UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O USO DO *DOWNSIDE RISK* (Média - Momentos Parciais) COMO MEDIDA DE RISCO NA SELEÇÃO DE PORTFOLIOS

ARTHUR EMÍLIO KÜRSTEN DE MATTOS

Orientador:
Prof. Dr. Gilberto de Oliveira Kloeckner

Porto Alegre, Setembro de 1998.

UFRGS
Faculdade de Ciências Econômicas
Biblioteca Gládis W. do Amaral
Av. João Pessoa, 52
90040.000 - Porto Alegre - RS - Brasil

UFRGS
Escola de Administração
BIBLIOTECA
R. Washington Luiz, 855
Fone: (51) 316-3840 - Fax: (51) 316-3991
CEP 90010-460 - Porto Alegre - RS - Brasil

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, aos meus colegas de mestrado e aos professores do curso de mestrado do PPGA, dentro os quais destaco o meu orientador, Gilberto de Oliveira Kloeckner.

52000

T
336.767
M444U

ECO
1999/229009-0
1999/03/10

RESUMO

Este trabalho averigua se a medida de risco momentos parciais (MP), utilizada no processo de seleção de ativos para a formação de carteiras, é superior à medida de risco tradicional - a variância. Os resultados alcançados concordam com o que o referencial teórico existente sobre o assunto prevê, e também está de acordo com muitos dos trabalhos empíricos já realizados, especialmente com o estudo de Harlow (1991), que serviu de base metodológica para o trabalho aqui conduzido. Estes resultados indicam que, na amostra escolhida, as carteiras selecionadas pelo método momentos parciais apresentaram menor medida de risco momentos parciais tanto *ex ante* quanto *ex post*, sendo que neste último o período foi subdividido em dois subperíodos.

ABSTRACT

This work aims at studying a new risk measure, partial moments (PM), used in portfolio selection, to see if it is superior to the traditional risk measure - variance. PM do not mind with returns around the mean, like variance, but returns around the mean and beneath a given point, called critical point, that is the minimal return, or target return desired by the investor. The results presented are in complyance with the theory's forecast, and also with various empirical works already made, especialy the work of Harlow (1991), that based this work. These results indicate that, in the sample, the portfolios selected by partial moments have a lesser partial moments risk measure in the ex ante and the ex post tests.

1. INTRODUÇÃO

Cada vez mais no mundo, e em nosso país em especial, os investidores e as instituições em geral, tem-se preocupado em utilizar meios quantitativos de maximizar o retorno de seus investimentos. Em especial, nesta categoria genérica, tem-se os fundos de pensão, os quais tem-se proliferado no meio empresarial como uma maneira de proporcionar um complemento à aposentadoria normal dos trabalhadores, garantindo-lhes maior tranqüilidade no ambiente de trabalho, com uma conseqüente elevação da produtividade.

Várias empresas gestoras de fundos de pensão têm sido criadas para garantir que a contribuição de hoje possa render benefícios suficientes para a aposentadoria. Para isto, tais empresas dispõem de várias alternativas de investimento, as quais, espera-se, gerem rendimentos suficientes para alcançar este objetivo.

O problema, que servirá de base para este trabalho, é a realização da alocação mais eficiente dos recursos disponíveis, dados os pressupostos básicos sobre o objetivos do investidor, que é o de maximização de sua riqueza, ou de sua utilidade, quer seja este investidor um fundo de pensão, como exemplo, ou qualquer outro investidor.

Para isto, será discutida qual a regra de seleção de alternativas de investimento que melhor se adapte às exigências deste investidor, levando-se em consideração, principalmente, a medida de risco utilizada e a sua adaptação às regras de comportamento referidas.

A técnica quantitativa para a alocação de recursos mais conhecida no meio acadêmico foi criada por Harry Markowitz (1959), que consiste, basicamente, em um método matemático de programação quadrática que seleciona, dentre as possibilidades de ativos e combinações destes, aqueles que possuem o maior retorno para dado nível de risco, ou carteiras eficientes, possibilitando que cada investidor selecione sua carteira de investimentos de acordo com sua preferência pelo risco. Como variável representativa do retorno de cada ativo tem-se o retorno esperado para o ativo (representado pelo seu retorno histórico) e como medida de risco, é utilizada a variância dos retornos do ativo. A variância mede a dispersão dos retornos em torno da média.

Atualmente, existem outras técnicas que podem ser utilizadas na seleção de carteiras eficientes, quase todas sofisticações do modelo original de Markowitz, tais como o Modelo de Precificação de Ativos (CAPM - *Capital Asset Pricing Model*), desenvolvido paralela e independentemente por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), ou a Teoria de Precificação de Arbitragem (APT - *Arbitrage Pricing Theory*), criada por Ross (1976), ou também a Semivariância, cujo primeiro algoritmo que permitiu operacionalizar esta regra de seleção foi desenvolvido por Hogan e Warren (1974). O CAPM utiliza como medida de risco somente o risco sistemático de cada ativo, ou o seu beta, excluindo o risco não sistemático. Já o APT faz um levantamento de vários fatores de risco relevantes de precificação de cada ativo, e não somente um como a variância ou o beta, e seleciona aqueles que possuem o menor risco.

A técnica aqui analisada baseia-se na hipótese de que a distribuição de retornos dos ativos, que compõem a possibilidade de investimento, não é normal, ou que a função de utilidade do investidor não é quadrática. Se qualquer uma destas possibilidades for verdadeira, significa que a variância não é uma medida adequada de risco a ser utilizada na seleção de ativos para comporem uma carteira de investimentos (maior explicação das causas deste fato ver o capítulo 3 do presente trabalho).

Esta possível inadequabilidade da variância como medida de risco decorre do fato de que o cálculo da variância estabelece pesos iguais para os diversos retornos observados do ativo, não distinguindo se estes são maiores ou menores que a média, pois retornos acima da média podem ser considerados como não ocasionadores de risco, quando a média for vista como retorno alvo pelo investidor (maior explicação desta afirmativa no capítulo 5 do presente trabalho).

No entanto, como uma discussão preliminar sobre este assunto, poder-se-ia definir um retorno alvo mínimo com o qual o investidor estaria satisfeito, e definir-se como risco a dispersão dos retornos abaixo deste limite, desconsiderando-se os retornos acima do mesmo.

Esta última definição de risco possui muita semelhança, por exemplo, com aquela estabelecida por fundos de pensão, pois estas instituições captam recursos de indivíduos e necessitam remunerar este capital, investindo-o em ativos que rendam um certo retorno, que é o retorno atuarial, para fazer frente aos compromissos futuros com os indivíduos contribuintes.

Assim, verifica-se que a noção de risco para o fundo de pensão refere-se ao caso do retorno ocorrido ser menor que o retorno objetivo, neste caso o retorno atuarial. Desse modo, retornos acima do retorno objetivo não são desvios que se adaptem à noção de risco deste tipo específico de investidor. Conseqüentemente, a variância, a princípio, não seria a medida de risco adequada.

Mais concretamente, segundo pesquisas, abordadas no capítulo 6, a noção de risco do investidor assemelha-se mais ao chamado risco de perda, ou seja, o risco de perder uma determinada quantia, expressa pelo retorno, do que ao risco de variabilidade do retorno do ativo, como expresso pela variância. Deste modo, uma medida que possuísse as características acima descritas, além de mais aproximar-se da percepção de risco do investidor e ao comportamento do retorno dos ativos, adaptar-se-ia bem às necessidades de aplicações dos fundos de pensão, obrigados a aplicar em renda variável, mas interessados em obter rendimentos com pequeno risco de perda para garantir os benefícios futuros dos atuais contribuintes para o fundo. Esta medida existe e é chamada de *Momentos Parciais* (ver capítulo 5 para definição de momentos parciais).

1.1 Objetivos

Os objetivos estão vinculados às hipóteses a serem testadas. Assim, os objetivos deste trabalho são:

1. Verificar se há diferenças na alocação dos recursos (pesos) nas carteiras eficientes selecionadas pelos dois métodos, um com a variância como medida de risco e outro com o *Momentos Parciais*;

2. Verificar se a carteira selecionada por meio do método MMP mantém um retorno, ao longo do tempo, acima do retorno alvo;

3. Verificar se o desempenho prático do método MMP, ao longo do tempo, apresenta-se superior ao método da média-variância de acordo com os critérios de seleção do método MMP.

1.2 Hipóteses

As hipóteses testadas no presente trabalho são as seguintes:

H_0: A medida Momentos Parciais é uma medida de risco semelhante à variância;

H_1: A medida Momentos Parciais é uma medida de risco diferente da variância.

O termo "semelhante" foi deixado vago de propósito, pois há mais de um significado a ele imputado ao longo do trabalho:

a – "Semelhante" nos testes *ex ante* e *ex post*, significa que o semidesvio-padrão (raiz-quadrada da medida MP) calculado pelo método MP não é menor do que[1] o semidesvio-padrão calculado através do método MV.

[1] Escolheu-se o termo "menor do que", pois a medida MP seria mais útil do que a medida V no processo de seleção de carteiras (no sentido no qual este trabalho foca) se esta condição ocorresse.

b – "Semelhante" no teste *ex ante*, também significa que os pesos atribuídos aos títulos disponíveis pelo método MMP no seu processo de seleção são iguais aos pesos atribuídos pelo método MV no seu processo de seleção.

As hipóteses serão testadas dentro da metodologia selecionada e explicada no capítulo 6, e visam verificar se a medida de risco momentos parciais é melhor que a medida de risco variância, do ponto de vista da teoria financeira. Os resultados esperados poderiam ser do seguinte tipo:

1 - Se a medida *Momentos Parciais* for semelhante à variância, então as carteiras eficientes selecionadas utilizando-se a medida *Momentos Parciais* como medida de risco, serão as mesmas carteiras selecionadas utilizando-se a variância como medida de risco. Se isto ocorrer, então a hipótese nula será verdadeira, caso contrário a hipótese nula será falsa.

2 - Se a medida *Momentos Parciais* não for semelhante à variância, então, provavelmente, uma simulação, envolvendo carteiras selecionadas pelos dois métodos, média-variância e média-momentos parciais, apresentará, *ex post*, as carteiras com menor momento parcial, aquelas selecionadas pelo método média-momentos parciais (MMP).

Como motivação extra para a confecção deste trabalho tem-se o fato de que tal tipo de teste já foi realizado em outros mercados de capitais, ao passo que nunca se estudou este assunto no Brasil. Ressalte-se que os estudos já realizados (ver capítulo 5) não rejeitam a hipótese nula.

2. INCERTEZA

Este trabalho, fundamentalmente, trata de medidas de risco, que são a expressão quantitativa da incerteza do investidor quanto ao retorno esperado de um ativo. Neste capítulo será apresentado o conceito de incerteza, a sua relação com a probabilidade, além de uma abordagem diferenciada do comportamento de um ser humano racional. Esta abordagem distoa um pouco do esperado e pode justificar o uso de medidas de risco baseadas no retorno alvo. São apresentados, também, alguns estudos que procuram identificar medidas e noções de risco. Assim, o objetivo do capítulo abordar como o investidor costuma definir subjetivamente risco e incerteza, e como esta definição não se mostra compatível com a definição de variância.

2.1 Medidas de Riscos

Segundo Kritzman (1991, pág.16) “a incerteza surge do conhecimento imperfeito e de dados incompletos. Métodos para interpretar a informação limitada podem, assim, ajudar os analistas a medir e a controlar a incerteza.”

O autor sugere que as leis da probabilidade são utilizadas na tentativa de previsão do comportamento do mercado de capitais. Através de observações sistemáticas e contínuas sobre determinado *evento* e, supondo-se que ele tem comportamento semelhante ao apresentado por vários fenômenos físicos, i.é, tem distribuição normal, é possível fazer descrição próxima de seu comportamento passado, extrapolando para a realização de previsões. Outros tipos de distribuições de probabilidades também permitem extrapolação com o objetivo de previsão.

Quando um evento pode assumir diversos valores, diz-se que ele é uma *variável*. De acordo com o exemplo de Kritzman (1991-ver tabela 1) tem-se os retornos anuais do índice Standard & Poor’s 500 (uma variável):

Tabela 1: Retornos Anuais do Índice S&P500

Ano	Retorno	Ano	Retorno	Ano	Retorno	Ano	Retorno
1951	24,0%	1961	26,9%	1971	14,3%	1981	-4,9%
1952	18,4%	1962	-8,7%	1972	19,0%	1982	21,4%
1953	-1,0%	1963	22,8%	1973	-14,7%	1983	22,5%
1954	52,6%	1964	16,5%	1974	-26,5%	1984	6,3%
1955	31,6%	1965	12,5%	1975	37,2%	1985	32,2%
1956	6,6%	1966	-10,1%	1976	23,8%	1986	18,8%
1957	-10,8%	1967	24,0%	1977	-7,2%	1987	5,3%
1958	43,4%	1968	11,1%	1978	6,6%	1988	16,6%
1959	12,0%	1969	-8,5%	1979	18,4%	1989	31,8%
1960	0,5%	1970	4,0%	1980	32,4%	1990	-3,1%

Fonte: KRITZMAN (1991, p.17).

Assim, o evento "Retorno do Índice S&P500" assume diversos valores nos diferentes períodos analisados. Para se avaliar o comportamento deste índice (ou de qualquer outro evento), utilizam-se certas medidas que o descrevem de acordo com certos atributos. Se a distibuição de freqüência dos retornos for aproximadamente normal, utiliza-se de duas medidas tradicionais: (1) *média aritmética* para descrever o valor mais provável da variável e, (2) *variância* para descrever como esta variável está dispersa em torno da sua média. O uso destas duas medidas no caso de uma distribuição normal se justifica, pois esta pode ser completamente descrita através destes dois parâmetros (ou medidas, no caso) acima descritos.

O retorno médio (R) é calculado somando-se todas os valores da variável retorno (R_i) e dividindo-se pelo número de observações (N):

$$R = \frac{\sum_{j=1}^{N} R_j}{N} \tag{1}$$

A variância (σ_2) é calculada da seguinte forma:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} (R_j - R)^2}{N} \tag{2}$$

Quando carteiras de títulos são montadas o retorno da carteira (R_p) é a média do retorno dos títulos individuais. Para a variância somente isto não basta, porque a variância da carteira (σ_p^2) é afetada por movimentos diferentes na oscilação de cada título que possuem diferentes pesos na carteira (X_i e X_j). Sua fórmula é a seguinte:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}}{N} \tag{3}$$

Quando $i = j$, $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 = \sigma_i^2$, ou seja, a variância de i. Quando $i \neq j$ trata-se da covariância (σ_{ij}) entre o retorno dos ativos i e j, que mede o quanto os títulos se movem juntos. A raiz-quadrada da variância é o desvio-padrão, mais utilizado que a variância, pois está na mesma medida que o retorno, em percentual.

2.2 Julgamento, Preferência e Comportamento

Hogarth (1988) discorre sobre a teoria da utilidade esperada, a qual enuncia que as pessoas são capazes de expressar um *julgamento preditivo* e uma *preferência consistente*.

Julgamento Preditivo: Os julgamentos podem ser expressos através de probabilidades e estas podem se comportar de acordo com a teoria das probabilidades (instrumental desenvolvido para o tratamento da incerteza).

Preferência Consistente: Uma preferência consistente ocorre quando um processo de decisão não é modificado pela forma como o problema é apresentado. Há várias preferências consistentes: de acordo com o seu comportamento, as pessoas podem ser avessas ao risco, procurarem o risco ou serem neutras em relação ao risco. Isto já está previsto pela teoria das carteiras por Markowitz (1959). No entanto, estudos recentes realizados pelo próprio Hogarth (1988) afirmam que as pessoas não se comportam uniformemente, diferindo com relação ao risco de acordo com a sua percepção da realidade. Quando em frente à possibilidade de perdas, as pessoas escolhem a alternativa de risco, mas quando há a chance de ganhos, as pessoas escolhem a alternativa segura.

Kahneman & Tversky (1979) também asseveram que "esta tendência de não haver um comportamento uniforme dos indivíduos com relação ao risco, contribui para a aversão ao risco em escolhas envolvendo ganho certo, e preferência pelo risco em escolhas envolvendo perdas (p.263)."

Desse modo, medidas de risco que foquem sua atenção na possibilidade de perda, e não na dispersão total, tendem a retratar mais fielmente o comportamento humano.

Já Laughhunn e Crum (1980) pesquisaram sobre a atitude frente ao risco para 224 gerentes de empresas (tomadores de decisão) dos E.U.A., Canadá e Europa. Quando somente a perda, não envolvendo ruína (perda de tudo que se possui), é considerada, 71% dos gerentes procuram o risco para retornos abaixo do objetivo. Quando o risco de ruína foi introduzido, 65% (de 100%) das pessoas mudaram para a condição de avessos ao risco. Seus comentários, e de outros autores, levam à conclusão principal de que o objetivo do ser humano se comporta diferentemente do previsto pela teoria da utilidade, ou seja, este não expressa sua preferência em relação às alternativas que lhe são apresentadas de acordo com a riqueza final esperada, mas escolhe suas alternativas de acordo com um objetivo a ser alcançado. Esta última afirmativa resulta, na prática, em pesos diferentes para alternativas com diferentes perspectivas de ganhos ou perdas absolutas, mesmo que apresentem a mesma riqueza final esperada.

Outro estudo, baseado em um modelo desenvolvido por Fishburn (1977), equilibra-se em duas características: (1) um nível de aspiração de retorno; (2) a conseqüência relativa ao tomador de decisão de cair abaixo desta faixa. A importância relativa é definida por α em:

$$F\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - X)^{\alpha} dF(X) \qquad (4)$$

onde $F\alpha(t)$ é a medida de risco de uma alternativa de investimento. Para diferentes valores de α, tem-se diferentes pesos dados à dispersão dos valores em torno da média, e, por conseguinte, diferentes denominações para as medidas de risco que surgem. Se $\alpha = 0$, a medida de risco $R(t)$ denomina-se probabilidade de perda, se $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, as medidas de risco são a oportunidade de perda esperada e a semivariância, respectivamente.

Mao (1970) realizou vários estudos de caso onde discutiu a teoria e prática do orçamento de capital, basicamente entrevistando diversos gerentes de empresas americanas e averiguando seu comportamento com relação ao conceito de risco. Assim, considerando-se que o objetivo das decisões de investimento é maximizar o valor da firma, deve-se dotar o executivo financeiro com um critério de escolha entre modelos temporais do preço das ações. Embora nas entrevistas verifica-se que a variância seja a medida de risco do investimento geralmente aceita, há razões teóricas para a preferência da semivariância, e a evidência do comportamento e opinião dos executivos é mais consistente com o conceito de semivariância do que de variância.

Alguns executivos financeiros, por exemplo, quando lhes foi feita a pergunta sobre o que entendiam pelo termo "risco do investimento" responderam:

"Risco é a possibilidade de não alcançar a taxa de retorno alvo...Se você está 100% certo de alcançar o retorno alvo, então esta é uma posição com risco zero" (Mao, 1970, 353).

"Risco...refere-se primariamente aos desvios abaixo da taxa de retorno alvo" (Mao, 1970, 353).

"...Eu nunca me preocupo com o retorno do projeto quando está acima do retorno alvo. Risco é o que pode acontecer quando o retorno for menos" (Mao, 1970, 354).

Este capítulo serviu para se tomar conhecimento dos conceitos subjetivos de risco, para que no próximo capítulo, ao ser verificado o seu conceito teórico tradicional, seja possível se aperceber de algumas incoerências e inadequabilidades das medidas tradicionais de risco. A partir do final do capítulo 4, quando estas falhas tornarem-se evidentes, será comentada a regra ótima de seleção de carteiras - dominância estocástica - e, no capítulo 5, haverá a apresentação do conceito da medida de risco momentos parciais, que se revela muito boa substituta da dominância estocástica, a qual possui certos incovenientes, que serão discutidos nos capítulos 4 e 5.

3. SELEÇÃO DE CARTEIRAS: O MÉTODO TRADICIONAL[2]

Este capítulo discutirá os fundamentos da metodologia tradicional de seleção de carteiras, que utiliza a variância como medida de risco tradicional. Assim, os conceitos mais básicos da teoria financeira, tais como a teoria da utilidade, aversão ao risco e o uso da variância como critério de escolha, são apresentados. Esta discussão mais aprofundada é realizada com vistas a tornar claras as deficiências teóricas da medida tradicional de risco, a variância, e permitir a apresentação de alternativas mais coerentes com a teoria financeira.

3.1 A Teoria da Utilidade

"A economia é o estudo de como as pessoas e as sociedades escolhem a alocação de recursos escassos e distribuem a riqueza entre uns e outros e no tempo" (Copeland & Weston, 1988, 77). Assim, deve-se ter uma idéia clara de como as pessoas realizam as suas escolhas e quais são os objetos de escolha, a fim de ser possível produzir-se uma teoria de decisão ótima sob incerteza.

Inicialmente, é necessário entender-se como as pessoas se comportam, o que foi inicialmente desenvolvido por Von Neumann & Morgenstern (1947), através da Teoria da Utilidade ou Teoria da Escolha do Investidor[3]. Este trabalho começa pelo estabelecimento dos cinco axiomas da escolha sob incerteza, ou pressupostos de como o indivíduo se comporta na função de ordenar alternativas de risco; e o pressuposto de não-saciedade (ganância, ou preferir mais riqueza a menos, ou ainda, a utilidade marginal da riqueza é sempre positiva). Depois, a teoria parametriza os objetos de escolha como suas médias e variâncias e as mapeia através de comparações entre estes dois parâmetros que resultam em igual utilidade para o investidor. Estes mapas são curvas de indiferença para escolhas sob incertezas em um só momento.

---

[2]Este capítulo é baseado nos trabalhos de Copeland e Weston (1988), de Von Neumann e Morgenstern (1977) e de Elton e Gruber (1981).
[3]Para diferenciar da Teoria da Utilidade de escolhas no tempo, fundamental para o entendimento das taxas de juros. Aqui nos referimos à escolha entre alternativas de risco em um só momento.

3.1.1 Os Cinco Axiomas da Escolha sob Incerteza

Também conhecidos como *axiomas da utilidade cardinal*, formam o conjunto mínimo de condições para um comportamento consistente e racional. Uma vez estabelecidos, o restante deve seguir.

Axioma 1: Comparabilidade: Para todo o conjunto S, de alternativas incertas, um indivíduo pode dizer que o resultado x é preferido ao resultado y $(x \phi y)$ ou o indivíduo é indiferente entre x e y $(x \sim y)$.

Axioma 2: Consistência: Se um indivíduo prefere x à y e y à z, então x é preferido à z (Se $x \phi y$ e $y \phi z$ então $x \phi z$). Se um indivíduo é indiferente entre x e y e entre y e z, então é indiferente entre x e z (Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$).

Axioma 3: Forte Independência: Suponha um jogo onde um indivíduo tem uma probabilidade α de receber um resultado x, e uma probabilidade $(1-\alpha)$ de receber um resultado z, e que este jogo seja denominado como $G(x,z:\alpha)$. O axioma afirma que se o indivíduo é indiferente entre x e y, então ele é indiferente entre um primeiro jogo entre x com probabilidade α e um resultado mutuamente exclusivo z, e entre um segundo jogo, entre y com probabilidade α e o resultado z. Ou

Se $x \sim y$, então $G(x,z{:}\alpha) \sim G(y,z{:}\alpha)$ (5)

Axioma 4: Mensurabilidade: Se o resultado y é preferido menos que x, mas mais que z, então há um único α (uma probabilidade), tal que o indivíduo será indiferente entre y e um jogo entre x com probabilidade α e z com probabilidade $(1-\alpha)$. Ou

Se $x \phi y \phi\!= z$ ou $x \phi\!= y \phi z$, então existe um único α, tal que y ~ $G(x,z{:}\alpha)$ (6)

Axioma 5: Ranqueamento: Se as alternativas y e u ambas estão em algum lugar entre x e z, e podemos estabelecer jogos tal que um indivíduo é indiferente entre y e um jogo entre x (com probabilidade α_1) e z, enquanto também indiferente entre um segundo jogo entre x (com probabilidade α_2) e z, então se α_1 é maior que α_2, y é preferido à u. Ou

Se $x \phi y \phi z$ e $x \phi u \phi z$, então se $y \sim G(x,z{:}\alpha_1)$ e $u \sim G(x,z{:}\alpha_2)$, segue que se $\alpha_1 \rangle \alpha_2$, então $y \phi u$ ou se $\alpha_1 = \alpha_2$, então $y \sim u$. (7)

3.1.2 Desenvolvendo Funções de Utilidade

As funções de utilidade são decorrência dos cinco axiomas da escolha sob incerteza. Elas têm duas propriedades principais:

a. Preservação da ordem: Se medirmos a utilidade de x e esta for maior que a utilidade de y, $U(x) \rangle U(y)$, significa que atualmente x é preferido à y, $x \phi y$.

b. Pode-se ranquear combinações de alternativas de risco: Ou seja,

$$U[(G(x,y:\alpha)] = \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \qquad (8)$$

(x tem probabilidade α que pode ser maior que a probabilidade $1-\alpha$ de y, havendo, desse modo, um ranqueamento das alternativas).

Com estas duas propriedades, mais os cinco axiomas do investidor racional, e o pressuposto de que todo investidor prefere mais a menos, pode-se dizer que o investidor sempre procurará maximizar sua utilidade esperada da riqueza, que é representada matematicamente por:

$$E[U(W)] = \sum_i p_i U(W_i) \qquad (9)$$

o que representa o significado da teoria da escolha, ou seja, todos os investidores usarão a equação acima como sua função objetivo, isto é, calcularão a utilidade esperada da riqueza para todas as possíveis escolhas alternativas e escolherão o resultado que maximiza sua riqueza esperada.[4]

3.2 Aversão ao Risco

Suponha que uma certa função de utilidade tenha a forma logaritmica, ou seja:

$$U(W) = \ln(W) \qquad (10)$$

e que haja um jogo com 80% de chance do resultado \$5 ocorrer e 20% de chance do resultado \$30 ocorrer. O *valor atuarial do jogo* é seu resultado esperado, isto é, a riqueza esperada é

$$E(W) = 0{,}8(\$5) + 0{,}2(\$30) = \$10$$
$$U[E(W)] = 2{,}3 \qquad (11)$$

isto é, se um indivíduo pudesse receber \$10 com certeza, isto o proveria com 2,3 utils. A outra possibilidade é a utilidade do jogo:

[4] Funções de utilidade são específicas a cada indivíduo, não havendo como comparar uma função de utilidade com

$$E[U(W)] = 0{,}8U(\$5) + 0{,}2U(\$30) =$$
$$0{,}8(1{,}61) + 0{,}2(3{,}40)) =$$
$$1{,}97 \qquad (12)$$

Pelo fato do indivíduo receber maior utilidade do valor atuarial do jogo obtido com certeza, do que se jogasse o jogo em si, o indivíduo é risco-averso. As três possibilidades são:

Se $U[E(W)] \rangle E[U(W)]$, então o indivíduo é risco-averso (13)

Se $U[E(W)] = E[U(W)]$, então o indivíduo é risco-neutro (14)

Se $U[E(W)] \langle E[U(W)]$, então o indivíduo é risco-amante. (15)

Assim, se a função utilidade for estritamente côncava, o indivíduo será risco-averso; se for linear, será risco-neutro; se for convexa, será risco-amante.

Verifica-se que na maior parte dos casos os indivíduos tendem a ser risco-aversos (WALTER, 1967), ou seja, suas funções de utilidade são estritamente côncavas e crescentes. Matematicamente, isto significa duas coisas:

(1) Sempre preferem mais riqueza a menos (a utilidade marginal da riqueza é sempre positiva), $MU(W) \rangle 0$, e,

---

outra.

(2) A sua utilidade marginal da riqueza decresce quando eles tem mais e mais riqueza $(dMU(W)/dW) < 0$.

Uma definição mais específica de aversão ao risco foi feita por PRATT (1964) e ARROW (1971). Considere-se um indivíduo com uma quantidade atual de riqueza W e que é apresentado a um jogo atuarialmente neutro de $\$\tilde{Z}$[5]. Qual o *prêmio de risco* [6], $\pi(W,\tilde{Z})$, que deverá ser adicionado ao jogo para fazer o indivíduo indiferente entre o prêmio e o valor atuarial do jogo ? Como o prêmio de risco é igual à diferença entre $U[E(W)]$ e $E[U(W)]$, em utils, tem-se

$$E[U(W+\tilde{Z})] = U[W+E(\tilde{Z}) - \pi(W,\tilde{Z})]. \tag{16}$$

Utilizando-se uma aproximação através de uma séria de Taylor para expandir-se a função de utilidade da riqueza, nos dois lados da equação 16, temos:

lado direito $$U[W+E(\tilde{Z}) - \pi(W,\tilde{Z})] = U[W - \pi(W,\tilde{Z})] \tag{17}$$

desde que $E(\tilde{Z}) \equiv 0$, (18)

[5] Atuarialmente neutro significa que $E(\tilde{Z}) = 0$.

[6] Prêmio de risco é a quantidade máxima de riqueza que um indivíduo estaria disposto a desistir para evitar um jogo. Se um indivíduo tem uma riqueza atual de $10 e uma função de utilidade logaritmica, o quanto pagaria para evitar o jogo da equação 11 é o prêmio de risco. Neste caso, se não fizer nada, terá 80% de chance de terminar com $5 (uma queda de $5) e 20% de chance de acabar com $30 (um aumento de $20), sendo que a utilidade esperada do jogo é de 1,97 utils. O nível de riqueza que proporciona 1,97 utils é $7,17, mas receberá uma riqueza esperada de

ou seja, risco atuarial neutro, tem-se a expansão de Taylor do lado direito da equação[7]

$$U(W-\pi)=U(W)-\pi U'(W)+\text{termos ordem maior que }(\pi^2) \qquad (19)$$

o lado esquerdo da expansão de Taylor é

$$[U(W+\tilde{Z})]=E[U(W)+\tilde{Z}U'(W)+\frac{1}{2}\tilde{Z}^2U''(W)+\text{termos de ordem maior que }(\tilde{Z}^3)] \qquad (20)$$

$$=U(W)+\frac{1}{2}\sigma_Z^2U''(W)+\text{termos de ordem menor que }\sigma_Z^2. \qquad (21)$$

Os resultados acima ocorrem, pois é considerado que

$$E[U(W)]=U(W) \qquad (22)$$

a riqueza atual não é aleatória, ou seja, o valor esperado de algo que já existe é o seu próprio valor no momento atual.

$$E[\tilde{Z}]\equiv 0 \qquad (23)$$

\$10 (sua atual riqueza) se aceitar o jogo. Assim, dada uma função de utilidade logaritmica, o indivíduo está disposto a pagar até \$2,83 para evitar o jogo.

o risco é atuarialmente neutro, ou seja, seu valor esperado é zero, pois este representa o desvio de $U(W)$ que já é um valor esperado.

$$E[\tilde{Z}^2] = \sigma_Z^2 \tag{24}$$

porque $\sigma_Z^2 \equiv E[\tilde{Z} - E(\tilde{Z})]^2$, e $E[\tilde{Z}] \equiv 0$.

igualando os dois lados tem-se:

$$U(W) - \pi U'(W) + \Lambda = U(W) + \frac{1}{2}\sigma_Z^2 U''(W) + \Lambda \tag{25}$$

e, resolvendo para o prêmio de risco

$$\pi = \frac{1}{2}\sigma_Z^2 \left(-\frac{U''(W)}{U'(W)}\right) \tag{26}$$

que é a medida de Pratt-Arrow para o prêmio de risco.

Desde que σ_Z^2 é sempre positivo, o sinal do prêmio de risco será sempre determinado pelo sinal do termo em parênteses.

---

[7] Assume-se que o terceiro momento absoluto central de $\tilde{Z}$ é de ordem menor do que σ_Z^2.

Assim, tem-se a medida *absoluta de aversão ao risco* (ARA), que mede a aversão ao risco para um dado nível de riqueza:

$$ARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{27}$$

Observações empíricas mostram que ARA provavelmente cairá com um incremento na riqueza, pois um indivíduo com \$1.000.000 de riqueza terá menor aversão ao risco de uma perda de \$ 1.000 do que um indivíduo com nível de riqueza de \$10.000 ($\frac{d(ARA)}{dW} \langle 0$).

Multiplicando-se a medida de aversão absoluta ao risco pelo nível de riqueza, obtém-se a medida *relativa de aversão ao risco* :

$$RRA = -W\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{28}$$

Testes empíricos (Friend & Blume, 1975) também indicam para um RRA constante, mostrando que um indivíduo terá aversão ao risco constante para uma perda proporcional de riqueza, mesmo que a perda absoluta aumente com o nível da riqueza ($\frac{d(RRA)}{dW} = 0$).

Há vários tipos genéricos de funções que poderiam ser utilizadas como funções de utilidade, devendo-se selecionar aquela que se adequa às caracteírsticas acima citadas. Assim, por exemplo, a função quadrática tem sido amplamente utilizada[8]. Ela pode ser escrita como[9]:

- Função de utilidade quadrática: $U(W) = aW - bW^2$ (29)
- Primeira derivada: utilidade marginal: $U'(M) = a - 2bW$ (30)
- Segunda derivada: mudança em MU com relação a mudanças em W: $U''(W) = -2b$ (31)

Desse modo, para uma função de utilidade quadrática, ARA e RRA são:

$$ARA = \frac{2b}{a - 2bW} \tag{32}$$

$$\frac{d(ARA)}{dW} > 0 \tag{33}$$

$$RRA = \frac{2b}{(a / W) - 2b} \tag{34}$$

$$\frac{d(RRA)}{dW} > 0 \tag{35}$$

Assim, a função de utilidade quadrática não se comporta com as propriedades desejadas para uma função de utilidade.

---

[8]O uso mais freqüente é no embasamento teórico para o desenvolvimento da metodologia tradicional de seleção de carteiras.

Em um estudo realizado por Friend e Blume (Apud Copeland e Weston, 1988) sobre dados do Imposto de Renda sobre dividendos e carteiras, concluíram que os resultados são consistentes com ARA decrescente e RRA constante e igual a 2. Estas propriedades são consistentes com uma função potência de utilidade $U(W) = -W^{-1}$, com $a = -1$ (para $W > 0$).

Na próxima seção será discutido como deduzir-se o critério de média-variância para seleção de carteiras de ativos, partindo-se dos conceitos de utilidade e aversão ao risco discutidos nesta seção. Também se revisará como este critério é operacionalizado, que é o mesmo modo que foi empregado nos testes realizados neste trabalho e expostos no capítulo 7.

3.3 Utilizando-se a média e a variância como critérios de escolha

Se a distribuição conjunta dos retornos dos ativos for normal, então maximiza-se a utilidade esperada selecionando-se a melhor combinação de média e variância, em lugar da maximização da riqueza do investidor. Isto é explicado nos parágrafos abaixo relacionados.

---

[9] Para $W\langle a / 2b$.

A relação entre retorno e riqueza é demonstrada abaixo (caso se adote funções de utilidade que maximizem a utilidade esperada da riqueza do final do período - em um modelo de único período):

$$R_j = \frac{\tilde{W}_j - W_o}{W_o} \tag{36}$$

Se a riqueza do final do período (W_o) ao se investir no ativo j é normalmente distribuida com média $\tilde{W}$ e variância σ_W^2, então o retorno do ativo j também será normalmente distribuido com média

$$E(R_j) = [(E(W_j) / W_o) - 1] \tag{37}$$

e variância

$$\sigma_R^2 = (\sigma_W^2 / W_0^2)\,. \tag{38}$$

Assumindo-se que o retorno do ativo é normalmente distribuido com média E e variância σ^2, pode-se escrever a função de utilidade como[10]

$$U = U(R_j; E, \sigma) \tag{39}$$

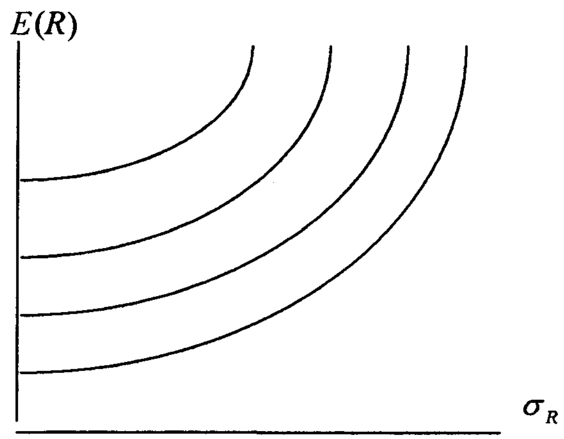
e a utilidade esperada é

$$E(U)=\int_{-\infty}^{\infty}U(R)f(R;E,\sigma)dR. \qquad (40)$$

Da mesma maneira, pode-se expressar as curvas de indiferença[11] de um investidor avesso ao risco, como uma função da média e da variância da distribuição dos retornos.

As curvas de indiferença seriam assim representadas:

Gráfico 1: Curvas de Indiferença



Estas curvas de indiferença são convexas e a taxa marginal de substituição entre risco e retorno ($\frac{dE}{d\sigma}>0$) é positiva. Ambas as provas encontram-se em Copeland e Weston (1988, pág. 97 e 98).

[10] A prova pode ser encontrada em Tobin (1958), também aplicando-se para qualquer distribuição de dois parâmetros, contínua e simétrica.

3.4 Métodos de Seleção de Carteiras Utilizando-se a Média e a Variância

Elton & Gruber (1981) demostram como é possível calcular-se a fronteira eficiente em diversos circunstâncias, quais sejam:

3.4.1 Vendas a descoberto permitidas e empréstimos à taxa livre de risco possíveis

Neste caso, existe uma única carteira (combinação) de ativos de risco (ações, por exemplo), a carteira ótima, que é preferida a todas as demais, e que se encontra sobre a fronteira eficiente[12]. Como empréstimos à taxa livre de risco são possíveis, combinações entre esta taxa e a carteira ótima, produzem carteiras mais eficientes do que carteiras da fronteira eficiente. Considerando-se o espaço cartesiano, com a abscissa sendo o risco, e a ordenada o retorno, combinações entre estes dois pontos (taxa livre de risco e carteira ótima) formam uma reta neste espaço, com origem na taxa livre de risco (R_f, por exemplo, 6% de retorno e 0% de risco (risco é o desvio-padrão dos retornos - σ_p), e término na carteira ótima (y, por exemplo, composto por 70% do ativo de risco A e 30% do ativo de risco B, sendo que a carteira tem 15% de retorno e 30% de risco). Assim, a reta ligando

[11] Uma curva de indiferença é o mapeamento (ou locus) de todas as combinações de risco e retorno que resultam na mesma utilidade esperada da riqueza, a qual o investidor será indiferente.

$R_f - y$ será a nova fronteira eficiente. Esta reta é aquela que possui a maior declividade (Elton & Gruber, 1981). Sendo assim, a função objetivo refere-se a maximizar:

$$\theta = \frac{R_{\tilde{p}} - R_f}{\sigma_p} \quad (41)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \quad (42)$$

Para resolver este problema, pode-se começar fazendo-se R_f como R_f vezes 1:

$$R_f = 1R_f = (\sum_{i=1}^{N} X_i) R_f = \sum_{i=1}^{N} X_i R_f \quad (43)$$

Fazendo-se a substituição na função objetivo, tem-se:

$$\theta = \frac{[\sum_{i=1}^{N} X_i (R_i - R_f)]}{[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}]} \quad (44)$$

[12]Fronteira eficiente é o conjunto de carteiras que possuem o máximo retorno para um dado nível de risco, ou o mínimo retorno para um dado nível de retorno.

Utilizando-se o cálculo como forma de se encontrar o máximo desta função, é necessário resolver-se o seguinte sistema de equações simultâneas homogêneas:

1. $\dfrac{d\theta}{dX_1} = 0$

2. $\dfrac{d\theta}{dX_2} = 0$

N. $\dfrac{d\theta}{dX_N} = 0$ (45)

Reescrevendo a função de outra maneira:

$$\theta = [\sum_{i=1}^{N} X_i (R_i - R_f)][\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}]^{-1/2} \tag{46}$$

derivando-se θ como em Elton & Gruber (1981,apêndice B), obtém-se a seguinte função:

$$[\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i (R_i - R_f)}{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}} [X_k \sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} X_i \sigma_{kj}] + [R_k - R_f) = 0 \tag{47}$$

definindo-se λ como

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i(\overline{R}_i - R_f)}{\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}} \tag{48}$$

tem-se

$$-\lambda[X_k\sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} X_j\sigma_{kj}] + [\overline{R}_k + R_f] = 0 \tag{49}$$

multiplicando-se os termos nos colchetes por λ tem-se:

$$-[\lambda X_k\sigma_k^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} \lambda X_j\sigma_{kj}] + [R_k - R_f] = 0 \tag{50}$$

Como cada X_k é multiplicado por uma constante λ, pode-se definir uma nova variável $Z_k = \lambda X_k$, onde cada X_k é a fração para se investir em cada título e os z_k são proporcionais a estas frações. Assim, tem-se:

$$R_i - R_f = Z_1\sigma_{1i} + Z_2\sigma_{2i} + \text{K} + Z_i\sigma_{i2} + \text{K} + Z_{n-1}\sigma_{n-1} + Z_n + \sigma_{ni} \tag{51}$$

E a solução consiste em resolver-se o sistema simultâneo de equações exposto na fórmula (51) acima (Elton & Gruber, 1981, apêndice B).

3.4.2 Vendas a descoberto permitidas, mas empréstimos a taxa livre de risco não permitidos

Neste caso a fronteira eficiente será composta somente de títulos de risco. Considerando-se o exposto no primeiro parágrafo do item 3.4.1, equação 51, a metodologia consiste em, inicialmente, resolver-se duas destas equações, cada com uma dada taxa livre de risco (qualquer uma), a fim de encontra-se o coeficiente de correlação (σ_{ij}) entre estas duas carteiras fictícias. Como a fronteria eficiente, para o caso das restrições impostas pelo enunciado do item 3.4.2, é uma combinação convexa de qualquer duas carteiras eficientes (Elton & Gruber, 1981), monta-se a fronteria eficiente por meio de combinações lineares entre as duas carteiras eficientes encontradas.

3.4.3 Empréstimos à taxa livre de risco permitidos, mas vendas a descoberto não permitidos

Neste caso é necessário maximizar

$$\theta = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \qquad (52)$$

sujeito a

$$(1)\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \tag{53}$$

$$(2)\ X_i \geq 0 \qquad \text{para todo } i\ . \tag{54}$$

3.4.4 Empréstimo à taxa livre de risco e vendas a descoberto não permitidas

$$\text{Minimizar} \qquad \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \tag{55}$$

Sujeito a

$$(1)\ \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \tag{56}$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{N} X_i R_i = R_p \tag{57}$$

$$(3)\ X_i \geq 0 \qquad \text{para todo } i\ .$$

Assim, pode-se observar que a seleção de carteiras baseada na média e na variância, originada por Markowitz (1959), e que suscitou muitos outros trabalhos posteriores, possui um desenvolvimento teórico elegante e muito bem trabalhado. Porém, também é possível observar que esta teoria está embasada em alguns poucos pressupostos acerca do comportamento humano e de suas preferências. Como exposto ao longo do capítulo, nem sempre estes pressupostos representam a realidade, e em muitos casos pode haver grandes distorções nos resultados desejados e naqueles apresentados pela teoria tradicional de seleção de carteiras. Desta forma, estudos tem sido realizados visando a procura de alternativas. A explanação de algumas das soluções encontradas são o objetivo dos próximos capítulos.

4 DOMINÂNCIA ESTOCÁSTICA[13]

Segundo BAWA (1975, 95) "A tomada de decisão sob incerteza pode ser vista como escolhas entre distribuições de retornos, e o indivíduo escolhe entre estas de acordo com um conjunto consistente de preferências". Ainda segundo o autor, Von Neumann e Morgenstern (1967) demonstraram que um indivíduo escolhe as alternativas que maximizam a utilidade esperada dos retornos, sendo a função de utilidade determinada, através de uma transformação linear, pelas preferências individuais.

Mas, na maioria das situações não é possível tal seleção, pois a informação completa sobre o conjunto de preferências de um indivíduo, e por consequência sua função de utilidade, não estão disponíveis.

[13] Este capítulo está baseado nos trabalhos de Bawa (1975), Copeland e Weston (1988) e Porter (1974).

Assim, somente com a informação parcial de que a função de utilidade de um indivíduo pertence a um certo conjunto de funções (quanto mais restrições ao conjunto de funções de utilidade, menor será o conjunto de funções "pré-qualificado", e mais facilitado ficará o trabalho), interessa-nos a regra de seleção ótima que minimiza o número de alternativas de funções, descartando destas, aquelas que são inferiores[14] (dominadas).

Assim, quanto mais restritiva a classe de funções de utilidade, menor será o conjunto das funções de utilidade que são admitidas como possíveis de serem (uma delas) a função de utilidade do investidor, e assim, mais útil será para aplicações práticas (pois haverá um menor número de possíveis funções do investidor para a qual uma regra geral de seleção de carteiras é a regra ótima). No entanto, mais restrições às funções de utilidade implicam que o conjunto admissível é relevante para um menor grupo de indivíduos e pode levar a uma grande perda de generalidade. Desse modo, interessa determinar o conjunto admissível de alternativas para a classe de funções de utilidade mais restritiva que seja consistente com fenômenos econômicos observados (para não ocorrer perda de generalidade).

Segundo Arrow (1971) e Pratt (1964), a observação de fenômenos econômicos indicam que as funções de utilidade dos indivíduos exibem:

[14] Para cada função de utilidade na classe restrita.

- aversão decrescente absoluta ao risco (quanto maior a perda de riqueza, maior a aversão ao risco),

- em menor grau, aversão ao risco relativa crescente (quanto maior a perda de riqueza em relação à riqueza total, maior a aversão ao risco).

Stiglitz (1970), levanta dúvidas sobre a segunda característica. Assim, a primeira característica parece representar a classe de funções de utilidade mais restritiva aceita por economistas, e na qual estamos interessados na regra de seleção ótima.

Para o problema de seleção de carteiras, que pode ser visto como uma representação canônica de certros tipos de problemas econômicos envolvendo tomada de decisão sob incerteza, Markowitz (1952) e Tobin (1958) propuseram, para investidores avessos ao risco, uma regra de seleção baseada na média e variância, na qual, de um dado conjunto de alternativas de investimento, o conjunto admissível é obtido descartando-se aqueles investimentos com menor média e maior variância que um membro do conjunto admissível.

Apesar da grande repercussão e aceitabilidade do método média-variância, é sabido que este é de limitada aplicabilidade, pois ele é a regra de seleção ótima somente se a função de utilidade é quadrática ou a distribuição dos retornos é normal. Como visto na Seção 3.2, a função quadrática não possui as propriedades desejadas para uma função de utilidade.

Lintner (1972) mostrou que, mesmo os retornos de carteiras, tendem a não ser normais. Adicionalmente, a taxação progressiva do fisco (alíquotas diferentes para diferentes níveis de renda) e o endividamento limitado das empresas (podem ir à ruìna, ou seja, a distribuição de probabilidade dos retornos tem uma cauda negativa menor que a distribuição normal), levam a uma distribuição dos retornos líquidos provavelmente *assimétrica*.

Assim, uma regra de seleção baseada na média e variância, não apenas carece de uma justificativa teórica, mas constitui-se somente em uma aproximação da regra de seleção, tendo a grande vantagem de apresentar menor trabalho computacional.[15]

Diversos trabalhos desenvolveram regras mais genéricas e precisas, conhecidas por *Dominância Estocástica*, apresentadas na próxima seção.

UFRGS
Escola

[15] Samuelson (1970) e Tsiang (1972) demostraram que a aproximação é boa somente quanto o "risco"dos retornos é pequeno em relação à riqueza total do indivíduo.

4.1 Dominância Estocástica de Primeira Ordem (FSD)[16]

Um ativo x, com distribuição acumulada de probabilidade $F_x(W)$ será estocásticamente dominante sobre o ativo y, com distribuição acumulada de probabilidade $G_y(W)$ para todo o conjunto de funções de utilidade não decrescentes se

$$F_x(W) \leq G_y(W) \qquad \text{para todo } W \tag{58}$$

$$F_x(W) < G_y(W) \qquad \text{para algum } W_i \tag{59}$$

Ou seja, a distribuição de probabilidade acumulada (definida na riqueza, W) para o ativo y sempre está à esquerda da distribuição de probabilidade acumulada de x. Economicamente, isto significa que, para qualquer nível de probabilidade, o retorno esperado para o ativo x é maior que o retorno esperado do ativo y.

A dominância estocástica de primeira ordem é a propriedade de seleção ótima para todas as funções de utilidade crescentes, pois neste caso, esta regra garante que a utilidade esperada da riqueza oferecida por x sempre será maior do que a oferecida por y.

---

[16] Ver também os trabalhos de Quirk e Saposnik (1962), Fishburn (1964), Hadar e Russel (1969, 1971) e Hadar e Levy (1969).

4.2 Dominância Estocástica de Segunda Ordem (SSD)[17]

Em razão da propriedade de dominância estocástica de primeira ordem ser aplicável a um pequeno conjunto de distribuições de probabilidade e não considerar o fato de que a função de utilidade tem de ser não apenas crescente, mas também possuir utilidade marginal decrescente, pois os indivíduos apresentam aversão ao risco, foi desenvolvida por Hadar e Russel (1969, 1971) e Hanock e Levy (1969), uma nova regra ótima de seleção para estas condições, conhecida por *Dominância Estocástica de Segunda Ordem*.

Assim, o ativo x será estocasticamente dominante sobre o ativo y para todos os investidores avessos aos risco se

$$\int_{-\infty}^{W} [G_y(W) - F_x(W)]dW \geq 0 \qquad \text{para todo } W \qquad (60)$$

$$G_y(W_i) \neq F_x(W_i) \qquad \text{para algum } W_i \qquad (61)$$

Assim, para o ativo x dominar o ativo y para um investidor avesso ao risco, a área acumulada sob a distribuição de probabilidade acumulada de y deve ser maior que a área acumulada para x, abaixo de qualquer nível de riqueza.

[17] Ver também os trabalhos de Hadar e Russel (1969, 1971) e Hanock e Levy (1969).

4.3 Dominância Estocástica de Terceira Ordem (TSD)[18]

Whitmore (1970), além de considerar funções de utilidade crescentes e indivíduos avessos ao risco, que são as condições de restrição às funções de utillidade para a dominância estocástica de primeira ordem, adicionou a restrição de que a terceira derivada das funções de utilidade seja positiva, obtendo com isto a regra ótima de seleção para este caso, chamada *Dominância Estocástica de Terceira Ordem*. O racional econômico para que a terceira derivada seja positiva, é que isto implica aversão ao risco absoluta decrescente, o que é uma característica dos indivíduos verificada empiricamente (Ver Item 3.2).

Bawa (1975, 98) demonstra que, para toda a classe de funções de distribuição dos retornos dos ativos, e para a classe de funções de utilidade onde o indivíduo possui aversão absoluta ao risco decrescente, a dominância estocástica de terceira ordem é a regra de seleção ótima quando as distribuições dos retornos possuem médias iguais. Para distribuições dos retornos que não possuem a mesma média, a regra TSD é uma condição suficiente para a dominância, e uma média maior de uma distribuição dos retornos também é uma condição necessária para dominância. Assim, a regra TSD pode ser utilizada como uma aproximação razoável para a regra de seleção ótima para a classe de funções de utilidade que tem como característica aversão ao risco absoluta e decrescente.

---

[18] Ver também o trabalho de Whitmore (1970).

Nota-se que nos casos em que a distribuição de probabilidades é normal a dominância estocástica de primeira ordem se reduz à regra de seleção média-variância, mas nos outros casos, mesmo com outras distribuições de dois parâmetros, a SSD e a média-variância resultam em diferentes conjuntos admissíveis. Assim, demonstrou-se que a propriedade de dominância estocástica é a propriedade ótima para a seleção de carteiras e, no capítulo a seguir, será demonstrado que a regra MMP é a regra que possui um bom balanceamento entre a dominância estocástica (melhor propriedade) e a variância (mais simples), não possuindo as falhas da variância.

5. MÉTODO DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS MÉDIA-MOMENTOS PARCIAIS (MMP)

Neste capítulo tratar-se-á inicialmente da ligação entre os conceitos de dominância estocástica e momentos parciais (como explicado mais adiante, em detalhes, momentos parciais é uma medida de risco, que em conjunto com a média, formam uma regra de seleção de carteiras, assim como a média e a variância). Após serão apresentadas as pesquisas já realizadas sobre o assunto momentos parciais (preferencialmente teóricas), e na última seção constarão pesquisas empíricas sobre o assunto.

5.1 Dominância Estocástica e Momentos Parciais.

As regras ótimas de seleção (FSD-Dominância Estocástica de Primeira Ordem e SSD-Dominância Estocástica de Segunda Ordem) necessitam de comparação aos pares e de completo conhecimento de toda a função de distribuição dos retornos das carteiras que podem compor uma carteira ótima. Assim, estas regras são complexas e para aplicações práticas são necessários algoritmos eficientes para se obter o conjunto admissível de funções de distribuição. Bawa (1975) desenvolveu um algoritmo útil nestes casos. Mas este algoritmo requer que o conjunto de alternativas sendo considerado esteja pré-especificado e seja finito. Assim, para problemas como orçamento de capital, onde o número de alternativas é finito, o algoritmo pode ser utilizado para se obter o conjunto eficiente. Para certos tipos de problemas, como o problema da seleção de carteiras, não apenas as alternativas iniciais, mas todas combinações lineares destas são possíveis alternativas de escolha disponíveis para o indivíduo. Assim, mesmo para um número finito de alternativas iniciais (por exemplo, n ativos iniciais do mercado acionário), o número possível de alternativas a ser considerado é infinito.

No entanto, Bawa (1975), em seu teorema número 7 mostrou que a propriedade de dominância estocástica de terceira ordem implica dominância na regra *Média- Momentos Parciais* (MMP). A regra MMP é uma aproximação da regra TSD (Dominância Estocástica de Terceira Ordem) e, assim, a regra ótima para toda a classe de funções de utilidade com risco absoluto decrescente.

Como a regra MMP usa uma condição necessária para a dominância, o conjunto admissível selecionado pela regra MMP está contido no conjunto admissível selecionado pela regra TSD. A teoria sugere o uso da regra MMP ao invés da regra média-variância, como uma aproximação da regra TSD, e, então como a regra de seleção ótima para toda a classe de funções de distribuição de retornos de ativos, pois possui uma aproximação à TSD bem maior. E a complexidade da regra TSD sugere o uso da regra MMP no lugar daquela.

Esta regra de seleção, ou medida de risco, caso se considere somente a medida *Média-Momentos Parciais* assume a seguinte forma genérica (Stone, 1973, pág. 677):

$$MP(W_o, k, A) = \int_{-\infty}^{A} (W - W_o)^k \, dF(W) \qquad (62)$$

onde

$MP =$ Medida Momentos Parciais

$W =$ Riqueza futura, uma variável aleatória.

$W_o =$ Um nível de referência de riqueza de onde os desvios são medidos.

$F(W) =$ Função de distribuição de probabilidades acumulada.

$k =$ A potência na qual os desvios na riqueza do nível de referência são elevados (assim, k é a medida do impacto relativo de grandes e pequenos desvios).

$A =$ É um parâmetro de faixa que especifica que desvios serão incluídos na medida de risco.

No caso da medida *Momentos* Parciais, considera-se somente os retornos abaixo do retorno alvo ou nível de referência. Vários estudos já foram realizados sobre esta medida de risco. Neste capítulo apresentaremos alguns.

5.2 Pesquisas realizadas

Price, Price e Nantell (1982) comentam sobre Bawa (1975) o qual desenvolveu um raciocínio para se utilizar a dominância estocástica em lugar da média-variância, que só é teoricamente correta em condições muito restritivas com relação à (i) forma da distribuição de retornos e (ii) forma da função de utilidade do investidor[19].

Os autores procuram relacionar MMP com o modelo de MV e depois investigam empiricamente a relação entre as duas medidas. Por último, desenvolvem um modelo de equilíbrio para a regra MMP. Esta é definida por:

[19] A média-variância requer que a distribuição de retornos seja normal *ou* a função de utilidade seja quadrática.

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f]\frac{CMPR_f(R_m,Ri)}{MPR_f(R_m,R_m)} \qquad (63)$$

onde:

- $MPR_f(R_m) = MP$ dos retornos abaixo da taxa livre de risco sobre a carteira de mercado;

- $CMPR_f(R_m R_i) = MP$ abaixo da taxa livre de risco sobre a carteira e o título i =

$$i = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{R_f}(R_m - R_f)(R_i - R_f)f(R_i, R_m)dR_m dR_i \qquad (64)$$

onde:

- R_f = Taxa livre de risco e taxa meta.

Ou seja, formou-se um CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) e encontrou-se um "beta" para a medida média-MP, assim como no caso da média-variância. Os autores concluem que, quando as distribuições de retornos são lognormais, Covariância/Variância é um substituto viesado da medida de risco mais geral, isto é, da medida CMP/MP. Ou seja, também no modelo de equilíbrio, a medida de risco oriunda da variância (o beta), não é uma medida de risco eficiente. Os viéses são os seguintes:

- Baixo risco sistemático dos títulos $\rightarrow Cov / V < CLPM / LPM$ (65)
- Médio risco sistemático dos títulos $\rightarrow Cov / V = CLPM / LPM$ (66)
- Alto risco sistemático dos títulos $\rightarrow Cov / V < CLPM / LPM$ (67)

No teste empírico realizado por Price, Price e Nantell (1982) foram selecionados 6 períodos de 7 anos cada, e classificados os títulos com baixo e alto risco sistemático. Com isto, verificou-se a existência de viés suficiente no mercado para promover diferenças significativas entre as duas medidas de risco sistemático.

Lee e Rao (1988) discutem sobre a decisão de seleção de carteiras em situação de incerteza, que pode ser considerada como uma escolha entre distribuições de probabilidades de retornos e tratada por regras de dominância estocástica, ou regras de MMP (*Média-Momentos Parciais*). Para o n-ésimo momento parcial de uma distribuição de retornos F, computada sobre o ponto t,

$$MP_n(t;F) = \int_y^t (t-y)dF(y) \qquad (68)$$

MP representa o valor esperado dos desvios dos retornos (variável aleatória y), ou a medida momentos parciais, pois em (68), t é o retorno alvo, e MP é a média dos desvios dos retornos observados, y, sobre o retorno alvo, t (o retorno que o indivíduo estaria satisfeito em conseguir).

Os autores também demonstram que:

(1) a seleção de carteiras utilizando Momentos Parciais e Média, com o retorno alvo igual ao retorno esperado do mercado ($\overline{R}_m$), mantém a propriedade de separação do CAPM, isto é, seleciona-se uma carteira ótima de ativos de risco, e, depois, realiza-se combinações entre esta e a taxa livre de risco[20].

(2) Nesta nova metodologia de seleção de carteiras, um ativo tem risco somente quando seu retorno (R_i) e o do mercado (R_m) caem abaixo do retorno alvo ao mesmo tempo. Ou seja, com $t = \tilde{R}_m$ (retorno esperado do mercado), um título contribui para o risco de mercado[21] somente se $R_i < \overline{R}_i$ e $R_m < \overline{R}_m$. Quando $R_i > \overline{R}_i$ e $R_m < \overline{R}_m$, o título i reduz o risco do mercado. Se $R_m > \overline{R}_m$, o título i não contribui para o risco do mercado em qualquer condição.

Os autores (Lee e Rao, 1988, p. 449) também estendem a medida de risco da equação (68) e a regra de seleção, por eles desenvolvidas, para um modelo de equilíbrio, calculando uma medida de risco sistemático (como Price, Price e Nantell

[20]Trabalhos anteriores, como o de Price, Price e Nantell (1982) permitiam esta separação apenas quando o retorno alvo era a taxa livre de risco.

[21] Contribuir para o risco de mercado no mesmo sentido que o Beta (β) contribui para o risco de mercado no CAPM.

(1982)). Desse modo, se $n = 2$, a medida $MP_2(\overline{R}_{m,}M)$ resume-se à semivariância, e sua medida de risco sistemático, calculada através do modelo de equilíbrio pelos autores desenvolvido, é a medida de rsico sistemático $CMP(\overline{R}_m, M; i)$ (ou, em palavras, co-semivariância entre os retornos do ativo i e o mercado), assim como na equação (63) de Price, Price e Nantell (1982).

Kraus e Litzemberger (1976) estendem o CAPM incorporando o efeito da assimetria na valoração de ativos, assim, também interessaram-se por desenvolver um modelo de equilíbrio que incorporasse este efeito, considerando o risco sistemático da assimetria (ou o terceiro momento da distribuição de probabilidades dos retornos dos ativos), o que faz com que o intercepto do CAPM seja a taxa livre de risco como previsto pela teoria, mas não alcançado por teorias anteriores.

Os resultados do desenvolvimento do modelo, e de seu teste empírico, demonstraram que os investidores têm aversão à variância e preferem assimetria positiva, o que tende a refutar o uso de funções de utilidade quadráticas como uma base para valoração de ativos. Assim, foi encontrado um preço significativo da assimetria sistemática, e o seu preço tem o sinal previsto.

Contestando o trabalho de vários autores a respeito da não utilidade do método da média-variância para seleção de carteiras Tsiang (1972), sugeriu que esta pode ser uma boa aproximação para pequenos tomadores de risco, ou seja, investidores cautelosos que normalmente assumem pequenos riscos com relação a sua carteira total. No entanto, para maiores tomadores de risco, empreendedores que regularmente arriscam uma grande proporção de suas riquezas, esta medida deveria ser abandonada.

Adicionalmente, Tsiang (1972) esclarece a importância da preferência por assimetria para grandes tomadores de risco, a qual deveria ser considerada em problemas, tal como, incentivos em investimentos ou quando se considera ou efeito do imposto de renda nos retornos (o imposto de renda é progressivo e distorce a distribuição dos retornos dos ativos, afastando-as da distribuição normal).

Já Stone (1973), generalizou a medida de risco Momentos Parciais, estudando os efeitos e conseqüências de se variar os parâmetros da equação (62). Através de uma fórmula genérica, diversas medidas de risco conhecidas na literatura se tornam explícitas, apenas sendo necessário definir-se o valor de parâmetro, que assumirão valores diferentes para cada medida de risco. Também procura focar na explicação do significado dos parâmetros envolvidos na equação. Deste modo, a principal conclusão a que chega é que há três pontos que devem ser considerados na especificação de uma medida de risco:

1 - Sobre quais pontos os desvios serão medidos ? (escolha de W_o);

2 - Qual é a importância relativa dos grandes desvios com relação aos pequenos desvios ? (escolha de k);

3 - Até que ponto da distribuição de retornos, os retornos serão contados ? (escolha de A).

Desse modo, partindo-se da equação (62), tem-se as diversas medidas de risco expressadas pela equação genérica:

$$- V = V(W) = \text{variância de } W = \int_{-\infty}^{\infty} (W - \overline{W})^2 df(W) \qquad (69)$$

onde

$\overline{W} = E(W) =$ valor esperado de W.

$$- SV = SV(W) = \text{ semivariância de } W = \int_{-\infty}^{W_o} (W - \overline{W})^2 df(W) \qquad (70)$$

$$- MAD = MAD(W) = \text{ desvio absoluto médio de } W = \int_{-}^{\infty} \left| W - \overline{W} \right|^k df(W) \qquad (71)$$

$$- \Pr(W \leq \overline{W}) = \int_{-\infty}^{W_o} df(W) = F(W_o). \qquad (72)$$

A primeira medida é a variância, onde os desvios da média são elevados ao quadrado (maior peso a desvios maiores) e o nível de referência no qual os desvios são medidos é a média. A segunda medida é a semivariância, que se caracteriza por contar como desvios da média somente valores abaixo desta. O desvio absoluto médio não distingue entre desvios positivos e negativos. Por último, a probabilidade de perda não leva em conta na medida de risco do nível dos desvios que ocorreram. Assim, vê-se que as diversas medidas de risco possuem uma origem comum, e qual deve ser adotada no processo de seleção de carteiras depende do critério adotado com relação ao comportamento do investidor frente ao risco, principalmente.

Para Fishburn (1977), o valor de A na equação (62) poderia refletir diversos valores, dependendo do contexto e das circunstâncias do tomador de decisão ou sua firma. Os mais comuns seriam: retorno de ruína (perda de todo o valor investido), retorno de lucro zero, retorno de um investimento livre de risco, ou um retorno que reflita uma atitude da firma em relação a um desempenho aceitável.

Já o parâmetro k, na mesma equação (62), supostamente reflete os sentimentos do tomador de decisão a respeito das conseqüências relativas (pessoais, corporativas, etc) do retorno realizado ser inferior à W_o por quantidades diversas (grandes e pequenos desvios). Se a preocupação principal é o fracasso em alcançar o objetivo sem particular importância com relação à quantidade (montante do desvio), então um valor pequeno para k é apropriado. No entanto, se pequenos desvios abaixo do retorno alvo são relativamente sem importância, quando comparados com grandes desvios, então um valor grande para k é melhor. Desse modo, $k = 1$ é o ponto que separa os comportamentos de aversão ao risco $(k \rangle 1)$ e procura pelo risco $(k \langle 1)$, com relação à medida Momentos Parciais (a prova do teorema que leva a esta conclusão está no apêndice da página 124 de Fishburn, 1977).

Em uma seção subseqüente, Fishburn (1977) observa a congruência entre a medida MP e a função de utilidade desenvolvida por Von Neumann e Morgenstern (1947). No entanto, o valor da função de utilidade ($U(W)$) depende do valor do retorno alvo (W):

- $U(W) = W$ para todo $W \geq W_o$ (73)
- $U(W) = W - y(W_o - W)^k$ para todo $W \leq W_o$. (74)

Comparando-se W x $U(W)$, verifica-se que as funções utilidade como acima definidas, são lineares (ou risco neutras) acima de W_o. Também foi constatado que os valores de k que levam a uma função de utilidade côncava, representando aversão ao risco, para todo $W \leq W_o$, são maiores que 1.

Fishburn (1977) também comenta vários trabalhos de outros pesquisadores a respeito da tentativa de determinar funções de utilidade. Utilizando os dados conseguidos pelos pesquisadores, tenta estimar o valor de k, constatando que realmente os indivíduos, em várias posições, tanto individuais como corporativas, apresentam um retorno alvo, que pode ser 0% ou não. Também constata que ocorre linearidade da função utilidade acima de W_o (o retorno alvo), em alguns casos, e em outros casos há tanto convexidade como concavidade.

Adicionalmente, Fishburn (1977, 123) desenvolve um teorema importante para a medida MP, dizendo que o conjunto eficiente selecionado pela regra MMP é um subconjunto do conjunto eficiente selecionado pela regra FSD para $k \geq 0$; é um subconjunto do conjunto eficiente de SSD para qualquer $k \geq 1$[22]; é um subconjunto eficiente de TSD para qualquer $k \geq 2$[23]. Assim, Fishburn (1977), extrapola os resultados de Porter (1974), que havia avaliado somente a comparabilidade de MMP e SSD. Desse modo, os resultados alcançados pela medida MMP, como utilizados neste trabalho, ou seja, elevando-se ao quadrado os desvios dos retornos da taxa alvo, fazem parte da regra ótima de seleção de carteiras, isto é, a TSD, além de refletirem um comportamento de aversão ao risco do investidor $(k \rangle 1)$.

Foi desenvolvido por Hogan e Warren (1972), um método de formação de fronteiras eficientes, utilizando-se a semivariância como medida de risco[24], mais tratável em termos computacionais que os métodos tradicionais. Para isto adota um modelo discreto, isto é, pressupõe-se que os retornos da carteira podem assumir um número finito de valores.

---

[22] Exceto quando $\mu(F) = \mu(G)$, ou seja, a média da distribuição de probabilidades dos retornos do ativo F for igual à média da distribuição de retornos do ativo G; e $F_k(W_o) = G_k(W_o)$, ou seja, a k-ésima integral da distribuição F até o ponto W_o, for igual à k-ésima integral da distribuição G até o ponto W_o.

[23] Idem à nota 18.

[24] Semivariância é menos tratável matematicamente do que a variância. No entanto, a regra de seleção MMP, assim como a regra média - variância, é a regra ótima de seleção para uma função de utilidade com crescente aversão ao risco absoluto, também carecendo de limitada generalidade.

Citando Markowitz (1959), os autores argumentam que a semivariância considera as perdas como não desejáveis, enquanto a variância considera os extremos (ganhos e perdas). Quando se tem uma distribuição de probabilidades não simétrica, dar pesos iguais a ganhos e perdas não representa a melhor maneira de escolher as alternativas de investimentos disponíveis. Além disso, o tomador de decisão parece se comportar como se desejasse um retorno alvo, garantido, sendo o retorno maior considerado como potencial de ganho (*upside potential*), e refletido na média.

Hogan e Warren (1972) partem do trabalho de Mao (1970) que montou a fórmula da utilidade esperada para um investidor que escolhe suas carteiras considerando o retorno esperado e a semivariância:

$$U(R) = c + aR + b[min(0, R - t)]^2 \qquad (75)$$

onde: a, b e c são parâmetros a serem estimados, R é a variável retorno e t o retorno alvo.

Esta função de utilidade é quadrática para $R < t$ e linear para $R > t$, representando que o investidor exibe conservadorismo com relação a perdas e é neutro para retornos acima de t.

Se a função utilidade (75) for a adequada, então a variância não seria própria como medida de risco, mas a semivariância. Desse modo, o autor procura derivar uma fórmula para a semivariância. Assim, ele demonstra que $S_t(X)$ (semivariância) é convexa e, se $E(r \times r) < \infty$, então $S_t(X)$ é continuamente diferenciável e

$$\nabla S_t(X) = 2E([min(0, r \times x - t)]r)^{25} \tag{76}$$

e, considerando que r pode ser qualquer valor em um conjunto finito de valores $\Gamma^k, k = 1,2,3\ldots,k$, cada um com probabilidade p_k, então:

$$E(r \times x) = \sum_{k=1}^{k} p_k \sum_{j=1}^{n} r_j^k \times x_j \tag{77}$$

que representa o retorno esperado da carteira,

$$S_t(X) = \sum_{k=1}^{k} p_k [min(0, \sum_{j=1}^{n} r_j^k \times x_j - t)]^2; \tag{78}$$

e que representa a semivariância esperada,

$$\nabla S_t(X) = 2\sum_{k=1}^{k} p_k [min(0, \sum_{j=1}^{n} r_j^r \times x_j - t)] \times r^t \tag{79}$$

[25] A prova do teorema pode ser encontrada no Apêndice 2 de Hogan e Warren (1972, pág.1894).

Este caso especial do modelo, pois *r* assume valores finitos, foi utilizado no desenvolvimento de um procedimento computacional de cálculo da fronteira eficiente *Média x Semivariância*.

Para se calcular a fronteira eficiente, varia-se λ, obtendo-se todas as soluções para o problema abaixo

$$MinS^{t}(X) - \lambda E(r \times x) \qquad (80)$$

$$x \varepsilon X$$

Hogan e Warren (1972) encontram as soluções aproximadas para a fronteira eficiente através da equação 80 com um número de diferentes valores de λ. Assim, 80 torna-se um problema de programação convexa[26], o qual pode ser resolvido por vários métodos, um dos quais desenvolvido no artigo.

Choobineh e Branting (1986) argumentam que a variância considera que grandes desvios positivos da média são tão desejáveis quanto grandes desvios negativos, pois ambos são elevados ao quadrado. Desde que a maioria dos investidores são avessos a retornos menores que um certo retorno alvo, e não com relação a suplantação de uma meta, a variância não é consistente com o

[26] Programação quadrática quando a função objetivo é convexa. Neste caso a função objetivo é MP, que deve ser minimizada. A prova de que $S_T(X)$ é convexa encontra-se no apêndice 2 de Hogan e Warren (1972, pág. 1874).

comportamento do investidor. Neste caso, a semivariância mede o risco de queda, sendo que modelos MMP são sensitivos à assimetria da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória (diferente número de desvios positivos dos desvios negativos), o que não acontece com a média-variância.

No entanto, a determinação da semivariância (SV) não é trivial, pois requer o completo conhecimento ou uma aproximação discreta da função densidade de probabilidade. O artigo formula uma expressão para SV que requer somente dados de média, variância e probabilidade cumulativa abaixo de um valor crítico. A equação é a seguinte:

$$ASV_h = [p^{1/2}(h-\mu) + (1-p)^{1/2}\sigma]^2 \qquad (81)$$

onde

ASV_h : Semivariância aproximada (*Approximate* SV) com limite de retorno H;

p: Probabilidade de que uma observação (x) seja menor que h;

μ: retorno médio do título

σ: variância do título.

ASV pode ser considerada como o quadrado de uma média ponderada entre o desvio-padrão e a diferença entre o retorno esperado e o valor crítico.

Testes são executados para testar ASV em diversas faixas de valores de h, uma variedade de formas de funções densidade de probabilidade, e utilizando-se a distribuição Beta[27] para isto (usou-se está distribuição por ser simples).

Os resultados demonstram que quanto maior a assimetria da distribuição dos retornos, maior a diferença entre ASV e SV. Também verificaram que ASV, em geral, é uma boa aproximação para o verdadeiro valor de SV_{μ}, para distribuições com inclinação negativa (ou uma cauda maior da distribuição para a esquerda desta).

Também foi observado que a escolha do valor crítico, h, impacta a robustez de ASV. Para valores de h maiores ou iguais à média, ASV_{μ} é uma boa aproximação para SV_{μ}. Quando h é menor que a média, os valores de ASV_{μ} tendem a ser maiores que os valores de SV_{μ}.

Josephy e Aczel (1993) estudam as propriedades de um estimador para o parâmetro semivariância como medida de risco, considerando que o risco de queda (*downside risk*) é o conceito de risco utilizado pelos investidores.

---

[27] A função densidade de probabilidade Beta é dada por:

Este estimador é o seguinte:

$$Et_n/c_n = (n-1)^2 \sigma_-^2 / n + E\sum_{i=1}^{n} l_i (y_i - \bar{y})^2 \qquad (82)$$

sendo

$$c_n = n/(n-1)^2 \qquad (83)$$

que resulta em

$$Et_n = \sigma_-^2 + n/(n-1)^2 \, E\sum_{i=1}^{n} l_i (y_i - \bar{y})^2 \qquad (84)$$

ou, em palavras, "a soma dos quadrados dos desvios em relação a uma média, daquelas observações abaixo da média, dividido por um coeficiente, escolhido para garantir que não existam desvios assintóticos" (Josephy e Aczel, 1993, p.267). Esta medida o autor chamou de baixa variância, e recomenda o seu uso quando a distribuição dos retornos for assimétrica.

O coeficiente de multiplicação é o seguinte:

$B(x;a,b) = \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ para $0 < x < 1$ onde a e b são parâmetros de forma e $1/B(a,b) = \Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)$.

$$n/(n-1)^2 \qquad (85)$$

que é o multiplicador padrão utilizado em parâmetros estatísticos, $1/(n-1)$, modificado pelo termo $n/(n-1)$, que foi apurado pelo autor e visa evitar desvios assintóticos, o que ocorre, pois este estimador é assintóticamente não viesado e fortemente consistente, possuindo as características de um estimador robusto.

5.3 Evidências empíricas quanto ao uso do método MMP

Codey e Modani (1977), utilizando uma amostra de 943 empresas com ações em bolsa, com retornos mensais entre Jan/66 e Jan/74, analisaram 11 medidas de risco. Depois de calcularem coeficientes de correlação de Spearman, realizaram uma análise de agrupamento, onde foram colocadas em um mesmo grupo: Desvio-padrão, desvio-semi-inter-quartil, faixa, semivariância, desvio-absoluto e limite inferior de confiança. A correlação entre a semivariância e o desvio-padrão foi de 0,98, o que sugere, segundo o autor, distribuições simétricas, as quais também mantêm-se no tempo.

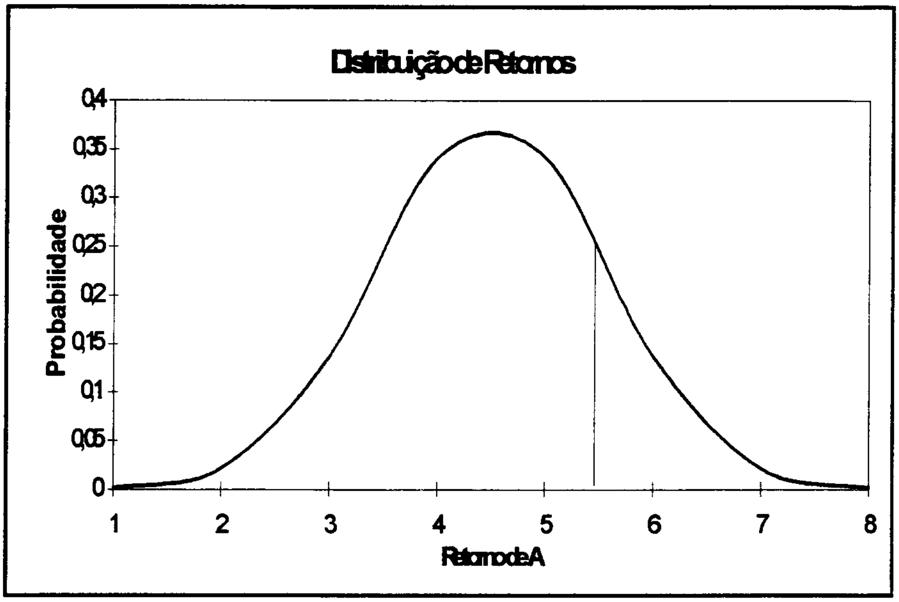
Adicionalmente, o autor inferiu que seria proveitoso realizar-se uma combinação de medidas de risco, a fim de se colocar no processo de seleção de carteiras a maior quantidade possível de informação.

Um modelo de equilíbrio de precificação de ativos que permite qualquer taxa de retorno alvo pré-especificada em um modelo de MMP foi deselvolvido por Harlow e Rao (1989). Várias medidas de risco como variância, semivariância, probabilidade de perda e seus respectivos modelos de precificação são casos especiais deste caso genérico. O modelo é testado através de uma metodologia de teste multivariada, sendo que ele não pode ser rejeitado, enquanto o CAPM o é. Além disso, a taxa de retorno-alvo implícita no modelo parece ser a média do mercado de ações e não a taxa livre de risco, utilizada em vários outros modelos. Adicionalmente, no modelo formulado por Harlow e Rao (1989), verifica-se o teorema da separação, só que a linha de mercado é não linear.

Quando $k = 2$, em sua fórmula genérica (semelhante à fórmula 62 deste trabalho), tem-se como resultado a semivariância, que tem o seu apelo intuitivo, mas é prejudicada, pois não existe uma teoria que explique como os investidores estabelecem o retorno-alvo.

Marmer e Ng (1993) definem *distribuição de retornos assimétrica* como uma distribuição em que a probabilidade de se encontrar um retorno muito alto é muito maior do que se encontrar um retorno muito baixo, ou vice-versa. Estas distribuições podem ocorrer, por exemplo, quando em uma carteira de ativos são incluídas opções de compra. No gráfico abaixo isto fica melhor representado:

Gráfico 2: Distribuição de Retornos



No gráfico 2, a área da distribuição de retornos à direita da linha vertical próxima ao retorno de A com valor de 5,5, é a única que interessa ao detentor de uma carteira. Isto ocorre porque a opção de compra trunca a distribuição dos retornos próximo à linha vertical comentada, tornando-a assimétrica. Nestes casos em que a distribuição dos retornos é assimétrica, a variância peca em poder bem avaliar o risco para o investidor.

Outro estudo empírico foi realizado por Harlow (1991). Foram analisados três casos distintos:

1 - Realizou-se uma alocação de recursos em ativos globais de mercados de renda fixa e variável de 11 países (Estados Unidos, Reino Unido, Japão, Alemanha, Suiça, França, Holanda, Suécia, Austrália, Canadá e Hong Kong). Os retornos utilizados compreenderam um período de 11 anos (Jan80 a Dez90).

Utilizando como retorno alvo 0%, o autor formou em gráfico dois tipos de fronteiras eficientes, de acordo com o tipo de medida de risco ($k = 1$ (desvio médio) e $k = 2$ (semivariância)). Utilizou-se de 60 meses de retornos históricos ($T = 60$) e o seguinte procedimento:

Selecione X (X é o vetor dos pesos de cada título na carteira) para minimizar: $MP_n(\tau; X)$

$$= \sum_{R_p < \tau}^{t} \frac{1}{T-1}(t - R_p)^n \qquad (86)$$

Sujeito a:

$n = 1 ou 2$

$$\{\sum_j X_j E(R_j) = R_p^*\} \text{ e } \tag{87}$$

$$\{\sum_j X = 1, X_j > 0\}$$

onde T é o número de observações e R_p^* uma restrição de retorno esperado.

Em ambos os casos, foi utilizado para R_p^* um retorno médio de um portfolio *benchmark*, consistindo de 60% de renda variável e 40% de renda fixa, baseados nos índices *Salomon-Russel Global Equity Index* (renda variável) e *Salomon Brothers World Government Bond Index* (renda fixa).

Como primeira conclusão verificou-se que o portfolio *benchmark* não é eficiente em qualquer dos dois casos ($n = 1,2$), pois apresentou menor risco:

Tabela 2: Comparação de média e risco entre benchmark e carteria eficiente

Medidas de Risco	n = 1 (desvio médio)	n = 2 (semivariância)
Benchmark (60 ações/40 *bonds* - 13,5% de retorno)	9,07 %	23,20 %
Portfolio eficiente com mesmo retorno que o *Benchmark*	4,53 %	12,40 %

Em seguida, testou-se o efeito que uma modificação na taxa de retorno (*t*) tem na magnitude do risco esperado. As taxas alvo utilizadas foram 0% (risco de perda do principal), 8% (taxa livre de risco) e 16% (retorno do mercado). Verificou-se que, à medida que as taxas alvo aumentam, a fronteira eficiente muda para a direita. Segundo Harlow (1991), "isto ocorre porque uma maior parte da distribuição de retornos está abaixo da taxa alvo especificada. O componente de risco abaixo desta taxa alvo, portanto, torna-se maior, aumentando o valor numérico da medida de risco" (pág.33). Também ocorreu um aumento na alocação para as ações. Pois, ao aumentar-se a taxa alvo, são selecionados ativos com maior retorno médio, a fim daquela poder ser atingida.

Outro resultado obtido por Harlow (1991) , para uma dada taxa de retorno alvo, as alocações de acordo com os dois métodos, MP_1 e MP_2, diferem substancialmente. Um exemplo é mostrado abaixo:

Tabela 3: Alocação dos recursos em ações nos dois métodos de MP

	MP1 - ações	MP2 - ações
τ=0% e R_P=15%	42,87%	32,83%

O método da MP_1 aloca maior parcela para as ações, com as diferenças diminuindo em cada final da fronteira eficiente. Para Harlow (1991) "as disparidades evidenciam a importância em se bem definir a adequada medida de risco" (pág.34).

Partindo para novas indagações, o autor afirma que

> "o benefício de se usar um esquema de risco assimétrico em relação ao tradicional método média-variância, deve ser determinado empiricamente. Se os retornos são aproximadamente normalmente distribuídos, a variância é uma medida de risco suficiente, e a diferença entre os dois métodos será pequena. Mas se os retornos não são simetricamente distribuídos em torno da média, mas possuem algum grau de assimetria, então a decisão de alocação de ativos pelo método do risco abaixo de um alvo pode ser significativamente diferente daquele obtido utilizando-se relações de média-variância" (pág.35).

Utilizando apenas o método da MP_2 (semivariância - porque, como a variância, é uma medida de segunda ordem), são calculados portfolios eficientes utilizando-se a MP_2-média e a variância-média como regras de seleção. Observou-se que a fronteira eficiente pelo método média-variância fica inserida dentro da fronteria eficiente pelo método MMP. Assim, estes últimos portfolios são mais eficientes, no sentido de que para um mesmo nível de retorno esperado, há maior proteção de risco abaixo de um certo ponto. Isto ocorre em toda a fronteira eficiente, com as maiores diferenças nos valores intermediários. Caso os retornos históricos utilizados para se computar as fronteiras eficientes fossem normalmente distribuídos, as duas coincidiriam. Como isto não ocorreu, evidencia-se a presença de assimetria na distribuição. A variância não é capaz de capturar a assimetria nos retornos, relativo ao retorno alvo.

Outra evidência sugerida deste exercício foi a maior alocação de recursos para os *bonds* no método MMP, com as maiores diferenças nos valores intermediários (Ver tabela 5 abaixo).

Avançando ainda mais em seu estudo, Harlow (1991) realizou um teste *ex post*. Ou seja, o autor selecionou carteiras pelas duas regras de seleção durante um certo período, sendo que ia a cada sub-período realizando uma "compra" fictícia destes ativos. Com isto, formou duas séries históricas de retorno de carteiras. Após, calculou a medida de risco MP_2 para estas duas carteiras, tentando verificar qual apresentava o menor risco. Mais especificamente, foram construídos portfolios utilizando-se ambas as técnicas de otimização. Utilizou-se cotações de fundos de um período de 60 meses (Jan85 a Jan90) como amostra para cálculo inicial dos pesos segundo cada técnica. Foi incluída uma restrição adicional, para que um maior número de carteiras fosse formada. A restrição de retorno (R_p^*) foi estabelecida como sendo o retorno esperado em cada um de um total de 11 *benchmarks* (por exemplo, um *benchmark* seria uma carteira composta de 0% de ações e 100% de títulos de renda fixa, ou 10% de ações e 90% de renda fixa), sendo que a medida MP_2 foi minimizada. A mesma restrição de retorno foi usada para a estratégia da variância. A taxa alvo foi estabelecida de 0%. Esta técnica de construção de portfolios foi aplicada a cada mês durante os próximos 72 meses (seguintes aos 60 meses iniciais) terminando-se em Dez90. A cada cálculo da composição das carteiras, foi realizado um "investimento" fictício nos ativos selecionados, que renderam um retorno até o mês seguinte. No mês seguinte, nova seleção de carteiras foi realizada, adicionando-se o mês mais recente e descartando-se o mês mais antigo. O processo segue adiante até Dez90. No final do processo, foram formadas duas séries de retornos de carteiras, selecionadas pelas duas regras de seleção. Os resultados estão abaixo demonstrados (Harlow, 1991, pág. 37):

Tabela 4: Desempenho das estratégias MMP e média-variância (1985-1990)

	Estratégia MMP(τ=0%)					Estratégia Média-Variância				
Benchmark (ações/bonds)	Retorno Geom. Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio -Padrão	Semidesvio-padrão	Retorno Mínimo	Retorno Geom.Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio-Padrão	Semidesvio-padrão	Retorno Mínimo
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0/100	8,86%	0,723%	5,38%	10,50	-4,24%	8,68%	0,709%	5,47%	10,73%	-4,37%
10/90	8,89	0,726	5,75	11,74	-4,67	8,63	0,707	5,89	12,15	-4,68
20/80	9,02	0,737	6,09	12,85	-5,08	8,55	0,703	6,37	13,84	-4,98
30/70	9,12	0,747	6,49	14,06	-5,45	8,69	0,716	6,87	15,53	-6,14
40/60	9,00	0,742	7,15	16,21	-6,69	8,74	0,724	7,44	17,39	-7,60
50/50	9,18	0,759	7,71	17,77	-7,92	8,66	0,723	8,13	19,70	-9,21
60/40	9,35	0,777	8,34	19,66	-9,09	8,50	0,716	8,94	22,50	-11,23
70/30	9,32	0,780	9,15	22,26	-10,89	8,18	0,699	9,80	25,42	-13,24
80/20	9,27	0,784	9,99	24,92	-12,65	8,08	0,699	10,68	28,37	-15,25
90/10	9,25	0,790	10,84	27,59	-14,42	7,90	0,694	11,62	31,37	-17,28
100/0	9,26	0,800	11,76	30,42	-16,26	7,68	0,688	12,54	34,42	-19,31

As colunas (5) e (10) mostram que o método MMP supera o método média-variância, providenciando maior proteção contra retornos abaixo do alvo (menor semidesvio-padrão[28] realizado). Além disso, em 10 dos 11 casos, o retorno mensal mínimo é menor para o método média-semivariância, o que confirma a redução do risco.

Os portfolios gerados pelo método da MMP também proporcionam maior retorno, em todos os 11 casos. Isto ocorreu devido à menor exposição ao risco abaixo da taxa alvo, pois foram evitados períodos de grande queda que prejudicariam a carteira, e o investimento foi focado em pequenos, mas seguidos retornos, que compostos por vários períodos, elevam o retorno.

A coluna (12) mostra o percentual das vezes que os portfólios MMP excederam os portfólios média-variância quando estes últimos retornaram menos que a taxa alvo. Isto ocorreu na maioria dos 72 meses, sendo que um teste t mostra que é significante em 6 dos 11 casos.

A Tabela 5 abaixo compara detalhes do mix de ativos que gerou a Tabela 1 anteriormente. A alocação média para os *bonds* é maior para o método da MMP que para o método da média-variância e é significativamente diferente de zero. Esta tendência de favorecer os *bonds* é ressaltada no maior porcentual de vezes em que a alocação para *bonds* no método MMP excede o método da média-variância, o qual chega a 90,3% (20/80), sendo significante para todos os conjuntos de portfólios.

Tabela 5: Alocação de Títulos de Renda Fixa para os Métodos da MMP e Média-Variância (1985-1990).

	Alocação para bonds (%) Média-Semiv (τ=0%)			Alocação para bonds (%) Média-Var			Comparação dos mix de ativos					
Benchmark (ações/bonds)	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Difemça entre médias	t-Stat	Dif.mínima	Dif.máxima	% Obs. BondsMMP > BondsMV	t-Stat
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0/100	84,3%	71,7%	94,8%	82,8%	69,7	95,7	1,53%	5,82	-4,93%	6,78%	80,6%	6,51
10/90	82,4	68,6	93,7	80,5	67,4	93,2	1,88	7,62	-3,87	6,98	87,5	9,55
20/80	80,1	65,5	92,1	78,1	62,3	92,1	1,98	8,63	-3,97	6,73	90,3	11,46
30/70	77,2	61,8	90,5	75,3	57,00	91,6	2,00	8,39	-4,07	6,82	88,9	10,43
40/60	74,2	57,1	88,8	72,1	51,6	91,1	2,13	8,18	-4,34	7,10	83,3	7,54
50/50	71,1	51,8	87,3	68,8	46,7	90,6	2,29	7,95	-4,67	7,96	80,6	6,51
60/40	67,9	45,1	86,6	65,5	41,8	90,1	2,43	7,78	-4,76	7,50	83,3	7,54
70/30	64,7	37,1	85,1	62,1	36,7	89,6	2,54	7,46	-4,83	7,94	83,3	7,54
80/20	61,4	29,2	84,1	58,8	29,8	89,0	2,62	7,00	4,90	8,62	79,2	6,05
90/10	58,0	21,2	83,6	55,3	22,7	88,5	2,68	6,70	-4,96	9,49	81,9	7,00
100/0	54,0	13,1	83,0	51,8	15,0	88,0	2,24	6,45	-5,57	8,58	79,2	6,05

[28] Semidesvio-padrão é a raiz-quadrada da semivariância ou do MP, sendo a contraparte do desvio-padrão.

Assim, vê-se que a medida *Média-Momentos Parciais* possui vantagens teóricas claras sobre o método tradicional Média-Variância. Adicionalmente, em testes realizados por diversos autores no exterior, as carteiras selecionadas por este método alternativo apresentaram-se mais eficientes que as carteiras selecionadas pelo método tradicional. Isto motiva a realização de tais testes no mercado nacional, o que será apresentado nos próximos capítulos.

6 MÉTODO

Nesta dissertação será realizado um estudo com base em Harlow (1991), pois aquele trabalho apresentou uma metodologia que permite comparações entre as duas medidas de risco: variância e MMP.

A amostra é formada por 51 ativos, sendo 50 ativos de renda variável (ações) e o CDI para renda fixa. O critério de seleção das ações baseou-se na liquidez, aqui definida como o número de observações semanais[29] da ação. Este critério foi utilizado para minimizar-se o erro no cálculo da medida MP neste e em futuros testes a serem realizados, já que para o cálculo da MP é necessário uma série histórica de todos os retornos da ação (e não apenas alguns parâmetros, como no critério Média-Variância, onde calculasse somente a média, a variância e as

[29] Refere-se ao número de vezes que uma ação foi transacionada em Bolsa de Valores.

correlações), e quando ocorre uma observação (retorno) faltante, é necessário estimá-lo.

O deflator das cotações dos títulos utilizado foi o dólar oficial (cotações estabelecidas pelo Governo Federal), o qual tende a acompanhar mais paralelamente os movimentos de inflação do que o dólar comercial (resultado do encontro das forças de oferta e procura de dólar), que tem forte influência dos movimentos da balança comercial brasileira. No entanto, ressalta-se que a escolha do deflator não apresenta um fator crucial na análise, pois o foco do estudo é a comparação entre dois métodos distintos de seleção de carteiras, onde ambos utilizarão a mesma base de dados (retornos deflacionados pelo dólar oficial, neste caso).

Os dados de cotações semanais dos títulos foram coletados no banco de dados Economática. O dia da semana utilizada para a coleta dos dados foi quarta-feira, pois este dia é eqüidistante entre segunda-feira e sexta-feira, ambos apresentando distorções dos retornos, sendo no primeiro caso o efeito segunda-feira, que apresenta baixos retornos e, no segundo, este dia apresenta altos retornos (Lemgruber, Becker e Chaves, 1988 – Costa, Newton, 1990 - Costa, Newton e Lemgruber, 1993).

A estimação do retorno, para o caso de negociações infreqüentes, foi realizada utilizando-se a média geométrica dos retornos vizinhos, ou como é conhecida a técnia - retormos uniformes. Esta técnica é adequada para o caso de ações com pequena proporção de dados infreqüentes (Maynes e Rumsey, 1993), sendo que neste estudo os dados de retorno faltantes totalizaram 1.158 observações ou 2% do total de dados coletados, que chegaram a 56.304 mil.

Como método de seleção das carteiras para todos os testes abaixo realizados, utilizou-se do aplicativo Solver da planilha eletrônica Excel da *Microsoft Corporation*. É preciso ressaltar que foi realizada uma averiguação preliminar da robustez do *software* de seleção. Para isso, foi formada a fronteira eficiente com 50 ativos, para dados mensais durante um período de 10 anos, tanto utilizando-se o Excel como utilizando-se um método de referência através do modelo desenvolvido por Zanette (1995) em sua dissertação. A comparação dos resultados permite afirmar que o modelo desenvolvido no Excel e o modelo de Zanette produziram fronterias eficientes iguais (diferenças somente a partir da segunda casa decimal e somente em alguns casos). Isto corrobora a utilização do Excel, mais rápido e flexível, como ferramenta de auxílio na condução do presente trabalho.

6.1 Teste Ex Ante

O objetivo deste teste foi verificar se há alocação diferenciada dos recursos entre ativos diferentes pelos dois métodos: média-variância e MMP.

Foram selecionados dois períodos de teste. O primeiro compreendeu o período de Janeiro de 1992 à Dezembro de 1992 para estimação dos parâmetros e Janeiro de 1993 à Dezembro de 1993 para a simulação da carteira, e o segundo foi de Julho de 1994 a Junho de 1995 para estimação dos parâmetros e Julho de 1995 à Junho de 1996 para a simulação da carteira. Estes períodos foram selecionados de forma a avaliar uma possível distorção ocorrida em decorrência do Plano Real. Os períodos foram de apenas 1 ano cada um devido à necessidade de dividir-se o teste em antes e depois do Plano Real, devido à necessidade de um período longo para estimação dos parâmetros (dois períodos também de 1 ano cada um), além de não haver intenção de recuar-se muito no tempo na coleta dos dados, pois os resultados do método *Média-Momentos Parciais* não podem ser generalizados, pois são válidos somente para a distribuição específica de retornos no qual foi realizado, e dados muito antigos poderiam distorcer a realidade mais atual do mercado de capital brasileiro.

Cada amostra continha 248 observações diárias das 50 ações mais negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo.

Para cada período foram definidas três taxas-alvo: 0% (risco de perda do capital), 6% (taxa livre de risco - poupança) e retorno do mercado médio do ano anterior (Ibovespa). Cabe lembrar que estas taxas-alvo foram as mesmas utilizadas por Harlow (1991), no trabalho que esta dissertação baseia sua metodologia. Além disso, estas três taxas-alvo poderiam representar três níveis diferentes de retorno requeridos por investidores com três níveis diferentes de aversão ao risco (perda do capital, risco do Governo e risco de mercado acionário) (Harlow, 1991). Além disso, para cada período (92 e 94/95) e cada taxa alvo (0%, 6% e mercado) foram selecionados dez portfólios.

Para cada portfólio não foi montada integralmente a fronteira eficiente, mas foram selecionados 10 pontos nesta fronteira eficiente (como em Hogan e Warren, 1972), pela maior simplicidade nesta etapa do teste. Estes pontos foram escolhidos da seguinte forma: foram encontrados os portfólios da fronteira eficiente com o maior retorno e o portfólio com a menor MP, e em seguida foram selecionados 8 pontos eqüidistantes em retorno destes dois portfólios. Em seguida, foi minimizada a respectiva medida de risco - variância ou MP, para cada portfólio. No total, foram realizadas 240 otimizações (12 meses x 10 pontos x 2 medidas de risco).

Após isto, foram comparadas as duas carteiras formadas para cada período, verificando-se se havia semelhança na sua composição em termos de ativos selecionados e alocação dos recursos para cada ativo.

Os resultados deste teste encontram-se nas tabelas 6 à 21 no capítulo 7 dos resultados.

6.2 Teste Ex Post

O objetivo deste teste foi verificar se os resultados alcançados no teste *Ex Ante* mantém-se quando submetidos a uma simulação.

Foram selecionados dois períodos de teste. O primeiro compreendeu o período de Janeiro de 1992 a Dezembro de 1992 e o segundo foi de Julho de 1994 a Junho de 1995.

Para cada período, foi estabelecido que 11 carteiras *benchmarks* seriam formadas, cada uma contendo uma proporção de ações (100% da carteira, 90% da carteira, etc) e uma outra proporção de renda fixa (0%, 10%, etc).

Para cada um dos 11 *benchmarks*, foram selecionadas duas carteiras eficientes uma utilizando-se o método da média-variância e outra para o método da MMP. Foi utilizado o período de 12 meses (ou 52 observações) para a seleção da primeira carteira eficiente, em cada um dos dois métodos e em cada um dos dois períodos. No método MMP foi utilizada como retorno alvo o retorno da taxa livre de risco[30], entendida esta como o retorno da caderneta de poupança. Cabe ressaltar que a cada nova estimativa de parâmetros, o mês mais atual foi incluída e o mês mais antigo foi excluído. Assim, formou-se as duas séries históricas, evitando que os parâmetros sejam testados sobre o mesmo período que foram estimados.

[30] Esta taxa livre de risco é a taxa atuarial que deve ser alcançada pelos fundos de pensão para os seus ativos, a fim de que estes possam cunprir seus compromissos futuros.

Assim, a primeira carteira *benchmark*, para cada método, foi formada inicialmente. A seguir, a carteira foi rebalanceada semanalmente, ou seja, a cada semana o processo de alocação para a seleção das carteiras eficientes foi repetido. Neste teste foram realizadas 3.476 otimizações.

Ao final do processo havia 78 carteiras eficientes selecionadas (uma para cada semana), para cada método para cada sub-período.

A seguir, foi calculado o retorno semanal de cada carteira teórica formada, multiplicando-se os pesos de cada ativo em cada carteira pelo respectivo retorno.

Assim, foi formada uma série histórica para cada método e para cada período.

O passo seguinte consistiu no cálculo dos retornos médio e geométrico, do desvio-padrão, da raiz-quadrada da MP (semi-desvio-padrão), além do retorno-mínimo no período. Isto foi realizado para cada uma das duas estratégias (média-variância e MMP), e para cada um dos dois sub-períodos. Os resultados destes cálculos estão nas tabelas 22 e 24 no capítulo 7 (Resultados).

Como complemento do estudo, e acompanhando o procedimento adotado por Harlow (1991), foi realizado um teste para averiguação se há diferença entre os dois métodos em relação à alocação dos recursos à renda fixa.

7. RESULTADOS

7.1 - Teste Ex Ante

Como primeiro experimento, foi realizada uma seleção de portfólios. Utilizou-se duas amostras - Janeiro de 1992 a Dezembro de 1992 e Julho de 1994 a Junho de 1995.

Os resultados para os dois períodos e três retornos-alvo são mostrados abaixo:

Tabela 6: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t=0%, Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,15%	0,24%	0,33%	0,42%	0,51%	0,61%	0,70%	0,79%	0,88%	0,98%
desvio-padrão diário	0,24%	1,21%	2,10%	2,85%	3,50%	4,12%	4,81%	5,54%	6,33%	7,16%
semidesvio-padrão	0,14%	0,70%	1,24%	1,67%	2,02%	2,33%	2,64%	2,99%	3,25%	3,52%
renda fixa	1,00	0,76	0,53	0,30	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,00	0,24	0,47	0,70	0,96	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 7: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t = 0%, Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,15%	0,24%	0,33%	0,42%	0,51%	0,61%	0,70%	0,79%	0,88%	0,98%
desvio-padrão diário	0,26%	1,37%	2,22%	3,06%	3,71%	4,27%	4,98%	5,74%	6,46%	7,16%
semidesvio-padrão	0,13%	0,70%	1,17%	1,58%	1,91%	2,24%	2,55%	2,88%	3,20%	3,52%
renda fixa	0,98	0,71	0,48	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,02	0,29	0,52	0,82	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 8: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t=6%, Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,98%	0,88%	0,79%	0,70%	0,61%	0,51%	0,42%	0,33%	0,24%	0,14%
desvio-padrão diário	7,16%	6,33%	5,54%	4,81%	4,12%	3,50%	2,85%	2,10%	1,28%	0,24%
semidesvio-padrão	3,54%	3,27%	3,00%	2,65%	2,34%	2,03%	1,68%	1,25%	0,77%	0,14%
renda fixa	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	0,30	0,53	0,80	0,99
renda variável	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,95	0,70	0,47	0,20	0,01

Tabela 9: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t = 6%, Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,98%	0,88%	0,79%	0,70%	0,61%	0,51%	0,42%	0,33%	0,24%	0,14%
desvio-padrão diário	7,16%	6,46%	5,74%	4,98%	4,27%	3,70%	3,10%	2,28%	1,31%	0,25%
semidesvio-padrão	3,54%	3,21%	2,89%	2,57%	2,25%	1,92%	1,63%	1,22%	0,70%	0,13%
renda fixa	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,28	0,56	0,79	0,98
renda variável	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,72	0,44	0,21	0,02

Tabela 10: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t=mercado(17,61%), Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,14%	0,24%	0,33%	0,42%	0,51%	0,61%	0,70%	0,79%	0,88%	0,98%
desvio-padrão diário	0,24%	1,46%	2,10%	2,85%	3,50%	4,12%	4,81%	5,54%	6,33%	7,16%
semidesvio-padrão	0,15%	0,79%	1,27%	1,70%	2,06%	2,36%	2,68%	3,02%	3,29%	3,56%
renda fixa	0,99	0,60	0,53	0,30	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,01	0,40	0,47	0,70	0,95	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 11: Teste Ex Ante nas condições: Jan92/Dez92, t=mercado(17,61%), Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,14%	0,24%	0,33%	0,42%	0,51%	0,61%	0,70%	0,79%	0,88%	0,98%
desvio-padrão diário	0,25%	1,48%	2,19%	2,99%	3,70%	4,35%	4,98%	5,74%	6,46%	7,16%
semidesvio-padrão	0,14%	0,77%	1,25%	1,68%	2,04%	2,34%	2,62%	2,91%	3,23%	3,56%
renda fixa	0,98	0,62	0,57	0,36	0,12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,02	0,38	0,43	0,64	0,88	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 12: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = 0%, Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,21%	0,31%	0,42%	0,52%	0,63%	0,73%	0,83%	0,94%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,59%	1,93%	3,12%	4,28%	5,99%	7,43%	8,67%	9,78%	10,80%	11,74%
semidesvio-padrão	0,32%	1,19%	1,97%	2,71%	3,67%	4,45%	5,11%	5,69%	6,20%	6,67%
renda fixa	1,00	0,48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,00	0,52	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 13: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = 0%, Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,21%	0,31%	0,42%	0,52%	0,63%	0,73%	0,83%	0,94%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,59%	1,93%	3,12%	4,28%	5,99%	7,43%	8,67%	9,78%	10,80%	11,74%
semidesvio-padrão	0,32%	1,19%	1,97%	2,71%	3,67%	4,45%	5,11%	5,69%	6,20%	6,67%
renda fixa	1,00	0,47	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,00	0,53	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 14: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = 6%, Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,21%	0,31%	0,42%	0,52%	0,63%	0,73%	0,83%	0,94%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,59%	1,93%	3,12%	4,27%	5,99%	7,43%	8,67%	9,78%	10,80%	11,74%
semidesvio-padrão	0,33%	1,20%	1,98%	2,72%	3,68%	4,46%	5,12%	5,70%	6,21%	6,68%
renda fixa	1,00	0,48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,00	0,52	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 15: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = 6%, Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,21%	0,31%	0,42%	0,52%	0,63%	0,73%	0,83%	0,94%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,59%	1,93%	3,12%	4,27%	5,99%	7,43%	8,67%	9,78%	10,80%	11,74%
semidesvio-padrão	0,33%	1,20%	1,98%	2,72%	3,68%	4,46%	5,12%	5,70%	6,21%	6,68%
renda fixa	1,00	0,47	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,00	0,53	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 16: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = mercado (21,34%), Estratégia Média-Variância

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,13%	0,24%	0,35%	0,47%	0,58%	0,69%	0,81%	0,92%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,90%	0,95%	2,43%	3,64%	5,29%	6,96%	8,36%	9,60%	10,71%	11,74%
semidesvio-padrão	0,52%	0,61%	1,55%	2,35%	3,72%	4,92%	5,96%	6,39%	7,17%	8,10%
renda fixa	0,66	0,84	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,34	0,16	0,72	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Tabela 17: Teste Ex Ante nas condições: Jul94/Jun95, t = mercado (21,34%), Estratégia Média-MP

portfólios	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
média diária	0,13%	0,24%	0,35%	0,47%	0,58%	0,69%	0,81%	0,92%	1,04%	1,15%
desvio-padrão diário	0,90%	0,95%	2,43%	3,64%	5,29%	6,96%	8,36%	9,60%	10,71%	11,74%
semidesvio-padrão	0,52%	0,61%	1,55%	2,35%	3,72%	4,92%	5,96%	6,39%	7,17%	8,10%
renda fixa	0,66	0,84	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
renda variável	0,34	0,16	0,72	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Verifica-se que em todas os seis casos (2 períodos e 3 retornos-alvo, ou tabelas 6 a 17) o método dos MP é superior ao método da variância no sentido de que ofereceu uma maior proteção quanto ao risco de um retorno abaixo dos 0%, 6% ou mercado. Isto pode ser visto diretamente nas tabelas, comparando-se a linha "semidesvio-padrão" para cada período e cada retorno-alvo. Neste caso, o semidesvio-padrão das carteiras selecionadas pelo método MMP sempre são menores que o semidesvio-padrão das carteiras selecionadas pelo método da média-variância (o que equivale a dizer que as medidas *Média-Momentos Parciais* e Média-Variância não são medidas iguais para a selação de carteiras, pois não apresentarm os mesmos resultados, o que motiva a realização do teste *Ex Post* concretizado adiante). Por exemplo, para 6% de retorno-alvo, no período de Jan 92 a Dez 92, para o retorno diário esperado de 0,70% (portfólio 4), o semidesvio-padrão mínimo foi de 2,57% (tabela 9), enquanto que para o portfólio ótimo segundo o método da variância, o semidesvio-padrão foi de 2,65% (tabela 8). Anualizando-se estes dados diários tem-se, 42,2% e 43,6%, confirmando as expectativas.

Para 6% de retorno alvo, no período de Jul94 a Jun95, para o retorno diário esperado de 0,52% (portfólio 4), o semidesvio-padrão mínimo foi de 2,71842% (tabela 13), enquanto que para o portfólio ótimo segundo o método da variância, o semidesvio-padrão foi de 2,71843% (tabela 12). Anualizando-se estes dados diários tem-se, 44,8391% e 44,8392%, o que também confirma a diferença entre os dois métodos só em que em grau muito menor que no período de teste anterior.

Adicionalmente, verifica-se que o desvio-padrão das carteiras selecionadas pelo método da média-variância é sempre menor que o desvio-padrão das carteiras selecionadas pelo método da MMP. Isto ocorre devido à definição de risco mudar em cada um dos dois métodos, o que leva a uma otimização de carteiras minimizando-se a medida de risco selecionada. No entanto, de acordo com o referencial teórico exposto anteriormente neste trabalho, o método MMP é superior ao método média-variância, no sentido de que o método MMP reduz o risco do retorno de uma carteira qualquer vir a ser inferior a uma determinada taxa alvo). Assim sendo, o fato comentado neste parágrafo não é contraditório ao exposto até aqui, nem ao resultado comentado no parágrafo anterior.

Abaixo (tabelas 18 e 19) são discriminados os pesos dos respectivos títulos que constituem a fronteira eficiente pelos dois métodos (variância e MP):

Tabela 18: Alocação de pesos pela Estratégia Média-Variância: Jan92/Dez92, t = 6%.

portfólios	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
America do Sul	0,00	0,01	0,11	0,10	0,06	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Duratex PN	0,00	0,03	0,02	0,04	0,04	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Inepar PN	0,00	0,04	0,07	0,11	0,17	0,27	0,40	0,57	0,78	1,00
Itaubanco PN	0,00	0,05	0,08	0,12	0,18	0,08	0,00	0,00	0,00	0,00
Met Barbará PN	0,00	0,02	0,05	0,10	0,16	0,24	0,32	0,36	0,22	0,00
Real PN	0,00	0,00	0,09	0,14	0,20	0,24	0,22	0,08	0,00	0,00
Unibanco PN	0,00	0,05	0,04	0,09	0,15	0,16	0,06	0,00	0,00	0,00
CDI	0,99	0,80	0,53	0,30	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 19: Alocação de pesos pela Estratégia Média-MP: Jan92/Dez92, t = 6%.

portfólios	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
America do Sul	0,00	0,00	0,00	0,00	0,19	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00
Duratex PN	0,00	0,02	0,04	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Inepar PN	0,00	0,04	0,08	0,12	0,19	0,31	0,46	0,61	0,79	1,00
Met Barbará PN	0,00	0,00	0,00	0,00	0,03	0,06	0,05	0,02	0,00	0,00
Real PN	0,00	0,06	0,13	0,19	0,23	0,30	0,32	0,32	0,21	0,00
Sharp PN	0,00	0,04	0,07	0,11	0,10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Unibanco PN	0,01	0,05	0,12	0,22	0,26	0,28	0,18	0,05	0,00	0,00
CDI	0,98	0,79	0,56	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Nota-se que há diferença entre os títulos incluídos em cada carteira. O método da MMP exclui apenas um título (Itaúbanco PN, constante na tabela 18, mas não na tabela 19) e inclui também apenas um título (Sharp PN, constante na tabela 19, mas não na 18).

Também há diferença nas alocações de recursos entre cada título, mesmo que este se encontra nas duas carteiras.

Para o período de 1994 também ocorrem diferenças em termos de pesos alocados para cada título e de constituição da carteira em termos de ativos inclusos na mesma.

Tabela 20: Alocação de pesos pela Estratégia Média-Variância: Jul94/Jun95, t = 6%.

portfólios	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Eberle ON	0,00	0,02	0,05	0,17	0,39	0,54	0,67	0,79	0,90	1,00
Real ON	0,00	0,21	0,36	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Vale Rio Doce PN,	0,00	0,29	0,60	0,83	0,61	0,46	0,33	0,21	0,10	0,00
CDI	1,00	0,48	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 21: Alocação de pesos pela Estratégia Média-MP: Jul94/Jun95, t = 6%.

portfólios	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Eberle ON	0,00	0,03	0,05	0,17	0,39	0,54	0,67	0,79	0,90	1,00
Vale Rio Doce PN	0,00	0,32	0,65	0,83	0,61	0,46	0,33	0,21	0,10	0,00
CDI	1,00	0,66	0,30	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

O principal resultado do teste *ex ante* foi permitir verificar-se que há uma diferença significativa entre as duas regras de seleção, MV e MMP, o que provour que a distribuição de retornos dos títulos não é normal (se fosse: MP = V/2), motivando o estudo adicional realizado a seguir no teste *ex post*. Primordialmente, o test *ex ante* atendeu ao objetivo de verificar se há diferença na alocação dos recursos entre diferentes títulos.

7.2 - Teste Ex Post

Outro teste realizado compreendeu uma aproximação ao trabalho de Harlow (1991, 37), discutido no capítulo 5. Os resultados alcançados resumem-se aos seguintes:

7.2.1 - Período de Janeiro de 1992 a Dezembro de 1993.

Tabela 22: Desempenho das estratégias MMP e média-variância (1992-1993)

	Estratégia MMP(τ=0%)					Estratégia Média-Variância				
Benchmark (ações/bonds)	Retorno Geom. Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio-Padrão	Semidesvio-padrão	Retorno Mínimo	Retorno Geom.Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio-Padrão	Semi desvio-padrão	Retorno Mínimo
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0/100	23,828%	5,488%	3,550%	0,259%	-0,973%	24,247%	5,578%	3,588%	0,314%	-1,225%
10/90	30,260%	6,832%	4,503%	0,277%	-0,942%	27,541%	6,270%	3,959%	0,309%	-1,260%
20/80	31,180%	7,020%	5,517%	0,374%	-1,278%	29,248%	6,624%	5,299%	0,451%	-1,468%
30/70	34,442%	7,680%	7,437%	0,558%	-2,194%	31,675%	7,121%	7,197%	0,674%	-2,554%
40/60	37,864%	8,359%	9,845%	0,784%	-3,164%	34,165%	7,624%	9,274%	0,920%	-3,640%
50/50	41,286%	9,025%	12,375%	1,011%	-4,179%	36,925%	8,173%	11,381%	1,172%	-4,726%
60/40	44,574%	9,654%	14,912%	1,237%	-5,171%	39,680%	8,713%	13,521%	1,427%	-5,812%
70/30	48,271%	10,348%	17,445%	1,465%	-6,155%	42,570%	9,271%	15,689%	1,684%	-6,898%
80/20	52,542%	11,134%	20,002%	1,692%	-7,138%	45,096%	9,752%	17,908%	1,953%	-7,984%
90/10	57,507%	12,028%	22,665%	1,919%	-8,119%	47,888%	10,277%	20,082%	2,213%	-9,070%
100/0	80,149%	15,853%	30,252%	2,378%	-9,102%	51,476%	10,939%	23,384%	2,597%	-10,156%

Tabela 23: Alocação de Renda Fixa nas Estratégias de Média-Variância e MMP (1992/1993)

	Alocação para bonds (%) Média-MP (τ=6%)			Alocação para bonds (%) Média-Var			Comparação dos mix de ativos					
Benchmark (ações/bonds)	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Difernça entre médias	t-Stat	Dif. mínima	Dif. máxima	% Obs. BondsMMP> BondsMV	t-Stat
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0/100	95%	89%	100%	97%	88%	100%	-1,7%	-9,85	0,82%	0,00%	13%	16,4
10/90	93%	86%	98%	95%	90%	99%	-2,2%	2,93	-4,21%	-1,33%	66%	66,5
20/80	91%	79%	97%	92%	82%	99%	-1,2%	9,14	-3,64%	-1,74%	86%	52,2
30/70	87%	71%	97%	88%	75%	99%	-0,8%	6,94	-4,20%	-2,07%	81%	32,5
40/60	84%	61%	96%	84%	67%	98%	-0,7%	6,08	-6,32%	-2,06%	78%	23,0
50/50	80%	50%	96%	80%	60%	98%	-0,8%	5,69	-9,16%	-2,42%	77%	17,8
60/40	76%	40%	96%	76%	52%	98%	-0,9%	5,33	-11,66%	-2,48%	76%	14,4
70/30	71%	29%	95%	73%	44%	98%	-1,1%	5,33	-14,44%	-2,44%	76%	12,3
80/20	67%	17%	95%	69%	36%	98%	-1,1%	5,33	-19,32%	-2,33%	76%	10,7
90/10	63%	5%	95%	64%	18%	97%	-1,2%	5,33	-12,84%	-2,28%	76%	6,4
100/0	54%	0%	95%	54%	0%	97%	0,1%	6,08	0,00%	-1,80%	78%	5,2

Verifica-se na tabela 22 uma similaridade entre os resultados verificados por Harlow (1991) e resultados alcançados no período Janeiro de 1992 a Dezembro de 1994 do presente trabalho. A estratégia MMP apresentou uma melhor proteção *ex post* quanto ao risco de um retorno abaixo de 6% ao ano. Como evidência adicional verificou-se que o retorno mínimo para cada portfólio formado foi maior na estratégia MMP em todos os 11 casos. Além disso, e como um subproduto, a estratégia MMP apresentou um maior retorno alcançado em todos os 11 portfólios analisados. A própria variância dos retornos realizados mostrou-se menor com este método (também verificado por Harlow (1991), mas que também não encontrou explicação plausível).

7.2.2 - Período de Julho de 1994 a Dezembro de 1996.

Tabela 24: Desempenho das estratégias MMP e média-variância (1994-1996)

	Estratégia MMP(τ=0%)					Estratégia Média-Variância				
Benchmark (ações/bonds)	Retorno Geom. Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio-Padrão	Semidesvio-padrão	Retorno Mínimo	Retorno Geom.Anual	Retorno Médio Mensal	Desvio-Padrão	Semi desvio-padrão	Retorno Mínimo
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0/100	22,939%	5,299%	1,403%	0,009%	0,059%	22,943%	5,299%	1,428%	0,021%	-0,033%
10/90	21,917%	5,079%	1,686%	0,044%	-0,084%	21,808%	5,056%	1,738%	0,034%	-0,037%
20/80	20,338%	4,737%	2,165%	0,125%	-0,576%	20,576%	4,789%	2,198%	0,097%	-0,487%
30/70	18,340%	4,300%	2,681%	0,218%	-1,100%	19,003%	4,445%	2,840%	0,195%	-1,012%
40/60	16,460%	3,883%	3,300%	0,314%	-1,647%	17,607%	4,138%	3,648%	0,312%	-1,537%
50/50	14,738%	3,497%	3,973%	0,409%	-2,205%	16,270%	3,841%	4,492%	0,434%	-2,051%
60/40	12,965%	3,095%	4,760%	0,528%	-2,795%	14,935%	3,541%	5,335%	0,555%	-2,557%
70/30	11,127%	2,673%	5,571%	0,652%	-3,356%	13,530%	3,223%	6,189%	0,677%	-3,054%
80/20	9,315%	2,251%	6,402%	0,780%	-3,884%	12,026%	2,880%	7,033%	0,802%	-3,562%
90/10	7,626%	1,854%	7,234%	0,905%	-4,416%	11,797%	2,827%	7,885%	0,920%	-4,060%
100/0	7,684%	1,868%	8,974%	1,069%	-5,275%	14,050%	3,341%	9,333%	1,052%	-4,688%

Tabela 25: Alocação de Renda Fixa nas Estratégias de Média-Variância e MMP (1994/1996)

	Alocação para bonds (%) Média-MP (τ=6%)			Alocação para bonds (%) Média-Var			Comparação dos mix de ativos					
Benchmark (ações/bonds)	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Média Bonds	Mínimo	Máximo	Difernça entre médias	t-Stat	Dif. mínima	Dif. máxima	% Obs. BondsMMP> BondsMV	t-Stat
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0/100	100%	95%	100%	99%	97%	100%	0,1%	(9,85)	-2,58%	0,00%	13%	16,4
10/90	96%	94%	99%	97%	95%	99%	-0,3%	2,93	-0,59%	0,19%	66%	66,5
20/80	94%	91%	98%	94%	92%	98%	-0,4%	9,14	-0,48%	-0,17%	86%	52,2
30/70	92%	87%	97%	92%	87%	98%	-0,4%	6,94	-0,30%	-0,52%	81%	32,5
40/60	89%	82%	97%	90%	83%	97%	-0,4%	6,08	-1,30%	-0,65%	78%	23,0
50/50	87%	77%	96%	87%	79%	97%	-0,4%	5,69	-2,32%	-0,64%	77%	17,8
60/40	84%	72%	96%	85%	75%	96%	-0,4%	5,33	-2,57%	-0,60%	76%	14,4
70/30	82%	68%	95%	82%	71%	96%	-0,4%	5,33	-2,48%	-0,70%	76%	12,3
80/20	79%	65%	95%	80%	67%	96%	-0,4%	5,33	-2,25%	-0,92%	76%	10,7
90/10	77%	61%	95%	76%	0%	96%	0,7%	5,33	60,76%	-1,11%	76%	6,4
100/0	69%	0%	94%	72%	0%	100%	-3,0%	6,08	0,00%	-5,63%	78%	5,2

Já para o período de Julho de 1994 à Junho de 1995, os resultados não são completamente conclusivos (ver tabela 24), pois, apesar de na maioria dos casos o método MMP apresentar uma medida MP menor que no método da média-variância (6 contra 5 casos), os demais benefícios do método encontrados por

Harlow (1991) não foram verificados (retorno maior e retorno mínimo melhor), como no período anterior

Os motivos do desvio dos resultados alcançados, em relação aos resultados de Harlow (1991), não são facilmente identificáveis. Porém, algumas hipóteses podem ser levantadas:

1 - No período de 1994/1996, houve longos sub-períodos de baixa geral do mercado, sendo que quando ocorrem retornos abaixo do retorno alvo, os métodos da variância e da MP tornam-se equivalentes, sendo que o modelo de otimização, então, selecionou aqueles mais eficientes pelo método da variância.

UFRGS
Escola de Administração - Biblioteca

2 - Os ativos utilizados como base de dados no trabalho aqui exposto, compõem-se de ações e CDI, enquanto que no trabalho de Harlow (1991), compuseram-se de fundos internacionais. Os fundos são menos voláteis que os ativos objeto, pois, devido à diversificação, não incorporam o risco não-sistemático, o que reduz a volatilidade da base de dados. Esta maior volatilidade presente no estudo aqui realizado, tende a não confirmar a tendência presumida pelo método de seleção da MP.

3 - Este segundo período - Julho de 1994 a Dezembro de 1996 - compreendeu uma época sujeita a distorções no mercado acionário ocasionadas

pelo Plano Real. Assim, consideramos o primeiro período analisado mais significativo para análise dos resultados.

8 CONCLUSÕES

Este trabalho teve por objetivo verificar as diferenças apresentadas entre os métodos de seleção de carteiras, focando sua atenção em dois principais: o método média-variância e o método média-momentos parciais (MMP).

O método média-variância foi a primeira regra de seleção de carteiras com um enfoque matemático e de equilíbrio a ser utilizado, além de ser o mais familiar e, por isso, o método tradicional. O segundo método, tem recebido nos últimos anos a atenção de vários pesquisadores, e é defendido por estes como sendo o mais adequado teoricamente, ou seja, aquele que atenderia os requisitos de seleção de carteiras maximizando a função de utilidade de um indivíduo, que possua as seguintes características:

- Função de utilidade quadrática $U(W) = aW - bW^2$ (29)

- Primeira derivada, utilidade marginal $U'(M) = a - 2bW$ (30)

- Segunda derivada, mudança em MU com relação a mudanças em W $U''(W) = -2b$ (31)

Segundo Bawa (1975), o método da dominância estocástica seria o adequado para o processo de seleção de carteiras, considerando-se as restrições com relação às preferências do investidor, representadas pelas características da função de utilidade acima apresentadas. No entanto, por este método ser muito complexo, o método MMP atende a todos os requisitos necessários e apresenta-se como uma aproximação muito razoável do método da dominância estocástica, e, sem dúvida alguma, como teoricamente preferencial em relação ao método da média-variância.

Vários trabalhos realizados, e comentados ao longo deste trabalho, confirmaram a robustez teórica da medida MP. Outros trabalhos preocuparam-se em desenvolver medidas de aproximação da MP, devido a sua também complexidade em relação à variância, ou em aplicar esta medida em modelos de equilíbrio semelhantes ao CAPM, inclusive realizando testes empíricos com a medida. Em todos estes trabalhos foi constatada a superioridade da medida MP sobre a medida variância e a relevância desta, pois as diferenças apresentadas sempre foram significativas.

Assim sendo, e motivados pelos resultados alcançados anteriormente, verificou-se se no mercado brasileiro havia diferença entre os dois métodos de seleção de carteiras e, caso positivo, da magnitude da diferença apresentada.

Deste modo, vários exercícios de simulação foram realizados com vistas ao alcance dos objetivos propostos. Os principais referem-se aos testes *Ex Ante* e *Ex Post*.

O teste *Ex Ante* procurou verificar se carteiras selecionadas com base nos dois métodos apresentavam composição semelhante, ou seja, se eram compostas pelos mesmos títulos e se estes recebiam alocação de recursos semelhante.

Já o teste *Ex Post* preocupou-se em averiguar se, utilizando-se de carteiras selecionadas pelos dois métodos, e rebalanceando-as semanalmente (procurando-se simular o uso prático das duas medidas em um processo de alocação de recursos), o método da MMP apresentava menor MP do que o método da média-variância em uma base *Ex Post*.

De acordo com a metodologia de Harlow (1991) os testes foram realizados, e os principais resultados, e conseqüentes conclusões a que se chegou foram as seguintes abaixo enumeradas:

1. A alocação dos recursos nos dois métodos mostrou-se diferente.

Isto foi verificado através do teste *Ex Ante* (Item 7.1), onde foram formadas carteiras eficientes utilizando-se como critério de seleção os dois métodos comparados neste trabalho: média-variância e média-momentos parciais (MMP). Os resultados estão dispostos nas tabelas 6 até 21. Constatou-se, assim, que as carteiras formadas pela média-MP diferem das carteiras formadas pela média-variância tanto nos aspectos de *composição das carteiras*, ou seja, os ativos inclusos nas carteiras e os pesos atribuídos a cada ativo foram diferentes, quanto ao aspecto de *minimização do risco*, onde, para uma média constante, a medida MP foi menor nas carteiras selecionadas pelo método MMP do que nas carteiras selecionadas pelo método média-variância.

Isto está de acordo com o próprio trabalho de Harlow (1991), que também encontrou diferenças nestes dois aspectos. Este resultado alcançado também está de acordo com as sugestões de vários trabalhos que afirmam que a distribuição dos retornos dos ativos em estudo não é normal, pois se assim o fosse, a medida MP e variância seriam iguais, o que de fato não ocorreu.

2. O método MMP nunca apresentou retorno inferior ao retorno alvo.

Esta afirmação pode ser comprovada através do teste *Ex Post* (Item 7.2), para os dois períodos de teste. Mais especificamente, os resultados encontram-se nas tabelas 22 e 24, nas colunas 2 e 7. Embora deva-se comentar que no método da média-variância tal resultado também foi alcançado, também é preciso reiterar que o objetivo do método média-MP é reduzir o risco de queda do retorno abaixo do retorno alvo, e que no método média-MP este risco foi minimizado em uma condição *ex post*, pois, na maioria dos casos, a medida MP foi menor para as carteiras selecionadas pelo método da média-MP do que para as carteiras selecionadas pelo método média-variância. Este fato somando-se ao fato anteriormente citado de que em todos os casos, para ambos os métodos, o retorno foi maior que a taxa alvo, assegura o alcance do objetivo do método média-MP.

3. O método MMP reduz a exposição ao *downside risk*, no mercado acionário brasileiro e *ex post* (em comparação ao método da média-variância).

Estes resultados podem ser verificados no teste *Ex Post* (Item 7.2), nas tabelas 22 e 24, nas colunas 5 e 10. Como comentado brevemente no parágrafo anterior, as carteiras selecionadas pelo método média-MP apresentaram uma MP menor do que as carteiras selecionadas pelo método média-variância. Mais detalhadamente, isto ocorreu em 77% dos casos (17 contra 5 observações). Este resultado também se comportou de acordo com o teste de Harlow (1991), vindo a confirmar a robustez desta medida da risco não apenas em termos teóricos, mas também em aplicações práticas, onde o indivíduo investidor está preocupado essencialmente em minimizar o risco de não alcançar um retorno pelo menos igual a um dado retorno alvo.

4. O método MMP no teste *ex post*, melhorou o retorno e proporcionou o maior retorno mínimo na metade dos casos observados.

A comprovação desta afirmação pode ser visualizada novamente no teste *Ex Post* (Item 7.2), nas tabelas 22 e 24, colunas 2 e 7; 6 e 11. Este resultado pode ser considerado como um sub-produto da estratégia média-MP, na qual esta tende a privilegiar os ativos que possuam uma maior constância ou estabilidade nos seus retornos, e, assim, minimizar a ocorrência de retornos mínimos, já que os ativos com maior volatilidade, embora, em alguns casos, possam apresentar maiores retornos, tendem a mostrar maiores retornos tanto positivos quanto negativos. Neste caso, como os retornos positivos acima do retorno alvo não fazem parte da amostra para o método média-MP para este alcançar o seu objetivo, não são considerados, sendo alocada uma menor proporção da riqueza disponível para os ativos com menor volatilidade neste método.

5. O método MMP alocou uma menor parcela dos recursos (pesos) para a renda fixa, relativamente ao método da média-variância.

Isto pode ser verificado no teste *Ex Post* (Item 7.2), tabelas 23 e 25, coluna 8. Neste caso, o resultado apresentado pelo teste mostrou-se contrário aos alcançados por Harlow (1991). No entanto, esta diferença é pequena, sendo de no máximo 2,2 pontos percentuais (de peso na carteira), para o período de 1992/1993 e de 3 pontos percentuais, para o período de 1994/1996. Uma explicação para esta diferença, é o período em análise compreender sempre retornos positivos, sendo que o método média-MP procurou selecionar ações com um potencial maior de retorno, e com menor risco (no sentido de menor MP), já que retornos positivos consecutivos acima da taxa alvo, contrabalanceam um retorno abaixo desta mesma taxa alvo. Desta forma, estas ações possuem uma maior atratividade para o método MMP do que a renda fixa.

Assim, conclui-se finalmente, que embora os resultados aqui encontrados não possam ser generalizados, pois são baseados em distribuições estatísticas dos retornos empíricas (que podem mudar de período para período), acredita-se que proporcionaram uma experiência inicial acerca das potencialidades do uso do método MMP na seleção de portfólios no Brasil.

Isto foi comprovado através de seu melhor desempenho em 17 dos 22 casos do teste *ex post*, no qual o método MMP, selecionou carteiras com o menor risco, definindo-se como risco a possibilidade de ganho de um retorno que seja menor que uma dada taxa alvo.

Outro ponto de comprovação do método dos seus objetivos, foi o fato de que em nenhum período do teste *ex post*, o método MMP selecionou carteiras que apresentassem retornos abaixo do retorno alvo. Adicionalmente, apresentou o melhor retorno e o melhor retorno míinimo em metade dos casos.

Também, acrescentamos que apesar deste trabalho ter atingido os objetivos a que se propôs, ainda há espaço para que estudos mais abrangentes possam ser realizados e os resultados melhorados ainda mais. Acredita-se que um número menor de títulos possa ser utilizado nos cálculos, a fim de se adequar melhor à realidade, pois os fundos de investimento utilizam em média de 15 a 20 títulos em sua carteira (quantidade inferida de diversas observações diretas em publicações, na qual tais instituições informam a composição de suas carteiras, e de pesquisa informal conduzida pelo autor na época do estudo), além de permitir maior agilidade nos cálculos, permitindo foco em outros fatores (como, por exemplo, na análise dos resultados, utilização de outras taxas-alvo, ampliação do perído de teste, etc). Também poderiam ser incluídos cálculos de despesas, tais como corretagem, emolumentos, etc, já que um método pode apresentar uma menor rotatividade de sua carteira e superar o outro método. Outras sugestões seriam a inclusão de outras taxas alvo e a expansão do trabalho para outros períodos.

Por último, o método de seleção de carteiras *Média-Momentos Parciais* poderia ter sua utilidade ampliada se fosse aplicado no gerenciamento de carteiras de fundos de pensão, principalmente. Neste caso específico, os fundos de pensão poderiam aplicar recursos no mercado acionário com a redução do risco de ocorrer retornos abaixo da sua taxa atuarial (6%) e sem abdicar das potencialidades de retornos acima da sua taxa de retorno atuarial (*upside potential*), isto através do método *Média-Momentos Parciais*. Outra aplicabilidade deste método seria na formação de fundos de investimento, no qual a principal vantagem seria o apelo de vendas, no qual o investidor poderia aplicar em ativos com potencial de ganhos acima da renda fixa e também usufruir de reduzido risco de não conseguir seu rendimento necessário.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARROW, K. Theory of Risk Aversion, em: Essays in the Theory of Risk Bearing, Capítulo 3, Markhan, Chicago, EUA, 1971.

BAWA, V. Optimal Rules For Ordering Uncertain Prospects. Journal of Financial Economics, Vol. 2, Março/75, p. 95-121.

BAWA, V & LINDENBERG, E. B. Capital Market Equilibrium in a Mean Lower Partial Moment Framework, Journal of Financial Economics, Vol. 5, 1977, p. 189-200.

BOOKSTABER, R. & CLARKE, R. Option Portfolio Strategies: Measurement and Evaluation. Journal of Business, Vol.57, 1984, no. 4, p. 469-492.

CHOOBINEH, F. & BRANTING, D. A Simple Approximation of Semivariance. European Journal of Operational Research, Vol. 27, 1986, p. 364-370.

COOLEY, P., ROENFELDT, R & MODANI, N. Interdependence of Market Risk Measures. The Journal of Business, 1977, p.356-63.

COPELAND, T. & WESTON, J. Financial Theory and Corporate Policy. 3ª Ed., Addison Wesley Reading, Massachussets, 1988.

COSTA, N. Sazonalidades do IBOVESPA. Revista de Administração de Empresas. São Paulo, v.30, nº 3, p. 79-84. Jul-Set 1990.

COSTA, N. & LEMGRUBER, E. F. O Efeito Fim-de-Semana durante Períodos de Abertura e de Fechamento das Bolsas de Valores. *In*; ENCONTRO NACIONAL DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO, 17. Anais do 17º ENANPAD. Salvador/BA, Set/1993. Anais. V.6 - Finanças, p. 103-110.

ELTON, E. & GRUBER, M. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. John Wiley & Sons, 1981.

FRIEND, I. & M. BLUME The Demand for Risky Assets. American Economic Review. Dezembro, 1975, p. 900-922.

FISHBURN, P. Decision and Value Theory. Wiley & Sons, Nova York, 1964.

FISHBURN, C. Mean-Risk Analysis With Risk Associated With Below Target Returns. American Economic Review, Março/77, p. 116-126.

HADAR, J. & RUSSEL, W. Rules for Ordering Uncertain Prospects. American Economic Review, Volume 59, 1969, p. 25-34.

HADAR, J. & RUSSEL, W. Stochastic Dominance and Diversification. Journal of Economic Theory, Volume 3, 1971, p. 288-305.

HANOCH, G. & LEVY, H. The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk, Review of Economics Studies, Volume 36, 1969, p. 335-346.

HARLOW, W. Asset Allocation in a Downside-Risk Framework. Financial Analyst Journal. Charlottesville, AIMR, 40 (4), p. 28-40, Set/Out, 1991.

HARLOW, W. & RAO, R. Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: Theory and Evidence. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 24, no.3, Setembro/89, p. 285-309.

HOGAN, W. & WARREN, J. Computation of the Efficient Boundary in the E-S Portfolio Selection Model. Jornal of Financial and Quantitative Analysis. Sep 1972, p.1881-1896.

HOGARTH, R. Judgement and Choice. John Wiley & Sons Ltd., Essex, 1988.

JOSEPHY, N. & ACZEL, AMIR. A Statistically Optimal Estimator of Semivariance. European Journal of Operational Research, volume 67, 1993, p. 267-271.

KAHNEMAN, D. & TVERSKY, A. "Prospect Theory: An Analysis of Decisions Of Decisions Under Risk". Econometrica, Março/79.

KENDALL, M & STUART, A. The Advanced Theory of Statistics: Distribution Theory. Vol. I, 2 Ed., 1963, Butler & Tanner Ltda, Londres.

KRAUS, A. & LITZENBERGER, R. Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. The Journal of Finance. Vol. 31, no. 4, Setembro/1976, p. 1085-1100.

KRITZMAN, Mark. What Practitioners Need to Know About Estimating Volatility. Financial Analysts Journal. Charlottesville, AIMR, 46 (4), p. 67-76, Jul/Ago, 1990.

LAUGHHUNN, D. PAYNE, J. & CRUM, R. Managerial Risk Preferences For Below-Target Returns. Management Science, Vol.26, no.12, Dec/80, p.1238/49.

LEE, W. & RAO, R. Mean Lower Partial Moment Valuation and Lognormally Distributed Returns, Management Science, Vol. 34, no. 4, April-1988, p.445-53.

LEMGRUBER, E. F.; BECKER, J. L. & CHAVES, T. O Efeito Fim-de-Semana no Comportamento dos Retornos Diários de Índices de Ações. *In*; ENCONTRO

NACIONAL DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO, 12. Anais do 12° ENANPAD, p. 873-883.

LINTNER, J. Security Prices, Risk and Maximal Gain from Diversification. Journal of Finance, Volume 30, 1965, p. 587-615.

LINTNER, J. Equilibrium in a Random Walk and Lognormal Securities Market. Harvard Institute of Economic Research. Discussion Paper no. 235. (Harvard University, Cambridge, Massachussets), 1972.

MAO, J. Survey of Capital Budgeting: Theory and Practice. The Journal of Finance. Maio/1970, p. 349-60.

MAO, J. Models of Capital Budgeting, E-V Vs. E-S. Journal of Financial and Quantitative Analysis. Volume 4, Jan 1970, p. 657-675.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection, Nova York, 1952, pág. 188-201.

MARMER, H. & NG, F. Means-Semivariance Analysis of Option-Based Strategies: A Total Mix Perspective. Financial Analysts Journal. Charlottesville, AIMR, Vol. 49 (3), p. 47-54, Mai/Jun, 1993.

MAYNES, J. & RUMSEY, J. Conducting Event Studies with Thinly Traded Stocks. Journal of Banking and Finance. North-Holland, p. 145-157.

MOSSIN, J. Equilibrium in a Capital Market. Econometrica, Volume 34, 1966, p. 768-783.

PORTER, R. Semivariance and Stochastic Dominance: A Comparison. American Economic Review, Março/1974, p. 200-204.

PRATT, J. Risk Aversion in the Small and in the Large. Econometrica, Janeiro, 1964, Vol. 32, p. 122-136.

PRICE, K. PRICE, B. & NANTELL, T. Variance and Lower Partial Moments Measures of Sistematic Risk: Some Analytical and Empirical Results. The Journal of Finance, Vol. 37, no. 3, junho/82, p.843-55.

QUIRK, J. & SAPOSNIK, R. Admissibility and Measurable Utility Functions. Review of Economic Studies, Volume 29, 1962, p. 140-146.

ROSS, S. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. Journal of Economic Theory. Dezembro/1976, p. 341-361.

SHARPE, W. Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. The Journal of Finance, Setembro/1964, Vol. 19, p. 425-442.

STIGLITZ, J.E. Review of Some Aspects of Theory of Risk Bearing by K.J. Arrow. Econometrica, Volume 38, 1970.

STONE, B. A General Class of Three-Parameter Risk Measures. Journal of Finance, Junho/1973, p. 675-85.

TOBIN, J. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, Review of Economics Studies, Volume 25, p. 65-86, 1958.

TSIANG, C. The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money. The American Economic Review. Junho/1972, p. 354-371.

VON NEUMANN, J. & MORGENSTERN, O. Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, 2. Ed., 1947.

WALTER, J. Dividend Policy and Enterprise Valuation. Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont, EUA, 1967.

WHITMORE, G. Third Stochastic Dominance, American Economic Review, Volume 50, p. 457-459, 1970.

WONNACOTT, T. & WONNACOTT, R. Introductory Statistics. 2 Ed., 1972, John Wiley & Sons, Inc., EUA.

ZANETTE, J. Otimização de Portfólios Internacionais através de Média-Variância e o efeito do Componente Brasil. Dissertação de Mestrado. PPGA. Maio, 1995.