharmos em uma escala suficientemente pequena que poderemos diferenciar fases sejam elas do tamanho de grandes grãos ou do tamanho de átomos. Sendo assim adotamos diariamente o conceito de homogeneização, pois, ao realizar a modelagem matemática de um material, para evitarmos o custo computacional de tratar com minúcia as diversas fases que o compõem, desconsideramos a existência delas e tratamos o material como homogêneo.

A diferença da abordagem usual, em que a homogeneização é realizada experimentalmente, é que para este caso a homogeneização é realizada através de procedimentos matemáticos.

2.2.1 PROCEDIMENTO DE HOMOGENEIZAÇÃO ADOTADO POR SIGMUND.

Primeiro considera-se que o domínio é descrito pela repetição de células bases retangulares formando um domínio retangular Y limitado na horizontal por y_1^0 e na vertical por y_2^0 :

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{Y} \int_Y E_{ijpq} (\varepsilon_{pq}^{0(kl)} - \varepsilon_{pq}^{*(kl)}) dY \quad (2.8)$$

$$i, j, k, l, p, q = 1, 2 \quad (2.9)$$

Onde:

Y = Domínio de integração, neste caso Y é o volume total do arranjo.

E_{ijkl}^H = Tensor constitutivo homogeneizado.

E_{ijpq} = Tensor constitutivo dos materiais no domínio Y .

$\varepsilon_{pq}^{*(kl)}$ = Tensor de deformações resultante do caso de pré-deformação kl .

$\varepsilon_{pq}^{0(kl)}$ = Tensor da pré-deformação kl .

i, j, k, l, p, q = Índices correspondentes aos termos dos tensores.

Para obtermos os valores de $\varepsilon_{pq}^{*(kl)}$ tem-se que resolver os deslocamentos resultantes de três casos diferentes de pré-deformação $\varepsilon_{pq}^{0(kl)}$, como pode ser visto na tabela 2.1.

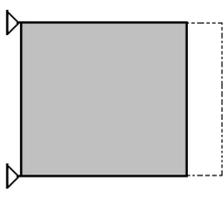
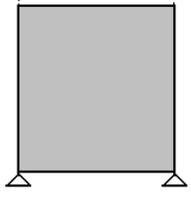
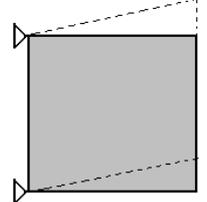
			
$\varepsilon_{pq}^{0(kl)}$	$\varepsilon_{11}^{0(11)} = 1,0$	$\varepsilon_{11}^{0(22)} = 0,0$	$\varepsilon_{11}^{0(12)} = 0,0$
	$\varepsilon_{22}^{0(11)} = 0,0$	$\varepsilon_{22}^{0(22)} = 1,0$	$\varepsilon_{22}^{0(12)} = 0,0$
	$\varepsilon_{12}^{0(11)} = 0,0$	$\varepsilon_{12}^{0(22)} = 0,0$	$\varepsilon_{12}^{0(12)} = 1,0$

Tabela 2.1: Visualização dos três casos de pré-deformação.

Para aplicar os três casos de pré-deformação na estrutura de barras utilizam-se forças nodais equivalentes, ou seja, em cada elemento de barra calcula-se qual a força necessária para que a deformação acima ocorra neste elemento. Em cada nó da estrutura são somadas as forças que resultam da contribuição da pré-deformação em cada uma das barras conectadas a este nó.

Alem disto supõe-se que o contorno se comporta de forma periódica, ou seja, diz-se que todos os nós em $y_1=0$ vão ter os valores de deslocamento iguais aos nós em $y_1 = y_1^0$ com mesma coordenada y_2 e diz-se o mesmo para os nós em $y_2=0$, que terão os mesmos valores de deslocamentos que os nós em $y_2 = y_2^0$ com mesmo valor de y_1 , o que resulta em deformações como as da figura 3. Também se impõe que os deslocamentos y_1 e y_2 em um dos vértices do retângulo são iguais a zero o que implica que os deslocamentos em todos os vértices também são iguais a zero nas duas direções devido a condição de periodicidade.

Apesar da equação (2.8) ser suficiente para determinar os parâmetros homogeneizados do material, Sigmund (1994) utiliza outra relação para obter a homogeneização em termos da energia mútua.

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{Y} \int_Y (E_{pqrs} (\varepsilon_{pq}^{0(kl)} - \varepsilon_{pq}^{*(kl)}) (\varepsilon_{rs}^{0(ij)} - \varepsilon_{rs}^{*(ij)})) dY \quad (2.10)$$

onde os termos desta equação correspondem aos da equação (2.9), porém, com índices diferentes e com os termos $\varepsilon_{rs}^{0(ij)}$ e $\varepsilon_{rs}^{*(ij)}$ onde os subíndices r e s se comportam da mesma forma que os da equação 2.9. A formulação em termos da energia mútua se deve ao fato de já existirem algoritmos de otimização topológica que usam como um dos parâmetros a energia mútua dos elementos, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$Q_{ijkl}^e = \frac{1}{Y^e} \int_{Y^e} (E_{pqrs} (\varepsilon_{pq}^{0(kl)} - \varepsilon_{pq}^{*(kl)}) (\varepsilon_{rs}^{0(ij)} - \varepsilon_{rs}^{*(ij)})) dY^e \quad (2.11)$$

Onde:

Y^e = Domínio ocupado pelo elemento e . (barra e).

Q_{ijkl}^e = Energia mútua do elemento.

2.2.2. MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO POR FORÇAS E POR DESLOCAMENTOS

Além da formulação adotada por Sigmund (1994) utilizou-se outra formulação para escrever uma segunda e terceira subrotina de homogeneização. Estas duas outras sub-rotinas utilizam a solução da equação 2.1 como base. Em uma delas, denominada rotina de homogeneização por forças, o tensor constitutivo homogeneizado é obtido aplicando-se três casos de tensões prescritas sob a forma de forças nodais (tabela 2.2). É feita a média das deformações resultantes $\varepsilon^{m(kl)}$ de cada caso kl , e se obtêm E^H resolvendo o sistema resultante da equação 2.12. onde as variáveis do sistema são os termos da matriz E^H .

$\sigma_{ij}^{0(kl)}$	$\sigma_{11}^{0(11)} = 1,0$	$\sigma_{11}^{0(22)} = 0,0$	$\sigma_{11}^{0(12)} = 0,0$
	$\sigma_{22}^{0(11)} = 0,0$	$\sigma_{22}^{0(22)} = 1,0$	$\sigma_{22}^{0(12)} = 0,0$
	$\sigma_{12}^{0(11)} = 0,0$	$\sigma_{12}^{0(22)} = 0,0$	$\sigma_{12}^{0(12)} = 1,0$

Tabela 2.2 visualização da aplicação das condições de contorno no caso de homogeneização por forças.

$$\sigma_{ij}^{0(kl)} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 E_{ijpq}^H \cdot \varepsilon_{pq}^{m(kl)} \quad (2.12)$$

A terceira sub-rotina utilizada para a homogeneização, denominada rotina de homogeneização por deslocamentos, realiza-se o procedimento inverso, ou seja, são aplicados deslocamentos prescritos e calcula-se a média das forças resultantes obtendo-se um tensor de tensões médio $\sigma_{ij}^{m(kl)}$ a partir de um tensor de deformações prescrito $\varepsilon_{ij}^{0(kl)}$ semelhante ao da

tabela 2.1. Este caso diferencia-se do caso de Sigmund (1994), pois não impõe a condição de periodicidade, e a deformação é imposta sob a forma de deslocamentos nodais com vetores semelhantes aos das figuras da tabela 2.2. e não mais sob a forma de pré-deformação. A obtenção de E^H é feita de forma semelhante ao caso da homogeneização por forças a partir da equação 2.13.

$$\sigma_{ij}^{m(kl)} = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 E_{ijpq}^H \cdot \varepsilon_{pq}^{0(kl)} \quad (2.13)$$

2.3 OTIMIZAÇÃO

Em um procedimento de otimização busca-se a melhor opção dentre um conjunto. Para poder escolher a melhor deve-se antes de tudo definir o termo "melhor opção" ou opção ótima. É possível imaginar diversas situações em engenharia onde se tem diferentes definições para ótimo. Existem situações onde ótimo é uma palavra bem definida, por exemplo, quando deseja-se a estrutura mais leve, ou a mais barata, ou a mais alta. Apesar do problema de encontrar o ótimo não ser necessariamente simples no caso onde somente um fator interessa, é simples definir o que encontrar.

Existem casos onde ótimo não é fácil de definir, como por exemplo, quando se tem a necessidade da estrutura mais alta e mais barata. Diante de duas estruturas diferentes uma mais alta e outra mais barata fica difícil dizer qual é a ótima para o caso de interesse. Além disto um problema de otimização pode ter restrições a serem obedecidas. Por exemplo quando a estrutura deve ocupar uma área limitada do solo ou que o tempo de construção não seja maior que um determinado valor.

Ao formular um problema de otimização define-se os seguintes parâmetros: o objetivo, que deve ser maximizado ou minimizado; o conjunto de opções possíveis; como as opções se comportam em função das variáveis relacionadas com o objetivo e finalmente as restrições impostas às variáveis.

Neste trabalho busca-se uma estrutura que ao ser homogeneizada resulte em um tensor constitutivo pré-definido. Então, pode-se dizer que o conjunto de opções do problema de otimização é o conjunto de estruturas que correspondam a este tensor constitutivo, ou seja o conjunto solução da equação (2.12):

$$E_{ijkl}^0 = E_{ijpq}^H \quad (2.12)$$

Onde:

E_{ijkl}^0 = Tensor constitutivo desejado.

E_{ijpq}^H = Tensor constitutivo homogeneizado.

Como busca-se a estrutura mais simples possível, esta pode ser definida como a que possui o menor número de barras, ou pode-se considerar que a mais simples é a estrutura de menor massa, que neste caso resulta em minimizar o valor de M da seguinte equação:

$$M = \sum_{e=1}^{NE} \gamma^e \cdot a^e \quad (2.13)$$

onde M é a massa total da estrutura, γ^e é o produto da massa específica da barra "e" pelo comprimento da barra "e", a^e é a área transversal da barra "e" e NE é o número total de barras (elementos) da estrutura.

É fácil perceber que caso quiséssemos minimizar a massa da equação acima e tivéssemos γ^e como um parâmetro fixo para qualquer "e", bastaria que as áreas a^e fossem todas iguais a zero, porém neste caso não seria obedecida a condição (2.12). Busca-se então dentro do conjunto de configurações de interesse (que respeite a condição (2.12)) aquela configuração que possui o menor valor de M .

Para que a matriz de rigidez da estrutura não se torne singular, impõe-se mais uma restrição, limitando-se os valores das áreas das barras para valores chamados de a_{\min} e a_{\max} .

Pode-se então formular este problema de otimização da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } M = \sum_{e=1}^{NE} \gamma^e \cdot a^e \quad (2.14)$$

$$\text{Sujeito à: } E_{ijkl}^0 - E_{ijkl}^H = 0 \quad \text{Para todos os valores de } i, j, k, l \quad (2.15)$$

$$\text{E à: } a_{\min} \leq a^e \leq a_{\max} \quad (2.16)$$

2.3.1 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO PROPOSTO POR SIGMUND

Não conseguiu-se realizar a homogeneização da maneira como é realizada no trabalho da literatura. Não foi possível obter resultados para otimização utilizando o método de otimização proposto por ele, pois, como pode ser visto no Anexo 1, seria necessário a obtenção do valor de Q_{ijkl}^e (ver equações 2.11 e A1.2). Por isso optou-se por deixar a descrição do processo de otimização fora deste texto.

2.3.2 MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO UTILIZADO.

O método utilizado neste trabalho é o método conhecido como programação linear sequencial, que consiste em escrever o problema de otimização a partir de equações lineares na seguinte forma.

$$\text{Minimizar: } M = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{x} \quad (2.17)$$

$$\text{Sujeito à: } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (2.18)$$

Onde \mathbf{f} e \mathbf{x} são vetores $m \times 1$, \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$, \mathbf{b} é um vetor $n \times 1$, m é o número de variáveis e n é o número de restrições de desigualdade. Como uma das muitas analogias existentes em otimização \mathbf{f} pode ser denominado vetor de custo manipulando seus termos podendo aumentar ou diminuir o "custo" de uma determinada variável no somatório a ser minimizado M .

As variáveis adotadas para este caso são áreas das barras, logo \mathbf{x} é o vetor de áreas da célula básica, com cada termo associado a uma barra. \mathbf{f} pode ser visto como os m produtos entre o comprimento da barra e a massa específica, mas como já foi dito pode ser manipulado para alterar o "custo" de um determinado conjunto de barras, M se torna a massa da estrutura e desta forma tem-se a igualdade com a equação 2.14.

Para escrever a restrição na forma linear, ou seja, para encontrar os valores de \mathbf{A} e \mathbf{b} é necessário escrever a equação 2.15 na forma linear, para isto expande-se o termo E_{ijkl}^H da equação 2.15 pela Série de Taylor para a e considera-se somente os termos lineares, ficando com:

$$E_{ijkl}^k = E_{ijkl}^{k-1}(a^{k-1}) + \sum_{j=1}^{NE} \frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} (a_j^k - a_j^{k-1}) \quad (2.19)$$

Onde k é o número da iteração atual e $\frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j}$ é determinado por diferenças finitas.

Substituindo 2.19 em 2.15 e isolando a_j^k chega-se a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{NE} \frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} \cdot a_j^k = E_{ijkl}^0 - E_{ijkl}^H(a^{k-1}) + \sum_{j=1}^{NE} \frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} \cdot a_j^{k-1} \quad (2.20)$$

Onde escrevendo da forma da equação 2.18 têm-se:

$$A = \sum_{j=1}^{NE} \frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} \quad \text{e} \quad b = E_{ijkl}^0 - E_{ijkl}^H(a^{k-1}) + \sum_{j=1}^{NE} \frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} \cdot a_j^{k-1} \quad (2.21)$$

A única rotina utilizada neste trabalho que não foi escrita pelo estudante foi a rotina de otimização por programação linear seqüencial, a rotina utilizada trabalha com restrições de desigualdade, exatamente como descrito pelas equações (2.17) e (2.18), logo as seis restrições de desigualdade (correspondente as seis combinações de i, j, k, l) foram escritas como doze restrições de desigualdade, como segue.

$$Ax \leq b + \delta \quad (2.22)$$

$$-(Ax) \leq -(b - \delta) \quad (2.23)$$

que implica em:

$$b - \delta \leq Ax \leq b + \delta \quad (2.24)$$

onde δ é um número pequeno que limita os valores aceitáveis para Ax a uma faixa de tamanho 2δ centrada na restrição de igualdade. Fica-se então com um problema de 120 variáveis (120 barras vide malha fig. 2.3) e 12 condições de desigualdade, que é resolvido por parte da rotina de código aberto SLATEC (www.netlib.org/slatec/, 01/07/2011) que utiliza o método de ponto interior (Haftka, 1990) para a resolução.

Por se tratar da otimização de um trecho do problema aproximado linearmente, é necessário limitar a alteração nas variáveis de projeto para que elas não extrapolem o domínio onde a aproximação linear é considerada aceitável. São impostas restrições laterais as áreas no seguinte formato.

$$\left| a^k - a^{k-1} \right| \leq \theta \cdot a^{k-1} \quad (2.25)$$

O método é denominado programação linear seqüencial, pois os procedimentos de otimização da programação linear são realizados diversas vezes até a convergência, visto que as funções de restrição foram aproximadas (eq. 2.19) e valem somente para uma pequena faixa de valores de área. Os resultados obtidos da rotina SLATEC são utilizados em uma nova malha para serem homogêneos, e para serem obtidos novos coeficientes para as equações 2.17 e 2.18. Este procedimento é repetido até a convergência.

A condição da equação 2.16 é imposta após a rotina SLATEC. Verifica-se o vetor de áreas, para cada termo que supere a_{\max} atribui-se o valor de a_{\max} , e cada termo que seja inferior a a_{\min} atribui-se o valor de a_{\min} . Isto é feito, pois assim evita-se a inserção de mais 240 restrições laterais no problema de programação linear (duas para cada barra).

2.4 ORGANIZAÇÃO DO PROGRAMA

Os programas em Matlab foram organizados de acordo com o seguinte fluxograma genérico:

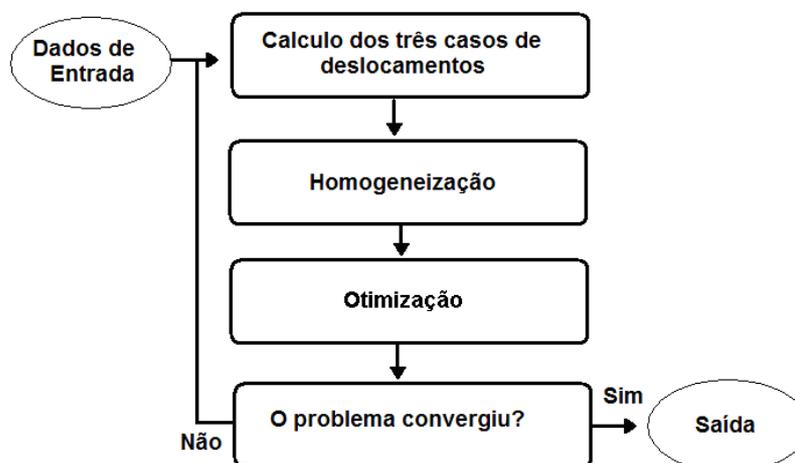


Figura 2.4. Fluxograma genérico do programa em MATLAB. Um fluxograma mais detalhado pode ser visto no Anexo 2.

A saída é dada sob a forma de um vetor onde cada termo corresponde a área de uma das barras do arranjo inicial, ou seja, o arranjo final continua com o mesmo numero de barras que o arranjo inicial. Cada barra continua com o mesmo módulo de elasticidade e com as mesmas conectividades. Porém, as barras com áreas muito pequenas possuem uma rigidez que pode ser desprezada, e, portanto são desconsideradas na configuração final.

Além desta saída foi feito uma rotina de traçagem para a melhor visualização da configuração da célula básica, onde as linhas nas figuras correspondem as barras e tem espessura proporcional a raiz quadrada da área da barra correspondente (Figuras das tabelas 3.3 e 3.4).

3 RESULTADOS:

3.1 FORMULAÇÃO DE SIGMUND

Os primeiros resultados foram obtidos utilizando uma versão criada a partir da formulação proposta por Sigmund (1994) para homogeneização. Os resultados foram considerados muito ruins. Os únicos que fazem sentido podem ser vistos na tabela 3.1. e alguns dos resultados descartados estão na tabela 3.2

Configuração das barras	Tensor constitutivo correspondente
	$[E] = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$[E] = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1 Resultados obtidos com a formulação de Sigmund.

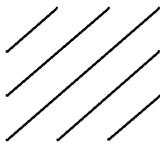
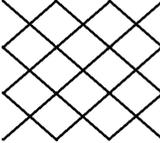
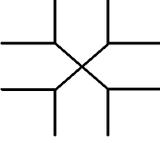
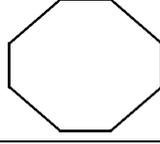
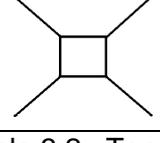
Configuração das barras	Tensor constitutivo correspondente
	$[E] = \begin{bmatrix} 0,98 & -0,24 & -0,01 \\ -0,24 & 1,00 & 0,03 \\ -0,01 & 0,03 & 0,01 \end{bmatrix}$
	$[E] = \begin{bmatrix} 0,97 & -0,56 & -0,01 \\ -0,56 & 1,00 & 0,00 \\ -0,01 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$[E] = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,25 & 0,03 \\ 0,25 & 1,00 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 0,18 \end{bmatrix}$
	$[E] = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,59 & 0,20 \\ 0,59 & 1,00 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,69 \end{bmatrix}$
	$[E] = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,59 & 0,20 \\ 0,59 & 1,00 & 0,20 \\ 0,20 & 0,20 & 0,69 \end{bmatrix}$

Tabela 3.2 : Tensores constitutivos e estrutura que o originou.

Como não se conseguiu descobrir qual o erro existente no programa de homogeneização, não foi possível realizar a otimização tal como proposta pela literatura, pois, como pode ser visto no capítulo 2.3.1 esta formulação para otimização depende dos resultados obtidos para a Q_i^e durante o processo de homogeneização.

Nas tabelas 3.1 e 3.2 podem ser vistos os resultados obtidos, e a esquerda a estrutura que o originou, a estrutura real é bem mais complexa, mostram-se somente as barras que possuem um valor de área considerável. Todas as barras restantes (que não aparecem no desenho) têm uma área transversal dez mil vezes menor. A estrutura verdadeira possui 120 barras a configuração real sem levar em consideração o valor de suas áreas fica como na figura 2.3.

Para melhor interpretação dos resultados considerou-se o termo $E/(1-\nu^2)$ da equação 3.1 igual a um, o que torna a análise da célula básica mais qualitativa. Por se tratar de uma estrutura linear, basta multiplicar o valor da área de todas as barras por E que o módulo de elasticidade da estrutura homogeneizada também será multiplicado por E .

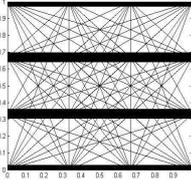
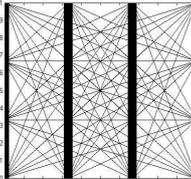
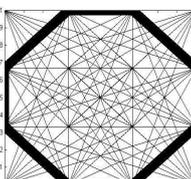
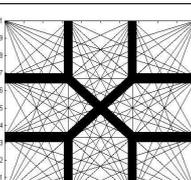
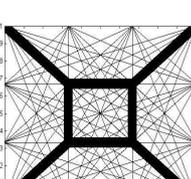
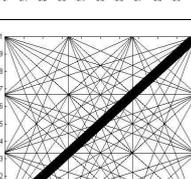
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

onde: E = módulo de elasticidade.
 ν = coeficiente de Poisson.

Sendo assim o módulo de elasticidade se torna apenas um fator de escala para o tensor constitutivo e pode ser alterado para um dado material multiplicando-se todas as áreas pelo fator correspondente.

3.2 RESULTADOS PARA A FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DE HOMOGENEIZAÇÃO.

Os resultados de homogeneização utilizando a formulação por forças e por deslocamentos podem ser vistos na tabela 3.3. Nota-se que para os casos onde existem nós na periferia da célula que não estão associados a alguma das barras com valor elevado de rigidez, E_{33}^F resulta em valores da ordem de 10^3 isto sugere um erro associado aos grandes deslocamentos provenientes da aplicação de forças em nós com baixa rigidez associada. A presença destes erros levou ao uso de somente os resultados de homogeneização por deslocamentos para o problema de otimização.

Configuração das barras	Por forças	Por deslocamentos
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -998 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -998 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,00 \\ 0,50 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 6670 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,45 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,00 \\ 0,50 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1591 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,57 & 0,00 \\ 0,57 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 3280 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,29 & 2,81 \\ 0,29 & 1,00 & 2,81 \\ 2,81 & 2,81 & 6393 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix}$

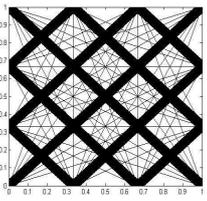
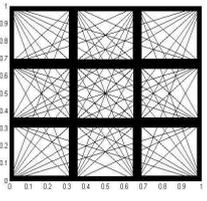
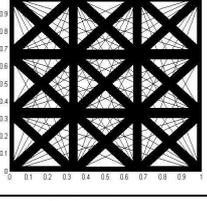
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,27 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,12 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$
	$E^F = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,34 & 0,00 \\ 0,34 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,39 \end{bmatrix}$	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,35 & 0,00 \\ 0,35 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,35 \end{bmatrix}$

Tabela 3.3. Resultados para homogeneização utilizando o método por forças e o método por deslocamentos.

Inicialmente os resultados de otimização não convergiram para valores que obedecessem a restrição de igualdade (equação 2.15), observou-se então que o sétimo e o oitavo resultado da tabela 3.3 poderiam ser combinados para a obtenção de valores de ν (coeficiente de Poisson) entre zero e um. Utilizou-se então como estimativa inicial uma malha semelhante ao ultimo resultado da tabela 3.3 que após aproximadamente 1800 laços de otimização forneceram os seguintes resultados para $\nu = 0,8$ e $\nu = 0,6$.

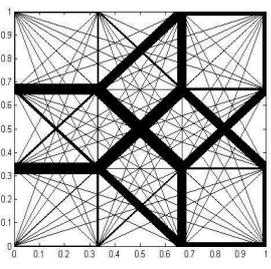
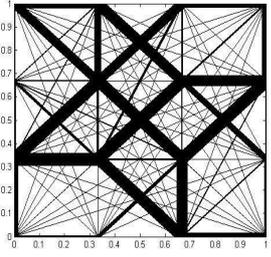
Configuração das barras	Tensor correspondente
	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,80 & 0,00 \\ 0,80 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,10 \end{bmatrix}$
	$E^D = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,60 & 0,00 \\ 0,60 & 0,98 & 0,01 \\ 0,00 & 0,01 & 0,20 \end{bmatrix}$

Tabela 3.4 Resultados obtidos para otimização impondo coeficiente de Poisson 0,8 e 0,6 como condição de igualdade respectivamente.

4 CONCLUSÕES.

Este trabalho pode ser dividido em dois objetivos principais. O primeiro é o de fazer com que o estudante de engenharia, aprendesse conceitos avançados no campo de análise estrutural, otimização e homogeneização. Após alguns meses de estudo e consulta ao professor orientador pode-se dizer que este objetivo era bastante modesto, pois, para o bom entendimento destes conceitos muitos outros tiveram que ser estudados ou mesmo revisados pelo estudante. Para percorrer o caminho entre o conhecimento que o estudante possuía no início do trabalho e o conhecimento necessário para o entendimento dos conceitos citados acima, o estudante teve de estudar cálculo numérico, cálculo variacional, mecânica dos sólidos e técnicas de programação.

O segundo objetivo consistia na reprodução dos resultados da literatura com sucesso, ou seja, conseguir escrever um programa que encontrasse a microestrutura correspondente a um tensor constitutivo pré-definido como objetivo, este objetivo não foi alcançado. Buscou-se por erros de programação e o programa foi reescrito três vezes, chegou-se a conclusão que o erro (ou os erros) é algo tão pequeno que não foi possível enxergá-lo ou é algo relacionado com a transformação das formulações em um algoritmo, sendo o segundo caso um erro bem mais grave.

Abordou-se o problema de uma quarta forma, desta vez bastante diferente da forma de Sigmund (1994), utilizando outros conceitos de homogeneização e outros conceitos de otimização. Desta vez os resultados de homogeneização foram considerados satisfatórios (dentro da limitação de cada método) após a verificação com formas que apresentassem resultados conhecidos (os resultados de Sigmund (1994), 1° ao 5° resultado da tabela 3.3). Escreveu-se então uma rotina de otimização, que a principio não apresentou resultados satisfatórios. Após alguns ajustes chegou-se a uma estimativa inicial que resultasse em uma solução para o problema.

Conclui-se disto que parte importantíssima deste problema de otimização é a estimativa inicial. Apesar de não necessariamente a estimativa inicial utilizada resultar na configuração que minimiza a massa para as propriedades exigidas, ela apresentou resultados que satisfazem o problema de otimização localmente.

Também se deve observar que a eficiência deste método de otimização deixa a desejar quando comparado com o da literatura, visto que, foram necessários cerca de 1800 laços de otimização e dentro de cada um 121 laços de homogeneização, para a determinação das 120 linhas da matriz

$$\frac{\partial E_{ijkl}^H}{\partial a_j} \quad (3.2)$$

por diferenças finitas, e que Sigmund (1994) precisou de cerca de apenas 20 iterações para valores de precisão mais elevados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barroso, L.C., “**Cálculo Numérico Com Aplicações**”, Harbra, 2ª edição, 1987.

Fonseca, J.S.O., “**Design of Microstructures of Periodic Composit Materials**”, University of Michigan, 1997.

Haftka, R.T., “**Elements of Structural Optimization**”, Kluwer, 2nd edition, 1990.

Sigmund, O., “**Materials With Prescribed Constitutive Parameters: An Inverse Homogenization Problem**”, International Journal of Solids and Structures, vol.31, issue 17, pp 2313-2329, 1994.

“**Biblioteca SLATEC**” <http://www.netlib.org/slatec/>, acessado dia 01/07/2011

ANEXO 1

Para solucionar o problema de otimização Olé Sigmund utilizou o método dos multiplicadores de Lagrange que inicia-se escrevendo a função de Lagrange, que tem a seguinte forma:

$$L = \sum_{e=1}^{NE} \gamma^e a^e + \sum_{I=1}^6 \nu_I (E_I^0 - E_I^H) + \sum_{e=1}^{NE} \alpha^e (-a^e + a_{\min}) + \sum_{e=1}^{NE} \beta^e (a^e - a_{\max}) \quad (\text{A1.1})$$

$$E_I^H = \sum_{e=1}^{NE} Q_I^e \quad I = 1, \dots, 6 \quad (\text{A1.2})$$

Onde:

O primeiro somatório corresponde ao valor de **M**.

Os valores de I correspondem aos seis diferentes valores possíveis para $ijkl$.

1 → 1111 2 → 2222 3 → 1212 4 → 1122 5 → 1112 6 → 2212

ν_I São os multiplicadores de Lagrange correspondentes as I restrições de igualdade.

α^e, β^e São os multiplicadores de Lagrange para as restrições de desigualdade.

A função de Lagrange escreve as restrições junto com a função a ser minimizada (ou maximizada). Quando se tem uma função do tipo $Y=F(x)$, que possua um ou mais mínimos (ou máximos) locais, pode-se dizer que estes são pontos onde a derivada primeira de Y em relação a x é igual a zero. Caso a função possua mais variáveis ($Y=F(x_1, \dots, x_n)$) o ponto que minimiza o valor de Y localmente é o ponto onde as derivadas de Y em relação a x_1, \dots, x_n são iguais a zero simultaneamente. É possível escrevermos uma função (função de Lagrange) que englobe as restrições do problema de otimização, incluindo mais uma variável a função original (multiplicador de Lagrange), de forma que quando esta função é derivada em termos desta nova variável e igualada a zero tem-se a restrição. Como pode ser visto na equação A1.3.

$$\frac{\partial L}{\partial \nu_I} = E_I^0 - \sum_{e=1}^{NE} Q_I^e = 0 \quad (\text{A1.3})$$

A explicação de como este procedimento funciona para condições envolvendo as desigualdades é um pouco mais complexa e pode ser encontrada em livros como Haftka, (1990).

Como já foi dito o procedimento de otimização consiste em guiar as alterações que são realizadas nas áreas das barras antes de realizar uma nova homogeneização. Para isto deriva-se a função de Lagrange em relação as variáveis a serem alteradas, ou seja, em relação as áreas a^e e iguala-se a zero obtendo-se a seguinte equação.

$$\frac{\partial L}{\partial a^e} = \gamma^e - \sum_{I=1}^6 \nu_I \frac{Q_I^e}{a^e} - \alpha^e + \beta^e = 0 \quad e = 1, \dots, NE \quad (\text{A1.4})$$

Baseando-se na equação A1.4 pode-se escrever a seguinte regra para a alteração das áreas das barras.

$$a^e = a_{\min} \quad \text{ou} \quad a^e = \sum_{I=1}^6 \nu_I \frac{Q_I^e}{\gamma^e} \quad \text{ou} \quad a^e = a_{\max} \quad (\text{A1.5})$$

A primeira possibilidade para a^e é adotada quando a^e é menor ou igual a a_{\min} e a terceira quando a^e é maior ou igual a a_{\max} . Desta forma, os multiplicadores de Lagrange referentes à restrição de desigualdade (α^e e β^e) ficam sem serventia. Quando as condições de desigualdade são respeitadas utiliza-se a segunda relação da equação A1.5 que surge diretamente da equação A1.4 quando se ignora os termos α^e e β^e .

Para a obtenção dos valores de v_I escreve-se uma função erro dependente dos I multiplicadores de Lagrange, os valores de v_I que zeram o erro (obtidos pelo método de Newton) são utilizados na próxima iteração de otimização. Esta formulação encontra-se abaixo. Modifica-se a restrição de igualdade para:

$$\sum_{e=1}^{NE} \frac{a^e}{a_0^e} Q_I^e - E_{ijkl}^0 = 0 \quad (\text{A1.6})$$

Onde, a_0^e é o valor da área da barra e na ultima iteração e a^e é o valor da área e atualizado para a próxima iteração. Pode-se então escrever uma função para o erro da seguinte forma:

$$\phi_I = \sum_{e \in R_{alt}} \frac{Q_I^e \sum_{j=1}^6 v_j Q_j^e}{a_0^e \gamma^e} + \sum_{e \in R_{\min}} \frac{Q_I^e a_{\min}}{a_0^e} + \sum_{e \in R_{\max}} \frac{Q_I^e a_{\max}}{a_0^e} - E_{ijkl}^0 = 0 \quad (\text{A1.7})$$

Onde, ϕ_I é o valor para os erros correspondentes as I restrições de igualdade e R_{alt} , R_{\min} e R_{\max} corresponde aos conjuntos de barras com áreas atualizadas normalmente, atualizadas para o valor de a_{\min} e atualizadas para o valor a_{\max} , respectivamente.

Utiliza-se então a seguinte equação do método de Newton-Raphson (Barroso,1987):

$$v_{k+1} = v_k - (\nabla \phi)_k^{-1} \phi_k \quad (\text{A1.8})$$

onde $\nabla \phi$ é uma matriz 6 x 6 dada por:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi_j}{\partial v_I} = \sum_{e \in R_{alt}} \frac{Q_I^e Q_j^e}{a_0^e \gamma^e} \quad (\text{A1.9})$$

Anexo 2: Fluxograma do programa de otimização.

