

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Vínculos Magnéticos na Equação de Estado de Estrelas de Nêutrons

Tarso Henz Franarin

Trabalho de Conclusão de Curso realizado sob orientação do Prof. Dr. César Augusto Zen Vasconcellos e apresentado ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título Bacharel em Física.

Porto Alegre, Junho de 2011.

Resumo

Recentemente, observações e estudos teóricos têm motivado a investigação de efeitos de campos magnéticos intensos em estrelas de nêutrons. Neste trabalho, introduzimos inicialmente ferramentas básicas para a construção de modelos que descrevem esses objetos. Posteriormente apresentamos dois modelos para a matéria nuclear: o Modelo de Gás de Fermi Relativístico e o Modelo de Walecka. O primeiro, mais simples, serve de ilustração para as técnicas básicas utilizadas na modelagem de estrelas de nêutrons. O segundo, desenvolvido com maior nível de detalhamento, traz resultados mais satisfatórios que o modelo anterior. Ainda assim, apresenta diversos problemas, sendo necessárias extensões para resolvê-los. Por fim, discutimos a introdução de um campo magnético uniforme no modelo, seus efeitos, além de compilarmos resultados de pesquisas nesse campo.

Abstract

Recently, observations and theoretical studies have motivated the investigation of the effects of magnetic fields in neutron stars. In this work, we initially introduce basic tools for building models that describe these objects. Subsequently we present two models for nuclear matter: Relativistic Fermi Gas Model and Walecka Model. The first, simplest, illustrates the basic techniques used in modelling of neutron stars. The second, developed with greater detail, brings more satisfactory results than the previous model. Nevertheless, presents several problems, requiring extensions to solve them. Finally, we discuss the introduction of an uniform magnetic field, their effects, and compile results of research on this topic.

Sumário

Introdução	3
1 Estrelas de Nêutrons	5
1.1 Introdução	5
1.2 Propriedades da Matéria Nuclear	6
1.3 Condições de Equilíbrio	8
1.3.1 Equilíbrio Hidrostático	8
1.3.2 Equilíbrio de Carga Elétrica	9
1.3.3 Equilíbrio Químico	9
1.4 Modelo de Gás de Fermi Relativístico	11
1.4.1 Modelo	11
1.4.2 Equação de Estado	11
2 Modelo de Walecka	14
2.1 Introdução	14
2.2 Modelo de Walecka	14
2.2.1 Densidade Lagrangiana	14
2.2.2 Equações de Campo	15
2.2.3 Aproximação de Campo Médio	16
2.2.4 Tensor Energia-Momentum	18
2.2.5 Equação de Estado da Matéria Nuclear	19
2.2.6 Constantes de acoplamento	25
2.2.7 Resultados	26
2.3 Extensões	27
3 Vínculos Magnéticos	30
3.1 Introdução	30
3.2 Quantização de Landau	31
3.2.1 Derivação	31
3.2.2 Níveis de Landau	32
3.2.3 Discussão	33

3.3	Modelo	33
3.4	Resultados	34
Conclusões e Perspectivas		36
A Detalhes		38
A.1	Pressão e Densidade de Energia	38
A.2	Constantes de Acoplamento	41
A.3	Programa	43
Referências Bibliográficas		45

Introdução

Estrelas compactas são o ponto final da evolução estelar. Dependendo de suas características, são classificadas como anãs brancas, estrelas de nêutrons ou buracos negros. Nesses objetos, a matéria está sujeita a condições extremas. Sendo assim, eles podem ser considerados laboratórios astrofísicos, visto que essas condições físicas são impossíveis de obter em laboratórios terrestres convencionais.

Em uma estrela comum, existem duas forças principais que se contrapõem de forma a manter o equilíbrio: a força gravitacional, que tende a comprimir a matéria em direção ao centro da estrela e a força associada à pressão interna do sistema, originada principalmente pela radiação liberada nas reações de fusão nuclear, que tende a expulsar matéria da estrela. Durante milhões de anos, a estrela queima seu combustível nuclear mantendo um estado de equilíbrio. Quando cessam os processos de fusão, a compressão gravitacional e a pressão do gás degenerado de elétrons, no caso das anãs brancas, ou dos nêutrons, no caso das estrelas de nêutrons, contribuem para garantir a estabilidade do objeto compacto. No caso das estrelas de nêutrons, há também a importante contribuição das componentes repulsivas da interação nuclear.

Tipicamente, estrelas de nêutrons possuem massa $M \sim [1.5 - 2.0] M_{\odot}$, raio $r \sim [10 - 12] km$ e densidade central $\rho_c \sim 10^{14} g/cm^3$. Assim, uma estrela de nêutrons é uma das formas mais densas de matéria encontradas no Universo. Esses objetos possuem também campos magnéticos muito intensos.

Nas últimas décadas, o estudo de campos magnéticos intensos no Universo e, em particular, em estrelas de nêutrons tomou grande importância. Com o surgimento de novas e mais precisas observações, esse tipo de investigação introduz novos vínculos aos modelos existentes para esses objetos.

O trabalho é desenvolvido da seguinte forma:

- No primeiro capítulo, **Estrelas de Nêutrons**, introduzimos ferramentas básicas para a construção de modelos de estrelas de nêutrons (propriedades da matéria nuclear e condições de equilíbrio), além de apresentar o Modelo de Gás de Fermi Relativístico.
- No segundo capítulo, **Modelo de Walecka**, apresentamos, em detalhes, o Modelo de Walecka, discutimos suas limitações e extensões que podem ser feitas para obter

melhores resultados.

- No terceiro capítulo, **Vínculos Magnéticos**, discutimos a importância da consideração de efeitos magnéticos na modelagem de estrelas de nêutrons, a introdução de um campo magnético uniforme no modelo e compilamos resultados de pesquisas nesse campo.
- Na parte final, expomos nossas **Conclusões e Perspectivas**.

Por todo o trabalho, utilizamos o sistema natural de unidades ($\hbar = c = 1$), exceto quando explicitamente mencionado.

Capítulo 1

Estrelas de Nêutrons

1.1 Introdução

Estrelas de nêutrons são estados ligados de muitos corpos (bárions, mésons e léptons) em equilíbrio hidrostático, isto é, deve haver um balanço entre a força da gravidade, a força nuclear e a pressão de degenerescência. A força nuclear, ainda que seja a força de maior intensidade da natureza, não poderia, sozinha, produzir a ligação desses sistemas devido ao seu caráter de curto alcance. Já a força gravitacional, embora de menor intensidade do que a força nuclear, tem longo alcance e é composta apenas por componentes atrativas, enquanto a força nuclear apresenta componentes atrativas e repulsivas.

Entretanto, a compressão gravitacional em estrelas de nêutrons produz uma espécie de empacotamento dos núcleons de forma que somente as componentes repulsivas da interação nuclear (curto alcance) são relevantes para a estabilidade estelar. O empacotamento dos núcleons origina também uma pressão de degenerescência de natureza quântica, que atua contra a compressão gravitacional, juntamente com as componentes repulsivas da interação forte nuclear. Porém, mesmo quando consideramos o caso ideal de uma estrela de nêutrons composta por matéria nuclear incompressível, correspondente ao maior empacotamento possível dos núcleons, a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff impõe um limite em sua massa, acima da qual ocorre colapso gravitacional.

Costuma-se dizer que uma equação de estado é mais ou menos rígida. Por exemplo, uma equação de estado é mais rígida do que outra se a pressão interna associada à primeira, para qualquer valor de densidade, for maior do que a pressão interna correspondente à segunda. Quanto mais rígida for a equação de estado de uma estrela de nêutrons, maior é sua pressão interna, e, portanto, a estrela pode suportar uma maior compressão gravitacional, podendo ter massa maior do que a de uma estrela cuja equação de estado é menos rígida.

1.2 Propriedades da Matéria Nuclear

A partir das principais características do núcleo atômico, podemos descrever razoavelmente a matéria extremamente densa nas estrelas de nêutrons. Esses objetos compactos possuem um número de massa (A) muito grande, da ordem de 10^{57} . Assim, é apropriado descrevê-los considerando as propriedades da matéria nuclear infinita, que será definida nesta seção.

A fórmula semi-empírica de massa, desenvolvida por Bethe-Weiszäcker [1] a partir do modelo nuclear da gota líquida, trouxe a noção de matéria nuclear infinita. Mesmo sendo uma idealização, suas propriedades esclarecem muitos dos fenômenos que ocorrem no núcleo finito.

Essencialmente, a fórmula semi-empírica de massa nos fornece a massa de um núcleo qualquer em função apenas do número de prótons (Z) e do número de nêutrons (N). Várias contribuições são consideradas na elaboração da fórmula, sendo as mais importantes a energia de volume, a energia de superfície, a energia coulombiana e a energia de assimetria. A expressão para a energia de ligação ¹ do núcleo é

$$B(Z, A) = -a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A (A - 2Z)^2 A^{-1}. \quad (1.1)$$

A seguir, vamos interpretar cada um dos termos acima, na sequência em que eles aparecem na equação.

- **Energia de volume:**

Cada núcleon em um núcleo interage com um certo número de vizinhos próximos através da força nuclear. Assim, a energia de ligação de cada núcleon é proporcional ao volume de uma esfera cujo diâmetro é da ordem de grandeza do alcance médio da força nuclear e ao número de núcleons contido nessa esfera. Somando as energias de ligação de todos os A núcleons, obtemos $A \times (\text{volume da esfera de interação}) \times (\text{número de núcleons na esfera})$.

- **Energia de superfície:**

Um núcleon na superfície de um núcleo interage com menos núcleons do que um que se encontra no interior do núcleo, diminuindo sua energia de ligação.

- **Energia coulombiana:**

A repulsão coulombiana entre cada par de prótons em um núcleo diminui a energia de ligação do núcleo.

¹A massa do núcleo é igual à soma das massas dos núcleons livres menos a energia de ligação.

- **Energia de assimetria:**

A forma mais estável de matéria nuclear possui $N = Z$, porque um número diferente de nêutrons e prótons implica o preenchimento de níveis de energia mais alta para um tipo de partícula, deixando níveis de energia mais baixa para outra partícula vazios.

A expressão (1.1) é conhecida como fórmula semi-empírica de massa porque os parâmetros a_V , a_S , a_C e a_A são obtidos empiricamente através de ajustes às massas nucleares medidas. Um conjunto de valores consistente com a fenomenologia é [2]

$$a_V \sim 15.474 \text{ MeV}, a_S \sim 16.673 \text{ MeV}, a_C \sim 0.700 \text{ MeV} \text{ e } a_A \sim 22.966 \text{ MeV}. \quad (1.2)$$

A substância nuclear hipotética que se cria ao *desligarmos* a interação eletromagnética e fazermos $A \rightarrow \infty$, mantendo $N=Z$, se chama matéria nuclear infinita simétrica. É fácil ver que, se dividirmos (1.1) por A e tomarmos os limites acima, o único termo que sobra é o correspondente à energia de volume:

$$\frac{B(N = Z, A \rightarrow \infty)}{A} \equiv \frac{B_0}{A} = -15.474 \text{ MeV} \quad (1.3)$$

Na saturação, com uma densidade aproximadamente constante, podemos definir o volume de um único núcleon como v e o do núcleo como $V = Av$. Considerando o núcleo como uma esfera, obtemos $R = r_0 A^{1/3}$, onde R é o raio do núcleo e r_0 é uma constante que pode ser interpretada grosseiramente como o raio de um núcleon na densidade de saturação. O parâmetro $r_0 = 1.12 \text{ fm}$ é determinado nas análises de espalhamento elétron-núcleo. Como o volume de um núcleon com esse raio é $(4\pi/3)r_0^3$, a densidade de partícula da matéria nuclear será

$$\rho_0 = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = 0.17 \text{ fm}^{-3}, \quad (1.4)$$

chamada de densidade de saturação². Os valores de B/A e ρ_0 servirão para determinar as constantes de acoplamento do modelo que vamos desenvolver no Capítulo 2.

Outra importante propriedade da matéria nuclear é o módulo de compressibilidade, denotada por K . Ela caracteriza a resistência de um sistema nuclear a uma compressão externa de caráter uniforme e é dada por

$$K = \left[k^2 \frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]_{k=k_F}, \quad (1.5)$$

onde k_F é o momentum de Fermi. Se impusermos à matéria nuclear uma configuração distinta daquela correspondente ao seu equilíbrio original, através da aplicação de uma

²Daqui em diante, usaremos o subscrito 0 para nos referirmos a valores de grandezas físicas calculadas na saturação.

pequena perturbação, o módulo de compressibilidade determinará se o sistema pode voltar ao equilíbrio. Quanto mais alto seu valor, maior será a energia necessária para deslocar a matéria de seu equilíbrio, que mais facilmente retornará ao seu estado original.

1.3 Condições de Equilíbrio

Nesta seção, vamos analisar as condições de equilíbrio obedecidas por uma estrela de nêutrons: equilíbrio hidrostático, equilíbrio de carga e equilíbrio químico.

1.3.1 Equilíbrio Hidrostático

Para descrever o equilíbrio hidrostático de uma estrela de nêutrons, utiliza-se a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Essa equação é deduzida dentro do formalismo da relatividade geral, considerando-se a estrela como uma distribuição de matéria esfericamente simétrica, estática e cuja composição se comporta como um fluido perfeito. A equação de TOV possui a seguinte forma ³ :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{\varepsilon(r)M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}, \quad (1.6)$$

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varepsilon(r') dr'. \quad (1.7)$$

Na equação (1.6), $p(r)$ e $\varepsilon(r)$ correspondem, respectivamente, à pressão e à densidade de energia numa camada à distância r do centro da estrela.

A interpretação física da equação de TOV torna-se simples quando, a partir de (1.7), escrevemos $dM(r) = 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr$. Substituindo esse resultado em (1.6), obtemos:

$$4\pi r^2 dp = -\frac{M(r)dM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (1.8)$$

O lado esquerdo da expressão representa a força que a pressão interna exerce sobre uma casca esférica em r de espessura dr e massa $dM(r)$. No primeiro termo do lado direito está a atração gravitacional que a massa gravitacional contida em r exerce sobre a casca. Os demais termos entre parênteses são as correções da relatividade geral à teoria newtoniana.

Tomando a equação de TOV em conjunto com uma dada equação de estado para a matéria da estrela (isto é, uma relação do tipo $p = p(\varepsilon)$), obtemos um sistema solúvel de equações. A equação de TOV pode, então, ser integrada a partir da origem com as condições iniciais $M(0) = 0$ e um valor arbitrário para a densidade central $\varepsilon(0)$ até que a pressão se anule em, digamos, $r = R$. Assim, R define o raio da estrela e $M(R)$ sua massa.

³No sistema relativístico de unidades, em que $G = c = 1$.

Dessa forma, cada equação de estado resulta, após integração da equação de TOV, em uma relação única entre a massa da estrela e sua densidade de energia central.

1.3.2 Equilíbrio de Carga Elétrica

Estrelas de nêutrons são eletricamente neutras. Para provar, consideremos uma partícula de carga elementar e situada na superfície de uma estrela com carga elétrica líquida também igual a e . Para que a partícula não seja expulsa da estrela, a força gravitacional deve ser maior do que a força elétrica entre a partícula e a carga líquida,

$$\frac{GMm}{R^2} \geq \frac{Z_{liq}e^2}{R^2}, \quad (1.9)$$

onde G é a constante gravitacional, M é a massa da estrela, m é a massa da partícula, R é o raio da estrela, Z_{liq} é a carga líquida da estrela e e é a carga elementar.

Como a massa gravitacional da estrela é menor que a sua massa bariônica ⁴ ($M < Am$), podemos escrever:

$$\frac{G(Am)m}{R^2} > \frac{GMm}{R^2} \geq \frac{Z_{liq}e^2}{R^2}, \quad (1.10)$$

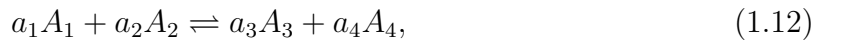
onde A é o número de bárions na estrela. Então,

$$\frac{Z_{liq}}{A} < \frac{Gm^2}{e^2} \sim 10^{-36}. \quad (1.11)$$

Uma razão entre Z_{liq} e A superior a esse valor expulsa a partícula teste da estrela. Assim, a carga líquida por núcleon é praticamente nula e podemos considerar que essas estrelas são eletricamente neutras.

1.3.3 Equilíbrio Químico

Uma reação química genérica em equilíbrio pode ser escrita como



onde os a_i representam a quantidade das componentes A_i envolvidas no processo. Colocando todos os termos de uma reação como (1.12) à esquerda, temos

$$\sum_i a_i A_i = 0. \quad (1.13)$$

Os potenciais químicos obedecem a uma expressão análoga,

⁴Chamamos de massa bariônica a soma das massas das partículas constituintes quando infinitamente separadas.

$$\sum_i a_i \mu_i = 0. \quad (1.14)$$

Se uma reação química tiver que respeitar algumas leis de conservação, teremos tantos potenciais químicos independentes quantas forem as leis. Neste trabalho, consideramos duas leis de conservação, conservação de carga elétrica e de número bariônico. Podemos expressar essas leis como

$$\sum_i^N a_i q_{ei} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i^N a_i q_{bi} = 0, \quad (1.15)$$

onde q_{ei} e q_{bi} são, respectivamente, a carga elétrica e bariônica do elemento i . Como temos N variáveis e duas equações, podemos expressar dois dos a_i em função dos outros $N - 2$:

$$a_1 q_{e1} + a_2 q_{e2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{ei}, \quad (1.16)$$

$$a_1 q_{b1} + a_2 q_{b2} = - \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{bi}. \quad (1.17)$$

Por conveniência, vamos considerar que o elemento 1 seja um nêutron e o elemento 2, um elétron. Assim, temos que $q_{b1} = -q_{e2} = 1$, $q_{b2} = q_{e1} = 0$ e o sistema acima fica

$$a_n = - \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{bi}, \quad (1.18)$$

$$a_e = \sum_{i \neq 1,2}^N a_i q_{ei}. \quad (1.19)$$

Substituindo (1.18) e (1.19) em (1.14), encontramos:

$$\sum_{i \neq n,e}^N a_i \mu_i = \sum_{i \neq n,e}^N a_i q_{bi} \mu_n - \sum_{i \neq n,e}^N a_i q_{ei} \mu_e. \quad (1.20)$$

Como os a_i são independentes, a igualdade só será válida se seus coeficientes forem iguais, ou seja:

$$\mu_i = q_{bi} \mu_n - q_{ei} \mu_e. \quad (1.21)$$

Como exemplo, para um próton ($i = p$), temos a seguinte relação entre os potenciais químicos

$$\mu_p = \mu_n - \mu_e. \quad (1.22)$$

Essa condição implica que energia adicional não pode ser extraída do sistema por meio de decaimento beta. Assim, se essa condição é satisfeita para uma estrela, dizemos que ela se encontra em equilíbrio beta.

1.4 Modelo de Gás de Fermi Relativístico

1.4.1 Modelo

Vamos considerar um modelo simples de estrelas de nêutrons em que elas são compostas apenas por nêutrons (n), prótons (p) e elétrons (e). Cada uma das partículas do sistema (n,p,e) contribui para a densidade de energia ε , pressão p e densidade bariônica ρ de acordo com ⁵

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F,i}} \sqrt{k^2 + m_i^2} k^2 dk, \quad (1.23)$$

$$p_i = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F,i}} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} k^2 dk, \quad (1.24)$$

$$\rho_i = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{F,i}} k^2 dk, \quad (1.25)$$

em que $i = n, p, e$, os termos $k_{F,i}$ representam os momenta de Fermi de cada uma das partículas e γ representa o grau de degenerescência do sistema.

Apesar de a temperatura de uma estrela de nêutrons ($T_{NS} \sim [10^5 - 10^9]K$) ser alta em relação, por exemplo, à radiação cósmica de fundo ($T \sim 3K$), esse valor é muito menor do que a temperatura de Fermi do sistema. Isso garante a validade da modelagem por um gás de Fermi completamente degenerado. Também vale ressaltar que as expressões da densidade de energia e da pressão do gás obedecem a Primeira Lei da Termodinâmica

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right), \quad (1.26)$$

de forma que o modelo é consistente com a termodinâmica.

1.4.2 Equação de Estado

Agora vamos obter a equação de estado do sistema, que permite determinar propriedades da estrela. Calculando as integrais das expressões (1.23), (1.24) e (1.25), obtemos

$$\varepsilon_i = \frac{1}{8\pi^2} \left[\mu_i k_{F,i} (2k_{F,i}^2 + m_i^2) + m_i^4 \ln \left| \frac{m_i}{\mu_i + k_{F,i}} \right| \right], \quad (1.27)$$

$$p_i = \frac{1}{24\pi^2} \left[\mu_i k_{F,i} (2k_{F,i}^2 - 3m_i^2) + 3m_i^4 \ln \left| \frac{\mu_i + k_{F,i}}{m_i} \right| \right], \quad (1.28)$$

⁵Para um desenvolvimento completo dos cálculos, recomenda-se ler o exemplo 14.4 da referência [3].

$$\rho_i = \frac{k_{F,i}^3}{3\pi^2}, \quad (1.29)$$

onde $\mu_i = \sqrt{k_{F,i}^2 + m_i^2}$ caracteriza a energia de Fermi de cada uma das partículas do sistema. Assim, encontramos a equação de estado do modelo na forma de uma equação paramétrica que relaciona a pressão e a densidade de energia do gás, $p(\rho) = p(\varepsilon(\rho))$. Na figura 1.1, apresentamos, em escala logarítmica, o comportamento da equação de estado.

Por meio da integração da equação de TOV, foram encontrados ⁶ os seguintes valores limites: raio máximo igual a 9.3 km , massa máxima igual a $0.7 M_\odot$ e densidade central igual a $10^{15.6} \text{ g cm}^{-3}$. Na figura 1.1, apresentamos também o resultado da integração da equação de TOV.

A massa máxima obtida com esse modelo ($0.7 M_\odot$) é excessivamente baixa, quando comparada, por exemplo, com a massa observada do pulsar Hulse-Taylor ($1.44 M_\odot$). No modelo de gás de Fermi relativístico a pressão de degenerescência sustenta, sozinha, a pressão gravitacional. Assim, a pressão de degenerescência não se mostra suficiente para gerar um valor de massa estelar condizente com a fenomenologia.

De acordo com a equação de TOV, a pressão interna do gás também é fonte de gravidade. Torna-se então necessário levar em conta a interação nuclear, especialmente suas componentes repulsivas, que são predominantes às densidades de estrelas de nêutrons. No próximo capítulo, vamos apresentar um modelo nuclear para sistemas relativísticos de muitos corpos, o Modelo de Walecka.

⁶Resultados obtidos na referência [4].

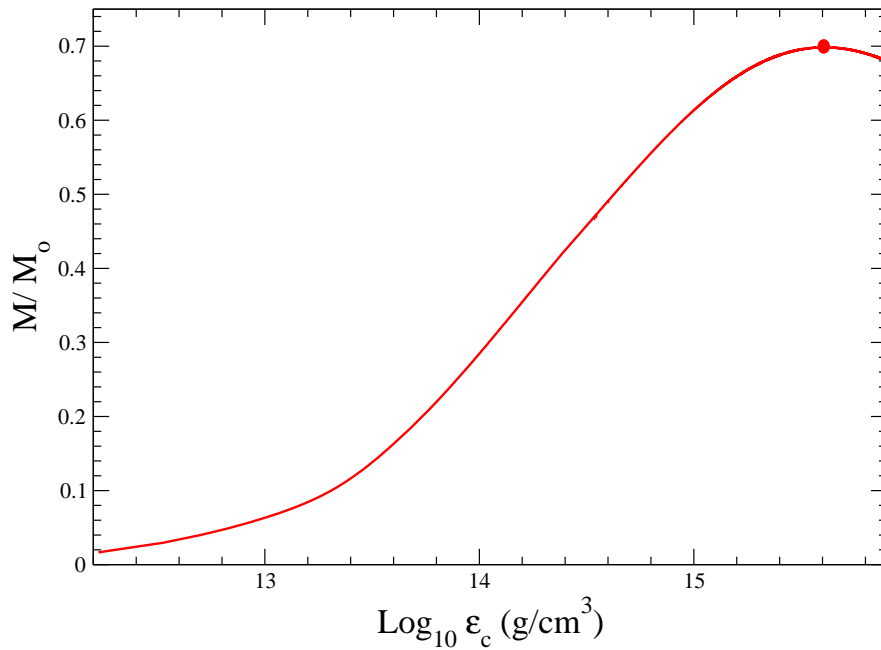
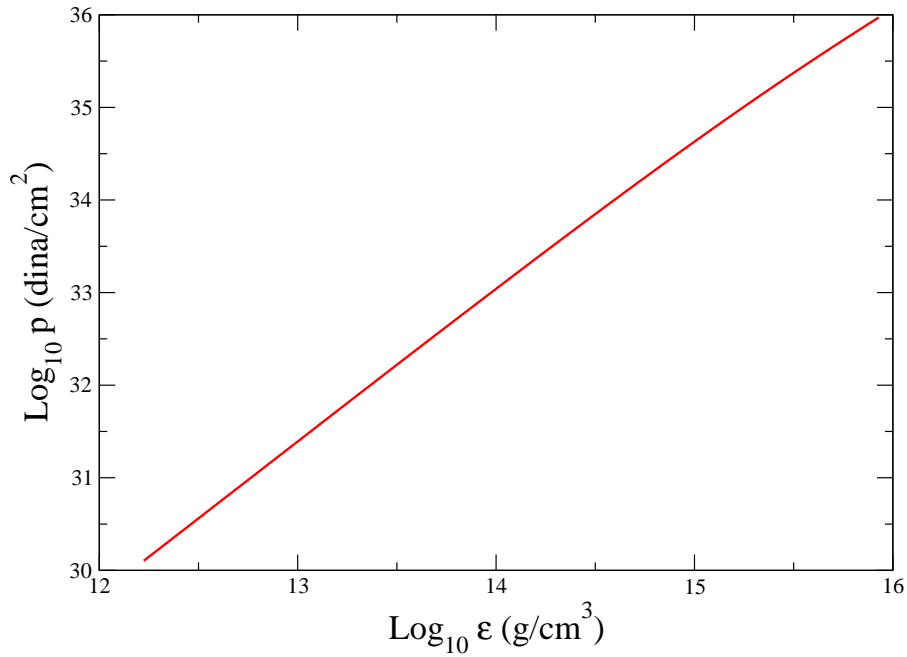


Figura 1.1: Comportamento da matéria nuclear em equilíbrio beta no modelo de gás de Fermi relativístico. O painel superior apresenta, em escala logarítmica, o comportamento da equação de estado. O painel inferior apresenta o resultado da integração da equação de TOV. O ponto assinalado indica o valor da massa máxima, $0.7 M_{\odot}$, com o valor correspondente à densidade de energia central, $10^{15.6} \text{ g cm}^{-3}$.

Capítulo 2

Modelo de Walecka

2.1 Introdução

As propriedades de uma estrela de nêutrons dependem, do ponto de vista dos modelos, da equação de estado da matéria nuclear em densidades maiores do que as observadas em um núcleo ou em cenários criados em laboratório como, por exemplo, colisões de íons pesados. Para descrever a matéria nuclear, vamos utilizar o Modelo de Walecka.

Nesse modelo, não são considerados os graus internos de liberdade dos núcleons, que interagem entre si através da troca de mésons escalares e vetoriais. Os mésons escalares simulam a atração nuclear de longo alcance enquanto os mésons vetoriais simulam a repulsão nuclear de curto alcance. O modelo possui duas constantes de acoplamento, determinadas de modo que a teoria possa reproduzir a energia de ligação do núcleo e sua densidade de saturação.

2.2 Modelo de Walecka

2.2.1 Densidade Lagrangiana

Para construir a densidade lagrangiana ¹ do Modelo de Walecka, vamos considerar que

- Os núcleons são representados pelo lagrangiano de Dirac (porque são férmions), pelo campo ψ e têm massa m .
- O méson escalar σ é representado pelo lagrangiano de Klein-Gordon (porque é um bóson de spin nulo), pelo campo σ e tem massa m_σ .
- O méson vetorial ω é representado pelo lagrangiano de Proca (porque é um bóson vetorial), pelo campo ω e tem massa m_ω .

¹Daqui em diante, podemos nos referir à densidade lagrangiana apenas como lagrangiano.

- O méson escalar se acopla à densidade escalar dos bárions através de $g_\sigma \bar{\psi}\psi\sigma$.
- O méson vetorial se acopla à corrente de bárions através de $g_\omega \bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu$.

Assim, o lagrangiano de Walecka é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu\right) \\ & + (g_\sigma\bar{\psi}\psi\sigma - g_\omega\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\omega^\mu), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu$. Rearranjando termos, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_\omega\omega^\mu) - (m - g_\sigma\sigma)]\psi \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - m_\sigma^2\sigma^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2.2 Equações de Campo

Agora, iremos aplicar a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu q_i)}\right) = 0, \quad (2.3)$$

ao lagrangiano da Walecka para obter as equações de campo. Aqui, q_i são os diferentes campos que compõem a teoria.

Para o Campo σ

Para o campo σ , a equação de Euler-Lagrange nos dá

$$(\square + m_\sigma^2)\sigma = g_\sigma\bar{\psi}\psi. \quad (2.4)$$

Essa é a equação de Klein-Gordon com uma fonte escalar.

Para o Campo ω

Para o campo ω , a equação de Euler-Lagrange nos dá

$$(\square + m_\omega^2)\omega^\mu - \partial_\nu\partial^\mu\omega^\nu = g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.5)$$

Essa é a equação de Proca com uma fonte vetorial.

Para o Campo ψ

Para o campo ψ , a equação de Euler-Lagrange nos dá

$$\left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu \right) - (m - g_\sigma \sigma) \right] \psi = 0. \quad (2.6)$$

Essa é a equação de Dirac com desvio na massa e no termo de quadrimomentum devido à presença dos campos escalar e vetorial, respectivamente.

2.2.3 Aproximação de Campo Médio

As equações de campo encontradas na subseção anterior são não-lineares, podendo ser resolvidas apenas numericamente. Portanto, devemos procurar soluções através de uma aproximação.

A aproximação de campo médio consiste em considerar um sistema uniforme de B bárions em uma caixa de volume V . À medida em que a densidade bariônica cresce, também cresce a intensidade das fontes dos mésons escalares e vetoriais, como pode-se ver no lado direito das equações (2.4) e (2.5). Quando as amplitudes dos termos de fonte tornam-se muito expressivos comparativamente a suas variações temporais e espaciais, podemos trabalhar apenas com os valores médios dos campos. Assim, essa aproximação torna-se tanto mais válida quanto maior for a densidade do sistema, sendo muito conveniente para aplicações em estrelas de nêutrons.

Então, vamos agora realizar a substituição dos campos por seus valores esperados:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle = \sigma_0, \quad (2.7)$$

$$\omega^\mu \rightarrow \langle \omega^\mu \rangle = \delta_0^\mu \omega^0. \quad (2.8)$$

Equação do Campo σ na Aproximação de Campo Médio

Tomando a aproximação de campo médio em (2.4), temos que

$$(\square + m_\sigma^2)\sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (2.9)$$

Como σ_0 é constante, suas derivadas são nulas. Assim, ficamos com

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (2.10)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (2.11)$$

onde, à direita, temos a densidade escalar de Lorentz

$$\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle . \quad (2.12)$$

Substituindo esse resultado em (2.11), obtemos:

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_s . \quad (2.13)$$

Equação do Campo ω na Aproximação de Campo Médio

Tomando a aproximação de campo médio em (2.5), temos que

$$(\square + m_\omega^2)\delta_0^\mu \omega^0 - \partial_\nu \partial^\mu \delta_0^\nu \omega^0 = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rangle . \quad (2.14)$$

Como ω_0 é constante, suas derivadas são nulas. Assim,

$$m_\omega^2 \delta_0^\mu \omega^0 = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rangle \quad (2.15)$$

$$m_\omega^2 \omega^0 = \delta_\mu^0 g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rangle \quad (2.16)$$

$$m_\omega^2 \omega^0 = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle . \quad (2.17)$$

Da solução para a equação de Dirac, sabemos que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \quad (2.18)$$

então

$$m_\omega^2 \omega^0 = g_\omega \langle \psi^\dagger \psi \rangle . \quad (2.19)$$

Finalmente, obtemos

$$\omega^0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (2.20)$$

de onde surge a densidade bariônica

$$\rho_B = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{B}{V}, \quad (2.21)$$

sendo B o número de bárions no sistema (número bariônico), dado por

$$B = \int_V d^3x \psi^\dagger \psi = V \langle \psi^\dagger \psi \rangle, \quad (2.22)$$

e sendo V o volume do mesmo. Dessa forma, a equação (2.20) fica escrita como

$$\omega^0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B. \quad (2.23)$$

Equação do Campo ψ na Aproximação de Campo Médio

Tomando a aproximação de campo médio em (2.6), temos que

$$\left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g_\omega \delta_0^\mu \omega^0 \right) - (m - g_\sigma \sigma_0) \right] \psi = 0 \quad (2.24)$$

$$\left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega^0 - (m - g_\sigma \sigma_0) \right] \psi = 0. \quad (2.25)$$

Definimos a massa efetiva do núcleon como

$$m^* = m - g_\sigma \sigma_0, \quad (2.26)$$

de maneira que a equação para o campo ψ fica

$$\left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma_0 g_\omega \omega^0 - m^* \right] \psi = 0. \quad (2.27)$$

2.2.4 Tensor Energia-Momentum

O tensor energia-momentum de um sistema descreve a densidade e o fluxo de energia e momentum no espaço-tempo. A partir dessa quantidade tensorial calcularemos a equação de estado da matéria nuclear.

Em teoria quântica de campos, o tensor energia-momentum é definido como

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu q_i)} \partial^\nu q_i - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.28)$$

onde q_i representada cada um dos campos do modelo e $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowsky

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Aplicando a definição (2.28) ao lagrangiano de Walecka, obtemos

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \omega^{\alpha\mu} \partial_\nu \omega_\alpha \\
&- g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right) \right. \\
&\left. + \bar{\psi} [\gamma_\alpha (i\partial^\alpha - g_\omega \omega^\alpha) - (m - g_\sigma \sigma)] \psi \right].
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Usando a equação (2.6) para o campo ψ , elimina-se um termo, restando

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \omega^{\alpha\mu} \partial_\nu \omega_\alpha \\
&- g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial_\alpha \sigma \partial^\alpha \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Por outro lado, para um sistema uniforme e estático, identificamos o tensor energia-momentum como

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \tag{2.32}$$

Podemos, então, determinar a densidade de energia ε e a pressão p do sistema através do valor esperado do tensor energia-momentum para o estado fundamental da matéria nuclear

$$\varepsilon = \langle T^{00} \rangle, \tag{2.33}$$

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \langle T^{ii} \rangle. \tag{2.34}$$

2.2.5 Equação de Estado da Matéria Nuclear

A equação de estado é uma ferramenta muito importante, porque a partir dela podemos determinar propriedades globais das estrelas de nêutrons através da equação de TOV. Nesta subseção, vamos calcular a equação de estado no Modelo de Walecka.

Quantização Canônica do Campo de Dirac

O primeiro passo do cálculo da equação de estado da matéria nuclear é a quantização do campo nuclear. O termo do lagrangiano de Walecka referente aos núcleons é

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi, \tag{2.35}$$

a densidade lagrangiana de um campo de Dirac.

O momento conjugado ao campo ψ é

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger. \tag{2.36}$$

Para quantizar o campo de Dirac, substituímos os espinores $\psi(\mathbf{x}, t)$ e $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)$ pelos

operadores $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ e $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$. Usando (2.36), postulamos que os operadores do campo de Dirac satisfazem as relações de anti-comutação

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.37)$$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0. \quad (2.38)$$

Essa escolha garante que os núcleons são governados pela estatística de Fermi-Dirac. Se tivéssemos imposto relações de comutação entre os operadores (estatística de Bose-Einstein), íríamos contra o fato de que os núcleons, que possuem spin $\frac{1}{2}$, satisfazem o princípio de exclusão de Pauli.

A equação de movimento do campo ψ na aproximação de campo médio é linear. Assim, ela admite soluções estacionárias do tipo

$$\psi = \psi(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\epsilon t}, \quad (2.39)$$

onde $\psi(\mathbf{k}, \lambda)$ é o espinor de Dirac e λ é o índice de spin. Considerando o sistema contido num volume finito no espaço e adotando condições de contorno periódicas, temos

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[A_{\mathbf{k}\lambda} U(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\epsilon^+ t} + B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger V(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \epsilon^- t} \right], \quad (2.40)$$

onde A é o operador destruição para bárions, B^\dagger é o operador criação para anti-bárions, U é a parte da solução da equação de Dirac com energia positiva e V é a parte da solução da equação de Dirac com energia negativa. A conjugada de (2.40) é

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left[A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger U^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\epsilon^+ t} + B_{\mathbf{k}\lambda} V^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \epsilon^- t} \right]. \quad (2.41)$$

Utilizando (2.40), (2.41) e as relações de anti-comutação para os operadores do campo de Dirac, obtemos

$$\{A_{\mathbf{k}\lambda}, A_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.42)$$

e

$$\{B_{\mathbf{k}\lambda}, B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.43)$$

Densidade Bariônica

Para calcular a densidade bariônica (2.21), precisamos efetuar o produto $\psi^\dagger\psi$. Quando fazemos essa multiplicação, os termos cruzados se anulam, pois os espinores de Dirac U e V são ortonormais, ou seja, $U^\dagger V = V^\dagger U = 0$ e $UU^\dagger = VV^\dagger = 1$. Portanto, ficamos com

$$\psi^\dagger\psi = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left[A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (2.44)$$

Substituindo $\psi^\dagger\psi$ em (2.22), temos que

$$B = \int d^3x \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left[A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (2.45)$$

Usando a condição de normalização

$$\frac{1}{V} \int_V d^3x e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.46)$$

a equação para o número bariônico B fica

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} + B_{\mathbf{k}\lambda} B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger]. \quad (2.47)$$

Lembrando que (2.43), obtemos

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}] + \sum_{\mathbf{k}\lambda} 1. \quad (2.48)$$

O último termo é uma constante que pode ser interpretada como a soma de todos os estados de energia negativa ocupados no mar de Dirac. Porém, como todas as medições são feitas em relação ao vácuo, podemos desconsiderar esse último termo, restando

$$B = \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.49)$$

Substituindo (2.49) em (2.21), temos que

$$\rho_B = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}'\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.50)$$

Tomando o limite para um volume infinitamente grande

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k, \quad (2.51)$$

resulta em

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int d^3k [A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}]. \quad (2.52)$$

Neste trabalho, estamos considerando matéria nuclear uniforme, estática e em seu estado fundamental. No estado fundamental, temos, no espaço de momentum, uma esfera com todos os níveis preenchidos até o chamado nível de Fermi. Assim, sendo $|F\rangle$ o estado fundamental, podemos dizer que

$$A_{\mathbf{k}\lambda}|F\rangle = 0, \quad \text{para } |\mathbf{k}| > k_F, \quad (2.53)$$

$$A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger |F\rangle = 0, \quad \text{para } |\mathbf{k}| < k_F, \quad (2.54)$$

$$B_{\mathbf{k}\lambda} |F\rangle = 0, \quad \text{para todo } |\mathbf{k}|, \quad (2.55)$$

$$A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} |F\rangle = |F\rangle, \quad \text{para } |\mathbf{k}| < k_F. \quad (2.56)$$

Os antibárions não estão presentes devido à escolha do uso de temperatura nula.

Com isso, a expressão para a densidade bariônica fica

$$\rho_B = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \int_0^{k_F} d^3k. \quad (2.57)$$

Vamos trocar o somatório em λ em um fator de degenerescência γ (cada estado criado comporta γ partículas). Para matéria de nêutrons, $\gamma = 2$, porque podemos ter dois nêutrons para um mesmo valor de k , um com spin $+1/2$ e outro com spin $-1/2$. Para matéria nuclear, $\gamma = 4$, porque podemos ter dois prótons e dois nêutrons para um mesmo valor de k , um próton e um nêutron com spin $+1/2$ e outro próton e outro nêutron com spin $-1/2$.

Com essa mudança de nomenclatura, a equação para ρ_B fica

$$\rho_B = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k. \quad (2.58)$$

Integrando, temos, finalmente, que

$$\rho_B = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3. \quad (2.59)$$

Pressão e Densidade de Energia

Tomando a aproximação de campo médio no tensor energia-momentum (2.31), obtemos

$$(T^{\mu\nu})_{MFT} = \langle i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi \rangle + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 \right). \quad (2.60)$$

Da equação (2.34), temos que

$$p = \frac{1}{3} \sum_i (T^{ii})_{MFT}. \quad (2.61)$$

Utilizando a definição tensorial para a matriz de Dirac γ ,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad (2.62)$$

e $\gamma_i = \gamma_0\alpha_i$, obtemos

$$p = \frac{1}{3} \sum_i \left[(g^{ii}) \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \right) + \langle i\bar{\psi} \gamma^i \partial^i \psi \rangle \right] \quad (2.63)$$

$$p = \frac{1}{3} \left[(-3) \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \right) - \langle i\bar{\psi} \gamma_0 \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \rangle \right]. \quad (2.64)$$

Usando (2.18), resulta

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \left\langle \frac{1}{3} i\psi^\dagger \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi \right\rangle. \quad (2.65)$$

Nessa equação, além do termo livre, têm-se os termos de contribuição dos mésons. Como vimos, o méson escalar representa a parte atrativa da força forte. Assim, quanto maior o valor de seu campo, menor é a pressão. Já o méson vetorial representa a parte repulsiva da força forte. Assim, quanto maior o valor de seu campo, maior é a pressão.

Ainda precisamos calcular o terceiro termo da expressão (2.65). O cálculo é mais trabalhoso do que o para obter a densidade bariônica, mas segue basicamente os mesmos passos. Para um desenvolvimento completo, recomenda-se ler [5], onde obtém-se que

$$p = -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (m^*)^2}}. \quad (2.66)$$

Agora vamos calcular a densidade de energia. Da equação (2.33), temos que

$$\varepsilon = (T^{00})_{MFT}. \quad (2.67)$$

Assim,

$$\varepsilon = g^{00} \left(\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \right) + \langle i\bar{\psi} \gamma^0 \partial^0 \psi \rangle. \quad (2.68)$$

Usando $g^{00} = 1$ e (2.18), resulta

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \langle i\psi^\dagger \partial^0 \psi \rangle. \quad (2.69)$$

Nessa equação, além do termo livre, têm-se os termos de contribuição dos mésons. Como vimos, o méson escalar representa a parte atrativa da força forte. Assim, quanto maior o valor de seu campo, maior é a energia de ligação, o que implica um aumento na densidade de energia do sistema. Já o méson vetorial representa a parte repulsiva da força forte. Assim, quanto maior o valor de seu campo, menor é a energia de ligação, o que implica um decréscimo na densidade de energia do sistema.

Ainda precisamos calcular o terceiro termo da expressão (2.69). Para um desenvolvimento completo, recomenda-se ler [5], onde obtém-se que

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k(\sqrt{k^2 + (m^*)^2} + g_\omega\omega_0). \quad (2.70)$$

As integrais em (2.66) e (2.70) podem ser resolvidas analiticamente. Os cálculos estão desenvolvidos no Apêndice A e resultam em

$$p = \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (m^*)^2 k_F \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} + \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right] \quad (2.71)$$

e

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right], \quad (2.72)$$

onde, de acordo com (2.59), k_F é uma função de ρ_B através de

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_B \right)^{1/3}. \quad (2.73)$$

As equações (2.71) e (2.72) fornecem a equação de estado na forma paramétrica $p(\rho_B)$ e $\varepsilon(\rho_B)$. Falta-nos ainda determinar a massa efetiva m^* , o que será feito na subseção seguinte.

Massa Efetiva do Núcleon

Em (2.23), a constante ω_0 é escrita em termos da densidade bariônica conservada. Por outro lado, σ_0 (ou m^*) é uma quantidade dinâmica que precisa ser calculada de maneira autoconsistente. Para tal, pode-se utilizar tanto a equação de campo para o méson escalar (equação (2.13)) quanto o argumento termodinâmico de que um sistema isolado com número de bárions (B) e volume (V) fixos à temperatura nula irá minimizar sua energia,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0} E(B, V; \sigma_0) = 0. \quad (2.74)$$

Essa condição é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial m^*} \varepsilon(B, V; m^*) = 0. \quad (2.75)$$

Fazendo o cálculo acima, obtém-se a seguinte expressão transcendental

$$m^* = m - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma m^*}{4\pi^2} \left[k_F \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} - (m^*)^2 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right]. \quad (2.76)$$

Consistentemente com a definição de massa efetiva (2.26), essa expressão é função apenas do méson escalar.

2.2.6 Constantes de acoplamento

Nesta subseção vamos calcular as razões $\frac{g_\sigma}{m_\sigma}$ e $\frac{g_\omega}{m_\omega}$ em função das propriedades da matéria nuclear na saturação. Com isso, concluiremos o estudo da formulação original do Modelo de Walecka.

Na saturação, a adição de um núcleon ao sistema será ignorada pelos núcleons mais internos, devido ao curto alcance da força nuclear. Então, na saturação, a pressão é nula (teorema de Hugenholtz-Van Hove [6]), isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_{F0}^3 - \frac{3}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right. \\ \left. + \frac{3}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Também temos que a densidade de energia na saturação é

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} + \frac{1}{4} k_{F0}^3 \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

As equações(2.77) e (2.78) formam um sistema. Resolvendo-o ², obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} = \frac{\varepsilon_0}{(m - m_0^*)^2} - \frac{1}{(m - m_0^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} k_{F0}^3 + \frac{1}{4} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

e

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{1}{\rho_0} \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (2.80)$$

²Ver Apêndice A.

Para determinar as constantes de acoplamento (2.79) e (2.80), juntamente com a massa efetiva (2.76), devemos resolver um sistema de três equações e três incógnitas. É preciso também usar alguns valores experimentais.

Como vimos no Capítulo 1, para $r_0 = 1.12fm$, a densidade de saturação é $\rho_0 = 0.17fm^{-3}$. Escrevendo o momentum de Fermi na saturação (k_{F0}) como

$$k_{F0} = \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_0 \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.81)$$

obtem-se $k_{F0} = 1.36fm^{-1}$ ($\gamma = 4$). Escrevendo a energia de ligação por núcleon na saturação como

$$\frac{B_0}{A} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \right) - m \quad (2.82)$$

e usando os valores $\frac{B_0}{A} = -16.0MeV$, $m = 939MeV$ e $\rho_0 = 0.17fm^{-3}$, obtém-se $\varepsilon_0 = 156.91MeVfm^{-3}$.

No Apêndice A, encontra-se um programa que resolve o sistema (2.76)-(2.79)-(2.80). Para os valores considerados no parágrafo anterior, obtemos

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} = 14.02fm^2, \quad (2.83)$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = 10.54fm^2, \quad (2.84)$$

e

$$\frac{m_0^*}{m} = 0.53. \quad (2.85)$$

2.2.7 Resultados

No final deste capítulo, incluímos figuras que mostram os resultados do Modelo de Walecka. Destacamos que, no gráfico da equação de estado, existem duas regiões bem definidas, uma para densidades mais baixas e outra para densidades mais altas. Essas regiões definem duas fases, respectivamente chamadas de gás de Fermi e líquido de Fermi, entre as quais há uma transição de fase. A aparente descontinuidade da curva é explicada pela existência de uma região não-física de pressão negativa em densidades intermediárias, evidenciando instabilidades associadas ao processo de transição de fase. No cálculo numérico, foram cortados os pontos correspondentes a pressão negativa, sendo essa a razão de eles não aparecerem no gráfico.

2.3 Extensões

O Modelo de Walecka é bem sucedido em descrever aspectos importantes da interação nuclear, como, por exemplo, seu caráter de saturação. Apesar disso, o modelo apresenta deficiências:

- **Massa efetiva baixa.** O modelo prediz $m_0^* = 498 \text{ MeV}$, que está fora do intervalo de valores obtidos experimentalmente, $564 \text{ MeV} \leq m_0^* \leq 658 \text{ MeV}$.
- **Incompressibilidade alta.** O modelo prediz $K = 550 \text{ MeV}$, que também está fora do intervalo de valores obtidos experimentalmente, $200 \text{ MeV} \leq K \leq 300 \text{ MeV}$.

Diferentes extensões têm sido propostas ao Modelo de Walecka para obter melhores resultados na descrição da matéria nuclear. Algumas delas são:

- Inclusão do méson ρ para descrever a energia de simetria de isospin. Esse méson, representado pelo campo ρ^μ , acopla-se à corrente de isospin do núcleons, $\frac{1}{2}\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi$, e a intensidade do acoplamento é parametrizada pela constante g_ρ .
- Inclusão do octeto bariônico, pois, em altas densidades bariônicas, a conversão de núcleons em híperons torna-se favorável.
- Inclusão de léptons, como elétrons e múons.

No próximo capítulo, incluiremos todas as extensões acima, além de considerar a presença de um campo magnético uniforme.

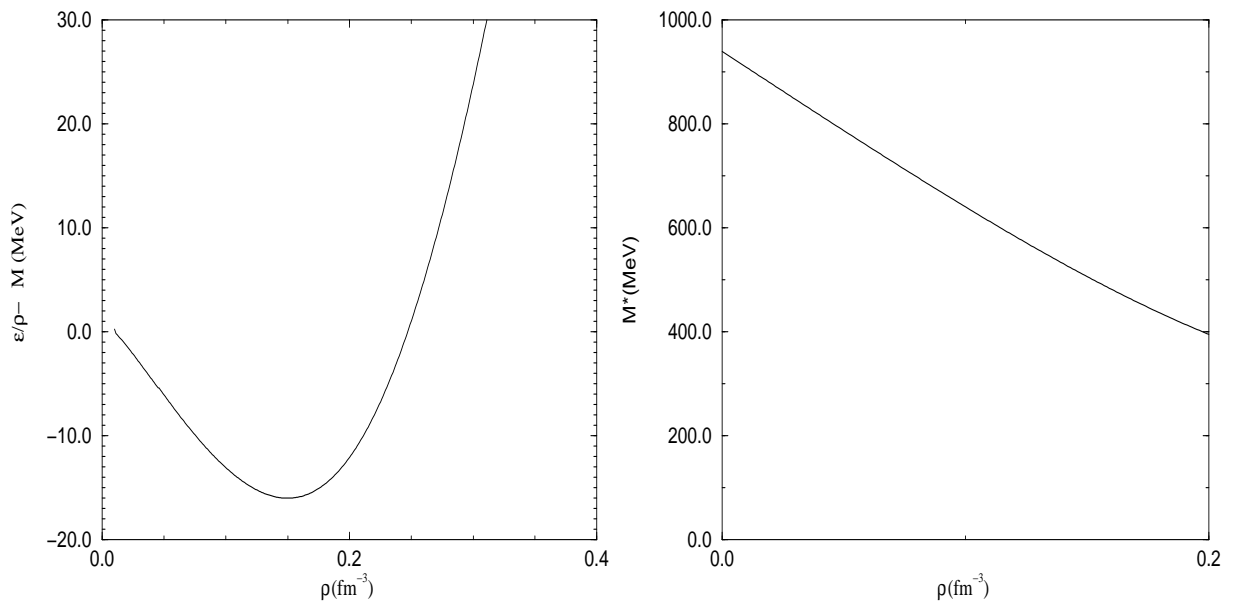


Figura 2.1: Painel esquerdo: Energia de ligação por núcleon no modelo de Walecka. Painel direito: Massa efetiva do núcleon no modelo de Walecka.

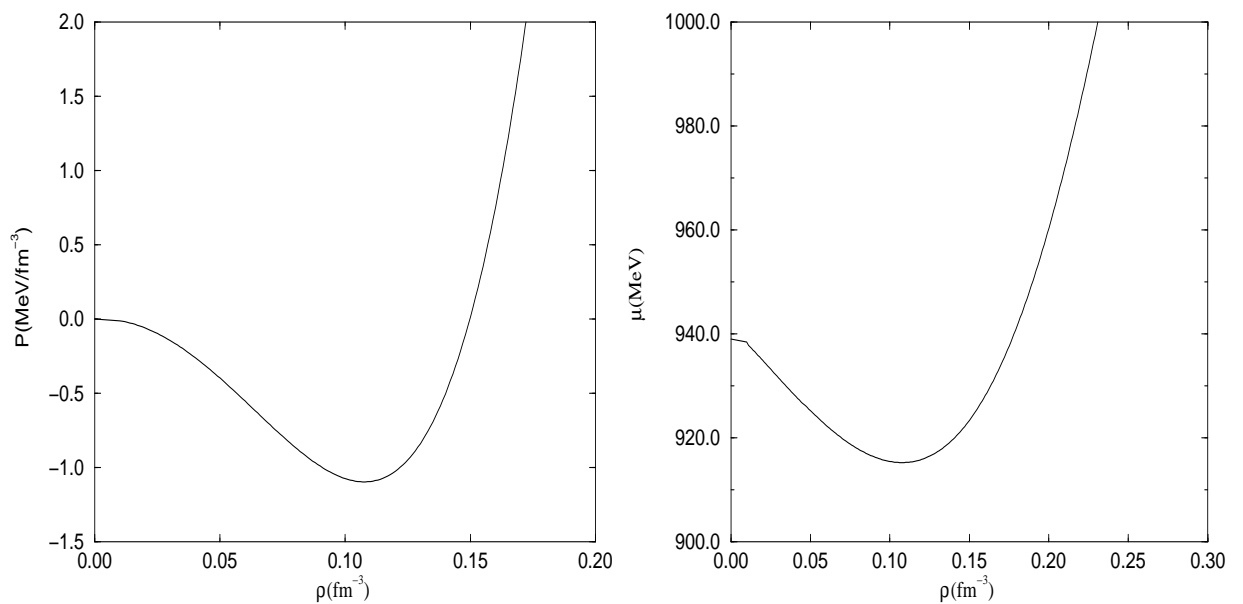


Figura 2.2: Painel esquerdo: Pressão da matéria nuclear no modelo de Walecka. Painel direito: Potencial químico do núcleon no modelo de Walecka.

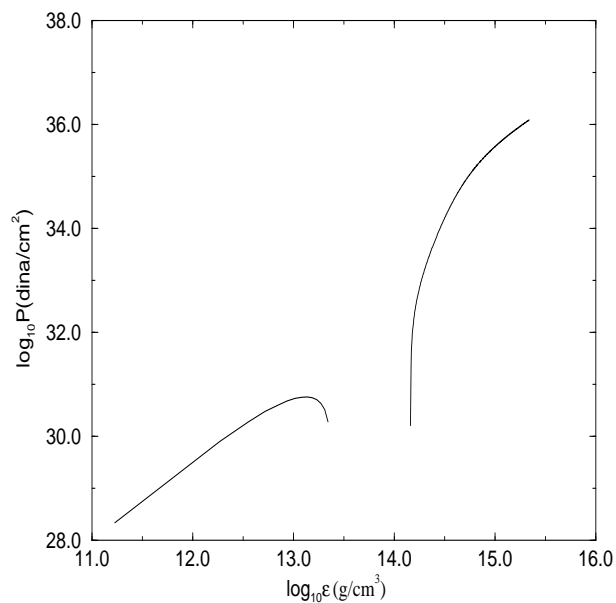


Figura 2.3: Equação de estado para a matéria de nêutrons no modelo de Walecka.

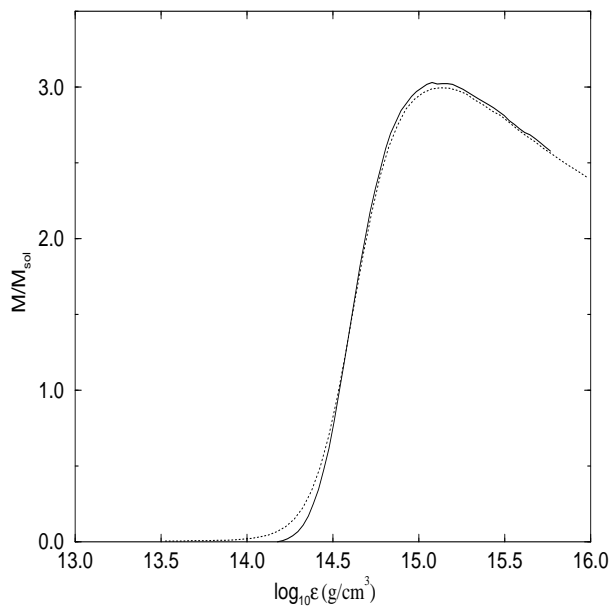


Figura 2.4: Sequência de estrelas de nêutrons usando equação de estado com (linha pontilhada) e sem (linha sólida) mésons ρ .

Capítulo 3

Vínculos Magnéticos

3.1 Introdução

Nas últimas décadas, a determinação de propriedades da equação de estado da matéria nuclear se tornou um dos principais objetivos da física nuclear. Observações astrofísicas, juntamente com a investigação da matéria hadrônica densa por meio de aceleradores de alta energia (*RHIC - Relativistic Heavy Ion Collider*, *LHC - Large Hadron Collider* e *CERN - The European Organization for Nuclear Research*) têm criado excelentes expectativas para esse campo de estudos [7][8].

As medições da massa e raio de estrelas de nêutrons podem restringir, de maneira expressiva, os parâmetros dos modelos que descrevem a equação de estado da matéria nuclear. Até pouco tempo, acreditava-se que o valor limite da massa de estrelas de nêutrons era $1.7 M_{\odot}$ [9], porque

- a presença de híperons na matéria nuclear estabeleceria uma massa limite em torno de $M \sim (1.5 - 2.0) M_{\odot}$;
- o valor mais aceito na literatura para o módulo de compressibilidade da matéria nuclear, $K \sim 240 \text{ MeV}$, reduziria o limite do item anterior para $M \sim (1.5 - 1.7) M_{\odot}$;
- estudos recentes indicam que a presença de condensados de káons não afetam de maneira expressiva essas previsões [10];
- as consequências de efeitos do campo magnético na estrutura da matéria nuclear tem sido subestimadas ou nem mesmo consideradas.

Recentemente, porém, foi detectada uma estrela de nêutrons com duas massas solares [11]. Esse resultado indica que características já conhecidas na determinação do grau de rigidez da equação de estado devem ser levadas em conta de maneira mais efetiva nas formulações teóricas, além de ser necessário buscar novas características.

Sabe-se que campos magnéticos são fundamentais na explicação de certos fenômenos astrofísicos, como supernovas e *gamma-ray bursts* (GRBs). Há um consenso de que *soft gamma repeaters* (SGRs) são magnetares (estrelas de nêutrons com campo magnético intenso). A grande quantidade de energia liberada por um objeto desses pode ser explicado pela presença de um campo magnético cuja intensidade é estimada em $B > 10^{14}G$.

A existência de magnetares motiva o estudo dos efeitos de campos magnéticos intensos nas propriedades de estrelas de nêutrons. Um campo magnético intenso altera a estrutura de uma estrela de nêutrons através da quantização de Landau das partículas carregadas e da interação dos momentos magnéticos com o campo magnético.

Na próxima seção, vamos discutir a quantização de Landau. Depois, vamos construir a densidade lagrangiana da matéria nuclear sob influência de um campo magnético uniforme e discutir seus efeitos.

3.2 Quantização de Landau

A quantização das órbitas de ciclotron de partículas carregadas em campos magnéticos é chamada de quantização de Landau. Como resultado, partículas carregadas podem ocupar apenas órbitas com valores discretos de energia, chamados de níveis de Landau. Os níveis de Landau são degenerados e o número de partículas por nível é diretamente proporcional à intensidade do campo magnético aplicado.

3.2.1 Derivação

Considere um sistema bidimensional de partículas não interagentes com carga elétrica q e spin S confinadas no plano $x - y$ em uma área $A = L_x L_y$. Aplicando um campo magnético uniforme na direção z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, o Hamiltoniano do sistema, usando o sistema CGS de unidades, fica

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{q\hat{\mathbf{A}}}{c} \right)^2. \quad (3.1)$$

Na expressão acima, $\hat{\mathbf{A}}$ é o potencial vetor eletromagnético, que satisfaz

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.2)$$

Há uma certa liberdade na escolha do potencial vetor para um dado campo magnético. No caso em consideração, podemos ter

$$\hat{\mathbf{A}} = (-\hat{y}B + a, 0, 0) \quad (3.3)$$

ou

$$\hat{\mathbf{A}} = (0, \hat{x}B + b, 0) \quad (3.4)$$

ou

$$\hat{\mathbf{A}} = \left(-\frac{1}{2}\hat{y}B + c, \frac{1}{2}\hat{x}B + d, 0\right), \quad (3.5)$$

onde a, b, c e d são constantes. Propriedades físicas não são influenciadas pela escolha do calibre. Para simplificar os cálculos, escolhemos o calibre de Landau (3.4). Nesse calibre, o Hamiltoniano é

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} - \frac{qB}{mc}\hat{x}\hat{p}_y + \frac{q^2B^2}{2mc^2}\hat{x}^2. \quad (3.6)$$

O operador \hat{p}_y comuta com esse Hamiltoniano já que o operador \hat{y} não está presente devido à escolha do calibre. Então o operador \hat{p}_y pode ser substituído pelo seu autovalor $\hbar k_y$. Para escrever o Hamiltoniano de forma mais simples, também notamos que a frequência de ciclotron é $\omega_c = \frac{qB}{mc}$. Assim,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 \left(\hat{x} - \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right)^2. \quad (3.7)$$

Esse é o Hamiltoniano para o oscilador harmônico quântico deslocado espacialmente por $x_0 = \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}$. Como esse deslocamento não altera as energias, temos

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \quad n \geq 0. \quad (3.8)$$

A função de onda é um produto dos autoestados de momentum na direção y com os autoestados de oscilador harmônico ϕ_n deslocados por x_0 na direção x , isto é,

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} \phi_n(x - x_0). \quad (3.9)$$

Assim, o estado da partícula é caracterizado pelos números quânticos n e k_y .

3.2.2 Níveis de Landau

Cada conjunto de funções de onda com o mesmo valor de n é um nível de Landau. Efeitos de nível de Landau são observados apenas quando a energia térmica média é menor do que a separação dos níveis de energia, $k_B T \ll \hbar\omega_c$, isto é, baixas temperaturas e/ou campos magnéticos intensos. Como as energias (3.8) não dependem do número quântico k_y , os níveis de Landau apresentam degenerescência.

Considerando condições periódicas de contorno, k_y pode assumir os valores $k_y = \frac{2\pi N}{L_y}$, onde N é um número inteiro. Como o centro do oscilador, x_0 , deve estar no intervalo $0 \leq x_0 \leq L_x$, obtemos

$$0 \leq N \leq \frac{m\omega_c L_x L_y}{2\pi\hbar}. \quad (3.10)$$

Para partículas com carga $q = Ze$, o limite superior de N pode ser escrito como

$$\frac{ZBL_x L_y}{\frac{hc}{e}} = Z \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (3.11)$$

onde $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ é o fluxo quântico fundamental e $\Phi = BA$ é o fluxo através do sistema. Então, para partículas com spin S , a degenerescência dos níveis de Landau é

$$D = Z(2S + 1) \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (3.12)$$

Quanto mais intenso é o campo magnético, mais partículas cabem em cada nível de Landau. Geralmente, níveis de Landau são observados em sistemas eletrônicos, onde $Z = 1$ e $S = \frac{1}{2}$. Assim, se o efeito Zeeman é levado em consideração, cada nível de Landau se divide em dois, um para cada orientação de spin e a degenerescência fica apenas $D = \frac{\Phi}{\Phi_0}$.

3.2.3 Discussão

Na derivação, tratamos x e y assimetricamente. No entanto, devido à simetria do sistema, não há uma quantidade física que diferencie essas coordenadas. Sendo assim, o mesmo resultado seria obtido com uma troca apropriada de x e y . Além disso, não permitimos que a partícula se movesse na direção z . Se levarmos esse movimento em consideração, a função de onda deve incluir um termo multiplicativo adicional $e^{ik_z z}$. A energia correspondente a esse movimento, $\frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$, deve ser adicionado à energia.

3.3 Modelo

Na presença de um campo magnético, o comportamento da equação de estado é significativamente alterado devido à quantização de Landau e à interação do campo magnético com os momentos magnéticos dos núcleons. A densidade lagrangiana (2.2) pode ser reescrita para incluir o campo magnético e as extensões propostas na seção 2.3 como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B \left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu + q_B A^\mu - g_{\omega B} \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\varrho B} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) \right. \\
& \left. - (m_B - g_{\sigma B} \sigma + \kappa_B \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \right] \psi_B \\
& + \sum_l \bar{\psi}_l [\gamma_\mu (i\partial^\mu + q_l A^\mu) - m_l] \psi_l \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \right) \\
& + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varrho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\varrho}^{\mu\nu} + m_\varrho^2 \boldsymbol{\varrho}_\mu \cdot \boldsymbol{\varrho}^\mu \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A densidade lagrangiana acima inclui o octeto bariônico fundamental (p, n, Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^- , Ξ^0), acoplado por três mésons (σ , ω , ϱ), e dois léptons livres (e, μ). As constantes de acoplamento, g_σ e g_ω , são determinadas a partir das propriedades da matéria nuclear na saturação. Já a constante de acoplamento g_ϱ é determinada a partir do coeficiente de assimetria a_A . Os momentos magnéticos anômalos são introduzidos através do acoplamento entre os bárions e o tensor eletromagnético com $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e intensidade κ_B .

3.4 Resultados

Aplicando as técnicas desenvolvidas no Capítulo 2 à densidade lagrangiana (3.13), pode-se encontrar expressões para a pressão e densidade de energia do sistema e, conseqüentemente, sua equação de estado. Os cálculos, porém, são mais complexos que os do Modelo de Walecka e, por isso, fogem do escopo deste trabalho. Vamos nos limitar a discutir resultados qualitativos obtidos na literatura.

Entre muitos resultados obtidos nesta área, destacamos:

- **Endurecimento da equação de estado** [12]. A quantização de Landau suaviza a equação de estado. Entretanto o endurecimento devido à interação do campo magnético com os momentos magnéticos dos núcleons se sobrepõe, de forma que a equação de estado fica mais rígida do que na ausência de campo magnético.
- **Anisotropia da pressão** [13]. Há uma anisotropia entre as pressões nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético, sendo a pressão na direção paralela muito maior. Em casos extremos de campos magnéticos muito intensos ($B \geq 10^{16} G$), a pressão perpendicular pode se anular, colapsando o sistema. Assim, uma estrela de neutrões magnetizada deve possuir um formato alargado na direção do campo magnético e, quanto mais intenso for o campo, mais alargado será o objeto.

- **Relevância dos efeitos magnéticos** [14]. Para campos magnéticos com intensidade entre $10^{15}G - 10^{18}G$, as propriedades da matéria nuclear são similares às aquelas na ausência de campo magnético. Apenas para $B > 10^{19}G$ os efeitos relativos aos momentos magnéticos tornam-se importantes.
- **Instabilidade** [15]. Estima-se, a partir de observações, que o campo magnético na superfície de magnetares é da ordem de $10^{15}G$. Acredita-se que no centro esse valor seja ainda maior. Quando $B_{centro} \sim 10^{19}G$, a matéria torna-se instável. Assim, há um limite para a intensidade do campo magnético no centro de estrelas de nêutrons.

Conclusões e Perspectivas

Devido à sua rica fenomenologia, estrelas de nêutrons têm sido detectadas e estudadas em regiões do espectro eletromagnético que compreendem desde as frequências de rádio até aquelas correspondentes a raios γ . As suas mais importantes fontes de energia compreendem efeitos resultantes de acreção de matéria, rotação e a presença de campos magnéticos intensos.

Nos limitamos a descrever, neste trabalho, através do Modelo de Walecka, as técnicas básicas utilizadas na modelagem de estrelas de nêutrons. A inclusão do campo magnético na densidade lagrangiana é direta, porém os cálculos são complexos, não sendo, portanto, desenvolvidos aqui.

Como vimos, há estudos já realizados envolvendo efeitos de campos magnéticos intensos em estrelas de nêutrons. Entre seus resultados, destacamos que o campo magnético interfere nas equações de estado desde que seja muito intenso. O efeito mais importante é o endurecimento da equação de estado devido à interação do campo magnético com os momentos magnéticos das partículas do sistema, proporcionando massas máximas maiores em comparação às previsões realizadas na ausência de magnetização estelar.

Entretanto, há uma série de questões em aberto envolvendo campos magnéticos intensos em estrelas de nêutrons. A maior parte dos pulsares são estrelas de nêutrons jovens contendo campos magnéticos intensos ($B \sim 10^{12}G$) e relativamente baixos períodos de rotação. Há porém um grupo de pulsares que rotam a velocidades angulares muito altas com períodos de rotação da ordem de milissegundo e que contém campos magnéticos relativamente fracos ($B \sim 10^9G$).

Muitos desses pulsares de milissegundo pertencem a sistemas binários, com uma estrela companheira de massa comparativamente mais baixa (em geral, uma anã branca). Um grande número desses pulsares tem sido identificados como emissores de raios X. A maior parte do interesse nesses sistemas binários reside no desejo de compreender a sua evolução por meio de processos de transferência de matéria, da estrela mais leve para a sua companheira, produzindo acréscimo de matéria e alteração do momentum angular da estrela de nêutrons. A compreensão desses processos, de sua natureza, e dos mecanismos que levam a modificações da estrutura e da intensidade do campo magnético de estrelas de nêutrons representa um importante desafio nos campos teórico e experimental.

Muitas estrelas de nêutrons se caracterizam como fontes transientes de emissão de

raios X, apresentando ciclos de explosão e ciclos de quietude. Essas fontes são ideais para o estudo da interação entre a magnetosfera de estrelas de nêutrons fracamente magnetizadas e o disco de acreção, dado que ocorre, como no caso anterior, transferência de matéria de uma estrela companheira, produzindo alterações nos ciclos explosão/quietude da correspondente estrela de nêutrons, com alterações em seu momentum angular e intensidade de campo magnético. Novamente, a compreensão da natureza desses processos e das correspondentes modificações no campo magnético estelar representa um grande desafio para a astrofísica e a astrofísica nuclear.

Recentemente, tem ocorrido um grande progresso em nossa compreensão sobre a natureza do campo magnético em estrelas de nêutrons por meio da detecção de linhas ciclotrônicas, bem como seus harmônicos em muitas e diversificadas fontes. Essas descobertas têm levado à conclusão que a ampla maioria das estrelas de nêutrons contém um campo magnético intenso desde seu nascimento. Os cientistas esperam que a utilização de modelos atmosféricos que descrevam o espectro dessas fontes emissivas possa redundar em medidas mais acuradas do raio de uma estrela de nêutrons, cujo valor está intimamente relacionado com a equação de estado da matéria nuclear a altas densidades.

Um outro fenômeno observado são as perdas intensas de energia por parte de estrelas de nêutrons. Algumas teorias indicam que essas perdas estariam associadas a campos magnéticos muito intensos ($B \sim 10^{15}G$). A compreensão dessas imensas perdas de energia representa também um desafio extraordinário para uma melhor compreensão desses objetos estelares.

Como possíveis próximos passos de nosso trabalho, temos

- Aplicar as técnicas desenvolvidas no Capítulo 2 à densidade lagrangiana (3.13) a fim de encontrar expressões para a pressão e densidade de energia do sistema e, conseqüentemente, sua equação de estado.
- Integrar numericamente a equação de TOV com a equação de estado obtida para determinar propriedades das estrelas de nêutrons como a massa máxima.
- Utilizar também outros modelos que possuem extensões adicionais ao Modelo de Walecka como, por exemplo, o Modelo de Boguta-Bodmer ou o Modelo Ajustável.

Apêndice A

Detalhes

A.1 Pressão e Densidade de Energia

Partindo das expressões (2.66) e (2.70), vamos chegar em (2.71) e (2.72). Para a pressão, temos

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3k \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + (m^*)^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Integrando a expressão acima, resulta

$$p = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{3}\frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + (m^*)^2}}. \quad (\text{A.2})$$

Essa integral pode ser resolvida analiticamente usando a fórmula (2.273-3) da Tabela Gradshteyn [16],

$$\int dx \frac{x^4}{\sqrt{a + cx^2}} = \frac{1}{4} \frac{x^3\sqrt{a + cx^2}}{c} - \frac{3ax}{8c^2} \sqrt{a + cx^2} + \frac{3a^2}{8c^2} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a + cx^2}). \quad (\text{A.3})$$

Neste caso, $x = k$, $a = (m^*)^2$ e $c = 1$. Então a expressão acima fica

$$\begin{aligned} \int dk \frac{k^4}{\sqrt{(m^*)^2 + k^2}} &= \frac{1}{4}k^3\sqrt{(m^*)^2 + k^2} - \frac{3}{8}(m^*)^2k\sqrt{(m^*)^2 + k^2} \\ &+ \frac{3}{8}(m^*)^4 \ln(k + \sqrt{(m^*)^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Calculando a integral entre os limites considerados em (A.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{(m^*)^2 + k^2}} &= \frac{1}{4} k_F^3 \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} - \frac{3}{8} (m^*)^2 k_F \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \\
&+ \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln(k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}) - \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln m^* \\
&= \left(\frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (m^*)^2 k_F \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \\
&+ \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Substituindo (A.5) em (A.2), ficamos com

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (m^*)^2 k_F \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right].
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Finalmente, usando a equação do campo ω na aproximação de campo médio (equação (2.23)) e a definição de massa efetiva (equação (2.26)), obtemos

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} - \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_F^3 - \frac{3}{8} (m^*)^2 k_F \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right].
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Para a densidade de energia, temos

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k (\sqrt{k^2 + (m^*)^2} + g_\omega \omega_0) \tag{A.8}$$

ou

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (m^*)^2} + g_\omega \omega_0 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k. \tag{A.9}$$

Substituindo (2.58) no último termo, ficamos com

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_0^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} d^3 k \sqrt{k^2 + (m^*)^2} + g_\omega \omega_0 \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \rho_B. \tag{A.10}$$

Integrando a expressão acima, resulta

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + g_\omega\omega_0\rho_B + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + (m^*)^2}. \quad (\text{A.11})$$

Essa integral pode ser resolvida analiticamente usando a fórmula (2.272-2) da Tabela Gradshteyn [16],

$$\int dx x^2 \sqrt{a + cx^2} = \frac{1}{4} \frac{x(\sqrt{a + cx^2})^3}{c} - \frac{1}{8} \frac{ax(\sqrt{a + cx^2})}{c} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{c} \frac{1}{\sqrt{c}} \ln(x\sqrt{c} + \sqrt{a + cx^2}). \quad (\text{A.12})$$

Neste caso, $x = k$, $a = (m^*)^2$ e $c = 1$. Então a expressão acima fica

$$\int dk k^2 \sqrt{k^2 + (m^*)^2} = \frac{1}{4} k(\sqrt{(m^*)^2 + k^2})^3 - \frac{1}{8} (m^*)^2 k(\sqrt{k^2 + (m^*)^2}) - \frac{1}{8} (m^*)^2 \ln(k + \sqrt{(m^*)^2 + k^2}). \quad (\text{A.13})$$

Calculando a integral entre os limites considerados em (A.11), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{(m^*)^2 + k^2} &= \frac{1}{4} k_F \left(\sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \right)^3 - \frac{1}{8} (m^*)^2 k_F \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln(k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}) + \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln m^* \\ &= \left(\frac{1}{8} (m^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \\ &\quad - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.14) em (A.11), ficamos com

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + g_\omega\omega_0\rho_B + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Usando a equação do campo ω na aproximação de campo médio (equação e a definição de massa efetiva, ficamos com

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m^*)^2 k_F + \frac{1}{4} k_F^3 \right) \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} (m^*)^4 \ln \frac{k_F + \sqrt{(m^*)^2 + k_F^2}}{m^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A.2 Constantes de Acoplamento

Vamos resolver o sistema das equações (2.77) e (2.78) e obter (2.79) e (2.80). Primeiramente, isolamos o termo que contém g_ω^2/m_ω^2 na primeira equação,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} &= -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_{F0}^3 - \frac{3}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} + \frac{3}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

e substituimos na segunda, resultando em

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 + \left\{ -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_{F0}^3 - \frac{3}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 \right\} \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} + \frac{1}{4} k_{F0}^3 \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Assim,

$$\varepsilon_0 = \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} k_{F0}^3 + \frac{1}{4} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} - \frac{1}{4} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} (m - m_0^*)^2 = \varepsilon_0 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} k_{F0}^3 + \frac{1}{4} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} - \frac{1}{4} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma^2} = \frac{\varepsilon_0}{(m - m_0^*)^2} - \frac{1}{(m - m_0^*)^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} k_{F0}^3 + \frac{1}{4} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} - \frac{1}{4} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Agora, substituindo (A.21) em (A.18), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} = & -\frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{4} k_{F0}^3 - \frac{3}{8} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} + \frac{3}{8} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 - \frac{\gamma}{2\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} k_{F0}^3 + \frac{1}{4} (m_0^*)^2 k_{F0} \right) \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} - \frac{1}{4} (m_0^*)^4 \ln \frac{k_{F0} + \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2}}{m_0^*} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{2} \frac{g_\omega^2 \rho_0^2}{m_\omega^2} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \left(-\frac{1}{6} k_{F0}^3 \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \frac{k_{F0}^3}{\rho_0^2} \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^2} \quad (\text{A.25})$$

Da equação (2.59), temos

$$k_{F0}^3 = \frac{6\pi^2}{\gamma} \rho_0. \quad (\text{A.26})$$

Substituindo (A.26) em (A.25), obtemos

$$\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} = -\frac{1}{\rho_0} \sqrt{(m_0^*)^2 + k_{F0}^2} + \frac{\varepsilon_0}{\rho_0^2}. \quad (\text{A.27})$$

A.3 Programa

O programa apresentado abaixo, desenvolvido em C, resolve o sistema (2.76)-(2.79)-(2.80), fornecendo os resultados numéricos apresentados na seção 2.2.6. Os dados de entrada são a energia de ligação por núcleon na saturação, a densidade bariônica na saturação e o fator de degenerescência (2 para matéria de nêutrons ou 4 para matéria nuclear).

```
#include<stdio.h>
#include <math.h>
#include<stdlib.h>

#define hc 197.327

main() {
double b,r,g,m,pi,k,e0,x,y,z,yn,dif,xr,t;

printf("Digite o valor da energia de ligacao por nucleon na saturacao\n");
scanf("%lf",&b);
printf("Digite o valor da densidade barionica na saturacao\n");
scanf("%lf",&r);
printf("Digite o valor da degenerescencia\n");
scanf("%lf",&g);

/*x= massa efetiva*/
/*y= (ms/gs)**2 = constante de acoplamento para meson sigma*/
/*z= (gw/mw)**2 = constante de acoplamento para meson omega*/

m=938.272/hc; /*Massa do nucleon em fm^-1*/
pi=3.14159;
k=cbrt((6*r*pow(pi,2))/g); /*Momentum de Fermi na saturacao em fm^-1*/
e0=r*(938.272-b); /*Densidade de energia na saturacao em Mev*fm^-3*/
e0/=hc; /*Densidade de energia na saturacao em fm^-4*/
```

```

for(x=0.1;x<=m;x+=0.01)
{
y=(e0/pow((m-x),2))-(1/pow((m-x),2))*(g/(2.*pow(pi,2)))*
(((1./6.)*pow(k,3)+(1./4.)*pow(x,2)*k)*sqrt(pow(k,2)
+pow(x,2))-(1./4.)*pow(x,4)*log((k+sqrt(pow(k,2)+pow(x,2)))/x));

yn=(1./y);

dif=x-(m-((yn*g*x)/(4*pow(pi,2)))*(k*sqrt(pow(k,2)+pow(x,2))
-pow(x,2)*log((k+sqrt(pow(k,2)+pow(x,2)))/x)));

if(sqrt(pow(dif,2))<0.01) break;
}

z=(-1/r)*sqrt(pow(k,2)+pow(x,2))+(e0/(pow(r,2)));

xr=x/m; /*Razao massa efetiva/massa do nucleon */

printf("O valor da razao massa efetiva/massa do nucleon eh %lf\n",xr);
printf("O valor da constante para o meson sigma eh %lf\n",yn);
printf("O valor da constante para o meson omega eh %lf\n",z);
system("PAUSE");
}

```

Referências Bibliográficas

- [1] WEIZSÄCKER, C. F. Zur Theorie der Kernmassen. *Zeitschrift für Physik*, v. 96, p. 431-458, 1935.
- [2] AUDI G.; BERSILLON O.; BLACHOT J.; WAPSTRA A. H. The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties. *Nuclear Physics A*, 729 (1), p. 3-128, 2003.
- [3] GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer, 1997.
- [4] RAZEIRA, M. Naturalidade, *Quebra de Simetria de Isospin e a Estrutura Interna das Estrelas de Nêutrons*. 2008. 245 f. Tese (Doutorado em Física) - Instituto de Física, UFRGS, Porto Alegre.
- [5] DEXHEIMER, V. A. *Compressibilidade da Matéria Nuclear em Estrelas de Nêutrons*. 1999. 170 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, UFRGS, Porto Alegre.
- [6] HUGENHOLTZ, N. M.; VAN HOVE, L. A theorem of the single particle energy in a Fermi gas with interaction. *Physica*, Amsterdam, v. 24, n. 2, p. 363-376, 1958.
- [7] XU, R. *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, v. 6, p. 279-286, 2006; *Journal of Physics G*, v. 36, 2009; *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, p. 1437-1446, 2010.
- [8] WEBER, F. *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, p. 1427-1436, 2010.
- [9] GLENDENNING N. K. *Compact stars: nuclear physics, particle physics, and general relativity*. Springer Verlag, 1996. 390 p.
- [10] FERNÁNDEZ, F.; MESQUITA, A.; RAZEIRA, M.; VASCONCELLOS, C. A. Z. *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, p. 1545-1548, 2010; *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, p. 1549-1552, 2010; *International Journal of Modern Physics D*, v. 19, p. 1553-1556, 2010.
- [11] DEMOREST, P. B.; PENUCCI, T.; RANSOM, S. M.; ROBERTS, M. S. E.; HESSELS, J. W. T. *Nature*, v. 467, p. 1081-1083, 2010.

- [12] BRODERICK, A.; PRAKASH, M.; LATTIMER, J. M. The Equation of State of Neutron Star Matter in Strong Magnetic Fields. *The Astrophysical Journal*, v. 537, p. 351-367, 2000.
- [13] MARTINEZ, A. P.; ROJAS, H. P.; CUESTA, J. M. Magnetic collapse of a neutron gas: Can magnetars indeed be formed? *European Physical Journal C*, v. 29, p. 111-123, 2003.
- [14] WEI, F. X.; MAO, G. J.; KO, C. M.; KISSLINGER, L. S.; STOECKER H.; GREINER, W. Effect of isovector-scalar meson on neutron star matter in strong magnetic fields. *Journal of Physics G*, v. 32, 2006.
- [15] SINHA, M.; MUKHOPADHYAY, B. Instability of neutron star matter in high magnetic field: constraint on central magnetic field of magnetars. arXiv:1005.4995v2.
- [16] GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Fifth edition. Academic Press, 1994. 1204 p.