MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÕES UNIFICADAS PARA MODELOS COM FREQÜÊNCIA DE COLISÃO VARIÁVEL DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

por

Mariza de Camargo

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, janeiro de 2003

SOLUÇÕES UNIFICADAS PARA MODELOS COM FREQÜÊNCIA DE COLISÃO VARIÁVEL DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

por

Mariza de Camargo

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof^a. Dra. Liliane Basso Barichello

Comissão de Avaliação:

Prof. PhD. Charles Edward Siewert (NCSU/USA)

Prof. PhD. Roberto David Martinez Garcia (CTA-IEAv-SP)

Prof. PhD. Rudnei Dias da Cunha (PPGMAp/UFRGS-RS)

Prof. Dr. Marco Túllio Mena Barreto de Vilhena (PROMEC/UFRGS-RS)

Prof. PhD. Jun Sérgio Ono Fonseca
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 30 de janeiro de 2003

Dedico esta Tese ao amor da minha vida, Allan,
por todo seu amor, amizade, companheirismo e paciência,
que foram fundamentais para que hoje esse trabalho esteja concluído.

AGRADECIMENTOS

À professora Liliane, por todos os seus ensinamentos, experiência e desafios que fizeram com que esse trabalho atingisse seus objetivos e também por toda a sua amizade, carinho que nos fez ter uma relação bem maior do que orientadora $\times$ aluna.

Ao Professor Siewert, que sempre esteve disposto a discutir o trabalho bem como os resultados numéricos.

Aos professores da banca, que dedicaram o seu tempo e conhecimentos para avaliarem esse trabalho.

A Paty, fiel amiga desde os tempos da graduação com qual dividi muito mais do que conhecimentos nesses dez anos que estudamos, viajamos, trabalhamos e moramos juntas.

A minha familia, que sempre me apoiou durante essa caminhada, sempre entendendo a minha ausência e a falta de tempo.

Aos professores do PROMEC/UFRGS e ao professor Nelson Conte -URI/FW, por sempre terem organizado os horários de aula de tal forma que pudesse estudar de segunda a quarta e trabalhar quinta e sexta.

Aos colegas do PROMEC/UFRGS, por todos os estudos e troca de conhecimentos.

Ao amigo Rosinei, pelas muitas discussões sobre gases rarefeitos e pelo apoio e incentivo.

Aos meus colegas do curso de Matemática da URI/FW, pelo apoio e amizade.

A todos os acadêmicos que foram meus alunos durante esta etapa.

A todos os amigos que cultivei nesse período e às novas amizades que surgiram.

A Deus, Cristo, Nossa Senhora Aparecida e Santo Expedito aos quais rezei nas horas de dificuldades e aos quais agradeci quando conseguia passar por mais uma etapa.

RESUMO

SOLUÇÕES UNIFICADAS PARA MODELOS COM FREQÜÊNCIA DE COLISÃO VARIÁVEL DA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

Neste trabalho, uma versão analítica do método de ordenadas discretas é usada para desenvolver soluções para alguns problemas da dinâmica de gases rarefeitos, baseado em um modelo com freqüência de colisão variável (modelo CLF) da equação de Boltzmann linearizada. Em particular, resultados numéricos obtidos para os problemas de salto de temperatura, fluxo de Poiseuille, fluxo de Couette, Kramers, creep-térmico e deslizamento térmico são apresentados e discutidos.

Autor: Mariza de Camargo

Orientador: Prof^a. Dra. Liliane Basso Barichello

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, janeiro de 2003.

ABSTRACT

UNIFIED SOLUTIONS FOR VARIABLE COLLISION FREQUENCY MODELS OF THE RAREFIED GAS DYNAMICS

In this work, an analytical version of the discrete-ordinates method is used to develop solutions for some problems of the rarefied gas dynamics, based on a variable collision frequency model (CLF model) of the linearized Boltzmann equation. In particular, numerical results obtained for the temperature jump problem, Poiseuille flow problem, Couette flow problem, Kramers' problem, thermal creep and thermal slip problem are presented and discussed.

Author: Mariza de Camargo

Orientador: Prof^a. Dra. Liliane Basso Barichello

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de Doutorado em Engenharia

Porto Alegre, janeiro de 2003.

ÍNDICE

LISTA DE SÍMBOLOS

	Letras Romanas
$\mathbf{c}$	Velocidade molecular
$F(\mathbf{c} : \mathbf{c}')$	Núcleo de espalhamento sintético
$f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Função de distribuição de partículas
$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Maxwelliana local
$g(x, c, \mu)$	Média azimutal para os problemas de fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, Kramers, creep-térmico e deslizamento térmico
$h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$	Perturbação causada à maxwelliana local
$J(f', f)$	Operador de colisão
$K(\mathbf{c} : \mathbf{c}')$	Núcleo de espalhamento
N	Ordem de quadratura de Gauss
$N(x)$	Desvio de densidade
$n(\mathbf{r})$	Densidade de partículas
P_{xz}	Pressão
Q	Taxa de fluxo de calor
$q(x)$	Perfil de fluxo de calor
$S(\mathbf{c})$	Termo de fonte
$T(x)$	Desvio de temperatura
U	Taxa de massa
$u(x)$	Perfil de velocidade
$u(\mathbf{r})$	Velocidade do gás
$\mathbf{v}$	Vetor velocidade de partículas
w_i	Pesos da quadratura
	Letras Gregas
α	Coeficiente de acomodação

$\eta(c)$	Frequência de colisão das partículas de gás
λ_*	Condutividade térmica
μ_*	Viscosidade
$\phi(x, c, \mu)$	Média azimutal para o problema de salto de temperatura
$\Psi(\xi)$	Matriz característica
$\psi(\xi)$	Função característica
τ	Variável espacial adimensional
ξ_i	Pontos de quadratura
ζ	Coeficiente de salto de temperatura
ζ_P	Coeficiente de deslizamento viscoso
ζ_T	Coeficiente de deslizamento térmico

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os fenômenos que envolvem a dinâmica de gases rarefeitos podem ser descritos matematicamente pela equação de Boltzmann. Os livros de Cercignani [Cercignani, 1988; Cercignani, 1990] e Williams [Williams, 1971] bem como um recente trabalho de Sharipov e Seleznev [Sharipov e Seleznev, 1998] apresentam um excelente material na área da dinâmica de gases, trazendo conceitos básicos, formulação de problemas clássicos e equações modelo mais usadas. De forma geral pode-se dizer que essas equações modelo são modelos simplificados, obtidos a partir da equação original, buscando-se preservar propriedades físicas.

O interesse por pesquisas na área da dinâmica de gases rarefeitos tem se intensificado no decorrer dos anos essencialmente por suas aplicações em nanotecnologia, relacionada, por exemplo, a micro-máquinas [Sharipov, 1999b] e a microfluidos [Sharipov e Kalempa, 2003]. Sharipov e Seleznev [Sharipov e Seleznev, 1998] apontam que o fenômeno da transpiração térmica que existe em fluxos internos produzidos por um gradiente de temperatura ou pressão, continuam a atrair a atenção dos cientistas devido a suas aplicações em sistemas micro-elétrico-mecânicos (MEMS) [Arkilic et al., 1997; Sharipov, 1999a].

Seguindo Sharipov e Kalempa [Sharipov e Kalempa, 2003], pode-se ainda citar outras aplicações que envolvem a dinâmica de gases rarefeitos, como estudos aerodinâmicos [Anderson, 1969; Kogan, 1992] e equipamentos de vácuo [Dushman, 1962; Roth, 1976; Wutz et al., 1989; Sharipov, 1999a]. Assim há necessidade de se continuar investigando modelos matemáticos e métodos computacionais para tratamento dos problemas da dinâmica dos gases, já que nos dias de hoje dispõe-se de ferramentas computacionais muito mais avançadas do que anos atrás. Em muitos casos o fluxo está no regime de transição e assim as equações de Navier-Stokes não podem ser usadas, sendo, neste caso, necessária a equação de Boltzmann ou as equações modelos.

Ao longo dos anos, estudos têm sido feitos relacionados ao tratamento da equação de Boltzmann propriamente dita [Sone et al., 1989; Loyalka e Hickey, 1989; Sone et al., 1990; Siewert, 2003a; Siewert, 2003b], bem como voltados ao tratamento das equações modelos, para a solução de problemas clássicos [Zou et al., 1995; Camargo et al., 2000; Barichello et al., 2001; Sharipov et al., 2001; Barichello et al., 2002a; Siewert, 2002e]. No caso dos modelos mencionados, pode-se citar: o modelo BGK [Bhatnagar et al., 1954], o modelo S proposto por Shakhov [Shakhov, 1974], o modelo CLF, modelo devido a Cercignani [Cercignani, 1966] e Loyalka e Ferziger [Loyalka e Ferziger, 1968] e os modelos CES e CEBS propostos recentemente [Barichello e Siewert, 2002], que são baseados na construção de núcleos sintéticos, usando soluções exatas da equação de Boltzmann linearizada (esferas rígidas). Nota-se que nos modelos BGK e S a frequência de colisão das partículas é considerada constante enquanto que nos demais é dependente da velocidade. Ainda, o modelo CLF, na verdade, pode ser visto como um caso particular do modelo CES.

No contexto dos métodos determinísticos, para resolução de problemas clássicos [Cercignani, 1965a; Cercignani, 1965b; Siewert et al., 1980] baseados em modelos provindos de uma versão linearizada da equação de Boltzmann, o método de ordenadas discretas pode ser usado. Segundo Garcia [Garcia, 2002], a versão original do método de ordenadas discretas foi introduzida por Wick [Wick, 1943] e Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950] e tem como base a aproximação da integral angular do termo de espalhamento da equação de transporte por uma quadratura numérica. Este método foi estudado por Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1950] principalmente em problemas de transferência radiativa.

Em 1999 Barichello e Siewert [Barichello e Siewert, 1999a] propuseram uma reformulação do método de ordenadas discretas, analítica em termos da variável espacial, que difere basicamente da proposta de Chandrasekhar pelo uso de um esquema de quadratura mais arbitrário, e pela determinação das constantes de separação, que então podem ser encontradas a partir da resolução de um problema de autovalores.

Imediatamente após o desenvolvimento dessa nova versão do método de ordenadas discretas, Barichello et al. [Barichello et al., 2000] propuseram uma técnica para encontrar soluções particulares para versões não homogêneas da equação em ordenadas discretas com base na função de Green, e estudos relacionados à vários problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos baseados nesta reformulação do método de ordenadas discretas foram desencadeados a partir da investigação do problema de fluxo de Poiseuille [Barichello e Siewert, 1999b] em canal plano descrito pelo modelo BGK.

Continuando, buscando exemplificar a aplicação da nova versão do método de ordenadas discretas analítico (ADO), cita-se aqui o trabalho de Barichello e Siewert [Barichello e Siewert, 2000] onde foi solucionado o problema de salto de temperatura descrito segundo o modelo BGK e o trabalho de Siewert [Siewert, 2000] em geometria cilíndrica onde foram investigados o problema de fluxo de Poiseuille e o problema creep-térmico também descritos pelo modelo BGK.

No ano de 2001, a solução ADO foi usada para resolver de maneira unificada [Barichello et al., 2001] alguns problemas clássicos de gases rarefeitos baseados no modelo BGK. Neste mesmo ano, Siewert e Valougeorgis [Siewert e Valougeorgis, 2001] aplicaram esta nova versão para estabelecer uma solução precisa para o problema de salto de temperatura para uma mistura de dois gases, sendo que a análise desse problema é baseado nas equações do modelo BGK. Ainda Siewert [Siewert, 2001a] resolveu o problema de fluxo de Couette, descrito pelo modelo BGK, para mistura de gases em canal plano.

Recentemente, no ano de 2002, novos modelos foram propostos: o modelo CES [Barichello e Siewert, 2002; Siewert, 2002c; Siewert, 2002d; Siewert, 2002e] que é o caso geral do modelo CLF [Siewert, 2001b; Barichello et al., 2002a] e o CEBS [Barichello e Siewert, 2002]. Além disso, também tem sido investigada uma abordagem recente onde o método de ordenadas discretas está associado à solução do problema resultante a partir de uma decomposição, em polinômios ortogonais na variável velocidade, da solução da equação de Boltzmann linearizada (LBE). Tendo como base soluções obtidas via versão analítica do método de ordenadas discretas, tem-se trabalhado na obtenção de resultados numéricos comparativos entre equações modelo e equação de Boltzmann linearizada (LBE). É claro que, com isso, busca-se fundamentar a escolha de métodos e modelos no tratamento de problemas associados aos gases rarefeitos, para os quais se possa ter um balanço eficiente entre preservação de propriedades físicas do modelo e eficiência computacional.

Assim, o objetivo desse trabalho é estender a utilização do método de ordenadas discretas analítico, já que o mesmo vem sendo muito usado em problemas da dinâmica de gases, obtendo-se resultados satisfatórios, para resolver de maneira unificada problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos obtidos a partir de uma versão linearizada da equação de Boltzmann para um modelo com freqüência de colisão variável, segundo o modelo CLF [Cercignani, 1966; Loyalka e Ferziger, 1968]. Nota-se que casos especiais são incluídos nesse modelo, quais sejam i) o modelo BGK (freqüência constante), ii) o modelo de Williams (a freqüência de colisão é proporcional à velocidade da partícula) e iii) o modelo de esferas rígidas.

Seguindo essa abordagem, tratou-se inicialmente [Barichello et al., 2002a] o problema de salto de temperatura [Welander, 1954], para o qual se conhecia resultados de Cassel e Williams [Cassell e Williams, 1972] segundo o modelo (ii) e considerando o caso de reflexão apenas difusa (coeficiente de acomodação igual a um) e de Bartz [Bartz, 2000], que usou o mesmo modelo (ii) para descrever a freqüência de colisão, seguindo uma abordagem diferenciada (escalar) da Ref. [Barichello et al., 2002a].

A partir dos resultados satisfatórios para o problema de salto de temperatura decidiu-se investigar, na busca de soluções unificadas, ou seja, com uma metodologia comum e baseados no modelo CLF, outros problemas, como fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, creep e deslizamento térmico e problema de Kramers. Nota-se que o problema de Kramers, apesar de já ter sido abordado por Siewert [Siewert, 2001b], foi também implementado nesse trabalho, como forma de validar aqueles resultados e usar o programa como experiência na implementação dos demais problemas.

Pretende-se aqui comparar os resultados obtidos com o modelo CLF, principalmente com resultados obtidos por Siewert com o modelo CES [Siewert, 2002c; Siewert, 2002d; Siewert, 2002e] e pela equação de Boltzmann linearizada [Siewert, 2003a; Siewert, 2003b], já que o método analítico de ordenadas discretas [Barichello e Siewert, 1999a] também tem sido utilizado na solução desses problemas.

Assim, para compor esse trabalho, apresenta-se, no capítulo 2, parte da modelagem na dinâmica de gases rarefeitos e, no capítulo 3, a formulação matemática para todos os problemas citados anteriormente. No capítulo 4 descreve-se o método de ordenadas discretas e apresenta-se descrição de quantidades específicas relevantes para cada problema, avaliadas para os três casos da freqüência de colisão. Os resultados numéricos são apresentados no capítulo 5 e, finalmente, no capítulo 6, algumas conclusões são comentadas.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM NA DINÂMICA DE GASES RAREFEITOS

Os modelos pelos quais os problemas da dinâmica de gases são descritos dependem do seu estado de rarefação. Este estado é usualmente classificado pelo número de Knudsen [Sharipov e Seleznev, 1998], definido como a razão entre o livre caminho médio das moléculas e algum comprimento característico, que pode ser, por exemplo, o raio de um tubo cilíndrico ou a largura de um canal. Assim podemos distinguir três regimes para o fluxo do gás [Sharipov e Seleznev, 1998]: quando o número de Knudsen é pequeno ($Kn \ll 1$), o fluxo de um gás pode ser considerado como um meio contínuo (regime hidrodinâmico); no caso extremo ($Kn \gg 1$), onde o livre caminho médio das moléculas é tão grande que colisões de moléculas com a parede ocorrem mais freqüentemente que colisões entre moléculas; nestas condições podem-se desconsiderar as colisões intermoleculares e considerar que as moléculas movem-se independentes umas das outras; este regime é chamado regime molecular livre; quando o número de Knudsen tem algum valor intermediário [Bellouquid, 1999] diz-se que o gás está no regime de transição.

Neste capítulo apresentam-se aspectos básicos na descrição de um gás no regime de transição , como a equação de Boltzmann, adimensionalização da mesma, condições de contorno, quantidades de interesse e as chamadas equações modelos.

2.1 Equação de Boltzmann

O estado de um gás rarefeito monoatômico é descrito por uma função distribuição de partículas $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, onde $\mathbf{r}$=(x, y, z) é um vetor de coordenadas espaciais e $\mathbf{v}$=(v_x, v_y, v_z)

é o vetor velocidade das partículas. A função distribuição é definida tal, que a quantidade $f(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ é o número de partículas esperado no espaço de fase $d\mathbf{r}d\mathbf{v}$ próximo ao ponto $(\mathbf{r},\mathbf{v})$. Quantidades de interesse relativas ao fluxo desse gás podem ser calculadas via essa função distribuição, como, por exemplo [Williams, 2001]:
a densidade de partículas

$$n(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{v}, \tag{2.1}$$

a velocidade do gás na direção z

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})}\int v_z f(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{v} \tag{2.2}$$

e a tensão de cisalhamento

$$P_{xz} = \int v_x v_z f(\mathbf{r},\mathbf{v})d\mathbf{v}. \tag{2.3}$$

A função distribuição de partículas $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ satisfaz a equação íntegro-diferencial não linear de Boltzmann [Williams, 2001]

$$\mathbf{v}\cdot\nabla_r f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = J(f',f), \tag{2.4}$$

onde J representa o operador de colisão, f e f' são, respectivamente, as funções de distribuição de partículas antes e após as colisões. Juntamente com a Eq. (2.4) são consideradas condições de contorno apropriadas que descrevem a interação das partículas com a superfície, por exemplo, das paredes de um canal.

Uma descrição detalhada da derivação e propriedades da equação de Boltzmann para gases rarefeitos encontra-se, por exemplo, nos livros de Williams [Williams, 1971] e Cercignani [Cercignani, 1988; Cercignani, 1990] e no trabalho de Sharipov e Seleznev [Sharipov e Seleznev, 1998]. Resultados quanto à existência, unicidade e comportamento de soluções estão, na literatura, muitas vezes associados aos trabalhos de Cercignani [Cercignani, 1988; Cercignani, 1990; Cercignani, 1974]. Faz-se necessário, contudo, salientar aqui alguns aspectos básicos para desenvolvimento das soluções propostas neste trabalho.

De forma geral, para situações fracamente fora do equilíbrio, a função de distribuição é escrita na forma

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{r},\mathbf{v})[1 + h(\mathbf{r},\mathbf{v})], \tag{2.5}$$

onde h representa uma pequena ($\mid h \mid \ll 1$) perturbação causada à distribuição Maxwelliana local $f_0(\mathbf{r},\mathbf{v})$ pela presença, por exemplo, de uma superfície de fronteira. A forma geral da Maxwelliana local $f_0(\mathbf{r},\mathbf{v})$ segundo Williams [Williams, 2001] pode ser escrita como

$$f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}) = n_\infty(\mathbf{r})\Big[\frac{m}{2\pi k T_\infty(\mathbf{r})}\Big]^{3/2}\exp\Big[-\frac{m\{v_x^2 + v_y^2 + [v_z - u_1(x)]^2\}}{2kT_\infty(\mathbf{r})}\Big] \tag{2.6}$$

onde, $\mathbf{r}$=(x, y, z) é o vetor de coordenadas espaciais, m é a massa molecular, k é a constante de Boltzmann, $\mathbf{v}$=(v_x, v_y, v_z) é o vetor velocidade das partículas, n_∞ e T_∞ são, respectivamente, densidade e temperatura. Assume-se, por exemplo, no caso de dependência espacial bidimensional, que n_∞, T_∞ e u são funções lineares descritas na forma

$$n_\infty(x, z) = n_0(1 + R_x x + R_z z), \tag{2.7}$$

$$T_\infty(x, z) = T_0(1 + K_x x + K_z z) \tag{2.8}$$

e

$$u_1(x) = Kx \tag{2.9}$$

onde n_0 e T_0 são, respectivamente, densidade e temperatura de referência, K é um gradiente na direção x, R_i e K_i são gradientes de densidade e temperatura na direção i, respectivamente. Ao se desconsiderar a dependência espacial na Eq. (2.6), $f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_{00}(\mathbf{v})$ é chamada Maxwelliana absoluta. Posteriormente no capítulo 3, nesse trabalho, casos particulares da Eq. (2.6) são apresentados, em geometrias específicas para os problemas abordados.

Dessa forma, partindo-se da Eq. (2.5), a determinação da função distribuição f se dará em termos da distribuição h (anexo A), em geral seguindo alguns passos básicos [Williams, 1971; Williams, 2001]:

• substitui-se a Eq. (2.5) na Eq. (2.4);

• usam-se propriedades de simetria, da função freqüência de espalhamento diferencial, para a colisão entre dois corpos;

- desprezam-se termos da ordem de O(h^2);
- procede-se a adimensionalização da forma

$$c = \upsilon\Big[\frac{m}{2kT_0}\Big]^{1/2} \tag{2.10}$$

e

$$K_0 = K\Big[\frac{m}{2kT_0}\Big]^{1/2}, \tag{2.11}$$

e assim chega-se a uma equação para h, relativamente à qual passam a ser calculadas as quantidades de interesse. Escreve-se a chamada equação de balanço resultante na forma

$$S(\mathbf{c}) + c_x\frac{\partial}{\partial x^*}h(x^*,\mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} L\{h\}(x^*,\mathbf{c}) \tag{2.12}$$

onde S($\mathbf{c}$) é termo de fonte e será especificado de acordo com cada problema , $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ e o processo de colisão é descrito por

$$L\{h\}(x^*,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x^*,\mathbf{c}) + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c_x^2+c_y^2+c_z^2)}K(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x^*,\mathbf{c}')dc_z dc_y dc_x. \tag{2.13}$$

Escrevendo-se o vetor velocidade (adimensional) em coordenadas esféricas (c, arccosμ, χ), ou seja, usando-se que $c_x = c\mu$, $c_y = c(1-\mu^2)^{1/2}sen\chi$ e $c_z = c(1-\mu^2)^{1/2}cos\chi$, rescreve-se a Eq. (2.12) na forma

$$S(\mathbf{c}) + c\mu\frac{\partial}{\partial x^*}h(x^*,\mathbf{c}) = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} L\{h\}(x^*,\mathbf{c}) \tag{2.14}$$

sendo que o processo de colisão é agora descrito por

$$L\{h\}(x^*,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x^*,\mathbf{c}) + \int_0^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2}K(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x^*,\mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc'. \tag{2.15}$$

Aqui, então,

$$h(x^*,\mathbf{c}) \Rightarrow h(x^*, c, \mu, \chi), \tag{2.16}$$

x^* é a variável espacial (medida em cm), n_o é a densidade das partículas de gás (constante), σ_0 é o diâmetro de colisão das partículas de gás (aproximação em esferas rígidas), $\eta(c)$ é a freqüência de colisão das partículas e $K(\mathbf{c}',\mathbf{c})$ é chamado núcleo de espalhamento, que será tratado com maiores detalhes adiante.

2.2 Adimensionalização

Neste ponto, no sentido de introduzir o conceito do livre caminho médio l, considera-se a versão homogênea da Eq. (2.14) e usa-se a variável adimensional $x = x^*/l$ reescrevendo-a da seguinte forma

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x} h(x, \mathbf{c}) = \sigma L\{h\}(x, c) \tag{2.17}$$

onde o operador L é dado na equação (2.15) e

$$\sigma = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l. \tag{2.18}$$

A determinação do livre caminho médio l é feita em termos da viscosidade [Loyalka e Hickey, 1989]

$$l = l_p = (\mu_*/p_0)(2kT_0/m)^{1/2} \tag{2.19}$$

ou da condutividade térmica [Loyalka e Ferziger, 1968]

$$l = l_t = [4/\lambda_*/(5n_0k)][m/(2kT_0)]^{1/2} \tag{2.20}$$

onde T_0 é temperatura (constante), m é a massa molecular, k é a constante de Boltzmann, $p_0 = n_0kT_0$ é a pressão, (μ_*) é a viscosidade e (λ_*) é a condutividade térmica.

Adiante será mostrado como a determinação da viscosidade e condutividade, por sua vez, dependem da solução da própria equação de Boltzmann.

2.3 Condições de Contorno

A descrição da interação gás-superfície, neste trabalho, segue o modelo (clássico) difuso-especular, ou seja, especifica-se a forma como as partículas interagem com a superfície, considerando que uma fração de partículas $(1 - \alpha)$ é refletida especularmente e a fração restante α é refletida difusivamente. Outras formas de interação gás-partículas são propostas na literatura [Cercignani, 1990; Siewert, 2002a; Sharipov, 2002]. Usam-se também as versões linearizadas das condições de contorno [Williams, 2001].

Para os problemas considerados entre duas placas paralelas, localizadas em $x = \pm a$, têm-se, as condições de contorno escritas na forma

$$h(-a, c, \mu, \chi) - (1-\alpha)h(-a, c, -\mu, \chi) = F_1(\mathbf{c}) + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(-a, c', -\mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc' \quad (2.21)$$

e

$$h(a, c, -\mu, \chi) - (1-\alpha)h(a, c, \mu, \chi) = F_2(\mathbf{c}) + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(a, c', \mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \quad (2.22)$$

onde $\mu \in (0, 1]$, $c \in [0, \infty)$, $\chi \in [0, 2\pi]$, $F_1(\mathbf{c})$ e $F_2(\mathbf{c})$ são especificados, dependendo de cada problema e $\alpha \in (0, 1]$ é chamado coeficiente de acomodação [Sharipov e Seleznev, 1998].

Já para os problemas em meio semi-infinito considera-se, além de uma condição de contorno do tipo da Eq. (2.21) uma condição associada ao comportamento no infinito.

2.4 Quantidades de Interesse

Neste trabalho, abordam-se alguns problemas da dinâmica de gases rarefeitos, tais como problema de salto de temperatura, fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, problema de Kramers, problema de deslizamento térmico e creep-térmico. Para tais problemas objetiva-se avaliar algumas quantidades de interesse. A expressão final da determinação dessas quantidades depende sobre a forma da maxwelliana usada na Eq. (2.5). Supondo, de forma geral, que a linearização usada é em termos da Maxwelliana absoluta, obtêm-se expressões em termos de h, por exemplo, para
o desvio de densidade

$$N(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c^2 e^{-c^2} h(x, c, \mu, \chi) d\chi d\mu dc, \quad (2.23)$$

e a tensão de cisalhamento

$$P_{xz} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c^4 e^{-c^2} \mu (1-\mu^2)^{1/2} h(x,c,\mu,\chi) \cos\chi d\chi d\mu dc \tag{2.24}$$

e perfil de velocidade

$$u(x) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c^3 e^{-c^2} (1-\mu^2)^{1/2} h(x,c,\mu,\chi) \cos\chi d\chi d\mu dc. \tag{2.25}$$

2.5 Núcleos Sintéticos e Equações Modelo

No que diz respeito à descrição do núcleo de espalhamento (em esferas rígidas) $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$, presente na Eq. (2.15), Pekeris e Alterman [Pekeris e Alterman, 1957] propuseram uma expansão em termos de polinômios de Legendre para representá-lo. Com o uso do teorema da adição dos harmônicos esféricos escreve-se o núcleo de espalhamento na forma [Pekeris e Alterman, 1957]

$$K(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) k_n(c', c) \cos m(\chi' - \chi), \tag{2.26}$$

onde as funções de Legendre normalizadas são dadas por

$$P_n^m(\mu) = \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu), \qquad n \geq m, \tag{2.27}$$

$P_n^m(\mu)$ denotam os polinômios de Legendre e expressões para as componentes $k_n(c', c)$ (para alguns valores de n) podem ser encontradas no paper de Pekeris e Alterman [Pekeris e Alterman, 1957].

Em geral, uma representação simplificada do núcleo de espalhamento não depende apenas de um simples truncamento na Eq. (2.26), uma vez que a dificuldade numérica está basicamente nos componentes $k_n(c', c)$ requeridos na Eq. (2.26), que tem derivadas (já para valores pequenos de n), que são descontínuas em $c' = c$.

Devido, então, à complexidade do modelo, para tratamento de gases de rarefação arbitrária, foram desenvolvidas abordagens, ditas equações modelo, que se baseiam fundamentalmente na simplificação e linearização da Eq. (2.4). Entre os modelos encontrados na literatura, tem-se, por exemplo, o modelo mais conhecido (BGK) que foi introduzido por Bhatnagar, Gross e Krook [Bhatnagar et al., 1954], o modelo S proposto por Shakhov [Shakhov, 1974], os modelos CES e CEBS propostos recentemente [Barichello e Siewert, 2002] e o modelo de freqüência de colisão variável (CLF), devido a Cercignani [Cercignani, 1966] e Loyalka e Ferziger [Loyalka e Ferziger, 1968], sendo esse último modelo o que vai ser usado neste trabalho.

De forma geral, pode-se dizer que, para obter-se esses modelos, substituem-se as componentes exatas $k_n(c', c)$ de uma forma truncada do núcleo de espalhamento $K(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ por uma aproximação sintética, preservando propriedades físicas do núcleo de espalhamento original [Barichello e Siewert, 2002] ou seja, trunca-se a Eq. (2.26) e escreve-se o núcleo de espalhamento sintético, como

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} (2n+1)(2-\delta_{0,m}) P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) f_n(c', c) \mathrm{cos} m(\chi' - \chi) \tag{2.28}$$

onde em lugar de usar-se $k_n(c', c)$ como na Eq. (2.26), usa-se aproximações $f_n(c', c)$, cuja obtenção é brevemente descrita a seguir.

2.5.1 O Modelo CES

No modelo CES apresentado na referência, [Barichello e Siewert, 2002] trabalha-se com esse núcleo sintético usando $N = 2$ e as componentes $f_n(c', c)$ na forma

$$f_0(c', c) = A_0(c')A_0(c) + B_0(c')B_0(c), \tag{2.29}$$

$$f_1(c', c) = A_1(c')A_1(c) + B_1(c')B_1(c) \tag{2.30}$$

e

$$f_2(c', c) = A_2(c')A_2(c) \tag{2.31}$$

onde as funções $\{A_n(x), B_n(x)\}$ devem ser determinadas a partir de soluções da equação linearizada de Boltzmann. Uma descrição detalhada de como determinar $f_0(c', c)$, $f_1(c', c)$ e $f_2(c', c)$ encontra-se no trabalho de Barichello e Siewert [Barichello e Siewert, 2002]. Assim escreve-se a equação de balanço como

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) \tag{2.32}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x,\mathbf{c}) + \int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x,\mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc' \tag{2.33}$$

sendo que no modelo CES $F(\mathbf{c}',\mathbf{c})$ é obtida a partir da Eq. (2.28), usando $N = 2$, como

$$F(\mathbf{c}',\mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi}\eta(c')\eta(c)\Big[\gamma_o + \gamma_1(\mathbf{c}'.\mathbf{c}) + \gamma_2(c'^2 - w)(c^2 - w)\Big] + M(\mathbf{c}',\mathbf{c}) + N(\mathbf{c}',\mathbf{c}) \tag{2.34}$$

onde

$$\gamma_o = \frac{1}{V_0}, \quad \gamma_1 = \frac{3}{V_2}, \quad \gamma_2 = \frac{V_0}{V_0V_4 - V_2^2} \;\; e \;\; w = \frac{V_2}{V_0} \tag{2.35}$$

com

$$V_n = \int_0^\infty \eta(c)c^{n+2}e^{-c^2}dc, \tag{2.36}$$

ainda

$$\mathbf{c}'.\mathbf{c} = c'c\sum_{m=0}^{1}(2-\delta_{0,m})P_1^m(\mu')P_1^m(\mu)\mathrm{cosm}(\chi'-\chi), \tag{2.37}$$

$$M(\mathbf{c}',\mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi}3w_{12}\Big[(\mathbf{c}'.\mathbf{c})/(c'c)\Big]\Delta_1(c')\Delta_1(c), \tag{2.38}$$

e

$$N(\mathbf{c}',\mathbf{c}) = \frac{5}{4\pi}w_2\Delta_2(c')\Delta_2(c)\sum_{m=0}^{2}(2-\delta_{0,m})P_2^m(\mu')P_2^m(\mu)\mathrm{cosm}(\chi'-\chi) \tag{2.39}$$

com

$$\Delta_1(c) = \eta(c)\Big[a_*c - ca(c)\Big] + c(c^2 - 5/2) \tag{2.40}$$

e

$$\Delta_2(c) = \Big[c^2 - \eta(c)c^2 b(c)\Big], \tag{2.41}$$

onde

$$w_{12} = [a_1 - a_2 - a_* a_3]^{-1} \quad \text{e} \quad a_* = \frac{a_3}{V_2}, \tag{2.42}$$

$$w_2 = \frac{1}{v_*} \quad \text{onde} \qquad v_* = \int_0^\infty e^{-c^2} b(c)\Big[\eta(c)c^2 b(c) - c^2\Big]c^4 dc, \tag{2.43}$$

aqui

$$a_1 = \int_0^\infty e^{-c^2}\eta(c)a^2(c)c^4 dc, \tag{2.44}$$

$$a_2 = \int_0^\infty e^{-c^2} a(c)c^6 dc \tag{2.45}$$

e

$$a_3 = \int_0^\infty e^{-c^2}\eta(c)a(c)c^4 dc, \tag{2.46}$$

ainda $a(c)$ e $b(c)$ presentes nas equações anteriores, satizfazem as seguintes equações integrais

$$\int_0^\infty e^{-c'^2} a(c') f_1(c', c) c'^3 dc' = \eta(c)ca(c) - c(c^2 - 5/2) \tag{2.47}$$

e

$$\int_0^\infty e^{-c'^2} b(c') f_2(c', c) c'^4 dc' = \eta(c)c^2 b(c) - c^2. \tag{2.48}$$

As funções $a(c)$ e $b(c)$, quando calculadas a partir da utilização dos componentes $k_n(c, c')$ do núcleo de espalhamento, dado pela equação (2.26), são conhecidas como funções de Chapman-Enskog [Siewert, 2002b] definidas pelas seguintes equações integrais

$$\int_0^\infty e^{-c'^2} a(c') k_1(c', c) c'^3 dc' = \eta(c)ca(c) - c(c^2 - 5/2), \tag{2.49}$$

com a condição de normalização

$$\int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^4 dc = 0, \tag{2.50}$$

e

$$\int_0^\infty e^{-c'^2} b(c') k_2(c', c) c'^4 dc' = \eta(c) c^2 b(c) - c^2. \tag{2.51}$$

A determinação numérica dessas soluções por si só é um problema computacional extenso devido à complexidade das componentes do núcleo de espalhamento e algumas abordagens tem sido desenvolvidas recentemente para isso [Siewert, 2002c; Barichello et al., 2002b].

Neste ponto nota-se que as funções $a(c)$ e $b(c)$ que aparecem nas equações (2.49) a (2.51), são usadas por Pekeris e Alterman [Pekeris e Alterman, 1957] para definir a viscosidade (μ_*) e a condutividade térmica (λ_*) (colisões para esferas rígidas), necessárias para a determinação do livre caminho médio apresentado na seção 2.2 na forma

$$\mu_* = \frac{8(2mkT_0)^{1/2}}{15\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} b(c) c^6 dc, \tag{2.52}$$

e

$$\lambda_* = \frac{4k(2kT_0/m)^{1/2}}{3\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} a(c) c^6 dc, \tag{2.53}$$

lembrando que k é a constante de Boltzmann, m é a massa molecular, T_0 é a temperatura (constante) e σ_0 é o diâmetro de colisão de partículas de gás.

2.5.2 O Modelo CLF com Freqüência de Colisão Variável

Para obter-se o modelo CLF, a partir da derivação anterior, segue-se Barichello e Siewert [Barichello e Siewert, 2002] e considera-se, em lugar das funções $a(c)$ e $b(c)$, conforme o modelo CES, estimativas $a_0(c)$ e $b_0(c)$ escritas na forma

$$a_0(c) = \eta^{-1}(c)(c^2 - 5/2) + \hat{a} \tag{2.54}$$

e

$$b_0(c) = \eta^{-1}(c) \tag{2.55}$$

onde

$$\hat{a} = -(8/3)\pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-c^2} \eta^{-1}(c)(c^2 - 5/2)c^4 dc \tag{2.56}$$

foi determinada a partir da condição de normalização. A viscosidade e a condutividade térmica [Barichello e Siewert, 2002] dadas respectivamente, nas Eqs. (2.52) e (2.53), para o modelo CLF ficam, então, escritas na forma

$$\mu_* = \frac{8(2mkT_0)^{1/2}}{15\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} b_0(c) c^6 dc \tag{2.57}$$

e

$$\lambda_* = \frac{4k(2kT_0/m)^{1/2}}{3\pi\sigma_0^2} \int_0^\infty e^{-c^2} a_0(c) c^6 dc. \tag{2.58}$$

Retornando para o livre caminho médio, ou seja, usando as Eqs. (2.19) e (2.57) em

$$\sigma = \sigma_p = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l_p \tag{2.59}$$

obtém-se que

$$\sigma_p = \frac{16\pi^{-1/2}}{15} \int_0^\infty e^{-c^2} \eta^{-1}(c) c^6 dc \tag{2.60}$$

e usando as Eqs. (2.20) e (2.58) em

$$\sigma = \sigma_t = \sigma_0^2 n_0 \pi^{1/2} l_t \tag{2.61}$$

tem-se que

$$\sigma_t = \frac{16\pi^{-1/2}}{15} \int_0^\infty e^{-c^2} \eta^{-1}(c)(c^2 - 5/2)^2 c^4 dc, \tag{2.62}$$

onde σ_p e σ_t serão usados na obtenção dos resultados numéricos.

Usando as aproximações $a_0(c)$ e $b_0(c)$ no lugar das soluções exatas $a(c)$ e $b(c)$, o núcleo sintético dado na Eq. (2.34) reduz-se para este modelo na forma

$$F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) = \frac{1}{4\pi}\eta(c')\eta(c)\Big[\gamma_o + \gamma_1(\mathbf{c}'.\mathbf{c}) + \gamma_2(c'^2 - w)(c^2 - w)\Big] \tag{2.63}$$

onde γ_o, γ_1, γ_2 e ω foram definidos na Eq. (2.35). Assim, para o modelo CLF tem-se a aproximação da equação de Boltzmann linearizada completamente definida, da seguinte forma:

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x, \mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) \tag{2.64}$$

onde

$$L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(x, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c})h(x, \mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc' \tag{2.65}$$

aqui $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é dado pela equação (2.63). Considerando-se que para alguns problemas na dinâmica de gases rarefeitos aparece um termo de fonte na Equação de Boltzmann, reescreve-se a Eq. (2.64), de forma mais geral, considerando agora o termo independente

$$S(\mathbf{c}) + c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x, \mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x, c) \tag{2.66}$$

onde $S(\mathbf{c})$ será obtido para cada problema em virtude da escolha da $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ conveniente dada na Eq. (2.6) e o termo de colisão é dado na Eq. (2.65). Nota-se que, quando $\eta(c) = 1$ na Eq. (2.66), tem-se o modelo BGK.

No próximo capítulo descrevem-se alguns problemas da dinâmica de gases rarefeitos usando o modelo CLF. Esses problemas são salto de temperatura, fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, Kramers, creep-térmico e deslizamento térmico.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos fundamentais, formulações, quantidades de interesse dos problemas citados no capítulo anterior, juntamente com algumas tranformações convenientes aplicadas nos problemas a serem resolvidos a fim de se obter uma formulação básica vetorial (problema **G**) ou escalar (problema G) que será tratada pelo método de ordenadas discretas. Assim, partindo-se da equação de balanço, seguem-se alguns passos básicos:

• Introduz-se uma das seguintes médias azimutais, na Eq. (2.66)

$$\phi(x,c,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x,c,\mu,\chi)d\chi \tag{3.1}$$

ou

$$g(x,c,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\chi h(x,c,\mu,\chi)d\chi \tag{3.2}$$

• por conveniência faz-se $\tau = \sigma x$,

• introduz-se uma troca de variável seguindo Busbridge [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.3}$$

• propõe-se uma decomposição do problema original em um conjunto de problemas, normalmente associada à forma do núcleo de espalhamento e condições de contorno.

3.1 O Problema de Salto de Temperatura

No processo de troca de calor entre um gás altamente rarefeito e uma parede adjacente, de acordo com Welander [Welander, 1954], uma diferença é observada entre a temperatura T_0 do gás bem próximo à parede e a temperatura T_w da parede. Além disso, a temperatura não varia linearmente perto da parede, mas se desvia de uma distribuição linear do modo indicado na figura 3.1. O desvio é mais notado sobre a região que se estende a uma distância da ordem do livre caminho médio l da parede, e que pode ser chamada de região de transição. Dessa forma, o chamado "salto de temperatura" é definido usualmente como sendo a diferença entre a temperatura T_0', avaliada a partir de uma extrapolação linear da curva de temperatura após a região de transição, e a temperatura da parede (figura 3.1). Medidas do salto de temperatura são normalmente feitas com a finalidade de, por comparação

Figura 3.1 – Salto de temperatura

com valores teóricos obtidos, avaliar a troca de calor entre a parede e as moléculas de gás, usualmente caracterizada pelo coeficiente de acomodação. Para obtenção desse problema a Eq. (2.4) pode ser linearizada em torno de uma Maxwelliana absoluta

$$f_0(\mathbf{v}) = f_{00}(\mathbf{v}) = n_0\Big(\frac{m}{2\pi kT_0}\Big)^{3/2}\exp\Big(-\frac{m\mathbf{v^2}}{2kT_0}\Big), \tag{3.4}$$

de forma que, seguindo-se passos descritos no capítulo anterior, seção 2.1, obtém-se a equação de balanço para este problema

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) \tag{3.5}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x,\mathbf{c}) + \int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2}F(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x,\mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc', \tag{3.6}$$

para $x > 0$ (x adimensional), $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$, $\eta(c)$ é a freqüência de colisão das partículas de gás, $F(\mathbf{c}',\mathbf{c})$ que segue o modelo CLF é dado na Eq. (2.63) e a condição de contorno é escrita na forma

$$h(0,c,\mu,\chi)-(1-\alpha)h(0,c,-\mu,\chi)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{2\pi}c'^3e^{-c'^2}h(0,c',-\mu',\chi')\mu'd\chi'd\mu'dc', \tag{3.7}$$

para $\mu\in(0,1]$, $c\in(0,\infty)$, $\chi\in[0,2\pi]$, sendo que h diverge quando x tende para o infinito.

Considera-se ainda que o desvio de temperatura satisfaz a condição, de acordo com Welander [Welander, 1954]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}T(x)=K_1 \tag{3.8}$$

onde K_1 é considerado conhecido.

Neste momento seguem-se as transformações básicas citadas anteriormente.

- **Média Azimutal**

Introduzindo para este problema a média azimutal

$$\phi(x,c,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(x,c,\mu,\chi)d\chi \tag{3.9}$$

nas equações (3.5) e (3.7) reescreve-se então o problema na forma

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,c,\mu)+\sigma\eta(c)\phi(x,c,\mu)=\sigma\int_0^\infty\int_{-1}^1c'^2e^{-c'^2}F(c',\mu':c,\mu)\phi(x,c',\mu')d\mu'dc', \tag{3.10}$$

para $x>0$, $\mu\in[-1,1]$ e $c\in[0,\infty)$, e

$$\phi(0,c,\mu)-(1-\alpha)\phi(0,c,-\mu)-4\alpha\int_0^\infty\int_0^1c'^3e^{-c'^2}\phi(0,c',-\mu')\mu'd\mu'dc'=0, \tag{3.11}$$

para $\mu\in(0,1]$ e $c\in(0,\infty)$. Aqui, segundo o modelo CLF

$$F(c',\mu':c,\mu)=\frac{1}{2}\eta(c)\eta(c')[\gamma_o+\gamma_1c\mu c'\mu'+\gamma_2(c^2-\omega)(c'^2-\omega)], \tag{3.12}$$

onde γ_o, γ_1, γ_2 e ω são dados na Eq. (2.35). Tem-se, agora, o desvio de temperatura e densidade definidas em termo da média azimutal por

$$N(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1c^2e^{-c^2}\phi(x,c,\mu)d\mu dc \tag{3.13}$$

e

$$T(x) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^2 e^{-c^2} (c^2 - 3/2) \phi(x, c, \mu) d\mu dc. \tag{3.14}$$

• **Transformação** $\tau = \sigma x$

Para este problema usa-se $\tau = \sigma x$ nas Eqs. (3.10) e (3.11) e introduz-se

$$Y_T(\tau, c, \mu) = \phi(\tau/\sigma, c, \mu) \tag{3.15}$$

reescrevendo novamente o problema como

$$c\mu \frac{\partial}{\partial \tau} Y_T(\tau, c, \mu) + \eta(c) Y_T(\tau, c, \mu) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F(c', \mu' : c, \mu) Y_T(\tau, c', \mu') d\mu' dc', \tag{3.16}$$

para $\tau > 0$, $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$, $F(c', \mu' : c, \mu)$ é dado na Eq. (3.12) e

$$Y_T(0, c, \mu) - (1 - \alpha) Y_T(0, c, -\mu) - 4\alpha \int_0^\infty \int_0^1 c'^3 e^{-c'^2} Y_T(0, c', -\mu') \mu' d\mu' dc' = 0, \tag{3.17}$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $c \in [0, \infty)$. Reescreve-se a Eq. (3.8) considerando $\tau = \sigma x$ como

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{d}{d\tau} T_*(\tau) = \frac{K_1}{\sigma}. \tag{3.18}$$

As Eqs. (3.13) e (3.14), também são reescritas de acordo com a transformação (3.15) na forma

$$N_*(\tau) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^2 e^{-c^2} Y_T(\tau, c, \mu) d\mu dc \tag{3.19}$$

e

$$T_*(\tau) = \frac{4}{3\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^2 e^{-c^2} (c^2 - 3/2) Y_T(\tau, c, \mu) d\mu dc. \tag{3.20}$$

Neste ponto verifica-se que

$$Z_a(\tau, c, \mu) = (c^2 - 5/2)[\tau - c\mu/\eta(c)] \tag{3.21}$$

é uma solução da Eq. (3.16), que é linear para τ, e escrevendo

$$Y_T(\tau, c, \mu) = \frac{K_1}{\sigma}[Z(\tau, c, \mu) + Z_a(\tau, c, \mu)], \tag{3.22}$$

busca-se encontrar uma solução $Z(\tau, c, \mu)$ que é limitada quando τ tender ao infinito, satisfazendo

$$c\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Z(\tau, c, \mu) + \eta(c)Z(\tau, c, \mu) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F(c', \mu' : c, \mu) Z(\tau, c', \mu') d\mu' dc', \tag{3.23}$$

para $\tau > 0$, $\mu \in [-1, 1]$ e $c \in [0, \infty)$, e

$$Z(0, c, \mu) - (1-\alpha)Z(0, c, -\mu) - 4\alpha \int_0^\infty \int_0^1 c'^3 e^{-c'^2} Z(0, c', -\mu')\mu' d\mu' dc' = R(c, \mu), \tag{3.24}$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $c \in [0, \infty)$. Aqui

$$R(c, \mu) = (2-\alpha)(c^2 - 5/2)\frac{c\mu}{\eta(c)} + \frac{4\alpha}{3}\Gamma, \tag{3.25}$$

onde

$$\Gamma = \int_0^\infty \frac{c^4}{\eta(c)} e^{-c^2}(c^2 - 5/2) dc. \tag{3.26}$$

Agora, em termos da função $Z(\tau, c, \mu)$, encontra-se das equações (3.19) e (3.20) que

$$N_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big[-\tau + \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty \int_{-1}^1 c^2 e^{-c^2} Z(\tau, c, \mu) d\mu dc\Big] \tag{3.27}$$

e

$$T_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big[\tau + \frac{4}{3\pi^{1/2}}\int_0^\infty \int_{-1}^1 c^2 e^{-c^2}(c^2 - 3/2) Z(\tau, c, \mu) d\mu dc\Big]. \tag{3.28}$$

• **Mudança de Variável e Decomposição**

Após ter-se usado a média azimutal e a transformação $\tau = \sigma x$, neste problema, introduz-se uma troca de variável [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = \sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.29}$$

na Eq. (3.23) juntamente com a decomposição

$$Z[\tau, c, \xi\eta(c)/c] = G_1(\tau, \xi) + \xi\eta(c)G_2(\tau, \xi) + (c^2 - \omega)G_3(\tau, \xi) \tag{3.30}$$

e acha-se, após trocar a ordem de integração ,

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}G_i(\tau, \xi) + G_i(\tau, \xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma}[\psi_{i,1}(\xi')G_1(\tau, \xi') + \psi_{i,2}(\xi')G_2(\tau, \xi') + \psi_{i,3}(\xi')G_3(\tau, \xi')]d\xi' \tag{3.31}$$

para $i = 1, 2, 3$. Aqui

$$\psi_{1,1}(\xi) = \frac{\gamma_0}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)dc, \qquad \psi_{1,2}(\xi) = \frac{\gamma_0\xi}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^3(c)dc, \tag{3.32}$$

$$\psi_{1,3}(\xi) = \frac{\gamma_0}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2-\omega)dc, \qquad \psi_{2,1}(\xi) = \frac{\gamma_1\xi}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^3(c)dc, \tag{3.33}$$

$$\psi_{2,2}(\xi) = \frac{\gamma_1\xi^2}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^4(c)dc, \qquad \psi_{2,3}(\xi) = \frac{\gamma_1\xi}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^3(c)(c^2-\omega)dc, \tag{3.34}$$

$$\psi_{3,1}(\xi) = \frac{\gamma_2}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2-\omega)dc, \qquad \psi_{3,2}(\xi) = \frac{\gamma_2\xi}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^3(c)(c^2-\omega)dc \tag{3.35}$$

e

$$\psi_{3,3}(\xi) = \frac{\gamma_2}{2}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2-\omega)^2dc \tag{3.36}$$

onde

$$c \in M_\xi \quad \text{se} \quad \frac{\eta(c)|\xi|}{c} \leq 1. \tag{3.37}$$

Considerando a condição de contorno em $\tau = 0$, substituem-se as Eqs. (3.29) e (3.30) na Eq. (3.24) e obtém-se

$$G_1(0, \xi) - (1-\alpha)G_1(0, -\xi) - \triangle = \frac{4\alpha}{3}\Gamma + (2-\alpha)(\omega - 5/2)\xi, \tag{3.38}$$

$$G_2(0, \xi) + (1-\alpha)G_2(0, -\xi) = 0 \tag{3.39}$$

e

$$G_3(0,\xi) - (1-\alpha)G_3(0,-\xi) = (2-\alpha)\xi \tag{3.40}$$

para $\xi \in (0,\gamma]$. Aqui o termo de difusão na Eq. (3.38) é dado por

$$\triangle = \frac{8\alpha}{\beta_0}\int_0^\gamma [\psi_{1,1}(\xi)G_1(0,-\xi) - \psi_{1,2}(\xi)G_2(0,-\xi) + \psi_{1,3}(\xi)G_3(0,-\xi)]\xi d\xi. \tag{3.41}$$

Introduzindo-se a notação vetorial $\mathbf{G}(\tau,\xi)$, com componentes $G_i(\tau,\xi), i = 1,2,3$, reescreve-se o problema como

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{G}(\tau,\xi) + \mathbf{G}(\tau,\xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \mathbf{\Psi}(\xi')\mathbf{G}(\tau,\xi')d\xi' \tag{3.42}$$

onde a matriz 3×3 $\mathbf{\Psi}(\xi)$ tem componentes $\psi_{i,j}(\xi)$, como segue

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\xi) & \psi_{1,2}(\xi) & \psi_{1,3}(\xi) \\ \psi_{2,1}(\xi) & \psi_{2,2}(\xi) & \psi_{2,3}(\xi) \\ \psi_{3,1}(\xi) & \psi_{3,2}(\xi) & \psi_{3,3}(\xi) \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Encontra-se a condição de contorno na forma vetorial, reescrevendo as Eqs. (3.38) a (3.40) como

$$\mathbf{G}(0,\xi) - (1-\alpha)\mathbf{S}\mathbf{G}(0,-\xi) - 2\alpha\int_0^\gamma \mathbf{\Upsilon}(\xi')\mathbf{G}(0,-\xi')\xi'd\xi' = \mathbf{R}(\xi) \tag{3.44}$$

para $\xi \in (0,\gamma]$. Aqui

$$\mathbf{S} = \mathrm{diag}\{1,-1,1\}, \tag{3.45}$$

$$\mathbf{\Upsilon}(\xi) = \frac{4}{\beta_0}\begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\xi) & -\psi_{1,2}(\xi) & \psi_{1,3}(\xi) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

e

$$\mathbf{R}(\xi) = \begin{bmatrix} (2-\alpha)(\omega - 5/2)\xi + (4/3)\alpha\Gamma \\ 0 \\ (2-\alpha)\xi \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Sendo assim, busca-se uma solução limitada quando τ tende ao infinito da Eq. (3.42) que satisfaz a Eq. (3.44). É claro que, uma vez que se tem resolvido o problema $\mathbf{G}$, pode-se usar as Eqs. (3.29) e (3.30) para reescrever as Eqs. (3.27) e (3.28) para o desvio de densidade e desvio de temperatura, respectivamente, como

$$N_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big[-\tau + \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\gamma}^{\gamma} [n_1(\xi)G_1(\tau,\xi) + n_2(\xi)G_2(\tau,\xi) + n_3(\xi)G_3(\tau,\xi)]d\xi \Big] \tag{3.48}$$

e

$$T_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big[\tau + \frac{2}{3\pi^{1/2}} \int_{-\gamma}^{\gamma} [t_1(\xi)G_1(\tau,\xi) + t_2(\xi)G_2(\tau,\xi) + t_3(\xi)G_3(\tau,\xi)]d\xi\Big] \tag{3.49}$$

onde

$$n_1(\xi) = 2\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)dc, \tag{3.50}$$

$$n_2(\xi) = 2\xi\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)dc, \tag{3.51}$$

$$n_3(\xi) = 2\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2-\omega)dc, \tag{3.52}$$

e assim também

$$t_1(\xi) = 2\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2-3/2)dc, \tag{3.53}$$

$$t_2(\xi) = 2\xi\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2-3/2)dc \tag{3.54}$$

e

$$t_3(\xi) = 2\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2-\omega)(c^2-3/2)dc. \tag{3.55}$$

No capítulo seguinte o método de ordenadas discretas é aplicado na solução do problema **G** dado nas Eqs. (3.42) e (3.44).

3.2 Fluxo de Couette

Considera-se o fluxo de Couette quando se tem um gás, entre duas placas infinitas, separadas por uma distância $2a$, que se movem paralelamente em direções opostas com velocidade (em unidades adimensionais) denotada aqui por $W_o/2$. O problema de fluxo de Couette é obtido linearizando-se a Eq. (2.4) em torno da Maxwelliana absoluta

$$f_0(\mathbf{v}) = f_{00}(\mathbf{v}) = n_0\Big(\frac{m}{2\pi kT_0}\Big)^{3/2}\exp\Big(-\frac{m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2kT_0}\Big). \tag{3.56}$$

Obtém-se para esse problema uma equação de balanço escrita em termos de h, após ter seguido passos descritos no capítulo anterior (seção 2.1), na forma

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) \tag{3.57}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x,\mathbf{c}) + \int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi} c'^2e^{-c'^2}F(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x,\mathbf{c}')d\chi'd\mu'dc' \tag{3.58}$$

para $x\in(-a,a)$ (x adimensional), $\mu\in[-1,1]$, $c\in[0,\infty)$, $\eta(c)$ é a freqüência de colisão das partículas de gás, $F(\mathbf{c}',\mathbf{c})$ é dado na Eq. (2.63) seguindo o modelo CLF e as condições de contorno são escritas na forma

$$\begin{aligned} h(-a,c,\mu,\chi)-(1-\alpha)h(-a,c,-\mu,\chi) = {}& \alpha W_o c(1-\mu^2)^{1/2}cos\chi + \\ & \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{2\pi} c'^3e^{-c'^2}h(-a,c',-\mu',\chi')\mu'd\chi'd\mu'dc' \end{aligned} \tag{3.59}$$

e

$$h(a,c,-\mu,\chi)-(1-\alpha)h(a,c,\mu,\chi)=-\alpha W_o c(1-\mu^2)^{1/2}cos\chi+ \\ \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(a,c',\mu',\chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \quad (3.60)$$

para $\mu\in(0,1]$, $c\in[0,\infty)$ e $\chi\in[0,2\pi]$ e $\pm W_o/2$ é a velocidade (em unidades adimensionais) das duas placas.

• **Média Azimutal**

Para este problema introduz-se a média azimutal

$$g(x,c,\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\chi h(x,c,\mu,\chi)d\chi \quad (3.61)$$

nas equações (3.57), (3.59) e (3.60), reescreve-se o problema na forma

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}g(x,c,\mu)+\sigma\eta(c)g(x,c,\mu)=\sigma\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2}F^*(c',\mu':c,\mu)g(x,c',\mu')d\mu' dc', \quad (3.62)$$

para $x\in(-a,a)$, $\mu\in[-1,1]$ e $c\in[0,\infty)$. Aqui, segundo o modelo CLF

$$F^*(c',\mu':c,\mu)=\frac{\gamma_1}{4}cc'\eta(c)\eta(c')(1-\mu^2)^{1/2}(1-\mu'^2)^{1/2}, \quad (3.63)$$

sendo

$$\gamma_1=\frac{3}{V_2} \qquad \text{onde} \qquad V_2=\int_0^\infty \eta(c)c^4e^{-c^2}dc, \quad (3.64)$$

as condições de contorno são reescritas na forma

$$g(-a,c,\mu)-(1-\alpha)g(-a,c,-\mu)=\alpha W_o c(1-\mu^2)^{1/2} \quad (3.65)$$

e

$$g(a,c,-\mu)-(1-\alpha)g(a,c,\mu)=-\alpha W_o c(1-\mu^2)^{1/2}, \quad (3.66)$$

para $\mu\in(0,1]$, $c\in[0,\infty)$.

As quantidades de interesse para este problema escritas em termos da média azimutal são:

• perfil de velocidade

$$u(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc, \tag{3.67}$$

• perfil de fluxo de calor

$$q(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (c^2 - 5/2)(1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc, \tag{3.68}$$

• e a tensão de cisalhamento

$$P_{xy} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^4 e^{-c^2} \mu (1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc. \tag{3.69}$$

Quer-se também obter resultados para a taxa de massa (U) e taxa de fluxo de calor (Q) escritas em termos do perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor como:

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_0^a u(x) dx \tag{3.70}$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_0^a q(x) dx. \tag{3.71}$$

Fazendo neste momento a seguinte transformação

$$g(x,c,\mu) = c(1-\mu^2)^{1/2} Y(x,c,\mu) \tag{3.72}$$

reescreve-se este problema dado pelas Eqs. (3.62), (3.65) e (3.66) da seguinte forma

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x} Y(x,c,\mu) + \sigma\eta(c) Y(x,c,\mu) = \frac{\gamma_1}{4} \sigma\eta(c) \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^4 e^{-c'^2} \eta(c')(1-\mu'^2) Y(x,c',\mu') d\mu' dc' \tag{3.73}$$

para $x \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$ e com as seguintes condições de contorno

$$Y(-a,c,\mu) - (1-\alpha) Y(-a,c,-\mu) = \alpha W_o \tag{3.74}$$

e

$$Y(a,c,-\mu) - (1-\alpha) Y(a,c,\mu) = -\alpha W_o. \tag{3.75}$$

para $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$.

• **Transformação** $\tau = \sigma x$

Considerando $\tau = \sigma x$ rescreve-se as Eqs. (3.73) a (3.75) da seguinte forma:

$$c\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau/\sigma,c,\mu)+\eta(c)Y(\tau/\sigma,c,\mu) = W\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}\eta(c')(1-\mu'^2)Y(\tau/\sigma,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.76}$$

para $\tau/\sigma \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$ e $c \in [0,\infty)$, com as seguintes condições de contorno

$$Y(-\tau_o/\sigma,c,\mu) - (1-\alpha)Y(-\tau_o/\sigma,c,-\mu) = \alpha W_o \tag{3.77}$$

e

$$Y(\tau_o/\sigma,c,-\mu) - (1-\alpha)Y(\tau_o/\sigma,c,\mu) = -\alpha W_o \tag{3.78}$$

onde $\tau_o = \sigma a$, $\mu \in (0,1]$, $c \in [0,\infty)$ e

$$W = \frac{3}{4V_2} \qquad \text{com} \qquad V_2 = \int_0^\infty \eta(c)c^4e^{-c^2}dc, \tag{3.79}$$

onde V_2 depende somente de $\eta(c)$. Rescrevendo-se também as Eqs. (3.67) a (3.69) em termos de $Y(\tau/\sigma,c,\mu)$ obtém-se

$$u_*(\tau) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc, \tag{3.80}$$

$$q_*(\tau) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc \tag{3.81}$$

e

$$P_{*xz} = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^5e^{-c^2}\mu(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc. \tag{3.82}$$

• **Mudança de Variável e Decomposição**

Introduzindo-se neste momento [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.83}$$

na Eq. (3.76) e usando

$$Y(\tau/\sigma, c, \xi\eta(c)/c) = W_o G(\tau, \xi) \tag{3.84}$$

obtém-se, após trocar a ordem de integração ,

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, \xi) + G(\tau, \xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \psi(\xi') G(\tau, \xi') d\xi', \tag{3.85}$$

onde

$$\psi(\xi) = W \int_{M_\xi} c e^{-c^2} \eta^2(c)(c^2 - \xi^2 \eta^2(c)) dc \tag{3.86}$$

aqui observa-se a condição dada pela Eq. (3.37) e W é dado na Eq. (3.79). Para as condições de contorno, substitui-se as Eqs. (3.83) e (3.84) nas Eqs. (3.77) e (3.78) e obtém-se

$$G(-\tau_o, \xi) - (1 - \alpha) G(-\tau_o, -\xi) = \alpha \tag{3.87}$$

e

$$G(\tau_o, -\xi) - (1 - \alpha) G(\tau_o, \xi) = -\alpha, \tag{3.88}$$

para $\xi \in (0, \gamma]$. Usando as equações (3.83) e (3.84) expressa-se o perfil de velocidade, o perfil de fluxo de calor e a pressão em termos da solução do problema G como:

$$u_*(\tau) = \int_{-\gamma}^{\gamma} u_c(\xi) G(\tau, \xi) d\xi, \tag{3.89}$$

$$q_*(\tau) = \int_{-\gamma}^{\gamma} q_c(\xi) G(\tau, \xi) d\xi \tag{3.90}$$

e

$$P_{*xz} = \int_{-\gamma}^{\gamma} p_c(\xi) G(\tau, \xi) \xi d\xi, \tag{3.91}$$

onde

$$u_c(\xi) = \frac{W_o}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} c e^{-c^2} \eta(c) \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc, \tag{3.92}$$

$$q_c(\xi) = \frac{W_o}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} c e^{-c^2} \eta(c)(c^2 - 5/2) \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc \tag{3.93}$$

e

$$p_c(\xi) = \frac{W_o}{\sqrt{\pi} W} \psi(\xi), \tag{3.94}$$

onde $\psi(\xi)$ é dada na Eq. (3.86). A seguir, no próximo capítulo, aplica-se no problema G, dado pelas Eqs. (3.85), (3.87) e (3.88), o método de ordenadas discretas.

3.3 Fluxo de Poiseuille

O fluxo de Poiseuille é um termo usado na descrição do fluxo de um gás rarefeito fluindo na direção z, entre duas placas paralelas, colocadas em $x = \pm a$, que surge devido a um gradiente (constante) de pressão. Obtém-se a equação de balanço da Eq. (2.4), linearizando-a em torno da seguinte Maxwelliana

$$f_0(z, \mathbf{v}) = n(z) \Big(\frac{m}{2\pi k T_0} \Big)^{3/2} \exp\Big(- \frac{m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{2kT_0} \Big), \tag{3.95}$$

onde a densidade é aproximada por

$$n(z) = n_0(1 + R_z z), \tag{3.96}$$

onde R_z é o gradiente de densidade constante (em unidades adimensionais) na direção z. Para esse problema chega-se a uma equação de balanço para h, após ter seguido passos citados no capítulo anterior (seção 2.1) na forma

$$c(1-\mu^2)^{1/2}\cos\chi R_z + c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x,\mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) \tag{3.97}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x,\mathbf{c}) = -\eta(c)h(x,\mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}',\mathbf{c})h(x,\mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc', \tag{3.98}$$

para $x \in (-a,a)$ (x adimensional), $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$, $\eta(c)$ é a freqüência de colisão das partículas de gás, $F(\mathbf{c}',\mathbf{c})$ segue o modelo CLF e é dado na Eq. (2.63) e as condições de contorno ficam escritas na forma

$$h(-a,c,\mu,\chi) - (1-\alpha)h(-a,c,-\mu,\chi) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(-a,c',-\mu',\chi')\mu' d\chi' d\mu' dc' \tag{3.99}$$

e

$$h(a,c,-\mu,\chi) - (1-\alpha)h(a,c,\mu,\chi) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(a,c',\mu',\chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \tag{3.100}$$

para $\mu \in (0,1]$, $c \in [0,\infty)$ e $\chi \in [0,2\pi]$.

- **Média Azimutal**

Neste problema, introduz-se a média azimutal

$$g(x,c,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} cos\chi h(x,c,\mu,\chi)d\chi \tag{3.101}$$

nas equações (3.97), (3.99) e (3.100), reescrevendo o problema como

$$c(1-\mu^2)^{1/2}R_z + c\mu\frac{\partial}{\partial x}g(x,c,\mu) + \sigma\eta(c)g(x,c,\mu) = \sigma\int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F^*(c',\mu' : c,\mu)g(x,c',\mu')d\mu' dc', \tag{3.102}$$

para $x \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$ Ainda $F^*(c',\mu' : c,\mu)$ é dado na Eq. (3.63) e as condições de contorno são reescritas na forma

$$g(-a,c,\mu) - (1-\alpha)g(-a,c,-\mu) = 0 \tag{3.103}$$

e

$$g(a,c,-\mu) - (1-\alpha)g(a,c,\mu) = 0, \tag{3.104}$$

para $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$.

Escrevem-se as quantidades de interesse em termos da média azimutal na forma:

• perfil de velocidade

$$u(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc, \tag{3.105}$$

• perfil de fluxo de calor

$$q(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (c^2 - 5/2)(1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc. \tag{3.106}$$

Para este problema quer-se também obter resultados para a taxa de massa (U) e taxa de fluxo de calor (Q) escritas em termos do perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor como

$$U = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a u(x) dx \tag{3.107}$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2} \int_{-a}^a q(x) dx. \tag{3.108}$$

Antes de iniciar a transformação deste problema para uma forma mais conveniente para o trabalho analítico e numérico, primeiro observa-se que

$$g_p(x,c,\mu) = A_1 R_z c (1-\mu^2)^{1/2} \Big[x^2 + \frac{2c^2\mu^2}{\sigma^2\eta^2(c)} - \frac{2xc\mu}{\sigma\eta(c)} - a^2 \Big] - \frac{R_z c (1-\mu^2)^{1/2}}{\sigma\eta(c)} \tag{3.109}$$

é uma solução particular da Eq. (3.102), onde A_1 é uma constante a ser determinada, e assim escrevendo

$$g(x,c,\mu) = g_h(x,c,\mu) + g_p(x,c,\mu), \tag{3.110}$$

onde $g_h(x, c, \mu)$ satisfaz

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}g_h(x,c,\mu) + \sigma\eta(c)g_h(x,c,\mu) = \sigma\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2}F^*(c',\mu' : c,\mu)g_h(x,c',\mu')d\mu' dc' \tag{3.111}$$

para $x \in (-a, a)$, $\mu \in [-1, 1]$ e $c \in [0, \infty)$, com as a seguintes condições de contorno

$$g_h(-a,c,\mu) - (1-\alpha)g_h(-a,c,-\mu) = -g_p(-a,c,\mu) + (1-\alpha)g_p(-a,c,-\mu) \tag{3.112}$$

e

$$g_h(a,c,-\mu) - (1-\alpha)g_h(a,c,\mu) = -g_p(a,c,-\mu) + (1-\alpha)g_p(a,c,\mu) \tag{3.113}$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $c \in [0, \infty)$ e

$$A_1 = \frac{15\sqrt{\pi}\sigma}{16\int_0^\infty c^6 e^{-c^2}\eta^{-1}(c)dc} \tag{3.114}$$

é obtida a partir da substituição da solução particular no problema g. Continuando, faz-se

$$g_h(x,c,\mu) = c(1-\mu^2)^{1/2}Y(x,c,\mu) \tag{3.115}$$

conforme o que foi feito para o problema de Couette para se obter problemas semelhantes, na forma

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,c,\mu) + \sigma\eta(c)Y(x,c,\mu) = \frac{\gamma_1}{4}\sigma\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4 e^{-c'^2}\eta(c)(1-\mu^2)Y(x,c',\mu')d\mu' dc' \tag{3.116}$$

para $x \in (-a, a)$, $\mu \in [-1, 1]$ e $c \in [0, \infty)$, com as seguintes condições de contorno

$$Y(-a,c,\mu) - (1-\alpha)Y(-a,c,-\mu) = R(c,\mu) \tag{3.117}$$

e

$$Y(a,c,-\mu) - (1-\alpha)Y(a,c,\mu) = R(c,\mu) \tag{3.118}$$

onde $\mu \in (0, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e

$$R(c,\mu) = -4A_1R_z\frac{ac\mu}{\sigma\eta(c)} - \alpha A_1R_z\Big[\frac{2c^2\mu^2}{\sigma^2\eta^2(c)} - \frac{2ac\mu}{\sigma\eta(c)}\Big] + \frac{\alpha R_z}{\sigma\eta(c)}. \tag{3.119}$$

• **Transformação** $\tau = \sigma x$

Agora usando que $\tau = \sigma x$ rescreve-se as Eqs. (3.116) a (3.118) como

$$c\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau/\sigma,c,\mu)+\eta(c)Y(\tau/\sigma,c,\mu) = W\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}\eta(c')(1-\mu'^2)Y(\tau/\sigma,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.120}$$

para $\tau/\sigma \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$, W é dado pela Eq. (3.79) e com as seguintes condições de contorno

$$Y(-\tau_o/\sigma,c,\mu) - (1-\alpha)Y(-\tau_0/\sigma,c,-\mu) = R(c,\mu) \tag{3.121}$$

e

$$Y(\tau_o/\sigma,c,-\mu) - (1-\alpha)Y(\tau_0/\sigma,c,\mu) = R(c,\mu) \tag{3.122}$$

aqui $\tau_o = \sigma a$, $\mu \in (0,1]$, $c \in [0,\infty)$ e $R(c,\mu)$ é dado na Eq. (3.119). Reescreve-se também as equações (3.105) e (3.106) em termos de $Y(\tau/\sigma,c,\mu)$ como

$$u_*(\tau) = \frac{A_1R_z}{2}\Big(\frac{\tau^2}{\sigma^2}-a^2\Big)+R_1+\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc \tag{3.123}$$

e

$$q_*(\tau) = R_2+\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc, \tag{3.124}$$

onde

$$R_1 = \frac{8A_1R_z}{15\sigma^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^6e^{-c^2}}{\eta^2(c)}dc - \frac{4R_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}}{\eta(c)}dc \tag{3.125}$$

e

$$R_2 = \frac{8A_1R_z}{15\sigma^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^6e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta^2(c)}dc - \frac{4R_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc. \tag{3.126}$$

• Mudança de Variável e Decomposição

Faz-se agora uma troca de variável [Busbridge, 1953], como foi feito para os problemas anteriores

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = \sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.127}$$

na Eq. (3.120) e usa-se a decomposição

$$Y(\tau/\sigma, c, \xi\eta(c)/c) = G_1(\tau,\xi) + \frac{1}{\eta(c)}G_2(\tau,\xi) \tag{3.128}$$

e encontra-se, após trocar a ordem de integração ,

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}G_i(\tau,\xi) + G_i(\tau,\xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma}\Big[\psi_{i,1}(\xi')G_1(\tau,\xi') + \psi_{i,2}(\xi')G_2(\tau,\xi')\Big]d\xi' \tag{3.129}$$

para $i = 1, 2$. Aqui

$$\psi_{1,1}(\xi) = W\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.130}$$

$$\psi_{1,2}(\xi) = W\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.131}$$

$$\psi_{2,1}(\xi) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi_{2,2}(\xi) = 0 \tag{3.132}$$

onde se observa a condição dada pela Eq. (3.37) e W é dado na Eq. (3.79). O Problema $G_2(\tau,\xi)$ definido nas equações (3.129) e (3.132) apresenta solução analítica, resolvendo-o analiticamente, necessita-se de uma solução particular para o problema $G_1(\tau,\xi)$, mas, como o objetivo desse trabalho é obter soluções unificadas para todos os problemas aqui apresentados, optou-se por resolver os problemas $G_1(\tau,\xi)$ e $G_2(\tau,\xi)$ dados pelas Eqs. (3.129)-(3.132) de forma vetorial conforme o que já foi feito para o problema de salto de temperatura, sendo que, dessa forma, não é necessário conhecer uma solução particular para o problema $G_1(\tau,\xi)$. Expressam-se agora as condições de contorno, após ter substituído as Eqs. (3.127) e (3.128) nas Eqs. (3.121) e (3.122) na forma

$$G_1(-\tau_o,\xi)-(1-\alpha)G_1(-\tau_o,-\xi)=h(\xi), \tag{3.133}$$

$$G_2(-\tau_o,\xi)-(1-\alpha)G_2(-\tau_o,-\xi)=\alpha R_z/\sigma \tag{3.134}$$

e

$$G_1(\tau_o,-\xi)-(1-\alpha)G_1(\tau_o,\xi)=h(\xi), \tag{3.135}$$

$$G_2(\tau_o,-\xi)-(1-\alpha)G_2(\tau_o,\xi)=\alpha R_z/\sigma \tag{3.136}$$

onde

$$h(\xi)=-2A_1R_z\Big[\frac{\alpha\xi^2}{\sigma^2}+\frac{a}{\sigma}(2-\alpha)\xi\Big]. \tag{3.137}$$

Introduz-se a notação vetorial $\mathbf{G}(\tau,\xi)$, com componentes $G_i(\tau,\xi), i=1,2$ e reescreve-se o problema como

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{G}(\tau,\xi)+\mathbf{G}(\tau,\xi)=\int_{-\gamma}^{\gamma}\mathbf{\Psi}(\xi')\mathbf{G}(\tau,\xi')d\xi' \tag{3.138}$$

aqui a matriz 2×2 $\mathbf{\Psi}(\xi)$ tem componentes $\psi_{i,j}(\xi)$, como segue

$$\mathbf{\Psi}(\xi)=\begin{bmatrix}\psi_{1,1}(\xi) & \psi_{1,2}(\xi)\\ \psi_{2,1}(\xi) & \psi_{2,2}(\xi)\end{bmatrix}. \tag{3.139}$$

Para escrever as condições de contorno na forma vetorial, reescrevem-se as Eqs. (3.133) a (3.136) como

$$\mathbf{G}(-\tau_o,\xi)-(1-\alpha)\mathbf{G}(-\boldsymbol{\tau_o},-\xi)=\mathbf{F_3}(\xi) \tag{3.140}$$

e

$$\mathbf{G}(\tau_o,-\xi)-(1-\alpha)\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau_o},\xi)=\mathbf{F_3}(\xi) \tag{3.141}$$

para $\xi \in (0, \gamma]$. Aqui

$$\mathbf{F_3}(\xi) = \begin{bmatrix} h(\xi) \\ \alpha R_z/\sigma \end{bmatrix}. \tag{3.142}$$

Usando as equações (3.127) e (3.128) reescrevem-se as equações (3.123) e (3.124) da seguinte forma

$$u_*(\tau) = \frac{A_1 R_z}{2}\Big(\frac{\tau^2}{\sigma^2} - a^2\Big) + R_1 + \int_{-\gamma}^{\gamma} \Big[u_{p1}(\xi)G_1(\tau,\xi) + u_{p2}(\xi)G_2(\tau,\xi)\Big]d\xi \tag{3.143}$$

e

$$q_*(\tau) = R_2 + \int_{-\gamma}^{\gamma} \Big[q_{p1}(\xi)G_1(\tau,\xi) + q_{p2}(\xi)G_2(\tau,\xi)\Big]d\xi \tag{3.144}$$

onde R_1 e R_2 são dados nas Eqs. (3.125) e (3.126) e

$$u_{p1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc, \tag{3.145}$$

$$u_{p2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2}\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc, \tag{3.146}$$

$$q_{p1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2}(c^2 - 5/2)\eta(c)\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc \tag{3.147}$$

e

$$q_{p2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2}(c^2 - 5/2)\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc. \tag{3.148}$$

Aplicar-se-á no próximo capítulo, o método de ordenadas discretas no problema **G** dado nas Eqs. (3.138), (3.140) e (3.141).

3.4 O Problema Creep-Térmico

Considera-se, nesta seção o problema creep-térmico, tratado entre duas placas paralelas, separadas por uma distância $2a$, que descreve o fluxo de um gás rarefeito fluindo na direção z, devido a um gradiente (constante) de temperatura. Neste caso, a Eq. (2.4) é linearizada em torno da distribuição Maxwelliana

$$f_0(z, \mathbf{v}) = n(z)\Big(\frac{m}{2\pi kT(z)}\Big)^{3/2}\exp\Big(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT(z)}\Big) \tag{3.149}$$

onde a densidade e a temperatura são aproximadas por

$$n(z) = n_0(1 - K_z z) \quad \text{e} \quad T(z) = T_0(1 + K_z z), \tag{3.150}$$

e K_z é o gradiente de temperatura constante (em unidades adimensionais) na direção z. Após seguir passos descritos no capítulo anterior (seção 2.1), obtém-se a equação de balanço para este problema na forma

$$c(1-\mu^2)^{1/2}\cos\chi(c^2 - 5/2)K_z + c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x, \mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) \tag{3.151}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(x, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c})h(x, \mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc', \tag{3.152}$$

para $x \in (-a, a)$ (x adimensional), $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$, $\eta(c)$ é a freqüência de colisão de partículas de gás, $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é dado na Eq. (2.63) segundo o modelo CLF, e as condições de contorno são escritas na forma

$$h(-a, c, \mu, \chi) - (1-\alpha)h(-a, c, -\mu, \chi) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(-a, c', -\mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc' \tag{3.153}$$

e

$$h(a, c, -\mu, \chi) - (1-\alpha)h(a, c, \mu, \chi) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(a, c', \mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \tag{3.154}$$

para $\mu \in (0, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e $\mu \in [0, 2\pi]$.

- **Média Azimutal**

Aqui, introduz-se a média azimutal

$$g(x,c,\mu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} cos\chi h(x,c,\mu,\chi)d\chi \tag{3.155}$$

nas equações (3.151), (3.153) e (3.154), reescrevendo o problema na forma

$$\begin{aligned} c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2}K_z + c\mu\frac{\partial}{\partial x}g(x,c,\mu)+\sigma\eta(c)g(x,c,\mu) = \\ \sigma\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} c'^2 e^{-c'^2}F^*(c',\mu':c,\mu)g(x,c',\mu')d\mu' dc', \end{aligned} \tag{3.156}$$

para $x\in(-a,a)$, $\mu\in[-1,1]$, $c\in[0,\infty)$, $F^*(c',\mu':c,\mu)$ é dado na Eq. (3.63) e as condições de contorno são reescritas na forma

$$g(-a,c,\mu)-(1-\alpha)g(-a,c,-\mu)=0 \tag{3.157}$$

e

$$g(a,c,-\mu)-(1-\alpha)g(a,c,\mu)=0, \tag{3.158}$$

para $\mu\in(0,1]$, $c\in[0,\infty)$.

Em termos da média azimutal as quantidades de interesse são escritas na forma:

• perfil de velocidade

$$u(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} c^3 e^{-c^2}(1-\mu^2)^{1/2}g(x,c,\mu)d\mu dc, \tag{3.159}$$

• perfil de fluxo de calor

$$q(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^{\infty}\int_{-1}^{1} c^3 e^{-c^2}(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2}g(x,c,\mu)d\mu dc. \tag{3.160}$$

Pretende-se também para este problema, obter resultados para a taxa de massa (U) e taxa de fluxo de calor (Q) escritas em termos do perfil de velocidade e do perfil de fluxo de calor

$$U=\frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} u(x)dx \tag{3.161}$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2}\int_{-a}^{a} q(x)dx. \tag{3.162}$$

Neste momento, observa-se que

$$g_p(c,\mu) = -\frac{c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2}K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.163}$$

é solução particular da Eq. (3.156) e assim escrevendo

$$g(x,c,\mu) = g_h(x,c,\mu) + g_p(c,\mu), \tag{3.164}$$

onde $g_h(x,c,\mu)$ satisfaz

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}g_h(x,c,\mu) + \sigma\eta(c)g_h(x,c,\mu) = \sigma\int_0^\infty\int_{-1}^{1} c'^2 e^{-c'^2}F^*(c,\mu:c',\mu')g_h(x,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.165}$$

para $x \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$ e $c \in [0,\infty)$, com as seguintes condições de contorno

$$g_h(-a,c,\mu) - (1-\alpha)g_h(-a,c,-\mu) = \frac{\alpha c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2}K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.166}$$

e

$$g_h(a,c,-\mu) - (1-\alpha)g_h(a,c,\mu) = \frac{\alpha c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2}K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.167}$$

para $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$. Fazendo, agora,

$$g_h(x,c,\mu) = c(1-\mu^2)^{1/2}Y(x,c,\mu) \tag{3.168}$$

como foi feito para os fluxos de Couette e Poiseuille, baseando-se em problemas semelhantes, reescrevem-se as Eqs. (3.165) a (3.167) como

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x,c,\mu) + \sigma\eta(c)Y(x,c,\mu) = \frac{\gamma_1}{4}\sigma\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^{1} c'^4 e^{-c'^2}\eta(c')(1-\mu'^2)Y(x,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.169}$$

para $x \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$ e $c \in [0,\infty)$, com as seguintes condições de contorno

$$Y(-a,c,\mu) - (1-\alpha)Y(-a,c,-\mu) = \frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.170}$$

e

$$Y(a,c,-\mu)-(1-\alpha)Y(a,c,\mu)=\frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.171}$$

para $\mu \in (0,1]$, $c \in [0,\infty)$.

• **Transformação** $\tau = \sigma x$

Aqui usa-se $\tau = \sigma x$ nas Eqs. (3.169) a (3.171) e obtém-se

$$c\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau/\sigma,c,\mu)+\eta(c)Y(\tau/\sigma,c,\mu)=W\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}\eta(c')(1-\mu'^2)Y(\tau/\sigma,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.172}$$

para $\tau/\sigma \in (-a,a)$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$, W é dado na Eq. (3.79) e com as seguintes condições de contorno

$$Y(-\tau_o/\sigma,c,\mu)-(1-\alpha)Y(-\tau_o/\sigma,c,-\mu)=\frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.173}$$

e

$$Y(\tau_o/\sigma,c,-\mu)-(1-\alpha)Y(\tau_o/\sigma,c,\mu)=\frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.174}$$

onde $\tau_o = \sigma a$, $\mu \in (0,1]$, $c \in [0,\infty)$. Reescreve-sem também as equações (3.159) e (3.160) em termos de $Y(\tau/\sigma,c,\mu)$

$$u_*(\tau)=-\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc+\frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc \tag{3.175}$$

e

$$q_*(\tau)=-\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)^2}{\eta(c)}dc+ \\ \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc. \tag{3.176}$$

• Mudança de Variável e Decomposição

Neste momento, introduz-se uma troca de variável [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.177}$$

na Eq. (3.172) e propõe-se a decomposição

$$Y(\tau/\sigma, c, \xi\eta(c)/c) = G_1(\tau,\xi) + \frac{(c^2-5/2)}{\eta(c)}G_2(\tau,\xi) \tag{3.178}$$

e, após trocar a ordem de integração , encontra-se

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}G_i(\tau,\xi) + G_i(\tau,\xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma}\Big[\psi_{i,1}(\xi')G_1(\tau,\xi') + \psi_{i,2}(\xi')G_2(\tau,\xi')\Big]d\xi' \tag{3.179}$$

para $i = 1, 2$. Onde

$$\psi_{1,1}(\xi) = W\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta^2(c)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.180}$$

$$\psi_{1,2}(\xi) = W\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2-5/2)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.181}$$

$$\psi_{2,1}(\xi) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi_{2,2}(\xi) = 0 \tag{3.182}$$

aqui observa-se a Eq. (3.37) e W é dado na Eq. (3.79). Também observa-se que o problema $G_2(\tau,\xi)$ dado pela Eqs. (3.179) e (3.182) pode ser resolvido analiticamente conforme foi comentado na seção anterior para o problema de Poiseuille. Considerando as condições de contorno, substitui-se as Eqs. (3.177) e (3.178) nas Eqs. (3.173) e (3.174) e obtém-se

$$G_1(-\tau_o,\xi) - (1-\alpha)G_1(-\tau_o,-\xi) = 0, \tag{3.183}$$

$$G_2(-\tau_o,\xi) - (1-\alpha)G_2(-\tau_o,-\xi) = \alpha K_z/\sigma \tag{3.184}$$

e

$$G_1(\tau_o,-\xi) - (1-\alpha)G_1(\tau_o,\xi) = 0, \tag{3.185}$$

$$G_2(\tau_o, -\xi) - (1-\alpha)G_2(\tau_o, \xi) = \alpha K_z/\sigma. \tag{3.186}$$

Neste momento, introduz-se a notação vetorial $\mathbf{G}(\tau, \xi)$, com componentes $G_i(\tau, \xi)$, $i = 1, 2$ e reescreve-se o problema como

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{G}(\tau, \xi) + \mathbf{G}(\tau, \xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \mathbf{\Psi}(\xi')\mathbf{G}(\tau, \xi')d\xi \tag{3.187}$$

onde a matriz 2×2 $\mathbf{\Psi}(\xi)$ tem componentes $\psi_{i,j}(\xi)$, como segue

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \begin{bmatrix} \psi_{1,1}(\xi) & \psi_{1,2}(\xi) \\ \psi_{2,1}(\xi) & \psi_{2,2}(\xi) \end{bmatrix}. \tag{3.188}$$

Para encontrar as condições de contorno na forma vetorial, reescreve-se as Eqs. (3.183) a (3.186) como

$$\mathbf{G}(-\tau_o, \xi) - (1-\alpha)\mathbf{G}(-\boldsymbol{\tau_o}, -\xi) = \mathbf{F_4}(\xi) \tag{3.189}$$

e

$$\mathbf{G}(\tau_o, -\xi) - (1-\alpha)\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau_o}, \xi) = \mathbf{F_4}(\xi) \tag{3.190}$$

para $\xi \in (0, \gamma]$. Aqui

$$\mathbf{F_4}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha K_z/\sigma \end{bmatrix}. \tag{3.191}$$

Após ter resolvido o problema $\mathbf{G}$, podem-se usar as equações (3.177) e (3.178) para reescrever as equações (3.175) e (3.176), respectivamente, para os perfis de velocidade e fluxo de calor, da seguinte forma

$$u_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \int_{-\gamma}^{\gamma} \Big[u_{t1}(\xi)G_1(\tau, \xi) + u_{t2}(\xi)G_2(\tau, \xi)\Big] d\xi \tag{3.192}$$

e

$$q_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \int_{-\gamma}^{\gamma} \Big[q_{t1}(\xi)G_1(\tau, \xi) + q_{t2}(\xi)G_2(\tau, \xi)\Big] d\xi \tag{3.193}$$

onde

$$u_{t1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2} \eta(c) \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc, \tag{3.194}$$

$$u_{t2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2} (c^2 - 5/2) \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc, \tag{3.195}$$

$$q_{t1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2} (c^2 - 5/2) \eta(c) \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc \tag{3.196}$$

e

$$q_{t2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{M_\xi} ce^{-c^2} (c^2 - 5/2)^2 \Big[c^2 - \xi^2 \eta^2(c) \Big] dc. \tag{3.197}$$

No próximo capítulo aplica-se o método de ordenadas discretas no problema **G** dado nas Eqs. (3.187), (3.189) e (3.190).

3.5 O Problema de Deslizamento Térmico

O problema de deslizamento térmico descreve o fluxo de um gás rarefeito, que surge devido a um gradiente (constante) de temperatura na direção paralela à parede. Para obter o problema dessa seção, a Maxwelliana usada para linearizar a Eq. (2.4) é escrita na forma

$$f_0(z, \mathbf{v}) = n(z) \Big(\frac{m}{2\pi k T(z)} \Big)^{3/2} exp \Big(- \frac{m \mathbf{v}^2}{2kT(z)} \Big) \tag{3.198}$$

onde $n(z)$ e $T(z)$ são dados na Eq. (3.150). Seguem-se passos descritos no capítulo anterior (seção 2.1) e obtém-se a equação de balanço para este problema na forma

$$c(1-\mu^2)^{1/2} \cos\chi (c^2 - 5/2) K_z + c\mu \frac{\partial}{\partial x} h(x, \mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) \tag{3.199}$$

onde o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) = -\eta(c) h(x, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c}) h(x, \mathbf{c}') d\chi' d\mu' dc', \tag{3.200}$$

para $x > 0$ (x adimensional), $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$, $\eta(c)$ representa a freqüência de colisão das partículas de gás , $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é dado na Eq. (2.63) e segue o modelo CLF e a condição de contorno é escrita na forma

$$h(0, c, \mu, \chi) - (1 - \alpha)h(0, c, -\mu, \chi) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(0, c', -\mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \tag{3.201}$$

com $\mu \in (0, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e $\mu \in [0, 2\pi]$. Ainda

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = u_d, \tag{3.202}$$

onde u_d é constante e $u(x)$ representa o perfil de velocidade.

• **Média Azimutal**

Introduzindo a média azimutal

$$g(x, c, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} cos\chi h(x, c, \mu, \chi) d\chi \tag{3.203}$$

nas equações (3.199) e (3.201), reescreve-se o problema na forma

$$\begin{aligned} c(c^2 - 5/2)(1 - \mu^2)^{1/2} K_z + c\mu \frac{\partial}{\partial x} g(x, c, \mu) + \sigma\eta(c) g(x, c, \mu) = \\ \sigma \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F^*(c', \mu' : c, \mu) g(x, c', \mu') d\mu' dc', \end{aligned} \tag{3.204}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e $F^*(c', \mu' : c, \mu)$ é dado na Eq. (3.63). A condição de contorno então é dada por

$$g(0, c, \mu) - (1 - \alpha) g(0, c, -\mu) = 0, \tag{3.205}$$

para $\mu \in (0, 1]$, e $c \in [0, \infty)$.

Considerando as quantidades de interesse, em termos da média azimutal:

• perfil de velocidade

$$u(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (1 - \mu^2)^{1/2} g(x, c, \mu) d\mu dc, \tag{3.206}$$

• perfil de fluxo de calor

$$q(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (c^2 - 5/2)(1-\mu^2)^{1/2} g(x,c,\mu) d\mu dc. \tag{3.207}$$

Para este problema nota-se que

$$g_p(c,\mu) = -\frac{c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2} K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.208}$$

é solução particular da Eq. (3.204) e assim escreve-se

$$g(x,c,\mu) = g_h(x,c,\mu) + g_p(c,\mu), \tag{3.209}$$

onde $g_h(x,c,\mu)$ satisfaz

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x} g_h(x,c,\mu) + \sigma\eta(c) g_h(x,c,\mu) = \sigma \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F^*(c',\mu' : c,\mu) g_h(x,c',\mu') d\mu' dc' \tag{3.210}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$ e com a seguinte condição de contorno

$$g_h(0,c,\mu) - (1-\alpha) g_h(0,c,-\mu) = \frac{\alpha c(c^2-5/2)(1-\mu^2)^{1/2} K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.211}$$

para $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$. Considerando, agora,

$$g_h(x,c,\mu) = c(1-\mu^2)^{1/2} Y(x,c,\mu) \tag{3.212}$$

da mesma forma como já foi tratado com os fluxo de Couette, Poiseuille e creep-térmico para se chegar em problemas semelhante, reescreve-se as Eqs. (3.210) e (3.211)

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x} Y(x,c,\mu) + \sigma\eta(c) Y(x,c,\mu) = \frac{\gamma_1}{4} \sigma\eta(c) \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^4 e^{-c'^2} \eta(c')(1-\mu'^2) Y(x,c',\mu') d\mu' dc' \tag{3.213}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$ e com a seguinte condição de contorno

$$Y(0,c,\mu) - (1-\alpha) Y(0,c,-\mu) = \frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)}. \tag{3.214}$$

onde $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$.

• **Transformação** $\tau = \sigma x$

Usa-se $\tau = \sigma x$ na Eq. (3.213) e obtém-se

$$c\mu\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\tau/\sigma,c,\mu)+\eta(c)Y(\tau/\sigma,c,\mu) = W\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}\eta(c')(1-\mu'^2)Y(\tau/\sigma,c',\mu')d\mu'dc' \tag{3.215}$$

para $\tau > 0$, $\mu \in [-1,1]$, $c \in [0,\infty)$, W é dado na Eq. (3.79) e com a seguinte condição de contorno

$$Y(0,c,\mu) - (1-\alpha)Y(0,c,-\mu) = \frac{\alpha(c^2-5/2)K_z}{\sigma\eta(c)} \tag{3.216}$$

para $\mu \in (0,1]$ e $c \in [0,\infty)$. A Eq. (3.202) fica escrita em termos de $\tau = \sigma x$ na forma

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{d}{d\tau}u_*(\tau) = 0. \tag{3.217}$$

Reescrevendo as equações (3.206) e (3.207) em termos de $Y(\tau/\sigma,c,\mu)$ como

$$u_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc + \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc \tag{3.218}$$

e

$$q_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)^2}{\eta(c)}dc + \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_0^\infty\int_{-1}^1 c^4e^{-c^2}(c^2-5/2)(1-\mu^2)Y(\tau/\sigma,c,\mu)d\mu dc. \tag{3.219}$$

• **Mudança de Variável e Decomposição**

Aqui, considera-se uma troca de variável [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.220}$$

na Eq. (3.215) e usa-se a decomposição

$$Y(\tau/\sigma,c,\xi\eta(c)/c) = G_1(\tau,\xi) + \frac{(c^2-5/2)}{\eta(c)}G_2(\tau,\xi) \tag{3.221}$$

e, após trocar a ordem de integração, acha-se

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}G_i(\tau,\xi)+G_i(\tau,\xi)=\int_{-\gamma}^{\gamma}\Big[\psi_{i,1}(\xi')G_1(\tau,\xi')+\psi_{i,2}(\xi')G_2(\tau,\xi')\Big]d\xi' \tag{3.222}$$

para $i=1,2$. Aqui

$$\psi_{1,1}(\xi)=W\int_{M_\xi}ce^{-c^2}\eta^2(c)\Big[c^2-\xi^2\eta^2(c)\Big]dc, \tag{3.223}$$

$$\psi_{1,2}(\xi)=W\int_{M_\xi}ce^{-c^2}\eta(c)(c^2-5/2)\Big[c^2-\xi^2\eta^2(c)\Big]dc, \tag{3.224}$$

$$\psi_{2,1}(\xi)=0 \qquad \text{e} \qquad \psi_{2,2}(\xi)=0 \tag{3.225}$$

neste momento, observa-se a condição dada pela Eq. (3.37) e W é dado na Eq. (3.79). Nesta seção também observa-se que o problema $G_2(\tau,\xi)$ dado pela Eqs. (3.222) e (3.225), pode ser resolvido analiticamente conforme foi comentado na seções 3.3 e 3.4 para os problemas de Poiseuille e creep-térmico. Para a condição de contorno, substitui-se as Eqs. (3.220) e (3.221) na Eq. (3.216) para obter

$$G_1(0,\xi)-(1-\alpha)G_1(0,-\xi)=0 \tag{3.226}$$

e

$$G_2(0,\xi)-(1-\alpha)G_2(0,-\xi)=\alpha K_z/\sigma. \tag{3.227}$$

Introduzindo a notação vetorial $\mathbf{G}(\tau,\xi)$, com componentes $G_i(\tau,\xi), i=1,2$, reescreve-se o problema como

$$\xi\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{G}(\tau,\xi)+\mathbf{G}(\tau,\xi)=\int_{-\gamma}^{\gamma}\mathbf{\Psi}(\xi')\mathbf{G}(\tau,\xi')d\xi' \tag{3.228}$$

onde a matriz 2×2 $\mathbf{\Psi}(\xi)$ tem componentes $\psi_{i,j}(\xi)$, como segue

$$\mathbf{\Psi}(\xi)=\begin{bmatrix}\psi_{1,1}(\xi) & \psi_{1,2}(\xi)\\ \psi_{2,1}(\xi) & \psi_{2,2}(\xi)\end{bmatrix}. \tag{3.229}$$

Para encontrar a condição de contorno na forma vetorial, reescreve-se as Eqs. (3.226) e (3.227) como

$$\mathbf{G}(0,\xi) - (1-\alpha)\mathbf{G}(\mathbf{0},-\xi) = \mathbf{F_4}(\xi) \tag{3.230}$$

para $\xi \in (0,\gamma]$. Aqui

$$\mathbf{F_4}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha K_z/\sigma \end{bmatrix}. \tag{3.231}$$

Reescrevem-se também os perfis de velocidade e fluxo de calor dados, respectivamente, nas Eqs. (3.218) e (3.219) usando as equações (3.220) e (3.221) como

$$u_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc + \int_{-\gamma}^{\gamma}\Big[u_{t1}(\xi)G_1(\tau,\xi) + u_{t2}(\xi)G_2(\tau,\xi)\Big]d\xi \tag{3.232}$$

e

$$q_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)^2}{\eta(c)}dc + \int_{-\gamma}^{\gamma}\Big[q_{t1}(\xi)G_1(\tau,\xi) + q_{t2}(\xi)G_2(\tau,\xi)\Big]d\xi \tag{3.233}$$

onde

$$u_{t1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} c e^{-c^2}\eta(c)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.234}$$

$$u_{t2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} c e^{-c^2}(c^2-5/2)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc, \tag{3.235}$$

$$q_{t1}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} c e^{-c^2}(c^2-5/2)\eta(c)(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc \tag{3.236}$$

$$q_{t2}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} c e^{-c^2}(c^2-5/2)^2(c^2 - \xi^2\eta^2(c))dc. \tag{3.237}$$

No capítulo seguinte, as Eqs. (3.228) e (3.230), que definem o problema $\mathbf{G}$, serão resolvidas pelo método de ordenadas discretas.

3.6 O Problema de Kramers

O problema de Kramers retrata fisicamente a expansão de um gás em domínio semi-infinito limitado por uma placa plana localizada em $x = 0$, e, por estas características, é um dos problemas mais investigados da teoria cinética de gases quando quer-se conhecer os efeitos causados no fluxo de partículas de gás devido à presença de uma parede. Obtém-se esse problema linearizando a Eq. (2.4) em torno da seguinte Maxwelliana

$$f_0(x, \mathbf{v}) = n_0(\frac{m}{2\pi kT_0})^{3/2} exp\Big\{ - \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + [v_z - u_1(x)]^2)}{2kT_0}\Big\} \tag{3.238}$$

onde $u(x)$ é dado na Eq. (2.9). Após seguir passos dados no capítulo anterior (seção 2.1), chega-se à seguinte equação de balanço para este problema

$$2K_0c^2\mu(1-\mu^2)^{1/2}cos\chi + c\mu\frac{\partial}{\partial x}h(x, \mathbf{c}) = \sigma L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) \tag{3.239}$$

onde K_0 é considerado conhecido e o processo de colisão é descrito por

$$L^*\{h\}(x, \mathbf{c}) = -\eta(c)h(x, \mathbf{c}) + \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} c'^2 e^{-c'^2} F(\mathbf{c}', \mathbf{c})h(x, \mathbf{c}')d\chi' d\mu' dc', \tag{3.240}$$

para $x > 0$ (x adimensional), $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$, $\eta(c)$ é a freqüência de colisão das partículas $F(\mathbf{c}', \mathbf{c})$ é descrito segundo o modelo CLF e é dado na Eq. (2.63) e a condição de contorno é escrita na forma

$$h(0, c, \mu, \chi) - (1-\alpha)h(0, c, -\mu, \chi) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} c'^3 e^{-c'^2} h(0, c', -\mu', \chi')\mu' d\chi' d\mu' dc', \tag{3.241}$$

para $\mu \in (0, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e $\mu \in [0, 2\pi]$. Ainda esse problema satizfaz a seguinte condição no infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}u(x) = K_0 \tag{3.242}$$

onde $u(x)$ é o perfil de velocidade e K_0 é considerado conhecido.

- **Média Azimutal**

Neste momento, introduz-se a média azimutal

$$g(x, c, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} cos\chi h(x, c, \mu, \chi) d\chi \tag{3.243}$$

nas equações (3.239) e (3.241), reescreve-se o problema na forma

$$2K_0 c^2 \mu (1 - \mu^2)^{1/2} + c\mu \frac{\partial}{\partial x} g(x, c, \mu) + \sigma \eta(c) g(x, c, \mu) = \\ \sigma \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F^*(c', \mu' : c, \mu) g(x, c', \mu') d\mu' dc', \tag{3.244}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1, 1]$ e $c \in [0, \infty)$ e $F^*(c', \mu' : c, \mu)$ é dado pela Eq. (3.63). A condição de contorno fica escrita na seguinte forma

$$g(0, c, \mu) - (1 - \alpha) g(0, c, -\mu) = 0 \tag{3.245}$$

para $\mu \in (0, 1]$, e $c \in [0, \infty)$.

Escrevem-se as quantidades de interesse em termos da média azimutal na forma:

• perfil de velocidade

$$u(x) = K_0 x + \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (1 - \mu^2)^{1/2} g(x, c, \mu) d\mu dc, \tag{3.246}$$

• perfil de fluxo de calor

$$q(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^3 e^{-c^2} (c^2 - 5/2)(1 - \mu^2)^{1/2} g(x, c, \mu) d\mu dc. \tag{3.247}$$

Aqui, observa-se que

$$g_p(c, \mu) = -\frac{2K_0 c^2 \mu (1 - \mu^2)^{1/2}}{\sigma \eta(c)} \tag{3.248}$$

é a solução particular da Eq. (3.244) e assim escreve-se

$$g(x, c, \mu) = g_h(x, c, \mu) + g_p(c, \mu), \tag{3.249}$$

onde $g_h(x, c, \mu)$ satisfaz

$$c\mu \frac{\partial}{\partial x} g_h(x, c, \mu) + \sigma \eta(c) g_h(x, c, \mu) = \sigma \int_0^\infty \int_{-1}^1 c'^2 e^{-c'^2} F^*(c', \mu' : c, \mu) g_h(x, c', \mu') d\mu' dc' \tag{3.250}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$ e com a seguinte condição de contorno

$$g_h(0, c, \mu) - (1 - \alpha)g_h(0, c, -\mu) = \frac{2}{\sigma\eta(c)}(2 - \alpha)K_0\mu(1 - \mu^2)^{1/2}c^2 \tag{3.251}$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $c \in [0, \infty)$. Fazendo, agora,

$$g_h(x, c, \mu) = c(1 - \mu^2)^{1/2}Y(x, c, \mu) \tag{3.252}$$

como foi feito nos problemas anteriores (fluxo de Couette, Poiseuille, creep-térmico e deslizamento térmico), para obter-se problemas semelhantes, reescrevem-se as Eqs. (3.250) e (3.251) como

$$c\mu\frac{\partial}{\partial x}Y(x, c, \mu) + \sigma\eta(c)Y(x, c, \mu) = \frac{\gamma_1}{4}\sigma\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}(1 - \mu^2)Y(x, c', \mu')d\mu'dc' \tag{3.253}$$

para $x > 0$, $\mu \in [-1, 1]$ e $c \in [0, \infty)$, com a seguinte condição de contorno

$$Y(0, c, \mu) - (1 - \alpha)Y(0, c, -\mu) = \frac{2}{\sigma\eta(c)}(2 - \alpha)K_0c\mu. \tag{3.254}$$

para $\mu \in (0, 1]$ e $c \in [0, \infty)$. Nota-se que a condição de comportamento do perfil de velocidade no infinito também é imposta.

- **Transformação** $\tau = \sigma x$

Usa-se $\tau = \sigma x$ na Eq. (3.253) e obtém-se

$$c\mu\frac{\partial}{\partial \tau}Y(\tau/\sigma, c, \mu) + \eta(c)Y(\tau/\sigma, c, \mu) = W\eta(c)\int_0^\infty\int_{-1}^1 c'^4e^{-c'^2}\eta(c')(1 - \mu'^2)Y(\tau/\sigma, c', \mu')d\mu'dc' \tag{3.255}$$

para $\tau > 0$, $\mu \in [-1, 1]$, $c \in [0, \infty)$, W dado pela Eq. (3.79), com condição de contorno escrita na forma

$$Y(0, c, \mu) - (1 - \alpha)Y(0, c, \mu) = \frac{2}{\sigma\eta(c)}(2 - \alpha)K_oc\mu, \tag{3.256}$$

e a Eq. (3.242) fica escrita em termos de $\tau = \sigma x$ na forma

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{d}{d\tau}u_*(\tau) = \frac{K_0}{\sigma}. \tag{3.257}$$

Reescreve-se também as equações (3.246) e (3.247) em termos de $Y(\tau/\sigma, c, \mu)$ na forma

$$u_*(\tau) = K_0(\tau/\sigma) + \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^4 e^{-c^2} (1 - \mu^2) Y(\tau/\sigma, c, \mu) d\mu dc \tag{3.258}$$

e

$$q_*(\tau) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 c^4 e^{-c^2} (c^2 - 5/2)(1 - \mu^2) Y(\tau/\sigma, c, \mu) d\mu dc. \tag{3.259}$$

• **Mudança de Variável e Decomposição**

Aplica-se uma troca de variável [Busbridge, 1953]

$$\xi = \frac{c\mu}{\eta(c)} \qquad e \qquad \gamma = sup\{c/\eta(c)\}, \tag{3.260}$$

na Eq. (3.255), usa-se a decomposição

$$Y(\tau/\sigma, c, \xi\eta(c)/c) = \frac{2K_0}{\sigma} G(\tau, \xi) \tag{3.261}$$

e, após trocar a ordem de integração , encontra-se

$$\xi \frac{\partial}{\partial \tau} G(\tau, \xi) + G(\tau, \xi) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \psi(\xi') G(\tau, \xi') d\xi', \tag{3.262}$$

onde

$$\psi(\xi) = W \int_{M_\xi} c e^{-c^2} \eta^2(c)(c^2 - \xi^2 \eta^2(c)) dc, \tag{3.263}$$

onde observa-se a condição dada pela Eq. (3.37); W é dado na Eq. (3.79) e com a seguinte condição de contorno,

$$G(0, \xi) - (1 - \alpha) G(0, -\xi) = (2 - \alpha)\xi \tag{3.264}$$

para $\xi \in (0, \gamma]$.

Usando as equações (3.260) e (3.261) nas equações (3.246) e (3.247) expressa-se o perfil de velocidade e o perfil de fluxo de calor em termos da solução do problema G como:

$$u_*(\tau) = K_0\Big\{\tau/\sigma + \frac{1}{\sigma}\int_{-\gamma}^{\gamma} u_1(\xi)G(\tau,\xi)d\xi\Big\} \tag{3.265}$$

e

$$q_*(\tau) = \frac{K_0}{\sigma}\int_{-\gamma}^{\gamma} q_1(\xi)G(\tau,\xi)d\xi, \tag{3.266}$$

onde

$$u_1(\xi) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc \tag{3.267}$$

e

$$q_1(\xi) = \frac{2}{\pi^{1/2}}\int_{M_\xi} ce^{-c^2}\eta(c)(c^2 - 5/2)\Big[c^2 - \xi^2\eta^2(c)\Big]dc. \tag{3.268}$$

No capítulo a seguir descreve-se o desenvolvimento das soluções em ordenadas discretas para os problemas salto de temperatura, fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, Kramers, creep-térmico e deslizamento térmico.

CAPÍTULO 4

O MÉTODO DE ORDENADAS DISCRETAS

Neste capítulo, uma versão analítica do método de ordenadas discretas [Barichello e Siewert, 1999a] será usada na busca de soluções para os problemas propostos no capítulo anterior. No desenvolvimento da solução , alguns passos são comuns:

• escrever a versão em ordenadas discretas com base num esquema de quadratura do tipo “half-range”, para cada problema descrito no capítulo anterior;

• buscar soluções do tipo exponencial para a versão do problema escrito em ordenadas discretas;

• encontrar o problema de autovalores;

• determinar soluções elementares analíticas (caso escalar) ou numérica (caso vetorial);

• no caso de problemas vetoriais encontrar uma expressão para os autovetores;

• reescrever as quantidades de interesse usando a solução em ordenadas discretas.

4.1 O Problema de Salto de Temperatura

Antes de escrever a versão em ordenadas discretas para o problema dado pela Eq. (3.42), observa-se que a matriz característica $\mathbf{\Psi}(\xi)$ definida pela Eq. (3.43) não é simétrica, e também, $\mathbf{\Psi}(\xi) \neq \mathbf{\Psi}(-\xi)$, e assim escreve-se

$$\pm\xi_i \frac{d}{d\tau}\mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) + \mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) = \sum_{k=1}^{N} w_k[\mathbf{\Psi}(\xi_k)\mathbf{G}(\tau, \xi_k) + \mathbf{\Psi}(-\xi_k)\mathbf{G}(\tau, -\xi_k)] \tag{4.1}$$

com $i = 1, 2, ..., N$. Nas Eqs. (4.1), considera-se que os N pontos de quadratura $\{\xi_k\}$ e os

N pesos $\{w_k\}$ são definidos para integração no intervalo $[0, \gamma]$. Buscam-se soluções do tipo exponencial para as Eqs. (4.1), substituindo-se nessas equações as soluções elementares

$$\mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) = \mathbf{\Phi}(\nu, \pm\xi_i)e^{-\tau/\nu}, \tag{4.2}$$

onde ν é a constante de separação e as funções $\mathbf{\Phi}$ denotam os componentes independentes da parte espacial das soluções elementares. Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.1) tem-se

$$(\nu \mp \xi_i)\mathbf{\Phi}(\nu, \pm\xi_i) = \nu \sum_{k=1}^{N} w_k[\mathbf{\Psi}(\xi_k)\mathbf{\Phi}(\nu, \xi_k) + \mathbf{\Psi}(-\xi_k)\mathbf{\Phi}(\nu, -\xi_k)] \tag{4.3}$$

para $i = 1, ..., N$. Considerando que

$$\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \left[\mathbf{\Phi}^T(\nu, \xi_1) \quad \mathbf{\Phi}^T(\nu, \xi_2) \quad ... \quad \mathbf{\Phi}^T(\nu, \xi_N)\right]^T, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{\Phi}_-(\nu) = \left[\mathbf{\Phi}^T(\nu, -\xi_1) \quad \mathbf{\Phi}^T(\nu, -\xi_2) \quad ... \quad \mathbf{\Phi}^T(\nu, -\xi_N)\right]^T \tag{4.5}$$

e

$$\mathbf{M} = diag\{\xi_1\mathbf{I}, \xi_2\mathbf{I}, ..., \xi_N\mathbf{I}\}, \tag{4.6}$$

aqui $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade de ordem 3×3. Complementando, define-se ainda que $\mathbf{W}_+$ e $\mathbf{W}_-$ denotam matrizes de ordem $3N \times 3N$ onde cada $3 \times 3N$ linhas são definidas, respectivamente como,

$$\mathbf{R}_+ = \left[w_1\mathbf{\Psi}(\xi_1) \quad w_2\mathbf{\Psi}(\xi_2) \quad ... \quad w_N\mathbf{\Psi}(\xi_N)\right] \tag{4.7}$$

e

$$\mathbf{R}_- = \left[w_1\mathbf{\Psi}(-\xi_1) \quad w_2\mathbf{\Psi}(-\xi_2) \quad ... \quad w_N\mathbf{\Psi}(-\xi_N)\right], \tag{4.8}$$

assim escrevem-se as Eqs. (4.3) como

$$\nu\mathbf{\Phi}_+(\nu) - \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \nu[\mathbf{W}_+\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{W}_-\mathbf{\Phi}_-(\nu)] \tag{4.9}$$

e

$$\nu\mathbf{\Phi}_-(\nu) + \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_-(\nu) = \nu[\mathbf{W}_+\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{W}_-\mathbf{\Phi}_-(\nu)]. \tag{4.10}$$

Neste ponto é conveniente, após algumas observações, escrever

$$\mathbf{W}_- = \mathbf{D}\mathbf{W}_+\mathbf{D}, \tag{4.11}$$

onde a matriz diagonal $\mathbf{D}$ de ordem $3N \times 3N$ pode ser escrita como

$$\mathbf{D} = diag\{\mathbf{S}, \mathbf{S}, ..., \mathbf{S}\} \tag{4.12}$$

onde $\mathbf{S}$ é dado pela Eq. (3.45). Agora multiplica-se a Eq. (4.10) por $\mathbf{D}$ e reescrevem-se as Eqs. (4.9) e (4.10) como

$$\nu\mathbf{\Phi}_+(\nu) - \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_+(\nu) = \nu[\mathbf{W}_+\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{D}\mathbf{W}_+\mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu)] \tag{4.13}$$

e

$$\nu\mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu) + \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu) = \nu[\mathbf{D}\mathbf{W}_+\mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{W}_+\mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu)]. \tag{4.14}$$

Definindo

$$\mathbf{U}(\nu) = \mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu) \tag{4.15}$$

e

$$\mathbf{V}(\nu) = \mathbf{\Phi}_+(\nu) - \mathbf{D}\mathbf{\Phi}_-(\nu) \tag{4.16}$$

soma-se as Eqs. (4.13) e (4.14) e obtém-se

$$\nu[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{W}_+]\mathbf{U} = \mathbf{M}\mathbf{V} \tag{4.17}$$

onde, neste ponto, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $3N \times 3N$. Pode-se, ainda, determinar a diferença entre as Eqs. (4.13) e (4.14), tal que

$$\nu[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{W}_+]\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{U}. \tag{4.18}$$

Eliminando $\mathbf{V}(\nu)$ entre as Eqs. (4.17) e (4.18), encontra-se o problema de autovalores definido por

$$\mathbf{AU} = \lambda \mathbf{U}, \tag{4.19}$$

onde $\lambda = 1/\nu^2$ e

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{D})\mathbf{W}_+]\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{W}_+]. \tag{4.20}$$

Sendo assim, determinam-se os $3N$ autovalores λ e respectivos autovetores $\mathbf{U}$. Neste ponto observa-se que dois autovalores tendem a zero quando N tender ao infinito. Introduzem-se, então, quatro soluções linearmente independentes do problema definido pela Eq. (3.42), que são

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

seguindo com

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{G}_4(\tau, \xi) = (\tau - \xi) \begin{bmatrix} \omega - 5/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Faz-se

$$\mathbf{G}_\pm(\tau) = \left[\mathbf{G}^T(\tau, \pm\xi_1) \quad \mathbf{G}^T(\tau, \pm\xi_2) \quad ... \quad \mathbf{G}^T(\tau, \pm\xi_N) \right]^T \tag{4.23}$$

e, portanto, a solução em ordenadas discretas pode ser escrita, após terem-se excluído todas as soluções que não são limitadas quando τ tende para o infinito, como

$$\mathbf{G}_\pm(\tau) = A_1\mathbf{\Phi}_1 + A_2\mathbf{\Phi}_2 + B_1\mathbf{\Phi}_3 + \sum_{j=3}^{3N} A_j \mathbf{\Phi}_\pm(\nu_j) e^{-\tau/\nu_j} \tag{4.24}$$

onde as soluções elementares são obtidas numericamente, B_1 e A_j são constantes arbitrárias, para $j = 1, 2, ..., 3N$. Além disto,

$$\mathbf{\Phi}_j = \Big[\mathbf{G}_j^T \quad \mathbf{G}_j^T \quad ... \quad \mathbf{G}_j^T\Big]^T, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{4.25}$$

e as soluções elementares $\mathbf{\Phi}_\pm(\nu_j)$ são avaliadas das equações Eqs. (4.15) a (4.18). Encontra-se então

$$\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) = \frac{1}{2}\{\mathbf{I} + \nu_j \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{W}_+]\}\mathbf{U}_j \tag{4.26}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_-(\nu_j) = \frac{1}{2}\mathbf{D}\{\mathbf{I} - \nu_j \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{W}_+]\}\mathbf{U}_j, \tag{4.27}$$

onde $\mathbf{U}_j$ são os autovetores dos correspondentes autovalores λ_j retirados da Eq. (4.19). Substituindo a Eq. (4.24) na condição de contorno dada pela Eq. (3.44), obtém-se

$$\mathbf{G}_+(0) - (1-\alpha)\mathbf{R}_s\mathbf{G}_-(0) - 2\alpha\mathbf{R}_d\mathbf{G}_-(0) = \mathbf{R} \tag{4.28}$$

que gera o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$A_1\hat{\Phi}_1 + A_2\hat{\Phi}_2 + \sum_{j=3}^{3N} A_j\Big[\Phi_+(\nu_j) - \Big[(1-\alpha)R_s + 2\alpha R_d\Big]\Phi_-(\nu_j)\Big] = \mathbf{R} \tag{4.29}$$

onde A_j são constantes arbitrárias, para $j = 1, ..., 3N$ e

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_j = \Big[\ \hat{\mathbf{G}}_j^T \quad \hat{\mathbf{G}}_j^T \quad ... \quad \hat{\mathbf{G}}_j^T\ \Big]^T, \qquad j = 1, 2 \tag{4.30}$$

sendo

$$\hat{\mathbf{G}}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha(2-\omega) \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{G}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha\sqrt{\pi}/2 \\ 2-\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

e o lado direito é dado por

$$\mathbf{R} = \Big[\mathbf{R}^T(\xi_1) \quad \mathbf{R}^T(\xi_2) \quad ... \quad \mathbf{R}^T(\xi_N)\Big]^T. \tag{4.32}$$

Note que $\mathbf{R}(\xi)$ é dado pela Eq. (3.47). Em adição, pode-se escrever a matriz especular como

$$\mathbf{R}_s = diag\{\mathbf{S}, \mathbf{S}, ..., \mathbf{S}\}, \tag{4.33}$$

onde $\mathbf{S}$ é dado pela Eq. (3.45). Finalmente, para a reflexão difusa, $\mathbf{R}_d$ é uma matriz de ordem $3N \times 3N$, onde cada $3 \times 3N$ linhas são definidas como

$$\mathbf{R}_r = \Big[w_1\xi_1\boldsymbol{\Upsilon}(\xi_1) \quad w_2\xi_2\boldsymbol{\Upsilon}(\xi_2) \quad ... \quad w_N\xi_N\boldsymbol{\Upsilon}(\xi_N) \Big] \tag{4.34}$$

onde $\boldsymbol{\Upsilon}(\xi)$ é dado pela Eq. (3.46). A Eq. (4.28) é um resultado geral, mas quando os termos exatos $\boldsymbol{\Phi}_1$,$\boldsymbol{\Phi}_2$ e $\boldsymbol{\Phi}_3$ (da Eq. (4.24)) são usados na Eq. (3.44), as integrais resultantes da reflexão difusa podem ser feitas exatamente. Finalmente, nota-se que $\boldsymbol{\Phi}_3$ satisfaz a versão homogênea da Eq. (4.28) e assim a constante B_1 não pode ser determinada. Portanto, impõe-se uma condição de normalização arbitrária na solução,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [N_*(\tau) + T_*(\tau)] = 0. \tag{4.35}$$

e conclui-se das Eqs. (3.48), (3.49) e (4.24) que

$$B_1 = (\omega - 5/2)A_1. \tag{4.36}$$

Considerando, agora, as quantidades a serem avaliadas, substitui-se a Eq. (4.24) nas Eqs. (3.48) e (3.49) para achar após usar a eq. (4.36),

$$N_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big\{ -\tau - A_1 + \frac{1}{\pi^{1/2}} \sum_{j=3}^{3N} A_j[\mathbf{N}_+\boldsymbol{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{N}_-\boldsymbol{\Phi}_-(\nu_j)]e^{-\tau/\nu_j} \Big\} \tag{4.37}$$

e

$$T_*(\tau) = (K_1/\sigma)\Big\{ \tau + A_1 + \frac{2}{3\pi^{1/2}} \sum_{j=3}^{3N} A_j[\mathbf{T}_+\boldsymbol{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{T}_-\boldsymbol{\Phi}_-(\nu_j)]e^{-\tau/\nu_j} \Big\} \tag{4.38}$$

onde

$$\mathbf{N}_\pm = \Big[w_1\mathbf{N}(\pm\xi_1) \quad w_2\mathbf{N}(\pm\xi_2) \quad ... \quad w_N\mathbf{N}(\pm\xi_N) \Big] \tag{4.39}$$

e

$$\mathbf{T}_{\pm} = \Big[w_1 \mathbf{T}(\pm\xi_1) \quad w_2 \mathbf{T}(\pm\xi_2) \quad ... \quad w_N \mathbf{T}(\pm\xi_N) \Big] \tag{4.40}$$

com

$$\mathbf{N}(\xi) = \Big[n_1(\xi) \quad n_2(\xi) \quad n_3(\xi) \Big] \tag{4.41}$$

e

$$\mathbf{T}(\xi) = \Big[t_1(\xi) \quad t_2(\xi) \quad t_3(\xi) \Big] . \tag{4.42}$$

Note que as componentes dos vetores introduzidos nas Eqs. (4.41) e (4.42) são definidas nas Eqs. (3.50) a (3.55). Observa-se novamente que, para obter as Eqs. (4.37) e (4.38) das Eqs. (3.48) e (3.49), integram-se analiticamente os três primeiros termos da Eq. (4.24), mas usa-se o sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Agora, escrevendo as Eqs. (4.37) e (4.38) para os desvios de densidade e temperatura, respectivamente, em termos da variável x, encontram-se

$$N(x) = -x - A_1/\sigma + \frac{1}{\sigma\pi^{1/2}} \sum_{j=3}^{3N} A_j [\mathbf{N}_+ \mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{N}_- \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)] e^{-\sigma x/\nu_j} \tag{4.43}$$

e

$$T(x) = x + A_1/\sigma + \frac{2}{3\sigma\pi^{1/2}} \sum_{j=3}^{3N} A_j [\mathbf{T}_+ \mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{T}_- \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)] e^{-\sigma x/\nu_j} \tag{4.44}$$

onde põe-se a condição $K_1 = 1$. Agora, chamando

$$T_{asy}(x) = x + A_1/\sigma, \tag{4.45}$$

define-se o chamado coeficiente de salto de temperatura ζ [Barichello et al., 2002a] como

$$T_{asy}(0) = \zeta \frac{d}{dx} T_{asy}(x) \Big|_{x=0} \tag{4.46}$$

ou seja,

$$\zeta = A_1/\sigma. \tag{4.47}$$

No próximo capítulo simulações numéricas são apresentadas para avaliar os desvios de densidade e temperatura dados, respectivamente, nas Eqs. (4.43) e (4.44) e para o coeficiente de salto de temperatura expresso na Eq. (4.47).

4.2 Fluxo de Couette e o Problema de Kramers

Para escrever a versão em ordenadas discretas nesta seção segue-se a abordagem do problema de Kramers [Siewert, 2001b], uma vez que o problema G definido para estes dois problemas é similar. Observa-se também que a função característica $\psi(\xi)$ dada nas Eqs. (3.86) e (3.263) é uma função par ($\psi(\xi) = \psi(-\xi)$), assim escreve-se a versão em ordenadas discretas das Eqs. (3.85) e (3.262) como

$$\pm\xi_i \frac{d}{d\tau} G(\tau, \pm\xi_i) + G(\tau, \pm\xi_i) = \sum_{k=1}^{N} w_k \psi(\xi_k) \Big[G(\tau, \xi_k) + G(\tau, -\xi_k) \Big] \tag{4.48}$$

para $i = 1, ..., N$. Deve-se observar que o conjunto de pesos $\{w_k\}$ e raízes da quadratura $\{\xi_k\}$ aqui usados definem um esquema para avaliação de uma integral no intervalo $[0, \gamma]$. Procurando soluções do tipo exponencial para as equações (4.48), substituem-se,nessas equações , as soluções elementares

$$G(\tau, \pm\xi_i) = \phi(\nu, \pm\xi_i) e^{-\tau/\nu} \tag{4.49}$$

onde ν é a constante de separação e as funções ϕ denotam o que chamamos de componentes independentes da parte espacial das soluções elementares. Substituindo na Eq. (4.48) a expressão dada pela Eq. (4.49), obtém-se as seguintes equações em forma matricial

$$\frac{1}{\nu} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Phi}_+(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}) \mathbf{\Phi}_+(\nu) - \mathbf{W} \mathbf{\Phi}_-(\nu) \tag{4.50}$$

e

$$-\frac{1}{\nu} \mathbf{\Xi} \mathbf{\Phi}_-(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}) \mathbf{\Phi}_-(\nu) - \mathbf{W} \mathbf{\Phi}_+(\nu), \tag{4.51}$$

sendo que

$$\mathbf{\Xi} = \mathrm{diag}\big\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_N\big\}, \tag{4.52}$$

$$\mathbf{\Phi}_{\pm}(\nu) = [\phi(\nu, \pm\xi_1), \phi(\nu, \pm\xi_2), ..., \phi(\nu, \pm\xi_N)]^T, \tag{4.53}$$

$\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $N \times N$, e os elementos da matriz $\mathbf{W}$ são dados pela expressão

$$(\mathbf{W})_{i,j} = w_j \psi(\xi_j) \tag{4.54}$$

onde w_j denota os pesos da quadratura. Definindo

$$\mathbf{U}(\nu) = \mathbf{\Phi}_+(\nu) + \mathbf{\Phi}_-(\nu) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{V}(\nu) = \mathbf{\Phi}_-(\nu) - \mathbf{\Phi}_-(\nu) \tag{4.55}$$

e, trabalhando com a soma e a diferença das Eqs. (4.50) e (4.51), acha-se

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{\Xi}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{\Xi}^{-1})\mathbf{\Xi}\mathbf{U} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{\Xi}\mathbf{U} \tag{4.56}$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\xi_1^{-2}, \xi_2^{-2}, ..., \xi_N^{-2}\}. \tag{4.57}$$

Buscando obter matrizes simétricas, define-se uma matriz diagonal $\mathbf{T}$ cujos elementos T_i são tais que

$$T_i = \sqrt{w_i \psi(\xi_i)}, \tag{4.58}$$

para $i = 1, ..., N$. Multiplicando a equação (4.56) por essa matriz diagonal $\mathbf{T}$ obtém-se

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{V})\mathbf{X} = \frac{1}{\nu^2}\mathbf{X} \tag{4.59}$$

onde

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Xi}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Xi}^{-1} \tag{4.60}$$

e

$$\mathbf{X} = \mathbf{T\Xi U}. \tag{4.61}$$

Assim, o problema de autovalores dado pela equação (4.59) pode ser reescrito na forma

$$(\mathbf{D} - 2\mathbf{z}\mathbf{z}^T)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \tag{4.62}$$

onde $\lambda = 1/\nu^2$ e

$$\mathbf{z} = \left[\frac{\sqrt{w_1\psi(\xi_1)}}{\xi_1}, \frac{\sqrt{w_2\psi(\xi_2)}}{\xi_2}, ..., \frac{\sqrt{w_N\psi(\xi_N)}}{\xi_N}\right]^T. \tag{4.63}$$

Considerando que foram encontrados os autovalores pela equação (4.62), impõe-se a condição de normalização

$$\sum_{k=1}^{N} w_k\psi(\xi_k)\left[\phi(\nu,\xi_k) + \phi(\nu,-\xi_k)\right] = 1 \tag{4.64}$$

e escreve-se a solução em ordenadas discretas como

$$G(\tau,\pm\xi_i) = \sum_{j=1}^{N}\left[A_j\frac{\nu_j}{\nu_j \mp \xi_i}e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j\frac{\nu_j}{\nu_j \pm \xi_i}e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\right], \tag{4.65}$$

sendo que, nesse caso, as soluções elementares necessárias na Eq. (4.49) são expressas por

$$\phi(\nu,\pm\xi_i) = \nu_j/(\nu_j \mp \xi_i) \tag{4.66}$$

de forma analítica enquanto no problema de salto de temperatura são obtidas numericamente (veja as Eqs. (4.26) e (4.27)). As constantes arbitrárias $\{A_j\}$ e $\{B_j\}$ podem ser determinadas pelas condições de contorno do problema e as constantes de separação $\{\nu_j\}$ são o recíproco das raízes quadradas positivas dos autovalores definidos pela equação (4.62). Lembrando que os problemas baseados nas equações (3.85) e (3.262) são conservativos, uma vez que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)d\xi = 1, \tag{4.67}$$

espera-se que um dos autovalores definidos pela equação (4.62) tenda a zero quando N tender ao infinito. Levando em conta este fato, negligencia-se a maior constante de separação entre as $\{\nu_j\}$ computadas, reescrevendo a equação (4.65) como

$$G(\tau, \pm\xi_i) = A + B(\tau \mp \xi_i) + \sum_{j=1}^{N-1} \Big[A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \xi_i} e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j \frac{\nu_j}{\nu_j \pm \xi_i} e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j} \Big]. \tag{4.68}$$

No caso do problema de Kramers, para ter-se $G(\tau, \pm\xi_i)$ limitada, exclui-se da Eq. (4.68) as soluções que não são limitadas quando τ tender para o infinito e assim para este problema tem-se a seguinte solução em ordenadas discretas

$$G(\tau, \pm\xi_i) = A + \sum_{j=1}^{N-1} A_j \frac{\nu_j}{\nu_j \mp \xi_i} e^{-\tau/\nu_j}. \tag{4.69}$$

Para definir as constantes A, B, $\{A_j\}$ e $\{B_j\}$ para o problema do fluxo de Couette, substitui-se a equação (4.68) nas condições de contorno dadas pelas Eqs. (3.87) e (3.88), avaliadas nos pontos de quadratura $\{\xi_i\}$, gerando o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$\sum_{j=1}^{N-1} \Big\{ A_j \nu_j \Big[\frac{\alpha\nu_j + \xi_i(2-\alpha)}{(\nu_j^2 - \xi_i^2)} \Big] + B_j \nu_j \Big[\frac{\alpha\nu_j - \xi_i(2-\alpha)}{(\nu_j^2 - \xi_i^2)} \Big] e^{-2\tau_o/\nu_j} \Big\} + \\ \alpha A - B[\alpha\tau_o + \xi_i(2-\alpha)] = \alpha \tag{4.70}$$

e

$$\sum_{j=1}^{N-1} \Big\{ A_j \nu_j \Big[\frac{\alpha\nu_j - \xi_i(2-\alpha)}{(\nu_j^2 - \xi_i^2)} \Big] e^{-2\tau_o/\nu_j} + B_j \nu_j \Big[\frac{\alpha\nu_j + \xi_i(2-\alpha)}{(\nu_j^2 - \xi_i^2)} \Big] \Big\} + \\ \alpha A + B[\alpha\tau_o + \xi_i(2-\alpha)] = -\alpha, \tag{4.71}$$

para $i = 1, 2, ..., N$.

Já para obter as constantes A e A_j para o problema de Kramers, substitui-se a equação (4.69) na condição de contorno dada pela equação (3.264) avaliada nos pontos de quadratura ξ_i, gerando o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$\sum_{j=1}^{N-1} A_j \nu_j \frac{\alpha\nu_j + (2-\alpha)\xi_i}{(\nu_j^2 - \xi_i^2)} + A\alpha = (2-\alpha)\xi_i \tag{4.72}$$

A resolução do sistema formado pelas equações (4.70) e (4.71) para o problema do fluxo de Couette e do sistema formado pela Eq. (4.72) para o problema de Kramers, deixa a solução em ordenadas discretas para estes problemas propostos completamente definida.

• **Quantidades de Interesse para o Fluxo de Couette**

Substituindo a solução em ordenadas discretas para o fluxo de Couette dada pela Eq. (4.68) nas equações (3.89) a (3.91) obtém-se

$$u_*(\tau) = \frac{W_o}{2}A + \frac{W_o}{2}B\tau + 2\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\right]\sum_{k=1}^{N} w_k u_c(\xi_k)\frac{\nu_j^2}{(\nu_j^2-\xi_k^2)}, \quad (4.73)$$

$$q_*(\tau) = 2\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\right]\sum_{k=1}^{N} w_k q_c(\xi_k)\frac{\nu_j^2}{(\nu_j^2-\xi_k^2)} \quad (4.74)$$

e

$$P_{*xz} = \frac{-4W_0}{15\sqrt{\pi}}B\int_0^\infty \frac{c^6 e^{-c^2}}{n(c)}dc \quad (4.75)$$

onde $u_c(\xi)$ e $q_c(\xi)$ são descritos nas equações (3.92) e (3.93). Observa-se que para obter as Eqs. (4.73) a (4.75) das Eqs. (3.89) a (3.91), integram-se analiticamente os dois primeiros termos da Eq. (4.68), mas usa-se o sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Agora, escrevendo as Eqs. (4.73) e (4.74), respectivamente, para o perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor, em termos da variável x, encontra-se

$$u(x) = \frac{W_o}{2}A + \frac{W_o}{2}B\sigma x + 2\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j}\right]\sum_{k=1}^{N} w_k u_c(\xi_k)\frac{\nu_j^2}{(\nu_j^2-\xi_k^2)} \quad (4.76)$$

e

$$q(x) = 2\sum_{j=1}^{N-1}\left[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j}\right]\sum_{k=1}^{N} w_k q_c(\xi_k)\frac{\nu_j^2}{(\nu_j^2-\xi_k^2)}. \quad (4.77)$$

Lembrando que a taxa de massa e a taxa de fluxo de calor são expressas, respectivamente, na forma

$$U = \frac{1}{2a^2}\int_0^a u(x)dx \quad (4.78)$$

e

$$Q = \frac{1}{2a^2}\int_0^a q(x)dx \quad (4.79)$$

usando a Eq. (4.76) na Eq. (4.78) e a Eq. (4.77) na Eq. (4.79) tem-se

$$U = \frac{W_o}{4a}A + \frac{\sigma W_o}{8}B + \frac{1}{\sigma a^2}\sum_{j=1}^{N-1}\Big[A_j\nu_j\Big(e^{-\sigma a/\nu_j} - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big) + B_j\nu_j\Big(1 - e^{-\sigma a/\nu_j}\Big)\Big]\sum_{k=1}^{N} w_k u_c(\xi_k)\frac{\nu_j}{(\nu_j^2 - \xi_j^2)} \tag{4.80}$$

e

$$Q = \frac{1}{\sigma a^2}\sum_{j=1}^{N-1}\Big[A_j\nu_j\Big(e^{-\sigma a/\nu_j} - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big) + B_j\nu_j\Big(1 - e^{-\sigma a/\nu_j}\Big)\Big]\sum_{k=1}^{N} w_k q_c(\xi_k)\frac{\nu_j}{(\nu_j^2 - \xi_j^2)}. \tag{4.81}$$

Quantidades de Interesse para o Problema de Kramers

No problema de Kramers, substitui-se a solução em ordenadas discretas dada pela Eq. (4.69) nas equações (3.265) e (3.266) e obtém-se

$$u_*(\tau) = K_o\frac{\tau}{\sigma} + \frac{K_o}{\sigma}\Big(A + 2\sum_{j=1}^{N-1}A_j\nu_j^2\sum_{k=1}^{N}u_1(\xi_k)\frac{w_k}{(\nu_j^2 - \xi_k^2)}e^{-\tau/\nu_j}\Big) \tag{4.82}$$

e

$$q_*(\tau) = \frac{2K_o}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1}A_j\nu_j^2\sum_{j=1}^{N-1}q_1(\xi_k)\frac{w_k}{(\nu_j^2 - \xi_k^2)}e^{-\tau/\nu_j}, \tag{4.83}$$

onde $u_1(\xi)$ e $q_1(\xi)$ são descritos nas equações (3.267) e (3.268). Observa-se que, para obter as Eqs. (4.82) e (4.83) das Eqs. (3.265) e (3.266), integra-se analiticamente o primeiro termo da Eq. (4.69) e usa-se o sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Escrevendo as Eqs. (4.82) para o perfil de velocidade e (4.83) para o perfil de fluxo de calor em termos da variável x, encontra-se

$$u(x) = x + \frac{A}{\sigma} + \frac{2}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1}A_j\nu_j^2\sum_{k=1}^{N}u_1(\xi_k)\frac{w_k}{(\nu_j^2 - \xi_k^2)}e^{-\sigma x/\nu_j} \tag{4.84}$$

e

$$q(x) = \frac{2}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1}A_j\nu_j^2\sum_{j=1}^{N-1}q_1(\xi_k)\frac{w_k}{(\nu_j^2 - \xi_k^2)}e^{-\sigma x/\nu_j} \tag{4.85}$$

onde põe-se a condição $K_o = 1$. Agora faz-se

$$u_{asy}(x) = x + \frac{A}{\sigma} \tag{4.86}$$

e defini-se o coeficiente de deslizamento viscoso (que é usado nas equações do regime hidrodinâmico quando se considera a condição de deslizamento da velocidade do gás na parede), como

$$u_{asy}(0) = \zeta_p \frac{d}{dx} u_{asy}\Big|_{x=0} \tag{4.87}$$

e obtém-se

$$\zeta_p = \frac{A}{\sigma}. \tag{4.88}$$

No próximo capítulo apresentam-se resultados numéricos para os perfis de velocidade e fluxo de calor para ambos os problemas e o coeficiente de deslizamento viscoso.

4.3 Fluxo de Poiseuille, Creep-Térmico e Deslizamento Térmico

Primeiro observa-se que as matrizes características $\mathbf{\Psi}(\xi)$ dadas pelas equações (3.139), (3.188) e (3.229) satizfazem $\mathbf{\Psi}(\xi) = \mathbf{\Psi}(-\xi)$ e o problema $\mathbf{G}$ que descreve esses três problemas, é similar. Assim escreve-se a versão em ordenadas discretas para estes problemas da seguinte forma:

$$\pm\xi_i \frac{d}{d\tau}\mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) + \mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) = \sum_{k=1}^{N} w_k \mathbf{\Psi}(\xi_k)[\mathbf{G}(\tau, \xi_k) + \mathbf{G}(\tau, -\xi_k)] \tag{4.89}$$

com $i = 1, 2, ..., N$. Nas Eqs. (4.89), considera-se que os N pontos de quadratura $\{\xi_k\}$ e os N pesos $\{w_k\}$ são definidos fazendo uso de integração no intervalo $[0, \gamma]$.Procurando soluções do tipo exponencial para as Eqs. (4.89), substituem-se nessas equações as soluções elementares

$$\mathbf{G}(\tau, \pm\xi_i) = \mathbf{\Phi}(\nu, \pm\xi_i)e^{-\tau/\nu} \tag{4.90}$$

onde ν é a constante de separação e as funções $\mathbf{\Phi}$ denotam as componentes independentes da parte espacial das soluções elementares. Substituindo a Eq. (4.90) nas Eqs. (4.89) obtém-se

$$\frac{1}{\nu}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{+}(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\boldsymbol{\Phi}_{+}(\nu) - \mathbf{W}\boldsymbol{\Phi}_{-}(\nu) \tag{4.91}$$

e

$$-\frac{1}{\nu}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_{-}(\nu) = (\mathbf{I} - \mathbf{W})\boldsymbol{\Phi}_{-}(\nu) - \mathbf{W}\boldsymbol{\Phi}_{+}(\nu) \tag{4.92}$$

onde, neste ponto, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem $2N \times 2N$

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}\big\{\xi_1\mathbf{I}, \xi_{\mathbf{2}}\mathbf{I}, \xi_{\mathbf{3}}\mathbf{I}, ..., \xi_{\mathbf{N}}\mathbf{I}\big\} \tag{4.93}$$

e

$$\boldsymbol{\Phi}_{\pm}(\nu) = \big[\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}(\nu, \pm\xi_{\mathbf{1}}), \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}(\nu, \pm\xi_{\mathbf{2}}), ..., \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}(\nu, \pm\xi_{\mathbf{N}})\big]^{T}, \tag{4.94}$$

$\mathbf{I}$ na Eq. (4.93) é uma matriz identidade de ordem 2×2. Complementando, define-se ainda que $\mathbf{W}$ denota uma matriz de ordem $2N \times 2N$ onde cada $2 \times 2N$ linhas são definidas, respectivamente, como

$$\mathbf{R}_{+} = \left[\begin{array}{cccc} w_1\boldsymbol{\Psi}(\xi_1) & w_2\boldsymbol{\Psi}(\xi_2) & ... & w_N\boldsymbol{\Psi}(\xi_N) \end{array}\right]. \tag{4.95}$$

Definindo

$$\mathbf{U}(\nu) = \boldsymbol{\Phi}_{+}(\nu) + \boldsymbol{\Phi}_{-}(\nu) \tag{4.96}$$

e

$$\mathbf{V}(\nu) = \boldsymbol{\Phi}_{+}(\nu) - \boldsymbol{\Phi}_{-}(\nu) \tag{4.97}$$

e, somando as Eqs. (4.91) e (4.92), obtém-se

$$\mathbf{V}(\nu) = \nu\mathbf{M}^{\mathbf{-1}}(\mathbf{I} - \mathbf{2W})\mathbf{U}(\nu). \tag{4.98}$$

Pode-se, ainda, determinar a diferença entre as Eqs. (4.91) e (4.92), encontrando

$$\frac{1}{\nu}\mathbf{M}\mathbf{U}(\nu) = \mathbf{V}(\nu). \tag{4.99}$$

Eliminando $\mathbf{U}(\nu)$ entre as equações (4.98) e (4.99), encontra-se o problema de autovalores definido por

$$\mathbf{AV}(\nu) = \lambda\mathbf{V}(\nu) \tag{4.100}$$

onde $\lambda = 1/\nu^2$ e

$$\mathbf{A} = (\mathbf{D} - \mathbf{2M^{-1}WM^{-1}}) \tag{4.101}$$

aqui

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\big\{\xi_1^{-2}\mathbf{I}, \xi_\mathbf{2}^{\mathbf{-2}}\mathbf{I}, \xi_\mathbf{3}^{\mathbf{-2}}\mathbf{I}, ..., \xi_\mathbf{N}^{\mathbf{-2}}\mathbf{I}\big\}, \tag{4.102}$$

e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem 2×2. Assim, através da equação (4.100,) encontram-se os $2N$ autovalores λ e respectivos autovetores $\mathbf{V}(\nu)$. Como estes problemas são conservativos, um dos autovalores tende a zero quando N tender ao infinito. Levando em consideração este fato, negligencia-se a maior das constantes de separação ν_j e introduzem-se, na solução em ordenadas discretas, duas soluções linearmente independentes dos problemas

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_2(\tau,\xi) = (\tau - \xi)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.103}$$

Fazendo

$$\mathbf{G}_\pm(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T(\tau,\pm\xi_1) & \mathbf{G}^T(\tau,\pm\xi_2) & ... & \mathbf{G}^T(\tau,\pm\xi_N) \end{bmatrix}^T \tag{4.104}$$

e, assim, escreve-se a solução em ordenadas discretas,

$$\mathbf{G}_\pm(\tau) = A\mathbf{\Phi}_1 + B\mathbf{\Phi}_2^\pm(\tau) + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j\mathbf{\Phi}_\pm(\nu_j)e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + \sum_{j=1}^{2N-1} B_j\mathbf{\Phi}_\mp(\nu_j)e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}. \tag{4.105}$$

onde A, B, A_j, B_j são constantes arbitrárias, para $j = 1, 2, ..., 2N-1$. Além disto,

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T & \mathbf{G}_1^T & ... & \mathbf{G}_1^T \end{bmatrix}^T, \tag{4.106}$$

$$\mathbf{\Phi}_2^\pm(\tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^T(\tau,\pm\xi) & \mathbf{G}_2^T(\tau,\pm\xi) & ... & \mathbf{G}_2^T(\tau,\pm\xi) \end{bmatrix}^T, \tag{4.107}$$

e $\mathbf{\Phi}_{\pm}(\nu_{\mathbf{j}})$ são avaliados das Eqs. (4.96), (4.97) e (4.99). Assim, encontra-se, então,

$$\mathbf{\Phi}_{+}(\nu_j) = \frac{1}{2}[\mathbf{I} + \nu_j \mathbf{M}^{-1}]\mathbf{V}(\nu_j) \tag{4.108}$$

e

$$\mathbf{\Phi}_{-}(\nu_j) = \frac{1}{2}[-\mathbf{I} + \nu_j \mathbf{M}^{-1}]\mathbf{V}(\nu_j) \tag{4.109}$$

onde $\mathbf{V}(\nu_j)$ são os autovetores correspondentes aos autovetores λ_j retirados da Eq. (4.100). Observa-se que, como esses problemas são vetoriais, as soluções elementares Φ são obtidas numericamente como no problema de salto de temperatura, enquanto para o fluxo de Couette e Kramers elas são obtidas analiticamente. Ao considerar o problema de deslizamento térmico, para se ter $\mathbf{G}(\tau, \pm\xi)$ limitado desconsidera-se da Eq. (4.105) as soluções que não são limitadas quando τ tender para o infinito; assim, para este problema, tem-se a seguinte solução em ordenadas discretas

$$\mathbf{G}_{\pm}(\tau) = A\mathbf{\Phi}_1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j \mathbf{\Phi}_{\pm}(\nu_j) e^{-\tau/\nu_j}. \tag{4.110}$$

Para definir as constantes A, B, A_j e B_j para os problemas de Poiseuille e creep-térmico, substitui-se a Eq. (4.105) nas condições de contorno de equações (3.140) e (3.141), (3.189) e (3.190) avaliadas nos pontos de quadratura ξ_i, gerando o seguinte sistema de equações algébricas lineares

$$\alpha A\mathbf{\Phi}_1 - B\mathbf{\Phi}_2^* + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j[\mathbf{\Phi}_{+}(\nu_j) + (\alpha - 1)\mathbf{\Phi}_{-}(\nu_j)] + \sum_{j=1}^{2N-1} B_j[\mathbf{\Phi}_{-}(\nu_j) + (\alpha - 1)\mathbf{\Phi}_{+}(\nu_j)]e^{-2\tau_o/\nu_j} = \mathbf{F_5} \tag{4.111}$$

e

$$\alpha A\mathbf{\Phi}_1 + B\mathbf{\Phi}_2^* + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j[\mathbf{\Phi}_{-}(\nu_j) + (\alpha - 1)\mathbf{\Phi}_{+}(\nu_j)]e^{-2\tau_o/\nu_j} + \sum_{j=1}^{2N-1} B_j[\mathbf{\Phi}_{+}(\nu_j) + (\alpha - 1)\mathbf{\Phi}_{-}(\nu_j)] = \mathbf{F_5} \tag{4.112}$$

onde

$$\mathbf{\Phi}_2^* = \left[\begin{array}{cccc} \hat{\mathbf{G}}_1^T(\xi_1) & \hat{\mathbf{G}}_1^T(\xi_2) & ... & \hat{\mathbf{G}}_1^T(\xi_N) \end{array} \right]^T \tag{4.113}$$

com

$$\hat{\mathbf{G}}_1(\xi) = \left[\begin{array}{c} \alpha\tau_o + \xi(2-\alpha) \\ 0 \end{array} \right] \tag{4.114}$$

e o lado direito para o fluxo de Poiseuille é dado por

$$\mathbf{F_5} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{F_3}^T(\xi_1) & \mathbf{F_3}^T(\xi_2) & ... & \mathbf{F_3}^T(\xi_N) \end{array} \right]^T \tag{4.115}$$

e para o creep-térmico por

$$\mathbf{F_5} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{F_4}^T(\xi_1) & \mathbf{F_4}^T(\xi_2) & ... & \mathbf{F_4}^T(\xi_N) \end{array} \right]^T. \tag{4.116}$$

Note-se que $\mathbf{F_3}(\xi)$ e $\mathbf{F_4}(\xi)$ são dados pelas Eqs. (3.142) e (3.191), respectivamente.

As constantes A_j para o problema de deslizamento térmico são obtidas substituindo a Eq. (4.110) na condição de contorno dada pela Eq. (3.230) e assim obtém-se o sistema de equações algébricas lineares dado pela seguinte equação

$$\alpha A \mathbf{\Phi}_1 + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j [\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + (\alpha - 1)\mathbf{\Phi}_-(\nu_j)] = \mathbf{F_5} \tag{4.117}$$

onde o lado direito é dado pela Eq. (4.116).

• Quantidades de Interesse para o Fluxo de Poiseuille

Considerando agora as quantidades que se quer avaliar para o fluxo de Poiseuille, substitui-se a Eq. (4.105) nas Eqs. (3.143) e (3.144) e assim encontram-se

$$\begin{aligned} u_*(\tau) = \frac{A_1 R_z}{2}\Big(\frac{\tau^2}{\sigma^2} - a^2\Big) + R_1 + \frac{A}{2} + \frac{B\tau}{2} + \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[& A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} \\ & + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j} \Big] \mathbf{\Omega}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j) \Big] \end{aligned} \tag{4.118}$$

e

$$q_*(\tau) = R_2 + \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\Big]\mathbf{\Xi}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.119}$$

onde R_1 e R_2 são definidas pelas Eqs. (3.125) e (3.126) e

$$\mathbf{\Omega}_+ = \left[\begin{array}{cccc} w_1\mathbf{\Omega}(\xi_1) & w_2\mathbf{\Omega}(\xi_2) & ... & w_N\mathbf{\Omega}(\xi_N) \end{array}\right] \tag{4.120}$$

e

$$\mathbf{\Xi}_+ = \left[\begin{array}{cccc} w_1\mathbf{\Xi}(\xi_1) & w_2\mathbf{\Xi}(\xi_2) & ... & w_N\mathbf{\Xi}(\xi_N) \end{array}\right] \tag{4.121}$$

com

$$\mathbf{\Omega}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} u_{p1}(\xi) & u_{p2}(\xi) \end{array}\right] \tag{4.122}$$

e

$$\mathbf{\Xi}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} q_{p1}(\xi) & q_{p2}(\xi) \end{array}\right]. \tag{4.123}$$

Note-se que os componentes dos vetores introduzidos nas Eqs. (4.122) e (4.123) são definidos nas Eqs. (3.145) a (3.148). Observa-se que, para obter as Eqs. (4.118) e (4.119) das Eqs. (3.143) e (3.144), integram-se analiticamente os dois primeiros termos da Eq. (4.105), e usa-se o sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Escrevendo, agora, as Eqs. (4.118) para o perfil de velocidade e (4.119) para o perfil de fluxo de calor em termos da variável x, tem-se

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{A_1 R_z}{2}(x^2 - a^2) + R_1 + \frac{A}{2} + \frac{B\sigma x}{2} + \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} \\ + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j}\Big]\mathbf{\Omega}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \end{aligned} \tag{4.124}$$

$$q(x) = R_2 + \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j}\Big]\mathbf{\Xi}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.125}$$

onde R_1 e R_2 são definidas pelas Eqs. (3.125) e (3.126).

Finalmente, substituem-se as Eqs. (4.124) e (4.125) nas equações (3.107) para a taxa de massa e (3.108) para a taxa de fluxo de calor, respectivamente, para achar

$$U = R_3 + \frac{A}{2a} + \frac{1}{2a^2\sigma}\sum_{j=1}^{2N-1}\Big[A_j + B_j\Big]\nu_j\Big(1 - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big)\mathbf{\Omega}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.126}$$

e

$$Q = R_4 + \frac{1}{2a^2\sigma}\sum_{j=1}^{2N-1}\Big[A_j + B_j\Big]\nu_j\Big(1 - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big)\mathbf{\Xi}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.127}$$

onde

$$R_3 = -\frac{A_1 R_z a}{3} + \frac{8A_1R_z}{15a\sqrt{\pi}\sigma^2}\int_0^\infty \frac{c^6 e^{-c^2}}{\eta^2(c)}dc - \frac{4R_z}{3a\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}}{\eta(c)}dc \tag{4.128}$$

e

$$R_4 = \frac{8A_1R_z}{15a\sqrt{\pi}\sigma^2}\int_0^\infty \frac{c^6 e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta^2(c)}dc - \frac{4R_z}{3a\sqrt{\pi}\sigma}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc. \tag{4.129}$$

- **Quantidades de Interesse para o Creep-Térmico**

Para obter as quantidades de interesse para o problema creep-térmico substitui-se a Eq. (4.105) nas Eqs. (3.192) e (3.193) e obtém-se

$$\begin{aligned} u_*(\tau) = {} & -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc + \frac{A}{2} + \frac{B\tau}{2} + \\ & \sum_{j=1}^{2N-1}\Big[A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\Big]\mathbf{\Lambda}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \end{aligned} \tag{4.130}$$

e

$$\begin{aligned} q_*(\tau) = {} & -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)^2}{\eta(c)}dc + \\ & \sum_{j=1}^{2N-1}\Big[A_j e^{-(\tau_o+\tau)/\nu_j} + B_j e^{-(\tau_o-\tau)/\nu_j}\Big]\mathbf{\Pi}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \end{aligned} \tag{4.131}$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}_+ = \begin{bmatrix} w_1\mathbf{\Lambda}(\xi_1) & w_2\mathbf{\Lambda}(\xi_2) & ... & w_N\mathbf{\Lambda}(\xi_N) \end{bmatrix} \tag{4.132}$$

e

$$\mathbf{\Pi}_+ = \left[\begin{array}{cccc} w_1\mathbf{\Pi}(\xi_1) & w_2\mathbf{\Pi}(\xi_2) & ... & w_N\mathbf{\Pi}(\xi_N) \end{array} \right] \tag{4.133}$$

com

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} u_{t1}(\xi) & u_{t2}(\xi) \end{array} \right] \tag{4.134}$$

e

$$\mathbf{\Pi}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} q_{t1}(\xi) & q_{t2}(\xi) \end{array} \right]. \tag{4.135}$$

Os componentes dos vetores introduzidos nas Eqs. (4.134) e (4.135) são definidos nas Eqs. (3.194) a (3.197). Para se obter as Eqs. (4.130) e (4.131) das Eqs. (3.192) e (3.193), integram-se analiticamente os dois primeiros termos da Eq. (4.110), e usa-se o sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Escrevendo agora as Eqs. (4.130) para o perfil de velocidade e (4.131) para o perfil de fluxo de calor em termos da variável x, tem-se

$$u(x) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \frac{A}{2} + \frac{B\sigma x}{2} + \sum_{j=1}^{2N-1} \left[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j} \right] \mathbf{\Lambda}_+ \left[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j) \right] \tag{4.136}$$

e

$$q(x) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)^2}{\eta(c)} dc + \sum_{j=1}^{2N-1} \left[A_j e^{-\sigma(a+x)/\nu_j} + B_j e^{-\sigma(a-x)/\nu_j} \right] \mathbf{\Pi}_+ \left[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j) \right]. \tag{4.137}$$

Substituindo, respectivamente, as Eqs. (4.136) e (4.137) nas Eqs. (3.161) e (3.162) obtém-se a taxa de massa e a taxa de fluxo de calor

$$U = -\frac{4K_z}{3a\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \frac{A}{2a} + \frac{1}{2a^2\sigma} \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[(A_j + B_j)\nu_j \Big(1 - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big) \mathbf{\Lambda}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.138}$$

e

$$Q = -\frac{4K_z}{3a\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)^2}{\eta(c)} dc + \frac{A}{2a} + \frac{1}{2a^2\sigma} \sum_{j=1}^{2N-1} \Big[(A_j + B_j)\nu_j \Big(1 - e^{-2\sigma a/\nu_j}\Big) \mathbf{\Pi}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big]. \tag{4.139}$$

- **Quantidades de Interesse para o Deslizamento Térmico**

As quantidades de interesse para o problema deslizamento térmico são obtidas substituindo a Eq. (4.110) nas Eqs. (3.232) e (3.233) e obtém-se

$$u_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \frac{A}{2} + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\tau/\nu_j} \mathbf{\Lambda}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.140}$$

e

$$q_*(\tau) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)^2}{\eta(c)} dc + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\tau/\nu_j} \mathbf{\Pi}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big] \tag{4.141}$$

onde $\mathbf{\Lambda}_+$ e $\mathbf{\Pi}_+$ são dados nas equações (4.132) e (4.133). Nota-se que para obter as Eqs.(4.140) e (4.141) das Eqs. (3.232) e (3.233), integra-se analiticamente o primeiro termo da

Eq. (4.110), e usa-se sistema de quadratura definido para integrar os termos restantes. Escrevendo agora as Eqs. (4.140) para o perfil de velocidade e (4.141) perfil de fluxo de calor em termos de x, tem-se

$$u(x) = K_z\Big[-\frac{4}{3\sigma\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2 - 5/2)}{\eta(c)} dc + \frac{A}{2K_z} + \frac{1}{K_z} \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\sigma x/\nu_j} \mathbf{\Lambda}_+ \Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j) + \mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big]\Big] \tag{4.142}$$

e

$$q(x) = -\frac{4K_z}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)^2}{\eta(c)}dc + \sum_{j=1}^{2N-1} A_j e^{-\sigma x/\nu_j}\mathbf{\Pi}_+\Big[\mathbf{\Phi}_+(\nu_j)+\mathbf{\Phi}_-(\nu_j)\Big]. \quad (4.143)$$

Define-se, nesse momento, o coeficiente de deslizamento térmico (que é usado nas equações hidrodinâmicas quando se considera a condição de deslizamento da velocidade do gás na parede), como

$$\zeta_T = \lim_{x\to\infty}\frac{u(x)}{K_z} \quad (4.144)$$

e assim obtém-se

$$\zeta_T = -\frac{4}{3\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{c^4 e^{-c^2}(c^2-5/2)}{\eta(c)}dc + \frac{A}{2K_z}. \quad (4.145)$$

A seguir, no próximo capítulo, apresentam-se resultados numéricos para os perfis de velocidade e fluxo de calor para os três problemas desta seção, taxa de massa e taxa de fluxo de calor para o fluxo de Poiseuille e creep-térmico e coeficiente de deslizamento térmico.

4.4 Livre Caminho Médio

Após ter aplicado o método de ordenadas discretas nas expressões para o desvio de temperatura, desvio de densidade, perfil de velocidade, perfil de fluxo de calor, taxa de massa e taxa de fluxo de calor observa-se que elas dependem de σ que até o momento não foi especificado e que está associado ao livre caminho médio. Seguindo a literatura, é usual escolher-se para os problemas de salto de temperatura e deslizamento térmico o livre caminho médio baseado na condutividade térmica, assim $\sigma = \sigma_t$ dado na equação (2.62). Já para o fluxo de Couette, fluxo de Poiseuille, creep-térmico e Kramers a escolha do livre caminho médio é baseado na viscosidade, então $\sigma = \sigma_p$ dado na Eq. (2.60).

4.5 Freqüência de Colisão - Casos Especiais

Tendo desenvolvido a solução geral para os problemas propostos neste trabalho para o modelo de freqüência de colisão variável, apresentam-se aqui três formas para a freqüência de colisão para cada problema descrito anteriormente, conforme encontrado na literatura [Loyalka e Ferziger, 1967; Cassell e Williams, 1972; Loyalka e Hickey, 1990; Siewert, 2001b] e que são usadas na obtenção dos resultados numéricos. Assim, usa-se para o modelo BGK

$$\eta(c) = 1, \tag{4.146}$$

para o caso do modelo de Williams

$$\eta(c) = c \tag{4.147}$$

e para o caso do modelo de esferas rígidas, escreve-se

$$\eta(c) = (2c + \frac{1}{c})\frac{\pi^{1/2}}{2}erf(c) + e^{-c^2}. \tag{4.148}$$

A seguir definem-se, para cada problema a ser abordado, parâmetros e quantidades específicas, mencionadas no capítulo 3, necessárias para avaliar numéricamente as soluções em ordenadas discretas, avaliadas com base nos três modelos citados acima.

4.5.1 Salto de Temperatura

• Modelo BGK

Para este caso, acha-se

$$\gamma = \infty, \quad \Gamma = 0, \quad \omega = 3/2, \quad \gamma_0 = 4/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_t = 1, \tag{4.149}$$

onde γ é necessário para determinar os limites de integração das Eqs. (3.42) e (3.44), Γ é dado na Eq. (3.26), w e γ_o são dados na Eq. (2.35) e σ_t é dado na Eq. (2.62). Em adição encontra-se para a Eq. (3.43)

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 - 1/2 \\ 2\xi & 2\xi^2 & 2\xi(\xi^2 - 1/2) \\ (2/3)(\xi^2 - 1/2) & (2/3)\xi(\xi^2 - 1/2) & (2/3)(\xi^4 - \xi^2 + 5/4) \end{bmatrix}. \tag{4.150}$$

Usam-se também as Eqs. (3.50) a (3.55) para escrever as Eqs. (4.41) e (4.42), para este caso, como

$$\mathbf{N}(\xi) = e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi^2 - 1/2 \end{bmatrix} \tag{4.151}$$

e

$$\mathbf{T}(\xi) = e^{-\xi^2} \begin{bmatrix} \xi^2 - 1/2 & \xi(\xi^2 - 1/2) & \xi^4 - \xi^2 + 5/4 \end{bmatrix}. \tag{4.152}$$

• O Modelo de Williams

Neste caso, encontra-se

$$\gamma = 1, \quad \Gamma = -1/4, \quad \omega = 2, \quad \gamma_0 = 2 \;\; e \;\; \sigma_t = (6/5)\pi^{-1/2}. \tag{4.153}$$

onde γ é necessário para determinar os limites de integração das Eqs. (3.42) e (3.44), Γ é dado na Eq. (3.26), w e γ_o são dados na Eq. (2.35) e σ_t é dado na Eq. (2.62). Seguindo, encontra-se para a Eq. (3.43)

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & (3/4)\pi^{1/2}\xi & 0 \\ (9/8)\pi^{1/2}\xi & 3\xi^2 & (9/16)\pi^{1/2}\xi \\ 0 & (3/16)\pi^{1/2}\xi & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.154}$$

e usa-se as Eqs. (3.50) a (3.55) para escrever as Eqs. (4.41) e (4.42), neste caso, como

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{bmatrix} (1/2)\pi^{1/2} & \xi & -(1/4)\pi^{1/2} \end{bmatrix} \tag{4.155}$$

e

$$\mathbf{T}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi/2 & (3/4)\pi^{1/2} \end{bmatrix}. \tag{4.156}$$

• O Modelo de Esferas Rígidas

Para este modelo encontram-se os resultados exatos

$$\gamma = 1/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \omega = 7/4, \tag{4.157}$$

sendo γ necessário para determinar os limites de integração das Eqs. (3.42) e (3.44) e w é dado na Eq. (2.35). Usa-se o software MAPLE V para obter os valores numéricos

$$\gamma_0 = 0.7978845608029, \quad \Gamma = -0.06063367084623 \;\; e \;\; \sigma_t = 0.2753345876233. \tag{4.158}$$

onde γ_o é dado na Eq. (2.35), Γ é dado na Eq. (3.26) e σ_t (2.62). Considerando as Eqs. (3.43), (3.50) a (3.55), têm-se usado métodos numéricos para avaliar as várias funções requeridas para estabelecer $\mathbf{\Psi}(\xi)$, $\mathbf{N}(\xi)$ e $\mathbf{T}(\xi)$.

4.5.2 Fluxo de Couette

• Modelo BGK

Neste caso, encontra-se para esse problema

$$\gamma = \infty, \quad W = 2/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_p = 1. \tag{4.159}$$

onde γ é necessário para determinar os limites de integração da Eq. (3.85), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Seguindo encontra-se as Eqs. (3.86), (3.92) e (3.93), para este caso, como

$$\psi(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}}, \tag{4.160}$$

$$u_c(\xi) = \frac{W_0 e^{-\xi^2}}{2\pi^{1/2}} \tag{4.161}$$

e

$$q_c(\xi) = \Big(\frac{\xi^2}{2} - \frac{1}{4}\Big)\frac{W_0 e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}}. \tag{4.162}$$

• O Modelo de Williams

Acha-se, para este modelo,

$$\gamma = 1, \quad W = 3/4 \;\; e \;\; \sigma_p = (16/15)\pi^{-1/2}, \tag{4.163}$$

sendo γ necessário para determinar os limites de integração da Eq. (3.85), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Encontra-se as Eqs. (3.86), (3.92) e (3.93) escritas na forma

$$\psi(\xi) = \frac{3}{4}(1 - \xi^2), \tag{4.164}$$

$$u_c(\xi) = \frac{3W_0}{8}(1 - \xi^2) \tag{4.165}$$

e

$$q_c(\xi) = 0 \tag{4.166}$$

• O Modelo de Esferas Rígidas

Para este modelo encontra-se o resultado exato para

$$\gamma = 1/\pi^{1/2}, \tag{4.167}$$

onde γ é necessário para determinar os limites de integração da Eq. (3.85) e usa-se o software MAPLE V para se obterem os valores numéricos

$$W = 0.3419505260584 \;\; \text{e} \quad \sigma_p = 0.2788040528277. \tag{4.168}$$

onde W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Considerando as Eqs. (3.86), (3.92) e (3.93) têm-se usado métodos numéricos para avaliar a função requerida para estabelecer $\psi(\xi)$, $u_c(\xi)$ e $q_c(\xi)$.

4.5.3 Fluxo de Poiseuille

• Modelo BGK

Para esse modelo, acha-se

$$\gamma = \infty, \qquad W = 2/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_p = 1, \tag{4.169}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.138), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Para a Eq. (3.139), encontra-se

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} e^{-\xi^2} & e^{-\xi^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.170}$$

Para escrever as Eqs. (4.122) e (4.123), para este caso, usam-se as Eqs. (3.145) a (3.148), e obtém-se

$$\mathbf{\Omega}(\xi) = \frac{1}{2\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} e^{-\xi^2} & e^{-\xi^2} \end{bmatrix} \tag{4.171}$$

e

$$\mathbf{\Xi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} \left(\xi^2/2 - 1/4\right) & \left(\xi^2/2 - 1/4\right) \end{bmatrix}. \tag{4.172}$$

• **O Modelo de Williams**

Encontra-se aqui

$$\gamma = 1, \qquad W = 3/4 \;\; e \;\; \sigma_p = (16/15)\pi^{-1/2}, \tag{4.173}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.138), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Para a Eq. (3.139), tem-se

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \begin{bmatrix} 3/4(1-\xi^2) & (9/32)(1-\xi^2)\pi^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.174}$$

Usam-se as Eqs. (3.145) à (3.148) para escrever as Eqs. (4.122) e (4.123), para este caso, como

$$\mathbf{\Omega}(\xi) = \begin{bmatrix} 3/8(1-\xi^2) & (1-\xi^2)/2\pi^{1/2} \end{bmatrix} \tag{4.175}$$

e

$$\boldsymbol{\Xi}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} 0 & \Big(\xi^2 - 1\Big)/4\pi^{1/2} \end{array} \right]. \tag{4.176}$$

• **O Modelo de Esferas Rígidas**

Neste caso, encontra-se o resultado exato para

$$\gamma = 1/\pi^{1/2} \tag{4.177}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.138) e usa-se o software MAPLE V para se obter os valores numéricos

$$W = 0.3419505260584 \;\; \text{e} \quad \sigma_p = 0.2788040528277, \tag{4.178}$$

onde W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60) Para estabelecer as Eqs. (3.139), (3.145) a (3.148) tem-se usado métodos numéricos para avaliar as várias funções requeridas para estabelecer $\boldsymbol{\Psi}(\xi)$, $\boldsymbol{\Omega}(\xi)$ e $\boldsymbol{\Xi}(\xi)$.

4.5.4 Problema Creep-Térmico

• **Modelo BGK**

Acha-se, para esse problema

$$\gamma = \infty, \qquad W = 2/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_p = 1, \tag{4.179}$$

sendo que γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.187), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Para a equação (3.188), encontra-se

$$\boldsymbol{\Psi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \left[\begin{array}{cc} 1 & (\xi^2 - \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \tag{4.180}$$

Para escrever as Eqs. (4.134) e (4.135), usa-se as Eqs. (3.194) a (3.197), assim tem-se

$$\boldsymbol{\Lambda}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \left[\begin{array}{cc} 1/2 & (1/4)(2\xi^2 - 1) \end{array} \right] \tag{4.181}$$

e

$$\mathbf{\Pi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \left[\begin{array}{cc} \left(\xi^2/2 - 1/4\right) & (1/8)(4\xi^4 - 4\xi^2 + 9) \end{array} \right]. \tag{4.182}$$

• **O Modelo de Williams**

Neste caso, tem-se

$$\gamma = 1, \quad W = 3/4, \ \text{ e } \ \sigma_p = (16/15)\pi^{-1/2}, \tag{4.183}$$

onde γ é necessário para se obterem os limites de integração da Eq. (3.187), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Em adição encontra-se para a Eq. (3.188)

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \begin{bmatrix} (3/4)(1-\xi^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.184}$$

Aqui usam-se as Eqs. (3.194) a (3.197) para escrever as Eqs. (4.134) e (4.135), para este caso, como

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} (3/8)(1-\xi^2) & (\xi^2-1)/4\pi^{1/2} \end{array} \right] \tag{4.185}$$

e

$$\mathbf{\Pi}(\xi) = \left[\begin{array}{cc} 0 & (9/8\pi^{1/2})(1-\xi^2) \end{array} \right]. \tag{4.186}$$

• **O Modelo de Esferas Rígidas**

Obtêm-se, nesse caso, o resultado exato para

$$\gamma = 1/\pi^{1/2} \tag{4.187}$$

sendo γ necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.187) e usa-se o software MAPLE V para se obterem os valores numéricos

$$W = 0.3419505260584 \ \text{ e } \ \sigma_p = 0.2788040528277. \tag{4.188}$$

onde W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Obtêm-se as Eqs. (3.188), (3.194) a (3.197) usando métodos numéricos para avaliar as funções requeridas para estabelecer $\mathbf{\Psi}(\xi)$, $\mathbf{\Lambda}(\xi)$ e

$\mathbf{\Pi}(\xi)$.

4.5.5 Deslizamento Térmico

• Modelo BGK

Acha-se, para esse problema,

$$\gamma = \infty, \qquad W = 2/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_t = 1, \tag{4.189}$$

sendo γ necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.228), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Para a equação (3.229), acha-se

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} 1 & (\xi^2 - \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.190}$$

Para escrever as Eqs. (4.134) e (4.135), usam-se as as Eqs. (3.234) a (3.237), assim tem-se

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} 1/2 & (1/4)(2\xi^2 - 1) \end{bmatrix} \tag{4.191}$$

e

$$\mathbf{\Pi}(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \begin{bmatrix} \left(\xi^2/2 - 1/4\right) & (1/8)(4\xi^4 - 4\xi^2 + 9) \end{bmatrix}. \tag{4.192}$$

• O Modelo de Williams

Neste caso, acha-se

$$\gamma = 1, \qquad W = 3/4 \quad \text{e} \;\; \sigma_t = (6/5)\pi^{-1/2}. \tag{4.193}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.228), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Encontra-se para a Eq. (3.229)

$$\mathbf{\Psi}(\xi) = \begin{bmatrix} (3/4)(1 - \xi^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.194}$$

Usam-se as Eqs. (3.234) a (3.237) para escrever as Eqs. (4.134) e (4.135), para este caso, como

$$\mathbf{\Lambda}(\xi) = \begin{bmatrix} (3/8)(1-\xi^2) & (\xi^2-1)/4\pi^{1/2} \end{bmatrix} \tag{4.195}$$

e

$$\mathbf{\Pi}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & (9/8\pi^{1/2})(1-\xi^2) \end{bmatrix}. \tag{4.196}$$

• O Modelo de Esferas Rígidas

Encontra-se o resultado exato para este modelo

$$\gamma = 1/\pi^{1/2} \tag{4.197}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.228) e usa-se o software MAPLE V para se obterem os valores numéricos

$$W = 0.3419505260584 \quad \text{e} \quad \sigma_t = 0.2753345876233. \tag{4.198}$$

onde W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Obtêm-se as Eqs. (3.229), (3.234) a (3.237) usando métodos numéricos para avaliar as funções requeridas para estabelecer $\mathbf{\Psi}(\xi)$, $\mathbf{\Lambda}(\xi)$ e $\mathbf{\Pi}(\xi)$.

4.5.6 O problema de Kramers

• Modelo BGK

Encontra-se para este problema

$$\gamma = \infty, \qquad W = 2/\pi^{1/2} \;\; e \;\; \sigma_p = 1, \tag{4.199}$$

onde γ é necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.262), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Seguindo encontram-se as Eqs. (3.263), (3.267) e (3.268), para este caso, como

$$\psi(\xi) = u_1(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}} \tag{4.200}$$

e

$$q_1(\xi) = \left(\xi^2 - 1/2\right)\frac{e^{-\xi^2}}{\pi^{1/2}}. \tag{4.201}$$

• O Modelo de Williams

Acha-se neste caso,

$$\gamma = \infty, \qquad W = 3/4 \ \ e \ \ \sigma_p = (16/15)\pi^{-1/2}, \tag{4.202}$$

sendo γ necessário para se obter os limites de integração da Eq. (3.262), W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). As Eqs. (3.263), (3.267) e (3.268), para este caso, são escritas como

$$\psi(\xi) = u_1(\xi) = \frac{3}{4}(1 - \xi^2) \tag{4.203}$$

e

$$q_1(\xi) = 0. \tag{4.204}$$

• O Modelo de Esferas-Rígidas

Para este problema encontra-se

$$\gamma = 1/\pi^{1/2} \tag{4.205}$$

onde γ é necessário para se obterem os limites de integração da Eq. (3.262) e usa-se o software MAPLE V para se obterem os valores numéricos

$$W = 0.3419505260584, \qquad \sigma_p = 0.2788040528277 \quad \text{e} \quad \sigma_t = 0.2753345876233. \tag{4.206}$$

onde W é dado na Eq. (3.79) e σ_p na Eq. (2.60). Considerando as Eqs. (3.263), (3.267) e (3.268) têm-se usado métodos numéricos para avaliar a função requerida para estabelecer $\psi(\xi)$, $u_1(\xi)$ e $q_1(\xi)$.

• **Observação**

Observa-se que, nos casos de usarem métodos numéricos para estabelecer $\mathbf{\Psi}(\xi)$, $\mathbf{N}(\xi)$, $\mathbf{T}(\xi)$, $\psi(\xi)$, $u_c(\xi)$, $q_c(\xi)$ $u_1(\xi)$, $q_1(\xi)$, $\mathbf{\Upsilon}(\xi)$, $\mathbf{\Gamma}(\xi)$, $\mathbf{\Lambda}(\xi)$ $\mathbf{\Pi}(\xi)$, como discutido em trabalhos anteriores [Siewert, 2001b], faz-se

$$f(c) = \frac{c}{\eta(c)} \tag{4.207}$$

e nota-se que se pode mostrar, para o caso considerado, que $f'(c) > 0$, para $c \geq 0$ e assim a função inversa

$$m(\xi) = f^{-1}(|\xi|), \qquad \xi \in [-\gamma, \gamma], \tag{4.208}$$

existe, e pode ser avaliada numericamente através do método de Newton.

No próximo capítulo, apresentam-se resultados numéricos para todos os problemas descritos nesse trabalho, considerando os três casos de freqüência de colisão apresentados na seção 4.5.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Na busca dos resultados numéricos para os problemas dos capítulos anteriores, o que primeiro deve-se fazer é definir o **esquema de quadratura** a ser usado na solução em ordenadas discretas. Como têm-se considerado três casos diferentes: o caso 1 (modelo BGK), caso 2 (modelo de Williams) e o caso 3 (modelo da esfera rígida) usam-se três mapeamentos diferentes, no sentido de se poder trabalhar com a quadratura de Gauss. Para o caso 1, usa-se a transformação

$$u(\xi) = exp\{-\xi\} \tag{5.1}$$

para mapear $\xi \in [0, \infty)$ sob $u \in [0, 1]$, para então usar o esquema de quadratura de Gauss-Legendre [Burden e Faires, 1997] mapeado no intervalo $[0, 1]$. Para os casos 2 e 3 simplesmente mapeamos o esquema de Gauss-Legendre sob, respectivamente, os intervalos $[0, 1]$ e $[0, \pi^{-1/2}]$.

Tendo definido o esquema de quadratura, o próximo passo é a determinação dos **autovalores e autovetores** definidos para

- salto de temperatura $\mapsto$ pela Eq. (4.19),
- fluxo de Couette e Kramers $\mapsto$ pela Eq. (4.62),
- fluxo de Poiseuille, creep-térmico e deslizamento térmico, $\mapsto$ pela Eq. (4.100),

usando a subroutina RG do pacote matemático EISPACK [Smith et al., 1976] para os problemas salto de temperatura, fluxo de Poiseuille, creep-térmico e deslizamento térmico e a subroutina UPDATER [Siewert e Wright, 1999] para o fluxo de Couette e Kramers, uma vez que, nesse caso, o problema de autovalores dado pela Eq. (4.62) está na forma de uma perturbação de matriz diagonal presente no método chamado "divide and conquer" [Golub e Loan, 1989] que é usado para achar autovalores de matrizes tridiagonais simétricas.

Para resolução do **sistema linear** que determina as constantes arbitrárias, determinadas pelas condições de contorno, necessárias para a solução em ordenadas discretas, usa-se as subroutinas DGEFA e DGESL (eliminação Gaussiana) do pacote matemático LINPACK [Dongarra et al., 1979], onde esses sistemas são dados por:

- salto de temperatura $\mapsto$ Eq. (4.28) $\mapsto$ encontra-se A_j,
- fluxo de Couette $\mapsto$ Eqs. (4.70) e (4.71) $\mapsto$ encontra-se A_j e B_j,
- fluxo de Poiseuille e creep-térmico $\mapsto$ Eqs. (4.111) e (4.112) encontra-se $\mapsto$ A_j e B_j,
- Deslizamento térmico $\mapsto$ Eq. (4.117)$\mapsto$ encontra-se A_j,
- Kramers $\mapsto$ Eq. (4.72) $\mapsto$ encontra-se A_j,

para $j = 1, 2, ..., N$.

A seguir apresentam-se resultados numéricos para as quantidades de interesse apresentadas nos capítulos anteriores obtidos através de programas em linguagem FORTRAN da solução desenvolvida para cada problema para os três casos considerados, ou seja, caso 1 (modelo BGK), caso 2 (modelo de Williams) e caso 3 (modelo de esferas rigídas), sendo que para resolver as integrais necessárias para obter-se $\mathbf{\Psi}(\xi)$, $\mathbf{N}(\xi)$, $\mathbf{T}(\xi)$, $\psi(\xi)$, $u_c(\xi)$, $q_c(\xi)$ $u_1(\xi)$, $q_1(\xi)$, $\mathbf{\Upsilon}(\xi)$, $\mathbf{\Gamma}(\xi)$, $\mathbf{\Lambda}(\xi)$ $\mathbf{\Pi}(\xi)$, apresentadas no capítulo 4 para os modelos de freqüência de colisão BGK e Williams, foi usado o MAPLE V para depois serem avaliadas numericamente a partir do FORTRAN.

5.1 Salto de Temperatura

Nas Tabelas 5.1-5.4 são apresentados resultados para coeficiente de salto de temperatura e nas Tabelas 5.5 - 5.8 resultados para o desvio de temperatura e densidade. Através dessas Tabelas analisa-se o comportamento quanto à estabilidade dos resultados, aumentando N, ou seja, o número de pontos de quadratura. Observa-se que de $N = 10$ a $N = 40$ têm-se de 2 a 7 dígitos de precisão para o coeficiente de salto de temperatura e 2 a 6 dígitos de precisão para os desvios de temperatura e densidade. Nota-se nas Tabelas 5.4 e 5.8 que os resultados obtidos com $N = 50$ são os mesmos resultados obtidos com $N = 40$ o que se julga serem 7 dígitos corretos para o coeficiente de salto e 6 dígitos para os desvios de temperatura e densidade.

Tabela 5.1 – Coeficiente de salto de temperatura ζ com $N = 10$

modelo	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
caso 1	21.47434	6.641731	3.637119	2.867615	2.323721	1.575129	1.307014
caso 2	21.19359	6.406418	3.435961	2.689384	2.153897	1.434848	1.180947
caso 3	21.19213	6.435968	3.466870	2.719191	2.182125	1.459189	1.203155

Tabela 5.2 – Coeficiente de salto de temperatura ζ, com $N = 30$

modelo	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
caso 1	21.45012	6.630513	3.629125	2.867615	2.317534	1.570264	1.302716
caso 2	21.19359	6.406417	3.435960	2.689383	2.153897	1.434848	1.180947
caso 3	21.24659	6.452899	3.476182	2.726565	2.188096	1.463248	1.206527

Tabela 5.3 – Coeficiente de salto de temperatura ζ com $N = 40$

modelo	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
caso 1	21.45012	6.630514	3.629125	2.867615	2.317534	1.570264	1.302716
caso 2	21.19359	6.406417	3.435960	2.689383	2.153897	1.434848	1.180947
caso 3	21.24657	6.452894	3.476180	2.726563	2.188095	1.463247	1.206526

Tabela 5.4 – Coeficiente de salto de temperatura ζ com $N = 50$

modelo	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1.0$
caso 1	21.45012	6.630514	3.629125	2.867615	2.317534	1.570264	1.302716
caso 2	21.19359	6.406417	3.435960	2.689383	2.153897	1.434848	1.180947
caso 3	21.24657	6.452894	3.476180	2.726563	2.188095	1.463247	1.206526

Tabela 5.5 – Desvio de temperatura e densidade, $\alpha = 0.5$ e $N = 10$

	caso 1		caso 2		caso 3	
x	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$
0.0	2.91736	–3.07539	3.10167	–3.27399	2.99847	–3.15696
0.1	3.18171	–3.31760	3.30554	–3.42539	3.22777	–3.34850
0.2	3.36453	–3.48469	3.45434	–3.54934	3.38957	–3.49047
0.3	3.52355	–3.63111	3.58762	–3.66558	3.53354	–3.61983
0.4	3.66949	–3.76652	3.71214	–3.77749	3.66694	–3.74185
0.5	3.80695	–3.89497	3.83112	–3.88666	3.79333	–3.85905
0.6	3.93834	–4.01856	3.94628	–3.99396	3.91481	–3.97292
0.7	4.06515	–4.13851	4.05865	–4.09990	4.03268	–4.08436
0.8	4.18837	–4.25567	4.16890	–4.20479	4.14778	–4.19395
0.9	4.30871	–4.37061	4.27749	–4.30888	4.26069	–4.30211
1.0	4.42668	–4.48374	4.38475	–4.41233	4.37184	–4.40911
2.0	5.53309	–5.56061	5.42014	–5.42888	5.43105	–5.44560
3.0	6.57945	–6.59402	6.43030	–6.43349	6.45144	–6.45780
4.0	7.60318	–7.61134	7.43378	–7.43503	7.45975	–7.46270
5.0	8.61638	–8.62114	8.43508	–8.43559	8.46344	–8.46486
6.0	9.62412	–9.62698	9.43559	–9.43581	9.46517	–9.46587
7.0	10.6288	–10.6306	10.4358	–10.4359	10.4660	–10.4664
8.0	11.6317	–11.6329	11.4359	–11.4359	11.4664	–11.4666
9.0	12.6336	–12.6343	12.4359	–12.4359	12.4666	–12.4667
10.0	13.6348	–13.6353	13.4359	–13.4360	13.4667	–13.4668
20.0	23.6371	–23.6371	23.4360	–23.4360	23.4669	–23.4669

Tabela 5.6 – Desvio de temperatura e densidade, $\alpha = 0.5$ e $N = 30$

	caso 1		caso 2		caso 3	
x	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$
0.0	2.91597	–3.07437	3.10167	–3.27399	3.00508	–3.16704
0.1	3.18042	–3.31664	3.30560	–3.42542	3.23434	–3.35822
0.2	3.36278	–3.48323	3.45447	–3.54940	3.39749	–3.50093
0.3	3.52167	–3.62947	3.58758	–3.66556	3.54146	–3.63010
0.4	3.66754	–3.76478	3.71209	–3.77746	3.67483	–3.75193
0.5	3.80489	–3.89310	3.83110	–3.88665	3.80132	–3.86906
0.6	3.93615	–4.01653	3.94628	–3.99397	3.92296	–3.98291
0.7	4.06283	–4.13633	4.05866	–4.09990	4.04097	–4.09435
0.8	4.18493	–4.25334	4.16891	–4.20480	4.15620	–4.20394
0.9	4.30614	–4.36814	4.27749	–4.30888	4.26922	–4.31208
1.0	4.42400	–4.48113	4.38475	–4.41233	4.38044	–4.41906
2.0	5.52928	–5.55674	5.42014	–5.42888	5.44006	–5.45530
3.0	6.57466	–6.58912	6.43030	–6.43349	6.46063	–6.46736
4.0	7.59758	–7.60560	7.43378	–7.43503	7.46901	–7.47216
5.0	8.61013	–8.61476	8.43508	–8.43559	8.47273	–8.47426
6.0	6.61737	–9.62011	9.43559	–9.43581	9.47447	–9.47523
7.0	10.6217	–10.6234	10.4358	–10.4359	10.4753	–10.4757
8.0	11.6243	–11.6254	11.4359	–11.4359	11.4757	–11.4759
9.0	12.6260	–12.6267	12.4359	–12.4359	12.4759	–12.4761
10.0	13.6271	–13.6275	13.4359	–13.4360	13.4761	–13.4761
20.0	23.6291	–23.6291	23.4360	–23.4360	23.4762	–23.4762

Tabela 5.7 – Desvio de temperatura e densidade, $\alpha = 0.5$ e $N = 40$

	caso 1		caso 2		caso 3	
x	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$
0.0	2.91597	–3.07437	3.10167	–3.27399	3.00508	–3.16704
0.1	3.18042	–3.31664	3.30560	–3.42542	3.23434	–3.35822
0.2	3.36278	–3.48323	3.45447	–3.54940	3.39748	–3.50093
0.3	3.52167	–3.62947	3.58758	–3.66556	3.54146	–3.63010
0.4	3.66754	–3.76468	3.71209	–3.77746	3.67483	–3.75193
0.5	3.80480	–3.89310	3.83110	–3.88665	3.80132	–3.86906
0.6	3.93615	–4.01653	3.94628	–3.99397	3.92295	–3.98291
0.7	4.06283	–4.13633	4.05866	–4.09990	4.04097	–4.09435
0.8	4.18593	–4.25334	4.16891	–4.20480	4.15620	–4.20394
0.9	4.30614	–4.36814	4.27749	–4.30888	4.26921	–4.31208
1.0	4.42400	–4.48113	4.38475	–4.41233	4.38044	–4.41906
2.0	5.52928	–5.55674	5.42014	–5.42888	5.44006	–5.45530
3.0	6.57466	–6.58912	6.43030	–6.43349	6.46062	–6.46735
4.0	7.59758	–7.60569	7.43378	–7.43503	7.46901	–7.47216
5.0	8.61013	–8.61476	8.43508	–8.43559	8.47273	–8.47426
6.0	9.61737	–9.62011	9.43559	–9.43581	9.47447	–9.47523
7.0	10.6217	–10.6234	10.4358	–10.4359	10.4753	–10.4757
8.0	11.6243	–11.6254	11.4359	–11.4359	11.4757	–11.4759
9.0	12.6260	–12.6267	12.4359	–12.4359	12.4759	–12.4761
10.0	13.6271	–13.6275	12.4359	–13.4360	13.4761	–13.4761
20.0	23.6291	–23.6291	23.4360	–23.4360	23.4762	–23.4762

Tabela 5.8 – Desvio de temperatura e densidade, $\alpha = 0.5$ e $N = 50$

	caso 1		caso 2		caso 3	
x	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$	$T(x)$	$N(x)$
0.0	2.91597	–3.07437	3.10167	–3.27399	3.00508	–3.16704
0.1	3.18042	–3.31664	3.30560	–3.42542	3.23434	–3.35822
0.2	3.36278	–3.48323	3.45447	–3.54940	3.39748	–3.50093
0.3	3.52167	–3.62947	3.58758	–3.66556	3.54146	–3.63010
0.4	3.66754	–3.76478	3.71209	–3.77746	3.67483	–3.75193
0.5	3.80489	–3.89310	3.83110	–3.88665	3.80132	–3.86906
0.6	3.93615	–4.01653	3.94628	–3.99397	3.92295	–3.98291
0.7	4.06283	–4.13633	4.05866	–4.09990	4.04097	–4.09435
0.8	4.18593	–4.25334	4.16891	–4.20480	4.15620	–4.20394
0.9	4.30614	–4.36814	4.27749	–4.30888	4.26921	–4.31208
1.0	4.42400	–4.48113	4.38475	–4.41233	4.38044	–4.41906
2.0	5.52928	–5.55674	5.42014	–5.42888	5.44006	–5.45530
3.0	6.57466	–6.58912	6.43030	–6.43349	6.46062	–6.46735
4.0	7.59758	–7.60560	7.43378	–7.43503	7.46901	–7.47216
5.0	8.61013	–8.61476	8.43508	–8.43559	8.47273	–8.47426
6.0	9.61737	–9.62011	9.43559	–9.43581	9.47447	–9.47523
7.0	10.6217	–10.6234	10.4358	–10.4359	10.4753	–10.4757
8.0	11.6243	–11.6254	11.4359	–11.4359	11.4757	–11.4757
9.0	12.6260	–12.6267	12.4359	–12.4359	12.4759	–12.4761
10.0	13.6271	–13.6275	13.4359	–13.4360	13.4761	–13.4761
20.0	23.6291	–23.6291	23.4360	–23.4360	23.4762	–23.4762

Observa-se ainda que os resultados apresentados na Tabela 5.8 para o caso 1 concordam perfeitamente com alguns cálculos independentes [Barichello e Siewert, 2000] feitos anteriormente. Também há concordância em três dígitos para o valor do coeficiente de salto de temperatura ζ, para o caso 2, com $\alpha = 1.0$, que foi apresentado por Cassell e Williams [Cassell e Williams, 1972].

Nota-se que, para o caso 2 (o modelo de Williams), o problema **G**, como discutido por Cassell e Williams [Cassell e Williams, 1972], pode ser resolvido como três problemas escalares consecutivos. Esta abordagem foi usada por Bartz [Bartz, 2000] para confirmar os resultados nas Tabelas 5.4 e 5.8 para o caso 2.

Dando seqüência à análise das simulações executadas, listam-se, na Tabela 5.9, resultados comparativos da abordagem apresentada neste trabalho, para o coeficiente de salto de temperatura com outros encontrados na literatura, obtidos com a suposição de interação segundo o modelo de esferas rígidas, pelo modelo CES [Siewert, 2002d] e resultados obtidos da solução da equação de Boltzmann linearizada segundo três versões: solução variacional (LBE-v) [Loyalka, 1991], solução numérica (S_N) (LBE-sn) [Loyalka, 1991] e resultados recentes a partir do uso do método de ordenadas discretas analítico (LBE) [Siewert, 2003a]. Salienta-se que os resultados para LBE-v e LBE-sn foram retirados da Ref. [Siewert, 2002d].

Nota-se que os resultados apresentados para o modelo CES [Siewert, 2002d], segundo o autor, estão corretos em 7 dígitos de precisão na Tabela 5.9 e 6 dígitos nas Tabelas 5.10 e 5.11, enquanto os resultados apresentados nas Tabelas 5.9 a 5.11 para LBE [Siewert, 2003a] estão corretos em 4 a 5 dígitos de precisão.

Tabela 5.9 – Coeficiente de salto de temperatura ζ, com $N = 40$

α	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE	LBE-v	LBE-sn
0.1	21.45012	21.19359	21.24657	21.32099	21.349	21.287	21.349
0.2	10.34747	10.10735	10.15704	10.22670	10.251	10.196	10.252
0.3	6.630514	6.406417	6.452894	6.517910	6.5396	6.4909	6.5398
0.4	4.760333	4.551884	4.595202	4.655696	4.6745	4.6321	4.6747
0.5	3.629125	3.435960	3.476180	3.532264	3.5485	3.5118	3.5708
0.6	2.867615	2.689383	2.726563	2.778342	2.7922	2.7607	2.7924
0.7	2.317534	2.153897	2.188095	2.235669	2.2474	2.2207	2.2476
0.8	1.899741	1.750372	1.781643	1.825107	1.8349	1.8123	1.8350
0.9	1.570264	1.434848	1.463247	1.502689	1.5108	1.4921	1.5109
1.0	1.302716	1.180947	1.206526	1.242033	1.2486	1.2334	1.2486

Apresentam-se ainda nas Tabelas 5.10 e 5.11 resultados para o desvio de temperatura e densidade para os modelos deste trabalho em comparação com resultados da literatura para o modelo CES [Siewert, 2002d] e resultados (LBE) da equação de Boltzmann linearizada [Siewert, 2003a]. Observa-se nessas Tabelas (5.10 e 5.11) que tem-se de 1 a 2 dígitos de precisão comparando os resultados obtidos para o caso 1, 2 e 3 com o modelo CES e LBE.

Tabela 5.10 – Desvio de temperatura com $\alpha = 0.5$ e $N = 40$

x	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	2.91597	3.10167	3.00508	2.96157	2.9250
0.1	3.18042	3.30560	3.23434	3.29280	3.2342
0.2	3.36278	3.45447	3.39748	3.48727	3.4238
0.3	3.52167	3.58758	3.54146	3.64660	3.5831
0.4	3.66754	3.71209	3.67483	3.78779	3.7268
0.5	3.80489	3.83110	3.80132	3.91789	3.8605
0.6	3.93615	3.94628	3.92295	4.04060	3.9874
0.7	4.06283	4.05866	4.04097	4.15810	4.1093
0.8	4.18593	4.16891	4.15620	4.27182	4.2275
0.9	4.30614	4.27749	4.26921	4.38270	4.3428
1.0	4.42400	4.38475	4.38044	4.49141	4.4558
2.0	5.52928	5.42014	5.44006	5.52529	5.5196

Tabela 5.11 – Desvio de densidade com $\alpha = 0.5$ e $N = 40$

x	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	–3.07437	–3.27399	–3.16704	–3.16242	–3.1153
0.1	–3.31664	–3.42542	–3.35822	–3.43017	–3.3647
0.2	–3.48323	–3.54940	–3.50093	–3.59319	–3.5257
0.3	–3.62947	–3.66556	–3.63010	–3.73083	–3.6654
0.4	–3.76478	–3.77746	–3.75193	–3.85591	–3.7944
0.5	–3.89310	–3.88665	–3.86906	–3.97358	–3.9167
0.6	–4.01653	–3.99397	–3.98291	–4.08648	–4.0345
0.7	–4.13633	–4.09990	–4.09435	–4.19614	–4.1491
0.8	–4.25334	–4.20480	–4.20394	–4.30350	–4.2612
0.9	–4.36814	–4.30888	–4.31208	–4.40918	–4.3715
1.0	–4.48113	–4.41233	–4.41906	–4.51363	–4.4802
2.0	–5.55674	–5.42888	–5.45530	–5.52954	–5.5251

5.2 Fluxo de Couette

Todos os resultados apresentados nas Tabelas a seguir, para o fluxo de Couette, foram obtidos usando $N = 50$, ou seja, o número de pontos de quadratura.

Nas Tabelas 5.12 a 5.14 apresentam-se resultados para a tensão de cisalhamento (P_{*xz}) dada na Eq. (4.75). Os resultados na Tabela 5.12 foram multiplicados por $2\sqrt{\pi}$ para comparar com resultados obtidos anteriormente para o modelo BGK [Barichello et al., 2001] com os quais concordam em todos os dígitos.

Tabela 5.12 – Fluxo de Couette: Tensão de cisalhamento $P_{xz} = 2\sqrt{\pi}P_{*xz}$, $W_o = 1$ e $\alpha = 1$

$2a$	BGK	Williams	Esfera rígida
1.00(–7)	9.9999991(–1)	9.9999992(–1)	9.9999996(–1)
1.00(–6)	9.9999911(–1)	9.9999920(–1)	9.9999922(–1)
1.00(–5)	9.9999114(–1)	9.9999198(–1)	9.9999188(–1)
1.00(–4)	9.9991142(–1)	9.9991979(–1)	9.9991853(–1)
1.00(–3)	9.9911754(–1)	9.9920037(–1)	9.9918759(–1)
5.00(–3)	9.9564273(–1)	9.9604424(–1)	9.9598226(–1)
1.00(–2)	9.9139801(–1)	9.9217529(–1)	9.9205506(–1)
2.00(–2)	9.8317550(–1)	9.8464693(–1)	9.8441882(–1)
1.00(–1)	9.2579682(–1)	9.3122110(–1)	9.3037344(–1)
1.00	6.0072919(–1)	6.1209376(–1)	6.1031245(–1)
1.25	5.5110153(–1)	5.6179979(–1)	5.6012942(–1)
1.50	5.0958224(–1)	5.1952546(–1)	5.1797955(–1)
1.75	4.7421167(–1)	4.8339572(–1)	4.8197410(–1)
2.00	4.4364669(–1)	4.5210579(–1)	4.5080213(–1)
2.50	3.9334018(–1)	4.0050590(–1)	3.9941093(–1)
3.00	3.5353372(–1)	3.5962517(–1)	3.5870165(–1)
4.00	2.9431859(–1)	2.9880904(–1)	2.9813727(–1)
5.00	2.5224614(–1)	2.5565448(–1)	2.5514979(–1)
7.00	1.9627566(–1)	1.9839866(–1)	1.9808841(–1)
1.00(1)	1.4731246(–1)	1.4852151(–1)	1.4834641(–1)
2.00(1)	8.0447692(–2)	8.0808473(–2)	8.0756544(–2)
1.00(2)	1.7371483(–2)	1.7388248(–2)	1.7385842(–2)
1.00(3)	1.7688589(–3)	1.7690325(–3)	1.7690076(–3)
1.00(4)	1.7720937(–4)	1.7721111(–4)	1.7721086(–4)
1.00(5)	1.7724178(–5)	1.7724196(–5)	1.7724193(–5)
1.00(6)	1.7724502(–6)	1.7724504(–6)	1.7724504(–6)
1.00(7)	1.7724535(–7)	1.7724535(–7)	1.7724535(–7)

Na Tabela 5.13 apresentam-se resultados para os três modelos desse trabalho comparando com outros resultados da literatura: o modelo CES [Siewert, 2002c] e com resultados da equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b]. Esses resultados concordam de 2 a 6 dígitos de precisão. Por exemplo, para $2a = 1.0$ têm-se 2 dígitos de concordância (caso 2 e 3) enquanto para $2a = 1.0(7)$ todos os dígitos concordam.

Nota-se que os resultados para o modelo CES [Siewert, 2002c] estão com 6 dígitos de precisão nas Tabelas 5.13, 5.15 a 5.18 e com 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.14, 5.19 e 5.20, enquanto os resultados para para LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b] estão com 6 dígitos de precisão na Tabela 5.13 e 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.15 a 5.18, segundo o autor.

Tabela 5.13 – Fluxo de Couette: Tensão de cisalhamento, $W_o = 2$ e $\alpha = 0.1$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
1.0(–7)	2.96942(–2)	2.96942(–2)	2.96942(–2)	2.96942(–2)	2.96942(–2)
1.0(–3)	2.96928(–2)	2.96929(–2)	2.96929(–2)	2.96926(–2)	2.96927(–2)
1.0(–1)	2.95618(–2)	2.95734(–2)	2.95716(–2)	2.95505(–2)	2.95533(–2)
1.0	2.85930(–2)	2.86638(–2)	2.86528(–2)	2.85847(-2)	2.85927(-2)
1.0(1)	2.26221(–2)	2.27265(–2)	2.27115(–2)	2.26813(–2)	2.26781(–2)
1.0(3)	9.66925(–4)	9.67117(–4)	9.67089(–4)	9.67035(–4)	9.67029(–4)
1.0(7)	9.99997(–8)	9.99997(–8)	9.99997(–8)	9.99997(–8)	9.99997(–8)

Já na Tabela 5.14 muda-se um pouco a notação para comparar os resultados deste trabalho com os resultados de Sone et al. [Sone et al., 1990] para a equação de Boltzmann linearizada com colisões em esferas rígidas, apresentados por Siewert [Siewert, 2002c] na Tabela 4. Assim define-se a por

$$a = \frac{2^{1/2}}{8\xi_p k_*} \tag{5.2}$$

onde usa-se k_* para denotar a constante k usada na Ref.[Sone et al., 1990] e $\xi_p = 0.449027806$. Os resultados (denotados com o subscrito $*$) de Sone et al. [Sone et al., 1990] são relacionados com as quantidades físicas deste trabalho e do trabalho de Siewert [Siewert, 2002c], baseado no modelo CES, através da relação

$$P^*_{xz} = -2P_{xz}, \qquad U^* = -aU, \qquad \text{e} \qquad Q^* = -aQ. \tag{5.3}$$

Comparando os resultados desse trabalho (caso 1, 2 e 3) com o modelo CES [Siewert, 2002c] e resultados de Sone et al. [Sone et al., 1990] tem-se de 1 a 3 dígitos de concordância enquanto que, observando os resultados do modelo CES comparando com Sone et al. [Sone et al., 1990], eles concordam de 3 a 4 dígitos.

Tabela 5.14 – Fluxo de Couette: Tensão de cisalhamento, $W_o = 2$ e $\alpha = 1$

k_*	caso 1	caso 2	caso 3	CES	Sone et al.
0.10	1.0096(–1)	1.0196(–1)	1.0182(–1)	1.0156(–1)	1.015(–1)
1.00	3.6759(–1)	3.7421(–1)	3.7317(–1)	3.6803(–1)	3.687(–1)
10.0	5.3027(–1)	5.3286(–1)	5.3245(–1)	5.2828(–1)	5.2890(–1)
20.0	5.4617(–1)	5.4767(–1)	5.4744(–1)	5.4979(–1)	5.4515(–1)

Continuando a análise dos resultados para o problema de fluxo de Couette, apresentam-se nas Tabela 5.15 e 5.16, respectivamente, resultados para o perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor comparados com resultados do modelo CES [Siewert, 2002c] e da equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b]. Em comparação com casos apresentados anteriormente, para o problema de salto de temperatura, observa-se uma diferença um pouco mais significativa entre os valores obtidos para os casos 1, 2 e 3 para o perfil de velocidade (Tabela 5.15); o último parece apresentar uma concordância um pouco melhor (1 a 3 digítos) com o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b]. No caso da análise do perfil de fluxo de calor, apresentada na Tabela 5.16, aparece a maior diferença (para os caso 2 e 3) até aqui notada (sem concordância) com os resultados do modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b]. Os resultados para o caso 2 não foram apresentados na Tabela 5.16 por serem todos nulos.

Tabela 5.15 – Fluxo de Couette: Perfil de velocidade , $W_o = 2$, $\alpha = 1$ e $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	–4.44498(–2)	–4.24669(–2)	–4.30839(–2)	–4.29400(–2)	–4.3188(–2)
0.2	–8.90639(–2)	–8.50758(–2)	–8.63181(–2)	–8.60736(–2)	–8.6559(–2)
0.3	–1.34020(–1)	–1.27980(–1)	–1.29865(–1)	–1.29611(–1)	–1.3031(–1)
0.4	–1.79526(–1)	–1.71360(–1)	–1.73915(–1)	–1.73802(–1)	–1.7469(–1)
0.5	–2.25845(–1)	–2.15442(–1)	–2.18708(–1)	–2.18965(–1)	–2.1998(–1)
0.6	–2.73338(–1)	–2.60540(–1)	–2.64576(–1)	–2.65547(–1)	–2.6662(–1)
0.7	–3.22559(–1)	–3.07130(–1)	–3.12023(–1)	–3.14241(–1)	–3.1525(–1)
0.8	–3.74467(–1)	–3.56043(–1)	–3.61928(–1)	–3.66275(–1)	–3.6704(–1)
0.9	–4.31190(–1)	–4.09108(–1)	–4.16223(–1)	–4.24420(–1)	–4.2461(–1)
1.0	–5.03723(–1)	–4.75713(–1)	–4.84855(–1)	–5.03454(–1)	–5.0206(–1)

Tabela 5.16 – Fluxo de Couette: Perfil de fluxo de calor, $W_o = 2$, $\alpha = 1$ e $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 3	CES	LBE
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	5.27864(–3)	2.09890(–3)	4.92200(–3)	4.0656(–3)
0.2	1.06394(–2)	4.23020(–3)	9.88757(–3)	8.1681(–3)
0.3	1.61712(–2)	6.42893(–3)	1.49428(–2)	1.2347(–2)
0.4	2.19779(–2)	8.73587(–3)	2.01395(–2)	1.6648(–2)
0.5	2.81910(–2)	1.12025(–2)	2.55397(–2)	2.1125(–2)
0.6	3.49916(–2)	1.38992(–2)	3.12236(–2)	2.5855(–2)
0.7	4.26555(–2)	1.69328(–2)	3.73061(–2)	3.0946(–2)
0.8	5.16636(–2)	2.04885(–2)	4.39767(–2)	3.6587(–2)
0.9	6.30785(–2)	2.49728(–2)	5.16363(–2)	4.3192(–2)
1.0	8.23988(–2)	3.24690(–2)	6.23423(–2)	5.2963(–2)

Quanto às Tabelas 5.17 e 5.18 os resultados para o caso 1 (modelo BGK) concordam em todos os dígitos com os resultados apresentados por Siewert [Siewert, 2002c] para o modelo BGK. Para os casos 1, 2 e 3 os resultados para a taxa de massa (Tabela 5.17) têm apenas 1 dígito de precisão para $2a = 1$ e $2a = 10$ comparados com o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b], enquanto para a taxa de fluxo de calor (Tabela 5.18) não se tem nem um dígito de concordância do caso 3 comparado com CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.17 – Fluxo de Couette: Taxa de massa, $W_o = 2$ e $\alpha = 0.1$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.10	–4.81420(–2)	–4.17330(–2)	–4.36337(–2)	–5.41084(–2)	–5.3191(–2)
1.00	–2.34756(–2)	–2.13851(–2)	–2.19698(–2)	–2.31248(–2)	–2.3115(–2)
10.0	–1.17090(–2)	–1.15851(–2)	–1.16111(–2)	–1.17090(–2)	–1.1584(–2)

Tabela 5.18 – Fluxo de Couette: Taxa de fluxo de calor, $W_o = 2$ e $\alpha = 0.1$

$2a$	caso 1	caso 3	CES	LBE
0.10	1.66805(–2)	6.26518(–3)	1.12938(–2)	9.3667(–3)
1.00	4.58954(–3)	1.78071(–3)	4.34898(–3)	3.2993(–3)
10.0	1.98991(–4)	6.90826(–5)	1.79134(–4)	1.7731(–4)

Nas Tabelas 5.19 e 5.20 muda-se a notação desse trabalho, como já foi mencionado anteriormente, quando se falava da Tabela 5.14. Observa-se que se tem 2 dígitos de precisão na Tabela 5.19 (taxa de massa) para os caso $k_* = 0.10$ e 1 dígito para o caso $k_* = 1.0$, comparando os três modelos desse trabalho com o modelo CES [Siewert, 2002c] e resultados de Sone et al. [Sone et al., 1990]. Já na Tabela 5.20 como aconteceu com os resultados da Tabela 5.16 (para os caso 2 e 3) os resultados não concordam em nenhum dígito para os três casos.

Tabela 5.19 – Fluxo de Couette: Taxa de massa, $W_o = 2$ e $\alpha = 1$

k_*	caso 1	caso 2	caso 3	CES	Sone et al.
0.10	–5.1825(–2)	–5.1764(–2)	–5.1803(–2)	–5.1519(–2)	–5.154(–2)
1.00	–2.6728(–1)	–2.5225(–1)	–2.5703(–1)	–2.6242(–1)	–2.626(–1)
10.0	–7.4439(–1)	–6.5561(–1)	–6.8265(–1)	–8.1533(–1)	–8.00(–1)
20.0	–9.2142(–1)	–8.0002(–1)	–8.3657(–1)	–1.0426	–1.02

Tabela 5.20 – Fluxo de Couette: Taxa de fluxo de calor, $W_o = 2$ e $\alpha = 1$

k_*	caso 1	caso 3	CES	Sone et al.
0.10	6.7255(–4)	2.4140(–4)	5.4981(–4)	5.8(–4)
1.00	4.1742(–2)	1.6527(–2)	3.4921(–2)	2.87(–2)
10.0	2.3963(–1)	9.1032(–2)	1.6106(–1)	1.3(–1)
20.0	3.2417(–1)	1.2191(–1)	2.1071(–1)	1.8(–1)

Nas Tabelas 5.18 e 5.20 não foram apresentados os resultados para o caso 2 uma vez que são todos nulos.

5.3 Fluxo de Poiseuille

Os resultados para o fluxo de Poiseuille apresentados a seguir nas Tabelas 5.21-5.26 foram obtidos usando o número de pontos de quadratura $N = 50$, e considerando $R_z = 1$ nas expressões dadas nas Eqs. (4.124), (4.125), (4.126) e (4.127) para os perfis de velocidade, fluxo de calor, taxa de massa e taxa de fluxo de calor, respectivamente.

Listam-se inicialmente, nas Tabelas 5.21 e 5.22 resultados para o perfil de velocidade e taxa de massa, respectivamente. Na Tabela 5.21 para o caso 1 (modelo BGK) os resultados concordam perfeitamente com alguns cálculos feitos anteriormente [Barichello et al., 2001] enquanto para a Tabela 5.22 (considerando que $U = -Q_p$), os resultados para o caso 1 concordam em todos os dígitos com cálculos feitos anteriormente [Barichello et al., 2001]. Nota-se que Q_P representa a taxa de fluxo na Ref. [Barichello et al., 2001].

Tabela 5.21 – Fluxo de Poiseuille: Perfil de velocidade, $\alpha = 0.5$, $2a = 2$

x	caso 1	caso 2	caso 3
0.0	–3.652222	–3.613649	–3.614035
0.1	–3.644836	–3.606833	–3.607075
0.2	–3.622577	–3.586297	–3.586099
0.3	–3.585117	–3.551755	–3.550812
0.4	–3.531852	–3.502687	–3.500663
0.5	–3.461789	–3.438232	–3.434749
0.6	–3.373321	–3.356997	–3.351606
0.7	–3.263728	–3.256626	–3.248762
0.8	–3.127917	–3.132715	–3.121585
0.9	–2.954020	–2.975043	–2.959328
1.0	–2.676407	–2.727879	–2.703186

Tabela 5.22 – Fluxo de Poiseuille: Taxa de massa ($U = -Q_P$), $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3
0.05	5.223296	5.498914	5.376762
0.10	4.556406	4.767090	4.670419
0.30	3.778472	3.885437	3.830629
0.50	3.544371	3.609218	3.571677
0.70	3.437669	3.478376	3.450703
0.90	3.383887	3.408588	3.387387
1.00	3.368218	3.386718	3.367995
2.00	3.376574	3.360969	3.355239
5.00	3.774402	3.726932	3.731203
7.00	4.088108	4.031961	4.038400
9.00	4.410190	4.348751	4.356393

Os resultados apresentados a seguir, para diferentes espessuras de canais, nas Tabelas 5.23-5.26, são comparados com o modelo CES [Siewert, 2002c] e equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b].

Nota-se que, para o autor, os resultados para o modelo CES [Siewert, 2002c] estão corretos com 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.23 e 5.24 e com 6 dígitos de precisão nas Tabelas 5.25 e 5.26, enquanto os resultados para LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b] estão com 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.23 a 5.26.

Observa-se na Tabela 5.23 para taxa de massa que se tem de 1 a 2 dígitos de precisão para os casos 1, 2 e 3 deste trabalho comparados com os resultados do modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.23 – Fluxo de Poiseuille: Taxa de massa , $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.1	–4.5564	–4.7671	–4.6704	–4.3156	–4.3868
1.0	–3.3682	–3.3867	–3.3680	–3.2959	–3.3264
10.0	–4.5728	–4.5094	–4.5175	–4.5285	–4.5346

Na Tabela 5.24 para a taxa de fluxo de calor tem-se concordância em apenas 1 dígito para o caso 1 e caso 2, quando $2a = 0.1$ e 2 digítos para o caso 3, quando $2a = 0.1$; comparando com resultados do modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b], com o aumento da espessura perde-se essa concordância.

Tabela 5.24 – Fluxo de Poiseuille: Taxa de fluxo de calor, $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.1	1.2664	1.7675	1.5103	1.5426	1.5680
1.0	3.6854(–1)	4.6680(–1)	3.9777(–1)	5.3760(–1)	5.2876(–1)
10.0	5.8364(–2)	6.0553(–2)	5.4088(–2)	8.6266(–2)	8.4299(–2)

Observando a Tabela 5.25 para o perfil de velocidade, nota-se que se tem de 1 a 2 dígitos de precisão, comparando os casos 1, 2 e 3 deste trabalho com os resultados de Siewert para o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.25 – Fluxo de Poiseuille: Perfil de velocidade, $\alpha = 0.5$, $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	–1.77883	–1.77952	–1.77257	–1.74191	–1.7574
0.1	–1.77631	–1.77722	–1.77021	–1.73946	–1.7549
0.2	–1.76873	–1.77029	–1.76310	–1.73209	–1.7475
0.3	–1.75596	–1.75863	–1.75113	–1.71965	–1.7350
0.4	–1.73776	–1.74202	–1.73408	–1.70108	–1.7172
0.5	–1.71376	–1.72013	–1.71161	–1.67835	–1.6936
0.6	–1.68335	–1.69244	–1.68315	–1.64836	–1.6635
0.7	–1.64554	–1.65806	–1.64781	–1.61078	–1.6258
0.8	–1.59850	–1.61540	–1.60389	–1.56347	–1.5785
0.9	–1.53812	–1.56088	–1.54766	–1.50156	–1.5167
1.0	–1.44292	–1.47608	–1.45976	–1.39899	–1.4143

Na Tabela 5.26 para o perfil de fluxo de calor, observa-se que se tem apenas para alguns valores de x/a 1 dígito de precisão dos resultados desse trabalho (caso 1, 2 e 3) comparado com o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE [Siewert, 2003b].

Tabela 5.26 – Fluxo de Poiseuille: Perfil de fluxo de calor, $\alpha = 0.5$ e $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	2.10798(–1)	2.42851(–1)	2.14469(–1)	2.99576(–1)	2.8922(–1)
0.1	2.10166(–1)	2.42622(–1)	2.14096(–1)	2.98793(–1)	2.8860(–1)
0.2	2.08251(–1)	2.41928(–1)	2.12966(–1)	2.96425(–1)	2.8673(–1)
0.3	2.04989(–1)	2.40747(–1)	2.11042(–1)	2.92407(–1)	2.8355(–1)
0.4	2.00264(–1)	2.39039(–1)	2.08255(–1)	2.86667(–1)	2.7899(–1)
0.5	1.93887(–1)	2.36739(–1)	2.04496(–1)	2.79013(–1)	2.7288(–1)
0.6	1.85559(–1)	2.33746(–1)	1.99589(–1)	2.69196(–1)	2.6501(–1)
0.7	1.74779(–1)	2.29897(–1)	1.93247(–1)	2.56798(–1)	2.5499(–1)
0.8	1.60635(–1)	2.24899(–1)	1.84952(–1)	2.41066(–1)	2.4212(–1)
0.9	1.41067(–1)	2.18120(–1)	1.73549(–1)	2.20325(–1)	2.2483(–1)
1.0	1.05346(–1)	2.06533(–1)	1.53227(–1)	1.85908(–1)	1.9460(–1)

5.4 Creep-Térmico

Para a obtenção de todos os resultados numéricos obtidos nessa seção, para o problema creep-térmico, considerou-se $N = 50$ para a ordenadas discretas e $K_z = 1$ nas

Eqs. (4.136) a (4.139) para os perfis de velocidade, fluxo de calor, taxa de massa e taxa de fluxo de calor.

Para validação do programa, compararam-se inicialmente os resultados na Tabela 5.27 (perfil de velocidade) para o caso 1 (modelo BGK) com resultados obtidos anteriormente [Barichello et al., 2001], sendo que estes concordam em todos os dígitos, enquanto para a Tabela 5.28 (taxa de massa), considerando que $U = -Q_T$, os resultados também para o modelo BGK concordam em todos os dígitos com cálculos feitos anteriormente [Barichello et al., 2001].

Nota-se que Q_T é a taxa de fluxo para a Ref. [Barichello et al., 2001].

Tabela 5.27 – Creep-Térmico: Perfil de velocidade, $\alpha = 1.0$ e $2a = 2$

x	caso 1	caso 2	caso 3
0.0	2.412645(−1)	2.510543(−1)	2.310421(−1)
0.1	2.404602(−1)	2.505133(−1)	2.304474(−1)
0.2	2.380167(−1)	2.488649(−1)	2.286365(−1)
0.3	2.338381(−1)	2.460296(−1)	2.255258(−1)
0.4	2.277487(−1)	2.418620(−1)	2.209620(−1)
0.5	2.194636(−1)	2.361255(−1)	2.146958(−1)
0.6	2.085296(−1)	2.284442(−1)	2.063295(−1)
0.7	1.941984(−1)	2.181983(−1)	1.952059(−1)
0.8	1.751119(−1)	2.042691(−1)	1.801320(−1)
0.9	1.482365(−1)	1.841906(−1)	1.584555(−1)
1.0	9.806183(−2)	1.459346(−1)	1.169452(−1)

Tabela 5.28 – Creep-Térmico: Taxa de massa ($U = -Q_T$), $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3
0.05	1.653689	2.293839	1.979399
0.10	1.266442	1.767500	1.510306
0.30	7.580824(−1)	1.036008	8.772810(-1)
0.50	5.705723(−1)	7.600442(−1)	6.437272(−1)
0.70	4.649666(−1)	6.056515(−1)	5.140337(−1)
0.90	3.953837(−1)	5.051602(−1)	4.298718(−1)
1.00	3.685435(−1)	4.667952(−1)	3.977703(−1)
2.00	2.245046(−1)	2.668653(−1)	2.302966(−1)
5.00	1.075322(−1)	1.172457(−1)	1.033924(−1)
7.00	8.036291(−2)	8.531537(−2)	7.576204(−2)
9.00	6.421908(−2)	6.704090(−2)	5.979078(−2)

Como não existem resultados na literatura para este problema, considerando o modelo CLF, então comparam-se, nas Tabelas 5.29-5.32 resultados obtidos neste trabalho com o modelo CLF com resultados da literatura para o modelo CES [Siewert, 2002c] e equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b].

Nota-se que, segundo o autor, os resultados para o modelo CES [Siewert, 2002c] estão corretos com 6 dígitos de precisão nas Tabelas 5.29 e 5.30 e com 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.31 e 5.32, enquanto os resultados para para LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b] estão com 5 dígitos de precisão nas Tabelas 5.29 a 5.32.

Na Tabela 5.29 (perfil de velocidade) tem-se para o caso 2 (modelo de Williams) apenas 1 dígito de precisão enquanto para o caso 3 tem-se 1 dígito mas apenas para alguns valores de x/a (0.0 a 0.5) comparando com o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.29 – Creep-Térmico: Perfil de velocidade, $\alpha = 0.5$ e $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	1.97421(−1)	2.42851(−1)	2.09273(−1)	2.89736(−1)	2.8169(−1)
0.1	1.97099(−1)	2.42622(−1)	2.09022(−1)	2.89204(−1)	2.8126(−1)
0.2	1.96124(−1)	2.41928(−1)	2.08261(−1)	2.87598(−1)	2.7996(−1)
0.3	1.94467(−1)	2.40747(−1)	2.06966(−1)	2.84878(−1)	2.7775(−1)
0.4	1.92076(−1)	2.39039(−1)	2.05093(−1)	2.80974(−1)	2.7457(−1)
0.5	1.88867(−1)	2.36739(−1)	2.02571(−1)	2.75774(−1)	2.7032(−1)
0.6	1.84707(−1)	2.33746(−1)	1.99289(−1)	2.69099(−1)	2.6484(−1)
0.7	1.79377(−1)	2.29897(−1)	1.95062(−1)	2.60660(−1)	2.5785(−1)
0.8	1.72482(−1)	2.24899(−1)	1.89566(−1)	2.49936(−1)	2.4886(−1)
0.9	1.63143(−1)	2.18120(−1)	1.82082(−1)	2.35775(−1)	2.3677(−1)
1.0	1.46896(−1)	2.06533(−1)	1.69085(−1)	2.12264(−1)	2.1573(−1)

Para os resultados da Tabela 5.30 (perfil de fluxo de calor) tem-se apenas 1 dígito de precisão para os resultados deste trabalho (caso 1, 2 e 3) comparados com o modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.30 – Creep-Térmico: Perfil de fluxo de calor, $\alpha = 0.1$ e $2a = 1$

x/a	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	−1.17929	−1.33181	−1.17478	−1.74545	−1.7429
0.1	−1.17908	−1.33159	−1.17457	−1.74531	−1.7425
0.2	−1.17847	−1.33091	−1.17396	−1.74396	−1.7414
0.3	−1.17743	−1.32977	−1.17292	−1.74167	−1.7395
0.4	−1.17592	−1.32811	−1.17140	−1.73836	−1.7368
0.5	−1.17388	−1.32588	−1.16937	−1.73395	−1.7332
0.6	−1.17121	−1.32300	−1.16671	−1.72824	−1.7284
0.7	−1.16778	−1.31931	−1.16329	−1.72096	−1.7223
0.8	−1.16329	−1.31454	−1.15885	−1.71161	−1.7144
0.9	−1.15715	−1.30813	−1.15280	−1.69907	−1.7036
1.0	−1.14642	−1.29735	−1.14240	−1.67762	−1.6844

Os resultados da Tabela 5.31 para $2a = 0.10$ concordam apenas em 1 dígito para o caso 1 e 2 enquanto o caso 3 concorda em 2 dígitos comparados com o modelo CES [Siewert, 2002c] e equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.31 – Creep-Térmico: Taxa de massa, $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.10	1.2664	1.7675	1.5103	1.5426	1.5680
1.00	3.6854(–1)	4.6680(–1)	3.9777(–1)	5.3760(–1)	5.2876(–1)
10.0	5.8364(–2)	6.0553(–2)	5.4089(–2)	8.6266(–2)	8.4299(–2)

Na Tabela 5.32 observa-se que se tem concordância em 1 dígito para os casos 1, 2 e 3 somente para $2a = 0.10$, enquanto para $2a = 1.0$ tem-se apenas 1 dígito para o caso 2 comparando com os resultados do modelo CES [Siewert, 2002c] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.32 – Creep-Térmico: Taxa de fluxo de calor, $\alpha = 0.5$

$2a$	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.10	–7.2098	–7.9538	–7.4325	–7.6317	–7.7797
1.00	–1.8538	–2.1006	–1.8832	–2.5170	–2.5138
10.0	–2.4162(–1)	-2.7249(–1)	–2.3978(–1)	–3.6251(–1)	–3.6167(–1)

5.5 Deslizamento Térmico

Para apresentar os resultados numéricos para o problema deslizamento térmico nas Tabela 5.33-5.36 considera-se para o número de pontos de quadratura $N = 50$ e $K_z = 1.0$ nas Eqs. (4.142), (4.143) e (4.145).

Os resultados da Tabela 5.33 para o coeficiente de deslizamento térmico concordam em todos os dígitos para os três casos com os resultados obtidos através do modelo CLF apresentados por Siewert e Sharipov [Siewert e Sharipov, 2002].

Tabela 5.33 – Coeficiente de deslizamento térmico ζ_T

α	caso 1	caso 2	caso 3
0.1	2.641783(−1)	2.777778(−1)	2.684888(−1)
0.2	2.781510(−1)	2.777778(−1)	2.730999(−1)
0.3	2.919238(−1)	2.777778(−1)	2.776571(−1)
0.4	3.055019(−1)	2.777778(−1)	2.821617(−1)
0.5	3.188906(−1)	2.777778(−1)	2.866147(−1)
0.6	3.320949(−1)	2.777778(−1)	2.910174(−1)
0.7	3.451195(−1)	2.777778(−1)	2.953707(−1)
0.8	3.579692(−1)	2.777778(−1)	2.996757(−1)
0.9	3.706483(−1)	2.777778(−1)	3.039336(−1)
1.0	3.831612(−1)	2.777778(−1)	3.081452(−1)

Na Tabela 5.34 apresentam-se resultados para o perfil de velocidade, onde considera-se que $q_T(x) = 2u(x)$ e assim os resultados concordam em todos os dígitos para o caso 1 (modelo BGK) com alguns cálculos feitos anteriormente [Barichello et al., 2001].

Nota-se que na Ref. [Barichello et al., 2001] q_T representa a velocidade.

Tabela 5.34 – Deslizamento Térmico: Perfil de Velocidade $q_T(x) = 2u(x)$, $\alpha = 1.0$

x	caso 1	caso 2	caso 3
0.0	2.185558(−1)	2.777778(−1)	2.530238(−1)
0.2	3.875591(−1)	3.932181(−1)	3.868927(−1)
0.4	4.695371(−1)	4.427419(−1)	4.475388(−1)
0.6	5.255086(−1)	4.732678(−1)	4.867198(−1)
0.8	5.670040(−1)	4.938646(−1)	5.143559(−1)
1.0	5.991177(−1)	5.084448(−1)	5.347741(−1)
1.4	6.453593(−1)	5.270281(−1)	5.623885(−1)
1.8	6.765404(−1)	5.376743(−1)	5.795386(−1)
2.0	6.884206(−1)	5.412641(−1)	5.856873(−1)
2.5	7.108100(−1)	5.472208(−1)	5.965630(−1)
3.0	7.260418(−1)	5.505796(−1)	6.033071(−1)
5.0	7.537610(−1)	5.548231(−1)	6.135170(−1)
7.0	7.619180(−1)	5.554316(−1)	6.156211(−1)
10.0	7.652814(−1)	5.555456(−1)	6.162006(−1)
15.0	7.662061(−1)	5.555554(−1)	6.162866(−1)
20.0	7.663071(−1)	5.555556(−1)	6.162902(−1)

Nas Tabelas 5.35 e 5.36 apresentam-se resultados para o perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor, respectivamente, sendo esses resultados comparados com o modelo CES [Siewert, 2002e] e com a equação de Boltzmann Linearizada (LBE) [Siewert, 2003b].

Nota-se que os resultados para o modelo CES [Siewert, 2002e] (nas Tabelas 5.35 e 5.36), segundo o autor, estão corretos com 6 dígitos de precisão enquanto os resultados para LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b] (nas Tabelas 5.35 e 5.36) estão corretos com 5 dígitos de precisão.

Na Tabela 5.35 (perfil de velocidade) tem-se de 1 a 2 dígitos de precisão, comparando os resultados obtidos nesse trabalho (caso 1, 2 e 3) com o modelo CES [Siewert, 2002e] e LBE [Siewert, 2003b].

Tabela 5.35 – Deslizamento Térmico: Perfil de velocidade, $\alpha = 0.1$

x	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	2.34232(−1)	2.63889(−1)	2.49527(−1)	2.36503(−1)	2.3877(−1)
0.1	2.40567(−1)	2.67669(−1)	2.54172(−1)	2.45367(−1)	2.4634(−1)
0.2	2.43973(−1)	2.69661(−1)	2.56645(−1)	2.50014(−1)	2.5011(−1)
0.3	2.46482(−1)	2.71068(−1)	2.58425(−1)	2.53327(−1)	2.5279(−1)
0.4	2.48471(−1)	2.72137(−1)	2.59805(−1)	2.55849(−1)	2.5484(−1)
0.5	2.50111(−1)	2.72981(−1)	2.60917(−1)	2.57831(−1)	2.5648(−1)
0.6	2.51496(−1)	2.73663(−1)	2.61835(−1)	2.59418(−1)	2.5782(−1)
0.7	2.52685(−1)	2.74225(−1)	2.62606(−1)	2.60706(−1)	2.5892(−1)
0.8	2.53718(−1)	2.74693(−1)	2.63262(−1)	2.61760(−1)	2.5985(−1)
0.9	2.54625(−1)	2.75088(−1)	2.63826(−1)	2.62628(−1)	2.6064(−1)
1.0	2.55427(−1)	2.75422(−1)	2.64314(−1)	2.63348(−1)	2.6131(−1)
2.0	2.60134(−1)	2.77063(−1)	2.66927(−1)	2.66432(−1)	2.6456(−1)

Na Tabela 5.36 tem-se 1 dígito de precisão para os três modelos desse trabalho para x= 0.0 e 0.1 e 2 dígitos de x= 0.2 a 2.0 comparando com o modelo CES [Siewert, 2002e] e LBE [Siewert, 2003b].

Tabela 5.36 – Deslizamento Térmico: Perfil de fluxo de calor, $\alpha = 0.1$

x	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	–1.27995	–1.26389	–1.26896	–1.15473	–1.1662
0.1	–1.27361	–1.26011	–1.26432	–1.18551	–1.1930
0.2	–1.27020	–1.25812	–1.26184	–1.20068	–1.2056
0.3	–1.26770	–1.25671	–1.26006	–1.21107	–1.2141
0.4	–1.26571	–1.25564	–1.25868	–1.21874	–1.2205
0.5	–1.26407	–1.25480	–1.25757	–1.22462	–1.2254
0.6	–1.26268	–1.25411	–1.25665	–1.22922	–1.2293
0.7	–1.26149	–1.25355	–1.25588	–1.23289	–1.2324
0.8	–1.26046	–1.25308	–1.25523	–1.23584	–1.2350
0.9	–1.25955	–1.25269	–1.25466	–1.23824	–1.2371
1.0	–1.25875	–1.25236	–1.25418	–1.24020	–1.2389
2.0	–1.25404	–1.25071	–1.25156	–1.24823	–1.2472

5.6 Problema de Kramers

Para listar nas Tabelas 5.37-5.41, os resultados numéricos para o problema de Kramers, usou-se $N = 50$ para o número de ordenadas discretas.

Na Tabela 5.37 apresentam-se resultados para o coeficiente de deslizamento viscoso (ζ_p) sendo que estes resultados concordam para os três modelos apresentados aqui com os resultados obtidos usando o modelo CLF por Siewert e Sharipov [Siewert e Sharipov, 2002]. Os resultados dessa Tabela (5.37) para α =0.1, 0.3, 0.5, 0.9, 1.0 também concordam em todos os dígitos com o trabalho de Siewert [Siewert, 2001b] no qual ele usa o modelo CLF para resolver o problema de Kramers.

Tabela 5.37 – Kramers: Coeficiente de deslizamento viscoso ζ_P

α	caso 1	caso 2	caso 3
0.1	1.710313(1)	1.700079(1)	1.701536(1)
0.2	8.224902	8.128966	8.142636
0.3	5.255112	5.165447	5.178235
0.4	3.762619	3.679096	3.691017
0.5	2.861190	2.783682	2.794754
0.6	2.255410	2.183795	2.194033
0.7	1.818667	1.752827	1.762247
0.8	1.487654	1.427475	1.436091
0.9	1.227198	1.172569	1.180396
1.0	1.016191	9.670050(−1)	9.7440570(−1)

Seguindo na Tabela 5.38 lista-se resultados para o perfil de velocidade sendo que estes concordam em todos os dígitos para o modelo BGK (caso 1) com alguns cálculos feitos anteriormente [Barichello et al., 2001].

Tabela 5.38 – Kramers: Perfil de velocidade, $\alpha = 1.0$

x	caso 1	caso 2	caso 3
0.0	7.071068(−1)	7.431239(−1)	7.290828(−1)
0.2	1.027415	1.042013	1.034761
0.4	1.276161	1.279991	1.275832
0.6	1.506903	1.502881	1.500828
0.8	1.728463	1.718250	1.717765
1.0	1.944445	1.929166	1.929905
1.2	2.366367	2.343259	2.345776
1.4	2.780389	2.751545	2.755273
1.8	2.985559	2.954406	2.958598
2.0	3.495016	3.459287	3.464352
2.5	4.001214	3.962163	3.967819
3.0	6.011854	5.966137	5.972824
5.0	8.014746	7.966827	7.973778
7.0	1.101587(1)	1.096699(1)	1.097402(1)
10.0	1.601616(1)	1.596700(1)	1.597406(1)
20.0	2.101619(1)	2.096700(1)	2.097406(1)

Nas Tabelas 5.39 e 5.40, resultados são apresentados para o perfil de velocidade e perfil de fluxo de calor, respectivamente, para comparar com resultados da literatura para o modelo CES [Siewert, 2002e] e equação de Boltzmann linearizada (LBE) [Siewert, 2003b] já que não se dispõe na literatura de resultados com o modelo CLF para esses perfis.

Nota-se que os resultados para o modelo CES [Siewert, 2002e] (Tabelas 5.39 e 5.40), segundo o autor, estão corretos com 6 dígitos de precisão, enquanto os resultados para LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b] (nas Tabelas 5.39 e 5.40) estão corretos com 5 dígitos de precisão.

Observando a Tabela 5.39, tem-se de 2 a 3 dígitos de precisão comparando os modelos BGK (caso 1), Williams (caso 2) e esfera rigída (caso 3) com o modelo CES [Siewert, 2002e] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b].

Tabela 5.39 − Kramers: Perfil de velocidade, para $\alpha = 0.1$

x	caso 1	caso 2	caso 3	CES	LBE
0.0	1.64611(1)	1.65437(1)	1.65138(1)	1.64798(1)	1.6472(1)
0.1	1.67353(1)	1.67841(1)	1.67642(1)	1.67830(1)	1.6771(1)
0.2	1.69182(1)	1.69494(1)	1.69346(1)	1.69694(1)	1.6956(1)
0.3	1.70757(1)	1.70937(1)	1.70825(1)	1.71254(1)	1.7111(1)
0.4	1.72193(1)	1.72266(1)	1.72183(1)	1.72656(1)	1.7252(1)
0.5	1.73540(1)	1.73522(1)	1.73463(1)	1.73960(1)	1.7383(1)
0.6	1.74824(1)	1.74727(1)	1.74689(1)	1.75198(1)	1.7507(1)
0.7	1.76062(1)	1.75896(1)	1.75874(1)	1.76388(1)	1.7627(1)
0.8	1.77264(1)	1.77036(1)	1.77030(1)	1.77543(1)	1.7743(1)
0.9	1.78438(1)	1.78154(1)	1.78161(1)	1.78671(1)	1.7857(1)
1.0	1.79589(1)	1.79255(1)	1.79274(1)	1.79777(1)	1.7968(1)
2.0	1.90419(1)	1.89758(1)	1.89847(1)	1.90267(1)	1.9023(1)

Já para a Tabela 5.40 tem-se apenas 1 dígito de precisão apenas para o caso 1 para x de 0.2 a 0.9 comparando com o modelo CES [Siewert, 2002e] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003b]. Não se apresentaram resultados para o caso 2 na Tabela 5.40 devido a estes serem iguais a zero.

Tabela 5.40 – Kramers: Perfil de fluxo de calor, para $\alpha = 0.1$

x	caso 1	caso 3	CES	LBE
0.0	3.21035(−1)	1.19979(−1)	2.83332(−1)	2.3959(−1)
0.1	2.33911(−1)	8.71266(−2)	2.24002(−1)	1.9023(−1)
0.2	1.92463(−1)	7.11962(−2)	1.89829(−1)	1.6365(−1)
0.3	1.63735(−1)	6.00886(−2)	1.63704(−1)	1.4360(−1)
0.4	1.41930(−1)	5.16379(−2)	1.42510(−1)	1.2735(−1)
0.5	1.24583(−1)	4.49121(−2)	1.24821(−1)	1.1373(−1)
0.6	1.10364(−1)	3.94059(−2)	1.09808(−1)	1.0206(−1)
0.7	9.84665(−2)	3.48087(−2)	9.69236(−2)	9.1923(−2)
0.8	8.83561(−2)	3.09145(−2)	8.57773(−2)	8.3039(−2)
0.9	7.96608(−2)	2.75785(−2)	7.60772(−2)	7.5193(−2)
1.0	7.21102(−2)	2.46949(−2)	6.75962(−2)	6.8224(−2)
2.0	3.05938(−2)	9.29597(−3)	2.20280(−2)	2.7542(−2)

Finalmente apresentam-se na Tabela 5.41 resultados para a desvio de velocidade (velocity defect) dada por

$$q_d(x) = x + \zeta_p - u(x) \tag{5.4}$$

substituindo $u(x)$ dada na Eq. (4.84) na equação anterior obtém-se

$$q_d(x) = -\frac{2}{\sigma}\sum_{j=1}^{N-1} A_j \nu_j^2 \sum_{k=1}^{N} u_1(\xi_k)\frac{w_k}{(\nu_j^2 - \xi_k^2)} e^{-\sigma x/\nu_j} \tag{5.5}$$

onde $u_1(\xi)$ é dado na Eq.(3.267), sendo que esses resultados concordam em todos os dígitos para os três casos deste trabalho com os resultados de Siewert [Siewert, 2001b] apresentados em sua Tabela 2, usando o modelo CLF.

Tabela 5.41 − Kramers: desvio de velocidade

	$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.9$		
x	caso 1	caso 2	caso 3	caso 1	caso 2	caso 3
0.0	6.420697(−1)	4.570891(−1)	5.015427(−1)	3.432612(−1)	2.481908(−1)	2.716527(−1)
0.1	4.678216(−1)	3.166831(−1)	3.511255(−1)	2.531399(−1)	1.736520(−1)	1.921280(−1)
0.2	3.849266(−1)	2.513896(−1)	2.807790(−1)	2.092257(−1)	1.383361(−1)	1.542030(−1)
0.3	3.274692(−1)	2.071135(−1)	2.328409(−1)	1.785271(−1)	1.142336(−1)	1.281834(−1)
0.4	2.838608(−1)	1.742227(−1)	1.970619(−1)	1.551002(−1)	9.625610(−2)	1.086801(−1)
0.5	2.491653(−1)	1.486025(−1)	1.690639(−1)	1.363869(−1)	8.221152(−2)	9.337100(−2)
0.6	2.207284(−1)	1.280398(−1)	1.464913(−1)	1.210013(−1)	7.091383(−2)	8.099879(−2)
0.7	1.969331(−1)	1.111883(−1)	1.279102(−1)	1.080943(−1)	6.163824(−2)	7.079455(−2)
0.8	1.767122(−1)	9.716229(−2)	1.123762(−1)	9.710268(−2)	5.390614(−2)	6.224990(−2)
0.9	1.593216(−1)	8.534641(−2)	9.923244(−2)	8.763227(−2)	4.738402(−2)	5.501011(−2)
1.0	1.442204(−1)	7.529561(−2)	8.800326(−2)	7.939544(−2)	4.182999(−2)	4.881753(−2)
1.4	9.984283(−2)	4.714830(−2)	5.623679(−2)	5.511766(−2)	2.624398(−2)	3.126069(−2)
1.8	7.158058(−2)	3.064916(−2)	3.728946(−2)	3.959614(−2)	1.708383(−2)	2.075917(−2)
2.0	6.118756(−2)	2.496093(−2)	3.066825(−2)	3.387546(−2)	1.392103(−2)	1.708343(−2)
2.5	4.221371(−2)	1.527173(−2)	1.922621(−2)	2.341170(−2)	8.526978(−3)	1.072298(−2)
3.0	2.981274(−2)	9.571427(−3)	1.234550(−2)	1.655706(−2)	5.348931(−3)	6.892023(−3)
5.0	8.597390(−3)	1.711436(−3)	2.432911(−3)	4.792270(−3)	9.585329(−4)	1.361492(−3)

• **Observações**

• No caso de comparações entre os três modelos para a freqüência de colisão apresentados nesse trabalho, a diferença, considerando tempo computacional, é de poucos segundos. Quando se trata do trabalho analítico e numérico, no entanto, o modelo BGK é claramente mais fácil de se trabalhar.

• Com relação à resultados experimentais, algumas referências podem ser citadas, por exemplo, no cálculo do coeficiente de deslizamento viscoso [Porodnov et al., 1974] e do coeficiente de deslizamento térmico [Porodnov et al., 1978; Derjaguin et al., 1993]. Comparações dos resultados experimentais das Refs. [Porodnov et al., 1974; Porodnov et al., 1978] com resultados numéricos são apresentados por Sharipov na Ref. [Sharipov, 2003].

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Cumpriu-se, neste trabalho, o objetivo de obter soluções unificadas (no sentido de serem resolvidos com base em procedimentos comuns e no uso do método analítico de ordenadas discretas), para uma ampla classe de problemas da dinâmica de gases rarefeitos baseados em equações modelo, mais especificamente, modelo CLF, considerando que a freqüência de colisão das partículas é variável (depende da velocidade).

A partir de transformações convenientes do problema geral, a solução em ordenadas discretas se mostra eficiente e precisa, sendo aplicada à solução de um problema básico tanto para o caso vetorial (problema **G**), como escalar (problema G), usando soluções elementares analíticas e/ou numéricas.

O algoritmo implementado para cada problema descrito pelo modelo CLF, apresenta resultados considerando três formas para a freqüência de colisão, sendo que esses resultados foram comparados com resultados encontrados na literatura, por exemplo, obtidos pelo modelo CES [Siewert, 2002c; Siewert, 2002d; Siewert, 2002e] e LBE (equação de Boltzmann linearizada) [Siewert, 2003a; Siewert, 2003b].

Parece difícil de se obter conclusões gerais para todos os resultados apresentados nas tabelas no capítulo 5. No entanto pode-se salientar alguns aspectos, como quando se compara CLF (caso, 1, 2 e 3) com o modelo CES e LBE (equação de Boltzmann linearizada), o primeiro (CLF) apresenta, é claro, vantagens no sentido de simplicidade de formulação, uma vez que:

- **CLF** $\rightarrow$ trabalha com aproximações (formas explícitas) para as funções de Chapman-Enskog [Siewert, 2002b] $a(c)$ e $b(c)$ e usa $N = 2$ na aproximação do núcleo de espalhamento ($F(\mathbf{c}, \mathbf{c}')$);
- **CES** $\rightarrow$ trabalha com $a(c)$ e $b(c)$ exatas e usa $N = 2$ na aproximação do núcleo de

espalhamento $(F(\mathbf{c}, \mathbf{c}'))$;

• **LBE** $\rightarrow$ trabalha com $a(c)$ e $b(c)$ exatas e com as componentes $k_n(c', c)$ do núcleo de espalhamento$((K(\mathbf{c}, \mathbf{c}')))$ exatas.

Levando em conta essas considerações, acredita-se ter uma boa precisão para os resultados apresentados nesse trabalho para os problemas de salto de temperatura, Couette, Poiseuille, Kramer, creep-térmico e deslizamento térmico, com exceção do perfil de fluxo de calor e taxa de fluxo de calor para o problema de Couette, quando comparados com os resultados do modelo CES e da equação linearizada de Boltzmann (LBE). Também ao comparar os resultados apresentados para o modelo BGK (caso 1) e modelo de esferas rígidas (caso 3) nota-se que se teve praticamente a mesma precisão quando foram comparados com o modelo CES e LBE (equação de Boltzmann linearizada), o que parece uma vantagem do modelo BGK, que é bem mais simples do ponto de vista do tratamento analítico e uma vez que ambos resultam em aproximações pobres para o número de Prandtl [Barichello e Siewert, 2002].

Por fim, acredita-se que este trabalho trouxe contribuição importante, segundo seu objetivo, no sentido de estabelecer resultados de referência entre diferentes modelos da dinaîmica de gases rarefeitos, fundamentados em uma mesma metodologia, o que deve contribuir na análise e na decisão de escolha de diferentes modelagens, quando do tratamento de problemas de interesse.

Pretende-se, com base nas ferramentas aqui desenvolvidas, investigar possivelmente o uso do modelo CEBS [Barichello e Siewert, 2002] para problemas da área de gases rarefeitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, J. D. J., 1969. “An Engineering Survey of Radiating Shock Layers”, **AIAA Journal**, vol. 7, pp. 1665.

Arkilic, E. B., Schimdt, M. A., and Breuer, K. S., 1997. “Gaseous Slip Flow in Long Microchannels”, **Journal of Microeletromechanical Systems**, vol. 6, pp. 167.

Barichello, L. B., Bartz, A. C. R., Camargo, M., and Siewert, C. E., 2002a. “The Temperature-Jump Problem for a Variable Collision Frequency Model”, **Physics of Fluids**, vol. 14, pp. 382.

Barichello, L. B., Camargo, M., Rodrigues, P., and Siewert, C. E., 2001. “Unified Solutions to Classical Flow Problems Based on the BGK Model”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik Physik**, vol. 52, pp. 517.

Barichello, L. B., Garcia, R. D. M., and Siewert, C. E., 2000. “Particular Solutions for the Discrete-Ordinates Method”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 64, pp. 219.

Barichello, L. B., Rodrigues, P., and Siewert, C. E., 2002b. “On Computing the Chapman-Enskog and Burnet Functions”. a ser submetido para publicação.

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 1999a. “A Discrete-Ordinates Solution for a Non-Grey Model with Complete Frequency Redistribution”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 62, pp. 665.

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 1999b. “A Discrete-Ordinates Solution for Poiseuille Flow in a Plane Channel”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik**, vol. 50, pp. 972.

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 2000. “The Temperature-Jump Problem in Rarefied-Gas Dynamics”, **European Journal of Applied Mathematics**, vol. 11, pp. 353.

Barichello, L. B. and Siewert, C. E., 2002. “Some Comments on Modeling the Linearized Boltzmann Equations”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 77, pp. 43.

Bartz, A. C. R., 2000. **“Um Modelo da Dinâmica de Gases Rarefeitos com Freqüência de Colisão Variável”**, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, RS, Brasil.

Bellouquid, A., 1999. “The Hydrodinamical Limit of the Non Linear Boltzmann Equation”, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 28, pp. 57.

Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., and Krook, M., 1954. “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems”, **Physical Review**, vol. 94, pp. 511.

Burden, R. L. and Faires, J. D., 1997. **“Numerical Analysis”**. Brooks/Cole Publishing Company, Boston.

Busbridge, I. W., 1953. “Coherent and Non-Coherent Scattering in the Theory of Line Formation”, **Monthly Nottices of the Royal Astronomical Society**, vol. 113, pp. 52.

Camargo, M., Rodrigues, P., and Barichello, L. B., 2000. “Discrete-Ordinates Solutions to some Classical Flow Problems in the Rarefied Gas Dynamics”, **8^{TH} Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences- CD-Rom**.

Cassell, J. S. and Williams, M. M. R., 1972. “An Exact Solution of the Temperature Slip Problem in Rarefied Gases”, **Transport Theory and Statistical Physics**, vol. 2, pp. 61.

Cercignani, C., 1965a. “Plane Couette Flow According to the Method of Elemenntary Solutions”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 11, pp. 93.

Cercignani, C., 1965b. “Plane Poiseuille Flow According to the Method of Elementary Solutions”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, vol. 12, pp. 254.

Cercignani, C., 1966. “The Method of Elementary Solutions for Kinetic Models with Velocity-Dependent Collision Frequency”, **Annals of Physics**, vol. 40, pp. 469.

Cercignani, C., 1974. “On the General Solutions of Steady Linearized Boltzmann Equation”, **Proceedings of the Rarefied Gas Dynamics**, vol. I, pp. A.9–1.

Cercignani, C., 1988. **“The Boltzmann Equation and its Applications”**. Springer-Verlag, New York.

Cercignani, C., 1990. **“Mathematical Methods in Kinetic Theory”**. Plenum Press, New York.

Chandrasekhar, S., 1950. **“Radiative Transfer”**. Oxford University Press, London.

Derjaguin, B. V., Rabinovich, Y. I., Storozhilova, A. I., and Shcherbina, G. I., 1993. “Measurement of the Coefficient of Thermal Slip of Gases and the Thermophoreses Velocity of Large-Size Aerosol-Particles”, **Progress in Surface Science**, vol. 43, pp. 321.

Dongarra, J. J., Bunch, J. R., Moler, C. B., and Stewart, G. W., 1979, **“LINPACK User’s Guide”**. Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia.

Dushman, S., 1962. **“Scientifice Foundation of Vacuum Technique”**. John Wiley and Sons, New York.

Garcia, R. D. M., 2002. “Métodos para Solução da Equação de Transporte de Partículas Integro-Diferencial”, **Em: Escola de Verão em Teoria de Transporte de Partículas Neutras**. PUC-Porto Alegre- RS.

Golub, G. H. and Loan, C. F. V., 1989. **“Matrix Computations”**. Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Kogan, M. N., 1992. “Kinetic Theory in Aerothermodynamics”, **Program Aerospace Science**, vol. 29, pp. 271.

Loyalka, S. K., 1991. "Temperatur-Jump: Rigid-Sphere Gas with Arbitrary Gas/Surface Interaction", **Nuclear Science and Engineering**, vol. 108, pp. 69.

Loyalka, S. K. and Ferziger, J. H., 1967. "Model Dependence of Slip Coefficient", **Physics of Fluids**, vol. 11, pp. 1833.

Loyalka, S. K. and Ferziger, J. H., 1968. "Model Dependence of the Temperature Slip Coefficient", **Physics of Fluids**, vol. 11, pp. 1668.

Loyalka, S. K. and Hickey, K. A., 1989. "Plane Poiseuille Flow: Near Continuum Results for a Rigid Sphere Gas", **Physics A**, vol. 160, pp. 395.

Loyalka, S. K. and Hickey, K. A., 1990. "The Kramers Problem: Velocity Slip and Defect for a Hard Sphere Gas with Arbitrary Accommodation", **Zeitschrift für Angewandte Mathematik Physik**, vol. 41, pp. 245.

Pekeris, C. L. and Alterman, Z., 1957. "Solutions of the Boltzmann-Hilbert Integral Equation II. The Coefficients of Viscisity and Heat Conduction.", **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, vol. 43, pp. 998.

Porodnov, B. T., Kulev, A. N., and Tukhvetov, F. T., 1978. "Thermal Transpiration in a Circular Capillary with a Small Temperature Difference", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 88, pp. 609.

Porodnov, B. T., Suetin, P. E., Borisov, S. F., and Akinshin, V. D., 1974. "Experimental Investigation of Rarefied Gas Flow in Different Channels", **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 64, pp. 417.

Roth, A., 1976. **"Vacuum Technology"**. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Shakhov, E. M., 1974. **"Method of Investigation of Rarefied Gas Flows"**. Nauka, Moscow. in Russian.

Sharipov, F., 1999a. "Non-Isothermal Gas Flow Through Rectangular Microchanels", **Journal Micromechchanics Microengineering**, vol. 9, pp. 394.

Sharipov, F., 1999b. “Rarefied Gas Flow Through a Long Rectangular Channel”, **Journal of Vacuum Science and Technology A**, vol. 17, pp. 3062.

Sharipov, F., 2002. “Application of Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Calculations of Rarefied Gas Flows. I. Plane Flow Between two Parallel Plates”, **European Jornal of Mechanics B/Fluids**, vol. 21, pp. 113.

Sharipov, F., 2003. “Application of Cercignani-Lampis Scattering Kernel to Calculations of Rarefied Gas Flows. II. Slip and Jump Coefficients”, **European Jornal of Mechanics B/Fluids**, vol. 22, pp. 133.

Sharipov, F., Cumin, L. M. G., and Kremer, G. M., 2001. “Transport Phenomena in Rotating Rarefied Gases”, **Physics of Fluids**, vol. 13, pp. 335.

Sharipov, F. and Kalempa, D., 2003. “Velocity Slip and Temperature Jump Coefficients for Gaseous Mixtures. I. Viscous Slip Coefficient”, **Physics of Fluids**, vol. 15, pp. 1800.

Sharipov, F. and Seleznev, V., 1998. “Date on Interval Rarefied Gas Flows”, **Journal Physical and Chemical Reference Data**, vol. 27, pp. 657.

Siewert, C. E., 2000. “Poiseuille and Thermal-Creep Flow in a Cylindrical Tube”, **Journal Computational Physics**, vol. 160, pp. 470.

Siewert, C. E., 2001a. “Couette Flow for a Binary Gas Mixture”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 70, pp. 321.

Siewert, C. E., 2001b. “Kramers’ Problem for a Variable Collision Frequency Model”, **European Journal of Applied Mathematics**, vol. 12, pp. 179.

Siewert, C. E., 2002a. “Generalized Bondary Conditions for the S-Model Kinetic Equations Basic to Flow in a Plane Channel”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 72, pp. 75.

Siewert, C. E., 2002b. “On computing the Chapman-Enskog Funtions for Viscosity and Heat Transfer and the Burnett Functions”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 74, pp. 789.

Siewert, C. E., 2002c. “Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation”, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 21, pp. 579.

Siewert, C. E., 2002d. “The Temperature-Jump Problem based on the CES Model of the Linearized Boltzmann Equation”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik**. em impressão.

Siewert, C. E., 2002e. “Two Half-Space problems Based on a Synthetic-Kernel Model of the Linearized Boltzmann Equation”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 75, pp. 21.

Siewert, C. E., 2003a. “The Linearized Boltzmann Equation: A Concise and Accurate Solution of the Temperature-Jump Problem”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 77, pp. 417.

Siewert, C. E., 2003b. “The Linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik**, vol. 54, pp. 273.

Siewert, C. E., Garcia, R. D. M., and Grandjean, P., 1980. “A Concise and Accurate Solution for Poiseuille Flow in a Plane Channel”, **Journal of Mathematics Physics**, vol. 21, pp. 2760.

Siewert, C. E. and Sharipov, F., 2002. “Model Equations in Rarefied Gas Dynamics Viscous-Slip and Thermal-Slip Coefficients”, **Physics of Fluids**, vol. 14, pp. 4123.

Siewert, C. E. and Valougeorgis, D., 2001. “The Temperature-Jump Problem for a Mixture of Two Gases”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 70, pp. 307.

Siewert, C. E. and Wright, S. J., 1999. “Efficient Eigenvalue Calculations in Radiative Transfer”, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, vol. 62, pp. 685.

Smith, B. T., Boyle, J. M., Dongarra, J. J., Garbow, B. S., Ikebe, Y., Klema, V. C., and Moler, C. B., 1976, **“Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide”**. Springer-Verlag, Berlin.

Sone, Y., Ohwada, T., and Aoki, K., 1989. “Temperature Jump and Knudsen Layer in a Rarefied Gas Over a Plane Wall: Numerical Analysis of the Linearized Boltzmann Equation for Hard-Sphere Molecules”, **Physics of Fluids A**, vol. 1, pp. 363.

Sone, Y., Takata, S., and Ohwada, T., 1990. “Numerical Analysis of the Plane Couette Flow of Rarefied Gas on the Basis of the Linearized Boltzmann Equation for Hard-Sphere Molecules”, **European Journal of Mechanics B/Fluids**, vol. 9, pp. 273.

Welander, P., 1954. “On the Temperature Jump in a Rarefied Gas”, **Arkiv för Fysik**, vol. 7, pp. 507.

Wick, G. C., 1943. “Über Ebene Diffusions Problem”, **Zeitschrift f”ur Physik**, vol. 120, pp. 702.

Williams, M. M. R., 1971. **“Mathematical Methods in Particle Transport Theory”**. Butterworth, London.

Williams, M. M. R., 2001. “A Review of the Rarefied Gas Dynamics Theory Associated with Some Classical Problems in Flow and Heat Transfer”, **Zeitschrift für Angewandte Mathematik Physik**, vol. 52, pp. 500.

Wutz, M., Adam, H., and Walcher, W., 1989. **“Theory and practice of Vacuum Technology”**. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig.

Zou, Q., Hou, S., and Doolen, G. D., 1995. “Analytical Solutions of the Lattice Boltzmann BGK Model”, **Journal of Statistical Physics**, vol. 81, pp. 319.

ANEXO A

Equação de Boltzmann para Gases Rarefeitos

Nesse anexo descrevem-se com um pouco mais de detalhes os passos citados por Williams [Williams, 1971; Williams, 2001] na obtenção da equação de balanço relativa à perturbação h, a partir da equação de Boltzmann conforme mencionado no início do capítulo 2.

Assim, considerando-se, então, que a função distribuição de partículas $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$ satisfaz a equação íntegro-diferencial não linear de Boltzmann [Williams, 2001]

$$\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = J(f', f), \tag{A.1}$$

onde $\mathbf{v}_1$=(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}) é o vetor velocidade das partículas, f e f' são, respectivamente, as funções de distribuição de partículas antes e após as colisões e J representa o operador de colisão

$$J(f', f) = \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2)\Big[f(r, \mathbf{v}'_1)f(r, \mathbf{v}'_2) - f(r, \mathbf{v}_1)f(r, \mathbf{v}_2)\Big] \tag{A.2}$$

onde $\mathbf{v}_2$=(v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}) e W é a freqüência de espalhamento diferencial para a colisão entre dois corpos e satisfaz as seguintes propriedades:

$$W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) = W(\mathbf{v}'_1 \to \mathbf{v}_1; \mathbf{v}'_2 \to \mathbf{v}_2), \tag{A.3}$$

$$W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) = W(\mid \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \mid; \hat{\mathbf{v}}_1 \cdot \hat{\mathbf{v}}_2) \tag{A.4}$$

e

$$W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) = W(\mid \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2 \mid; \hat{\mathbf{v}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{v}}'_2). \tag{A.5}$$

De forma geral, para situações fracamente fora do equilíbrio, a função de distribuição é escrita na forma

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)], \tag{A.6}$$

onde h representa uma pequena ($\mid h \mid \ll 1$) perturbação causada à distribuição Maxwelliana local $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$ pela presença, por exemplo, de uma superfície de fronteira. Considerando, então, a distribuição Maxwelliana local $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$ escrita como [Williams, 2001]

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = n_\infty(\mathbf{r})\Big[\frac{m}{2\pi k T_\infty(\mathbf{r})}\Big]^{3/2} exp\Big[-\frac{m\{v_x^2 + v_y^2 + [v_z - u_1(x)]^2\}}{2kT_\infty(\mathbf{r})}\Big] \tag{A.7}$$

onde, $\mathbf{r}$ é o vetor de coordenadas espaciais, m é a massa molecular, k é a constante de Boltzmann, n_∞ e T_∞ são, respectivamente, densidade e temperatura. Assume-se, que n_∞, T_∞ e u são funções lineares descritas na forma

$$n_\infty(x, z) = n_0(1 + R_x x + R_z z), \tag{A.8}$$

$$T_\infty(x, z) = T_0(1 + K_x x + K_z z) \tag{A.9}$$

e

$$u_1(x) = Kx \tag{A.10}$$

onde n_0 e T_0 são, respetivamente, densidade e temperatura de referência, K é um gradiente na direção x, R_i e K_i são gradientes de densidade e temperatura na direção i, respectivamente. Substituindo a Eq. (A.6) na Eq. (A.1) obtém-se,

• para o lado esquerdo da Eq. (A.1)

$$\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r \Big[f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)\big[1 + h(r, \mathbf{v}_1)\big]\Big] \tag{A.11}$$

suprimindo a notação $(\mathbf{r}, \mathbf{v_1})$ e considerando que $\mid h \mid \ll 1$ reescreve-se a equação anterior, obtendo o lado esquerdo da Eq. (A.1)

$$\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_{01} + f_{01}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h; \tag{A.12}$$

• para o lado direito da de Eq. (A.1), tem-se

$$J(f',f) = \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2)\Big[f(r,\mathbf{v}'_1)f(r,\mathbf{v}'_2) - f(r,\mathbf{v}_1)f(r,\mathbf{v}_2)\Big] \tag{A.13}$$

primeiro denota-se

$$f'_{01} = f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}'_1), \quad h'_1 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}'_1), \quad f_{01} = f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}_1) \quad \text{e} \quad h_1 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}_1) \tag{A.14}$$

$$f'_{02} = f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}'_2), \quad h'_2 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}'_2), \quad f_{02} = f_0(\mathbf{r},\mathbf{v}_2) \quad \text{e} \quad h_2 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}_2) \tag{A.15}$$

e

$$f'_1 = f(\mathbf{r},\mathbf{v}'_1), \quad f'_2 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}'_2), \quad f_1 = f(\mathbf{r},\mathbf{v}_1) \quad \text{e} \quad f_2 = h(\mathbf{r},\mathbf{v}_2) \tag{A.16}$$

assim

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}'_1) = f_0(r,\mathbf{v}'_1)\Big[1 + h(r,\mathbf{v}'_1)\Big] \Rightarrow f'_1 = f'_{01}(1 + h'_1), \tag{A.17}$$

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}'_2) = f_0(r,\mathbf{v}'_2)\Big[1 + h(r,\mathbf{v}'_2)\Big] \Rightarrow f'_1 = f'_{02}(1 + h'_2), \tag{A.18}$$

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}_1) = f_0(r,\mathbf{v}_1)\Big[1 + h(r,\mathbf{v}_1)\Big] \Rightarrow f_1 = f_{01}(1 + h_1) \tag{A.19}$$

e

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}_2) = f_0(r,\mathbf{v}_2)\Big[1 + h(r,\mathbf{v}_2)\Big] \Rightarrow f_2 = f_{02}(1 + h_2). \tag{A.20}$$

Ainda fazendo

$$A = f(\mathbf{r},\mathbf{v}'_1).f(\mathbf{r},\mathbf{v}'_2) = (f'_{01} + f'_{01}h'_1)(f'_{02} + f'_{02}h'_2) \tag{A.21}$$

e

$$B = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1).f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2) = (f_{01} + f_{01}h_1)(f_{02} + f_{02}h_2), \tag{A.22}$$

sendo a diferença entre A e B,

$$A - B = f'_{01}f'_{02} - f_{01}f_{02} + f'_{01}f'_{02}h'_2 - f_{01}f_{02}h_2 + f'_{01}f'_{02}h'_1 - f_{01}f_{02}h_1 + f'_{01}f'_{02}h'_1h'_2 - f_{01}f_{02}h_1h_2. \tag{A.23}$$

Segundo Williams [Williams, 1971], negligenciam-se termos da ordem de $O(h^2)$ e usa-se a propriedade $f'_{01}f'_{02} = f_{01}f_{02}$ e assim a diferença entre A e B pode ser reescrita na forma

$$A - B = f'_{01}f'_{02}h'_2 - f_{01}f_{02}h_2 + f'_{01}f'_{02}h'_1 - f_{01}f_{02}h_1 \tag{A.24}$$

com isso notando-se a Eq. (A.12) e (A.24) reescreve-se as Eqs. (A.1) como:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_{01} + f_{01}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h = \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1 : \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2)\Big[f_{01}f_{02}h'_2 - f_{01}f_{02}h_2 + f_{01}f_{02}h'_1 - f_{01}f_{02}h_1\Big]. \tag{A.25}$$

Colocando f_{01} em evidência no lado direito da equação (A.25) tem-se

$$\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_{01} + f_{01}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h = f_{01} \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2)\Big[f_{02}h'_2 - f_{02}h_2 + f_{02}h'_1 - f_{02}h_1\Big], \tag{A.26}$$

ainda pode-se reescrever a Eq. (A.26) como:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_{01} + f_{01}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h = {} & f_{01} \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) f_{02}h'_1 \\ & + f_{01} \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) f_{02}h'_2 \\ & - f_{01} \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) f_{02}h_2 \\ & - f_{01} \int d\mathbf{v}'_1 \int d\mathbf{v}'_2 \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}'_1; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}'_2) f_{02}h_1,\end{aligned} \tag{A.27}$$

rescrevendo a equação anterior

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_{01} + f_{01}\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h = f_{01}\Big[- h_1 \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} \\
+ \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_1' \\
+ \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(v_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2' \\
- \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2 \Big].
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Define-se então:

$$V(\mathbf{v}_1) = \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} \tag{A.29}$$

onde $V(\mathbf{v}_1)$ é a freqüência de colisão e

$$\begin{aligned}
\int dv_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') = \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_1' \\
+ \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2' \\
- \int d\mathbf{v}_1' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2 \Big]
\end{aligned} \tag{A.30}$$

onde $H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1')$ é o núcleo de colisão. Ainda para a equação (A.30) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') = \int d\mathbf{v}_1' \Big[\int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_1' \\
+ \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2' \\
- \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2 \Big],
\end{aligned} \tag{A.31}$$

neste momento pode-se mostrar que o segundo termo do lado direito da equação anterior é igual ao primeiro usando as propriedades dadas nas equações (A.3), (A.4) e (A.5) e fazendo-se $\mathbf{v}_1' \leftrightarrow \mathbf{v}_2'$. Com isso tem-se que $h_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2') = h_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1')$ e, assim, pode-se reescrever a Eq. (A.31) na forma

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') = \int d\mathbf{v}_1' \Big[2 \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_1' \\
- \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_2 \Big],
\end{aligned} \tag{A.32}$$

no segundo termo do lado direito da equação anterior muda-se $\mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_1'$ e assim

$$W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') = W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1' \to \mathbf{v}_2'), \quad f_{02} = f_{01}' \quad \text{e} \quad h_2 = h_1' \tag{A.33}$$

com isso a Eq. (A.32) torna-se:

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') = \int d\mathbf{v}_1' \Big[2 \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} h_1' \\ - \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1' \to \mathbf{v}_2') f_{01}' h_1' \Big].\end{aligned} \tag{A.34}$$

Reescrevendo a equação anterior tem-se

$$\begin{aligned}\int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') = \int d\mathbf{v}_1' \Big[2 \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} \\ - f_{01}' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1' \to \mathbf{v}_2') \Big] h_1',\end{aligned} \tag{A.35}$$

onde

$$\begin{aligned}H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') = 2 \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1'; \mathbf{v}_2 \to \mathbf{v}_2') f_{02} \\ - f_{01}' \int d\mathbf{v}_2' \int d\mathbf{v}_2 W(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1' \to \mathbf{v}_2').\end{aligned} \tag{A.36}$$

Substituindo as Eqs. (A.29) e (A.35) na Eq. (A.28) resulta

$$\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) + f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h_1 = -f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) \Big[V(\mathbf{v}_1) h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) - \int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') \Big] \tag{A.37}$$

onde $H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1')$ é dado na Eq. (A.36) e $V(\mathbf{v}_1)$ é dado na Eq. (A.29). Dividindo a equação anterior por $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)$ obtém-se:

$$\frac{\mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)}{f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1)} + \mathbf{v}_1 \cdot \bigtriangledown_r h_1 = -\Big[V(\mathbf{v}_1) h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) - \int d\mathbf{v}_1' H(\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_1') h(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1') \Big]. \tag{A.38}$$