

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos
Finitos**

Jorge Luis Palomino Tamayo

Porto Alegre
2011

JORGE LUIS PALOMINO TAMAYO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia

Porto Alegre
2011

CIP - Catalogação na Publicação

Tamayo, Jorge Luis Palomino
Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos
Elementos Finitos / Jorge Luis Palomino Tamayo. --
2011.
xvi, 147 f.

Orientador: Inácio Benvegno Morsch.
Coorientador: Armando Miguel Awruch.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre, BR-
RS, 2011.

1. Vigas mistas. 2. Elementos finitos. 3.
Concreto armado. 4. Estruturas de aço. I. Morsch,
Inácio Benvegno, orient. II. Awruch, Armando
Miguel, coorient. III. Título.

JORGE LUIS PALOMINO TAMAYO

**ANÁLISE NUMÉRICA DE VIGAS MISTAS PELO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, Área de Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 25 de março de 2011

Prof. Inácio Benvegnu Morsch
Dr. PPGEC/UFRGS
Orientador

Prof. Armando M. Awruch
Dr. COPPE/UFRJ
Co-orientador

Prof. Luiz Carlos Pinto da Silva Filho
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Profa. Virginia Maria Rosito d'Avila (UFRGS)
Dra. PPGEC / UFRGS

Prof. Herbert Martins Gomes (UFRGS)
Dr. PROMEC / UFRGS

Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco (UERJ)
PhD. pela Imperial College of Science Technology and Medicine
University of London (UK)

Dedico este trabalho a minha esposa, meus pais e meus
irmãos pela compreensão durante o período de seu
desenvolvimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por brindar o conhecimento e a sabedoria necessária para culminar esta dissertação.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES pela bolsa de estudos que possibilitou a minha total dedicação aos meus estudos para alcançar um dos objetivos importantes de minha vida.

Ao Professor Inácio Benvegno Morsch, pelas orientações e disponibilidade que sempre mostrou durante a realização deste trabalho e a amizade brindada.

Agradeço especialmente ao Professor Armando M. Awruch, pelas orientações brindadas e pelo apoio recebido para que minha estada na UFRGS seja a melhor possível.

Ao Professor Victor Sanchez Moya, Director do Instituto de Pesquisas da Universidade Nacional de Engenharia (UNI), pelo apoio para que meus estudos na UFRGS fossem possíveis.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC/UFRGS pelos conhecimentos brindados. Um agradecimento especial aos professores: Eduardo Bittencourt, Virginia M. R. d'Avila e João Massuero.

Aos professores Graziano Leoni, Nofal Mostafa e Hong Hao, pelos comentários e respostas a minhas dúvidas.

Aos colegas e amigos da pós-graduação, Paulo, Carla, Vitor, Claudia, Paula, Marcelo e Débora pela convivência agradável.

Agradeço aos meus pais Jorge e Elena, e meus irmãos Martin, Carlos e Elena do Rosário pelo apoio constante e conselhos para a realização deste trabalho.

Agradeço a minha esposa Karena pelo apoio brindado e por todo seu amor. Por sempre estar connigo sem perguntas em todo momento.

RESUMO

PALOMINO, T.J. Análise Numérica de Vigas Mistas pelo Método dos Elementos Finitos. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

O emprego das vigas mistas na atualidade é uma das opções atrativas para a construção de pontes e das lajes dos andares de prédios. A obtenção das melhores características individuais em resistência e rigidez dos materiais envolvidos é aproveitada neste tipo de estruturas. O presente trabalho visa à formulação de um modelo matemático e sua implementação numérica através de um código computacional capaz de representar com confiabilidade este tipo de estruturas para cargas de curta duração. Assim é utilizada a teoria de plasticidade associada com um algoritmo de retorno explícito para o concreto e o aço estrutural, sendo inserido estes procedimentos dentro de um processo incremental iterativo baseado num critério de convergência de forças ou deslocamentos. Para a modelagem da laje de concreto é desenvolvido o elemento finito quadrilátero de casca degenerada de oito nós, que considera as tensões de corte fora do plano, usando a teoria de Reissner-Mindlin. O fenômeno de travamento por cortante, característico neste tipo de elemento finito, é solucionado usando uma regra de integração reduzida e uma modificação do fator de forma aplicado às tensões de corte. Para a modelagem da viga de aço foi implementado um elemento de casca poliédrica produto do acoplamento das rigidezes do elemento de placa delgada e de membrana proposto por Batoz & Tahar (1982) e Ibrahimbegovic et al. (1990), respectivamente. Os conectores de corte são modelados mediante elementos de barra tridimensional viga-coluna que unem os planos médios da laje de concreto e mesa superior da viga de aço nas posições reais dos conectores de corte de acordo com os relatórios experimentais para os exemplos estudados. A compatibilidade nas rotações e deslocamentos axiais no conector é conseguida mediante a inclusão de valores muito grandes nas rigidezes correspondentes. O trabalho em conjunto dos três elementos desenvolvidos, laje de concreto, viga de aço e conectores, possibilita a abordagem de qualquer estrutura complexa do tipo viga mista. A validação do modelo numérico proposto é demonstrada através dos exemplos de aplicação testados.

Palavras-chave: vigas mistas; elementos finitos; concreto armado; estruturas de aço.

ABSTRACT

PALOMINO, T.J. Numerical Analysis of Composite Beams by the Finite Element Method. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Currently, composite sections are one of the more attractive options to be used for bridge and building floors construction. The reason is that the best individual characteristics in strength and stiffness of the involved materials are obtained for these structures. Formulation of a mathematical model and its numerical implementation for a reliable simulation of these structures for short time analysis is the main objective of the present work. An associated theory of plasticity and an explicit return algorithm for concrete and steel materials are used, being these procedures part of the well known incremental iterative procedure based on criteria of unbalanced forces or displacements. The quadrilateral degenerated shell element of eight nodes, which considers out of plane shear stresses in accordance with Reissner-Mindlin theory was developed to modeling the concrete slab. The shear locking phenomena for these elements was avoided with a reduced integration rule and by using a modified shape factor for shear stresses. For modeling the steel beam, a plane shell element, which is originated by the assemble of the plate element and membrane element proposed by Batoz & Tahar (1982) and Ibrahimbegovic et al. (1990) was formulated. The shear stud connectors were modeled through a three-dimensional bar element, which joint the middle plane of the concrete slab and the middle plane of the top steel flange of the steel beam representing the actual positions of the connectors, according to the experimental works for the examples studied here. These three elements, working simultaneously allow to model any complex structure of composite section. The validation of the numerical model is demonstrated with the aid of several examples.

Key-words: composite beams; finite elements; reinforced concrete; steel structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Superfície de escoamento definida no espaço das tensões principais.....	10
Figura 2.2: Representação unidimensional do diagrama tensão-extensão dos diferentes modelos usados para o concreto	13
Figura 2.3: Configurações admitidas para o concreto fissurado	14
Figura 2.4: Definição do referencial da fissura	16
Figura 2.5: Diagrama de retenção de tensões para o concreto fissurado.....	18
Figura 2.6: Diagrama tensão-extensão para o aço a) trilinear b) bilinear.....	19
Figura 2.7: a) Elemento tridimensional sólido quadrático b) Elemento de casca degenerada	21
Figura 2.8: Sistemas de coordenadas a) global e nodal b) sistema de coordenadas local, material e curvilíneo	22
Figura 2.9: Deslocamento num ponto da normal no nó k	25
Figura 2.10: Sistema de eixos para a definição das deformações	26
Figura 2.11: Definição da coordenada curvilínea do elemento de cabo de protensão	31
Figura 2.12: Malha de elementos finitos usada para a laje retangular engastada.....	37
Figura 2.13: Variação do deslocamento central normalizado com a espessura da laje.....	37
Figura 3.1: Critério de escoamento em tração e compressão para o aço.....	45
Figura 3.2: Elemento quadrilátero com grau de liberdade rotacional	47
Figura 3.3: Elemento quadrilátero da placa.....	51
Figura 4.1: Elemento de barra viga-coluna tridimensional para a modelagem do conector	60
Figura 4.2: Conector de corte típico antes e depois da deformação	61
Figura 4.3: Curvas força-deslocamento para os conectores de corte usados no experimento de Chapman & Barakrishanan (1964).....	68
Figura 4.4 Ajuste das curvas força-deslocamento com o modelo exponencial proposto por Yam & Chapman (1972)	68
Figura 5.1: a) Elementos que conformam a viga mista b) Elemento de viga mista montado ..	75
Figura 5.2: Construção da matriz de rigidez de um elemento finito de seção mista.....	76
Figura 6.1: Geometria e armadura na placas de Peter (1966)	78
Figura 6.2: Idealização da placa com o método dos elementos finitos	79
Figura 6.3: Comparação das curvas cargas -deslocamento longitudinal.....	79
Figura 6.4: Comparação das curvas cargas-deslocamento longitudinal.....	80
Figura 6.5: Variação do deslocamento transversal com o ângulo de reforço para um nível de carga de 343 KN	81

Figura 6.6: Geometria das placas	83
Figura 6.7: Idealização das placas em elementos finitos.....	83
Figura 6.8: Diagramas para o espécime B7.....	85
Figura 6.9: Diagramas para o espécime B10.....	86
Figura 6.10: Geometria e seção transversal das vigas A-3 e B-3.....	88
Figura 6.11: Curvas numéricas e experimentais para a viga A-3.....	90
Figura 6.12: Curvas numéricas e experimentais para a viga B-3.....	90
Figura 6.13: Geometria e modelo de elementos finitos para as placas.....	93
Figura 6.14: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S1 para a deflexão no centro da placa	94
Figura 6.15: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S2 para a deflexão no centro da placa	94
Figura 6.16: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S3 para a deflexão no centro da placa	95
Figura 6.17: Configuração de fissuração para uma carga de 11.4 kN.....	96
Figura 6.18: Configuração de fissuração para uma carga de 15 kN.....	96
Figura 6.19: Configuração de fissuração para uma carga de 35.4 kN.....	97
Figura 6.20: Configuração de fissuração para uma carga de 55.2 kN.....	97
Figura 6.21: Geometria, reforço e idealização em elementos finitos da placa de Mcniece	98
Figura 6.22: Deslocamento vertical no nó 3 para apoio livre.....	100
Figura 6.23: Deslocamento vertical no nó 3 para apoio fixo.....	100
Figura 6.24: Geometria e condições de carga da coluna	101
Figura 6.25: Curva força-deslocamento na seção intermédia.	102
Figura 6.26: Geometria da viga e malha de elementos finitos	103
Figura 6.27: Curva carga-deslocamento na seção extrema não engastada.....	104
Figura 6.28: Geometria da placa	105
Figura 6.29: Curva carga-deslocamento vertical no ponto A.....	106
Figura 6.30: Geometria da casca cilíndrica	107
Figura 6.31: Curva-carga deslocamento vertical no ponto A.....	107
Figura 6.32: Seção transversal da viga mista e forças aplicadas num extremo.....	108
Figura 6.33: Malha de elementos finitos para a viga em estudo	109
Figura 6.34: a) Tensões σ_x na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS	110

Figura 6.35: a) Tensões σ_y na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS	111
Figura 6.36: a) Tensões τ_{xy} na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS	112
Figura 6.37: Vista Lateral da viga mista U4.....	114
Figura 6.38: Seção Transversal da viga mista U4	114
Figura 6.39: Malha de elementos finitos utilizada (malha 1).....	115
Figura 6.40: Malha de elementos finitos utilizada (malha 2).....	115
Figura 6.41: Curva carga-deslocamento vertical na seção central obtidas com as malhas 1 e 2	116
Figura 6.42: Curva carga-deslocamento vertical na seção central	117
Figura 6.43: Vista lateral da viga mista E1	118
Figura 6.44: Seção transversal da viga mista E1	118
Figura 6.45: Malha de elementos finitos utilizada no modelo numérico da viga E1	120
Figura 6.46: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga E1.....	120
Figura 6.47: Vista lateral da viga mista CTB4.....	121
Figura 6.48: Seções transversais da viga mista CTB4	122
Figura 6.49: Malha de elementos finitos utilizada para a viga mista CTB4	123
Figura 6.50: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga CTB4	124
Figura C.7.1: Diagrama de fluxo do programa principal	143
Figura C.7.2: Esquerda) diagrama de fluxo rotina de ensablaje da matriz de rigidez global Direita) Diagrama de fluxo da montagem do vetor de forças globais desbalanceadas	144
Figura C.7.3: Esquerda) Diagrama de fluxo para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de casca poliédrica Direita) Diagrama de fluxo para o cálculo do vetor de forças globais do mesmo elemento finito.....	146
Figura C.7.4: Esquerda) Diagrama de fluxo para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de casca degenerada Direita) Diagrama de fluxo para o cálculo do vetor de forças globais do mesmo elemento finito.....	147

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Graus de liberdade globais e nós na estrutura	76
Tabela 5.2: Estrutura de dados de liberdade do elemento	76
Tabela 6.1: Parâmetros para o problema	78
Tabela 6.2: Parâmetros para o problema	82
Tabela 6.3: Propriedades do material para os espécimes	82
Tabela 6.4: Comparação dos momentos de fissuração e momentos de escoamento.....	83
Tabela 6.5: Parâmetros para o problema da viga A-3	87
Tabela 6.6: Parâmetros para o problema da viga B-3.....	87
Tabela 6.7: Comparação das cargas de colapso	89
Tabela 6.8: Parâmetros para o problema das placas.....	92
Tabela 6.9: Comparação das cargas de colapso	92
Tabela 6.10: Parâmetros para o problema da placa.....	99
Tabela 6.11: Parâmetros para o problema da coluna.....	102
Tabela 6.12: Parâmetros para o problema da viga engastada.....	103
Tabela 6.13: Parâmetros para o problema da placa apoiada.....	105
Tabela 6.14: Parâmetros para o problema da casca cilíndrica.....	106
Tabela 6.15: Comparação dos deslocamentos no nó carregado	109
Tabela 6.16: Parâmetros para a viga U4.....	113
Tabela 6.17: Parâmetros para a viga E1	119
Tabela 6.18: Parâmetros para a viga CTB4.....	122

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	v
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	viii
LISTA DE TABELAS.....	xi

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS	1
1.2 JUSTIFICATIVA	1
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.4 BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO.....	6

CAPÍTULO 2

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

ARMADO E PROTENDIDO.....	8
2.1 MODELO PARA O CONCRETO EM COMPRESSÃO	8
2.1.1 Critério de Escoamento	8
2.1.2 Lei de Escoamento	9
2.1.3 Lei de Endurecimento.....	11
2.1.4 Critério de Esmagamento	12
2.2 MODELO PARA O CONCRETO EM TRAÇÃO.....	13
2.2.1 Critério de Fissuração.....	13
2.2.2 Modulo de Elasticidade Transversal para o Concreto Fissurado	17

2.2.3	Diagrama de Retenção de Tensões de Tração	17
2.3	MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO	19
2.4	CONCRETO PROTENDIDO	20
2.5	FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	20
2.5.1	Sistemas de Coordenadas	21
2.5.1.1	Sistema de Coordenadas Global.....	21
2.5.1.2	Sistema de Coordenadas Nodal.....	21
2.5.1.3	Sistema de Coordenadas Curvilíneas	23
2.5.1.4	Sistema de Coordenadas Local.....	23
2.5.2	Geometria e Campo de Deslocamentos.....	24
2.5.3	Definição das Deformações.....	26
2.5.4	Definição das Tensões	30
2.5.5	Formulação para o Concreto Protendido	30
2.5.5.1	Perdas de Protendido	32
2.5.5.2	Forças Nodais Equivalentes e Matriz de Rigidez.....	33
2.5.6	Elemento de Casca Quadrático.....	35
2.5.7	Modelo de Camadas	38
2.5.8	Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Nodais Equivalentes.....	38
2.5.8.1	Cálculo das Forças de Superfície	39
2.6	ALGORITMO NUMÉRICO	40

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PEÇAS ESTRUTURAIS DE AÇO.....	44	
3.1	MODELO PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DO AÇO	44
3.1.1	Critério de Escoamento	44
3.1.2	Lei de Escoamento e Lei de Endurecimento	45
3.2	FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	46
3.2.1	Contribuição da Membrana do Elemento de Casca Plana.....	46
3.2.2	Contribuição da Flexão do Elemento de Casca Plana	50
3.2.3	Matriz de Rigidez de Acoplamento Membrana-Flexão	57
3.2.4	Montagem da Matriz de Rigidez do Elemento.....	58

CAPÍTULO 4

CONECTORES.....	60
4.1 DESCRIÇÃO	60
4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO.....	61
4.3 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA	67

CAPÍTULO 5

MONTAGEM.....	71
5.1 DESCRIÇÃO	71
5.2 ARRANJO PARA OS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ.....	71
5.3 DESIGNAÇÃO DE CÓDIGOS DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ	72
5.4 TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ.....	72
5.5 TABELA DE MAPEAMENTO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ NO SISTEMA DE EQUAÇÕES GLOBAL	73
5.6 DESIGNAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO.....	73
5.7 PROCEDIMENTO DE MONTAGEM E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES	74
5.8 EXEMPLO DE APLICAÇÃO	75

CAPÍTULO 6

APLICACÕES.....	77
6.1 APLICAÇÕES EM CONCRETO ARMADO	77
6.1.1 Placas de Concreto Armado de Peter (1966).....	77
6.1.1.1 Aspectos Gerais.....	77
6.1.1.2 Características geométricas e propriedades dos materiais.....	77
6.1.1.3 Modelo de elementos finitos	78
6.1.1.4 Resultados	79

6.1.2	Placas de Concreto Armado de Cárdenas e Sozen (1968).....	82
6.1.2.1	Aspectos Gerais.....	82
6.1.2.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	82
6.1.2.3	Modelo de elementos finitos.....	82
6.1.2.4	Resultados.....	83
6.1.3	Viga de Concreto Armado de Bresler e Scordelis (1963).....	87
6.1.3.1	Aspectos Gerais.....	87
6.1.3.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	87
6.1.3.3	Modelo de elementos finitos.....	88
6.1.3.4	Resultados.....	89
6.1.4	Placa de Duddeck et al. (1976).....	91
6.1.4.1	Aspectos Gerais.....	91
6.1.4.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	91
6.1.4.3	Modelo de elementos finitos.....	91
6.1.4.4	Resultados.....	92
6.1.5	Placa de Jofriet & Mcniece (1971).....	98
6.1.5.1	Aspectos Gerais.....	98
6.1.5.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	98
6.1.5.3	Discretização em elementos finitos.....	99
6.1.5.4	Resultados.....	99
6.1.6	Coluna de Aroni (1968).....	101
6.1.6.1	Aspectos Gerais.....	101
6.1.6.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	101
6.1.6.3	Discretização em elementos finitos.....	102
6.1.6.4	Resultados.....	102
6.2	APLICAÇÕES EM AÇO ESTRUTURAL.....	103
6.2.1	Viga engastada num extremo e livre no outro.....	103
6.2.2	Placa quadrada.....	104
6.2.3	Casca Cilíndrica.....	106
6.3	APLICAÇÕES DE VIGAS MISTAS DE AÇO.....	108
6.3.1	Análise elástica de viga mista.....	108
6.3.1.1	Aspectos Gerais.....	108
6.3.1.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	108
6.3.1.3	Modelo de elementos finitos.....	108
6.3.1.4	Resultados da análise elástica.....	109
6.3.2	Viga mista U4 testada por Chapman & Balakrishnan (1964).....	113
6.3.2.1	Aspectos Gerais.....	113

6.3.2.2	Características geométricas e propriedades dos materiais	113
6.3.2.3	Modelo de elementos finitos	114
6.3.2.4	Resultados da análise plástica	116
6.3.3	Viga mista E1 testada por Chapman & Balakrishnan (1964).....	117
6.3.3.1	Aspectos Gerais.....	117
6.3.3.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	117
6.3.3.3	Modelo de elementos finitos	118
6.3.3.4	Resultados da análise plástica	119
6.3.4	Viga mista CTB4 testada por Ansourian (1960)	121
6.3.4.1	Aspectos Gerais.....	121
6.3.4.2	Características geométricas e propriedades dos materiais.....	121
6.3.4.3	Modelo de elementos finitos	121
6.3.4.4	Resultados da análise plástica	123

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	125
---	------------

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130
---	------------

APÊNDICE A

A.1 Expressões para o cálculo da matriz de deformação do aço protendido.....	138
---	------------

APÊNDICE B

B.1 Expressões para o cálculo da matriz de deformação do elemento de concreto (não-linearidade geométrica).....	141
--	------------

APÊNDICE C

C.1 Diagramas de fluxos do modelo numérico implementado	143
--	------------

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo apresentar um modelo numérico de elementos finitos que permita representar adequadamente o comportamento de estruturas tipo vigas mistas no regime elástico, de serviço e colapso para cargas de curta duração, considerando a não linearidade física dos materiais envolvidos.

Para conseguir este objetivo é necessário atingir objetivos parciais desde o ponto de vista da implementação numérica. Assim, é necessário desenvolver individualmente a formulação de cada uma das partes que formam a viga mista, ademais de escolher com certeza os tipos de elementos finitos para a modelagem da laje de concreto, viga de aço e conectores de corte.

1.2 JUSTIFICATIVA

Na atualidade as vigas de seção mista apresentam uma solução estrutural atrativa na construção. O uso destas estruturas em pontes e edificações permite, em vários casos, a redução dos custos e a otimização do comportamento estrutural. A principal justificativa para o uso deste tipo de estruturas é devido ao bom desempenho que apresentam para resistir cargas de tração e compressão e ao peso adequado obtido.

É bem conhecido que o concreto resiste tensões altas em compressão, sendo frágil em tração, e o aço é um material dúctil e adequado para resistir cargas em tração e compressão. Portanto resulta ideal utilizar ambos materiais e aproveitar suas propriedades individuais em forma conjunta.

Existem vários métodos de análise, que são usados para modelar estes tipos de estruturas, como o método da banda finita, diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Embora, os êxitos com as aproximações usando elementos finitos unidimensionais tipo viga-coluna, existem situações onde os estados de tensões biaxiais no plano da laje de concreto são significativos e uma representação bidimensional da laje deve ser considerada (Ver Macorini et al., 2006). A existência de distribuições não uniformes das deformações na interface da laje e da viga de aço, fornece o fenômeno bem conhecido na literatura como “shear lag”, que é complexo de modelar, inclusive no campo elástico. As considerações acima justificam a modelagem tridimensional deste tipo de estruturas.

A literatura sobre o tema é ampla a nível internacional, não obstante até a presente data existem poucos trabalhos desenvolvidos no Brasil, que utilizem uma ferramenta computacional particular para fazer uma modelagem tridimensional deste tipo de estruturas, considerando a interação parcial na interface laje-viga (a grande maioria dos autores empregam programas comerciais). Neste trabalho espera-se contribuir ao estudo do tema através do desenvolvimento de um programa computacional de análise.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A modelagem deste tipo de estrutura é complexa devido a várias de suas características presentes, tais como a flexibilidade na interface laje-viga, o comportamento complexo do concreto (principalmente quando existe fissuração) e o comportamento dos conectores de corte. Pode-se considerar, dentro da análise deste tipo de estruturas, uma análise até o colapso ou para cargas de serviço de curta ou longa duração (embora este último aspecto não seja tratado no presente trabalho).

Os primeiros elementos finitos usados para modelar este tipo de estrutura estavam baseados na teoria e hipótese de Euler-Bernoulli para modelos de barra uniaxiais, sendo utilizada a teoria de placas delgadas de Kirchhoff para as partes que forem modeladas com elementos de casca. No caso das análises numéricas, onde a laje de concreto é modelada com elementos de casca, sempre é desejável conhecer as tensões de corte fora do plano da laje, embora estes valores sejam muito pequenos, na maioria destas estruturas. Assim, nestes últimos anos, existe uma maior tendência ao uso de elementos de casca baseados na teoria de Reissner-Mindlin (placa grossa), que em conjunto com algum procedimento numérico evita o problema de travamento (ou “locking”, na terminologia em inglês) devido ao cortante.

Também são usados elementos finitos de propósito gerais que permitem considerar ambas teorias simultaneamente (utilizando-se para placas delgadas e espessas).

Um dos primeiros modelos numéricos desenvolvidos no tema foi proposto por Yam & Chapman (1968) para vigas mistas simplesmente apoiadas e Yam & Chapman (1972) para vigas mistas contínuas, nos quais considera-se a interação parcial na interface. Logo, Hirst & Yeo (1979) utilizaram elementos finitos bidimensionais planos para a modelagem da viga de aço e a laje de concreto. Neste modelo o deslizamento relativo existente na interface laje-viga (conhecido na literatura inglesa como “slip”) é considerado também através de elementos planos com propriedades equivalentes aos conectores. Por outro lado, Razaqpur & Nofal (1988) desenvolveram um elemento de barra tridimensional para modelar o comportamento não-linear dos conectores de corte na interface. No modelo computacional a viga de aço e a laje de concreto foram modeladas com elementos finitos de cascas poliédricas de placa delgada considerando a não linearidade física dos materiais envolvidos. A análise foi realizada até o colapso da estrutura.

Posteriormente, foram desenvolvidos modelos numéricos mais elaborados, os quais podem-se classificar de acordo ao tipo de elemento finito adotado para a laje, para a viga e para os conectores de corte. Dentro dos modelos mais simples, nos quais a viga e a laje são modeladas por elementos viga-coluna conectados em forma flexível mediante molas, estão os denominados modelos unidimensionais. Têm-se as formulações propostas por Salari et al. (1998), Gattesco (1999), Faella et al. (2002), Dall’Asta & Zona (2002), Ranzi et al. (2004), Dall’Asta & Zona (2004a, 2004b), Ranzi et al. (2006), Ranzi & Zona (2007), Ranzi & Bradford (2007), Batista et al. (2007), Sandeep et al. (2007), Sakr & Sakla (2008), Ranzi & Bradford (2009), Queiroz et al. (2009), Quang et al. (2009) e Amilton et al. (2009). Os modelos de Gara et al. (2009), Ranzi & Bradford (2005), Gara et al. (2009) e Jiang et al. (2009), são adequados para análises em longa duração considerando o fenômeno denominado na terminologia em inglês como “shear lag” na laje e a interação parcial na interface.

Existem também modelos nos quais a laje de concreto é modelada com um elemento finito de casca poliédrica e a viga de aço mediante um elemento viga-coluna tridimensional unido por conexões rígidas ou flexíveis. Dentro destes modelos podem-se citar os trabalhos de Sapountzakis & Katsikadelis (2003) e de Macorini et al. (2006). Neste último trabalho, os autores apresentam um modelo tridimensional com análises para cargas de serviço e colapso. O objetivo principal deles é avaliar a formulação proposta por alguns códigos de projeto para

o cálculo da largura efetiva neste tipo de seções. Outros estudos são dirigidos ao cálculo da largura efetiva em condições de serviço e no campo inelástico de curta duração, como os trabalhos de Amadio & Fragiaco (2002), Castro et al. (2007) e o trabalho de Amadio et al. (2004).

Dentro dos modelos mais complexos, que são totalmente tridimensionais, tem-se os trabalhos de Brockenbrough (1986) e Bishara et al. (1993) que apresentam técnicas de modelagem de pontes de seção mista para o cálculo de fatores de distribuição de cargas. Fu & Lu (2003) apresentam um modelo para análise de curta duração em carga de serviço. A laje de concreto é modelada com elementos de casca, as mesas da viga de aço são modeladas com elementos de placa e a alma com elementos de tensão plana.

Em Chung & Sotelino (2006) são apresentadas técnicas de modelagem de pontes de seção mista utilizando uma série de combinações para os diferentes elementos da estrutura usando o programa comercial ABAQUS. A laje é testada considerando elementos de cascas poliédricas baseados na teoria de placa grossa ou elementos sólidos tridimensionais e a viga de aço é modelada totalmente com elementos de casca poliédrica de placa delgada ou considerando, alternativamente, elementos unidimensionais tipo viga-coluna, sendo que a conexão é realizada com enlacs rígidos (conhecido na literatura inglesa como “Multipoint Constrains”). A análise é efetuada até o colapso da estrutura.

Outros investigadores apresentam modelos tridimensionais complexos para a análise até o colapso da estrutura, usando também programas comerciais, como por exemplo, ANSYS ou ABAQUS, como é realizado nos trabalhos de Pitanga (2004), Lam & El-lobody (2005), Liang et al. (2005), Kirchof & Neto (2005), Barth & Wu (2006), Queiroz et al. (2007), David (2007) e Zheng et al. (2009). Thevendran et al. (1999) desenvolveram um modelo numérico em ABAQUS para analisar estruturas mistas curvas em planta até cargas de colapso. A laje e a viga foram modeladas com elementos de casca de placa grossa e delgada, respectivamente. Sendo, estes elementos conectados com elementos de barra rígida. Baskar et al. (2002) pesquisou a resistência última de vigas mistas em momento negativo usando o programa ABAQUS.

Em Sebastian & Mc-Conel (2002), Sebastian (2003) e Sebastian (2005) descreve-se um programa de elementos finitos particular para modelar vigas mistas, onde são utilizadas molas axiais com relações empíricas de deslocamento relativo e força para modelar em forma

discreta os conectores de corte. Um modelo cinemático foi proposto por Fabbrocino et al. (2000) para analisar vigas mistas contínuas com interação parcial. Huang et al. (1999) também descreve um programa de elementos finitos para analisar vigas mistas submetidas ao fogo com interação parcial. Nesse trabalho, a laje de concreto é modelada com elementos de placa grossa, sendo os demais elementos modelados com elementos de barra. A análise foi feita até o colapso da estrutura. Em Oliveira (2007) são desenvolvidos os programas particulares denominados Grecon e PAEST3D para a modelagem de pisos mistos semicontínuos de aço-concreto.

Existem também modelos analíticos que fornecem soluções fechadas que servem de comparação para os modelos numéricos. Em Bradford & Gilbert (1992) estuda-se um modelo teórico para a resposta no tempo para vigas mistas simplesmente apoiadas considerando a interação na interfase. Sobrinho (2002) fornece expressões para o cálculo de deflexões em vigas mistas biapoiadas em condições de serviço para análise de curta ou longa duração. Em Catai (2005) são apresentadas expressões analíticas para o cálculo das tensões na seção transversal de vigas mistas para carregamentos de curta ou longa duração. Ranzi & Bradford (2007) fornecem soluções fechadas para o comportamento de vigas mistas com interação parcial em temperaturas elevadas. Considerem-se também os trabalhos de Girhammar & Gopu (1993) e Xu & Wu (2007).

Além dos elementos usados para a viga e a laje, existe na literatura propostas de elementos de interface para a conexão horizontal deformável, como a apresentada nos trabalhos de Razaqpur & Nofal (1988), Huang et al. (1999), Tristão (2002), Izzudin (2003), Silva (2006), Valente (2007) e Silva et al. (2009).

Recentemente Zona & Ranzi (2011) apresentam modelos uniaxiais com interação parcial. O trabalho deles mostra a importância da inclusão da deformação ao corte na viga de aço e a laje de concreto, especialmente, quando a falha na viga mista é uma falha ao corte da laje ou da viga de aço. A não consideração da deformação ao corte leva a resultados muito diferentes aos obtidos quando estas deformações são incluídas na formulação, como no caso dos elementos de barra baseados nas hipóteses de Timoshenko. Xu & Wu (2007) apresentam também expressões analíticas, que confirmam o fato importante de considerar as deformações por corte na laje de concreto e a viga de aço, quando a razão comprimento/altura da viga mista é pequena.

1.4 BREVE DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho é organizado da seguinte maneira: no capítulo dois é apresentada a teoria de plasticidade associada, destinada a estabelecer os critérios de escoamento, ruptura e fissuração do modelo de concreto armado e protendido de acordo ao critério modificado de Ducker-Prager proposto por Figueiras (1983). Posteriormente é desenvolvida a formulação do elemento finito quadrilátero de casca degenerada de oito nós proposto por Ahmad et al. (1970). Graças a sua formulação Lagrangiana atualizada é possível realizar análises incorporando os efeitos de não-linearidade geométrica e física com maior facilidade. Também, são apresentados procedimentos numéricos para a solução dos problemas com estas não linearidades por um método incremental iterativo baseado num critério de convergência de forças.

Seguindo o mesmo estilo do capítulo anterior, no capítulo três é apresentada também a teoria de plasticidade associada ao critério de Von Mises para o aço estrutural. A formulação do elemento finito de casca poliédrica baseada na teoria de placas delgadas de Kirchhoff é desenvolvida, sendo apenas considerado a não-linearidade física do material para o presente elemento finito.

No capítulo quatro é desenvolvida a formulação do elemento finito de barra tridimensional para a modelagem do conector de corte. A partir das matrizes de rigidez propostas na literatura existente, é considerada uma matriz de rigidez para este elemento, a qual é utilizada no presente trabalho e implementada no código computacional desenvolvido. Também são apresentadas curvas experimentais para o modelo constitutivo do conector de corte, sendo feita uma descrição do algoritmo numérico utilizado para a atualização das forças nodais no conector e de sua matriz de rigidez.

O capítulo cinco apresenta o processo de montagem da matriz de rigidez da estrutura utilizado no código computacional para tratar com elementos finitos de diferente número de nós e diferentes números de graus de liberdade por nó, como os descritos nos capítulos anteriores e desenvolvidos nesse trabalho. São feitas as definições necessárias com respeito ao arranjo dos graus de liberdade em cada elemento. A solução tipo banda é utilizada para armazenar a matriz de rigidez global da estrutura.

No capítulo seis são reunidos os exemplos de aplicação que demonstram a efetividade das ferramentas implementadas. Primeiramente são apresentadas aplicações que comprovam

o funcionamento individual do elemento finito de casca degenerada para a laje de concreto. Elas compreendem análises estáticas não lineares de vigas e placas com camadas ao longo da espessura. Posteriormente são apresentadas três aplicações para testar o funcionamento do elemento finito de casca poliédrica para a viga de aço. Estas aplicações testam individualmente os possíveis estados de tensão que pode estar submetida uma estrutura, sendo eles o comportamento só de membrana, o de flexão fora do plano e a ação conjunta destas. Finalmente são apresentados quatro exemplos de aplicação de vigas mistas. O primeiro deles é um teste no campo elástico para verificar o cálculo dos deslocamentos e as tensões na estrutura. Os três últimos exemplos são usados constantemente na literatura para verificar o comportamento e eficácia do modelo numérico no campo inelástico. Nestes exemplos o código computacional é testado para verificar o comportamento complexo em regiões de momento positivo e negativo, assim como às altas não linearidades físicas que acontecem nos materiais envolvidos devido à fissuração e escoamento do concreto, o escoamento da viga de aço e dos conectores de corte.

CAPÍTULO 2

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO

2.1 MODELO PARA O CONCRETO EM COMPRESSÃO

Para modelar o concreto em compressão utiliza-se a teoria de plasticidade associada que permite uma idealização eficaz do comportamento não-linear do concreto. No estabelecimento das relações constitutivas de tipos incrementais, associados ao modelo elasto-plástico com endurecimento não linear é preciso conhecer as seguintes leis: (i) a lei que estabelece a condição de escoamento; (ii) a lei de escoamento plástico e (iii) a lei de endurecimento.

2.1.1 Critério de Escoamento

O critério de escoamento elasto-plástico é associado à definição de duas superfícies de escoamento que dividem os diversos comportamentos do modelo de concreto considerado, sendo elas as seguintes: (i) a superfície de escoamento inicial, que determina o início da deformação plástica; e (ii) a superfície de escoamento limite que separa o estado com endurecimento não linear e o estado com comportamento elasto-plástico perfeito.

No presente trabalho é considerado que ambas superfícies de escoamento são definidas em base aos invariantes de tensões, I_1 e J_2 (onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões e J_2 é o segundo invariante do tensor das tensões desviadoras), sendo expressas pela função de escoamento $f(I_1, J_2)$ que corresponde a uma variação do critério de Drucker-Prager (Ver Figueiras, 1983 e Ver Cervera et al., 1987) sendo definida pela equação (2.1), que associada ao critério de tensão máxima para o concreto em tração, define o espaço de tensões permitidas para o concreto.

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_o \quad \alpha = 0.355\sigma_o; \beta = 1.355 \quad (2.1)$$

Na equação anterior, σ_o é a tensão efetiva equivalente considerada como a tensão de compressão de um ensaio uniaxial, α e β são parâmetros do material obtidos por ajuste da equação (2.1) a partir dos resultados experimentais de Kupfer et al. (1969). Assim, para caso particular em que $\alpha = 0$ e $\beta = 1.0$ recupera-se a condição bem conhecida para metais de Von Mises. A equação (2.1) pode-se expressar em termos das componentes das tensões no plano estrutural da seguinte maneira:

$$f(\sigma) = \left\{ 1.355 \left[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \right] + 0.355\sigma_o (\sigma_x + \sigma_y) \right\}^{1/2} = \sigma_o \quad (2.2)$$

Quando a superfície de escoamento inicial é atingida e a carga é incrementada, o processo elasto-plástico inicia-se com a subsequente expansão das superfícies de acordo com a lei de endurecimento adotada. Depois que é atingida a superfície limite de escoamento, começa o comportamento elasto-plástico perfeito até que a condição de fratura do concreto em compressão seja verificada. Para detectar esta condição de fratura é considerada adicionalmente uma condição de esmagamento baseada em um critério de deformações.

Na Figura 2.1 apresenta-se a representação em duas dimensões do critério de escoamento no espaço das tensões principais (σ_1, σ_2). Como explicado anteriormente com o carregamento progressivo do material, vão sendo criadas sucessivas superfícies de carga no espaço das tensões que definem a nova condição de escoamento do material. Na Figura 2.1, f_c é a tensão média da resistência à compressão uniaxial do concreto.

2.1.2 Lei de Escoamento

A lei de escoamento plástica relaciona os incrementos de deformações plásticas com o vetor das componentes das tensões a que o material está sujeito. A teoria de plasticidade associada considera que estes incrementos estão na mesma direcção que a derivada da função de escoamento definida pela equação (2.2). O incremento da deformação plástica é definido pela equação (2.3).

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.3)$$

Na equação anterior, $d\lambda$ é a constante de proporcionalidade que determina a magnitude do incremento da deformação plástica e o gradiente $\partial f(\sigma)/\partial \sigma_{ij}$ define sua direcção perpendicular à superfície de escoamento atual. A função de tensões $f(\sigma)$ é a condição de escoamento ou a função de carga atual subsequente no modelo com endurecimento de deformação. As derivadas da função de escoamento, as quais definem o vetor de fluxo plástico $\{a\}$ para a presente superfície de escoamento, são expressas nas equações (2.4) e (2.5). Nestas equações $c = 0.1775$, sendo α e β constantes dos materiais, definidas previamente na equação (2.1).

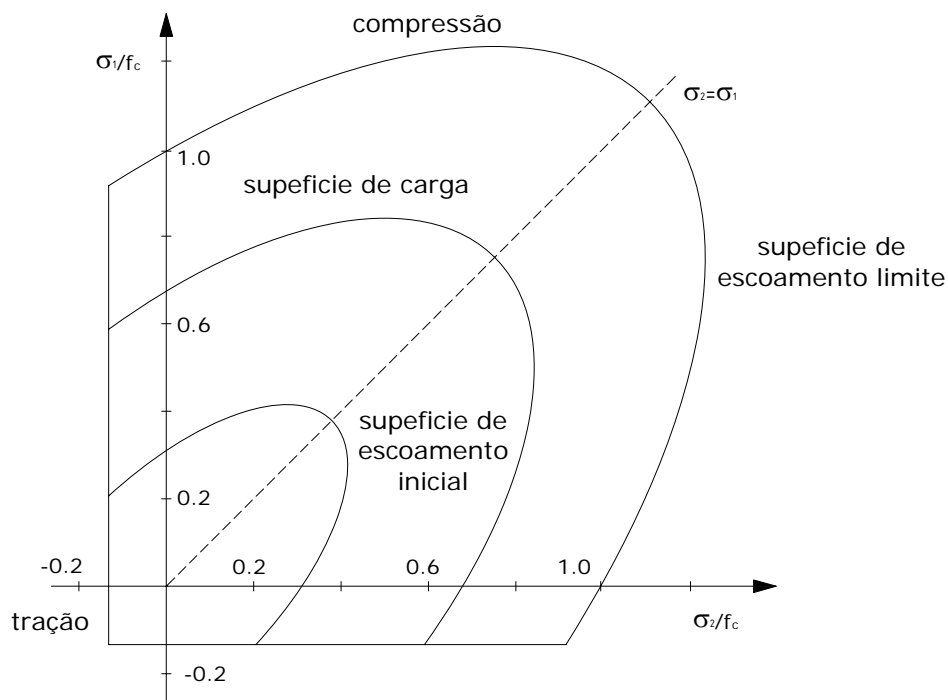


Figura 2.1: Superfície de escoamento definida no espaço das tensões principais

$$\{a\}^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} \right) \quad (2.4)$$

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = c + [2(c^2 + \beta)\sigma_x + (2c^2 - \beta)\sigma_y] / \rho \quad (2.5a)$$

$$a_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = c + [2(c^2 + \beta)\sigma_y + (2c^2 - \beta)\sigma_x] / \rho \quad (2.5b)$$

$$a_3 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = 6\beta\tau_{xy}/\rho \quad (2.5c)$$

$$a_4 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} = 6\beta\tau_{xz}/\rho \quad (2.5d)$$

$$a_5 = \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} = 6\beta\tau_{yz}/\rho \quad (2.5e)$$

$$\rho = 2\left[(c^2 + \beta)\sigma_x^2 + (c^2 + \beta)\sigma_y^2 + (2c^2 - \beta)\sigma_x\sigma_y + 3\beta(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)\right]^{1/2} \quad (2.5f)$$

O valor do multiplicador plástico $d\lambda$ é obtido em detalhe nos trabalhos de Hinton & Owen (1980) e Povoas & Martins (1986), sendo igual:

$$d\lambda = \frac{\{a\}^T [D]}{H' + \{a\}^T [D]\{a\}} \{d\varepsilon\} \quad (2.5g)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade do material, H' é a declividade local da curva deformação plástica e tensão uniaxial definida na equação (2.7) e $\{d\varepsilon\}$ é o vetor de deformações totais. Por outro lado, a relação constitutiva elasto-plástica pode ser expressa em forma diferencial como:

$$\{d\sigma\} = [D]_{ep} \{d\varepsilon\} \quad (2.5h)$$

sendo, $\{d\sigma\}$ o vetor incremental de tensões e $[D]_{ep}$ a matriz elasto-plástica, definida como:

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D]\{a\}\{a\}^T [D]}{H' + \{a\}^T [D]\{a\}} \quad (2.5i)$$

2.1.3 Lei de Endurecimento

A lei de endurecimento define o movimento da superfície de escoamento conforme a deformação plástica aumenta. Considerando o concreto como um material com endurecimento isotrópico, a evolução da superfície de escoamento é expressa mediante a relação:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (2.6)$$

onde $f(\sigma)$ é a função de escoamento definida anteriormente e $\sigma_Y(k)$ representa a tensão de escoamento relacionada ao parâmetro de endurecimento k . Para a presente formulação, o parâmetro k corresponde à deformação plástica efetiva $\bar{\varepsilon}_p$. A deformação plástica efetiva $\bar{\varepsilon}_p$ é calculada utilizando a hipótese de endurecimento do trabalho (Ver Hinton & Owen, 1980), sendo $\bar{\varepsilon}_p$ igual ao multiplicar plástico $d\lambda$ definido pela equação (2.5g).

A definição da tensão e da deformação plástica efetiva permite extrapolar a partir de um espaço multiaxial a um caso uniaxial. Utiliza-se a função de escoamento para o cálculo da tensão efetiva, enquanto a deformação plástica efetiva como estabelecido acima é calculada a partir do conceito de trabalho plástico. Assim, estabelecido o cálculo dos parâmetros efetivos, precisa-se estabelecer uma relação uniaxial, que defina o incremento da tensão efetiva. Nesta etapa utiliza-se a equação parabólica empregada por Figueiras & Povoas (1994), e que vem dada pela equação:

$$\sigma_Y = H(\bar{\varepsilon}_p) = E_c \left[\left(\varepsilon_o + \frac{\varepsilon_o}{\gamma} + \bar{\varepsilon}_p \right) + \left(\frac{\varepsilon_o^2}{\gamma} + \frac{\varepsilon_o^2}{\gamma} + 2 \frac{\varepsilon_o \bar{\varepsilon}_p}{\gamma} \right)^{1/2} \right] \quad (2.7)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade longitudinal inicial, ε_o representa a deformação total correspondente a f_c que é a tensão de fratura do concreto em compressão e $\bar{\varepsilon}_p$ é a deformação plástica efetiva, sendo que γ é um fator igual a 0.96. Na Figura 2.2 é mostrada a representação unidimensional do modelo elasto-plástico perfeito e do modelo com endurecimento não linear. O comportamento em tração com critério de tensão máxima (onde f_t é a resistência à tração máxima do concreto), que será explicado depois, é também apresentado.

2.1.4 Critério de Esmagamento

O critério de esmagamento do concreto em compressão para um estado multiaxial de tensões é considerado simplesmente convertendo o critério de escoamento descrito em termos das tensões diretamente em deformações de acordo com Figueiras & Povoas (1994). Onde I'_1 e J'_2 são os invariantes das deformações e ε_u é a deformação total última extrapolada dos resultados dos ensaios uniaxiais.

$$3J'_2\beta + \alpha I'_1 = \varepsilon_u^2 \quad (2.8)$$

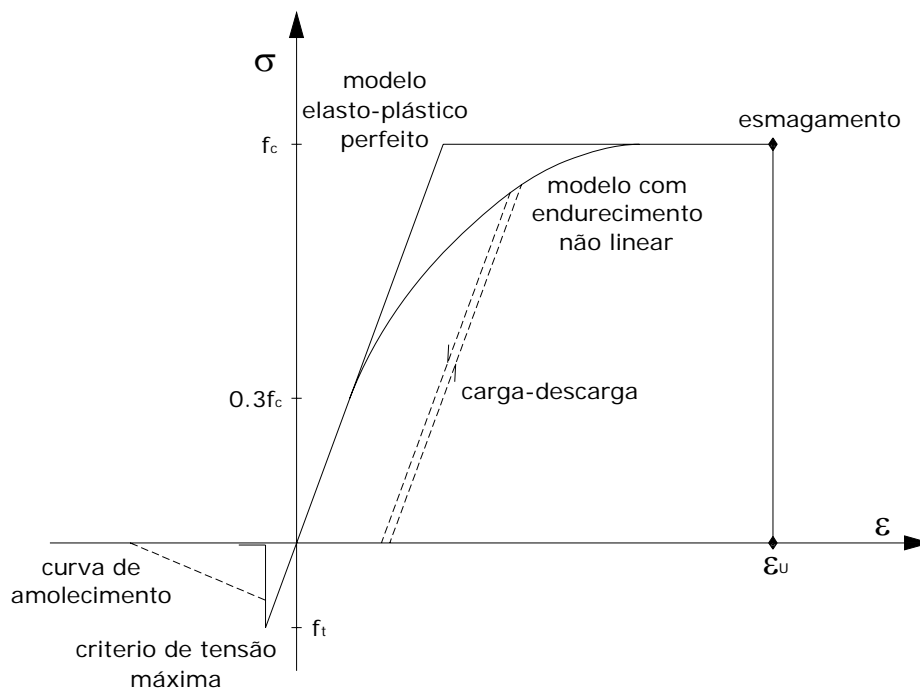


Figura 2.2: Representação unidimensional do diagrama tensão-extensão dos diferentes modelos usados para o concreto

A condição de escoamento é expressa em termos das componentes de deformação como:

$$1.355[(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 - \epsilon_x \epsilon_y) + 0.75(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)] + 0.355\epsilon_u(\epsilon_x + \epsilon_y) = \epsilon_u^2 \quad (2.9)$$

Quando ϵ_u alcança um valor especificado como a deformação última, o material perde todas suas características de rigidez e resistência.

2.2 MODELO PARA O CONCRETO EM TRAÇÃO

2.2.1 Critério de Fissuração

No presente trabalho, o concreto em tração é idealizado com base no conceito de fissuração distribuída. Basicamente, este tipo de aproximação considera a fissuração distribuída na zona de influência associada ao ponto representativo do material. Neste modelo necessita-se apenas que se atualize a relação tensão-deformação após a ocorrência da fissuração, sem necessidade de modificar a malha de elementos finitos original.

O critério de fissuração é formulado considerando o critério de tensão máxima que define a superfície de fratura por tração do concreto. Desta maneira, excedida a tensão de fratura do concreto pela tensão principal máxima instalada no ponto em consideração, admite-se a formação de uma fissura na direcção perpendicular à referida tensão principal, transformando-se posteriormente o concreto num material ortótropo com os eixos de ortotropia coincidentes com as direcções das tensões principais.

No presente modelo é permitida a formação de duas fissuras mutuamente ortogonais para cada ponto do material, mantendo-se a respectiva direcção fixa ao longo do processo de carga, independente das modificações ocorridas nas direcções das tensões principais. Admitem-se as diferentes configurações de fissuração ilustradas na Figura 2.3 (Ver Povoas, 1991 e Ver Povoas & Martins, 1986) e que são estabelecidas com base no valor da extensão instalada segundo a direcção do plano que contem a fissura (o fechamento da fissura é associado a valores negativos da extensão).

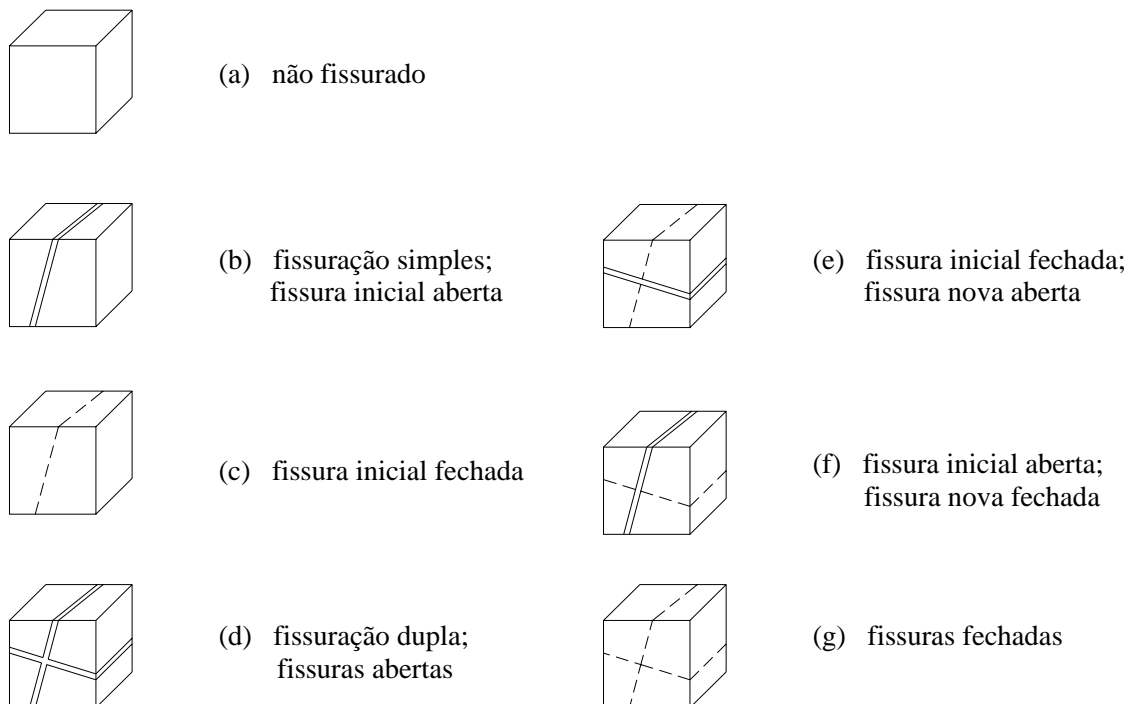


Figura 2.3: Configurações admitidas para o concreto fissurado

As relações constitutivas formuladas para o concreto fissurado são estabelecidas no referencial local (n, t, z') definido a partir do ângulo α_{cr} , que define a orientação das fissuras

(Ver Figura 2.4). Estas relações são expressas em termos de tensões e deformações totais e podem ser representadas genericamente por:

$$[\sigma]_{cr} = [D]_{cr} [\varepsilon]_{cr} \quad (2.10)$$

ou, explicitando, por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \\ \tau_{nz'} \\ \tau_{tz'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mn} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_m & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{nz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{tz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{nz'} \\ \gamma_{tz'} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

onde os módulos de elasticidade indicados, E e G , tomam valores variáveis de acordo com a configuração de fissuração instalada. Tomando como referência as configurações indicadas na Figura 2.3, tem-se:

Concreto não fissurado (configurações (a), (c) e (g)):

$$E_{mn} = E_{nt} = \frac{E_c}{1-\nu^2}, \quad E_m = E_{tt} = \frac{\nu E_c}{1-\nu^2}, \quad G_{nt} = G = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad G_{nz'} = (5/6)G \quad (2.12a)$$

Concreto com a fissura inicial aberta (configurações (b) e (f)):

$$E_{mn} = E_{nt} = E_m = 0, \quad E_{tt} = E_c, \quad G_{tz'} = (5/6)G, \quad G_{nt} = G_{nz'} = \beta_n G \quad \text{com} \quad \beta_n \quad \text{definido nas} \quad (2.12b)$$

equações (2.16) e (2.17)

Concreto com a segunda fissura aberta (configurações (e)):

$$E_{tt} = E_{nt} = E_m = 0, \quad E_{mn} = E_c, \quad G_{nz'} = (5/6)G, \quad G_{nt} = G_{tz'} = \beta_t G \quad \text{com} \quad \beta_n \quad \text{definido nas} \quad (2.12c)$$

equações (2.16) e (2.17)

Concreto com as duas fissuras abertas (configurações (d)):

$$E_{tt} = E_{nt} = E_m = E_{tt} = 0, \quad G_{nt} = \frac{1}{2} \beta_{nt} G \quad \text{com} \quad \beta_{nt} = \text{MIN}(\beta_n, \beta_t), \quad G_{nz'} = \beta_n G \quad \text{e} \quad (2.12d)$$

$G_{tz'} = \beta_t G$

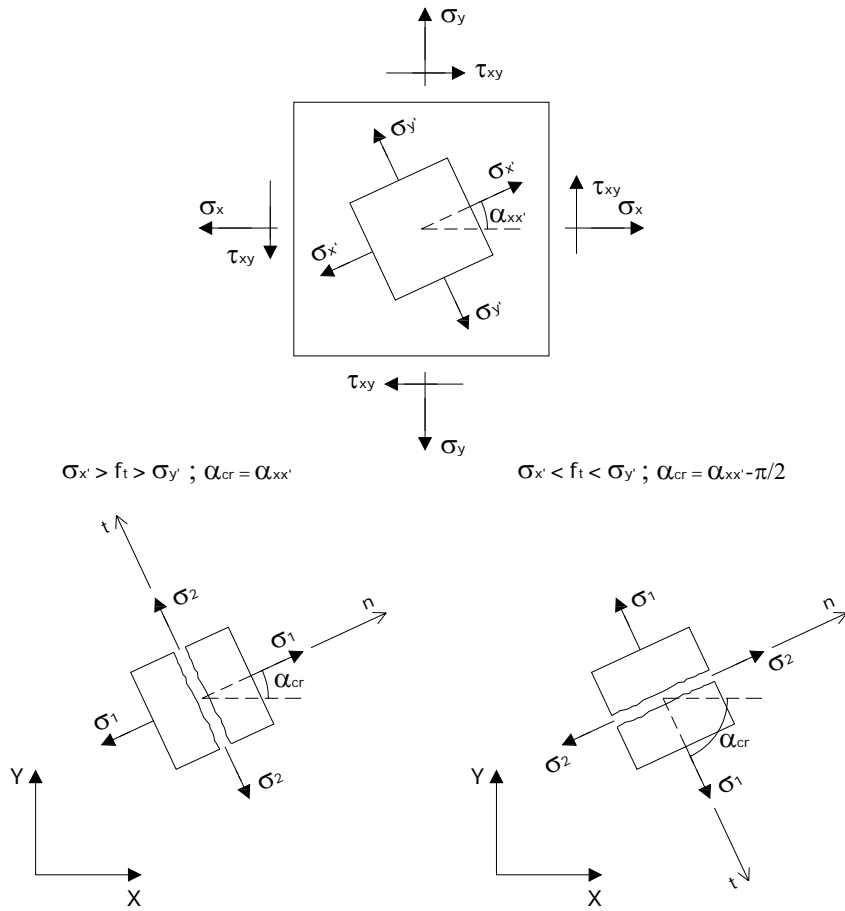


Figura 2.4: Definição do referencial da fissura

As relações indicadas definem a matriz constitutiva, $[D]_{cr}$, a ser considerada na determinação da contribuição do concreto fissurado para a formação da matriz de rigidez da estrutura. Após torna-se necessária a transformação dos eixos de referencia da fissura (n, t, z') para o referencial local (x', y', z') através da relação usual:

$$[D] = [T]^T [D_{cr}] [T] \quad (2.13)$$

onde a matriz de transformação $[T]$ vem definida por:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{nt} \\ \gamma_{nz'} \\ \gamma_{tz'} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

com,

$$s = \text{sen} \alpha_{cr} \text{ e } c = \text{cos} \alpha_{cr} \quad (2.15)$$

2.2.2 Modulo de Elasticidade Transversal para o Concreto Fissurado

A engrenamento que se estabelece entre as faces das fissuras, bem como na presença de armaduras, a rigidez ao corte e à flexão das armaduras que as atravessam, são fenômenos que contribuem de forma significativa para a capacidade evidenciada pelo concreto fissurado na condução de forças de corte. Testes experimentais indicam que a largura da fissura é um fator determinante, na quantificação da rigidez ao corte a atribuir ao concreto fissurado. A solução adotada no modelo de fissuração considera uma redução gradual daquele módulo definida através do coeficiente de retenção da rigidez ao corte, β_n , incluído nas relações (2.12). Expressando este coeficiente em termos da extensão aparente de tração normal ao plano da fissura ε_n e adotando a aproximação linear usada por Figueiras (1983), tem-se:

$$\beta_n = 0.25 \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{sr}} \right) \text{ para } \varepsilon_n < \varepsilon_{sr} \quad (2.16)$$

com,

$$\beta_n = 0 \text{ para } \varepsilon_n \geq \varepsilon_{sr} \quad (2.17)$$

O valor de ε_{sr} para objetivos práticos toma os valores entre (0.003-0.005). Finalmente, na hipótese de se verificar o fechamento total da fissura, admite-se a ocorrência de um contacto perfeito entre as respectivas superfícies de fratura, repondo-se, em consequência, o módulo de elasticidade transversal, G , inicialmente estabelecido para o concreto não fissurado.

2.2.3 Diagrama de Retenção de Tensões de Tração

A aderência que se estabelece entre o concreto e a armadura é responsável pela capacidade de retenção das tensões normais de tração atribuída ao concreto fissurado (Ver Gilbert & Warner, 1978). Este efeito é modelado indiretamente através da relação estabelecida entre as componentes normais dos estados de tensão e de deformação coincidentes com a direcção do plano da fissura, que é ilustrada pelo diagrama representado na Figura 2.5a. A adoção do diagrama mostrado restringe-se naturalmente a regiões da estrutura onde a interação entre o concreto e a armadura permite mobilizar o mecanismo de aderência que fundamenta a adoção do diagrama (Ver Povoas 1991).

Em estruturas de concreto simples ou onde o concreto encontra-se fora da zona da influência da armadura, o diagrama ilustrado é substituído por um diagrama tensão-extensão definido com base num critério energético de propagação de fissuras que assegure a objetividade da solução relativamente à malha de elementos finitos utilizada (Ver Figura 2.5b). Basicamente, a aproximação referida considera como parâmetros característicos do material a energia de fratura, G_f , e a forma do ramo descendente incluído no diagrama de tensão-extensão normal de tração.

Na Figura 2.5 f_t é a resistência máxima à tração do concreto, E_c é o módulo de elasticidade do concreto, ε_{ct} é a deformação correspondente à máxima tração f_t . Na Figura 2.5a, ε_{tm} é a máxima deformação em função do grau do mecanismo de aderência considerado entre o concreto e a armadura, tomando para α um valor entre 0.5-0.7. Na Figura 2.5b, o valor de ε_{tm} é calculado em função da energia de fratura G_f e a espessura da peça de concreto h (Ver Povoas, 1991).

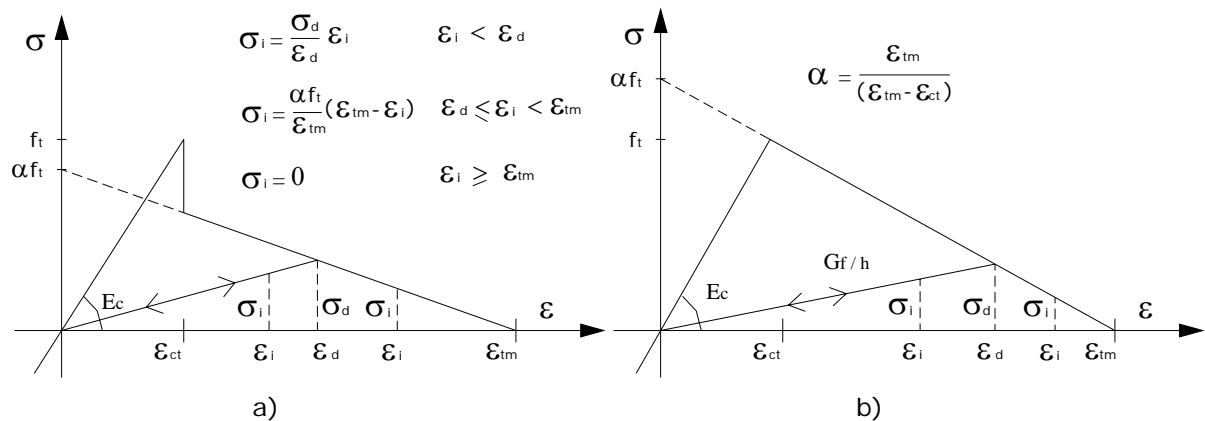


Figura 2.5: Diagrama de retenção de tensões para o concreto fissurado

O valor da tensão normal σ_i , para situações correspondentes à abertura da fissura representadas na Figura 2.5 vem expressos pelas equações mostradas na mesma figura para um valor determinado da deformação corrente no concreto ε_i , segun a direcção da fissura. É importante estabelecer que um valor negativo da deformação ε_i representa o fechamento total da fissura, reponiendo-se o valor do modulo de elasticidade E_c no processo numérico. Isto é, considerado na equação (2.12).

2.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO

Nas estruturas de concreto estrutural, as barras de aço resistem fundamentalmente às forças axiais. Deste modo, faz-se necessário só considerar modelos uniaxiais para descrever o comportamento do material. No modelo computacional desenvolvido, implementou-se um diagrama tensão-extensão bi-linear ou tri-linear para o aço convencional ou protendido (Ver Figura 2.6) conforme vários códigos de projeto. Na Figura 2.6, E_s é o módulo elástico do aço, E'_s é a inclinação no segundo tramo da curva e E''_s é a inclinação no terceiro tramo. A descarga pode acontecer, seguindo a inclinação inicial E_s da curva (Ver Hinton & Owen, 1984).

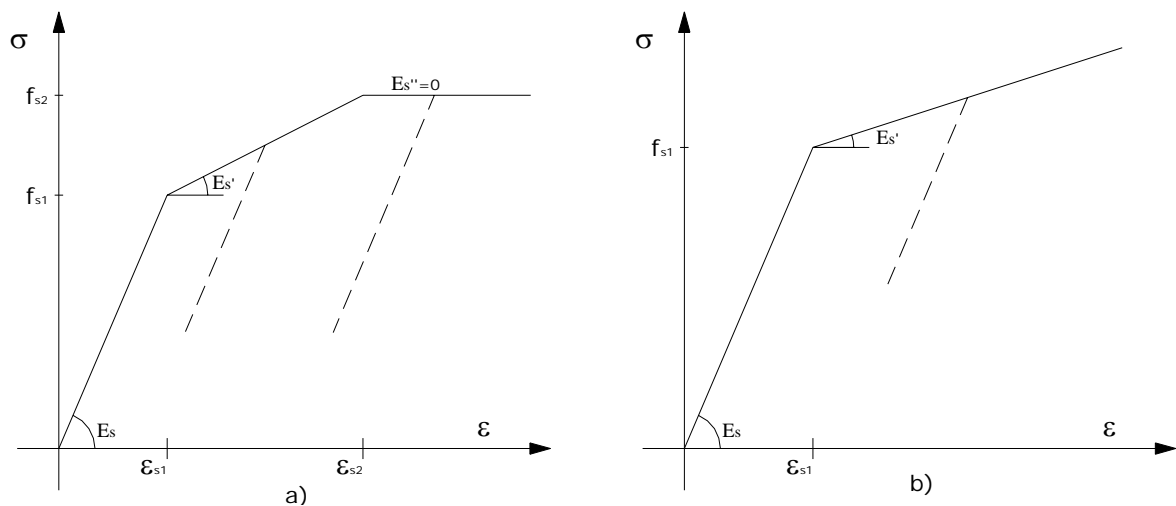


Figura 2.6: Diagrama tensão-extensão para o aço a) trilinear b) bilinear

O cálculo do incremento da tensão axial do aço é conseguida a partir das tensões atuantes no sistema local do ponto de integração correspondente. Isto é, mediante uma transformação das tensões atuantes neste sistema coordenado para o sistema material (armaduras distribuídas). No caso dos cabos de protensão, a formulação própria deste elemento permite obter diretamente o valor da tensão axial no cabo. Obtidos estes incrementos de tensões, é utilizado um algoritmo preditor-corretor elasto-plástico que permite corrigir as tensões para satisfazer as equações constitutivas mostradas na Figura 2.6. É importante estabelecer que a forma do diagrama de aço adoptado influi na resposta da estrutura, sendo esta resposta geralmente representada por curvas deslocamento-força, como as apresentadas no exemplo de concreto armado no capítulo seis

2.4 CONCRETO PROTENDIDO

A fissuração no concreto em tração pode acontecer na laje das vigas mistas especialmente nas zonas de apoio ou momento negativo. Com a finalidade de eliminar tal fissuração utiliza-se o concreto protendido nestas zonas. Assim, o modelo numérico desenvolvido requer modelar a ação da protensão.

Dependendo do modo da transferência da tensão ao cabo, é necessário fazer a distinção entre elementos pré-tensionados e pós-tensionados e a consideração das perdas respectivas. O presente modelo numérico incorpora estas duas técnicas considerando aderência perfeita entre o cabo de protensão e o concreto da laje.

A modelagem dos cabos é feita de modo discreto, distinto da armadura convencional. Os elementos de treliça utilizados para representar os cabos de protensão encontram-se incorporados no elemento finito de concreto. O tratamento numérico é similar ao das armaduras convencionais, sendo que a diferença está principalmente no cálculo de ações nodais equivalentes devido às tensões instaladas nos cabos de protensão. Assim, consideram-se estas últimas ações conjuntamente com as cargas de peso próprio da estrutura no início do processo incremental iterativo elasto-plástico.

2.5 FUNDAMENTOS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A Figura 2.7 mostra um elemento de sólido tridimensional baseado num campo de deslocamentos quadrático. A Figura 2.7 e a Figura 2.8a ilustram o elemento de casca degenerado. Na Figura 2.8b observam-se os sistemas de coordenadas local, material e curvilíneas. Duas suposições básicas são consideradas no processo de desenvolvimento. Em primeiro lugar, supõe-se que em camadas grossas, normais à superfície, permanecem praticamente retas depois da deformação. Em segundo lugar, a energia de deformação correspondente à componente da tensão perpendicular à superfície média do elemento finito não é considerada.

Cinco graus de liberdade são especificados em cada ponto nodal que corresponde aos três deslocamentos e às duas rotações da normal em cada nó. A definição da independência rotacional e dos deslocamentos dos graus de liberdade permite a consideração das

componentes transversais da tensão de corte. Esta aproximação equivale a usar a teoria geral de cascas e se reduz à hipótese de Reissner & Mindlin aplicados a placas.

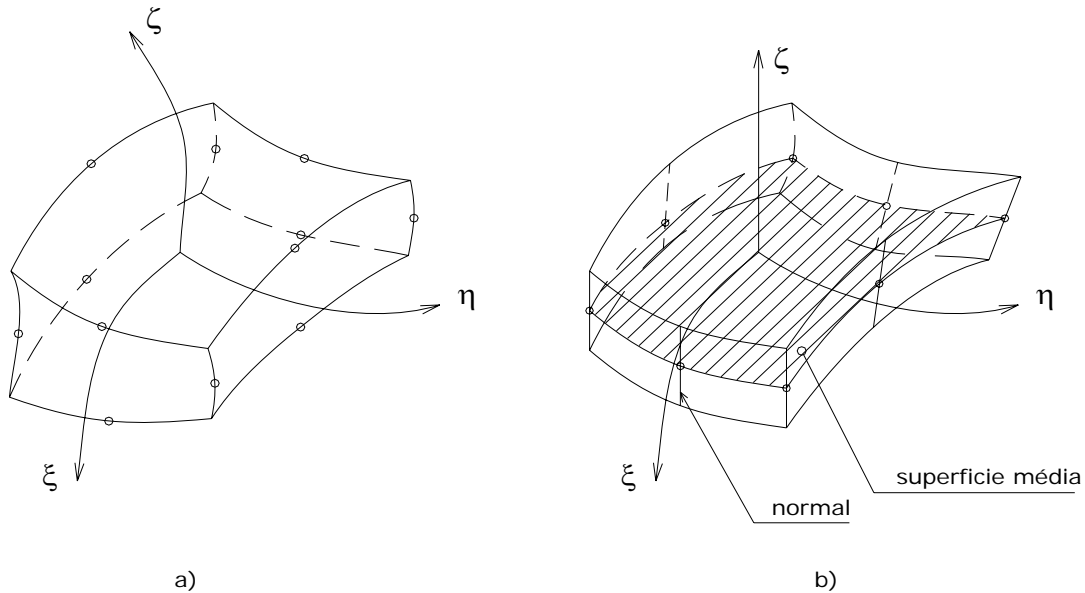


Figura 2.7: a) Elemento tridimensional sólido quadrático b) Elemento de casca degenerada

2.5.1 Sistemas de Coordenadas

Na formulação dos elementos finitos de casca degenerados, diferentes sistemas de coordenadas devem ser definidos.

2.5.1.1 Sistema de Coordenadas Global

Este sistema é selecionado em forma arbitrária em relação à geometria da estrutura definida no espaço. As coordenadas e deslocamentos dos nós, a matriz de rigidez global e vetor de forças aplicadas são referidos a este sistema. A seguinte notação é utilizada:

$$x_i \quad (i=1,3) ; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$u_i \quad (i=1,3) ; u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w \quad (2.18)$$

$\{x\}_i \quad (i=1,3)$ é um vetor unitário na direção x_i

2.5.1.2 Sistema de Coordenadas Nodal

O sistema de coordenadas nodal é definido em cada nó do elemento finito com origem na superfície de referência, que na presente formulação corresponde à superfície média (Ver

Figura 2.8a). O vetor $\{V\}_{3k}$ é obtido desde as coordenadas nodais da superfície superior e inferior do nó k .

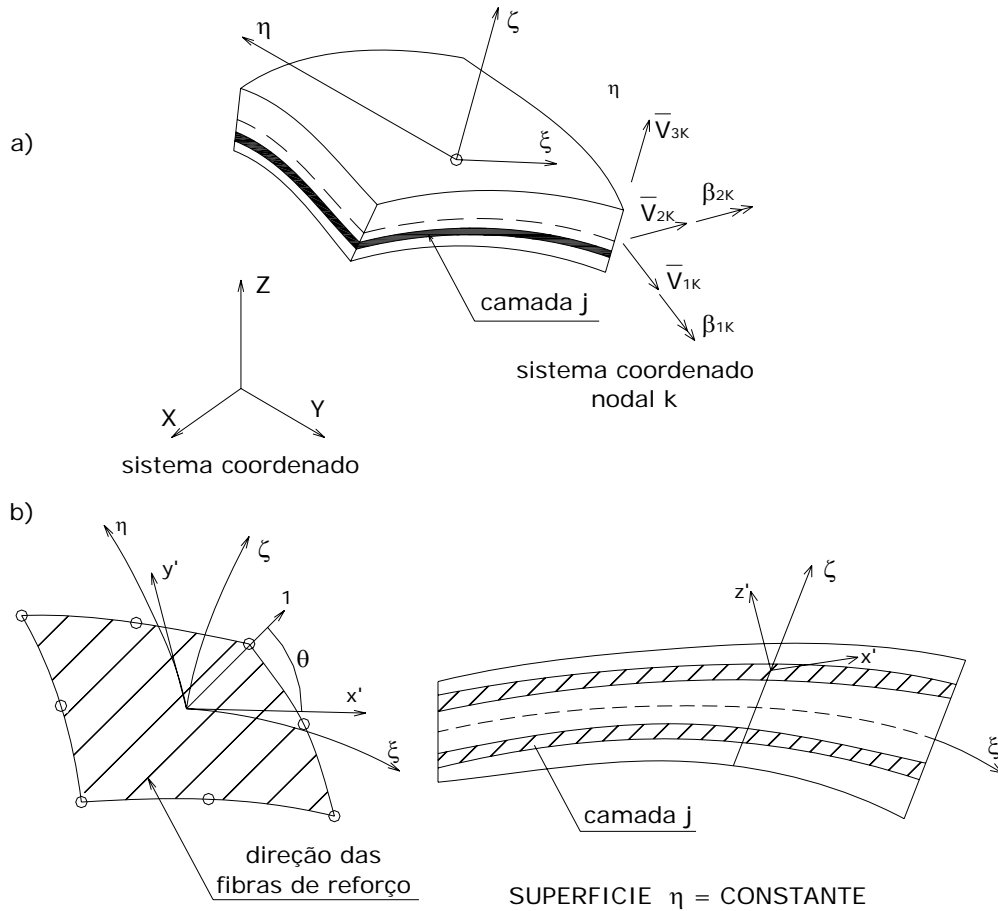


Figura 2.8: Sistemas de coordenadas a) global e nodal b) sistema de coordenadas local, material e curvilíneo

$$\{V\}_{3k} = \frac{\{x\}_k^{\text{sup}} - \{x\}_k^{\text{inf}}}{|\{x\}_k^{\text{sup}} - \{x\}_k^{\text{inf}}|}, \quad \{x\}_k = [x_k \quad y_k \quad z_k]^T \quad (2.19)$$

onde o vetor $\{V\}_{1k}$ é perpendicular ao vetor unitário $\{V\}_{3k}$ e paralelo ao plano global xz

$$\{V\}_{1k} = \frac{\begin{bmatrix} V_{3k}^z & 0 & -V_{3k}^x \end{bmatrix}^T}{\left| \begin{bmatrix} V_{3k}^z & 0 & -V_{3k}^x \end{bmatrix}^T \right|} \quad (2.20)$$

Se o vetor $\{V\}_{3k}$ esta na direcção y ($V_{3k}^x = V_{3k}^z = 0.0$) tem-se

$$\{V\}_{1k} = \frac{\begin{bmatrix} -V_{3k}^y & 0 & 0 \end{bmatrix}^T}{\left| \begin{bmatrix} -V_{3k}^y & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right|} \text{ (na direcção } x \text{)} \quad (2.21)$$

onde os sobrescritos são referidos às componentes dos vetores no sistema de coordenadas global. O vetor $\{V\}_{2k}$ é perpendicular ao plano definido pelos vetores $\{V\}_{1k}$ e $\{V\}_{3k}$, ou seja que

$$\{V\}_{2k} = \{V\}_{3k} \times \{V\}_{1k} \quad (2.22)$$

2.5.1.3 Sistema de Coordenadas Curvilíneas

Neste sistema ξ, η representam as coordenadas curvilíneas no plano médio do elemento degenerado e ζ é a coordenada linear na direcção da espessura. Presume-se que ξ, η e ζ variam entre -1 e +1 nas respectivas faces do elemento. Deve-se notar que a direcção ζ é aproximadamente perpendicular à superfície média do elemento (Ver Figura 2.8b).

2.5.1.4 Sistema de Coordenadas Local

Este sistema cartesiano se define nos pontos de integração onde as tensões e as deformações são calculadas (Ver Figura 2.8b). A direcção x'_3 (ou z') é perpendicular à superfície constante ζ , sendo obtida pelo produto vetorial das direcções ξ e η .

$$z' = \{x'\}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A direcção x'_1 (ou x') pode ser considerada como tangente à direcção ξ no ponto de integração.

$$x' = \{x'\}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T \quad (2.24)$$

Defina-se a direcção x'_2 (ou y') como o produto vetorial das direcções x'_3 e x'_1 .

$$y' = \{x'\}_2 = \{x'\}_3 \times \{x'\}_1 \quad (2.25)$$

Este sistema de coordenadas local varia ao longo da espessura do elemento, dependendo da curvatura da casca e da espessura variável. A matriz de cossenos de direcção $[\theta]$ relaciona a transformação entre o sistema de coordenadas local e global e se define como:

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \{\bar{x}'\} & \{\bar{y}'\} & \{\bar{z}'\} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde $\{\bar{x}'\}$, $\{\bar{y}'\}$ e $\{\bar{z}'\}$ correspondem aos vetores unitários nas direcções dos eixos x' , y' e z' respectivamente.

2.5.2 Geometria e Campo de Deslocamentos

As coordenadas globais do par de pontos sobre a superfície superior e inferior em cada nó são usualmente dados da geometria do elemento. Na formulação isoparamétrica as coordenadas do ponto dentro do elemento se conseguem mediante a aplicação das funções de interpolação das coordenadas nodais, mediante a equação (2.27), na qual N_k representa as funções de forma do elemento.

$$x_i = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \left(\frac{1+\zeta}{2} \right) x_{ik}^{\text{sup}} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) x_{ik}^{\text{sup}} \quad (2.27)$$

Tomando em consideração as suposições feitas no processo degenerativo do elemento de casca, o campo de deslocamentos se define por cinco graus de liberdade da “normal”. Os três deslocamentos do ponto meio u_{ik}^{mid} e as duas rotações β_{1k} e β_{2k} (Ver Figura 2.9). Assim, os deslocamentos de um ponto sobre a “normal”, resultante das duas rotações mencionadas são calculados mediante a seguinte equação:

$$\delta_{1k} = h\beta_{2k} \quad , \quad \delta_{2k} = h\beta_{1k} \quad (2.28)$$

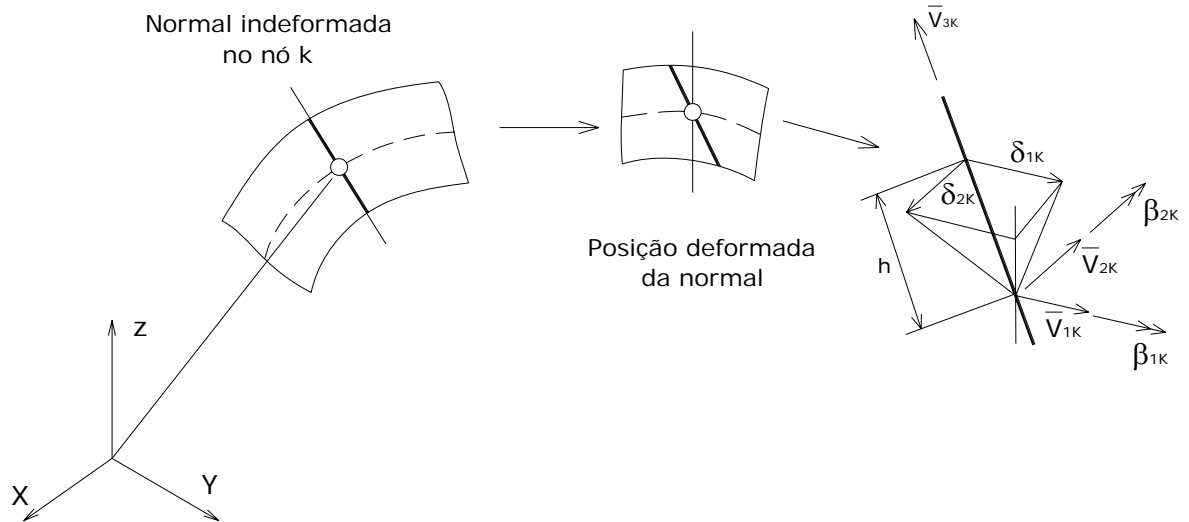


Figura 2.9: Deslocamento num ponto da normal no nó k

em que δ_{1k} é o deslocamento na direcção do vetor $\{V\}_{1k}$ e δ_{2k} é o deslocamento na direcção $\{V\}_{2k}$, sendo h a espessura do elemento no nó k . As componentes dos deslocamentos u_i são obtidos como:

$$(u_i)_{\beta_{2k}} = \delta_{1k}(V_{1k}^i) \quad , \quad (u_i)_{\beta_{1k}} = \delta_{2k}(-V_{2k}^i) \quad (2.29)$$

Na expressão (2.29) a relação linear estabelece que as rotações incrementais são pequenas. O campo de deslocamentos do elemento pode-se expressar como:

$$u_i = \sum_{k=1}^n N_k u_{ik}^{mid} + \sum_{k=1}^n N_k \zeta \frac{h_k}{2} [-\{V\}_{2k} \quad \{V\}_{1k}] \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^n N_k \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

A contribuição aos deslocamentos locais do nó k vem dada por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^x & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^x \\ 0 & N_k & 0 & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^y & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^y \\ 0 & 0 & N_k & -N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{2k}^z & N_k \zeta \frac{h_k}{2} V_{1k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

2.5.3 Definição das Deformações

Para conseguir a hipótese de tensão zero na direcção z' ($\sigma_{z'} = 0$), as componentes de deformação devem ser definidas em termos dos eixos locais (Ver Figura 2.10) x'_i , onde $x'_3 = z'$ é perpendicular ao plano $\xi\eta$.

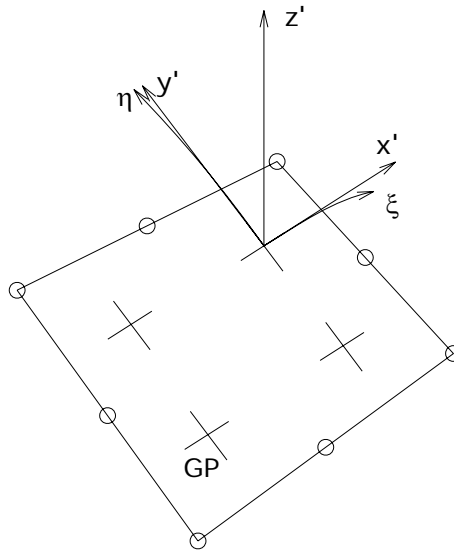


Figura 2.10: Sistema de eixos para a definição das deformações

O sistema local é também o sistema mais conveniente para expressar as componentes das tensões e suas resultantes para a análise e projeto. As cinco componentes da deformação são:

$$\{\varepsilon'\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

onde u' , v' e w' são as componentes dos deslocamentos no sistema local. Estas derivadas locais são obtidas das derivadas globais dos deslocamentos da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = [\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [\theta] \quad (2.34)$$

sendo que $[\theta]$ é a matriz de transformação definida na equação (2.26). As derivadas dos deslocamentos no sistema global são obtidos fazendo-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

em que J é a matriz jacobiana, que vem expressa por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

sendo sua inversa dada por:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

As derivadas dos deslocamentos referidos ao sistema de coordenadas curvilíneas são obtidas pela equação (2.30), enquanto a matriz jacobiana é obtida da equação (2.36). É possível calcular os termos desta matriz em forma explícita da seguinte forma:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) x_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) x_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) y_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) y_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) z_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) z_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38c)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) x_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) x_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38d)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) y_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) y_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38e)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1+\zeta}{2} \right) z_k^{\text{sup}} + \left(\frac{1-\zeta}{2} \right) z_k^{\text{inf}} \right] \quad (2.38f)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^n N_k \frac{(x_k^{\text{sup}} - x_k^{\text{inf}})}{2} \quad (2.38g)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^n N_k \frac{(y_k^{\text{sup}} - y_k^{\text{inf}})}{2} \quad (2.38h)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^n N_k \frac{(z_k^{\text{sup}} - z_k^{\text{inf}})}{2} \quad (2.38i)$$

A matriz de deformação $[B]_c$ que relaciona as componentes de deformação no sistema local às variáveis nodais do elemento é obtida como:

$$\{\varepsilon'\} = [B]_c \{\delta\} \quad (2.39)$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é definida na equação (2.33), $\{\delta\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais $\{u \ v \ w \ \beta_{1k} \ \beta_{2k}\}^T$ e $[B]_c$ é a matriz com cinco linhas e o número de colunas iguais ao número das variáveis nodais do elemento. Para obter os termos da matriz $[B]_c$ é preciso primeiro definir as matrizes auxiliares $[A]$ e $[G]$ da seguinte maneira:

$$[A] = [\theta]^T [J]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.40a)$$

$$\varepsilon' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} & \frac{\partial}{\partial y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (2.40b)$$

Assim, transformando o vetor de deslocamentos local ao sistema global é possível obter os termos da matriz $[B]_c$ como:

$$\{\varepsilon'\} = [G][\theta]^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.41a)$$

$$\{\varepsilon'\} = [B_k][\theta]^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \frac{h_k}{2} [\zeta[B_k] + [C_k][\theta]^T] \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.41b)$$

$$\{\varepsilon'\} = \begin{bmatrix} [B_k][\theta]^T, \frac{h_k}{2} [\zeta[B_k] + [C_k][\theta]^T] \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (2.41c)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} [B_k][\theta]^T, \frac{h_k}{2} [\zeta[B_k] + [C_k][\theta]^T] \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 8 \quad (2.41d)$$

onde,

$$B_k = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ B_3 & 0 & B_1 \\ 0 & B_3 & B_2 \end{bmatrix} \quad C_k = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_3 & 0 \\ C_1 & 0 & C_3 \\ 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (2.42a)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\partial N_k}{\partial \xi} A_{11} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} A_{12} & C_1 &= N_k A_{33} \\
B_2 &= \frac{\partial N_k}{\partial \xi} A_{21} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} A_{22} & C_2 &= N_k A_{23} \\
B_3 &= \frac{\partial N_k}{\partial \xi} A_{31} + \frac{\partial N_k}{\partial \eta} A_{32} & C_3 &= N_k A_{13}
\end{aligned} \tag{2.42b}$$

2.5.4 Definição das Tensões

Considerando a hipótese de tensão zero na direcção z' ($\sigma_{z'} = 0$), as cinco componentes de tensão no sistema local são:

$$\{\sigma'\} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon'\} \tag{2.43}$$

onde $\{\varepsilon'\}$ é definida na equação (2.33) e $[D]$ é definida na equação (2.13) para o concreto fissurado e não fissurado.

2.5.5 Formulação para o Concreto Protendido

O modelo do concreto protendido considera que o cabo é modelado em forma discreta dentro do elemento de casca degenerada (Ver Figura 2.11). A geometria do troço de armadura incorporada pode ser definida a partir das coordenadas globais dos nós que definem o elemento de cabo unidimensional. Estas coordenadas globais são obtidas a partir das coordenadas naturais dos mesmos nós do elemento, utilizando a equação (2.27). Nesse trabalho utilizou-se como dados de entrada ao código computacional as coordenadas naturais dos nós que definem o elemento de cabo em cada elemento finito, embora um algoritmo mais robusto pode ser implementado seguindo o procedimento proposto no trabalho de Jirousek et al. (1979). Assim, a formulação correspondente utilizada é apresentada em detalhe no trabalho de Povoas (1991), Roca & Mari (1993a) e Roca & Mari (1993b).

Tomando para origem do vetor de posição $r(\tau)$ de um ponto genérico do elemento de cabo unidimensional submetido a uma força de protensão P_o , a origem do referencial global, tem-se:

$$r(\tau) = x_p(\tau) = x(\tau)\{i\} + y(\tau)\{j\} + z(\tau)\{k\} \quad (2.44a)$$

$$\begin{Bmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \begin{Bmatrix} x_{p,j} \\ y_{p,j} \\ z_{p,j} \end{Bmatrix} \quad (2.44b)$$

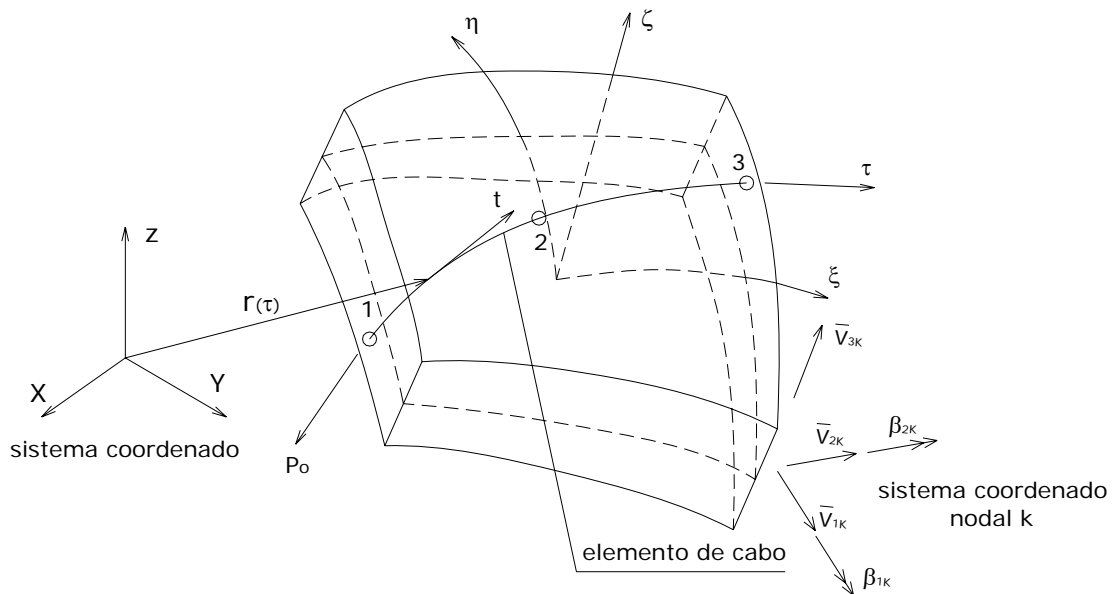


Figura 2.11: Definição da coordenada curvilínea do elemento de cabo de protensão

onde $N'_j(\tau)$ são as funções de forma comuns do elemento de barra com três nós (Ver Hinton & Owen, 1977). Levando em conta o vetor tangente unitário correspondente (Ver Figura 2.11) expresso pelas relações:

$$\{t(\tau)\} = \frac{\{v(\tau)\}}{|\{v(\tau)\}|} \quad (2.45)$$

com,

$$\{v(\tau)\} = \frac{dx}{d\tau}\{i\} + \frac{dy}{d\tau}\{j\} + \frac{dz}{d\tau}\{k\} \quad (2.46a)$$

$$\|\{v(\tau)\}\| = \left[\left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} = v \quad (2.46b)$$

É possível determinar a matriz $[B]_p$ que relaciona a deformação axial no cabo ε_p com os deslocamentos do elemento finito em que é incorporado, como indicado na expressão (2.47). No apêndice A do presente trabalho é apresentado o desenvolvimento da matriz de deslocamentos-deformações $[B]_p$

$$\varepsilon_p = [B]_p \{\delta\} \quad (2.47)$$

2.5.5.1 Perdas de Protendido

Tradicionalmente, sob a designação de perdas de protendido, agrupam-se todos os fenômenos que concorrem para uma diminuição do estado de tensão uniforme definido pela força de esticamento aplicada ao cabo de protensão (Ver Povoas, 1991).

Estabelecendo a necessária distinção entre cabos pré-tensionadas e pós-tensionadas, as perdas de protendido podem ser agrupadas de acordo com a seguinte classificação:

a) Cabos pré-tensionadas:

Perdas antecedendo a transferência do protendido:

- Associada ao dispositivo de fixação dos fios
- Por atrito em eventuais pontos de flexão
- Por retração do concreto
- Por relaxação do cabo de protendido

Perdas instantâneas (coincidentes com a transferência do protendido):

- Por deformação do concreto
- Por escorregamento dos cabos na zona de amarração

b) Cabos pós-tensionadas:

Perdas instantâneas:

- Por atrito entre o cabo e as condutas
- Por penetração das cunhas e deformação das ancoragens
- Por deformação do concreto, em conformidade com a sequência de esticamento adoptada para os cabos de protensão.

Considerem-se adicionalmente as perdas diferidas por fluência e retração do concreto e as perdas por relaxação do aço protendido que ocorrem no tempo, sendo estas desconsideradas no presente trabalho. As perdas instantâneas de protendido são especificadas em alguns pontos ao longo do cabo utilizando um programa de pré-processamento. Assim, a tensão inicial num ponto qualquer se pode determinar da seguinte maneira:

$$\sigma_{o,p}(\tau) = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) (\sigma_{o,p})_j \quad (2.48)$$

onde $(\sigma_{o,p})_j$ é a tensão inicial nos pontos nodais do cabo. Nesse trabalho considera-se que os valores de $(\sigma_{o,p})_j$ incorporam as perdas antecedendo a transferencia do protendido e as perdas instantâneas para os cabos pré-tensionados, assim como as perdas instantâneas para os cabos pós-tensionados. Para ambos sistemas de protensão, os cabos estão aderidos perfeitamente ao concreto. Assim, o campo de deslocamento do elemento de casca degenerada e do elemento de cabo é o mesmo.

2.5.5.2 Forças Nodais Equivalentes e Matriz de Rigidez

Definido o valor inicial do protendido, P_o a sua acção é modelada através da consideração de uma deformação de origem térmica, $\Delta\varepsilon_{p,T}$ quantificada de acordo com a expressão:

$$\Delta\varepsilon_{p,T} = \frac{P_o}{E_p A_p} \quad (2.49)$$

com E_p é definido pelas inclinações que definem a relação tensão-extensão multilinear da armadura (Ver Figura 2.6) e A_p representa a área da seção transversal do cabo. As forças nodais equivalentes à deformação imposta ao cabo de protensão vêm definidas:

$$P_p = \int_{l_p} B_p^T \sigma_p A_p dl \quad (2.50)$$

com,

$$\sigma_p = \Delta \sigma_{p,T} = E_p \Delta \varepsilon_{p,T} \quad (2.51)$$

sendo adicionadas às forças nodais resultantes das cargas externas aplicadas (a acção do protendido e, em geral, o peso próprio da estrutura), a tensão na armadura vem expressa pela relação:

$$\sigma_p(\tau) = \Delta \sigma_p(\tau) = E_p (\Delta \varepsilon_p(\tau) - \Delta \varepsilon_{p,T}) \quad (2.52)$$

com o incremento da deformação mecânica $\Delta \varepsilon_p(\tau)$ a ser determinada pela equação (2.54). A solução numérica da equação (2.50) se obtém, como é usual, por integração numérica, sendo:

$$(P_i)_p = \sum_{k=1}^{NGAUS} (B_i(\tau_k))_p^T \sigma_{p,k} A_p v(\tau_k) w_k \quad (2.53)$$

Na expressão precedente, $(P_i)_p$ representa o vetor que contém a contribuição do cabo para a determinação das forças nodais equivalentes referentes ao nó i do elemento de casca por ele atravessado, designando $\sigma_{p,k}$ a tensão instalada nos pontos de integração do elemento unidimensional, cujo valor vem determinado por uma relação tensão-extensão multilinear idêntica à relação estabelecida para as armaduras ordinárias. Onde, l_p é o comprimento do segmento do elemento de cabo incorporado no elemento de casca, $v(\tau_k)$ é definido na equação (2.46) e w_k são os pesos dos pontos de integração do elemento de cabo. Por outro lado, o nível de tensão correspondente ao incremento genérico n vem determinado pela relação incremental:

$$\sigma_p^n = \sigma_p^{n-1} + \Delta \sigma_p^n \quad (2.54a)$$

$$\Delta \sigma_p^n = E_p \Delta \varepsilon_p^n \quad (2.54b)$$

Fazendo incidir na definição incremental $\Delta \varepsilon_p^n$ para armaduras aderentes a hipótese de aderência perfeita entre a armadura de protendido e o concreto adjacente, sendo válida, em consequência, a relação:

$$\Delta \varepsilon_p^n = [B]_p \{\delta\}^n \quad (2.55)$$

O cabo protendido contribui à matriz de rigidez da estrutura do elemento de casca, no qual é incorporado com a matriz $[K]_p$ definida por:

$$[K]_p = \int_{l_p} [B]_p^T E_p A_p [B]_p dl \quad (2.56)$$

expressando a equação anterior em termos da coordenada curvilínea, τ , a sub-matriz, $(K_{ij})_p$, relacionando os nós i e j do elemento de casca, é dada por:

$$(K_{ij})_p = \int_{-1}^1 (B_i)_p^T E_p A_p (B_j)_p v d\tau \quad (2.57)$$

sendo obtida por integração numérica:

$$(K_{ij})_p = \sum_{k=1}^{NGAUS} (B_i(\xi, \eta, \zeta)_k)_p^T E_p A_p (B_j(\xi, \eta, \zeta)_k)_p v(\tau_k) w_k \quad (2.58)$$

2.5.6 Elemento de Casca Quadrático

O elemento quadrilátero de oito nós denominado na literatura como o elemento de Serendipity é o elemento mais simples considerado no trabalho original de Ahmad et al.(1970) e no conceito degenerado foi provavelmente o elemento mais popular da família isoparamétrica. Os resultados inicialmente obtidos com este elemento usando uma regra de integração (3x3) mostram que a solução é rígida conforme a espessura da casca se reduz.

Uma melhoria do desempenho dos resultados se logra usando uma regra de integração reduzida de (2x2). No presente trabalho, o fenômeno de bloqueio (ou travamento, ou “locking”) ao corte é também evitado segundo a regra estabelecida no manual de usuário do programa comercial ANSYS para o elemento denominado Shell 93. Este elemento é similar ao elemento de casca degenerado implementado neste trabalho. Para isto é preciso definir o

fator de forma f que acompanha os termos de corte fora do plano, e que vem dado pelo maior valor obtido na expressão seguinte:

$$f = \left\{ 1.0 + 0.2 \frac{A}{25t^2} \right\} \quad (2.59)$$

onde A é o área do elemento no plano $\xi\eta$ e t é a espessura promédio do elemento em consideração.

A fórmula acima expressa que o problema de bloqueio de cortante é dependente da geometria de cada elemento finito na malha. É conhecido que o travamento depende também das condições de contorno e tipo de carregamento aplicado na estrutura, sendo então dependente do problema estudado. A técnica da integração reduzida apresenta melhores resultados quando as condições de apoio são mínimas. Assim sendo, foram feitos vários testes de lajes retangulares com diferentes tipos de apoios em suas bordas, diferentes dimensões de lados e espessura e com carregamentos pontuais e distribuídos. Nestes testes foi diminuída a espessura da laje em função do valor da maior dimensão da mesma.

Os resultados mais críticos desde o ponto de vista de apresentar travamento ao cortante corresponde ao caso de uma laje retangular com seus quatro bordos engastados submetido a um carregamento uniformemente distribuído. O travamento ao cortante é produzido, para espessuras menores a $L/200$, sendo L a maior dimensão da laje. A laje apresenta dimensões de 2.54 m e 1.27 m, sendo a malha utilizada mostrada na Figura 2.12, onde foram utilizados em total 48 elementos finitos.

Os resultados da laje em estudo são mostrados na Figura 2.13. Utilizou-se dois valores do fator de forma f , sendo o primeiro igual a 1.2 (constante) e o segundo obtido da equação (2.59). Os deslocamentos verticais no centro da laje são divididos pelo valor analítico da teoria de placas delgadas, que vem dado por:

$$w_{\max} = \frac{0.0025qL^4}{Eh^3/12(1-\nu^2)} \quad (2.60)$$

onde q , ν e E são o carregamento distribuído aplicado, o coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade, respectivamente.

Assim, é mostrado que a integração reduzida com $f = 1.2$ apresenta valores aceitáveis para o deslocamento central quando a espessura da laje é maior ou igual a $L/200$. Melhores resultados são obtidos quando o valor de f é calculado de acordo com a equação (2.59), onde o travamento ao cortante é eliminado para qualquer valor de L/t , sendo t a espessura da laje.

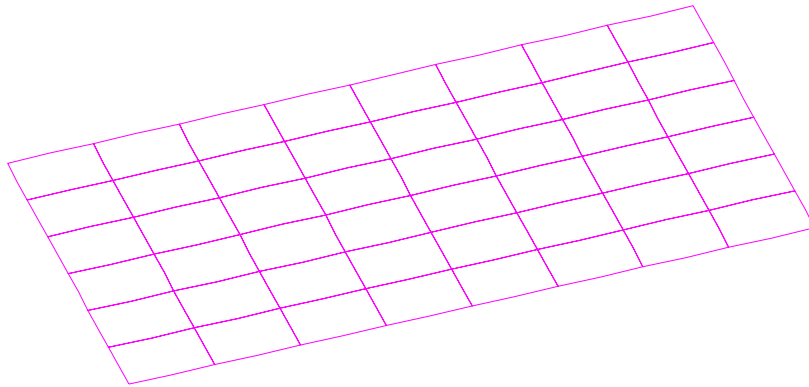


Figura 2.12: Malha de elementos finitos usada para a laje retangular engastada

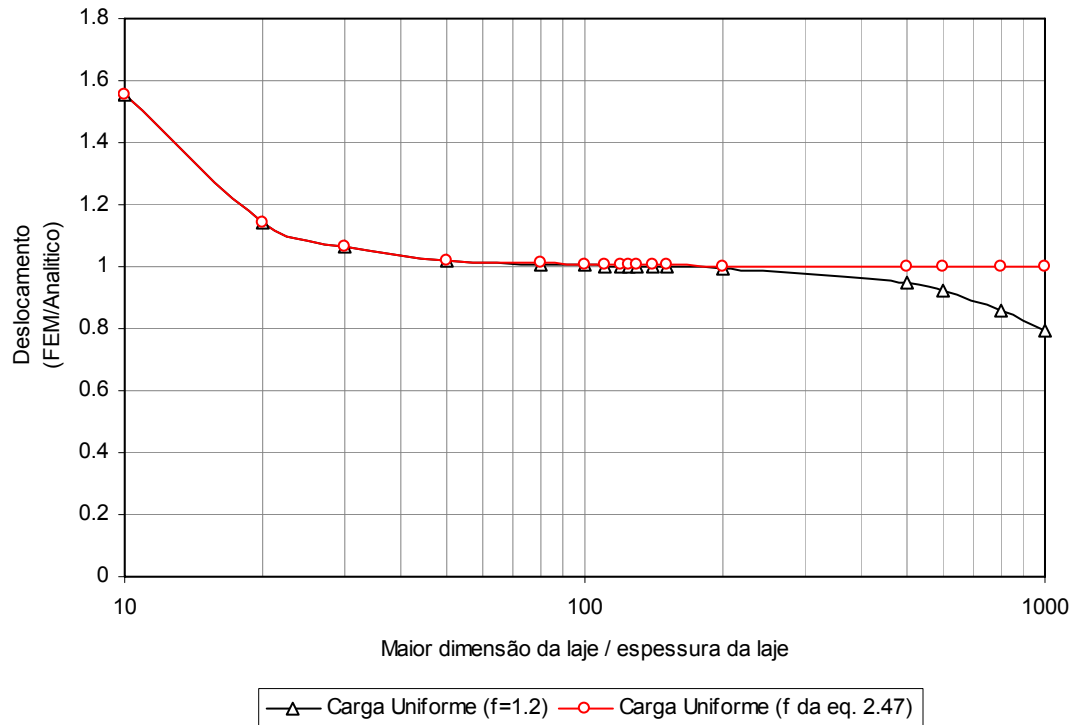


Figura 2.13: Variação do deslocamento central normalizado com a espessura da laje

Por outro lado, a geometria do elemento quadrático é interpolada usando só as funções de forma do elemento Serendipity, que vem dada por:

$$N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_k)(1 + \eta\eta_k)(\xi\xi_k + \eta\eta_k - 1) \quad k = 1,3,5,7$$

$$N_k = \frac{\xi_k^2}{2}(1 + \eta\eta_k)(1 - \eta^2) + \frac{\xi_k^2}{2}(1 + \eta\eta_k)(1 - \xi^2) \quad k = 2,4,6,8$$
(2.61)

2.5.7 Modelo de Camadas

Se a casca é composta de uma serie de camadas de diferentes materiais , de tal maneira que as propriedades e as tensões são funções descontínuas de ζ , uma integração apropriada através da espessura é adequada. Em problemas com não-linearidade física, a distribuição das tensões na direcção da espessura deve ser conhecida num número adequado de pontos, onde as equações constitutivas são satisfeitas.

Em problemas de cascas ou placas de concreto armado, o comportamento não linear do concreto e do aço de reforço precisa de uma conveniente representação na espessura do elemento. No presente trabalho adota-se uma representação simples e efetiva mediante o uso de camadas, onde uma regra de integração retangular simples é adotada.

As camadas são numeradas seqüencialmente, começando na superfície inferior da casca. Cada camada apresenta pontos de tensões sobre sua superfície media. As componentes das tensões de cada camada são calculadas precisamente nestes pontos e são supostas constantes na espessura da camada considerada. Desta maneira a distribuição das tensões real da casca é modelada por aproximações de parcelas constantes. Camadas de diferentes espessuras e diferente número de camadas por elemento podem ser usadas. A especificação da espessura das camadas em termos da coordenada curvilínea ζ permite a variação da espessura da camada conforme a variação da espessura da casca.

2.5.8 Matriz de Rigidez e Vetor de Forças Nodais Equivalentes

A expressão do princípio dos trabalhos virtuais para um elemento de casca pode ser escrita como:

$$\iiint_{V^e} \delta \varepsilon' \sigma' dV = \iiint_{V^e} \delta u^T b dV + \iint_{S^e} \delta u^T t dS + \sum_{i=1}^n \delta u^T q^e \quad (2.62)$$

em que o primeiro membro representa o trabalho virtual interno expressado em função das tensões e deformações locais e o segundo membro representa o trabalho virtual externo, sendo:

$$\begin{aligned} b &= [b_x \quad b_y \quad b_z]^T \\ t &= [t_x \quad t_y \quad t_z]^T \\ q_i^e &= [X_i \quad Y_i \quad Z_i \quad M_{1i} \quad M_{2i}]^T \end{aligned} \quad (2.63)$$

que representam, respectivamente, os vetores de forças por unidade de volume, as forças na superfície do corpo e as forças pontuais nodais de equilíbrio, sendo V^e e S^e o volume e a superfície do elemento, respectivamente. Todos estes vetores de força são referidos aos eixos globais, exceto os momentos M_{1i} e M_{2i} que se correspondem com os giros locais β_1 e β_2 . Operando na forma usual se encontra a clássica equação matricial de equilíbrio do elemento.

$$[K]^e \{\delta\}^e - \{f\}^e = \{q\}^e \quad (2.64)$$

com,

$$[K]_c = [K]^e = \iiint_{V^e} [B]_c^T [D] [B]_c dV \quad (2.65)$$

É interessante esclarecer que no cálculo da matriz de rigidez do elemento se utiliza a matriz $[B]_c$ que relaciona as deformações no sistema local com as variáveis nodais do elemento. Por este motivo a matriz elástica do material $[D]$ deve também ser referida ao sistema local.

2.5.8.1 Cálculo das Forças de Superfície

Quando uma pressão p_n atua em forma perpendicular à superfície superior ou inferior do elemento de casca, as forças nodais equivalentes podem ser calculadas da seguinte maneira:

$$\{F_e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} -P_n \zeta N_k \cdot \left\{ \begin{array}{c} V_{3k}^X \\ V_{3k}^Y \\ V_{3k}^Z \\ -\frac{h}{2} \zeta \{V\}_{1k} \cdot \{V\}_{3k} \\ \frac{h}{2} \zeta \{V\}_{2k} \cdot \{V\}_{3k} \end{array} \right\} |J| d\xi d\eta \quad (2.66)$$

com,

$$\{V\}_{3k} = \left\{ \begin{array}{c} V_{3k}^X \\ V_{3k}^Y \\ V_{3k}^Z \end{array} \right\} \quad (2.67)$$

2.6 ALGORITMO NUMÉRICO

No início do incremento de carga n , os deslocamentos δ^{n-1} e as tensões σ^{n-1} são conhecidos, assim como as forças nodais desequilibradas $\{\psi\}^{n-1}$ obtidos do incremento de carga prévio. As forças nodais incrementais são calculadas de acordo com a seguinte expressão:

$$\{\psi\}_o^n = \{\psi\}^{n-1} + \{\Delta f\}^n \quad (2.68)$$

onde $\{\Delta f\}^n$ é o incremento de carga n . Posteriormente, o processo iterativo é realizado considerando as seguintes etapas para a iteração geral i :

1.0 A matriz de rigidez $[K]_e$ é atualizada ou não de acordo ao algoritmo de solução adotado.

$$[K]_e = [K]_c + [K]_p \quad (2.69)$$

2.0 Os deslocamentos incrementais $\{\Delta\delta\}_i$ são avaliados usando as equações de equilíbrio,

$$\{\Delta\delta\}_i = -[K]_e^{-1} \{\psi\}_{i-1} \quad (2.70)$$

onde $\{\psi_{i-1}\}$ são as forças nodais desequilibradas resultantes da última iteração. O vetor de deslocamentos total nodais $\{\delta_i\}$ é atualizado da seguinte forma:

$$\{\delta\}_i = \{\delta\}_{i-1} + \{\Delta\delta\}_i \quad (2.71)$$

3.0 Os incrementos das deformações $\{\Delta\varepsilon_i\}$ e as componentes da deformação total $\{\varepsilon_i\}$ são avaliados a partir dos deslocamentos generalizados com as seguintes expressões:

$$\{\Delta\varepsilon\}_i = [B]_c \{\Delta\delta\}_i \quad (2.72)$$

e

$$\{\varepsilon\}_i = [B']_c \{\delta\}_i \quad (2.73)$$

onde $[B]_c$ e $[B']_c$ são as matrizes de deformação atualizadas dependendo do valor de $\{\delta\}_i$. Notar que as matrizes $[B]_c$ e $[B']_c$ são iguais quando o comportamento não linear geométrico não é considerado. A dedução da matriz $[B']_c$ que corresponde à consideração da não linearidade geométrica é detalhada no apêndice B. A deformação axial ε_p no cabo de protensão é obtida como:

$$(\Delta\varepsilon_p)_i = [B]_p \{\Delta\delta\}_i \quad (2.74)$$

$$(\varepsilon_p)_i = (\varepsilon_p)_{i-1} + (\Delta\varepsilon_p)_i \quad (2.75)$$

4.0 As tensões incrementais $\{\Delta\sigma\}_i$ e as tensões totais $\{\sigma\}_i$ são avaliadas pelas seguintes expressões:

$$\{\Delta\sigma\}_i = [D] \{\Delta\varepsilon\}_i \quad (2.76)$$

e

$$\{\sigma\}_i = \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta\sigma\}_i \quad (2.77)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade tomada como:

- A matriz elástica do concreto não-fissurado ou a matriz correspondente ao concreto fissurado para as camadas de concreto.

- A matriz elástica para as camadas de aço.

Para o cabo de protensão:

$$(\Delta\sigma_p)_i = E_p (\Delta\varepsilon_p)_i \quad (2.78)$$

$$(\sigma_p)_i = (\sigma_p)_{i-1} + (\Delta\sigma_p)_i \quad (2.79)$$

Para $i = 1$, $(\sigma_p)_0 = \sigma_p$, onde σ_p é definido pela equação (2.51)

5.0 As tensões são corrigidas de acordo às equações constitutivas dos materiais:

a) Camadas de concreto

Usando as tensões totais $\{\sigma_i\}$, a tensão principal máxima σ_1 , atuante no plano estrutural, é calculada:

Se $\sigma_1 > f_t$ ou se o concreto está fissurado, as tensões são atualizadas de acordo ao modelo de tração.

Usando σ_i ou as tensões atualizadas na iteração prévia, a tensão efetiva σ_e é calculada de acordo à função de escoamento.

Se σ_e é maior que a tensão inicial de escoamento ou se a camada encontra-se fissurada, as tensões são corrigidas de acordo ao modelo elasto-plástico.

b) Camadas de aço

Usando as tensões totais $\{\sigma\}_i$, a tensão na direcção do aço de reforço σ_s é obtida e corrigida da seguinte maneira:

Se σ_s é maior que a tensão de escoamento do aço f_y , a tensão é tratada com o algoritmo elasto-plástico.

c) Cabos de protensão

Se $(\sigma_p)_i$ é maior que a tensão de escoamento do cabo f_{yp} , a tensão é tratada com o algoritmo elasto-plástico.

- 6.0 As forças nodais internas equivalentes $\{p\}_i$ são avaliadas usando integração numérica da seguinte forma:

$$\{p\}_i = \int_V [B]_c \{\sigma_i\} dV + \int_V [B]_p (\sigma_p)_i dV \quad (2.80)$$

onde $\{\sigma\}_i$ e $(\sigma_p)_i$ são as componentes das tensões totais corrigidas de acordo às equações constitutivas.

- 7.0 As forças desequilibradas $\{\psi\}_i$ são calculadas da seguinte forma,

$$\{\psi\}_i = \{t\} - \{p\}_i \quad (2.81)$$

onde $\{t\}$ é o vetor da força nodal externa atual.

- 8.0 A convergência do processo é verificada:

Se a convergência do processo é satisfeita, então prosseguir com o seguinte incremento de carga. Este critério é baseado numa tolerância tol das forças desequilibradas:

$$\frac{\{\psi\}_i}{\{p\}_i} \leq tol \quad (2.82)$$

Se o critério da convergência não é satisfeito reiniciar o processo iterativo desde o passo 1.

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PEÇAS ESTRUTURAIS DE AÇO

3.1 MODELO PARA A ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DO AÇO

Para formular a teoria que modela a deformação elasto-plástica do aço, três requerimentos são necessários: (i) A relação constitutiva elástica deve ser formulada; (ii) O critério de escoamento indicando o nível de tensão no qual a deformação plástica se inicia, deve ser postulado e (iii) A relação entre as tensões e deformações deve ser desenvolvida para o comportamento depois do escoamento.

3.1.1 Critério de Escoamento

Em forma similar que para o concreto, é necessário definir uma superfície de escoamento para identificar o início do fluxo plástico no material. Diferente do concreto, o aço estrutural apresenta a mesma função de escoamento para tensões em tração e compressão. O critério utilizado corresponde à lei de Huber-Von Mises, que vem dado por.

$$f(I_1, J_2) = (3J_2\beta)^{1/2} = \sigma_o \quad (3.1)$$

A equação (3.1) pode-se expressar em função das tensões no plano estrutural $x'y'$ como:

$$f(\sigma) = (\sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 - \sigma_{x'}\sigma_{y'} + 3\tau_{x'y'}^2)^{1/2} = \sigma_o \quad (3.2)$$

Na Figura 3.1 apresenta-se a representação em duas dimensões do critério de escoamento no espaço das tensões principais (σ_1, σ_2) . Quando a superfície de escoamento inicial é atingida e a carga é incrementada, o processo elasto-plástico inicia-se com a subsequente

expansão da superfície de acordo a um comportamento linear. Assim, vão sendo criadas sucessivas superfícies de carga no espaço das tensões que definem a nova condição de escoamento do material. Na Figura 3.1, σ_o é a tensão de escoamento uniaxial do aço.

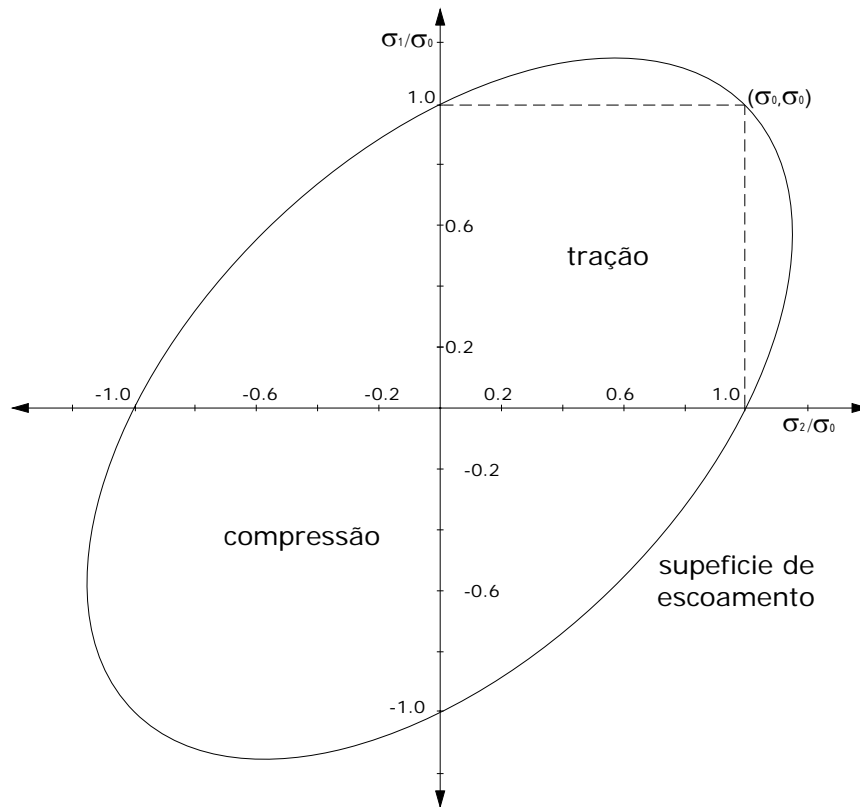


Figura 3.1: Critério de escoamento em tração e compressão para o aço

3.1.2 Lei de Escoamento e Lei de Endurecimento

Da mesma maneira que no capítulo anterior, a lei de escoamento plástica relaciona os incrementos das deformações plásticas com o vetor das tensões no material, como é expressa na equação (2.3).

Por outro lado, a lei de endurecimento define o movimento da superfície de escoamento conforme a deformação plástica aumenta. Considerando o aço também como um material com endurecimento isotrópico, a evolução da superfície de escoamento é monitorada extrapolando as tensões do caso multi-axial ao caso uniaxial. Assim, define-se a seguinte relação uniaxial linear para a tensão de escoamento de acordo com Hinton & Owen (1980):

$$\sigma_y^k = \sigma_y^{k-1} + H'(\Delta \varepsilon_p^k) \quad (3.3)$$

onde σ_y^{k-1} é a tensão de escoamento correspondente ao incremento de carga $k-1$, σ_y^k e $\Delta \varepsilon_p^k$ representam a tensão de escoamento e o incremento da deformação plástica no presente incremento de carga k , respectivamente, sendo H' o módulo de endurecimento do material.

3.2 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção derivamos o elemento finito de casca poliédrica para a modelagem da viga de seção I. Este elemento finito é obtido como resultado da combinação do elemento de membrana proposto por Ibrahimbegovic et al. (1990) e o elemento de placa proposto por Batoz & Tahar (1982).

3.2.1 Contribuição da Membrana do Elemento de Casca Plana

A formulação variacional sugerida por Hughes & Brezzi (1989) é:

$$\pi_\rho(u, \phi) = \frac{1}{2} \int_V \text{symm}(\nabla u) \cdot D \cdot \text{symm}(\nabla u) dV + \frac{1}{2} \rho \int_V |\text{skew}(\nabla u) - \phi|^2 dV - \int_V u \cdot f dV \quad (3.4)$$

onde symm e skew são operadores tensoriais, com o seguinte significado:

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{symm}(\sigma) + \text{skew}(\sigma) \\ \text{symm}(\sigma) &= \frac{1}{2}(\sigma + \sigma^T) \\ \text{skew}(\sigma) &= \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^T) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considera-se um elemento quadrilátero de 4 nós com graus de liberdade de rotação no plano, como mostrado na Figura 3.2, onde n_{12} representa a direcção normal ao lado do elemento 1-2. O campo de rotação independente é interpolado mediante um campo bilinear da seguinte forma:

$$\phi = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \phi_i \quad (3.6)$$

Com,

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.7)$$

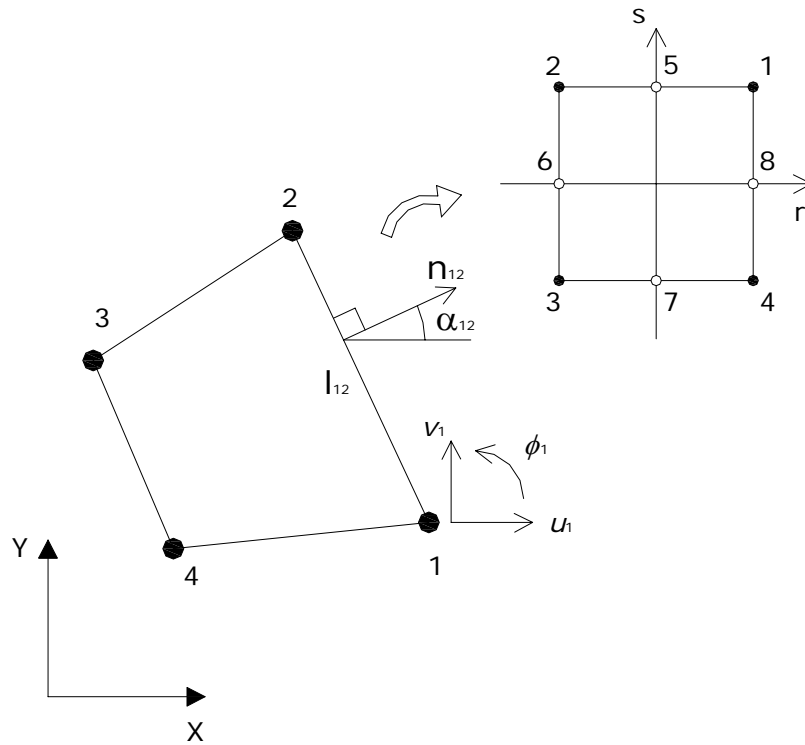


Figura 3.2: Elemento quadrilátero com grau de liberdade rotacional

A interpolação do tipo Allman (1988) para os deslocamentos no plano é:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{k=5}^8 N_k(\xi, \eta) \frac{l_{ij}}{8} (\phi_j - \phi_i) \begin{Bmatrix} C_{ij} \\ S_{ij} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

com,

$$x_{ij} = x_j - x_i \quad (3.9a)$$

$$y_{ij} = y_j - y_i \quad (3.9b)$$

$$l_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2} \quad (3.9c)$$

$$C_{ij} = \cos \gamma_{ij} = \frac{y_{ij}}{l_{ij}} \quad (3.9d)$$

$$S_{ij} = \text{sen}\gamma_{ij} = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}} \quad (3.9e)$$

$$k = 5,6,7,8 \quad ; \quad i, j = 1,2;2,3;3,4;4,1 \quad (3.9f)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_k \eta) \quad k = 5,7 \quad (3.9g)$$

$$N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi_k \xi)(1 - \eta^2) \quad k = 6,8 \quad (3.9h)$$

Definindo em notação matricial:

$$\text{symm}(\nabla u) = \left\{ \begin{array}{c} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

$$\text{symm}(\nabla u) = \sum_{i=1}^4 (B_i u_i + G_i \phi_i) \quad (3.11)$$

onde $\{u\}_i$ são os parâmetros de translação nodal do elemento (cujas componentes são dadas na expressão 3.12) e ϕ_i é o parâmetro de rotação no plano do elemento, com as matrizes $[B]$ e $[G]$ dadas nas expressões (3.13) e (3.14), respectivamente.

$$\{u\}_i = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

$$[B]_i = \left\{ \begin{array}{cc} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

$$[G]_i = \left\{ \begin{array}{c} l_{ij} C_{ij} \partial N_l / \partial x - l_{ik} C_{ik} \partial N_m / \partial x \\ l_{ij} S_{ij} \partial N_l / \partial y - l_{ik} S_{ik} \partial N_m / \partial y \\ (l_{ij} C_{ij} \partial N_l / \partial y - l_{ik} C_{ik} \partial N_m / \partial y) + (l_{ij} S_{ij} \partial N_l / \partial x - l_{ik} S_{ik} \partial N_m / \partial x) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

sendo $i = 1,2,3,4$, $m = 5,6,7,8$, $l = 8,5,6,7$, $k = 2,3,4,1$ e $j = 4,1,2,3$. Ademais se pode definir:

$$\text{skew}(\nabla u) - \phi = \sum_{i=1}^4 ([b]_i \{u\}_i + [g]_i \{\phi\}_i) \quad (3.15)$$

sendo,

$$[b]_i = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \quad (3.16)$$

com,

$$[g]_i = -\frac{1}{16} \left(l_{ij} C_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial y} - l_{ik} C_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) + \frac{1}{16} \left(l_{ij} S_{ij} \frac{\partial N_l}{\partial x} - l_{ik} S_{ik} \frac{\partial N_m}{\partial x} \right) - N_i \quad (3.17)$$

O vetor de parâmetros nodais é definido como:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \\ \{q\}_i &= \{u_i \quad v_i \quad \phi_i\}^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

A matriz de rigidez do elemento é definida da seguinte forma:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.19)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material, definindo $[B]$ novamente como:

$$\begin{aligned} [B] &= \begin{bmatrix} [B]_1 & [B]_2 & [B]_3 & [B]_4 \end{bmatrix} \\ [B]_i &= \begin{bmatrix} [B]_i & [G]_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sendo que $[B]_i$ e $[G]_i$ são definidas nas equações (3.13) e (3.14), respectivamente.

O parâmetro ρ da equação (3.4) é dependente do problema. Para elasticidade isotrópica é sugerido que o valor de ρ pode ser igual ao valor do módulo de corte do material G . Para o presente trabalho o valor de $0.375G$ foi considerado por fornecer melhores resultados para a modelagem da viga de aço de seção I. O parâmetro ρ é um parâmetro de penalidade que permite eliminar a singularidade introduzida na matriz de rigidez do elemento pela inclusão das rotações no plano. A contribuição deste termo na matriz de rigidez do elemento é facilmente deduzida como:

$$[P] = \rho \int_V [b]^T [b] dV \quad (3.21)$$

Sendo $[b]$, novamente definida como:

$$[b] = \begin{bmatrix} [b]_1 & [b]_2 & [b]_3 & [b]_4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$[b]_i = \begin{bmatrix} [b]_i & [g]_i \end{bmatrix}$$

$[b]_i$ e $[g]_i$ são definidas nas equações (3.16) e (3.17). Assim, a matriz de rigidez final de membrana para um elemento é:

$$[K_m] = [K] + [P] \quad (3.23)$$

3.2.2 Contribuição da Flexão do Elemento de Casca Plana

O elemento quadrilátero de placa mostrada na Figura 3.3 é eficiente e útil para a representação da parte de flexão dos elementos de casca. Este elemento pode ser utilizado na modelagem de estruturas tipo seção I. Batoz & Tahar (1982) desenvolveram o elemento de placa quadrilátero em flexão (DKQ) considerando as suposições de Kirchhoff para placas delgadas, sendo que o elemento DKQ apresenta 12 graus de liberdade. Considerando que o plano médio do elemento encontra-se no plano xy , os graus de liberdade em cada nó do elemento podem ser descritos como o deslocamento transversal w , na direcção normal ao plano xy e as rotações no plano θ_x e θ_y , nas direcções x e y respectivamente. Assim, estas ficam definidas como:

$$w = w_{(x,y)} \quad (3.24a)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.24b)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.24c)$$

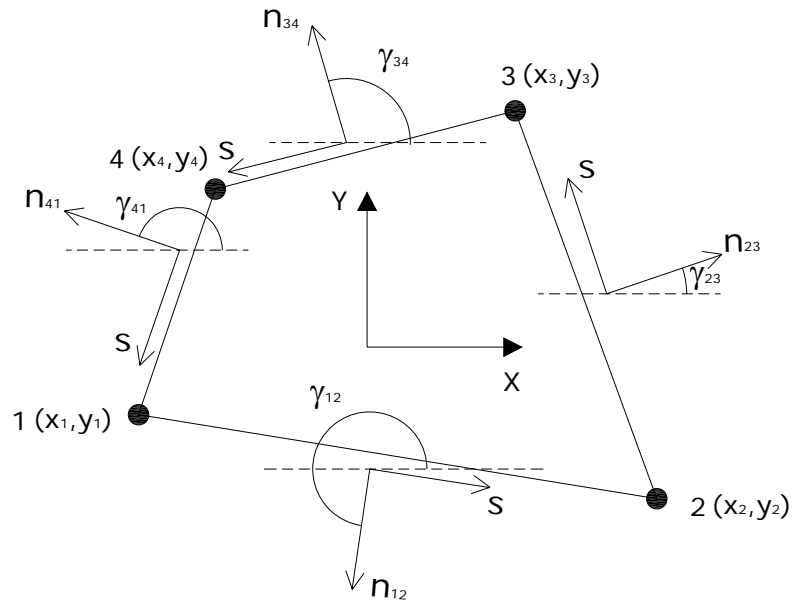


Figura 3.3: Elemento quadrilátero da placa

De acordo com as hipóteses de Kirchhoff, a energia de deformação por corte fora do plano é omitida. Então, a energia de deformação do elemento é:

$$U = \sum_e^n U_e^b \quad (3.25)$$

A energia de deformação do elemento devido à flexão U_b^e é calculada pela equação (3.26), sendo A^e a área do elemento.

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \chi^T D_b \chi dA^e \quad (3.26)$$

Para o caso de um material isotrópico homogêneo, as curvaturas da expressão (3.26) são dadas por:

$$[\chi] = \left\{ \begin{array}{c} \partial\beta_x/\partial x \\ \partial\beta_y/\partial y \\ \partial\beta_x/\partial y + \partial\beta_y/\partial x \end{array} \right\} \quad (3.27)$$

onde β_x e β_y são as rotações das normais à superfície média da placa na direcção $x-z$ e $y-z$, respectivamente. A matriz constitutiva do material é:

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde E, ν e h são o módulo de elasticidade, relação de Poisson e a espessura do elemento, respectivamente. Batoz & Tahar (1982) desenvolveram as relações entre os deslocamentos transversais e as rotações β_x e β_y da forma seguinte:

1. Definem-se β_x e β_y com polinômios cúbicos incompletos.

$$\beta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{xi} \quad \beta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{yi} \quad (3.29)$$

As funções de forma do elemento de oito estão apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)] \\ N_2 &= -\frac{1}{4}[(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)] \\ N_3 &= -\frac{1}{4}[(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)] \\ N_4 &= -\frac{1}{4}[(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)] \\ N_5 &= \frac{1}{2}[(1-\xi^2)(1-\eta)] \\ N_6 &= \frac{1}{2}[(1+\xi)(1-\eta^2)] \\ N_7 &= \frac{1}{2}[(1-\xi^2)(1+\eta)] \\ N_8 &= \frac{1}{2}[(1-\xi)(1-\eta^2)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

2. Aplicam-se as suposições de Kirchhoff nos nós de canto e nos nós localizados no meio dos lados do elemento quadrilátero.

Nos nós de cantos tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{xi} + \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \\ \beta_{yi} + \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.31)$$

Nos nós localizados no meio dos lados tem-se:

$$\beta_{sk} + \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_k = 0 \quad k = 5,6,7,8 \quad (3.32)$$

3. Utiliza-se uma função cúbica para representar os deslocamentos transversais w . Conseqüentemente a derivada do deslocamento transversal w respeito a s , nos nós localizados no meio dos lados do elemento é quadrática, sendo representada por:

$$\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_k = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_i + \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_j \right) \quad k = 5,6,7,8 \quad (3.33)$$

para $ij = 12,23,34,41$, com l_{ij} sendo o comprimento do lado que une os nós ij .

4. As rotações normais aos lados nos nós no meio dos lados do elemento variam linearmente.

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}(\beta_{ni} + \beta_{nj}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_i + \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_j \right) \quad (3.34)$$

O vetor de deslocamentos nodais para o elemento quadrilátero DKQ é:

$$[U_n] = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}] \quad (3.35)$$

onde:

$$\theta_{xi} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \quad \theta_{yi} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.36)$$

As quantidades β_x e β_y são expressas em termos dos deslocamentos nodais usando certas funções de forma, ficando:

$$\beta_x = \langle H_{(\xi,\eta)}^x \rangle [U_n] \quad \beta_y = \langle H_{(\xi,\eta)}^y \rangle [U_n] \quad (3.37)$$

onde,

$$\langle H_{(\xi,\eta)}^x \rangle = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(a_5 N_5 - a_8 N_8) \\ b_5 N_5 + b_8 N_8 \\ N_1 - c_5 N_5 - c_8 N_8 \\ \frac{3}{2}(a_6 N_6 - a_5 N_5) \\ b_6 N_6 + b_5 N_5 \\ N_2 - c_6 N_6 - c_5 N_5 \\ \frac{3}{2}(a_7 N_7 - a_6 N_6) \\ b_7 N_7 + b_6 N_6 \\ N_3 - c_7 N_7 - c_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(a_8 N_8 - a_7 N_7) \\ b_8 N_8 + b_7 N_7 \\ N_4 - c_8 N_8 - c_7 N_7 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\langle H_{(\xi,\eta)}^y \rangle = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(d_5 N_5 - d_8 N_8) \\ -N_1 - e_5 N_5 - e_8 N_8 \\ -b_5 N_5 - b_8 N_8 \\ \frac{3}{2}(d_6 N_6 - d_5 N_5) \\ -N_2 - e_6 N_6 - e_5 N_5 \\ -b_6 N_6 - b_5 N_5 \\ \frac{3}{2}(d_7 N_7 - d_6 N_6) \\ -N_3 - e_7 N_7 - e_6 N_6 \\ -b_7 N_7 - b_6 N_6 \\ \frac{3}{2}(d_8 N_8 - d_7 N_7) \\ -N_4 - e_8 N_8 - e_7 N_7 \\ -b_8 N_8 - b_7 N_7 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

sendo,

$$a_k = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.40a)$$

$$b_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.40b)$$

$$c_k = \frac{\left(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2 \right)}{l_{ij}^2} \quad (3.40c)$$

$$d_k = -\frac{y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \quad (3.40d)$$

$$e_k = \frac{\left(\frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2 \right)}{l_{ij}^2} \quad (3.40e)$$

com,

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (3.41a)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (3.41b)$$

$$l_{ij}^2 = \left(x_{ij}^2 + y_{ij}^2 \right) \quad (3.41c)$$

Os valores de $k = 5,6,7,8$ ocorrem quando $ij = 12,23,34,41$.

A matriz que relaciona componentes de deslocamento e deformação $[B]$ é obtida dos vetores $\langle H_{(\xi,\eta)}^x \rangle$ e $\langle H_{(\xi,\eta)}^y \rangle$ definidos em (3.38) e (3.39)

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial H_{(\xi,\eta)}^x / \partial x \\ \partial H_{(\xi,\eta)}^y / \partial y \\ \partial H_{(\xi,\eta)}^x / \partial y + \partial H_{(\xi,\eta)}^y / \partial x \end{bmatrix} \quad (3.42a)$$

$$\begin{bmatrix} \partial H_{(\xi,\eta)}^x / \partial x \\ \partial H_{(\xi,\eta)}^y / \partial y \\ \partial H_{(\xi,\eta)}^x / \partial y + \partial H_{(\xi,\eta)}^y / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^x}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^x}{\partial \eta} \\ j_{21} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^y}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^y}{\partial \eta} \\ j_{11} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^x}{\partial \xi} + j_{12} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^x}{\partial \eta} + j_{21} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^y}{\partial \xi} + j_{22} \frac{\partial H_{(\xi,\eta)}^y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.42b)$$

A matriz jacobiana é dada por:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{11} \\ J_{11} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_{21} + x_{34} + \eta(x_{12} + x_{34}) & y_{21} + y_{34} + \eta(y_{12} + y_{34}) \\ x_{32} + x_{41} + \xi(x_{12} + x_{34}) & y_{32} + y_{41} + \xi(y_{12} + y_{34}) \end{bmatrix} \quad (3.43a)$$

$$j_{11} = \frac{J_{22}}{|J|} \quad j_{12} = \frac{-J_{12}}{|J|} \quad j_{21} = \frac{-J_{21}}{|J|} \quad j_{22} = \frac{J_{11}}{|J|} \quad (3.43b)$$

As derivadas das funções de forma são:

$$\partial N / \partial \xi = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2\xi + \eta)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(2\xi - \eta)(1 - \eta) \\ \frac{1}{4}(2\xi + \eta)(1 + \eta) \\ \frac{1}{4}(2\xi - \eta)(1 + \eta) \\ -\xi(1 - \eta) \\ \frac{1}{2}(1 - \eta^2) \\ -\xi(1 + \eta) \\ -\frac{1}{2}(1 - \eta^2) \end{bmatrix} \quad (3.44a)$$

$$\partial N / \partial \eta = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2\eta + \xi)(1 - \xi) \\ \frac{1}{4}(2\eta - \xi)(1 - \xi) \\ \frac{1}{4}(2\eta + \xi)(1 + \xi) \\ \frac{1}{4}(2\eta - \xi)(1 + \xi) \\ \frac{1}{4}(2\eta - \xi)(1 - \xi) \\ -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \\ -\eta(1 + \xi) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \\ -\eta(1 - \xi) \end{bmatrix} \quad (3.44b)$$

A matriz de rigidez do elemento de placa é dada por:

$$[K_b] = \int_{A^e} [B]^T [D]_b [B] dx dy \quad (3.45)$$

3.2.3 Matriz de Rigidez de Acoplamento Membrana-Flexão

A existência da matriz de acoplamento acontece devido ao acoplamento existente entre as deformações de extensão, torção e flexão pertinentes aos materiais laminados. Estes fenômenos ocorrem principalmente quando é perdida a isotropia devida à plasticidade nos pontos de integração ao longo da espessura do elemento, onde são satisfeitas as equações constitutivas do material. Para obter as matrizes, aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \quad (3.46)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material, z é a coordenada de um ponto geral na espessura do elemento medido desde o plano de referencia, sendo este plano localizado na metade da espessura do elemento e finalmente $[K]$ representa a matriz de rigidez do elemento.

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_V \begin{bmatrix} [B]_m^T \\ z[B]_f^T \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} [B]_m \\ z[B]_f \end{bmatrix} dV \quad (3.47)$$

A equação anterior pode ser expandida para apresentar a contribuição de cada campo de deformação na matriz de rigidez global do elemento, obtendo-se:

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_V [B]_m^T [D] [B]_m dV & \int_V [B]_m^T z [D] [B]_f dV \\ \int_V [B]_f^T z [D] [B]_m dV & \int_V [B]_f^T z^2 [D] [B]_f dV \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde,

$$\begin{aligned} [K_{mb}] &= \int_V [B]_m^T z [D] [B]_f dV \\ [K_{bm}] &= \int_V [B]_f^T z [D] [B]_m dV \end{aligned} \quad (3.49)$$

As integrais das equações anteriores são resolvidas numericamente. Uma integração de 3x3 usando a fórmula da quadratura de Gauss-Legendre é utilizada sobre a área do elemento e uma mesma regra de integração com cinco pontos ao longo da espessura. Verifica-se que para a análise elástica de placas os termos das diagonais são zero, logo os campos de flexão e

Tendo em vista que as equações de equilíbrio do elemento são estabelecidas num sistema global de referência e que todas as discussões apresentadas até o momento são construídas segundo o sistema local do elemento, é necessário estabelecer uma relação de transformação entre o sistema local e o sistema global. Os deslocamentos do nó i , do elemento e são transformados do sistema global para o local por:

$$\{U_i^e\}^L = [T_r] \{U_i^e\}^G \quad (3.52)$$

onde $[T_r]$ é a matriz de transformação global-local, como indicado abaixo (Ver expressões (3.53.a), (3.53.b), (3.54) e (3.55)).

$$[T_r] = \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (3.53a)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (3.53b)$$

onde $[\lambda]$ é a sub-matriz que contem os cossenos diretores:

$$\begin{aligned} \lambda_{x'x} &= dx_1/a, \lambda_{y'x} = dy_1/a, \lambda_{z'x} = dz_1/a \\ \lambda_{x'z} &= dxx/ab, \lambda_{y'z} = dyy/ab, \lambda_{z'z} = dzz/ab \\ \lambda_{x'y} &= \lambda_{y'z} \lambda_{z'x} - \lambda_{z'z} \lambda_{y'x}, \lambda_{x'y} = \lambda_{z'z} \lambda_{x'x} - \lambda_{x'z} \lambda_{z'x} \\ \lambda_{x'y} &= \lambda_{y'z} \lambda_{z'x} - \lambda_{z'z} \lambda_{y'x}, \lambda_{x'y} = \lambda_{z'z} \lambda_{x'x} - \lambda_{x'z} \lambda_{z'x}, \lambda_{z'y} = \lambda_{x'z} \lambda_{y'x} - \lambda_{y'z} \lambda_{x'x} \end{aligned} \quad (3.54)$$

com,

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 - x_1, dx_2 = x_4 - x_1, dx_3 = x_4 - x_2 \\ dy_1 &= y_2 - y_1, dy_2 = y_4 - y_1, dy_3 = y_4 - y_2 \\ dz_1 &= z_2 - z_1, dz_2 = z_4 - z_1, dz_3 = z_4 - z_2 \\ dxx &= dy_1 dz_2 - dz_1 dy_2, dyy = dz_1 dx_2 - dx_1 dz_2, dzz = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2 \\ ab &= \sqrt{dxx^2 + dyy^2 + dzz^2}, a = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \end{aligned} \quad (3.55)$$

sendo que x_i, y_i e z_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, representam as coordenadas globais dos quatro nós do elemento finito.

CAPÍTULO 4

CONECTORES

4.1 DESCRIÇÃO

Os conectores de corte tipo “stud” são modelados no presente trabalho como elementos tridimensionais de barra viga-coluna (Ver Figura 4.1), os quais unem os planos médios da laje de concreto e da asa superior da viga de aço. O comprimento desta barra, em geral, é aproximado ao valor real do comprimento do conector. A malha de elementos finitos da viga mista no sentido longitudinal é construída em função da distribuição real dos conectores, de forma que a localização destes coincidam com os nós da laje de concreto e da viga de aço. No sentido transversal, os conectores podem ser combinados formando um conector equivalente. Esta simplificação é verificada nos exemplos correspondentes ao capítulo seis.

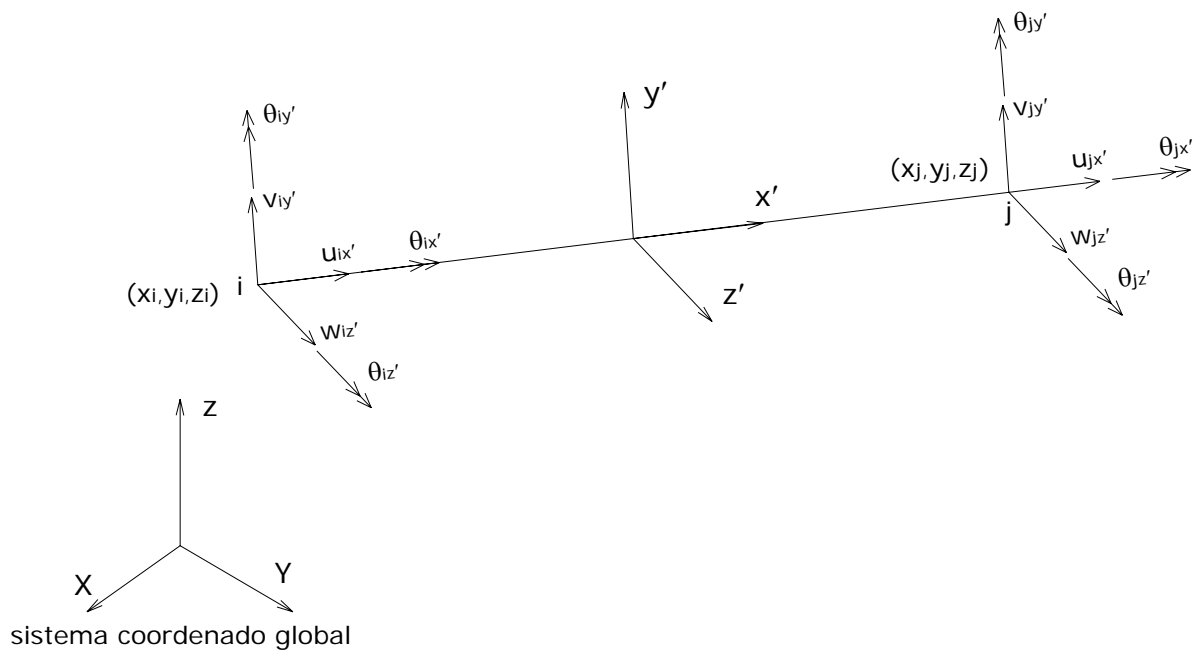


Figura 4.1: Elemento de barra viga-coluna tridimensional para a modelagem do conector

A Figura 4.2 mostra um conector de corte típico antes e depois da deformação. Se considera que este elemento transfere principalmente a força axial aplicada N e a força de corte F , principalmente por deformações axiais e de corte. Também é considerado que o conector pode estar submetido ao cortante nas duas direções ortogonais no plano de sua seção transversal. Devido ao fato que o conector é rodeado pelo concreto, Razaqpur & Nofal (1988) e Chiewanichakorn et al. (2004) supõem que as rigidezes de torção e flexão são desconsideradas da formulação do elemento. No entanto, Xia et al. (2008) estabelece que os conectores de corte podem resistir à flexão e que sua inclusão na modelagem é mais precisa, sendo calculada esta rigidez desde o equilíbrio de forças do elemento de barra. Hirst & Yeo (1979) apresentam resultados adequados considerando também as rigidezes de flexão do conector na modelagem.

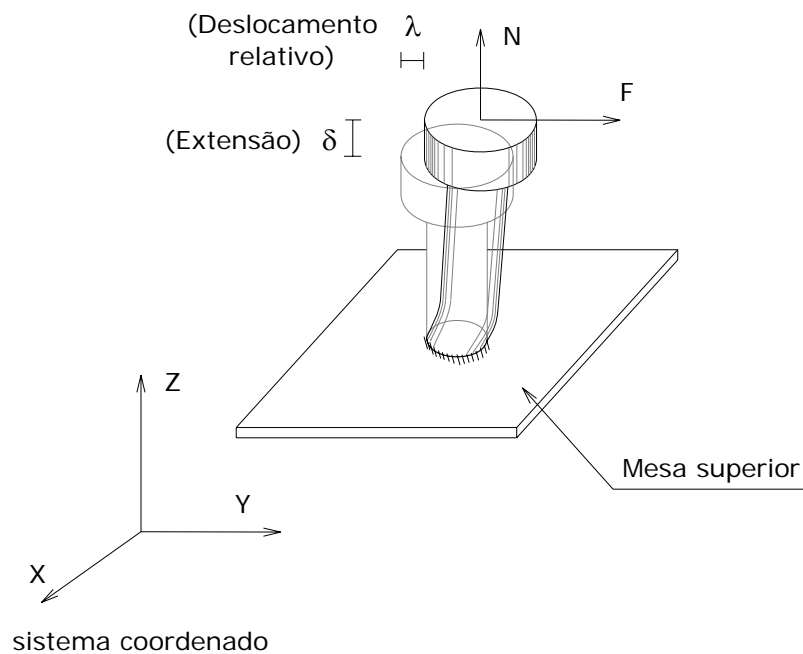


Figura 4.2: Conector de corte típico antes e depois da deformação

4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

O comportamento real dos conectores é complexo, sendo a principal função deles a de transmitir o cortante longitudinal e transversal da laje de concreto à viga de aço. Para isto é necessário conhecer a rigidez lateral dos conectores mediante a curva de deslocamento relativo versus força cortante, conhecida na literatura inglesa como “slip-shear curve”, obtida dos ensaios experimentais, também denominados na literatura inglesa como “Push out test”. É

importante destacar que esta rigidez é variável com o deslocamento desde o início do carregamento. No presente modelo numérico, o deslocamento relativo é considerado nas duas direcções do plano xy da laje de concreto.

Na literatura atual, existem diferentes alternativas para considerar a rigidez do conector. Alguns autores recomendam utilizar elementos de comprimento zero, que equivalem a considerar que as rigidezes axiais, flexão e laterais ficam sem acoplamento. Por outro lado, outros autores recomendam considerar o acoplamento que existe entre os cortantes e momentos nos extremos do elemento viga-coluna. No presente trabalho considera-se o acoplamento entre os termos de flexão e de cortante considerando o equilíbrio da barra viga-coluna. Portanto, conhecidos os cortantes nos extremos do elemento, podem-se determinar os momentos nos extremos por equilíbrio de forças. Para considerar a hipótese de igualdade dos giros nos planos unidos pelos conectores de corte, consideram-se valores muito grandes nas posições correspondentes aos termos de flexão.

Também, os ensaios experimentais mostram que praticamente a separação vertical entre a laje de concreto e viga de aço é desprezível. Para considerar este efeito é necessário que o termo relacionado à rigidez axial na matriz de rigidez do conector apresente um valor muito grande comparado aos outros termos.

A matriz de rigidez do elemento conector tem cinco graus de liberdade por cada nó, não sendo considerada a rigidez devido à torção, embora, por generalidade, são representadas às linhas e colunas correspondente a este grau de liberdade. Isto é devido ao fato que este elemento conecta o elemento de placa delgada de quatro nós da viga de aço que apresenta seis graus de liberdade por nó com o elemento de oito nós da placa grossa de concreto que apresenta cinco graus de liberdade por nó. Fazer a condensação estática para eliminar o grau de liberdade de torção na laje de concreto, equivale a não considerar o grau de liberdade de torção em ambos extremos do elemento viga-coluna. Assim a matriz final é obtida no sistema local simplesmente eliminando a linha e coluna correspondente ao grau de liberdade de torção.

A matriz proposta é obtida em base à matriz apresentada por Jiang et al. (2009), a qual é estendida para o caso tridimensional, sendo apresentada na equação (4.1), a seguir:

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix}
u_{ix'} & v_{iy'} & w_{iz'} & \theta_{ix'} & \theta_{iy'} & \theta_{iz'} & u_{jx'} & v_{iy'} & w_{jz'} & \theta_{jx'} & \theta_{jy'} & \theta_{jz'} \\
K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \beta_z h & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & -\beta_z h & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_z h^2}{2} \\
0 & 0 & \beta_y h & 0 & -\frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & -\beta_y h & 0 & -\frac{\beta_y h^2}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_t & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & \beta_y h \left(\frac{h^2}{3} + \frac{K_{\alpha z}}{4K_{sz}} \right) & 0 & 0 & \frac{\beta_y h^2}{2} & \frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & \beta_y h \left(\frac{h^2}{6} - \frac{K_{tz}}{4K_{sz}} \right) & 0 \\
0 & \frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \beta_z h \left(\frac{h^2}{3} + \frac{K_{\alpha y}}{4K_{sy}} \right) & 0 & -\frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \beta_z h \left(\frac{h^2}{6} - \frac{K_{ty}}{4K_{sy}} \right) \\
-K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta_z h & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & \beta_z h & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_z h^2}{2} \\
0 & 0 & -\beta_y h & 0 & \frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \beta_y h & 0 & \frac{\beta_y h^2}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_t & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & \beta_y h \left(\frac{h^2}{6} - \frac{K_{ty}}{4K_{sy}} \right) & 0 & 0 & \frac{\beta_y h^2}{2} & \frac{\beta_y h^2}{2} & 0 & \beta_y h \left(\frac{h^2}{3} + \frac{K_{tz}}{4K_{sz}} \right) & 0 \\
0 & \frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \beta_z h \left(\frac{h^2}{6} - \frac{K_{ty}}{4K_{sy}} \right) & 0 & -\frac{\beta_z h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \beta_z h \left(\frac{h^2}{3} + \frac{K_{tz}}{4K_{sz}} \right)
\end{bmatrix} \quad (4.1)$$

com,

$$K_{\theta} = \frac{4EI}{h} \quad (4.2a)$$

$$K_s = \frac{GA_s}{h} \quad (4.2b)$$

$$\beta_z = \frac{3K_{\theta_y}K_{s_y}}{(K_{s_y}h^3 + 3K_{\theta_y}h)} \quad (4.2c)$$

$$\beta_y = \frac{3K_{\theta_z}K_{s_z}}{(K_{s_z}h^3 + 3K_{\theta_z}h)} \quad (4.2d)$$

onde $E, G, I, A_s, h, K_{\theta}$ e K_s são o módulo de elasticidade, módulo de corte, momento de inércia, área de corte, altura, rigidez à flexão e rigidez ao corte do conector, respectivamente.

A matriz anterior é equivalente à matriz típica de uma barra de pórtico tridimensional viga-coluna, sendo apenas expressa em termos das rigidezes atuantes e não em função das propriedades da seção transversal como é usual. No trabalho de Jiang et al. (2009) é recomendado utilizar valores muito grandes para os termos da rigidez axial K_A e os termos de flexão K_{θ} para simular o efeito de barra ou conector rígido, que permite simular iguais deslocamentos na direcção axial da barra e iguais giros nos nós conectados por ele.

É importante notar que os termos correspondentes ao cortante expressos na matriz de rigidez da equação (4.1) com valor βh são iguais ao valor da rigidez lateral do conector (K_{s_y} ou K_{s_z}) quando K_{θ} é infinitamente grande.

No caso das posições dos termos de flexão, representados na matriz da equação (4.1) por os termos $\beta_y h(h^2/3 + K_{\theta_z}/4K_{s_z})$ e $\beta_z h(h^2/6 - K_{\theta_y}/4K_{s_y})$, acontece que estes são proporcionais ao valor de K_{θ} , quando este valor é muito grande, sendo desprezível o termo que o acompanha. Desta maneira fica estabelecida uma condição que permite estabelecer a igualdade entre os giros dos planos conectados pela barra. Esta opção é semelhante ao método da penalidade, na qual são colocados valores muito grandes em posições determinadas para forçar deslocamentos iguais.

O formulário anterior permite considerar uma matriz de rigidez um pouco mais direta, a qual é proposta neste trabalho por esta razão. Nesta matriz apresentam-se mais claramente os

valores dos termos das rigidezes em função só das rigidezes laterais existentes, sem necessidade de inserir valores muito grandes nestas posições. Assim, fornecido o valor das rigidezes laterais, pode-se determinar os demais termos por equilíbrio de forças, a exceção da rigidez axial que fica sem acoplamento em relação à flexão e ao corte, sendo este termo tratado independentemente.

É necessário esclarecer que a abordagem para conseguir compatibilidade nos deslocamentos aplicando grandes rigidezes em certas posições da matriz de rigidez da estrutura, não é a melhor opção de acordo com Izzuddin (2003). Valores muito grandes das rigidezes podem provocar um mau condicionamento da matriz, podendo-se não conseguir a convergência do processo não-linear, sendo então uma opção mais conveniente usar um procedimento exato.

Ainda assim, Huang et al. (1999) aplicaram o mesmo procedimento deste trabalho, embora empregando uma versão extendida da matriz inicialmente proposta por Razaqpur & Nofal (1988) que corresponde a uma matriz onde todas as rigidezes ficam desacopladas. Então, precisa-se de uma maior inversão de tempo na procura de valores adequados para estes termos grandes, de tal maneira que os valores numéricos limites do computador não sejam superados e a igualdade de deslocamentos seja satisfeita.

Na equação (4.4) é apresentada a matriz final do conector a utilizar neste trabalho. Esta matriz é equivalente à matriz da equação (4.1), embora expressas em termos das rigidezes laterais, onde os valores dos parâmetros g_1 , g_2 , ϕ_1 e ϕ_2 são definidos pelas seguintes equações:

$$g_1 = \frac{\phi_1}{2}, \quad g_2 = \frac{\phi_2}{2} \quad (4.3a)$$

$$\phi_{1,2} = \frac{12EI}{L^2 GA_s} \quad (4.3b)$$

A matriz da equação (4.4), diferente da matriz proposta na equação (4.1), permite colocar diretamente os valores das rigidezes laterais, sem depender do valor de K_θ . A condição de compatibilidade dos giros é conseguida fazendo os valores dos coeficientes de corte g_1 e g_2 muito grandes.

$$\mathbf{K}_{cl} = \begin{bmatrix}
u_{ix'} & v_{iy'} & w_{iz'} & \theta_{ix'} & \theta_{iy'} & \theta_{iz'} & u_{jx'} & v_{jy'} & w_{jz'} & \theta_{jx'} & \theta_{jy'} & \theta_{jz'} \\
K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & K_x & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L}{2} & 0 & -K_x & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L}{2} \\
0 & 0 & K_y & 0 & -\frac{K_y L}{2} & 0 & 0 & 0 & -K_y & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & K_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_t & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{K_y L}{2} & 0 & \frac{K_y L^2}{6}(2+g_2) & 0 & 0 & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 & \frac{K_y L^2}{6}(1-g_2) & 0 \\
0 & \frac{K_x L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L^2}{6}(2+g_1) & 0 & -\frac{K_x L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L^2}{6}(1-g_1) \\
-K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -K_x & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_x L}{2} & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_x L}{2} \\
0 & 0 & -K_y & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 & 0 & 0 & K_y & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -K_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_t & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 & \frac{K_y L^2}{6}(1-g_2) & 0 & 0 & 0 & \frac{K_y L}{2} & 0 & \frac{K_y L^2}{6}(2+g_2) & 0 \\
0 & \frac{K_x L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L^2}{6}(1-g_1) & 0 & -\frac{K_x L}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{K_x L^2}{6}(2+g_1)
\end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A matriz de rigidez da barra viga-coluna no sistema global é obtida da seguinte maneira:

$$K_c = [T]^T [K_{cl}] [T] \quad (4.5)$$

com,

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda] & [I] & [I] & [I] \\ [I] & [\lambda] & [I] & [I] \\ [I] & [I] & [\lambda] & [I] \\ [I] & [I] & [I] & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde $[\lambda]$ é a matriz de cossenos diretores dos eixos locais da barra e I é a matriz identidade quadrada de 3x3. A matriz $[\lambda]$ é calculada conforme à equação (4.7), onde x_i, y_i, z_i com $i=1,2$ corresponde às coordenadas globais dos nós do elemento de barra.

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$l_1 = (x_2 - x_1)/L, \quad l_2 = (y_2 - y_1)/L, \quad l_3 = (z_2 - z_1)/L$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 0$$

$$m_1 = n_2 l_3 - n_3 l_2, \quad m_2 = -n_1 l_3 + n_3 l_1, \quad m_3 = n_1 l_2 - n_2 l_1$$

4.3 EQUAÇÃO CONSTITUTIVA

Na modelagem dos conectores de corte é necessário conhecer a curva força-deslocamento relativa para simular a variação da rigidez do conector com o incremento da força de corte. Na literatura especializada, podem ser encontradas várias curvas experimentais para diferentes geometrias de conectores de corte tipo “shear-stud”, sendo umas das principais fontes o relatório experimental de Chapman & Barakrishnan (1964). Estas curvas são mostradas na Figura 4.3 para um grupo de conectores de diâmetro e altura variável. PA1, PA2, PA3, PA4 e PA5 representam códigos de identificação dos diferentes conectores, de acordo a sua geometria, usados no trabalho original de Chapman & Barakrishnan (1964).

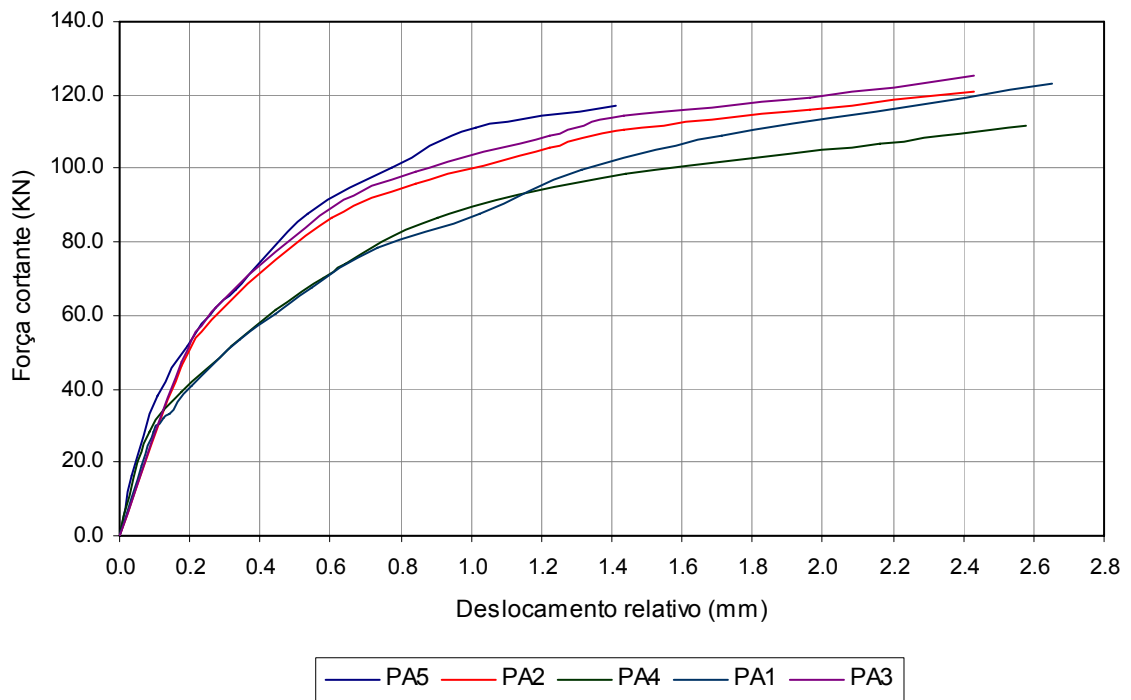


Figura 4.3: Curvas força-deslocamento para os conectores de corte usados no experimento de Chapman & Barakrishanan (1964)

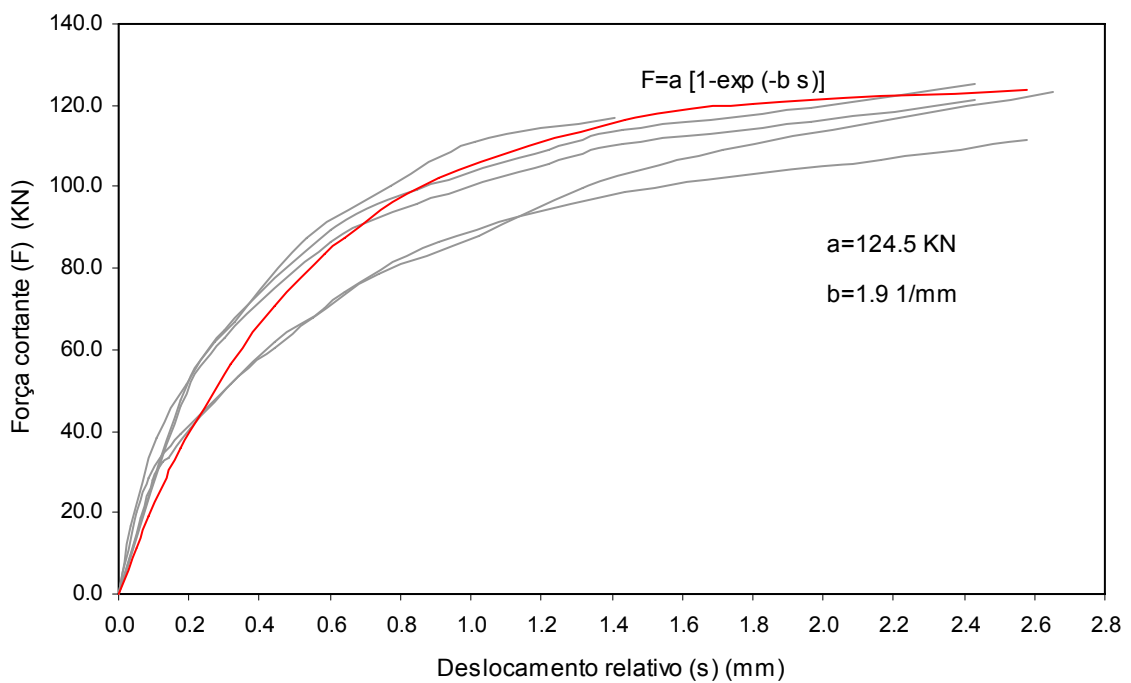


Figura 4.4 Ajuste das curvas força-deslocamento com o modelo exponencial proposto por Yam & Chapman (1972)

É possível estabelecer um ajuste de cada uma destas curvas mediante uma equação exponencial dependente de dois parâmetros a e b , como indicado na expressão (4.8). Esta forma de ajuste foi proposta por Yam & Chapman (1968) para análises numéricas.

$$F_{\alpha} = a[1 - e^{-bs_{\alpha}}] \quad (4.8)$$

Nessa equação F_{α} é a força de corte atuante no conector na direcção α , a e b são constantes que definem o tamanho e forma da curva e s_{α} é o deslocamento relativo associado à direcção α . Na Figura 4.4 é apresentado um ajuste feito com a fórmula exponencial proposta para as curvas mostradas na Figura 4.3. Por conveniência, a letra α é retirada e se supõe que uma direcção qualquer é considerada. Utilizando a equação (4.8), pode-se escrever:

$$\frac{dF}{ds} = k = abe^{-bs} \quad (4.9)$$

onde k é a rigidez de corte tangente relacionando a força de corte na barra com seu deslocamento relativo. O valor de k obtido corresponde aos valores de K_x e K_y da equação (4.4) para as direcções x e y , respectivamente. O incremento de deslocamento relativo pode ser calculado a partir da diferença dos incrementos dos deslocamentos Δv e Δw nos extremos i e j da barra (Ver Figura 4.1) como:

$$\Delta s_v = \Delta v_i - \Delta v_j \quad (4.10a)$$

$$\Delta s_w = \Delta w_i - \Delta w_j \quad (4.10b)$$

Para resolver problemas não lineares, um algoritmo incremental iterativo deve ser utilizado para calcular o vetor de forças atuantes no conector e o deslocamento relativo na interfase. Assim, para o incremento de carga n , as seguintes etapas devem ser aplicadas:

1. Determinar os deslocamentos nodais Δv^n e Δw^n nos extremos i e j da barra da maneira usual.
2. Utilizar a equação (4.10) para calcular os incrementos de deslocamentos relativos Δs_v^n e Δs_w^n nas direcções v e w . Calcular o vetor de forças incremental do conector

$\{\Delta P\}^n$ utilizando a matriz de rigidez do conector $[K]_{c1}^{n-1}$ da equação (4.4) e o vetor de deslocamentos nodais da barra $\{\Delta \delta\}^n$:

$$\{\Delta P\}^n = [K]_{c1}^{n-1} \{\Delta \delta\}^n \quad (4.11)$$

3. Adicionar Δs^n a s^{n-1} e $\{\Delta P\}^n$ a $\{P\}^{n-1}$, onde s^{n-1} e $\{P\}^{n-1}$ são o deslocamento relativo total e o vetor de forças total do conector correspondentes ao final do incremento de carga $(n-1)$.

$$s^n = s^{n-1} + \Delta s^n \quad (4.12a)$$

$$\{P\}^n = \{P\}^{n-1} + \{\Delta P\}^n \quad (4.12b)$$

As componentes do vetor $\{P\}^n$ incorpora as forças cortantes no conector de forma aproximada no final do incremento de carga n . A aproximação é válida quando pequenos incrementos de carga são considerados no processo incremental iterativo.

4. Utilizar s^n e a equação (4.9) para obter a rigidez do conector tangente k e reemplazar este valor, segun corresponda a direcção, nos termos K_x e K_y da matriz de rigidez $[K]_{c1}^n$ da equação (4.4). Finalmente fazer $[K]_{c1}^{n-1} = [K]_{c1}^n$ para ser utilizada na seguinte iteração.

CAPÍTULO 5

MONTAGEM

5.1 DESCRIÇÃO

O processo de montagem em um programa de elementos finitos é relacionado ao fluxo de dados, produto da interação entre a rotina de montagem da matriz de rigidez global da estrutura e a biblioteca de elementos finitos existente. Para formar um elemento é necessário acessar à geometria, conectividade e propriedades dos materiais. A montagem precisa do conhecimento dos graus de liberdade ativos e permitidos nos nós, assim como o formato em que a matriz de rigidez global é armazenada. No apêndice C são apresentados os diagramas de fluxos do programa computacional desenvolvido, onde é mostrada a interação entre as diversas rotinas que fazem o processo de montagem dos elementos finitos desenvolvidos.

A maior complicação no processo de montagem acontece quando uma estrutura apresenta múltiplos elementos finitos com diferentes números de nós e diferentes graus de liberdade por nó. Para solucionar este problema é necessário usar um algoritmo de solução geral denominado na literatura inglesa como “MET-VFC (Multiple element type assembler for variable freedom configuration)”. Este processo de montagem é bem descrito por Felipa (2009), sendo feito neste trabalho uma breve apresentação do processo. A implementação de um montador “MET-VFC” precisa da definição de um conjunto de dados adicionais relacionados aos graus de liberdade ao nível de nós e ao nível de elementos. Essa estrutura de dados complementar é apresentada a seguir.

5.2 ARRANJO PARA OS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ

Nesta parte define-se os graus de liberdade que são considerados nos nós e como eles são ordenados no código computacional. No presente trabalho é considerado um ordenamento

comum das variáveis de acordo aos programas de elementos finitos tridimensionais. Em cada nó três deslocamentos u_x, u_y, u_z e três rotações infinitesimais $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ são consideradas como graus de liberdade, sendo ordenados da seguinte maneira:

$$\{u_x \ u_y \ u_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z\} \quad (5.1)$$

Uma vez definido o ordenamento acima, este é mantido fixo no processo de cálculo. Este ordenamento é conhecido na literatura inglesa como NFA (Node Freedom Arrangement).

5.3 DESIGNAÇÃO DE CÓDIGOS DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ

Definir o NFA de acordo à equação (5.1), não necessariamente significa que todos os graus de liberdade precisam estar ativos num nó determinado. Por exemplo, num modelo de treliça espacial, que só tem graus de liberdade de translação (u_x, u_y, u_z), não é necessário considerar as rotações nas equações de equilíbrio do nó. Para manejar este tipo de situação é necessário usar uma marca que identifique os graus de liberdade usados no nó estudado.

Assim é definido o termo inglês NFS (Node Freedom Signature) que correspondem a uma seqüência de números zero e um. Quando a posição j corresponde ao número 1 no NFS, fica estabelecido que o grau de liberdade j na NFA está ativado; por outro lado se o valor é zero, então o grau de liberdade não está ativado. Por exemplo, um determinado nó pode apresentar o NFA da equação (5.1) e utilizar só três graus de liberdade (u_x, u_y, θ_z). Então o NFS é:

$$\{1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\} \quad (5.2)$$

Quando um nó não apresenta graus de liberdade ou nunca foi definido, a sua NFS contém simplesmente zeros.

5.4 TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ

A tabela de definição dos graus de liberdade dos nós, conhecido na literatura inglesa como NFAT (Node Freedom Allocation Table) é uma lista dos códigos dos graus de liberdade

dos nós da estrutura. Por exemplo, o NFAT para um problema de estado plano de tensões de uma estrutura que apresenta seis nós, em total, é:

$$NODFAT = \{110000 \ 110000 \ 110000 \ 110000 \ 110000 \ 110000\} \quad (5.3)$$

A expressão (5.3) estabelece que só dois graus de liberdade u_x , u_y são usados em cada um dos seis nós.

5.5 TABELA DE MAPEAMENTO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO NÓ NO SISTEMA DE EQUAÇÕES GLOBAL

Esta tabela denominada na literatura inglesa como NFMT (Node Freedom Map Table) fornece informação relacionada ao número da equação global que corresponde a um nó genérico n . Por exemplo, o nó n tem $k \geq 0$ graus de liberdade ativos, então os números das equações globais relacionadas ao nó são $i + j$, $j = 1, \dots, k$, onde i é denominado a equação base e é interpretada como o número da equação global antes que o nó n contribua com sua primeira equação. Assim o índice de equação base i é gravado na tabela denominada NFMT. O único argumento para a determinação da tabela é o NFAT do nó, onde os demais valores são calculados por simples incrementação.

5.6 DESIGNAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO

Denominada na literatura inglesa como EFS (Element Freedom Signature) corresponde a uma estrutura de dados que comparte similaridade com a NFAT, mas fornece informação dos graus de liberdade ao nível do elemento e não ao nível global. Especificamente esta informação determina com que graus de liberdade um elemento determinado contribui à rigidez da estrutura.

A nomenclatura EFS é mais bem descrita mediante um exemplo. Num programa de elementos finitos todos os nós podem apresentar os seis graus de liberdade ativos (111111). O programa pode também incluir um elemento de barra de dois nós, o qual contribui só com os graus de liberdade translacionais associados a ele. Então o EFS de esse elemento é:

$$EFS = \{111000 \quad 111000\} \quad (5.4)$$

Para um elemento de viga espacial de três nós, onde o terceiro nó corresponde a um nó de orientação, tem-se:

$$EFS = \{111111 \quad 111111 \quad 000000\} \quad (5.5)$$

Esta informação junto à NFAT e NFMT é usada para construir a tabela dos graus de liberdade dos elementos. Esta tabela é uma lista unidimensional de comprimento igual ao número de graus de liberdade do elemento. Quando o grau de liberdade do elemento i é correspondido pelo grau de liberdade k na estrutura global, então o EFS do elemento i contém o grau de liberdade k .

5.7 PROCEDIMENTO DE MONTAGEM E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

O procedimento Frontal proposto por Irons (1970) resulta atrativo para o tratamento do processo de montagem devido a sua economia no tempo de processamento, embora em sua versão original não é adequado para tratar problemas com diferentes números de graus de liberdade por nó. Godbole & et al. (1990) propõem em seu trabalho, um procedimento frontal modificado para a montagem dos elementos com diferentes números de nós e diferente número de graus de liberdade por nó. Embora o procedimento seja adequado para tratar problemas tridimensionais, apresenta o inconveniente de que a numeração dos elementos deve ser feita do elemento com maior número de graus de liberdade até o elemento com menor número de graus de liberdade.

Nesse trabalho adotou-se o procedimento tipo banda, devido a sua fácil implementação computacional, sem a necessidade de ter que enfatizar uma numeração especial para os elementos. Um inconveniente do processo surge devido à aplicação direta de equações de restrições conhecidas na literatura inglesa como “Constrains”, onde a largura de banda inicial é modificada, perdendo a simetria (Ver Webb, 1990). Entretanto, o fato anterior não foi um problema, pois a compatibilidade nos deslocamentos do elemento barra foi simulada utilizando rigidezes grandes nas posições desejadas.

5.8 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Na presente aplicação, é mostrado o processo de montagem das rigidezes para uma viga mista no plano. Este exemplo é adaptado de Guezouli & Aribert (2001) e ampliado para explicar as definições tratadas neste capítulo. A viga de aço e a laje de concreto são representadas por elementos planos de barra com três graus de liberdade por nó. Finalmente o conector por um elemento com deslocamentos longitudinais em cada nó e um mesmo giro para toda a barra. A estrutura é mostrada na Figura 5.1.

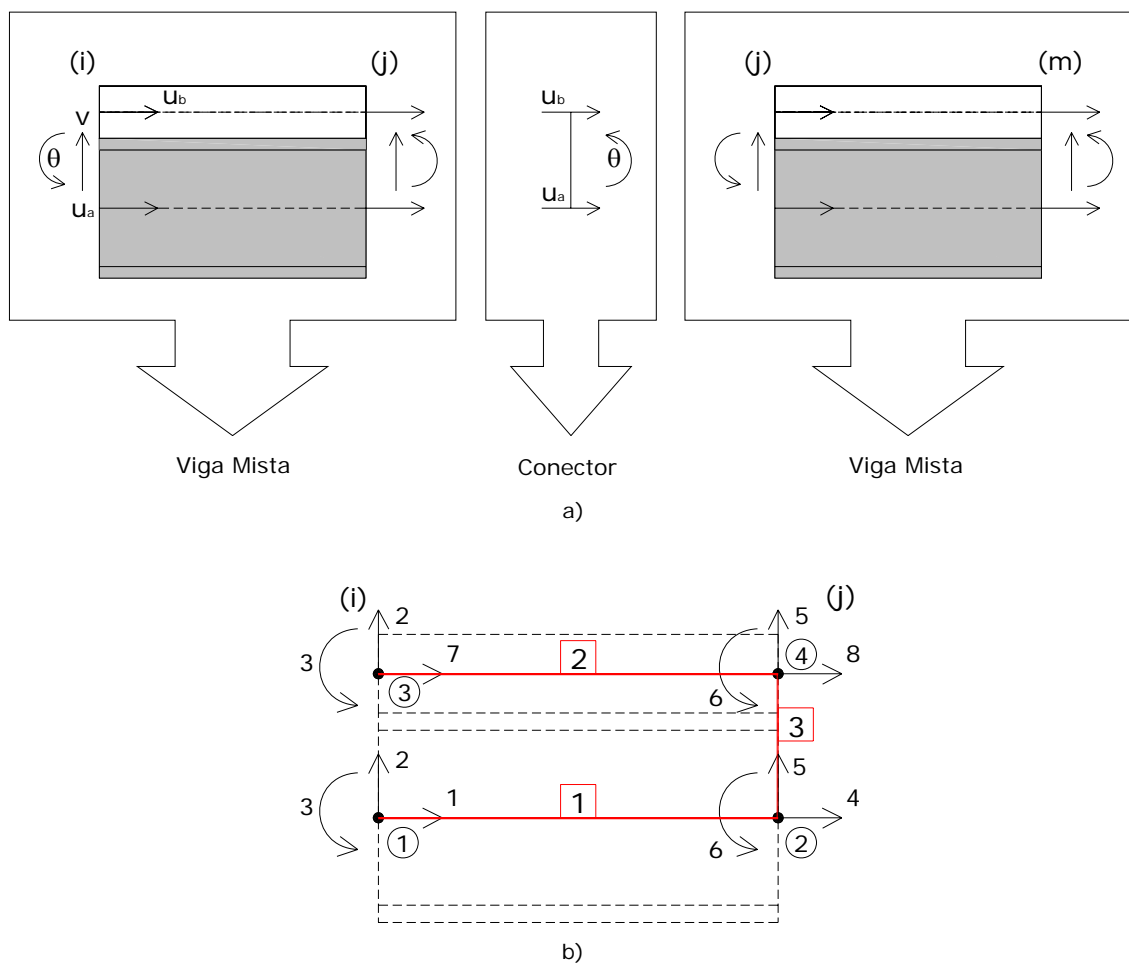


Figura 5.1: a) Elementos que conformam a viga mista b) Elemento de viga mista montado

O elemento finito de seção mista é composto de um elemento de concreto e de um elemento de aço, apresentando dois nós cada um deles, sendo oito os graus de liberdade totais na estrutura $\{u_i^b \ u_i^a \ v_i \ \theta_i \ u_j^b \ u_j^a \ v_j \ \theta_j\}$. O elemento de conexão que une os dois

elementos anteriores representa o conector de corte que contribui aos graus de liberdade u_j^b (deslocamento axial do concreto), u_j^a (deslocamento axial do aço) e θ (rotação das seções de concreto e aço). Com a finalidade de mostrar a construção da matriz de rigidez de um elemento de seção mista com conector, podem-se considerar as contribuições dos elementos componentes nos graus de liberdade correspondentes, como se indica na Figura 5.2. Considerar que além das rotações, os deslocamentos verticais são iguais em cada seção, então $v_i^a = v_i^b = v_i$ e $v_j^a = v_j^b = v_j$.

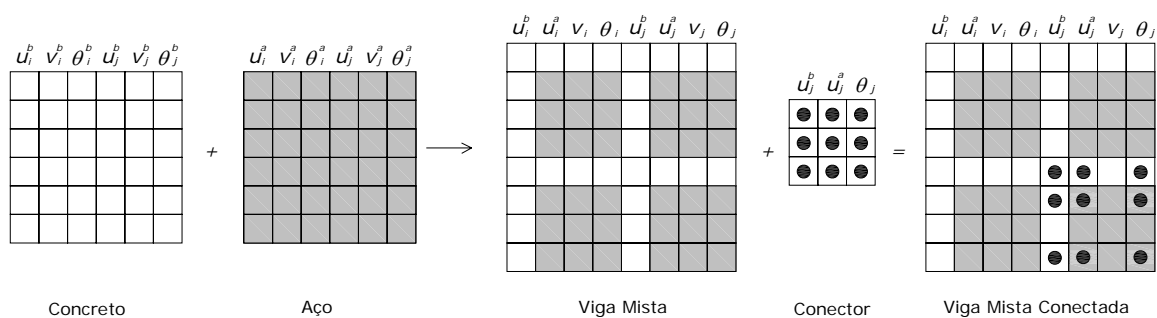


Figura 5.2: Construção da matriz de rigidez de um elemento finito de seção mista

A Tabela 5.1 apresenta a numeração global para os graus de liberdade na estrutura (Ver Figura 5.1b) e a que nós estão ligados.

Tabela 5.1: Graus de liberdade globais e nós na estrutura

Grau de liberdade Global (numeração)	1	2	3	4	5	6	7	8
Grau de liberdade Global	u_i^a	v_i	θ_i	u_j^a	v_j	θ_j	u_i^b	u_j^b

A Tabela 5.2 apresenta a construção das tabelas denominadas EFS e EFT definidas nas seções anteriores e que são de utilidade para o processo de montagem.

Tabela 5.2: Estrutura de dados de liberdade do elemento

Elemento	Tipo	Nós	EFS	EFT
1	barra-coluna	1,2	{110001,110001}	{1,2,3,4,5,6}
2	barra-coluna	3,4	{110001,110001}	{7,2,3,8,5,6}
3	conector	2,4	{110001,110001}	{4,5,6,8,5,6}

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES

6.1 APLICAÇÕES EM CONCRETO ARMADO

6.1.1 Placas de Concreto Armado de Peter (1966)

6.1.1.1 Aspectos Gerais

Os resultados experimentais obtidos por Peter (1966) em placas de concreto submetidas a tensões uniaxiais são usados para testar o modelo de concreto armado em tração (modelo de “tension stiffening”), devido a que o concreto fissurado tem uma participação relevante na resposta nestas placas.

6.1.1.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

As placas analisadas são quadradas de 160 cm x 160 cm com uma espessura constante de 8cm. A malha do aço é uniformemente distribuída e inclinada com relação ao eixo da carga aplicada, como se mostra na Figura 6.1. Cinco placas com igual quantidade de armadura em ambas direções e um ângulo variável de 0° até 40°, em incrementos de 10°, são analisadas.

No experimento a força de tração N foi transferida a borda da placa com um mecanismo que permite uma distribuição uniforme das tensões. Uma área quadrada de 100 cm x 100 cm de cada placa foi considerada para medir os deslocamentos d na direção da força aplicada e o deslocamento transversal d_h . As propriedades usadas na análise são especificadas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Parâmetros para o problema

Propriedades dos Materiais (cm,KN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2000	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	2.5	Tensão de Escoamento	$F_y =$	37.1
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.195	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	(var.)
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0003	(*) uma correção é feita devido ao ângulo		
Coeficiente de tração	$\alpha =$	0.8 *	variável entre o aço e a direção da fissura		
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.0025			

Fonte: Figueiras (1983)

6.1.1.3 Modelo de elementos finitos

Apenas um elemento finito é utilizado para a análise das cinco placas. Este elemento representa uma região quadrada de 100 cm x 100 cm, onde os deslocamentos experimentais foram medidos.

Na Figura 6.1 é representada a geometria da placa e a malha de aço usado no experimento. Na Figura 6.2 é mostrada a dimensão do elemento finito adotado, assim como as condições de contorno e o padrão de camadas considerado para o aço e concreto.

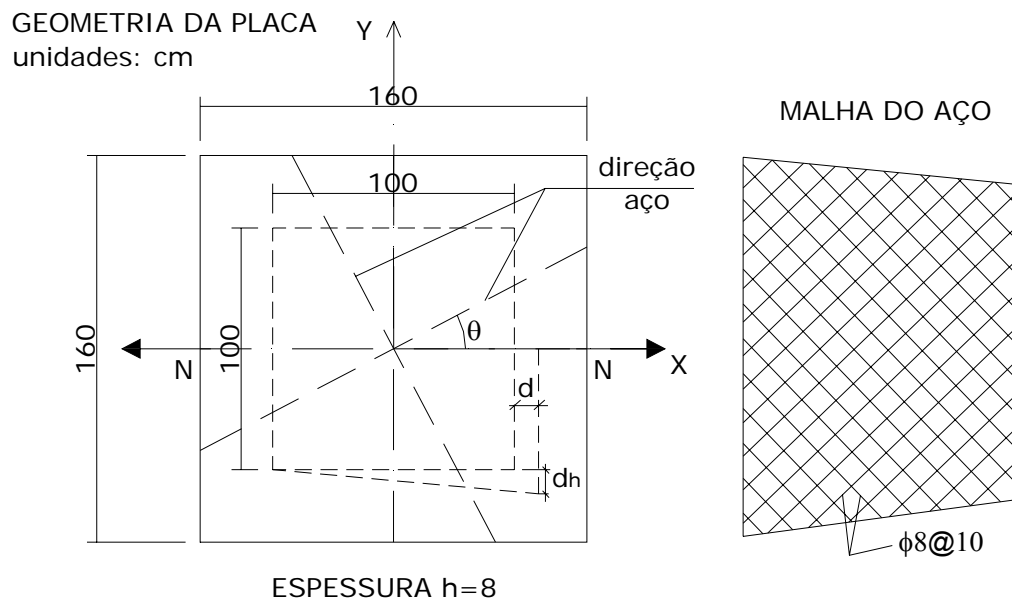


Figura 6.1: Geometria e armadura na placas de Peter (1966)

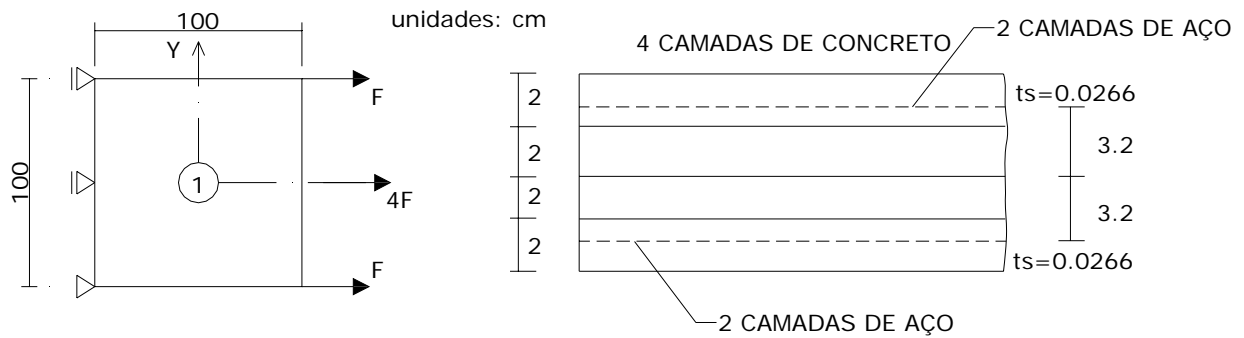


Figura 6.2: Idealização da placa com o método dos elementos finitos

6.1.1.4 Resultados

Na Figura 6.3 os resultados obtidos para as placas armadas com malhas de aço inclinadas com ângulos de $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 20^\circ$ são comparados com os resultados experimentais correspondentes. A concordância entre as respostas numéricas e experimentais é boa. Na Figura 6.4 os resultados numéricos e experimentais são comparados para os ângulos de reforço de $\theta = 30^\circ$ e $\theta = 40^\circ$. Os deslocamentos obtidos com o presente modelo apresentam uma boa correlação.

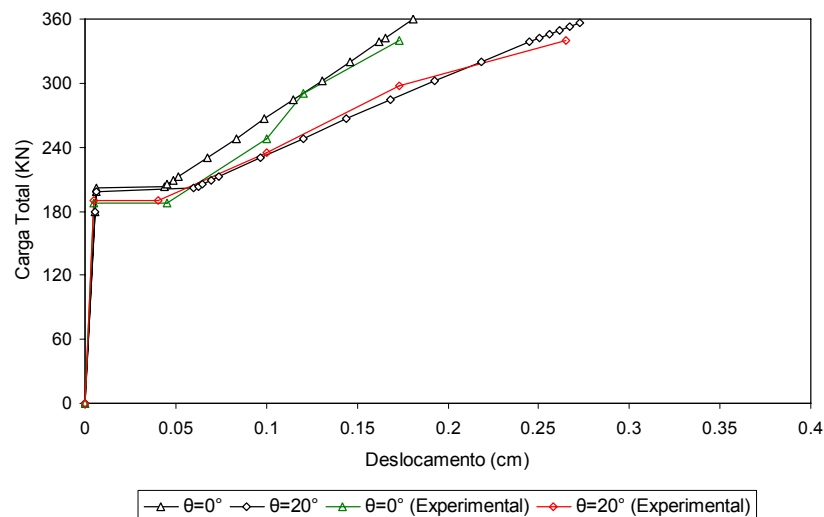


Figura 6.3: Comparação das curvas cargas -deslocamento longitudinal.

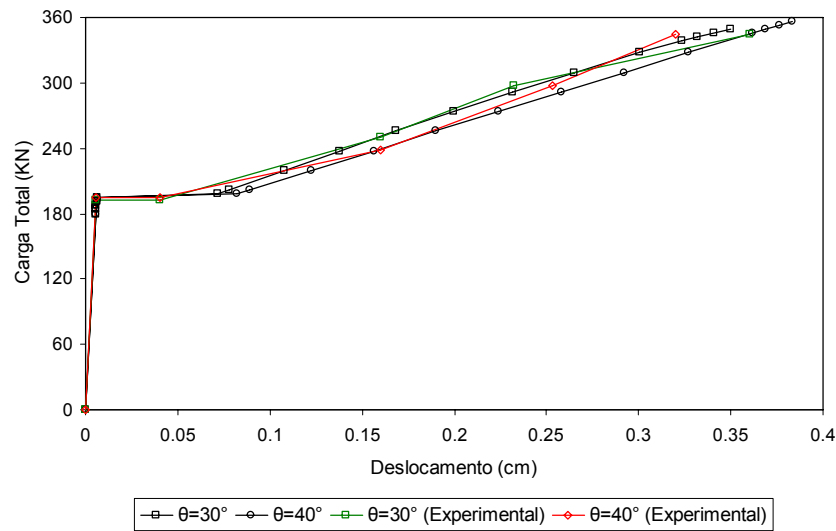


Figura 6.4: Comparação das curvas cargas-deslocamento longitudinal

Na Figura 6.5, é mostrada a variação dos deslocamentos transversais d_h com o ângulo de reforço θ para uma carga aplicada de 343 KN. Estes deslocamentos transversais representam a deformação de corte, então a rigidez de corte da placa depende do ângulo de reforço ($\theta \neq 0$). Assim, o módulo de corte G_c do concreto fissurado é decisivo para o cálculo destes deslocamentos. A linha contínua representa o caso em que o módulo de corte é igual a zero ($G_c = 0$). Os pontos referidos como ‘presente análise’ são obtidos considerando um valor do módulo de corte igual a:

$$G_c = 0.25G(1 - \varepsilon_1 / 0.0045) \quad (6.1)$$

onde ε_1 é a deformação normal ao plano da fissura. Os deslocamentos obtidos com diferentes valores de G_c para o ângulo de reforço $\theta = 20^\circ$ graus é também mostrado. Nestes casos considere-se os módulos de corte G_{c1} e G_{c2} dados por:

$$\begin{aligned} G_{c2} &= 0.25G(1 - \varepsilon_1 / 0.0040) \\ G_{c1} &= 0.25G(1 - \varepsilon_1 / 0.0050) \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde G é o módulo de corte elástico.

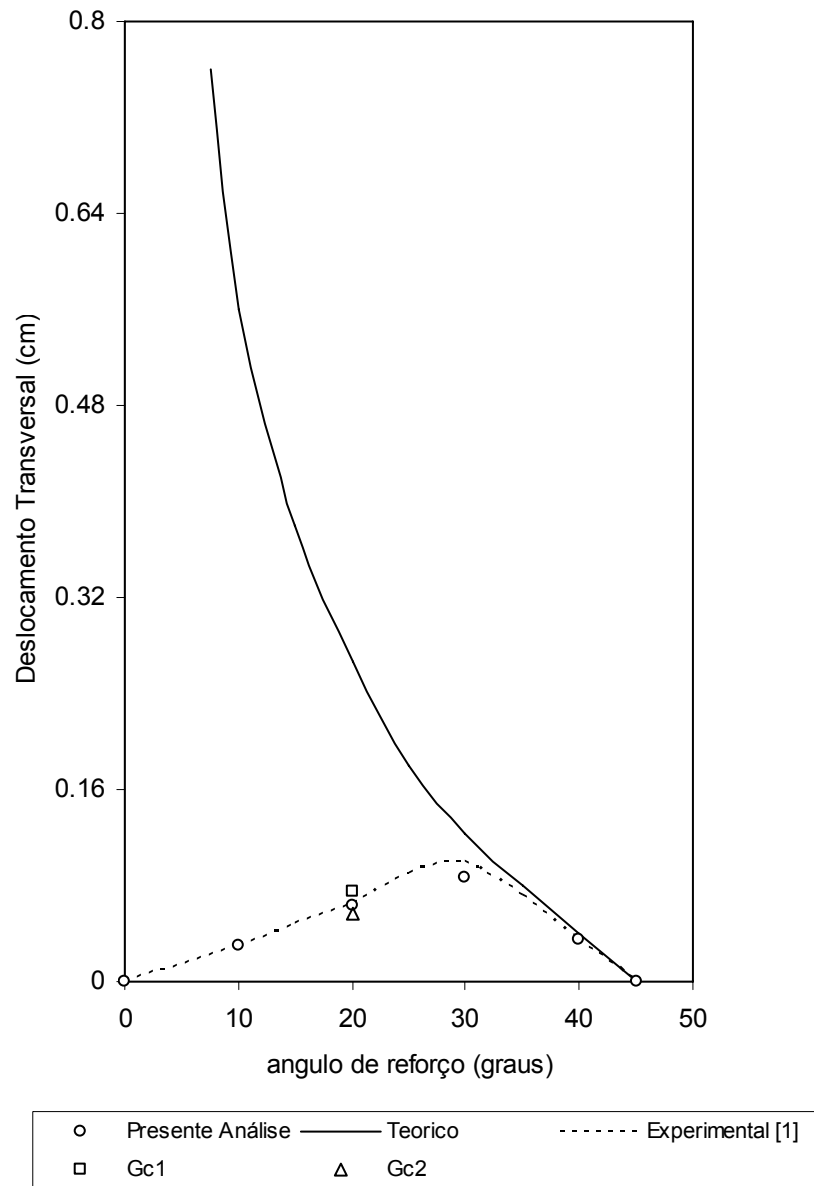


Figura 6.5: Variação do deslocamento transversal com o ângulo de reforço para um nível de carga de 343 kN

6.1.2 Placas de Concreto Armado de Cárdenas e Sozen (1968)

6.1.2.1 Aspectos Gerais

Placas retangulares ensaiadas experimentalmente por Cárdenas & Sozen (1968) são analisadas. As placas estudadas neste trabalho correspondem às placas denominadas no experimento como B7 e B10 e submetidas a momentos de flexão uniaxial (Ver Hu & Schnobrich, 1991 e Vebo & Ghali, 1977).

6.1.2.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

As características geométricas e as cargas das placas retangulares ensaiadas são mostradas na Figura 6.6, e as orientações das malhas de armadura superior e inferior são mostradas na Figura 6.7. As propriedades usadas na análise são especificadas na Tabela 6.2 e Tabela 6.3.

Tabela 6.2: Parâmetros para o problema

Propriedades dos Materiais (cm,kN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2067	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20670
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	(variavel)	Tensão de Escoamento	$F_y =$	34.45
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	(variavel)	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	(var.)
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035			
Coefficiente de tração	$\alpha =$	0.6			
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.002			

Fonte: Figueiras (1983)

Tabela 6.3: Propriedades do material para os espécimes

Propriedades dos Materiais (cm,kN)				
Especimen	f_c	f_t	f_y	θ (graus)
B7	3.55	0.30	34.45	45.00
B10	3.39	0.25	34.45	0.00

Fonte: Figueiras (1983)

6.1.2.3 Modelo de elementos finitos

Apenas um elemento finito foi considerado para a análise das placas na região de momento constante. A simetria foi considerada na discretização das placas B7 e B10. A idealização, condições de contorno e as cargas aplicadas são mostradas na Figura 6.7.

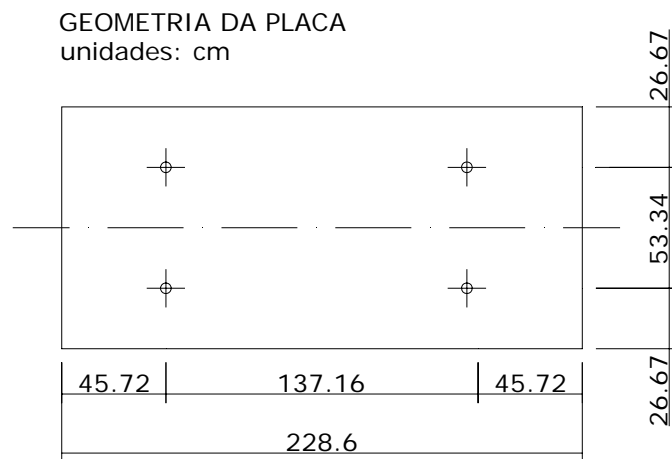


Figura 6.6: Geometria das placas

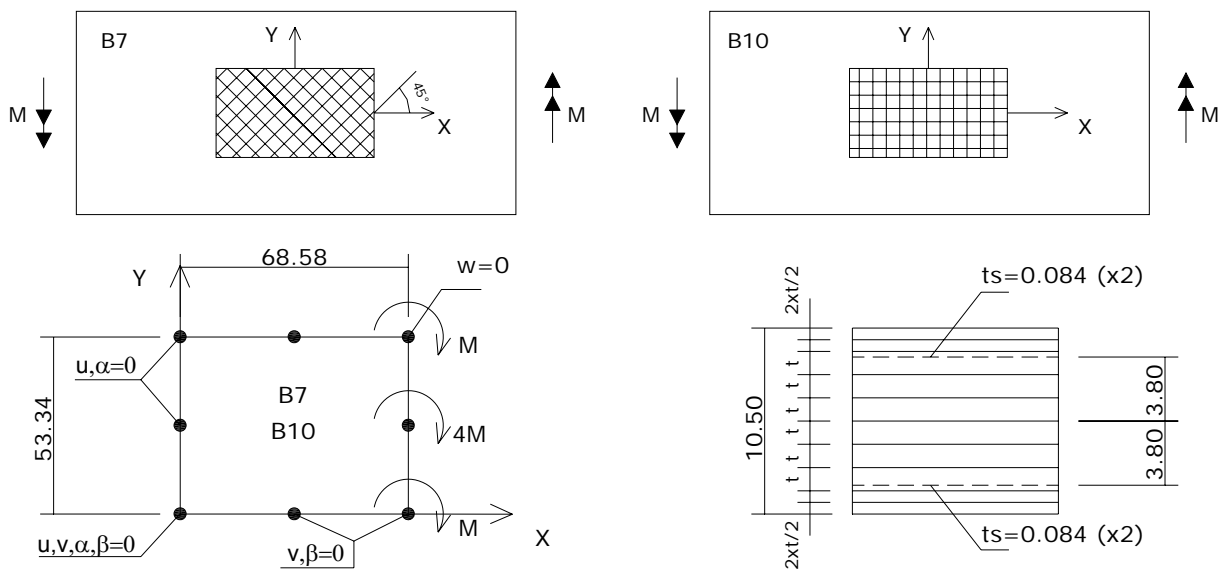


Figura 6.7: Idealização das placas em elementos finitos

6.1.2.4 Resultados

Os resultados obtidos mostram uma boa correlação com os resultados experimentais e são mostrados na Tabela 6.4 e na Figura 6.8 e na Figura 6.9.

Tabela 6.4: Comparação dos momentos de fissuração e momentos de escoamento

Specimen	Experimental (kN-cm / cm)		Presente Análise (kN-cm / cm)	
	Fissuração	Escoamento	Fissuração	Escoamento
B7	7.4	24.9	6.4	24.3
B10	6.1	24.7	6.0	25.2

Na Figura 6.8, são mostrados os resultados para a placa B7, o primeiro diagrama começando de acima para abaixo corresponde ao diagrama momento-encurtamento na fibra extrema em compressão do concreto. O segundo diagrama corresponde ao incremento na deformação do aço em tração com o incremento do momento atuante. Razoável correlação é obtida para estes diagramas comparados com os valores experimentais.

Finalmente o último diagrama mostra a variação da curvatura na seção com o incremento do momento atuante. Também neste diagrama existe uma boa correlação com os valores experimentais, além de uma dependência dos resultados com o parametro ε_m . Este parâmetro determina a quantidade de amolecimento a considerar para o concreto tracionado e tem o mesmo significado que o parametro ε_m da Figura 2.5. O melhor resultado é obtido para um valor de ε_m igual a 0.002 (corrigido para considerar a efeito da inclinação da armadura respeito à tensão principal de acordo com Leonhardt, 1979), embora o processo incremental iterativo utilizado (Newton Raphson Modificado) não permite facilmente obter valores de deformações grandes para casi um mesmo valor de tensão escoamento.

Na Figura 6.9, são mostrados resultados similares para a placa B10 na mesma ordem e significado que para os diagramas da Figura 6.8. Em geral, todos os diagramas apresentam resultados aceitáveis comparados aos valores experimentais. Particularmente, para o segundo diagrama desta figura é mostrado que a deformação experimental de escoamento do aço é maior que o valor numérico obtido com o presente modelo numerico (0.00167). Assim, este resultado pode indicar que o diagrama constitutivo do aço utilizado neste exemplo não é o mais adequado para simular a resposta experimental.

Finalmente, foram testados membros de concreto simplesmente armado em condições de carregamento simples (uniaxias). Pode-se concluir que o modelo numérico, em geral, forneceu resultados coerentes nestes dois primeiros exemplos, demonstrando-se, que o modelo de concreto fissurado usando uma representação distribuída e o modelo elasto-plástico para o concreto em compressão, resultaram adequados para o elemento finito considerado. Nos próximos exemplos são apresentadas estruturas de vigas, placas e colunas frente a situações de carga mais gerais.

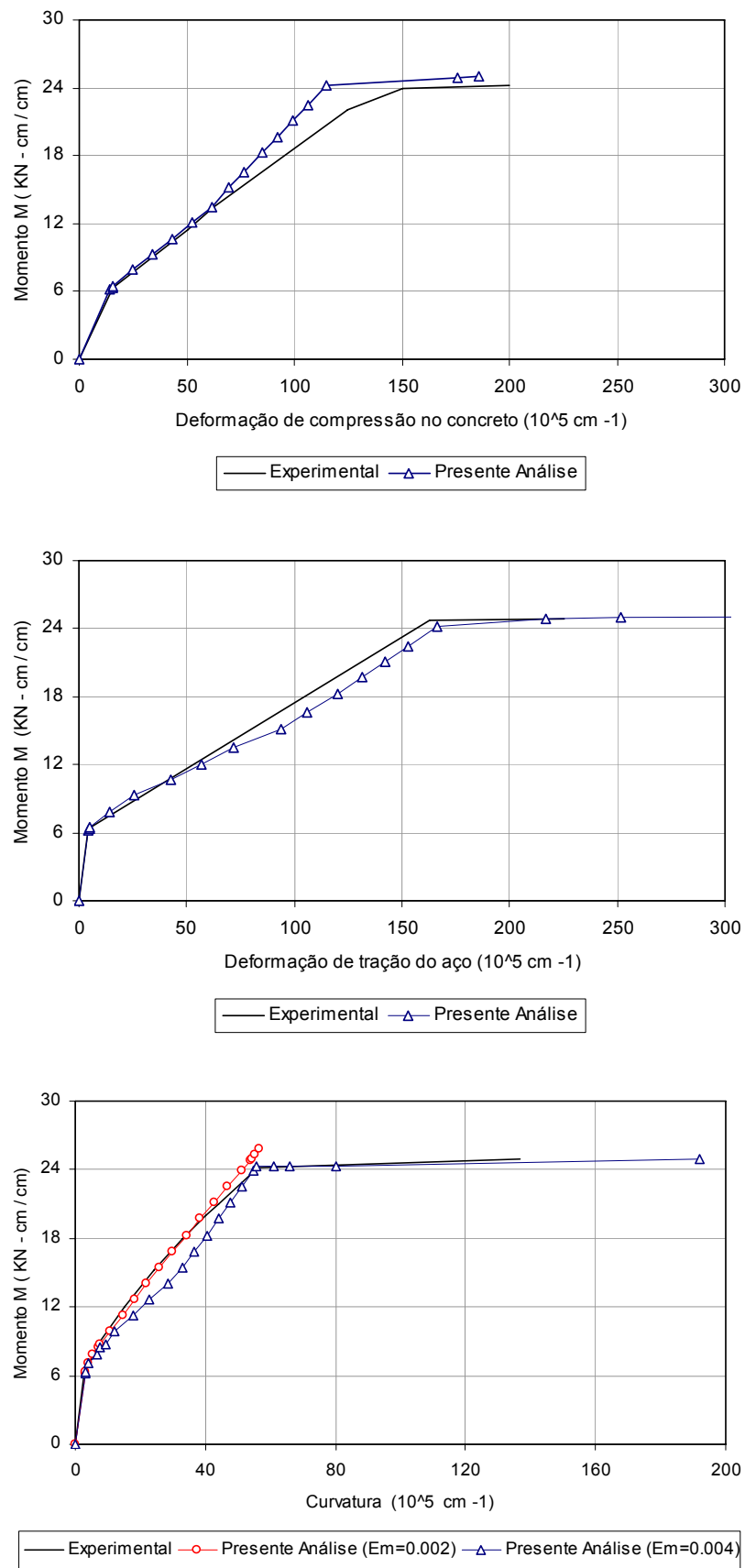


Figura 6.8: Diagramas para o espécime B7

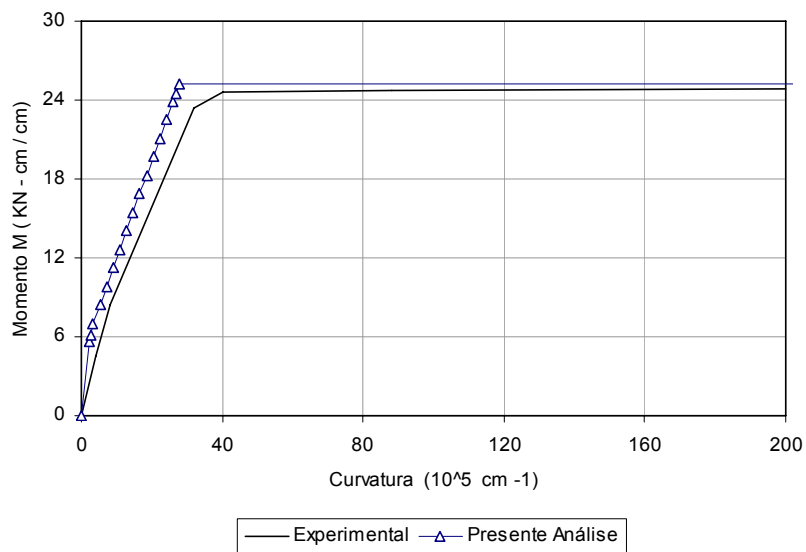
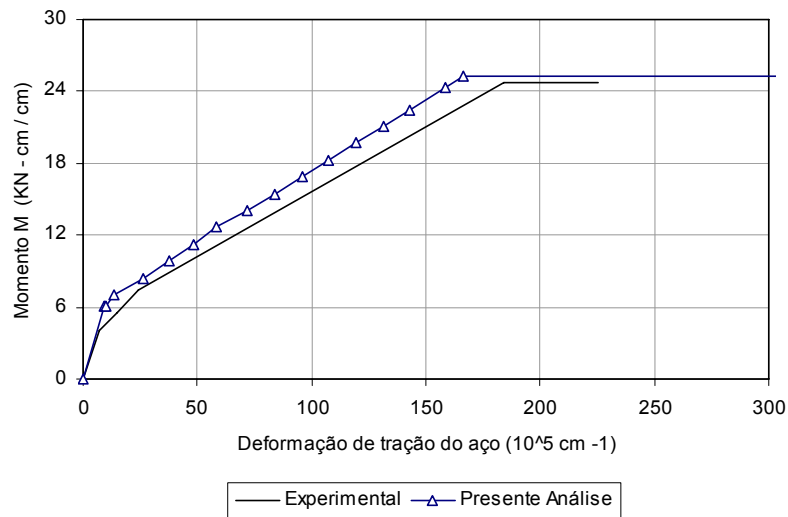
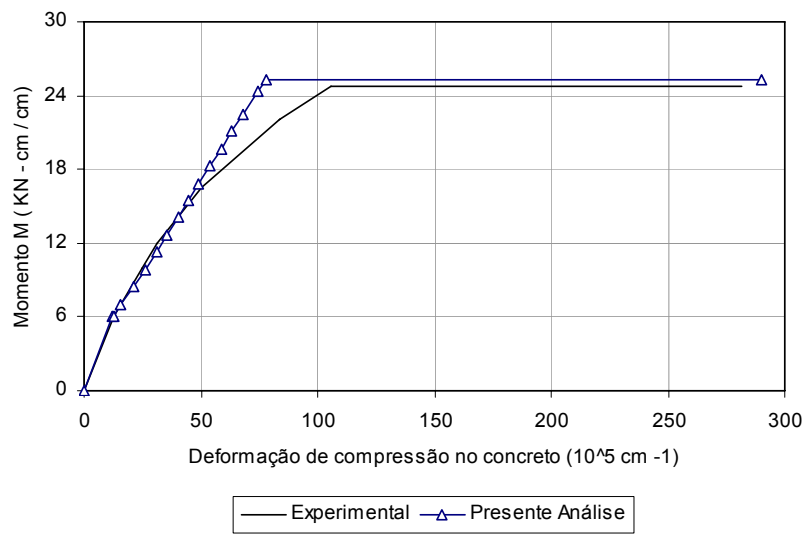


Figura 6.9: Diagramas para o espécime B10

6.1.3 Viga de Concreto Armado de Bresler e Scordelis (1963)

6.1.3.1 Aspectos Gerais

Duas vigas simplesmente apoiadas ensaiadas por Bresler e Scordelis (1963), designadas como A-3 e B-3 são selecionadas neste estudo. Ambas vigas estão sujeitas a uma carga concentrada na seção correspondente ao meio do vão. O tipo de falha observada experimentalmente em ambas vigas foi frágil devido à ação da flexão e da compressão. As vigas apresentam falha por esmagamento do concreto em compressão perto da zona da seção localizada no meio do vão.

6.1.3.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A geometria e as seções transversais são mostradas na Figura 6.10. As propriedades dos materiais são também especificadas na Tabela 6.5 e Tabela 6.6.

Tabela 6.5: Parâmetros para o problema da viga A-3

Propriedades dos Materiais (cm,KN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2980	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20530
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	8150 ^o
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	4.3	Tensão de Escoamento	$F_y =$	55.2 [#]
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.43	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.003	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20120
Coefficiente de Tração	$\alpha =$	0.6 (*)	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0 ⁴
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.0015 (*)	Tensão de Escoamento	$F_y =$	34.52 [#]
(*) só para ás 4 camadas inferiores			Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0

Fonte: Figueiras (1983)

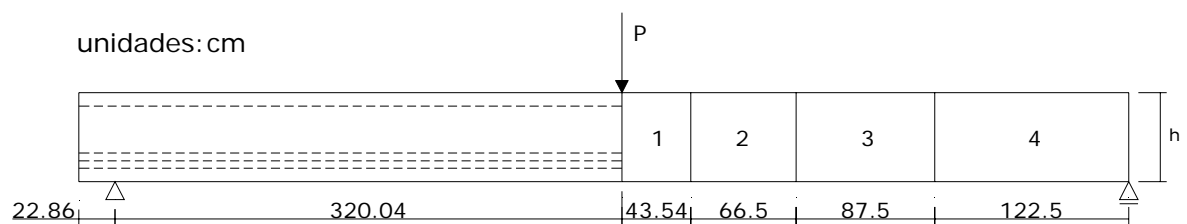
Tabela 6.6: Parâmetros para o problema da viga B-3

Propriedades dos Materiais (cm,KN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	1640	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20530
Poisson	$\nu =$	0	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	8150 ^o
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	4.3	Tensão de Escoamento	$F_y =$	55.2 [#]
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.3	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20120
Coefficiente de Tração	$\alpha =$	0.7	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0 ⁴
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.002	Tensão de Escoamento	$F_y =$	34.52 [#]
			Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0

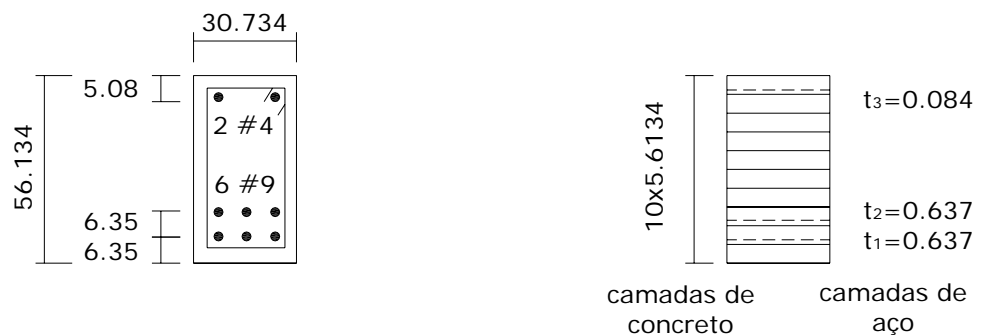
Fonte: Figueiras (1983)

6.1.3.3 Modelo de elementos finitos

Considerando a simetria da estrutura, somente a metade da viga foi considerada. Quatro elementos finitos são usados, refinando a malha perto da localização da carga onde efeitos não lineares são esperados. Uma integração numérica seletiva é usada para obter uma melhor representação do comportamento do material, que se ajuste mais adequadamente aos resultados experimentais, especialmente perto da carga aplicada. Neste exemplo são comparados os modelos elasto-plástico perfeito (PP) e o modelo com endurecimento não linear (HP) para o concreto em compressão.



VIGA A-3



VIGA B-3

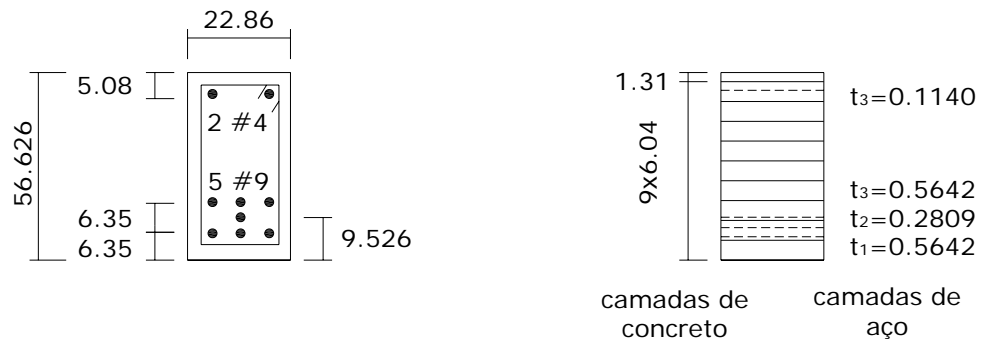


Figura 6.10: Geometria e seção transversal das vigas A-3 e B-3

6.1.3.4 Resultados

Dos resultados obtidos, uma significativa melhora é obtida com o modelo com endurecimento não linear para o concreto em compressão, o que é fundamental já que neste tipo de problemas, o comportamento do concreto em compressão é predominante. Os resultados são apresentados na Tabela 6.7, na Figura 6.11 e na Figura 6.12.

Tabela 6.7: Comparação das cargas de colapso

Viga	P. análise Modelo (HP) (KN)	P. análise Modelo (PP) (KN)	Ensaio experimental (KN)
A-3	471.2	501.8	468.1
B-3	350.5	383.5	353.4

Na Figura 6.11 são mostrados os deslocamentos na seção no meio do vão com o incremento da carga aplicada para a viga A-3. A solução numérica obtida com o modelo numérico perfeitamente plástico (PP) e o modelo com endurecimento não linear (HP) para o concreto em compressão são comparadas com a curva experimental. Excelentes resultados são obtidos com o modelo com endurecimento (HP). A ligeira diferença para níveis de carga maiores pode ser devido às poucas camadas consideradas na parte superior de concreto, perto da zona, onde a carga pontual é aplicada. Também, quando acontece o escoamento da camada de aço inferior para $P=470$ KN, o diagrama escolhido para a lei constitutiva do aço na zona de escoamento, pode influenciar o valor da carga de colapso. Entretanto, os resultados com o modelo perfeitamente plástico (PP) apresentam uma resposta mais rígida para níveis de carga altos e uma carga de colapso maior.

Na Figura 6.12 são mostrados a variação dos deslocamentos com o incremento da carga para ambos modelos do concreto, na seção no meio do vão para a viga B-3, além da resposta experimental. Os melhores resultados correspondem ao modelo com endurecimento não linear (HP) para o cálculo da resposta da deformação da estrutura e também no cálculo da carga de colapso, onde o esmagamento do concreto apresenta uma participação importante. Do mesmo modo que para a viga A-3, o modelo perfeitamente plástico (PP) apresenta uma resposta mais rígida para níveis de carga altos, com uma maior carga de colapso.

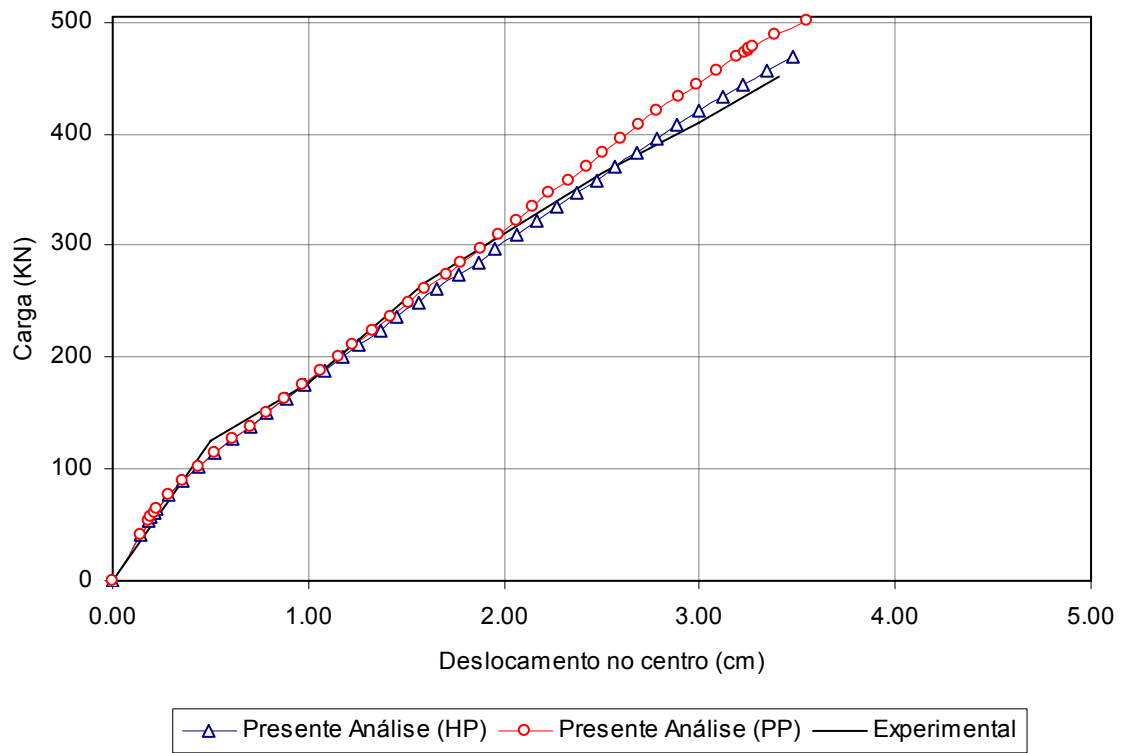


Figura 6.11: Curvas numéricas e experimentais para a viga A-3

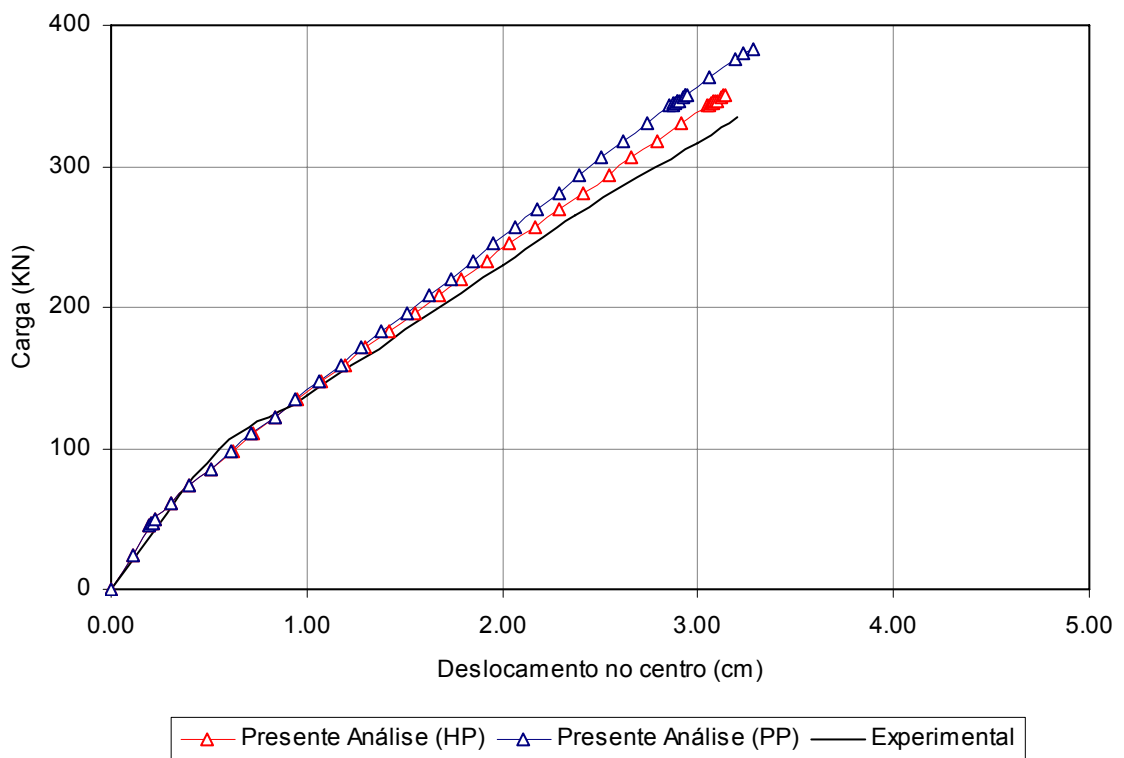


Figura 6.12: Curvas numéricas e experimentais para a viga B-3

6.1.4 Placa de Duddeck et al. (1976)

6.1.4.1 Aspectos Gerais

No presente exemplo a placa quadrada ensaiada por Duddeck et al. (1976) é analisada usando o método dos elementos finitos. Esta placa é apoiada nos cantos e está submetida a uma força pontual no centro, sendo as condições de apoio bem definidas. Existe só restrição vertical nos apoios. Três placas foram ensaiadas experimentalmente (S1, S2, S3), com diferentes quantidades e configurações de reforço em cada direção, mas a quantidade total de reforço é constante nas três placas (Ver Hu & Schnobrich, 1991).

6.1.4.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

As placas ensaiadas têm uma área de 117 cm x 117 cm, 6.5 cm de espessura e são simplesmente apoiadas nos quatro cantos, como se mostra na Figura 6.13. As três placas são submetidas a uma força concentrada no centro ou, equivalentemente, foi considerada uma carga distribuída numa pequena área de acordo com o relatório do trabalho experimental. O aço de reforço varia nas três placas de acordo com: $\mu_x / \mu_y = 1.0, 1.89$ e 2.75 para as placas S1, S2 e S3 respectivamente, sendo μ_x e μ_y as quantidades de aço na seção transversal da placa para uma largura unitária nas direções x e y , respectivamente.

As propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 6.8. No caso do análise da placa S2 foram consideradas duas opções nas propriedades, um diagrama elasto-plástico perfeito para aço ($f_y = 67$ kN/cm²) e um valor da resistência a tração do concreto um pouco menor ($f_t = 0.20$ kN/cm²), de acordo com dados de outras referências (material 2). Nos outros casos o diagrama multilinear é usado (material 1).

6.1.4.3 Modelo de elementos finitos

Devido à simetria só uma quarta parte da placa é considerada. A placa é dividida em 13 elementos finitos de 8 nós com integração reduzida de 2x2. No canto um elemento pequeno é necessário para modelar o apoio. Para considerar um carregamento uniforme distribuído no lugar de uma carga concentrada é necessário também definir uma pequena região no centro da placa. As análises consideradas correspondem ao modelo com endurecimento não linear para o concreto em compressão (HP). Só para a placa S3 considera-se alternativamente o modelo elasto-plástico perfeito (PP) e uma carga pontual.

A divisão na espessura é mostrada na Figura 6.13. Um total de 8 camadas de concreto são consideradas com duas camadas delgadas nas zonas extremas. O aço de reforço é simulado com duas camadas distribuídas na parte superior e inferior.

Tabela 6.8: Parâmetros para o problema das placas

Propriedades dos Materiais (cm,kN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	1640	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20100
Poisson	$\nu =$	0	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	700
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	4.3	Módulo de Elasticidade	$E''_s =$	0
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.3	Tensão de Escoamento	$F_y =$	60
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035	Tensão de Escoamento	$F'_y =$	70
Coeficiente de Tração	$\alpha =$	0.7	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.002	Ângulo com o eixo Y	$\theta =$	1.57

Fonte: Figueiras (1983)

6.1.4.4 Resultados

A continuação, na Tabela 6.9 apresenta-se os valores obtidos para as cargas de colapso nas placas.

Tabela 6.9: Comparação das cargas de colapso

Viga	P. análise HP (KN)	Linha de Escoamento (KN)	Ensaio experimental (KN)
S1	58.2	54.0	61.66
S2	43.5	38.3	43.46
S3	36.0	30.1	34.25

Na Figura 6.14 são mostrados os resultados para a placa S1, com relação à variação do deslocamento no meio da placa com o carregamento considerado. Os resultados obtidos correspondem à aplicação de uma carga distribuída numa área de 10 cm x 10 cm em lugar de uma carga pontual. A falha acontece por esmagamento do concreto perto da zona da aplicação do carregamento. Embora exista pouco erro no valor da carga de colapso comparado ao valor experimental, a resposta mostrada na curva ao nível de deformações é medianamente considerável, sendo esta diferença maior e aproximadamente igual a 1 cm para a carga de colapso.

A Figura 6.15 e Figura 6.16 comparam a curva carga-deslocamento para as placas S2 e S3 (reforço anisotrópico) com os resultados experimentais. Ambas figuras apresentam uma boa correlação. A falha nas placas também acontece por esmagamento do concreto começando na área central da placa. A Figura 6.15 também apresenta os resultados obtidos para a placa S2 considerando os dados usados em outras referências e comentadas anteriormente (material 2), as quais diferem das usadas na presente análise (material 1)

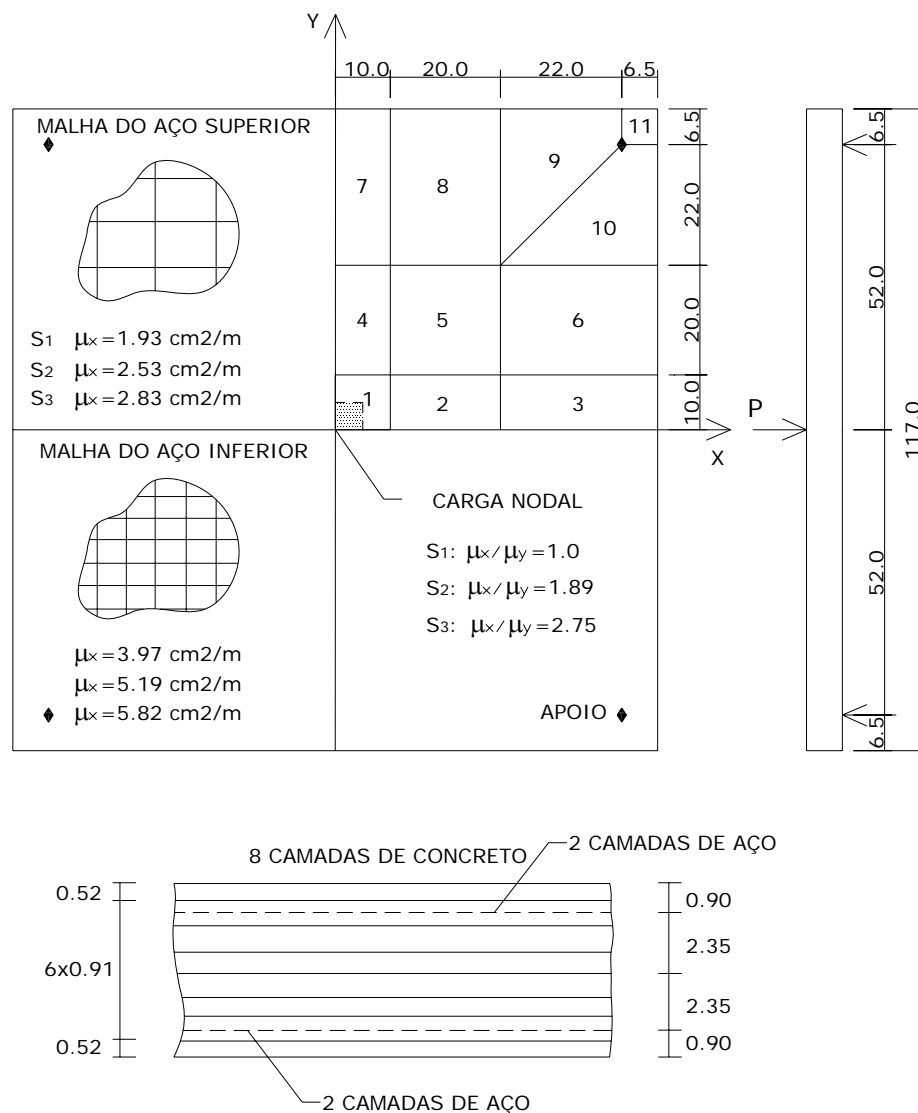


Figura 6.13: Geometria e modelo de elementos finitos para as placas

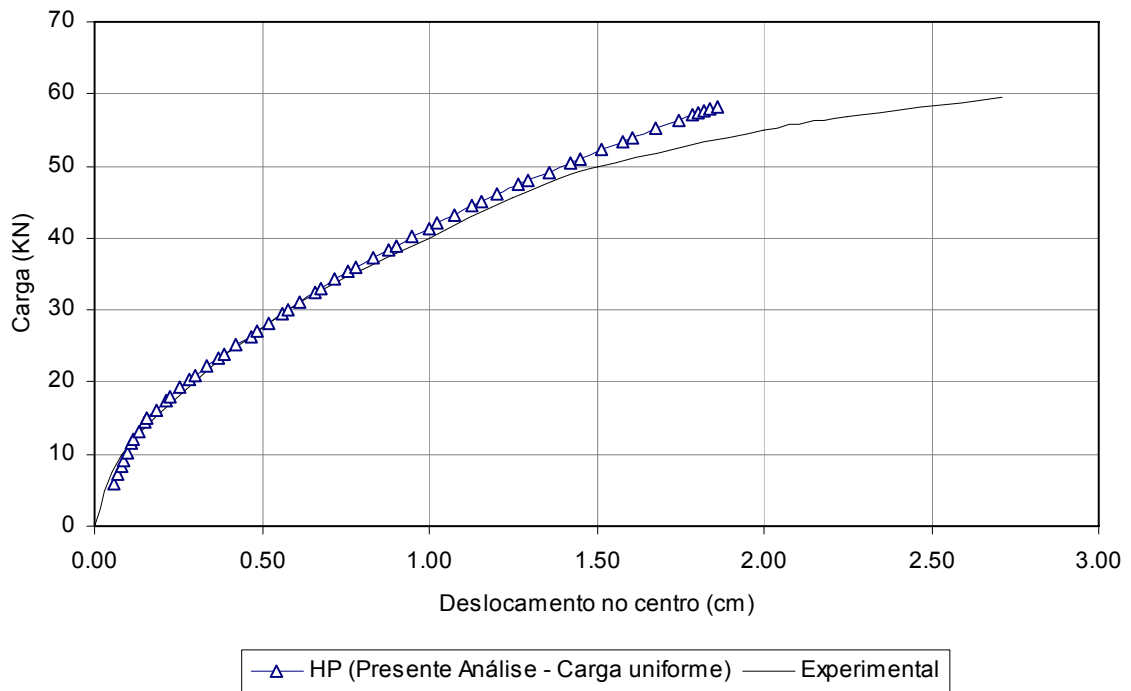


Figura 6.14: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S1 para a deflexão no centro da placa

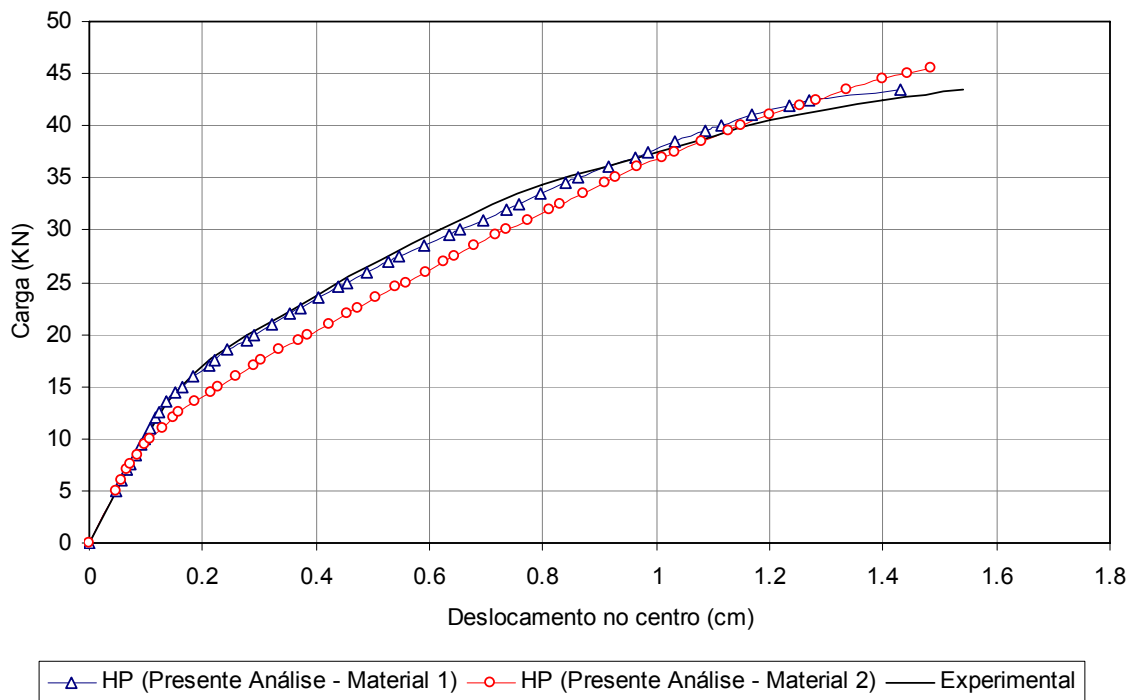


Figura 6.15: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S2 para a deflexão no centro da placa

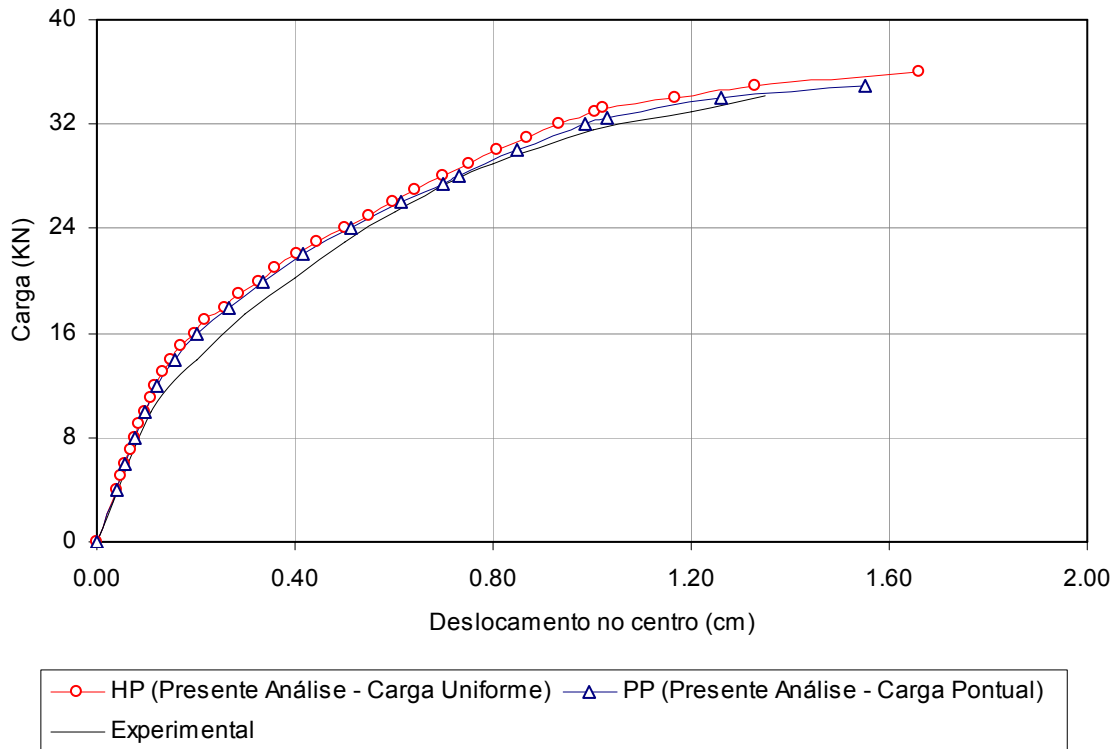


Figura 6.16: Comparação das curvas experimental e numérica para a placa S3 para a deflexão no centro da placa

O desenvolvimento da fissuração na camada inferior da laje de concreto S1 é mostrada na Figura 6.17, Figura 6.18, Figura 6.19 e Figura 6.20 para diferentes valores da força aplicada. As figuras mostram o desenvolvimento das fissuras, que se iniciam primeiro numa zona localizada perto da aplicação da força e logo vão se estendendo até uma região localizada perto da zona onde se encontram os apoios. As linhas em azul em forma de L, representam a um ponto de Gauss com dupla fissuração. As outras linhas representam pontos de Gauss com fissuração simples, representando-se em todos os casos as direcções corretas das fissuras.

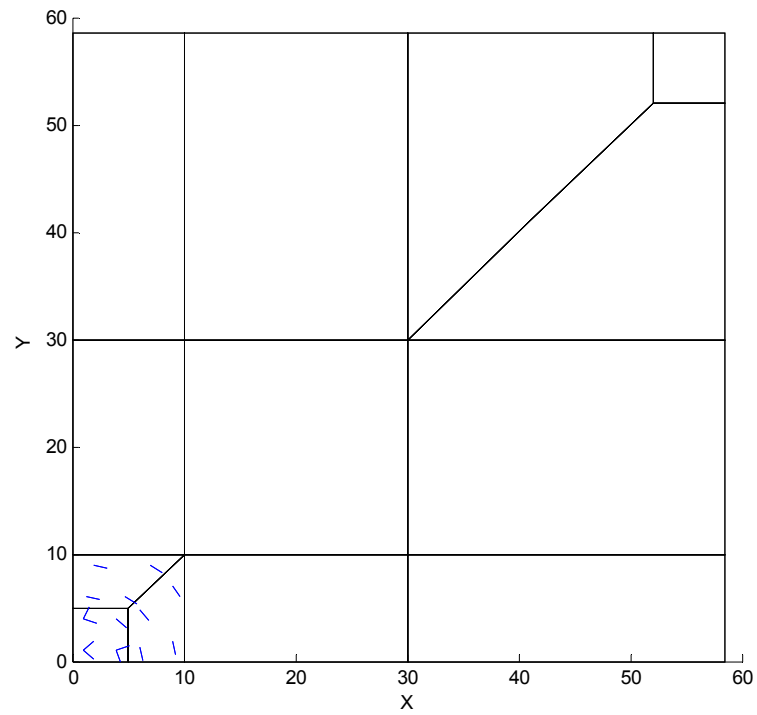


Figura 6.17: Configuração de fissuração para uma carga de 11.4 kN

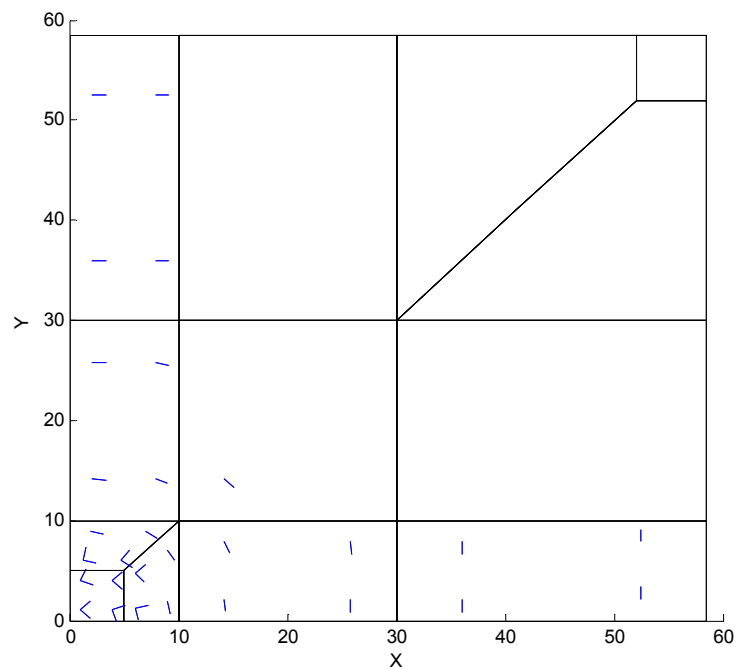


Figura 6.18: Configuração de fissuração para uma carga de 15 kN

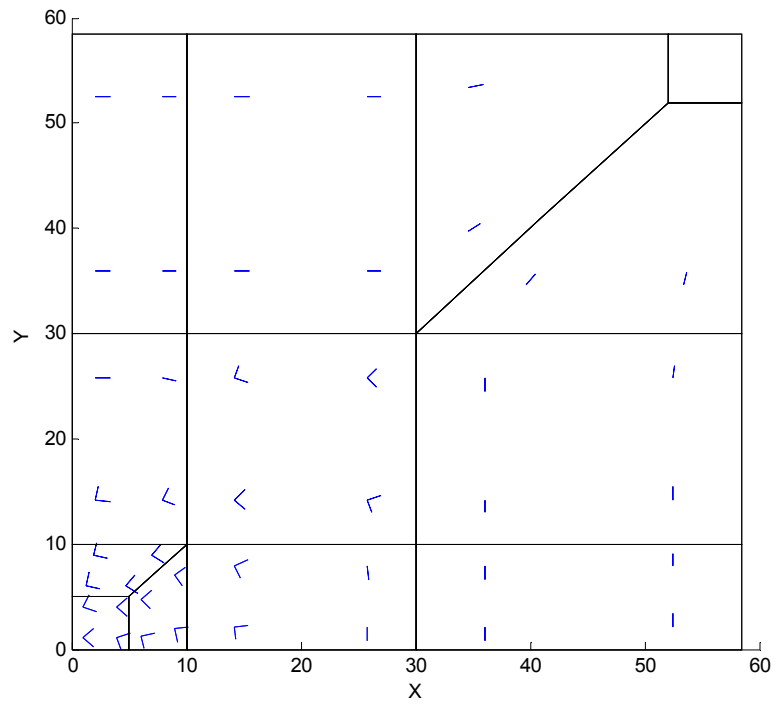


Figura 6.19: Configuração de fissuração para uma carga de 35.4 kN

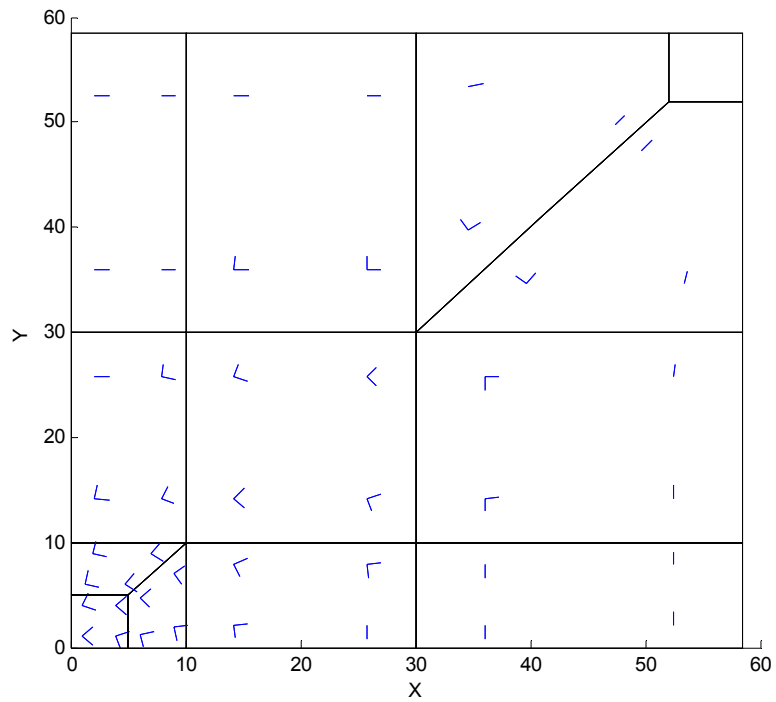


Figura 6.20: Configuração de fissuração para uma carga de 55.2 kN

6.1.5 Placa de Jofriet & Mcniece (1971)

6.1.5.1 Aspectos Gerais

Uma placa quadrada apoiada nos cantos foi ensaiada por Jofriet & Mcniece (1971), sendo a mesma frequentemente usada para verificar os modelos numéricos de concreto. Entretanto, as propriedades dos materiais, condições de contorno usadas no experimento não são completamente definidas (Ver Owen et al., 1983 e Schnobrich, 1977).

6.1.5.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A placa estudada é quadrada de comprimento igual a 91.44 cm e 4.445 cm de espessura, isotropicamente reforçada na superfície inferior. A percentagem de reforço é 0.85, referidos à altura efetiva de 3.327 cm. Duas condições de contorno são utilizadas neste exemplo para os nós dos cantos, sendo utilizados apoios livres e fixos respectivamente. A geometria e propriedades dos materiais são mostradas na Figura 6.21 e na Tabela 6.10.

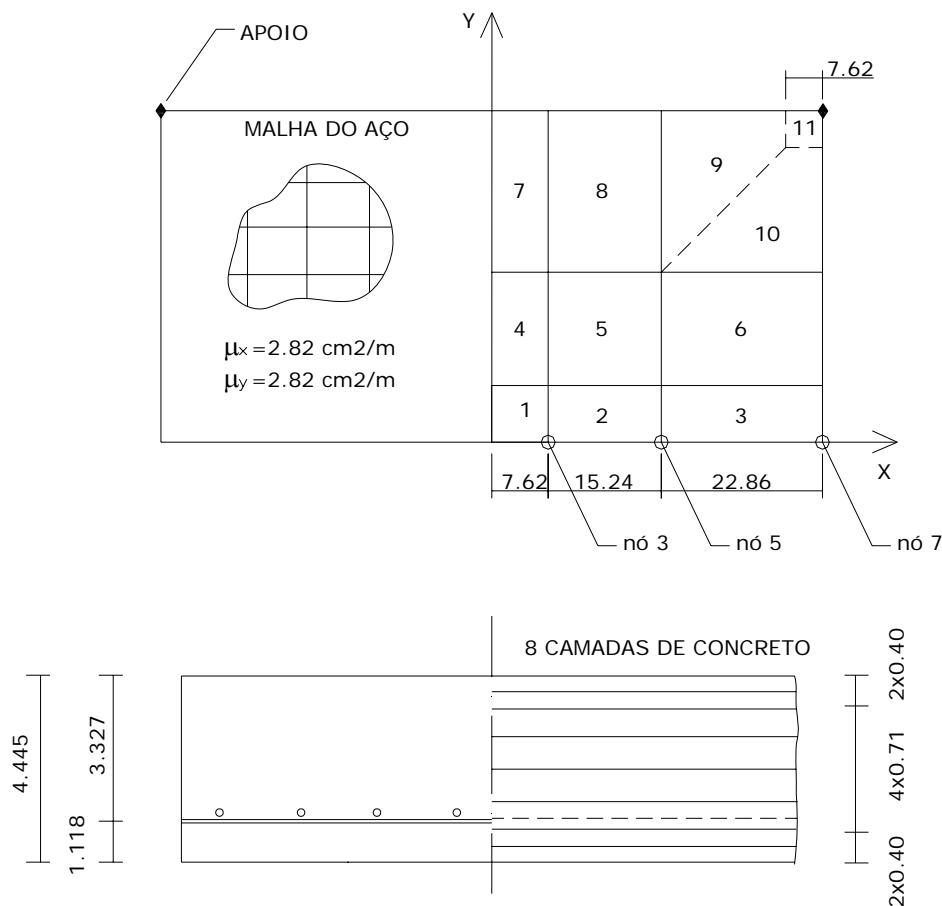


Figura 6.21: Geometria, reforço e idealização em elementos finitos da placa de Mcniece

Tabela 6.10: Parâmetros para o problema da placa

Propriedades dos Materiais (cm,kN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2860	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
Poisson	$\nu =$	0.15	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	0
Res. Ult. à Compressão	$f_c =$	3.8	Tensão de Escoamento	$F_y =$	41.34
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.38	Ângulo com o eixo X	$\theta =$	0
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035	Ângulo com o eixo Y	$\theta =$	1.57
Coeficiente de Tração	$\alpha =$	0.5			
Def. Ult. à Tração	$\varepsilon_m =$	0.002			

Fonte: Figueiras (1983)

6.1.5.3 Discretização em elementos finitos

Duas malhas diferentes de 9 e 11 elementos finitos são usadas na análise da placa. A malha de 9 elementos corresponde ao caso quando os elementos 9, 10 e 11 (Ver Figura 6.21) são juntados num só elemento; ambas malhas fornecem resultados similares, mas a malha de 11 elementos é preferida para modelar o comportamento nos cantos, quando apoios fixos são utilizados. A placa é dividida em 8 camadas de concreto e 2 camadas de aço, que ocupam a mesma posição espacial. Devido à simetria, somente um quarto da placa foi modelada.

6.1.5.4 Resultados

Dois tipos de análise são considerados: análise não linear geométrico (GNL) e análise linear geométrico (GL). Os resultados de ambas análises são similares para o caso onde o apoio é livre para se mover no plano da placa, e por tanto apenas os resultados da segunda análise são mostrados. Para o caso em que o apoio é totalmente fixo os resultados são diferentes devido a presença de forças horizontais no plano da placa. Os resultados desta análise são comparados com os resultados de Mehlhorn & Klein (Ver Figueiras 1983) e com os resultados experimentais.

Na Figura 6.22 são comparados os resultados obtidos para o deslocamento vertical no nó 3 por Mehlhorn & Klein com os resultados da presente análise usando apoios livres. A pequena diferença encontrada na carga de colapso pode ser explicada devido a uma diferença na tensão de escoamento para o aço considerado por Mehlhorn & Klein.

Na Figura 6.23 são mostrados os resultados para o caso em que os apoios são fixos para o deslocamento vertical no nó 3. Os resultados mostrados concordam com os resultados de Mehlhorn & Klein, embora um valor maior de carga de colapso nesta referência é obtido para

a análise geométrico linear (GL). Esta diferença pode-se atribuir provavelmente à consideração de um valor maior da resistência à compressão conforme é comentado em outras referências. É importante destacar que os resultados experimentais não são totalmente publicados até o carregamento de colapso.

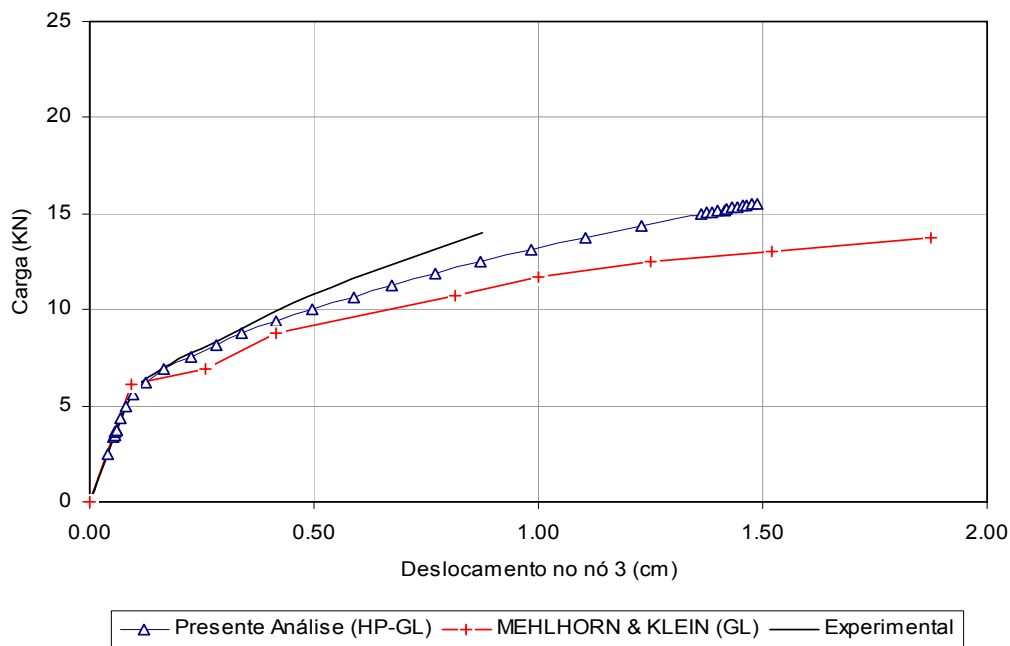


Figura 6.22: Deslocamento vertical no nó 3 para apoio livre

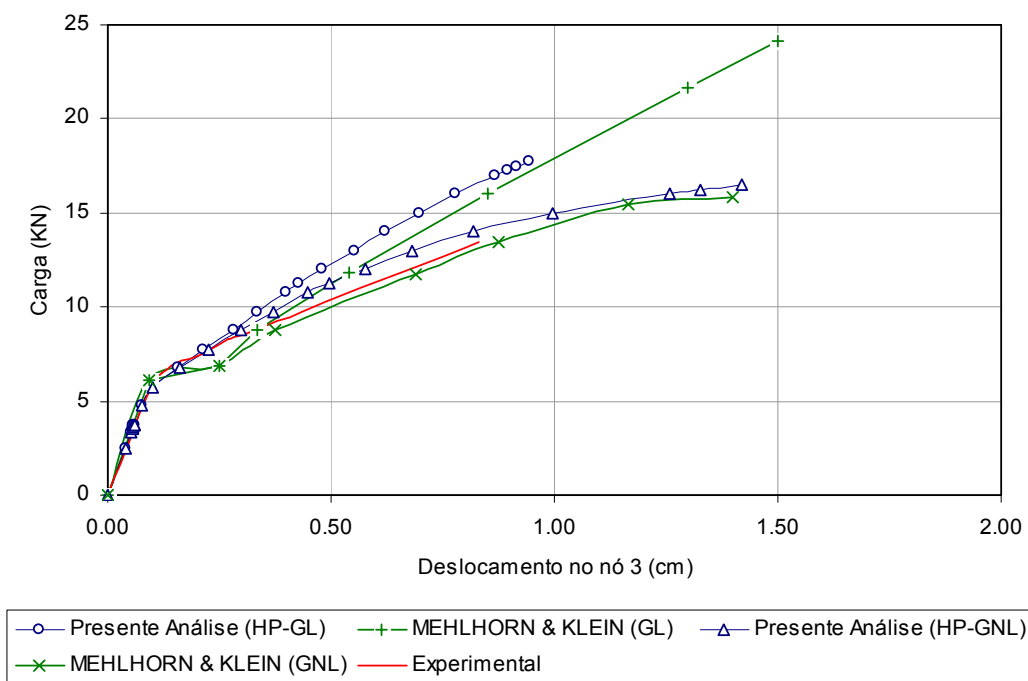


Figura 6.23: Deslocamento vertical no nó 3 para apoio fixo

6.1.6 Coluna de Aroni (1968)

6.1.6.1 Aspectos Gerais

Na década de 60, Aroni (1968) realizou uma série de testes visando o estudo até o colapso de colunas pré-tensionadas, sujeitas a uma carga de compressão excêntrica aplicada nas respectivas extremidades. Neste exemplo considera-se a coluna designada por A230C5.

6.1.6.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A coluna em estudo tem uma excentricidade de $e/d = 2$, esbeltez $L/d = 30$ e pré-tensão igual a $f_{cp}/f_p = 0.5$ (f_{cp} , tensão no concreto resultante da aplicação da pré-tensão). Na Figura 6.24 apresentam-se os dados considerados na análise relativa a geometria da coluna, condições de carga e malha de elementos finitos.

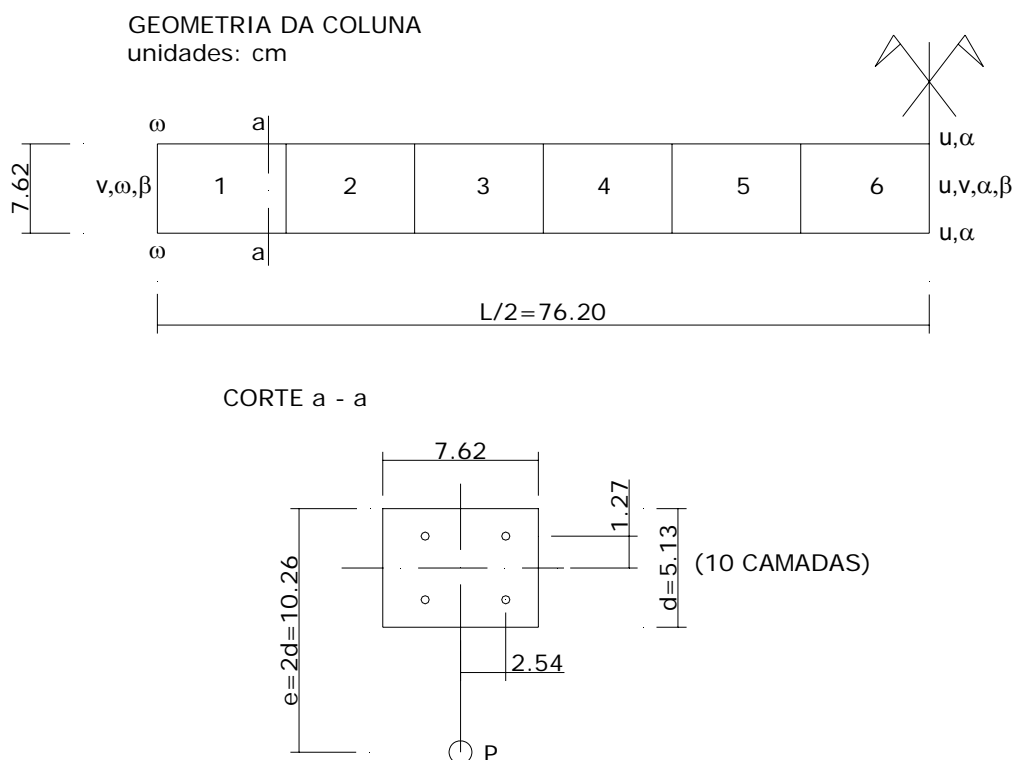


Figura 6.24: Geometria e condições de carga da coluna

Tabela 6.11: Parâmetros para o problema da coluna

Propriedades dos Materiais (cm,kN)					
Concreto			Aço		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	3400	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
Poisson	$\nu =$	0.18	Módulo de Elasticidade	$E'_s =$	470
Res. Ult. à Compressão	$f_p =$	3.85	Tensão de Escoamento	$F_y =$	150.2
Res. Ult. à Tração	$f_t =$	0.38			
Def. Ult. à Compressão	$\varepsilon_u =$	0.0035			

Fonte: Povoas (1991)

6.1.6.3 Discretização em elementos finitos

A malha considerada é formada por 6 elementos finitos e 10 camadas de concreto, e a armadura de pré-esforço é considerada discreta nas posições ilustradas na Figura 6.24.

6.1.6.4 Resultados

Nessa análise somente considerou-se a não linearidade física dos materiais envolvidos e os resultados do presente trabalho são comparados com os resultados publicados por Kang (1977). A Figura 6.25 apresenta justamente a curva carga-deslocamento para a seção no meio do vão.

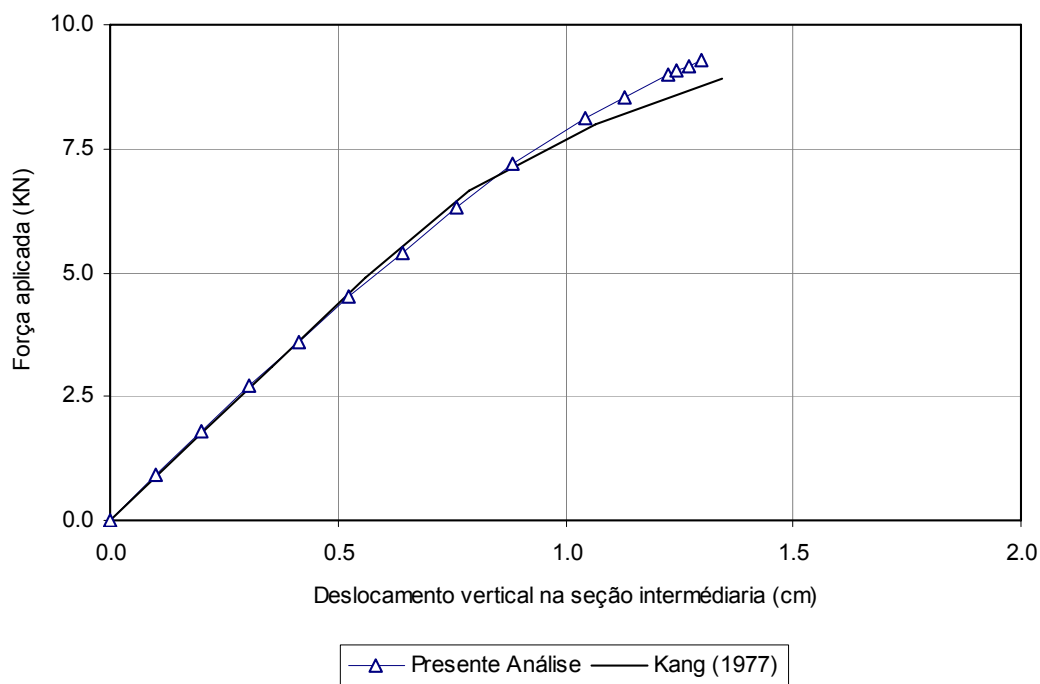


Figura 6.25: Curva força-deslocamento na seção intermédia.

6.2 APLICAÇÕES EM AÇO ESTRUTURAL

6.2.1 Viga engastada num extremo e livre no outro

Neste exemplo o problema do colapso plástico de uma viga engastada com seção retangular é estudado. A geometria, condições de contorno e o modelo de elemento finito é mostrado na Figura 6.26. As propriedades do material são apresentadas na Tabela 6.12. O modelo do material corresponde ao modelo elasto-plástico perfeito de Von Mises. A viga é modelada com 2x50 elementos quadriláteros de casca poliédrica.

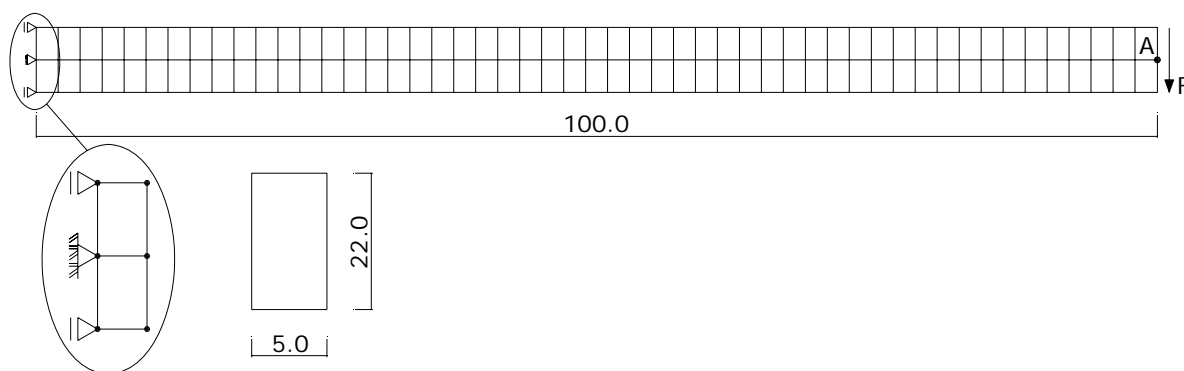


Figura 6.26: Geometria da viga e malha de elementos finitos

Tabela 6.12: Parâmetros para o problema da viga engastada

Propriedades dos Materiais (cm,KN)		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	21000
Poisson	$\nu =$	0.3
Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	24.0

A curva força-deslocamento no ponto A pelo presente modelo numérico (linha em azul), é apresentada na Figura 6.27. Também é mostrado o resultado obtido por Neto et al. (2008) usando elemento de estado de tensão plana de oito nós. Para este exemplo, é fácil obter o valor analítico da carga de colapso em flexão, sendo esta igual a 30.4 KN. O valor obtido com o presente modelo numérico é de 31.3 KN.

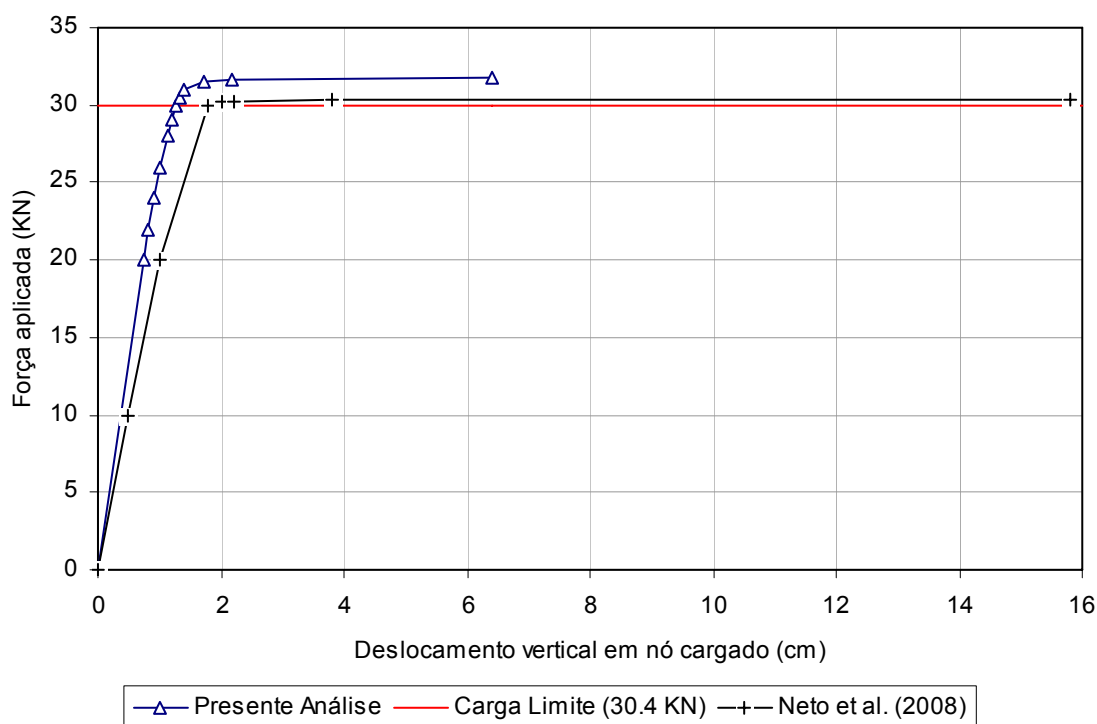


Figura 6.27: Curva carga-deslocamento na seção extrema não engastada

6.2.2 Placa quadrada

A placa apresentada na Figura 6.28 é simplesmente apoiada e está solicitada por um carregamento distribuído. Devido a sua simetria analisa-se apenas um quarto da estrutura. Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa são comparados com o resultado com elementos heterosis apresentado em Hinton & Owen (1980) utilizando o modelo estratificado.

Entretanto, como o objetivo neste exemplo é analisar o comportamento do elemento em relação à integração das tensões e das equações constitutivas para várias distribuições dos pontos de Gauss na espessura, optou-se por dividir a estrutura com a mesma quantidade de graus de liberdade utilizados pelos elementos heterosis empregados por Hinton & Owen (1980). Dessa forma, adotou-se uma malha de 4x4 elementos de casca fina. Neste exemplo foram admitidas tolerâncias em força de 0.01%.

Na Figura 6.29 são apresentadas as curvas carga por deslocamento transversal do ponto A (centro das placa). O elemento de casca fina é analisado com 2, 3 e 5 pontos de Gauss distribuídos na espessura.

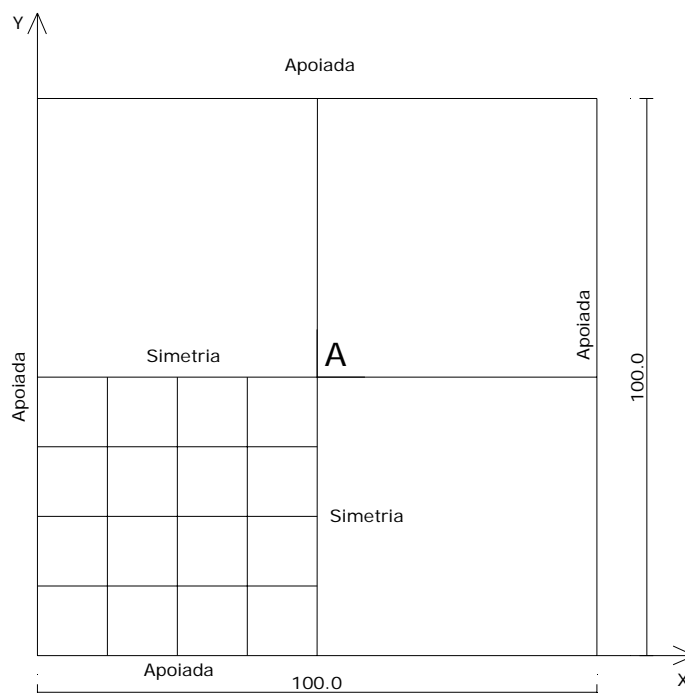


Figura 6.28: Geometria da placa

Tabela 6.13: Parâmetros para o problema da placa apoiada

Propriedades dos Materiais (cm,KN)		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	109200
Módulo de Endurecimento	$H' =$	0.0
Poisson	$\nu =$	0.3
Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	1600
Espessura da placa	$h =$	0.01

Quando se considera 2 pontos de Gauss para a integração na espessura do elemento, os resultados são muito rígidos e a variação real das tensões não pode ser capturada. Existe uma melhora nos resultados quando 3 pontos são usados, embora não seja suficiente. Uma integração de 5 pontos na espessura apresenta uma resposta adequada comparada com os resultados de Hinton & Owen (1980), que considera seis camadas em seu modelo estratificado. Assim, no presente modelo numérico são considerados 5 pontos de Gauss para os exemplos de viga mista.

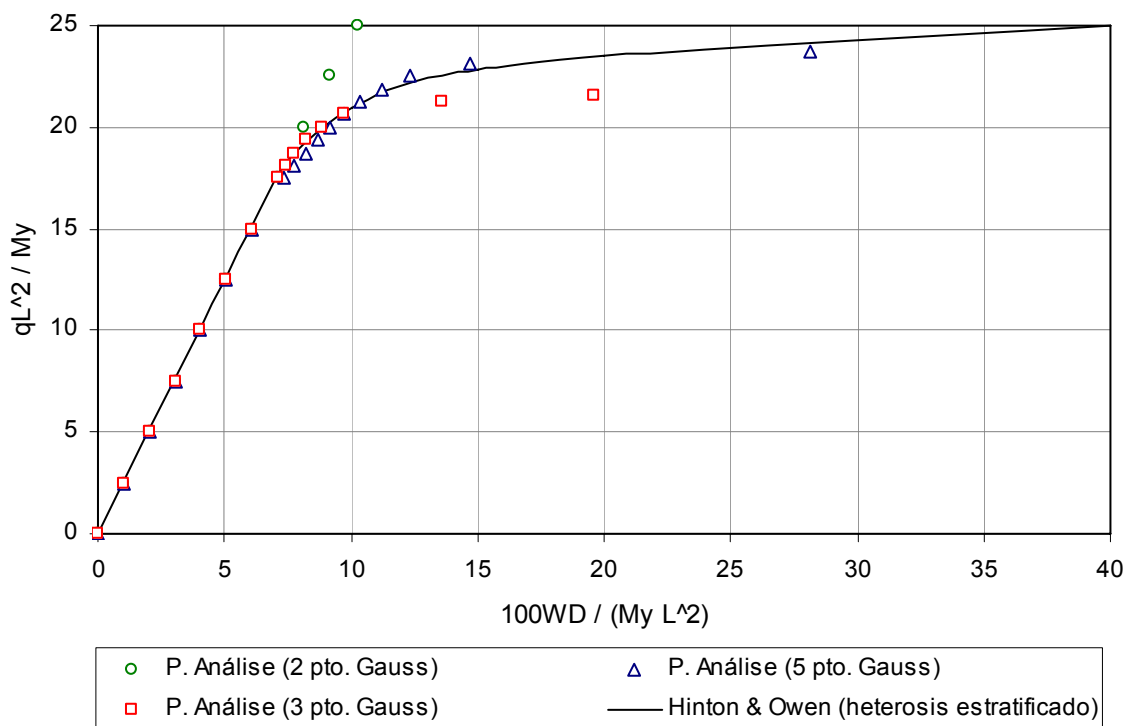


Figura 6.29: Curva carga-deslocamento vertical no ponto A

6.2.3 Casca Cilíndrica

A estrutura analisada, uma casca cilíndrica, é um problema bastante utilizado em análises com não linearidade física e geométrica. A casca apresentada na Figura 6.30 é solicitada por um carregamento por unidade de área, referente ao peso próprio. As extremidades da casca são consideradas como paredes rígidas e os lados longitudinais totalmente livres. Devido a sua simetria, discretiza-se apenas a quarta parte da estrutura. Na análise do problema elasto-plástico foram admitidas tolerâncias em força de 0.1%. O elemento é comparado com o elemento finito implementado por Mesquita et al. (1998). Na análise numérica, a estrutura é discretizada com uma malha de 8x8 elementos.

Tabela 6.14: Parâmetros para o problema da casca cilíndrica

Propriedades dos Materiais (cm,KN)		
Módulo de Elasticidade	$E_c =$	2100
Módulo de Endurecimento	$H' =$	0.0
Poisson	$\nu =$	0
Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	0.4
Espessura da placa	$h =$	7.6
Carga aplicada	$q =$	3.0

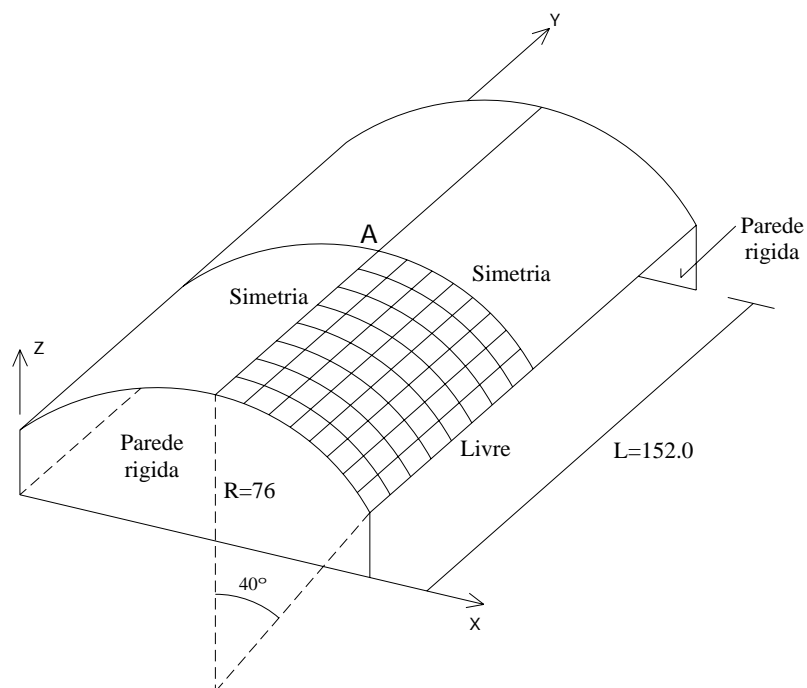


Figura 6.30: Geometria da casca cilíndrica

A curva carregamento transversal versus deslocamento vertical do ponto A é apresentada na Figura 6.31. Esta curva é similar à curva obtida por Mesquita et al. (1998) utilizando um algoritmo implícito para a plasticidade com elementos finitos triangulares.

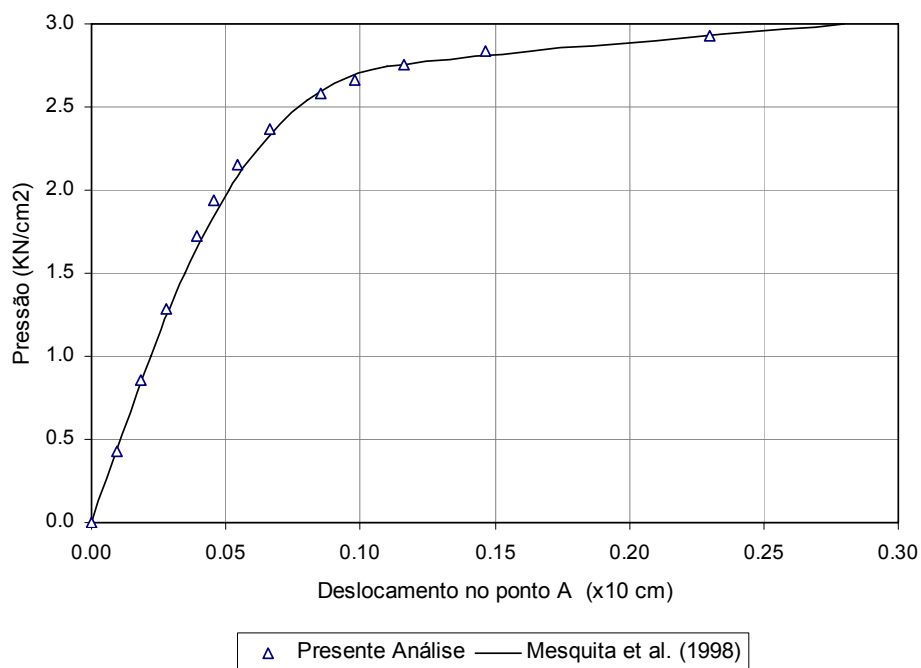


Figura 6.31: Curva-carga deslocamento vertical no ponto A

6.3 APLICAÇÕES DE VIGAS MISTAS DE AÇO

6.3.1 Análise elástica de viga mista

6.3.1.1 Aspectos Gerais

A viga mista escolhida como primeiro teste apresenta as mesmas características geométricas e de materiais que a viga estudada por Hirst & Yeo (1979) em seu exemplo de análise elástica, sendo diferente o tipo de carregamento considerado. A viga é simplesmente apoiada em seus extremos, submetida a duas forças pontuais (aplicadas num extremo da viga, no sentido transversal) Estas forças são aplicadas em cada extremo da laje de concreto como é mostrado na Figura 6.32, sendo o comprimento da viga igual a 900 cm.

6.3.1.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A seção transversal da viga é mostrada na Figura 6.32. O módulo de concreto foi considerado igual 2670 KN/cm² e para o aço igual a 20000 KN/cm² com uma razão modular de 7.5.

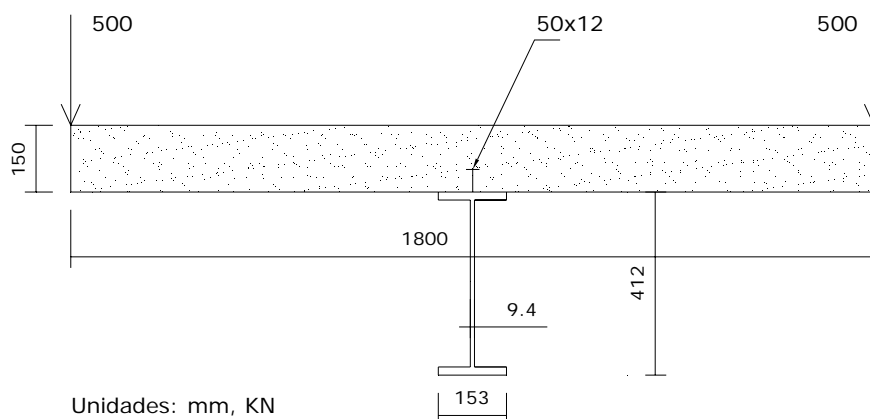


Figura 6.32: Seção transversal da viga mista e forças aplicadas num extremo

6.3.1.3 Modelo de elementos finitos

A viga foi modelada integralmente. O comprimento total da viga foi dividido em 20 parcelas, sendo colocado em cada parcela um conector de corte circular de 50 mm de altura e 12 mm de diâmetro. A laje de concreto foi dividida transversalmente em 6 partes e as mesas e alma da viga de aço foram divididas em duas partes, conforme a Figura 6.33. As condições de apoio, neste e nos próximos exemplos são aplicados na mesa inferior da viga de aço.

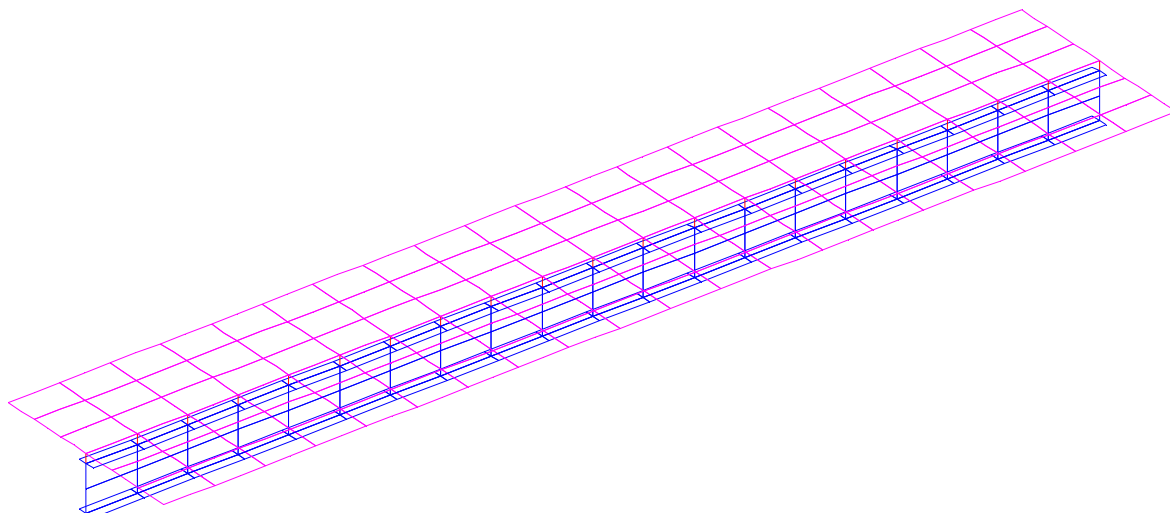


Figura 6.33: Malha de elementos finitos para a viga em estudo

6.3.1.4 Resultados da análise elástica

Nesta seção são comparados os resultados em deslocamentos e tensões do presente modelo numérico e de um modelo numérico elaborado com o programa comercial ANSYS. A mesma malha é utilizada, sendo escolhidos os elementos do programa ANSYS de modo que estes sejam compatíveis com as teorias usadas no desenvolvimento dos elementos finitos correspondentes à laje de concreto e viga de aço do presente trabalho. Assim, é usado para a laje de concreto o elemento Shell 93 e para a viga de aço o elemento Shell 63. A continuação na Tabela 6.15 são apresentados os resultados dos deslocamentos obtidos no extremo da viga, precisamente no nó onde a força pontual é aplicada. As pequenas discrepâncias nos resultados podem-se atribuir ao fato que só foram considerados dez camadas no presente modelo numérico para a laje de concreto, enquanto a integração na espessura dos elementos de ANSYS é feita de forma exata. A escolha de um numero maior de camadas permite uma maior precisão nos cálculos, embora um maior tempo de processamento. Neste trabalho foram considerados aceitáveis utilizar entre 8 a 12 camadas

Tabela 6.15: Comparação dos deslocamentos no nó carregado

Viga	Presente Modelo	Modelo Ansys	Erro (%)
Ux	8.092E-05	8.157E-05	-0.8
Uy	3.378E-07	3.364E-07	0.4
Uz	2.663E-02	2.660E-02	0.1
θ_x	3.459E-02	3.450E-02	0.2
θ_y	2.357E-02	2.351E-02	0.2

A validação do código computacional para a análise elástica é finalizada mediante a comparação das tensões na face superior da laje de concreto. Estas tensões correspondem às tensões atuantes no plano da laje. Os gráficos mostram praticamente a mesma distribuição obtidas com ambos modelos numéricos. Na Figura 6.34, Figura 6.35 e Figura 6.36 são mostradas as distribuições das tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} , respectivamente.

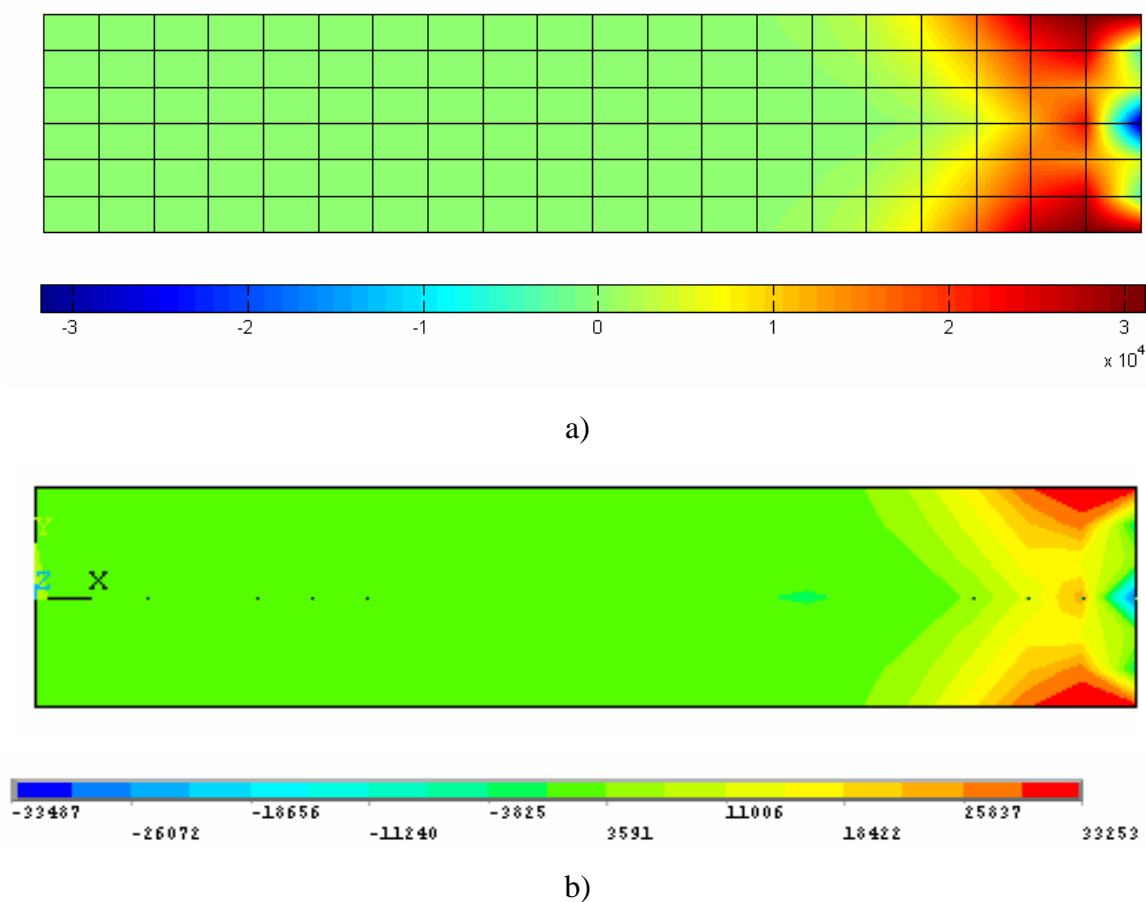
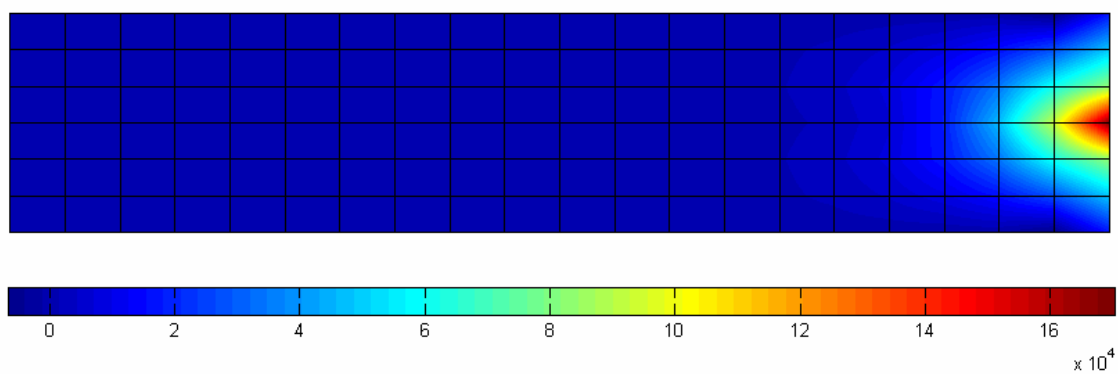
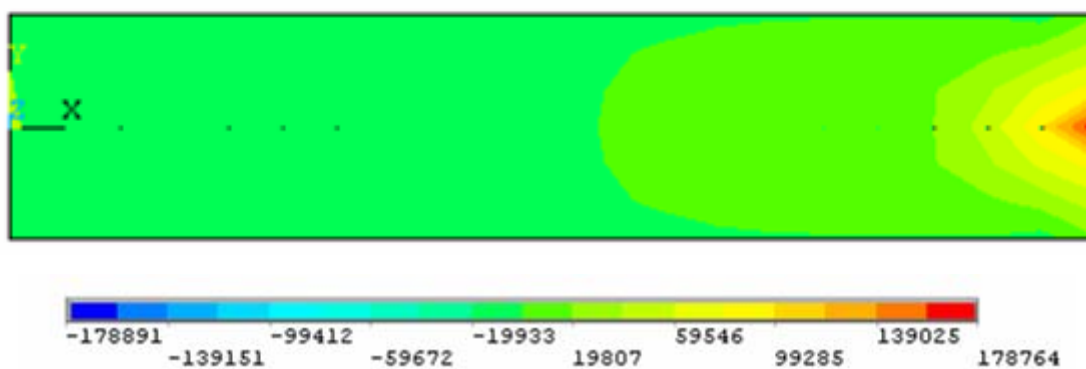


Figura 6.34: a) Tensões σ_x na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS

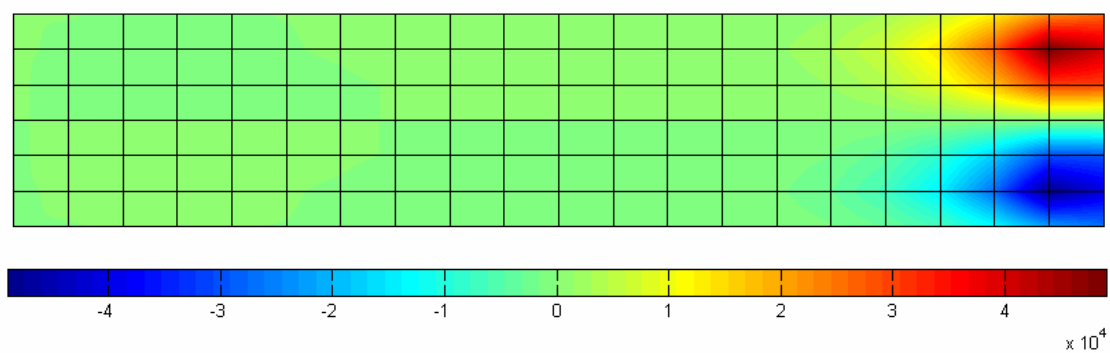


a)

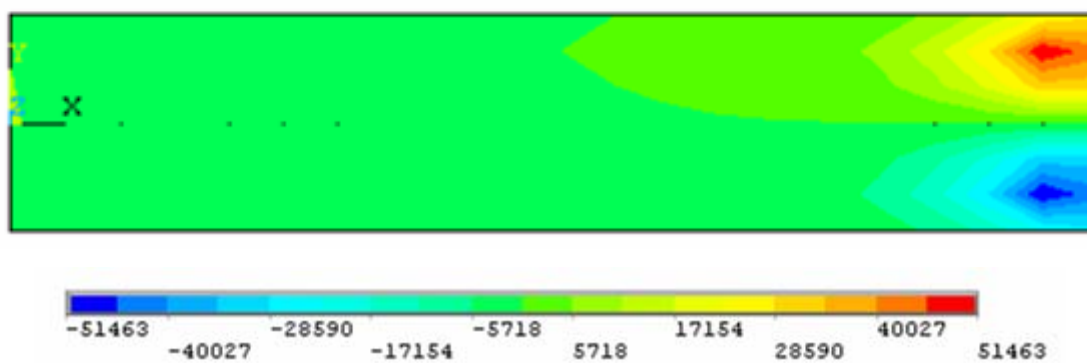


b)

Figura 6.35: a) Tensões σ_y na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS



a)



b)

Figura 6.36: a) Tensões τ_{xy} na face superior da laje de concreto obtidas com o presente modelo numérico b) Mesmas tensões obtidas com o programa comercial ANSYS

6.3.2 Viga mista U4 testada por Chapman & Balakrishnan (1964)

6.3.2.1 Aspectos Gerais

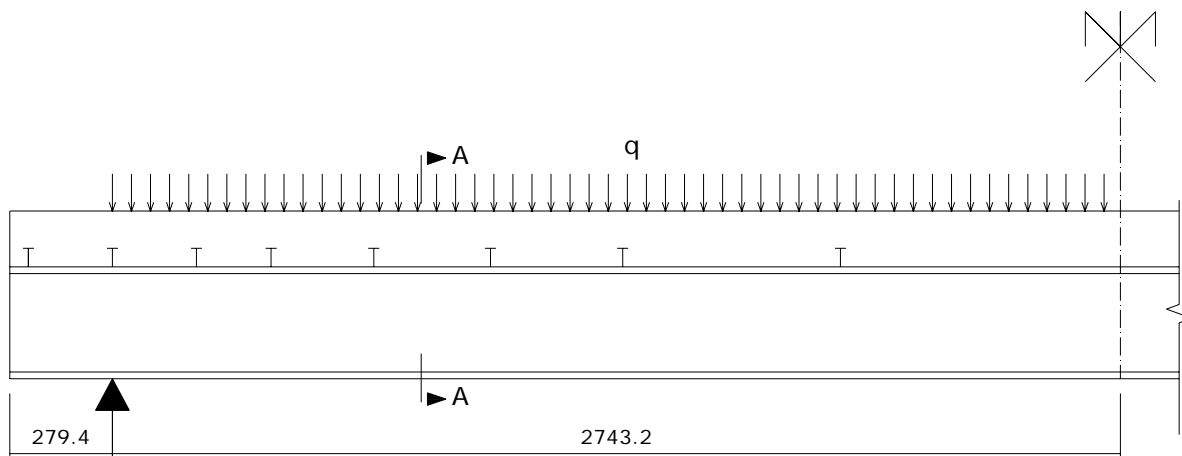
Uma viga simplesmente apoiada ensaiada por Chapman & Balakrishnan (1964), designada como U4 é selecionada neste estudo. Esta viga é submetida a um carregamento distribuído entre apoios. A viga apresenta um comprimento de 550 cm, sendo a altura da viga de aço igual a 30.5 cm e a espessura da laje de concreto igual a 15.2 cm. Os conectores de corte são ordenados de acordo ao cortante longitudinal. O tipo de falha observada experimentalmente foi devido aos conectores.

6.3.2.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A geometria e as seções transversais são mostradas na Figura 6.37. As propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 6.16.

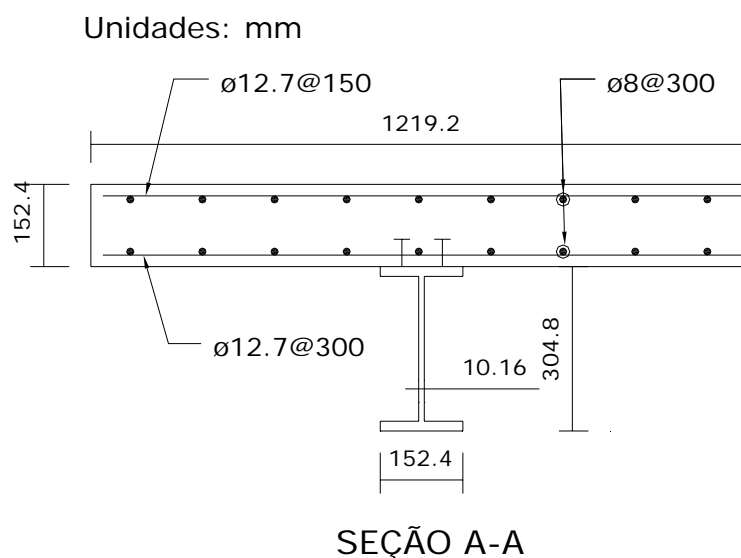
Tabela 6.16: Parâmetros para a viga U4

Propriedades dos Materiais (cm,KN)			
Material	Propriedades		Viga U4
Aço estrutural	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	26.5
	Tensão Ultima	$\sigma_u =$	41.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20500.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.25
Aço de reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	25.0
	Tensão Ultima	$\sigma_u =$	35.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	21000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.25
Concreto	Resistencia à Compressão	$f_c =$	3.38
	Resistencia à Tração	$f_t =$	0.314
	Módulo de Elasticidade	$E_c =$	3292
	Poisson	$\nu =$	0.15
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.0045
Conector de corte	Espaçamento	$s =$	triangular
	Diâmetro x altura	$d \times h =$	1.9 x 10.2
	Número de linhas	$n =$	2
	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	43.5
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Constante 1	$a =$	126
Constante 2	$b =$	20	



Unidades: mm

Figura 6.37: Vista Lateral da viga mista U4



SEÇÃO A-A

Figura 6.38: Seção Transversal da viga mista U4

6.3.2.3 Modelo de elementos finitos

Considerando a simetria da estrutura, só a metade da viga foi considerada. Nesta análise foram testadas duas malhas de elementos finitos. As duas malhas respeitam a distribuição real dos conectores no sentido longitudinal de acordo ao relatório experimental, mais na segunda malha os dois conectores de corte no sentido transversal são juntados num superconector com rigidez e resistência equivalente aos conectores reais. Esta simplificação foi utilizada por Razaqpur & Nofal (1988) e recentemente por Xia et al. (2008), apresentando resultados adequados. No entanto, a validade desta simplificação foi comprovada neste exemplo.

Uma primeira malha é mostrada na Figura 6.39. Nesta malha (malha 1) é representada a posição real dos conectores no sentido transversal e longitudinal, sendo utilizados no modelo numérico 200 elementos de casca degenerada para a laje de concreto, 220 elementos de casca poliédrica para a viga de aço e 16 elementos tipo viga-coluna para a representação dos conectores de corte.

O modelo numérico correspondente à segunda malha (malha 2) é apresentado na Figura 6.40, com 120 elementos para a laje de concreto, 140 elementos para a viga de aço e 8 elementos viga-coluna para os conectores de corte.

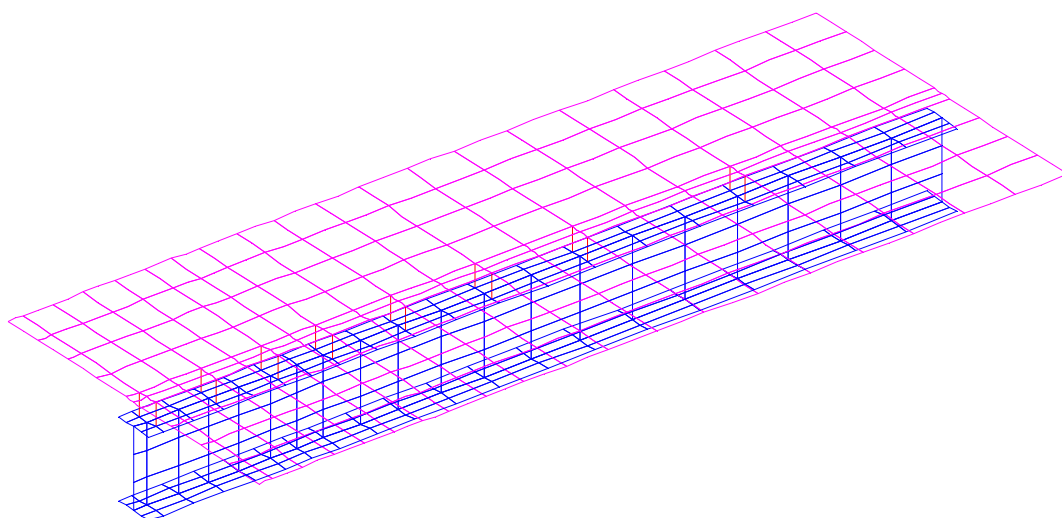


Figura 6.39: Malha de elementos finitos utilizada (malha 1)

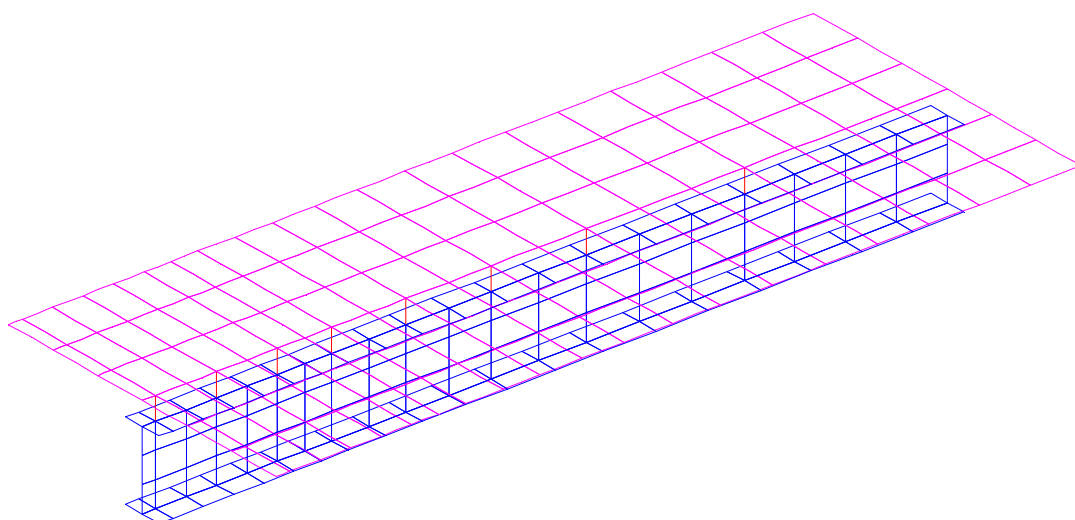


Figura 6.40: Malha de elementos finitos utilizada (malha 2)

6.3.2.4 Resultados da análise plástica

A Figura 6.41 compara as curvas correspondentes ao deslocamento no ponto médio do vão com o incremento da força para as duas malhas analisadas. Os resultados conseguidos com as duas malhas são praticamente iguais, fato que confirma que a utilização de um superconector equivalente é aceitável.

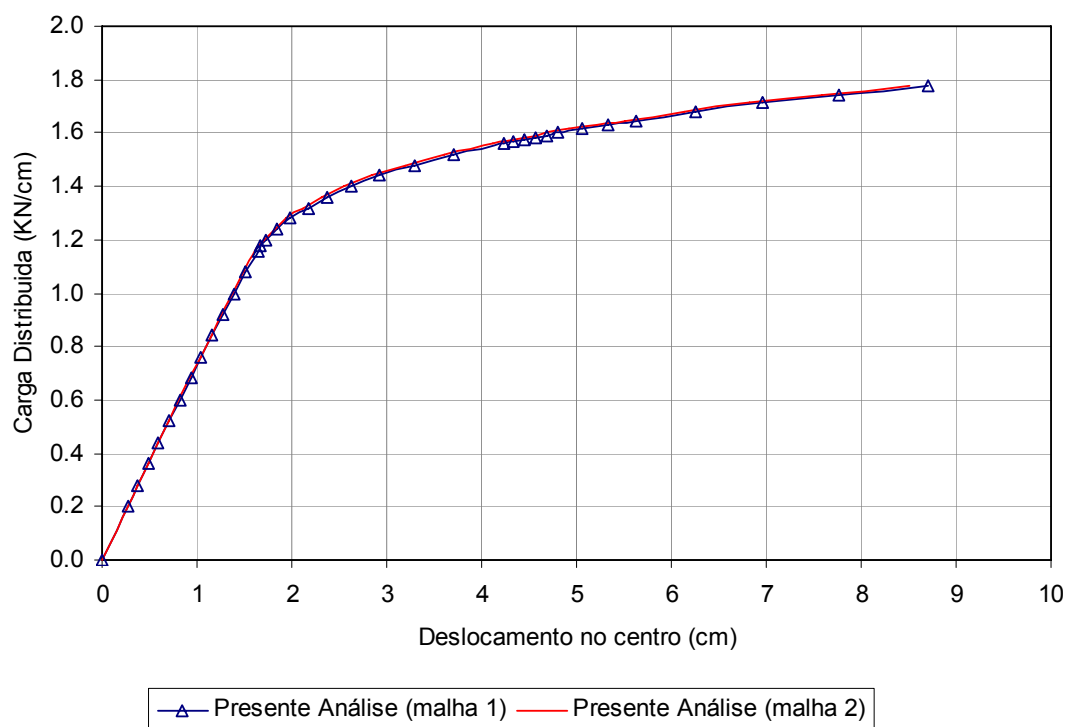


Figura 6.41: Curva carga-deslocamento vertical na seção central obtidas com as malhas 1 e 2

A Figura 6.42 também mostra a curva correspondente ao deslocamento no ponto médio do vão com o incremento da força comparado com outros resultados. Os resultados obtidos são mais rígidos que os resultados experimentais na zona onde predomina o escoamento da viga de aço. O tipo de falha fornecido pelo modelo numérico é por falha dos conectores, apresentando o maior deslocamento relativo (slip) no conector mais crítico igual a 2 mm. Em relação à ductilidade da estrutura, os resultados concordam bem com os resultados apresentados por Oven et al.(1995). A carga de colapso obtida com o modelo numérico é de 1.78 kN/cm enquanto o valor experimental é igual a 1.75 kN/cm.

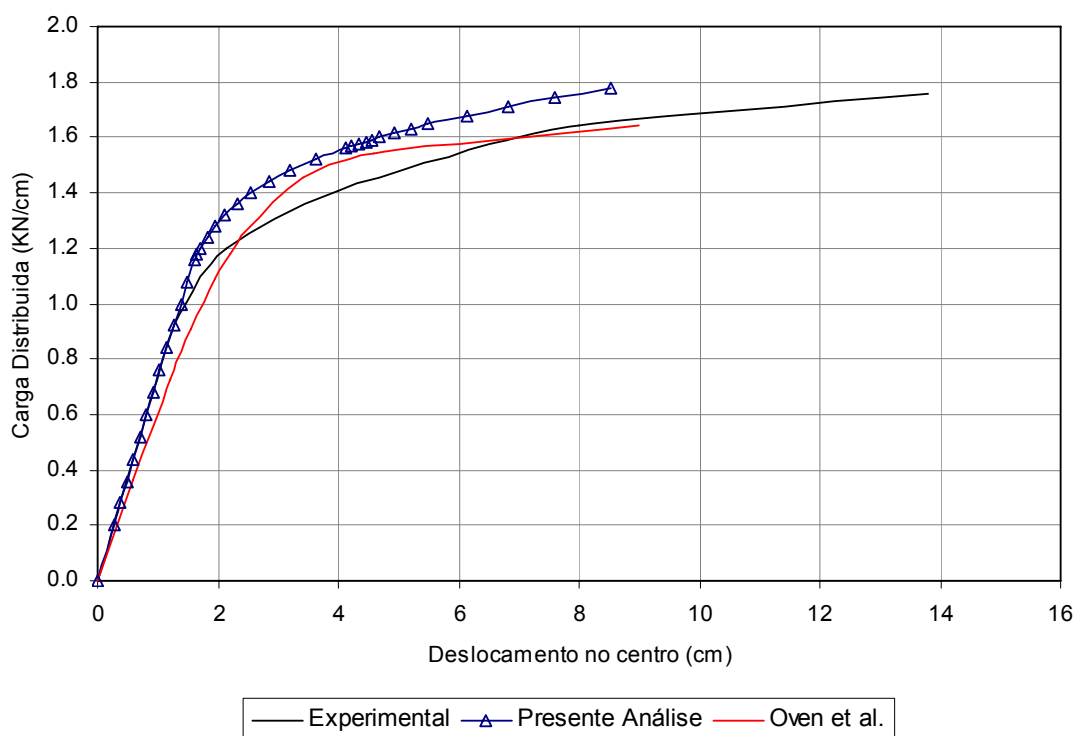


Figura 6.42: Curva carga-deslocamento vertical na seção central

6.3.3 Viga mista E1 testada por Chapman & Balakrishnan (1964)

6.3.3.1 Aspectos Gerais

Outra viga simplesmente apoiada ensaiada por Chapman & Balakrishnan (1964), designada como E1 é selecionada neste estudo. Esta viga é submetida a uma força pontual no meio do vão. A viga apresenta um comprimento de 550 cm, sendo a altura da viga de aço igual a 30.5 cm e a espessura da laje de concreto igual a 15.2 cm. Os conectores de corte são ordenados de acordo ao cortante longitudinal. O tipo de falha observada experimentalmente foi devido ao esmagamento do concreto na seção central da viga.

6.3.3.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

A geometria e as seções transversais são mostradas na Figura 6.43 e Figura 6.44. As propriedades dos materiais são também especificadas na Tabela 6.17.

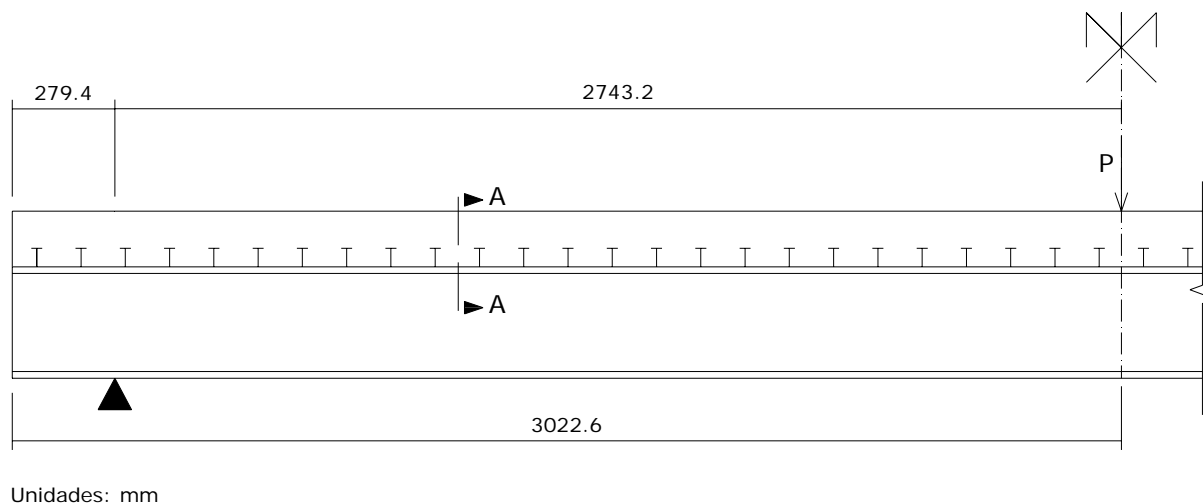


Figura 6.43: Vista lateral da viga mista E1

6.3.3.3 Modelo de elementos finitos

Considerando a simetria da estrutura, somente metade da viga foi considerada. Nessa análise, os dois conectores de corte no sentido transversal são juntados num superconector com rigidez e resistência equivalente aos conectores reais. Esta simplificação foi testada no exemplo anterior, provando ser confiável.

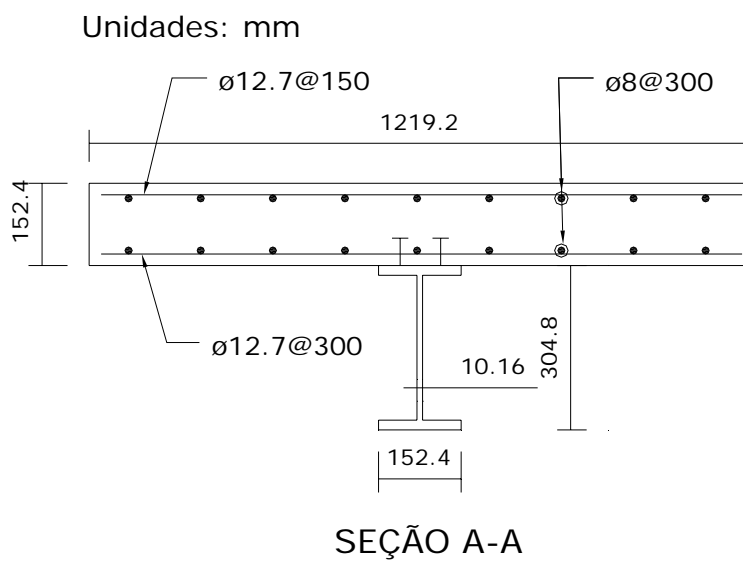


Figura 6.44: Seção transversal da viga mista E1

Tabela 6.17: Parâmetros para a viga E1

Propriedades dos Materiais (cm,KN)			
Material	Propriedades		Viga E1
Aço estrutural	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	26.5
	Tensão Ultima	$\sigma_u =$	41.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20500.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.25
Aço de reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	25.0
	Tensão Ultima	$\sigma_u =$	35.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.25
Concreto	Resistencia à Compressão	$f_c =$	4.25
	Resistencia à Tração	$f_t =$	3.55
	Módulo de Elasticidade	$E_c =$	3292
	Poisson	$\nu =$	0.15
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.0045
Conector de corte	Espaçamento	$s =$	12.1
	Diâmetro x altura	$d \times h =$	1.25 x 5.0
	Número de linhas	$n =$	2
	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	43.5
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Constante 1	$a =$	66
	Constante 2	$b =$	19

A malha é mostrada na Figura 6.45. Nesta malha é representada a posição real dos conectores no sentido longitudinal, sendo utilizados no modelo numérico 156 elementos para a laje de concreto, 182 elementos para a viga de aço e 25 elementos de barra viga-coluna para os conectores de corte. A força pontual foi aplicada no modelo numérico em forma de uma carga uniformemente distribuída sobre uma pequena área.

6.3.3.4 Resultados da análise plástica

A Figura 6.46 mostra a curva correspondente ao deslocamento no ponto médio do vão com o incremento da força. Os resultados obtidos são também mais rígidos que os resultados experimentais na zona onde predomina o escoamento da viga de aço. O tipo de falha fornecido pelo modelo numérico corresponde ao esmagamento do concreto na seção central da viga mista de acordo com o relatório experimental. O resultado do presente modelo numérico concorda bem com os resultados de Liang et al. (2005), existindo uma pequena diferença na parte final da curva, sendo atribuído a que o presente modelo uniaxial do

concreto não apresenta um ramo de amolecimento. A carga de colapso obtida com o modelo numérico é de 480 kN, enquanto o valor experimental é igual a 517 kN.

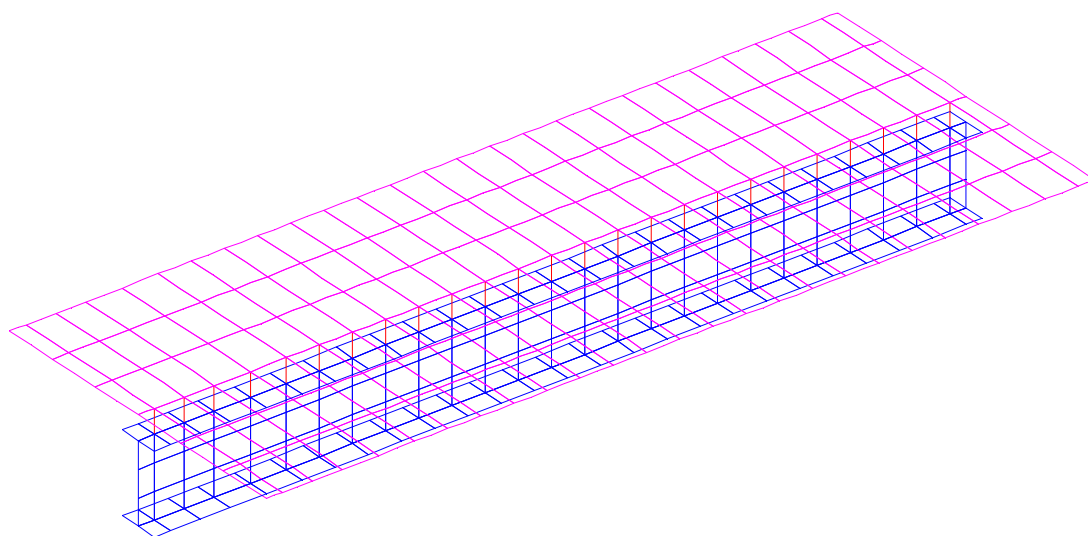


Figura 6.45: Malha de elementos finitos utilizada no modelo numérico da viga E1

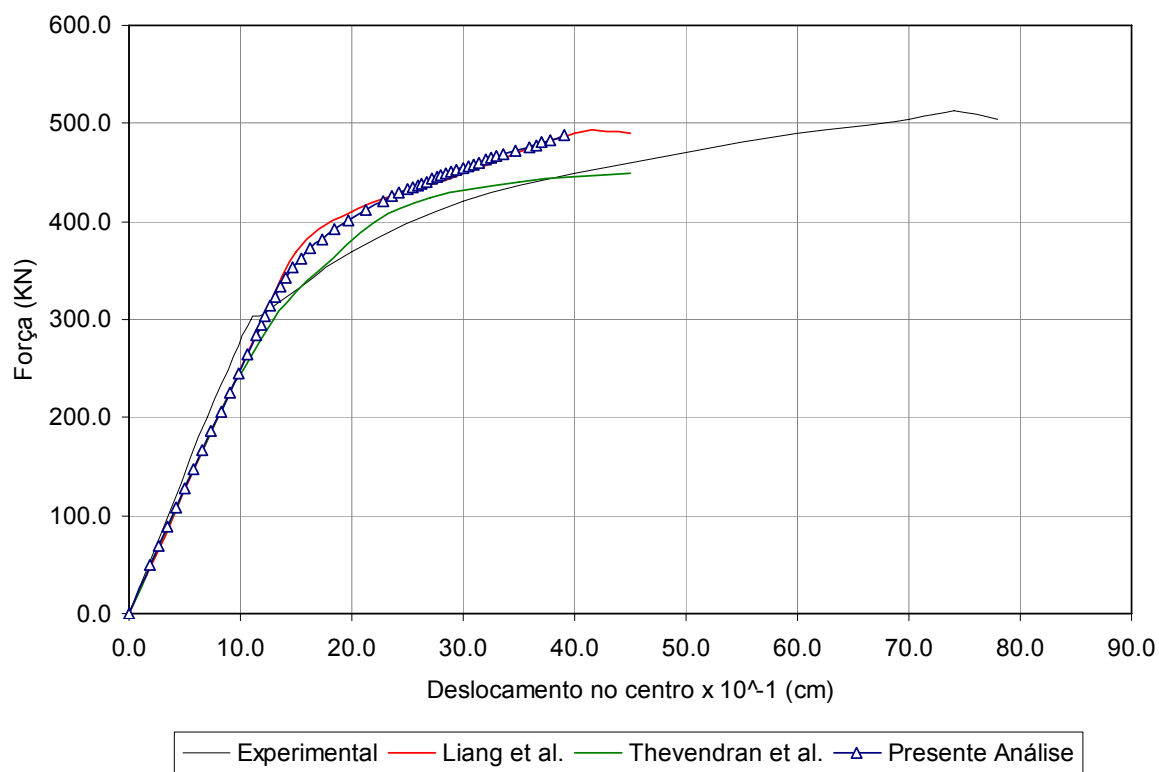


Figura 6.46: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga E1

6.3.4 Viga mista CTB4 testada por Ansourian (1960)

6.3.4.1 Aspectos Gerais

Para verificar o modelo numérico na presença do momento negativo, a viga testada experimentalmente por Ansourian (1960) foi simulada com o presente modelo numérico. A referência original do relatório experimental não foi obtida, assim toda a informação do teste é devido a Titoum et al.(2008) e Valipour & Bradford (2009). A viga tem dois vãos de 450 cm, sendo formada por uma viga de aço com seção transversal em forma de I de 19 cm de altura e por uma laje de concreto de espessura igual a 10 cm. Os conectores de corte são igualmente espaçados em grupos de três cada 35 cm ao longo comprimento da viga, com exceção da zona do apoio interno, onde o espaçamento é reduzido a cada 30 cm. A viga é carregada simetricamente com forças pontuais na metade de cada um dos vãos. Este caso, pela geometria da viga, pode ser considerado como um exemplo de ponte. O modo de falha na viga (devido às referencias mencionadas) acontece por esmagamento do concreto na zona de momento positivo perto da aplicação da carga.

6.3.4.2 Características geométricas e propriedades dos materiais

Os detalhes geométricos da viga são mostrados na Figura 6.47 e Figura 6.48 e as propriedades dos materiais são especificadas na Tabela 6.18.

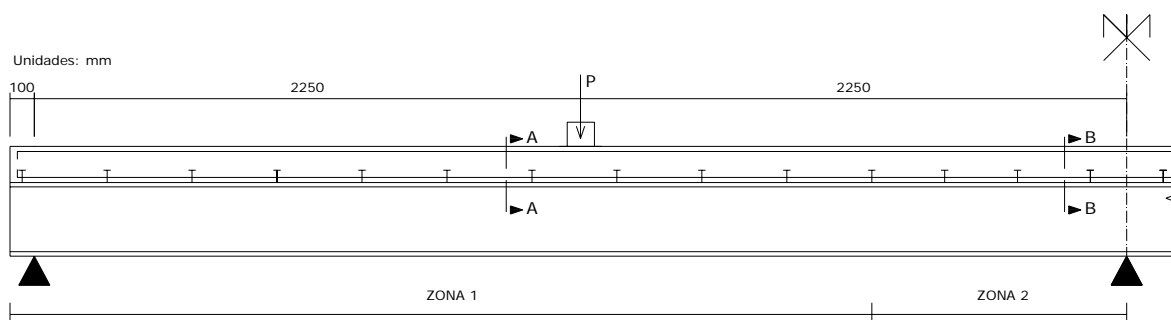


Figura 6.47: Vista lateral da viga mista CTB4

6.3.4.3 Modelo de elementos finitos

Considerando a simetria da estrutura, somente a metade da viga foi considerada. Nesta análise os três conectores de corte no sentido transversal são juntados num superconector com rigidez e resistência equivalente aos conectores reais.

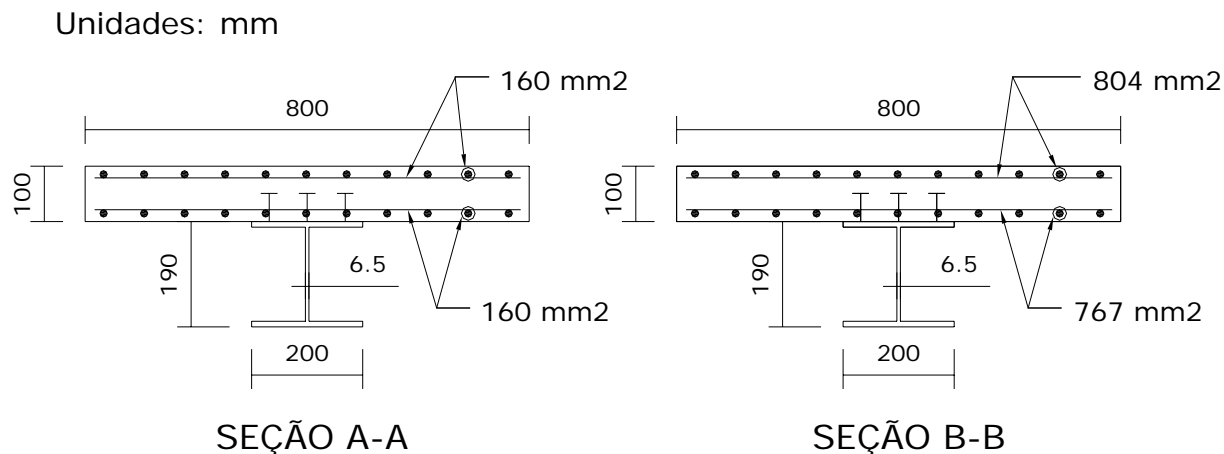


Figura 6.48: Seções transversais da viga mista CTB4

Tabela 6.18: Parâmetros para a viga CTB4

Propriedades dos Materiais (cm,KN)			
Material	Propriedades		Viga CTB4
Aço estrutural	Tensão de Escoamento (mesa)	$\sigma_y =$	23.6
	Tensão de Escoamento (alma)	$\sigma_y =$	23.8
	Tensão Ultima (mesa)	$\sigma_u =$	39.3
	Tensão Ultima (alma)	$\sigma_u =$	40.1
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	21000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima (mesa)	$\varepsilon_u =$	0.25
	Deformação Ultima (alma)	$\varepsilon_u =$	0.25
Aço de reforço	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	25.0
	Tensão Ultima	$\sigma_u =$	35.0
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	21000.0
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.25
Concreto	Resistencia à Compressão	$f_c =$	2.8
	Resistencia à Tração	$f_t =$	0.28
	Módulo de Elasticidade	$E_c =$	3000
	Poisson	$\nu =$	0.15
	Deformação Ultima	$\varepsilon_u =$	0.004 ou 0.01
Conector de corte	Espaçamento (zona 1)	$s =$	35
	Espaçamento (zona 2)	$s =$	30
	Diâmetro x altura	$d \times h =$	1.9 x 7.5
	Número de linhas	$n =$	3
	Tensão de Escoamento	$\sigma_y =$	43.5
	Módulo de Elasticidade	$E_s =$	20000
	Poisson	$\nu =$	0.3
	Constante 1	$a =$	110
Constante 2	$b =$	13	

A malha é mostrada na Figura 6.49. Nesta malha é representada a posição real dos conectores no sentido longitudinal, sendo utilizados no modelo numérico 96 elementos de casca degenerada para a laje de concreto, 112 elementos de casca poliédrica para a viga de aço e 14 elementos tipo viga-coluna para a representação dos conectores de corte.

Foram utilizados elementos finitos de menores dimensões perto da zona da aplicação da carga, devido à maior não linearidade existente. A força pontual foi aplicada em forma de uma carga uniformemente distribuída numa pequena área.

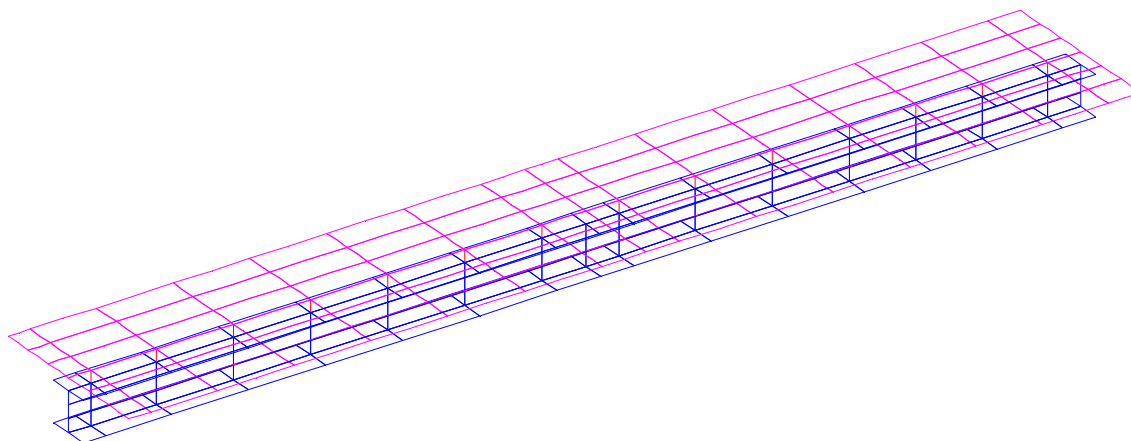


Figura 6.49: Malha de elementos finitos utilizada para a viga mista CTB4

6.3.4.4 Resultados da análise plástica

A comparação entre a força com o deslocamento no centro do vão é mostrada na Figura 6.50. Os resultados mostram uma boa concordância com os resultados experimentais. São apresentadas duas situações: a linha em vermelho corresponde ao caso quando é considerada uma deformação última no concreto igual a 0.040 de acordo com os dados fornecidos por Titoum et al. (2008). Por outro lado, a curva em azul corresponde ao caso em que a deformação última no concreto é igual a 0.01 de acordo com os dados fornecidos por Valipour & Bradford (2009).

Existe boa correlação entre os resultados obtidos numericamente com os resultados experimentais, embora, estes últimos sejam mais flexíveis. O modo de falha obtido com o presente modelo numérico corresponde ao esmagamento do concreto na zona da aplicação da carga, verificando-se o modo de falha estabelecida em outras referencias. Para o caso em que a deformação do concreto é igual a 0.004, a carga de colapso é praticamente igual à

experimental para um deslocamento que é aproximadamente a metade da experimental. Para o caso em que a deformação do concreto é igual a 0.01, o deslocamento é praticamente igual à experimental, embora a carga de colapso obtida com o modelo numérico é aproximadamente 10% maior.

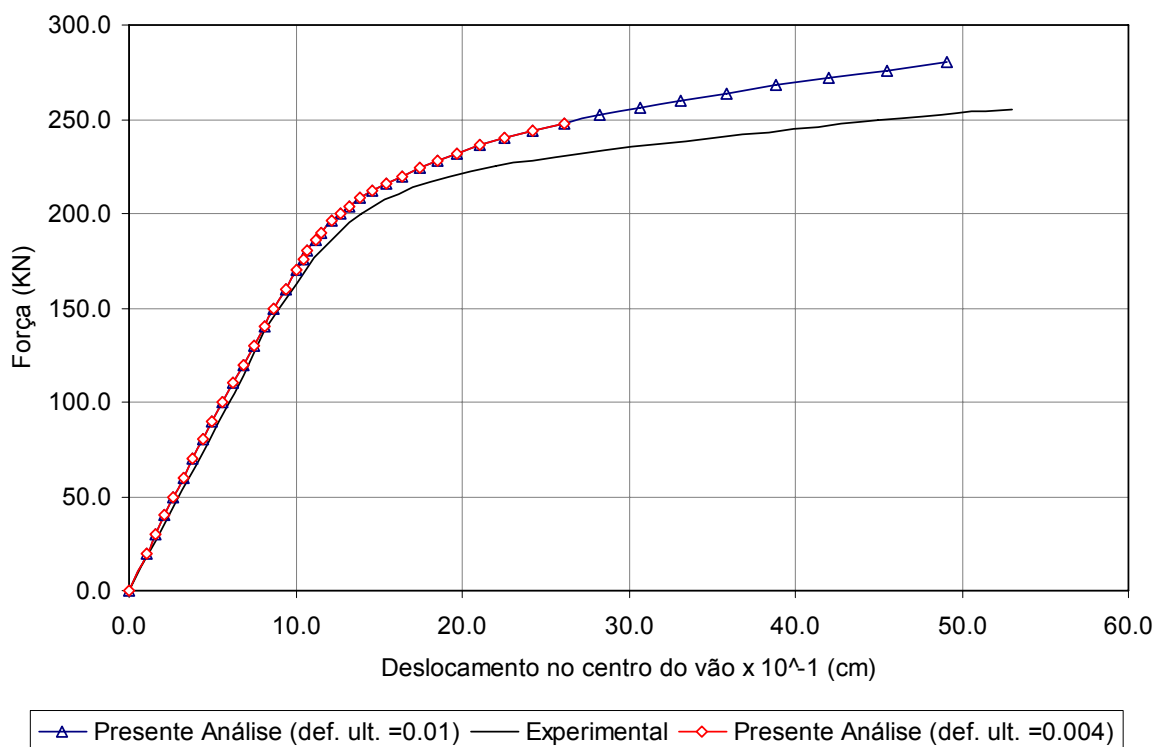


Figura 6.50: Curva força-deslocamento vertical para a seção central da viga CTB4

Para um valor da carga aplicada igual a 248 KN (88% do valor da carga de colapso fornecido pelo modelo numérico), a tensão efetiva na face superior da laje de concreto em compressão para a seção central de um vão (zona de aplicação da carga) é igual a 2.80 KN/cm² (igual ao valor de f_c), ou seja o concreto nesta zona encontra-se fluindo no trecho elasto-plástico perfeito do modelo uniaxial não linear do concreto. No caso da viga de aço para a mesma seção transversal, praticamente o 75% da altura da viga apresenta escoamento, sendo medida a altura desde o plano médio da mesa inferior para acima. Precisamente a esta altura da alma, a tensão efetiva é igual a 23.86 KN/cm². Assim, a tensão efetiva na mesa inferior é praticamente constante na espessura e é igual a 25 KN/cm² (ponto com escoamento). O mesmo acontece na mesa superior, onde a tensão efetiva é igual a 4.67 KN/cm² (ponto não apresenta escoamento).

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho, apresentou-se um modelo elasto-plástico, baseado no método dos elementos finitos, para análise de vigas mistas de pontes ou edificações. Tal modelo é capaz de analisar cargas de curta duração em regime de serviço e colapso, considerando as não linearidades físicas dos materiais envolvidos. A eficácia na predição das respostas estruturais foi avaliada e comparada com os principais exemplos encontrados na literatura para este tipo de estruturas.

Os elementos finitos implementados no modelo da viga mista, também foram avaliados individualmente com testes encontrados na literatura, encontrando-se resultados adequados para a laje de concreto e a viga de aço. As principais conclusões são:

- O elemento finito usado para a laje de concreto utiliza a teoria de placas grossas de Reissner-Midlin e por tanto apresenta o fenômeno de travamento por cortante para valores grandes de relações de comprimento e altura em vigas mistas. Este efeito foi minimizado mediante a utilização de um fator de forma ao corte corrigido para cada elemento finito de acordo com suas dimensões e espessura. A fórmula de correção é proposta no manual de usuário do programa comercial ANSYS para o elemento Shell 93.
- Na formulação do elemento de casca poliédrica para a viga de aço precisa-se definir o valor do parâmetro de estabilidade para evitar os modos espúrios. Este parâmetro é dependente do problema e evita a singularidade na matriz de rigidez do elemento. Encontrou-se que o valor de 0.375 do módulo de corte do material fornece resultados adequados e similares aos obtidos com o programa comercial Sap 2000 para o campo elástico e para estruturas tipo viga de aço com seção transversal em forma de I.

- Na literatura existente, em geral são utilizados os elementos de comprimento zero para modelar a ligação entre o plano médio da laje e a mesa superior da viga de aço. A utilização destes elementos é adequada quando as parcelas que conformam a viga mista são modeladas num mesmo plano, sendo as propriedades geométricas das partes da viga fora do plano, trasladadas a este plano de referência. Para os casos, onde o modelo numérico contempla uma separação entre o plano médio da laje de concreto e a mesa superior da viga de aço, é necessário considerar um elemento de viga tridimensional que considere as rigidezes de flexão e cortante acopladas para manter o equilíbrio da estrutura no processo incremental iterativo. O anterior não acontece com elementos de comprimento zero, pelo fato que na maioria deles todas as rigidezes ficam sem acoplamento.

Comprovou-se a simplificação utilizada por vários autores de considerar um elemento de barra equivalente para representar uma linha de conectores de corte posicionados no sentido transversal (superconector). Esta simplificação foi adequada para o caso da viga mista U4, onde a falha é devido aos conectores de corte. Esta simplificação foi também utilizada nos outros dois exemplos elasto-plásticos, onde a falha é por esmagamento do concreto. Os resultados obtidos parecem ser aceitáveis quando comparados aos experimentais em todos os exemplos. No obstante, é recomendável verificar esta simplificação com mais exemplos, especialmente para os casos onde a falha acontece por esmagamento do concreto.

A não consideração do grau de liberdade de torção no conector fornece resultados adequados como os apresentados nos exemplos.

A hipótese de iguais deslocamentos axiais na barra do conector recomendada por vários autores parece fornecer resultados adequados, embora pode ser discutível sua aplicação para zonas de momento negativo como nos apoios interiores de vigas mistas contínuas. Isto é, nas zonas de momento negativo a laje de concreto apresenta fissuração e provavelmente os elementos que impidan uma separação entre a laje e a mesa superior da viga de aço sejam somente os conectores de corte. Assim, a consideração de zero “uplift” pode não ser representativa destas situações. Inclusive a modelagem das cabeças dos conectores pode ser fundamental na resposta numérica.

Os valores obtidos para cargas de colapso nos exemplos estudados de viga mista estiveram dentro de uma margem de erro de 10%, comparado com os resultados

experimentais. O critério de parada corresponde à falha dos conectores quando estes apresentam um valor máximo de deslocamento relativo (“slip”) igual ao crítico estabelecido ou quando acontece o esmagamento do concreto num ponto de integração por primeira vez.

Também foi implementado o cabo de protensão no elemento finito de concreto. Entretanto, sua formulação não foi considerada nos exemplos de viga mista. O motivo principal é que não foram encontrados exemplos com resultados experimentais ou teóricos na literatura que considerem o pretendido neste tipo de estruturas para cargas de curta duração. Recomenda-se realizar um exemplo próprio, com um desenho adequado dos cabos de protensão e da superestrutura da ponte considerando cargas reais, como o peso próprio da estrutura e carga devida aos veículos.

O processo incremental iterativo, usando o método de Newton Rapshon Modificado, acoplado com um critério de forças desequilibradas, resultou adequado no processo de convergência. O número de incrementos usados nos exemplos estudados apresentou uma média de 40, sendo o maior número de iterações conseguido para um incremento de carga igual a 25 para uma norma de forças igual a 0.01%. O método de Newton Rapshon original, no qual as rigidezes são calculadas em cada iteração, apresentou problemas de convergência em alguns exemplos. O tempo de processamento é variável de acordo ao exemplo estudado, sendo que maior tempo de cálculo conseguido foi de dez minutos num computador Pentium IV (procesador AMD Turion 64 X2, velocidade 2GHz).

A independência da malha de elementos finitos para a laje de concreto foi conseguida com o procedimento usual do critério de energia de fratura. Com este primeiro critério é calculada a deformação em tração ε_m para tensão zero do ramo descendente do diagrama do concreto fissurado (Ver Figura 2.5b). A outra opção utilizada considera um valor constante para esta deformação máxima igual a 0.1 como é estabelecido em Liang et al. (2005). Aquele critério que fornece os melhores resultados, comparados com os resultados experimentais, foi adotado.

A utilização de coeficientes numéricos grandes em certas posições das matrizes de rigidezes dos elementos de barra para simular o efeito de conexão rígida, apresentou um comportamento adequado no processo incremental iterativo, embora um processo exato seja desejável. Em alguns casos foram usados valores de 10^5 vezes as rigidezes obtidas da geometria real do conector.

Para a montagem do sistema de equações lineares é usado um processo tipo banda. Entretanto, este processo não é adequado quando é preciso tratar com equações adicionais como os processos com restrições (“Multipoint Constrains”), devido a que a largura de banda inicial é modificada. Então, é recomendável utilizar um processo de solução tipo perfil que permite implementar de forma adequada e sistemática, em forma exata os processos de restrições.

Atualmente foram implementados elementos finitos de propósito gerais. Estes elementos permitem obter resultados adequados para ambas teorias de placa fina e grossa. Para o presente tipo de estruturas, no qual o campo da relação comprimento/altura efetiva pode ser muito variável, a implementação de um só elemento finito para modelar a laje de concreto e a viga de aço pode ser adequada pelo tempo dedicado à implementação, além de uma melhor organização do código computacional.

É recomendável estudar a possibilidade de implementar um processo incremental baseado em deslocamentos e não em forças. A desvantagem do processo incremental baseado em forças acontece devido a que a definição do valor da carga última de colapso não é bem definida, além de que o efeito denominado pós-pico não é simulado. Embora, o processo baseado em incrementos de deslocamentos seja deseável, o problema acontece quando não existe uma proporcionalidade entre o incremento de deslocamento considerado e o carregamento aplicado. Isto ocorre na maioria das estruturas reais por que o carregamento é geralmente distribuído. Assim, é importante pesquisar mais este tema.

É necessário complementar o modelo desenvolvido com um setor formal de pré e pós-processamento automático das informações do programa computacional, tais como, desenho de malhas, representação gráfica dos deslocamentos, tensões, deformações, fissuração e plastificação.

O modelo numérico desenvolvido (baseado na teoria elasto-plástica) pode-se complementar com outra equação constitutiva para o concreto (por exemplo a de Ottosen de quatro parâmetros) e com a teoria de viscoelasticidade para considerar os efeitos de longa duração para o concreto. Isto é, considerar os fenômenos de fluência, retração e perdas nos cabos de protensão.

Como explicado na introdução, as primeiras modelagens numéricas encontradas na literatura para a laje de concreto utilizaram elementos de casca poliédrica baseados nas

hipóteses de Kirchhoff. Estes modelos provaram simular bem o comportamento das estruturas mistas. No presente modelo, o elemento finito que representa a laje de concreto corresponde ao elemento de casca degenerada baseado nas hipóteses de Reissner-Mindlin. Nos testes estudados, o presente modelo prova fornecer resultados adequados. Entretanto, pode ser recomendável estudar a alternativa de usar o elemento de casca poliédrica deste trabalho também para a laje de concreto. As comparações conseguidas na resposta global e local da estrutura utilizando ambas teorias para a laje de concreto, podem levar a conclusões importantes para estabelecer relações adequadas de comprimento/altura segundo cada teoria.

É desejado para futuros trabalhos modelar estruturas de ponte de grande porte, considerando as diferentes opções para os cabos de protensão (pré-tensionado o pós-tensionado). Assim como também, a inclusão de efeitos de cargas cíclicas no modelo de concreto e do conector para a simulação de cargas dinâmicas como as ações sísmicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, ABAQUS Theory Manual & User Manual, Versão 6.3, Pawtucket, RI, USA: Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2002

AHMAD S. ; IRONS B. M. ; ZIENKIEWICZ O.C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 2, p. 419-451, 1970

ALLMAN D. J. A Quadrilateral Finite Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, Vol. 26, p. 717-730, 1988

AMADIO C. ; FEDRIGO C., FRAGIACOMO M., MACORINI L. Experimental Evaluation of Effective Width in Steel-concrete Composite Beams. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 60, p. 199-220, 2004

AMADIO C. ; FRAGIACOMO M. Effective Width Evaluation for Steel–concrete Composite Beams. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 58, p.373–388, 2002

AMILTON R. ; BATISTA M.J. ; SOUSA M. A Family of Interface Elements for the Analysis of Composite Beams with Interlayer Slip. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol.45, p. 305-314, 2009

ANSYS Versão 10.0 Documentation. ANSYS, Inc.

ARONI S. Slender Prestressed Concrete Columns. **Journal of the Structural Division**, Vol. 94, No 4, p. 875-904, 1968

BARTH K. E. ; WU H. Efficient Nonlinear Finite Element Modeling of Slab on Steel Stringer Bridges. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol.42, p. 1304-1313, 2006

BASKAR K.; SHANMUGAM N. E. ; THEVENDRAN V. Finite-Element Analysis of Steel-Concrete Composite Plate Girder. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 128 , No 9, p.1158-1168, 2002

BATISTA J. M. ; SOUSA JR.; RODRIGUES. DA SILVA A. Nonlinear Analysis of Partially Connected Composite Beams Using Interface Elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 43, pp. 954 - 964, 2007

BATOZ J. ; TAHAR M. Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 18, No 2, p. 1655-1677, 1982

BISHARA A. ; CHUAN M. ; EL-ALI N. Wheel Load Distribution on Simply Supported Skew I-Beam Composite Bridges. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 119 , No 2, p.399-419, 1993

BRADFORD M.A. ; GILBERT R. I. Composite Beams With Partial Interaction Under Sustained Loads. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 118, N°.7, p.1871-1883, July 1992

BRESLER B. ; SCORDELIS A. C. Shear Strength of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, Vol. 60, No 1, p.51-73, July 1963

BROCKENBROUGH R. Distribution Factors for Curved I-Girder Bridges. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 112 , No 10, p.2200-2215, 1986

CARDENAS A. E.; SOZEN M. A. Strength and Behaviour of Isotropically and Nonisotropically Reinforced Concrete Slabs Subjected to Combinations of Flexural and Torsional Moments. **Structural Research Series**, No.336, 250 p., University of Illinois, Urbana, 1968

CASTRO M. ; ELGHAZOULI A. ; IZZUDIN B. A. Assessment of Effective Slab Widths in Composite Beams. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol.63, p. 1317-1327, 2007

CATAI E. **Análise dos Efeitos da Retração e Fluência em Vigas Mistas**. São Carlos, SC. 2005, 166p. Dissertação (Mestrado). Escolha de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo

CERVERA M., HINTON E., HASSAN O. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plate and Shell Structures Using 20-Noded Isoparametric Brick Elements. **Computers & Structures**, Vol. 25, No. 6, p. 845-869, 1987

CHAPMAN J., BALAKRISHNAN S. Experiments on Composite Beams. **Structural Engineer**, Vol. 42, p. 369-383, 1964

CHUNG W. ; SOTELINO E. **Three-dimensional Finite Element Modeling of Composite Girder Bridges**. **Engineering Structures**, Vol. 28 , No 1, p.63-71, 2006

CHIEWANICHAKORN M. ; AREF A. ; CHEN S. ; AHN L. Effective Flange Width Definition for Steel-concrete Composite Bridge Girder. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 130 , No 12, p.2016-2031, 2004

DALL'ASTA A. ; ZONA A. Three-field Mixed Formulation for the Non-linear Analysis of Composite Beams with Deformable Shear Connection. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 40, p. 425-448, 2004

DALL'ASTA A. ; ZONA A. Slip Locking in Finite Elements for Composite Beams with Deformable Shear Connection. **Finite Elements in Analysis and Design** Vol. 40, p.1907–1930, 2004

DALL'ASTA A. ; ZONA A. Non-linear Analysis of Composite Beams by a Displacement Approach. **Computers & Structures**, Vol.80, p. 2217–2228, 2002

DAVID D. L. **Análise Teórica e Experimental de Conectores de Cisalhamento e Vigas Mistas Constituídas por Perfis de Aço Formados a Frio e Laje de Vigotas Pré-Moldadas.** São Carlos, SC. 2007, 250p. Tese (Doutorado). Escolha de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo

DUDDECK H., GRIEBENOW G. ; SHAPER G. Material and Time Dependent Nonlinear Behaviour of Cracked Reinforced Concrete Slabs. **Nonlinear Behaviour of Reinforced Concrete Spatial Structures**, p. 101–113, 1978

FABBROCINO G. ; MANFREDI G.; COSENZA E. Analysis of Continuous Composite Beams Including Partial Interaction and Bond. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 126, No 11, p. 1288-1294, 2000

FAELLA C., MARTINELLI E., NIGRO E. Steel and Concrete Composite Beams with Flexible Shear Connection: “exact” Analytical Expression of the Stiffness Matrix and Applications. **Computers & Structures**, Vol. 80, p. 1001–1009, 2002

FELIPPA C. **The Assembly Process: Chapter. 25.** Lecture Notes of Finite Element Course, Massachusetts Institute of Technology, 2009

FIGUEIRAS J. A. **Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells**, PhD. Thesis, University of Wales, 1983

FIGUEIRAS J.A. ; POVOAS R.H.C. F. Modelling of Prestress in Non-Linear Analysis of Concrete Structures. **Computers & Structures**, Vol. 53, No. 1, p. 173-187, 1994

FU KUAN-CHEN ; LU FENG Nonlinear Finite-Element Analysis for Highway Bridge Superstructures. **Journal of Bridge Engineering**, Vol. 8, No. 3, p. 173-179, 2003

GARA F. ; LEONI G. ; DEZI L. A Beam Finite Element Including Shear Lag Effect for the Time Dependent Analysis of Steel-concrete Composite Decks. **Engineering Structures**, Vol. 31, p. 1888-1902, 2009

GARA F.; RANZI G. ; LEONI G. Time Analysis of Composite Beams with Partial Interaction Using Available Modeling Techniques: A comparative study. **Journal of Constructional Steel Research** Vol. 62, p.917–930, 2006

GATTESCO N. Analytical Modeling of Nonlinear Behavior of Composite Beams with Deformable Connection. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 52, p.195–218, April 1999

GILBERT R.I. ; WARNER R.F. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. **Journal of the Structural Division**, ASCE, Vol. 104, No. ST12, p. 1885-1900, December 1978

GIRHAMMAR A. ; GOPU V. Composite Beam-Columns with Interlayer Slip-Exact Analysis. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, Vol. 119, No. 4, p. 1265-1282, April 1993

GODBOLE P. ; VILADKAR M ; NOORZAEI J. A Modified Frontal Solver with Multi-Element and Variable Degrees of Freedom Features. **Computers & Structures**, Vol. 39, No. 5, p. 525-534, 1991

GUEZOULI S. ; ARIBERT J. M. Approche aux Elements Finis Pour L'étude du Corportement Mecanique des Poutres de Ponts Mixtes a L'échelle Reelle. **XV Congrès Français de Mécanique**, p. 3-7, 2001

HINTON E. ; OWEN D.R. **Finite Element Software for Plates and Shells**, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984

HINTON E., OWEN D.R. **Finite Element in Plasticity-Theory and Practice**, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980

HINTON E., OWEN D.R. **Finite Element Programming**, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1977

HIRST M. J. S. ; YEO M. F. The Analysis of Composite Beams Using Standard Finite Element Programs. **Computers & Structures**, Vol. 11, p. 233-237, 1980

HU H. ; SCHNOBRICH W.C. Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plate and Shells Under Monotonic Loading. **Computers & Structures**, Vol. 38, No. 5/6, p. 637-651, 1991

HUANG Z. ; BURGESS I.W ; PLANK R.J. The Influence of Shear Connectors on the Behaviour of Composite Steel-Framed Buildings in Fire. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 51, p. 219-237, 1999

HUGHES T.J.R. ; BREZZI F. On Drilling Degrees of Freedom. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 72 , p. 105-121, 1989

IBRAHIMBEGOVIC A. ; TAYLOR R. ; WILSON E. A Robust Quadrilateral Membrane Finite Element with Drilling Degrees of Freedom. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 30 , No 3, p.445-457, 1990

IRONS B. M. A Frontal Solution Scheme for Finite Element Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 1 , No 2, p.5-32, 1970

IZZUDDIN B. A. Integration of beam-column and shell elements in large displacement structural analysis, **IASS-APCS**, 2003

JIANG M. ; QIU W. ; ZHANG Z. Time-Dependent Analysis of Steel-Concrete Composite Beams. **International Conference on Engineering Computation**, p.8-11, 2009

JIROUSEK J. ; BOUBERGUIG A. ; SAYGUN A. A Macro-Element Analysis of Prestressed Curved Box-Girder Bridges. **Computers & Structures**, Vol. 10, No. 3, p. 467-482, 1979

JOFRIET J.C. ; MCNEICE G.M. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs. **Journal of the Structural Division**, Vol. 97, No. 3, p. 785-806, 1971

KANG Y. J. **Nonlinear Geometric, Material, and Time-dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames**. PhD. Thesis, University of California, Berkeley, 1977

KUPFER H. ; HILSDORF H. K. ; RUSCH H. Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses. **Proc. Am. Concr. Inst.**, Vol. 66, No. 8, p. 656-666, 1969

KIRCHHOF L. D., NETO J. M. **Uma Contribuição ao Estudo de Vigas Mistas Aço-Concreto Simplesmente Apoiadas em Temperatura Ambiente e em Situação de Incêndio**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, Vol. 7, No 25, p. 1-31,2005

LAM D.; EL-LOBODY E. Behavior of Headed Stud Shear Connectors in Composite Beam. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 131, No 1, p. 96-107, January 2005

LEONHARDT F. ; **Construções de Concreto**, vol. 4, Editora Interciencia Ltda, Rio de Janeiro, Brasil, 1979

LIANG Q. ; UY B. ; BRADFORD M. ; RONAGH H. Strength Analysis of Steel-concrete Composite Beams in Combined Bending and Shear. **Journal of the Structural Engineering**, ASCE, Vol. 131, No. ST10, p. 1593-1600, October 2005

MACORINI L.; FRAGIACOMO M.; AMADIO C.; IZZUDDIN B.A. Long-term Analysis of Steel-Concrete Composite Beams: FE Modelling for Effective Width Evaluation. **Engineering Structures** Vol. 28, p. 1110-1121, 2006

MESQUITA A.D. ; CODA H.B. ; PROENÇA S.P.B. A Finite Element for Elastoplastic Analysis of Thin Plates and Shell. **Computational Mechanics**, CIMNE, 1998

NETO E.A.S. ; PERIC D. ; OWEN D.R. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**, John Wiley and Sons Ltd, U.K., 2008

OLIVEIRA T. J. L. **Pisos Mistos Aço-Concreto com Ligações Semi-Rígidas sob Ação de Cargas de Gravidade: Análise Estática Não-Linear e Dinâmica Experimental e Numérica**. Rio de Janeiro, 2007, 266p. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade Federal de Rio de Janeiro

OVEN V. A. , BURGERSS I. W.; PLANK R. J. ; ABDUL A. A. An Analytical Model for the Analysis of Composite Beams with Partial Interaction. **Computers & Structures**, Vol. 62, No 3, p. 493-504, 1997

OWEN D.R.J. ; FIGUEIRAS J. A. ; DAMJANIC F. Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures Including Thermal Loading. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 41, No. 3, p. 323-366, 1983

PETER J. Zur bewehrung Von schiben und schalen fur hauptspannungen schiefwinklig zur bewehrungsrichtung. Die Bautechnik, No.7, 1966, p. 240-248

PITANGA M. A. **Análise Térmica de Vigas Mistas Aço-Concreto em Situação de Incêndio**. Recife, 2004, 171p. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade Federal Pernambuco

POVOAS R.H.C.F. ; MARTINS R.A.F. Analise de Estruturas Planas de Betão Armado Pelo Metodo dos Elementos Finitos. **Revista Portuguesa de Engenharia da Universidade de Porto (RPEE)**, No. 25, p. 33-47, 1986

POVOAS R.H.C.F. **Modelos Não Lineares de Análise e Dimensionamento**, Tese de Doutorado, Universidade de Porto, 1991

QUANG HUY NGUYENA ; MOHAMMED HJIAJ ; BRIAN UYC ; SAMY GUEZOULI Analysis of Composite Beams in the Hogging Moment Regions Using a Mixed Finite Element Formulation. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 65, p. 737-748, 2009

QUEIROZ F. ; VELLASCO P. ; NETHERCOT D. Finite Element Modeling of Composite Beams with Full and Partial Shear Connection. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 63, p. 505-521, 2007

QUEIROZ F.D.; QUEIROZ G. ; NETHERCOT D.A. Two-dimensional FE Model for Evaluation of Composite Beams, I: Formulation and validation. **Journal of Constructional Steel Research** Vol. 65 , p. 1055-1062, 2009

RANZI G. ; BRADFORD M. A. Analysis of Composite Beams with Partial Interaction Using the Direct stiffness approach accounting for time effects. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 78, p.564–586, 2009

RANZI G. ; BRADFORD M.A. Direct Stiffness Analysis of a Composite Beam-column Element with Partial Interaction. **Computer & Structures**, Vol. 85, p. 1206-1214, 2007

RANZI G. ; BRADFORD M.A. Time Analysis of Structural Concrete Elements Using the Equivalent Displacement Method. **Materials and Structures**, Vol.38, p. 609-616, July 2005

RANZI G. ; BRADFORD M. A. Analytical Solutions for Elevated-Temperature Behavior of Composite Beams with Partial Interaction. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 133, No 6, p. 788-799, June 2007

RANZI G. ; BRADFORD M.A. ; UY B. A Direct Stiffness Analysis of a Composite Beam with Partial Interaction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 61, p. 657-672, 2004

RANZI G. ; GARA F. , LEONI G. , BRADFORD M. A. Analysis of Composite Beams with Partial Shear Interaction Using Available Modelling Techniques: A comparative study. **Computers & Structures**, Vol. 84 , p.930–941, 2006

RANZI G., ZONA A. A Steel–concrete Composite Beam Model with Partial Interaction including the Shear Deformability of the Steel Component. **Engineering Structures**, Vol. 29, p. 3026–3041, 2007

RAZAQPUR A. G., NOFAL M. A Finite Element for Modelling the Nonlinear Behavior of Shear Connectors in Composite Structures. **Computers & Structures**, Vol. 32, No 1, p. 169-174, 1989

ROCA P. ; MARI A.R. Numerical Treatment of Prestressing Tendons in the Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Structures. **Computers & Structures**, Vol. 46, No. 5, p. 905-916, 1993

ROCA P. ; MARI A.R. Nonlinear Geometric and Material Analysis of Prestressed Concrete General Shell Structures. **Computers & Structures**, Vol. 46, No. 5, p. 917-929, 1993

SAKR M. A. ; SAKLA S.S. Long-term Deflection of Cracked Composite Beams with Nonlinear Partial Shear Interaction: I - Finite element modeling. **Journal of Constructional Steel Research**, Vol. 64, p. 1446-1455, 2008

SALARI M. R. ; SPACONE E ; SHING P.B. ; FRANGOPOL D. M. Nonlinear Analysis of Composite with Deformable Shear Connectors. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 124, No 10, p. 1148-1158, 1998

SANDEEP CHAUDHARY ; UMESH PENDHARKAR ; NAGPAL A. K. Hybrid Procedure for Cracking and Time-Dependent Effects in Composite Frames at Service Load. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 133, No 2, p. 166-175, February 2007

SAP 2000 Versão 14.0, Berkeley, California: Computers and Structures, Inc.

SAPOUNTZAKIS E. J. ; KATSIKADELIS J. T. A New Model for the Analysis of Composite Steel-Concrete Slab and Beam Structures with Deformable Connection. **Computational Mechanics** Vol. 31, p.340-349, 2003

SCHNOBRICH W.C. Behaviour of Reinforced Concrete Structures Predicted by the Finite Element. **Computers & Structures**, Vol. 7, No. 3, p. 365-376, 1977

SEBASTIAN W. M ; MCCONNELL R. E. Nonlinear FE Analysis of Steel-concrete composite Structures. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 126, No 6, p. 662-674, June 2000

SEBASTIAN W. Ductility Requirements in Connections of Composite Flexural Structures. **International Journal of Mechanical Science**, Vol. 45, p. 235-251, 2003

SEBASTIAN W. Path Dependency in Hybrid Structures with Simultaneous Ductile and Brittle Connections and Materials. **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 42, p. 4859-4879, 2005

SILVA A. R. **Análise Numérica de Vigas Mistas com Interação Parcial**. Ouro Preto, OP. 2006, 176p. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade Federal de Ouro Preto

SILVA A. R. ; BATISTA J. ; SOUSA M. A Family of Interface Elements for the Analysis of Composite Beams with Interlayer Slip. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 45, p. 305-314, 2009

SOBRINHO B. C. **Deflexões de Vigas Mistas Biapoiadas em Condições de Serviço: Análises de Curta e Longa Duração**. Vitória, SC. 2002, 107p. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade Federal do Espírito Santo

THEVENDRAN V. ; CHEN S. ; SHANMUGAM N. ; LIEW J. Nonlinear Analysis of Steel-concrete Composite Beams Curved in Plan. **Finite Element Analysis and Design**, Vol. 32, p. 125-139, 1999

TITOUUM M. ; TEHAMI M. ; ACHOUR B. ; JASPART J. Analysis of Semi-Continuous Beams with Partial Shear Connection Using 2-D Finite Element Approach. **Asian Journal of Applied Science**, Vol. 1, p. 185-205, 2008

TRISTÃO G. A. **Comportamento de Conectores de Cisalhamento em Vigas Mistas Aço-Concreto com Análise da Resposta Numérica**. São Carlos, SC. 2002, 146p. Dissertação (Mestrado). Escolha de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo

VALENTE M. I. B. **Experimental Studies on Shear Connection Systems in Steel and Lightweight Concrete Composite Bridges**. Minho, 2007, 427p. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia. Universidade de Minho, Portugal

VALIPOUR H.R. ; BRADFORD M.A. A Steel-Concrete Composite Beam Element with Material Nonlinearities and Partial Shear Interaction. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 45, p. 966-972, 2009

VEBO A. ; GHALI A. Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete Slabs. **Journal of the Structural Division**, ASCE, Vol. 103, No. ST3, p. 515-531, March 1977

WEB J. P. Imposing Linear Constraints in Finite Element Analysis. **Communications in Applied Numerical Methods**, Vol. 6, p.471-475, 1990

XIA Y.; HAO H.; DEEKS A.; ZHU X. Conditions Assessment of Shear Connectors in Slab-Girder Bridges Via Vibration Measurements. **Journal of Bridge Engineering**, Vol. 13, No 1, p.43-54, 2008

XU R.; WU Y. Two-dimensional Analytical Solution of Simply Supported Composite Beams with Interlayer Slips. **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 44, p.165-175, 2007

YAM L.C.P.; CHAPMAN J.C. The Inelastic Behaviour of Simply Supported Composite Beams of Steel and Concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Vol. 41, No 1, p.651-683, 1968

YAM L.C.P.; CHAPMAN J.C. The Inelastic Behaviour of Continuous Composite Beams of Steel and Concrete. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Vol. 53, No 2, p.487-501, 1972

ZHENG Y. ; ROBINSON D. ; TAYLOR S. ; CLELAND D. Finite Element Investigation of the Structural Behavior of Deck Slabs in Composite Bridges. **Engineering Structures**, Vol. 31, p. 1762-1777, 2009

ZONA A.; RANZI G. Finite Elements Models for Nonlinear Analysis of Steel-concrete Composite Beams with Partial Interaction in Combined Bending and Shear. **Finite Elements in Analysis and Design**, Vol. 47, p. 98-118, 2011

APÊNDICE A

A.1 Expressões para o cálculo da matriz de deformação do aço protendido

Considerando exclusivamente a componente relativa à extensão axial do cabo, a relação (2.34) simplifica-se, sendo:

$$\varepsilon_p = \frac{\partial u'}{\partial x'} = [a \quad b \quad c] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (\text{A.1a})$$

com,

$$a = \frac{1}{v} \frac{dx}{d\tau}, \quad b = \frac{1}{v} \frac{dy}{d\tau} \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{v} \frac{dz}{d\tau} \quad (\text{A.1b})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Expressando,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^n N_k \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3a})$$

$$\underline{u} = N_k \cdot \left[I_3, \zeta \frac{h_k}{2} C_i \right] \cdot \{\delta\}_i^{(e)} \quad (\text{A.3b})$$

sendo,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} -V_{2k}^x & V_{1k}^x \\ -V_{2k}^y & V_{1k}^y \\ -V_{2k}^z & V_{1k}^z \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \cdot \left[I_3, \zeta \frac{h_k}{2} C_i \right] \cdot \{\delta\}_i^{(e)} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \cdot \left[I_3, \zeta \frac{h_k}{2} C_i \right] \cdot \{\delta\}_i^{(e)} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = N_k \cdot \left[0, \frac{h_k}{2} C_i \right] \cdot \{\delta\}_i^{(e)} \quad (\text{A.7})$$

Reemplazando em (A.1a):

$$\varepsilon_p = [a \quad b \quad c]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \{\delta\}_i^{(e)} \}_{1 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \\ \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{5 \times 3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \{\delta\}_i^{(e)} \}_{1 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \\ \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{5 \times 3} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \\ \{\delta\}_i^{(e)} \}_{1 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{5 \times 3} N_k \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.8a})$$

$$\varepsilon_p = [a \quad b \quad c]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} [a \quad b \quad c]_{1 \times 3} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \begin{bmatrix} I_3 \\ \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \\ [a \quad b \quad c]_{1 \times 3} \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \begin{bmatrix} I_3 \\ \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \\ [a \quad b \quad c]_{1 \times 3} N_k \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot \{\delta\}_i^{(e)} \}_{5 \times 1} \quad (\text{A.8b})$$

Assim tem-se,

$$\varepsilon'_x = [B]_p \{\delta\}_i \quad (\text{A.9a})$$

$$B_p = [a \ b \ c]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} [a \ b \ c]_{1 \times 3} & \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \begin{bmatrix} I_3 & \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \\ [a \ b \ c]_{1 \times 3} & \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \begin{bmatrix} I_3 & \zeta \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \\ [a \ b \ c]_{1 \times 3} & N_k \begin{bmatrix} 0_3 & \frac{h_k}{2} C_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.9b})$$

APÊNDICE B

B.1 Expressões para o cálculo da matriz de deformação do elemento de concreto (não-linearidade geométrica)

$$\{\varepsilon'\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} \right)^2 \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon_L\} \quad (\text{B.1})$$

com,

$$\{\varepsilon_L\} = \frac{1}{2} [S][R] \quad (\text{B.2})$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{bmatrix} = [G]\{\delta\} \quad (\text{B.4})$$

onde $\{\delta\}$ é o vetor dos deslocamentos e $[G]$ é uma matriz com duas linhas e numero de colunas igual ao numero de variáveis nodais do elemento (para o elemento Serendipity igual a

40). A primeira linha contiene a contribuição de cada uma das variáveis nodais à derivada local $\partial w'/\partial x'$ (as derivadas das funções de forma correspondentes) e a segunda linha contiene similares contribuições para $\partial w'/\partial y'$. Então, derivando a equação (B.2), tem-se:

$$\{d\varepsilon_L\} = \frac{1}{2}[dS][R] + \frac{1}{2}[S][dR] = [S][dR] = [S][G]\{d\delta\} \quad (\text{B.5})$$

Logo, por definição:

$$[B']_e = [S][G] \quad (\text{B.6})$$

A matriz de rigidez tangencial vem definida por:

$$[K]_e = \iiint_V [G]^T [\sigma][G] dV \quad (\text{B.7})$$

Com,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

A matriz $[K]_e$ é adicionada à matriz da equação (2.53) para determinar a matriz final do elemento.

APÊNDICE C

C.1 Diagramas de fluxos do modelo numérico implementado

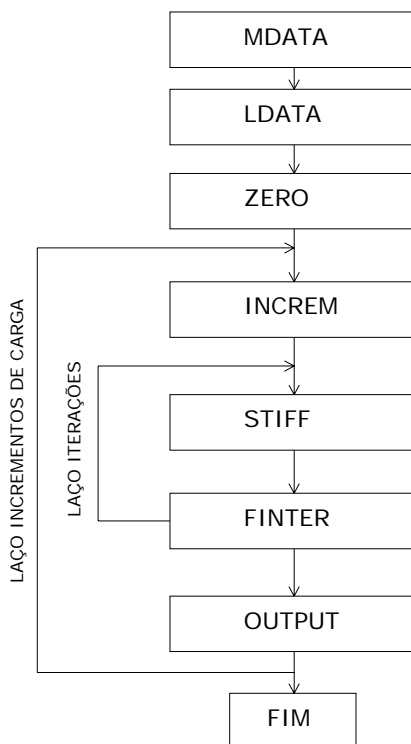


Figura C.7.1: Diagrama de fluxo do programa principal

MDATA: rotina que lê os dados de entrada como a geometria, condições de contorno e propriedades dos materiais.

LDATA: rotina que lê os dados de entrada referentes às cargas aplicadas na estrutura: cargas de superfície sob a laje de concreto, cargas pontuais na viga de aço, laje de concreto e conectores.

ZERO: rotina que zera a maioria dos vetores e matrizes usados no código.

INCREM: rotina que faz os incrementos de carga pelos fatores especificados.

STIFF: rotina que monta a matriz de rigidez global da estrutura com a contribuição dos elementos de casca poliédrica de placa delgada, casca degenerada de placa grossa e elementos de barra viga-coluna.

FINTER: rotina que calcula as forças internas em cada elemento e monta o vetor global de forças desequilibradas

OUTPUT: rotina que escreve os resultados de deslocamentos, tensões e reações da estrutura.

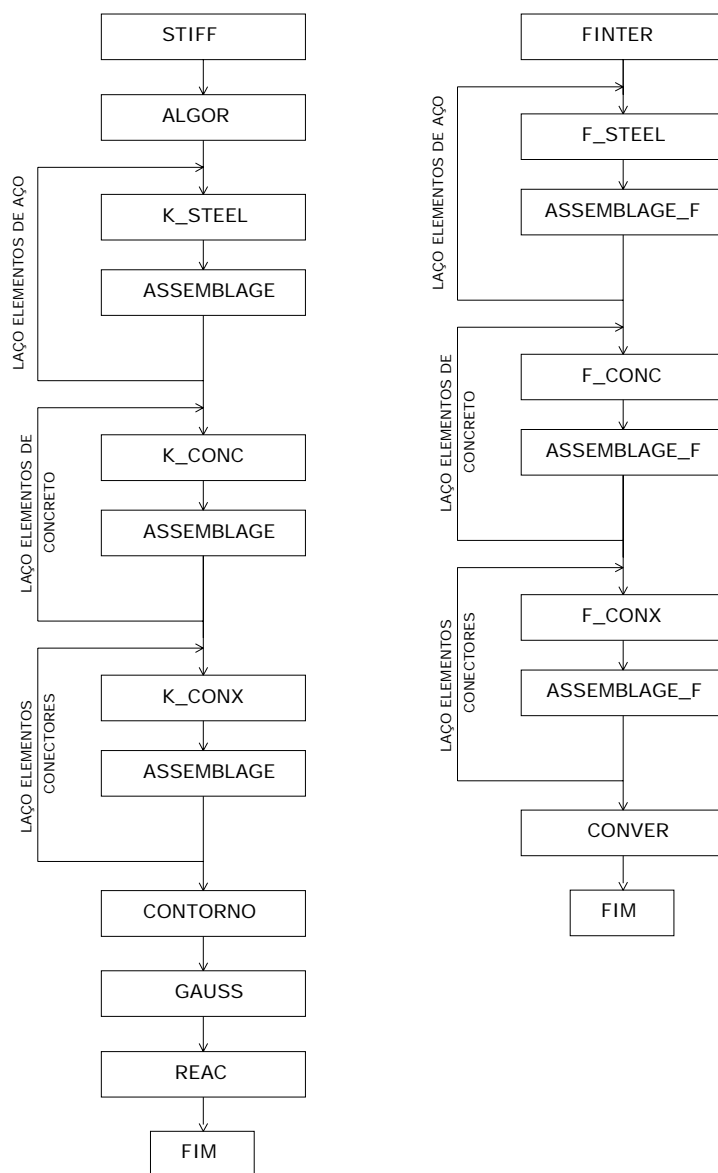


Figura C.7.2: Esquerda) diagrama de fluxo rotina de ensamble da matriz de rigidez global Direita) Diagrama de fluxo da montagem do vetor de forças globais desbalanceadas

ALGOR: rotina que seleciona o algoritmo de solução. Primeira opção: A matriz de rigidez é calculada em cada iteração de cada incremento. Segunda opção: a matriz de rigidez dos elementos são calculadas quando acontece uma descarga ou na primeira iteração de cada incremento.

K_CONC: rotina que calcula a matriz de rigidez global de um elemento de casca degenerada

K_STEEL: rotina que calcula a matriz de rigidez global de um elemento de casca poliédrica.

K_CONX: rotina que calcula a matriz de rigidez global de um elemento de barra viga-coluna.

ASSEMBLAGE: rotina que monta a matriz de rigidez da estrutura conhecendo as matrizes de rigidez dos elementos com um ordenamento tipo banda

ASSEMBLAGE_F: rotina que monta o vetor de forças globais desbalanceadas da estrutura.

CONTORNO: rotina que introduz as condições de contorno no vetor de forças global e a matriz de rigidez global da estrutura.

GAUSS: rotina que faz a solução do sistema de equações lineares para calcular os deslocamentos nos nós dos elementos.

REAC: rotina que calcula as reações nos graus de liberdade restringidos.

F_STEEL: rotina que calcula as forças globais desbalanceadas de um elemento de casca poliédrica.

F_CONC: rotina que calcula as forças globais desbalanceadas de um elemento de casca degenerada.

F_CONX: rotina que calcula as forças globais desbalanceadas de um elemento de barra viga-coluna.

CONVER: rotina que verifica se a porcentagem das forças desbalanceadas em relação às forças atuantes é menor que uma tolerância determinada.

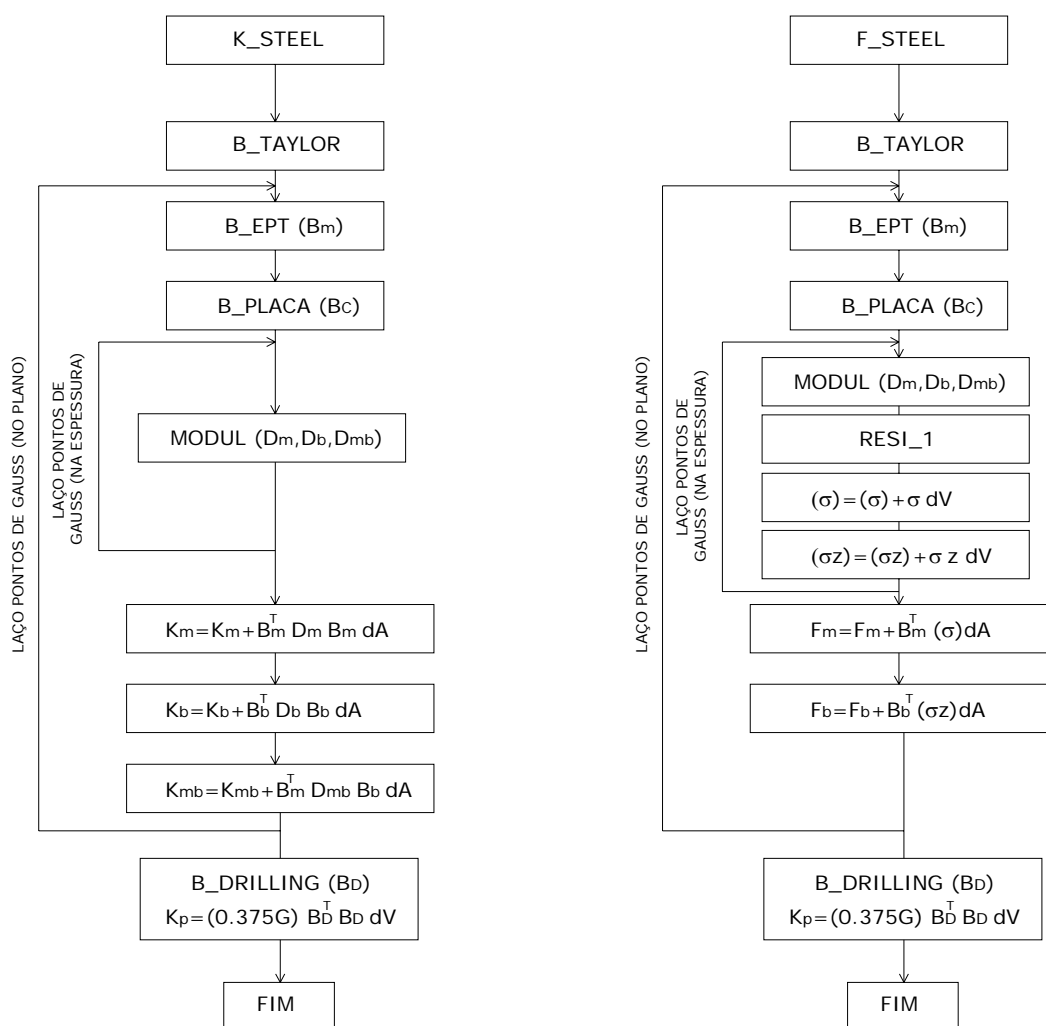


Figura C.7.3: Esquerda) Diagrama de fluxo para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de casca poliédrica Direita) Diagrama de fluxo para o cálculo do vetor de forças globais do mesmo elemento finito.

B_TAYLOR: rotina que calcula as correções no elemento finito para evitar o bloqueio de membrana.

B_EPT: rotina que calcula a matriz deformações-deslocamento para a parte de membrana num ponto de Gauss no plano do elemento.

B_PLACA: rotina que calcula a matriz deformações-deslocamento para a placa num ponto de Gauss no plano do elemento.

B_DRILLING: rotina que calcula a matriz deformações-deslocamento para evitar a singularidade no elemento finito devido à introdução de modos espúrios.

MODUL: rotina que calcula a matriz de elasticidade do material para um estado de tensão plana. Também calcula o produto desta última matriz com o valor da posição atual (Z) na espessura.

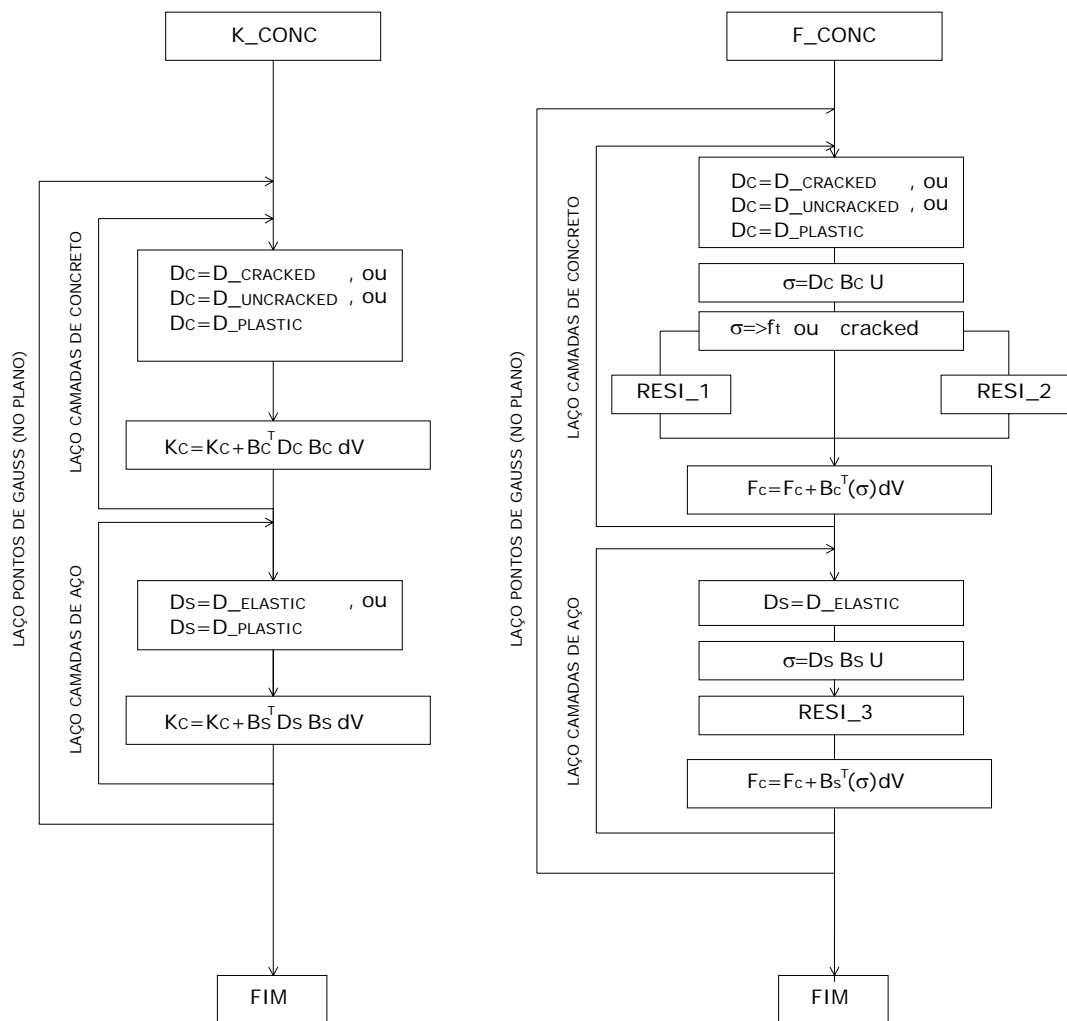


Figura C.7.4: Esquerda) Diagrama de fluxo para o cálculo da matriz de rigidez do elemento de casca degenerada Direita) Diagrama de fluxo para o cálculo do vetor de forças globais do mesmo elemento finito.

RESI1: rotina que faz a correções nas tensões de acordo ao critério de escoamento atualizado.

Esta rotina é bem descrita na referencia Hinton & Owen (1984).

RESI2: rotina que faz a correções nas tensões para o concreto fissurado. O procedimento utilizado é bem explicado na referencia Povoas & Martins (1986).

RESI3: rotina que faz a correção elasto-plástica uniaxial para as camadas de aço embebido nos elementos finitos de concreto. A descrição desta rotina é mostrada em Hinton & Owen (1984).