

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Modelos Unidimensionais para  
Fluxos Condutivo-Radiativos**

por

Esequia Sauter

Tese submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson  
Orientador

Porto Alegre, Abril de 2011.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Sauter, Esequia

Modelos Unidimensionais para Fluxos Condutivo-Radiativos / Esequia Sauter.—Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2011.

88 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2011. Orientador: Thompson, Mark

Tese: Matemática Aplicada

Equações parabólicas íntegro-diferenciais não lineares de segunda ordem, Transferência radiativa de calor, Método de Diferenças Finitas, Equação do Transporte com espalhamento anisotrópico.

# Modelos Unidimensionais para Fluxos Condutivo-Radiativos

por

Esequia Sauter

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Física-matemática

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Professor Dr. Abimael Fernando Dourado Loula  
LNCC

Professor Dr. Luciano Bedin  
Departamento de Matemática - UFSC

Professora Dra. Liliane Basso Barichello  
PPGMAp -UFRGS

Tese apresentada em  
13/04/2011.

Maria Cristina Varriale  
Coordenadora

## Agradecimentos

À Deus.

Ao professor e orientador Mark Thompson, por apresentar o assunto dessa Tese e pelo constante apoio no desenvolvimento do trabalho.

Ao professor e colega Fabio Souto de Azevedo, pela intensa cooperação na pesquisa.

Às Instituições de Fomento a pesquisa CAPES e CNPq.

## Conteúdo

<b>LISTA DE FIGURAS</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>RESUMO</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1.1 Formulação Matemática</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1.1 Problema Unidimensional . . . . .	2
<b>1.2 Discussão</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>2 TEORIA DE EXISTÊNCIA E SIMULAÇÕES PARA A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2.1 Teoria de existência para equação de transporte</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>2.2 Metodologia para obter Solução Numérica</b> . . . . .	<b>16</b>
2.2.1 Momentos de ordem $p$ . . . . .	17
<b>2.3 Discretização dos operadores <math>K_g^{l,k}, K_b^l</math></b> . . . . .	<b>18</b>
2.3.1 Discussão sobre o cálculo dos coeficientes de $W^{l,k}$ . . . . .	20
<b>2.4 Erro de Truncamento para o método <math>GFD_N</math></b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.5 Resultados Numéricos para o Transporte</b> . . . . .	<b>28</b>
2.5.1 Validação do método . . . . .	28
2.5.2 Validação via métodos espectrais . . . . .	29
2.5.3 Vários resultados de simulações . . . . .	35
<b>2.6 Conclusão</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>3 TEORIA DE EXISTÊNCIA E SIMULAÇÕES PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL ACOPLADO</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>3.1 Teoria de Existência</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1.1 Unicidade . . . . .	46
<b>3.2 Discretização do Problema Acoplado</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>3.3 Simulações Numéricas para o Problema Acoplado</b> . . . . .	<b>52</b>
3.3.1 Cálculo do Fluxo de Energia para Validação do Método Numérico . . . . .	52
3.3.2 Resultados Numéricos . . . . .	54
<b>3.4 Conclusão</b> . . . . .	<b>59</b>

<b>4</b>	<b>PROBLEMA UNIDIMENSIONAL QUASILINEAR</b>	<b>61</b>
4.1	Teoria de Existência	61
4.1.1	Unicidade	68
4.2	Discretização do Problema Quasilinear Acoplado	70
4.3	Resultados Numéricos para o problema quasilinear	73
4.3.1	Cálculo do Fluxo de Energia para Validação do Método Numérico	73
4.3.2	Resultados Numéricos	73
4.4	Conclusão	75
<b>5</b>	<b>TRABALHOS PARALELOS E FUTUROS</b>	<b>80</b>
5.1	Problema Semi-Infinito	80
5.2	Trabalhos Futuros	80
	<b>APÊNDICE A LEMAS TÉCNICOS E DEFINIÇÕES</b>	<b>82</b>
A.1	Definições	82
A.2	Lemas Técnicos	82
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>86</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1	Descrição do domínio $D$ e sua fronteira. . . . .	2
Figura 2.1	Perfil de $\frac{T}{4\pi}$ quando $B_0 = B_L = 0$ e o termo fonte $S(y)$ é constante igual a 1 no gráfico à esquerda e no gráfico à direita é dado pela sentença $S(y) = 1$ , se $0.3 < y < 0.7$ e 0 caso contrário. Em ambos gráficos $\omega$ varia entre 0 e 1.4 em intervalos de 0.2. . . . .	31
Figura 3.1	Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando $\rho = 0.5$ , $\sigma' = 0.5/m$ , $\lambda' = 1.0/m$ e $L = 1.0m$ e as condições de contorno são $T(0) = 1000K$ e $T(L) = 300K$ para ambos os gráficos. No primeiro gráfico temos $k_0 = 10.0W/mK$ e no segundo $k_0 = 100.0W/mK$ . . . . .	53
Figura 3.2	Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando $\rho = 0.5$ , $\sigma' = 0.5/m$ , $\lambda' = 10.0/m$ , $L = 1.0m$ e condições de contorno $T(0) = 1000K$ e $T(L) = 300K$ . No primeiro gráfico temos $k_0 = 10.0W/mK$ e no segundo $k_0 = 100.0W/mK$ . . . . .	53
Figura 3.3	Temperatura variando com o espaço e tempo quando $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a $300K$ em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a $1000K$ e $\sigma' = 0,5\lambda$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária $T = 300K$ . À direita temos a temperatura nos cortes $y = 0$ , $y = 0,2m$ , $y = 0,4m$ , $y = 0,6m$ , $y = 0,8m$ e $y = 1,0m$ . . . . .	55
Figura 3.4	Perfil de temperatura para vários instantes de tempo quando $\sigma' = 0.5\lambda'$ , temperaturas externas iguais a $300K$ em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a $1000K$ . À esquerda $L = 5cm$ e à direita $L = 5mm$ . . . . .	55
Figura 3.5	Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita $1000K$ e à fronteira esquerda $300K$ . Aqui $\sigma = 0.0$ no gráfico à esquerda e $\sigma = 0.3\lambda$ no gráfico à direita. . . . .	56
Figura 3.6	Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita $1000K$ e à fronteira esquerda $300K$ . Aqui $\sigma = 0.6\lambda$ no gráfico à esquerda e $\sigma = 0.9\lambda$ no gráfico à direita. . . . .	56
Figura 3.7	Perfil de temperatura variando com o tempo em vários pontos da malha quando $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita $1000K$ e à fronteira esquerda $300K$ . Aqui $\sigma = 0.0/m$ no gráfico à esquerda e $\sigma = 0.9\lambda$ no gráfico à direita. . . . .	57
Figura 3.8	Temperatura variando com o espaço e tempo quando $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a $2000K$ à direita e $1000K$ à esquerda, temperatura inicial constante igual a $1500K$ e $\sigma' = 0,0$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária $t = \infty$ . À direita temos a temperatura nos cortes $y = 0$ , $y = 0,2m$ , $y = 0,4m$ , $y = 0,6m$ , $y = 0,8m$ e $y = 1,0m$ . . . . .	57
Figura 3.9	Perfis de temperaturas em vários instantes de tempo e depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a $1700K$ à direita e $1000K$ à esquerda, temperatura inicial constante igual a $2000K$ e $\sigma' = 0,0/m$ . À direita temos $h = 10,0W/m^2K$ e à esquerda $h = 1,0W/m^2K$ . . . . .	58

- Figura 3.10 Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$  e  $\sigma' = 0,0/m$ . No primeiro gráfico as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $1000K$  à direita. Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $1000K$  a direita e variam de  $1000K$  a  $1700K$  a esquerda. . . . . 58
- Figura 3.11 Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$  e  $\sigma' = 0,0/m$ . As temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $300K - 700K$ ,  $400K - 800K$ ,  $500K - 900K$  e  $600K - 1000K$ . . . . . 59
- Figura 4.1 Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$  e  $L = 1.0m$  e as condições de contorno são  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$  para ambos os gráficos. No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10^{-2}TW/mK^2$  e no segundo  $k_0 = 10^{-3}T^2W/mK^2$ . . . . . 73
- Figura 4.2 Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$ ,  $\lambda' = 10.0/m$ ,  $L = 1.0m$  e condições de contorno  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$ . No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10^{-5}T^2W/mK^2$  e no segundo  $k_0 = 10^{-7}W/mK^2$ . . . . . 74
- Figura 4.3 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0(T) = 10^{-2}T$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária  $T = 300K$ . À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 75
- Figura 4.4 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $300K$  na fronteira à esquerda e  $1000K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0(T) = 10^{-11}T^4$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 76
- Figura 4.5 Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando a temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa na fronteira à direita  $1000K$  e na fronteira à esquerda  $300K$ . No gráfico à esquerda  $k_0(T) = 10^{-12}T^5$  e no gráfico à direita  $0,14e^{0,0066T}$ . . . . . 76
- Figura 4.6 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $700K$  na fronteira à esquerda e  $1200K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $1500K$  e  $k_0(T) = 10^{-1}\ln(T)$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 77
- Figura 4.7 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1000K$  na fronteira à esquerda e  $1700K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-5}T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 77



- Figura 4.8 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1500K$  na fronteira à esquerda e  $1700K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-4}T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0, y = 0,2m, y = 0,4m, y = 0,6m, y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 78
- Figura 4.9 Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1700K$  na fronteira à esquerda e  $2000K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-2}T + 10^{-5}T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0, y = 0,2m, y = 0,4m, y = 0,6m, y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ . . . . . 78
- Figura 4.10 Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ). No primeiro gráfico as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $900K$  à direita e  $k_0 = 0,35T - 89$ . Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $2000K$  à direita e variam de  $1300K$  a  $1900K$  à esquerda e  $k_0(T) = 10^{-1} \ln(T)$ . . . . . 79
- Figura 4.11 Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ). As temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $700K - 300K, 800K - 400K, 900K - 500K$  e  $1000K - 600K$  e  $k_0(T) = 0,14e^{0,0066T}$ . . . . . 79

## Lista de Tabelas

Tabela 1	Lista de grandezas físicas . . . . .	xii
Tabela 2.1	Comparação entre os valores calculados para $\int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ quando $\lambda' = \omega = 1.0$ , o termo fonte é $S(y) = -y^2 + y$ , a condição de fronteira é $B_0 = B_L = 0$ e $\rho = 0$ com os resultados publicados por Vargas [31]. . . . .	29
Tabela 2.2	Comparação entre os valores calculados para $\int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ quando $\lambda' = \omega = 1.0$ , o termo fonte é $S(y) = 1/8$ , a condição de fronteira é $B_0 = B_L = 1/8$ e $\rho = 0$ com os resultados publicados por Vargas [31]. . . . .	29
Tabela 2.3	Comparação entre os valores calculados para o valor crítico de $\omega$ quando $\lambda' = 1$ , $\rho = 0$ com o benchmark publicado por Naz [20]. . . . .	30
Tabela 2.4	Comparação do valor crítico de $\omega$ com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1$ e $L = 0.2$ . . . . .	30
Tabela 2.5	Comparação do valor crítico de $\omega$ com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando $\rho$ varia entre 0 e 0.99, $\lambda' = 1$ e $L = 2.0$ . . . . .	30
Tabela 2.6	Comparação do valor crítico de $\omega$ com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1$ e $L = 20.0$ . . . . .	30
Tabela 2.7	Comparação entre os valores calculados para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ e $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 I(y, \mu') \mu' d\mu'$ quando $\omega = \lambda' = 1.0$ , o termo fonte é dado por $Q(y) = e^{-y}$ , a condição de fronteira é $B_0 = B_L = 1.0$ , $L = 1.0$ e $\rho = 0$ com os resultados publicados por Vargas [31]. . . . .	31
Tabela 2.8	Comparação entre os valores calculados para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ e $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 I(y, \mu') \mu' d\mu'$ quando $\omega = \lambda' = 1.0$ , o termo fonte é dado por $Q(y) = e^{-y^2/4}$ , a condição de fronteira é $B_0 = 1.0$ e $B_L = 0.0$ , $L = 100.0$ and $\rho = 0$ com os resultados publicados em [31]. . . . .	31
Tabela 2.9	Valores críticos de $\omega$ usando o método de expansão em cossenos quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1.0$ e $L = 2.0$ . . . . .	34
Tabela 2.10	Comparação do valores críticos de $\omega$ obtidos com expansão em cossenos com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] e com o método $GFD_N$ quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1.0$ e $L = 2.0$ . . . . .	34
Tabela 2.11	Valores críticos de $\omega$ obtidos com expansão em cossenos quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1.0$ e $L = 20.0$ . . . . .	35
Tabela 2.12	Comparação do valores críticos de $\omega$ obtidos com expansão em cossenos com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] e com o método $GFD_N$ quando $\rho$ varia entre 0 and 0.99, $\lambda' = 1.0$ e $L = 20.0$ . . . . .	35
Tabela 2.13	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = 0$ , as condição de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ e $L = 1.0$ para vários valores de $\omega$ . . . . .	36
Tabela 2.14	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = 0$ , as condição de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ e $L = 1.0$ para vários valores de $\omega$ . . . . .	36

Tabela 2.15	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$ para vários valores de $\beta_1$ . . . . .	36
Tabela 2.16	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$ para vários valores de $\beta_1$ . . . . .	36
Tabela 2.17	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho$ obedece a relação de Fresnel, $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = -y^2 + 1$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$ para vários índices de reflexão $\eta_1$ e dois valores de $\beta_1$ . . . . .	37
Tabela 2.18	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho$ obedece a relação de Fresnel, $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = -y^2 + 1$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 1.0$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$ para vários índices de reflexão $\eta_1$ e dois valores de $\beta_1$ . . . . .	37
Tabela 2.19	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 0.25$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.1 + \beta_2 P_2(\mu) P_2(\mu')$ para vários valores de $\beta_2$ . . . . .	37
Tabela 2.20	Resultados Numéricos pelo método $GFD_{400}$ para $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$ quando $\rho = 0.5$ , $\lambda' = 1.0$ , $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são $B_0 = 0.5$ , $B_L = 0.25$ , $L = 1.0$ e $\omega = 0.1 + \beta_2 P_2(\mu) P_2(\mu')$ para vários valores de $\beta_2$ . . . . .	37
Tabela 3.1	Coefficientes de absorção de um modelo de oito bandas para vidro dado em Larsen ([17]), originalmente de ITWM, Kaiserlautern. . . . .	59

## LISTA DE GRANDEZAS FÍSICAS

Grandeza	símbolo	unidade
Temperatura	$T$	$K$
Intensidade radiativa	$I$	$Wm^{-2}sr^{-1}$
Intensidade radiativa total	$\mathcal{I}$	$Wm^{-2}$
Velocidade	$\mathbf{v}$	$ms^{-1}$
Tempo	$t$	$s$
Posição	$y$	$m$
Direção	$\Omega$	sr
Frequência	$\nu$	$s^{-1}$
Calor específico volumétrico	$c_v$	$JK^{-1}m^{-3}$
Calor específico	$c_m$	$JK^{-1}Kg^{-1}$
Massa específica (densidade)	$\rho_m$	$Kgm^{-3}$
Coefficiente de condutividade térmica	$k_0$	$Wm^{-1}K^{-1}$
Coefficiente de absorção	$\lambda'$	$m^{-1}$
Coefficiente de espalhamento	$\sigma'$	$m^{-1}$
Coefficiente de emissão	$\kappa'$	$m^{-1}$
Coefficiente de troca de calor na superfície	$h$	$Wm^{-2}K^{-1}$
Emissividade	$\alpha$	adimensional
Índice de refração do meio	$\eta_1$	adimensional
Índice de refração externo ao meio	$\eta_2$	adimensional
Coefficiente de reflexão	$\rho$	adimensional

Tabela 1: Lista de grandezas físicas

## RESUMO

Fenômenos que envolvem transferência de calor em altas temperaturas exigem modelos condutivos-radiativos, como é o caso de modelos de resfriamento de vidro e de turbinas de gás. A formulação matemática resulta em um sistema de equações diferenciais parciais, sendo uma equação parabólica com condições de contorno não lineares acoplada a equação de transporte radiativo com condições de contorno semi-reflexiva. A teoria de existência para esse sistema já existe sob algumas condições restritivas. Neste trabalho tratamos essa teoria sem a necessidades de hipóteses não física no caso unidimensional. Também fizemos a teoria de existência para a equação do transporte não acoplada com espalhamento anisotrópico. Simulações numéricas para o transporte e para o problema acoplado foram feitas via discretização diretas dos operadores integrais oriundos da análise e diferenças finitas para a equação da temperatura. Comparamos resultados com os encontrados na literatura e calculamos o erro de truncamento do método usado na equação do transporte.

## ABSTRACT

Phenomena involving heat transfer in high temperature require conductive-radiative models, as is the case of models of glass annealing and gas turbines. The mathematical formulation results in a system of partial differential equations, composed of a parabolic equation with nonlinear boundary conditions coupled the radiative transport equation with semi-reflexive boundary conditions. The theory of existence for this system already exists for some restrictive sets of parameters. In this paper we consider the theory for the one-dimensional case without the need for non-physical hypotheses. Moreover, we establish the theory of existence for the neutron transport equation with general anisotropic scattering. Numerical simulations for the transport equation and the coupled problem were made by direct discretization of integral operators originating from the analysis and a finite difference equation for the temperature. We compare results with those found in the literature and calculate the truncation error of the method used in the transport equation.

# 1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo, faremos uma apresentação do problema de transferência de calor em fluidos devido a condução, convecção e radiação. A transferência de calor com influência apenas da condução e da convecção é um problema clássico bem conhecido. Aqui, a presença da radiação é relevante porque trabalhamos com fenômenos envolvendo altas temperaturas, como é o caso de turbinas de gás ([12]) e resfriamento de vidro ([17] e [16]). Na seção 1.1 faremos uma apresentação do contexto matemático que envolve o fenômeno físico. Em seguida, na seção 1.2, discutiremos quais problemas são abordados nesse trabalho.

## 1.1 Formulação Matemática

A temperatura  $T$  de um fluido sujeito a transferência de calor por condução, convecção e radiação em um região convexa  $D \in \mathcal{R}^3$  pode ser modelada pela equação (como em [12]):

$$c_v \frac{\partial}{\partial t} T - \nabla \cdot (k_0 \nabla T) + c_v \mathbf{v} \cdot \nabla T = - \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{S^2} \kappa' (B(\nu, T) - I) d\Omega d\nu, \quad x \in D, t > 0, \quad (1.1)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidades, que assumimos conhecido,  $S^2$  é a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ ,  $c_v$  é a capacidade calorífica volumétrica, definida como  $c_v = c_m \rho_m$ , com  $c_m$  o calor específico e  $\rho_m$  a densidade de massa. Na equação (1.1),  $k_0$  é a condutividade térmica e a intensidade radiativa  $I$  é dada pela equação estacionária de transporte de Boltzmann em um meio isotrópico:

$$\Omega \cdot \nabla I + \lambda' I = \frac{\sigma'}{4\pi} \int_{S^2} I d\Omega' + \kappa' B(\nu, T). \quad (1.2)$$

A intensidade de radiação total  $\mathcal{I}$  é definida por

$$\mathcal{I}(x, t, \nu) := \int_{S^2} I(x, t, \Omega, \nu) d\Omega. \quad (1.3)$$

Observe que a intensidade de radiação  $I = I(x, t, \Omega, \nu)$  é função da posição  $x \in D$ , da variável temporal  $t$ , da direção  $\Omega \in S^2$  e da frequência  $\nu \geq \nu_0$ . Essa dependência da variável temporal se deve ao termo forçante na equação (1.2), pois  $B(\nu, T) = B(\nu, T(y, t))$ , visto que a equação em si não é evolutiva. A função  $B(\nu, T)$  é dada pela lei de Planck

$$B(\nu, T) = \eta_1^2 \frac{2h_p \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p \nu}{k_B T} - 1\right)}, \quad (1.4)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $h_p$  é a constante de Planck,  $c$  a velocidade da luz e  $\eta_1$  é o índice de refração do meio. Os parâmetros  $\lambda'$ ,  $\sigma'$  e  $\kappa'$  são os coeficiente de extinção total, coeficiente de espalhamento e coeficiente de absorção, respectivamente e  $\lambda' = \sigma' + \kappa'$ . Por simplicidade, nesse trabalho consideramos  $\lambda'$ ,  $\sigma'$  e  $\kappa'$  variando apenas com  $\nu$ . A condição de contorno para a equação

(1.2) representa um meio semitransparente:

$$I(\Omega) = \rho I(\Omega') + (1 - \rho)B(\nu, T_b), \quad \eta \cdot \Omega < 0, \quad x \in \partial D,$$

onde  $T_b$  é a temperatura externa junto a fronteira,  $\Omega'$  é o ângulo de incidência e  $\Omega$  o ângulo de reflexão que satisfazem  $\Omega' = \Omega - 2(\eta \cdot \Omega)\eta$ ,  $\eta$  é o vetor unitário normal externo e  $\rho$  é o coeficiente de reflexão,  $0 \leq \rho \leq 1$ , que consideramos depender unicamente de  $\mu := \Omega \cdot \eta$  (ver figura 1.1). A equação (1.1) fica completa com a condição inicial

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in D \quad (1.5)$$

e a condição de contorno

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial \eta} = h(T_b - T) + \alpha \pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, \quad x \in \partial D, t > 0, \quad (1.6)$$

onde  $h$  e  $\alpha$  são constantes positivas,  $\eta_2$  é o índice de refração externo ao meio.

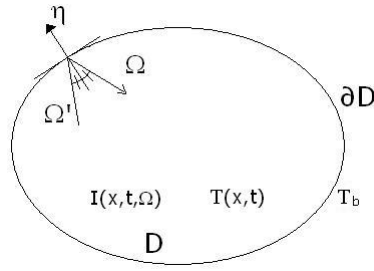


Figura 1.1: Descrição do domínio  $D$  e sua fronteira.

Uma hipótese que assumiremos durante esse trabalho é a existência de duas constantes  $\Gamma_-$  e  $\Gamma_+$  tais que

$$0 < \Gamma_- = \min \left( \inf_{\partial D} T_b, \inf_D T_0 \right) \leq \max \left( \sup_{\partial D} T_b, \sup_D T_0 \right) = \Gamma_+. \quad (1.7)$$

Essa hipótese é fisicamente razoável, tendo em vista que a temperatura dos fenômenos são altas, bem longe de zero, e naturalmente limitadas.

### 1.1.1 Problema Unidimensional

Consideramos que o fenômeno acontece entre dois planos,  $y = 0$  e  $y = L$  e que a temperatura  $T$  e a radiação  $I$  não variam em cada plano intermediário. Então  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial I}{\partial x} =$



$\frac{\partial I}{\partial z} = 0$  e o problema (1.1)-(1.6) torna-se

$$\begin{aligned} c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T}{\partial y} &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, T)) d\nu, & y \in (0, L), & t > 0 \\ -k_0 \frac{\partial T}{\partial y}(0, t) &= h(T_b(0) - T(0, t)) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T(0, t))] d\nu, & t > 0 & \quad (1.8) \\ \frac{\partial T}{\partial y}(L, t) &= h(T_b(L) - T(L, t)) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T(L, t))] d\nu, & t > 0 & \\ T(y, 0) &= T_0(y), & y \in (0, L), & t = 0. \end{aligned}$$

Decompondo o ângulo  $\Omega$  na sua componente na direção  $\hat{y}$  de interesse e outra componente perpendicular a  $\hat{y}$ ,  $\Omega = \mu\hat{y} + \Omega''$ ,  $-1 \leq \mu \leq 1$ , temos:

$$\begin{aligned} (\mu\hat{y} + \Omega'') \cdot \nabla I + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, T), & y \in (0, L), t > 0 \\ I(\mu\hat{y} + \Omega'') &= \rho I(\mu\hat{y} + \Omega'' - 2(\eta \cdot (\mu\hat{y} + \Omega''))\eta) + (1 - \rho)B(\nu, T_b), & y = 0, t > 0, \mu > 0 & \quad (1.9) \\ I(\mu\hat{y} + \Omega'') &= \rho I(\mu\hat{y} + \Omega'' - 2(\eta \cdot (\mu\hat{y} + \Omega''))\eta) + (1 - \rho)B(\nu, T_b), & y = L, t > 0, \mu < 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, T), & y \in (0, L), t > 0 \\ I(\mu) &= \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0)B(\nu, T_b), & y = 0, t > 0, \mu > 0 & \quad (1.10) \\ I(\mu) &= \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L)B(\nu, T_b), & y = L, t > 0, \mu < 0 \end{aligned}$$

Portanto, o problema em uma dimensão é

$$\mathcal{L}_t := c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T}{\partial y} = \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, T)) d\nu, \quad y \in (0, L), t > 0 \quad (1.11a)$$

$$-k_0 \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_b - T) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, \quad y = 0, t > 0 \quad (1.11b)$$

$$k_0 \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_b - T) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, \quad y = L, t > 0 \quad (1.11c)$$

$$T(y, 0) = T_0(y), \quad y \in (0, L), t = 0 \quad (1.11d)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I = \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, T), \quad y \in (0, L), t > 0 \quad (1.11e)$$

$$I(\mu) = \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0)B(\nu, T_b(0)), \quad y = 0, t > 0, \mu > 0, \quad (1.11f)$$

$$I(\mu) = \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L)B(\nu, T_b(L)), \quad y = L, t > 0, \mu < 0, \quad (1.11g)$$

onde

$$\mathcal{I}(y, t, \nu) := 2\pi \int_{-1}^1 I(y, t, \mu, \nu) d\mu. \quad (1.12)$$

## 1.2 Discussão

Esse trabalho está dividido em três partes, que correspondem a três capítulos: o capítulo 2 trabalha com o problema de transporte não acoplado (1.11e)-(1.11g), o capítulo 3 trata o sistema (1.11a)-(1.11g) e o capítulo 4 trabalha com o mesmo sistema, mas considerando a condutividade térmica dependendo da temperatura. Em cada capítulo nós fizemos a teoria de existência de soluções e simulações numéricas.

A equação do transporte (1.2) está envolvida em muitos fenômenos, tais como transporte de neutrons ([32]), transferência de calor em campo de nuvens ([25]), modelagem em turbinas de gás ([12]) e de resfriamento de vidro ([18]). Neste trabalho estamos focados num conjunto de equações que modelam os dois últimos fenômenos, como foi discutido. Mas devido à relevância da equação do transporte em si, dedicamos o capítulo 2 apenas para resolvê-la. Simulações numéricas para esta equação são complicadas, refletindo sua complexidade analítica. Problemas tridimensionais são definidos num espaço de fase com sete dimensões (tempo, espaço, direção e frequência), tornando as simulações computacionalmente caras. Isto motiva o estudo de problemas mais simples, especialmente a equação do transporte unidimensional (1.11e), definida no espaço de duas dimensões (com uma variável espacial e uma angular). O método  $LTS_N$ , que discretiza a variável angular em um conjunto de ordenadas ( $S_N$ ) e aplica a transformada de Laplace na variável espacial, é uma das metodologias mais usadas para problemas de transporte unidimensionais (ver [31], [27] e [26]). Estimativas para o erro de truncamento do método  $LTS_N$  são apresentadas por Pazos [23] e Hauser [15]. Aproximações  $P_N$  para a equação de transporte, que aproximam a dependência angular por um número finito de polinômios de Legendre, também é uma ferramenta usada, como mostra Frank [11], Caldeira [8], Garcia et al [13] e Davison [10]. Ainda existem outros métodos, como o método ADO (A Discrete Ordinates Solutions), que está discutido por Barichello no artigo [5].

O modelo proposto por Frank [12] e Larsen [17] considera a equação do transporte (1.2) no caso isotrópico ( $\sigma'$  constante), como foi descrito na seção anterior. Mas nós conseguimos resolvê-la para o caso anisotrópico ( $\sigma'$  dependendo do ângulo) unidimensional,

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \omega'(\mu, \mu') I d\mu' + \kappa' B(\nu, T). \quad (1.13)$$

Assim, dedicamos um capítulo para esse caso mais geral da equação do transporte e voltamos ao modelo original (1.11a)-(1.11g), onde  $\omega'(\mu, \mu') = \sigma'$  é constante, nos próximos capítulos.

A teoria de existência para a equação (1.13) com as condições de contorno (1.11f)-(1.11g) é o primeiro resultado do capítulo 2. Tal teoria foi desenvolvida por Thompson et al [30] num caso muito restritivo dos coeficiente  $\sigma'$ ,  $\kappa'$  e  $\rho$  ( $\rho$  pequeno e  $\sigma' \leq \kappa'$ ). Essas restrições não físicas não são necessárias nessa formulação. A idéia consiste em encontrar uma representação

operacional para a solução e encontrar em quais condições os operadores estão definidos. Depois desenvolvemos um método numérico a partir dos operadores obtidos na análise aproximando-os por matrizes. Finalmente, analisamos o erro de truncamento do método e fizemos simulações, comparando os resultados com os existentes na literatura.

No capítulo 3 estabelecemos teoremas de existência e unicidade e desenvolvemos simulações para o problema acoplado unidimensional (1.11). A teoria consiste em criar sequências de funções que convergem monotonicamente para a solução. A relação de recorrência usada faz o sistema (1.11) ficar desacoplado em cada ponto das sequências, podendo assim resolver a parte do transporte como no capítulo 2. A técnica de monotonicidade usada aqui é descrita no livro de Pao ([21]) e utilizada para obter a teoria de existência em várias situações ([22], [30]).

Para discretização do problema acoplado é usado método de Crank-Nicolson para a equação parabólica, uma linearização para as condições de fronteira do tipo Newton-Raphson e a discretização do transporte como no capítulo 2. Não foi possível fazer comparações ponto a ponto da solução do problema acoplado por falta de resultados na literatura, mas validamos cada parte do código separadamente. Também validamos o problema acoplado calculando os fluxos devido ao transporte e à difusão, verificando que o fluxo total é constante no caso estacionário. Os resultados foram ilustrados em vários gráficos com vários conjuntos de parâmetros.

No capítulo 4 fizemos a teoria de existência para o sistema acoplado (1.11) quando  $k_0 = k_0(y, t, T)$  depende da variável espacial, do tempo e da temperatura. Para  $k_0 = k_0(y)$  dependendo apenas da variável espacial, a teoria do capítulo 3 já era válida. Estritamente, este capítulo não pode ser considerado uma generalização completa do anterior, porque não conseguimos fazer a teoria com campo de velocidade não nulo, não obstante, seu estudo é válido dado o fato que tem uma aplicação interessante em resfriamento de vidros. Introduzimos duas mudanças de variáveis que permitem a aplicação da mesma técnica usada no capítulo 3. A discretização desse sistema é análoga à feita no capítulo 3, apenas com uma nova linearização na condutividade térmica. Os resultados são obtidos para várias funções  $k_0$  e apresentados em gráficos.

Finalmente, no capítulo (5), estão descritos trabalhos desenvolvidos paralelamente a este, bem como trabalhos futuros, que são considerados uma extensão dos resultados obtidos na Tese e que pretendemos abordar em momento oportuno.

## 2 TEORIA DE EXISTÊNCIA E SIMULAÇÕES PARA A EQUAÇÃO DO TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL

Neste capítulo, propomos um nova técnica para resolver a equação de transporte anisotrópica unidimensional. Começamos reformulando a equação de transporte, encontrando uma representação integral fundada na teoria de operadores no espaço de funções contínuas  $C^0$ . Esta representação fornece dois importantes resultados: a garantia de existência de soluções e a possibilidade de discretizar os operadores envolvidos, aproximando-os por matrizes, produzindo uma aproximação em dimensão finita. Chamamos o método numérico resultante dessa discretização de  $GFD_N$  (*Green's Function Decomposition* de ordem  $N$ ). Estimativas para o erro de truncamento do método  $GFD_N$  são feitas usando a teoria de espaços de Hölder  $C^\alpha$ . Apresentamos resultados numéricos para validar a metodologia proposta, comparando nossas simulações com resultados da literatura e com o método  $LTS_N$ . Simulações numéricas mais gerais, envolvendo fronteira com condição de reflexividade de Fresnel e núcleos de espalhamento não constantes também são apresentadas aqui. Os resultados desse capítulo foram submetidos para publicação em um artigo conjunto com F. Azevedo, M. Thompson e M. T. Vilhena.

A equação de transporte que tratamos aqui é desacoplada da temperatura, mas consideramos o caso anisotrópico:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \omega(\mu', \mu) I(y, \mu') d\mu' + S(y, \mu), \quad y \in (0, L), t > 0 \quad (2.1a)$$

$$I(\mu) = \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0) B_0(\mu), \quad y = 0, \mu > 0, \quad (2.1b)$$

$$I(\mu) = \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L) B_L(\mu), \quad y = L, \mu < 0, \quad (2.1c)$$

onde  $S(y, \mu)$  é um termo fonte,  $B = (B_0, B_L)$  e o núcleo de espalhamento é dado pela seguinte expressão

$$\omega(\mu', \mu) = \sum_{l=0}^M \beta_l P_l(\mu) P_l(\mu'), \quad (2.2)$$

sendo  $P_l(\mu)$  o  $l$ -ésimo polinômio de Legendre e  $\beta_l$  constantes reais. Para estabelecer a teoria de existência, assumimos as seguintes hipóteses: existem  $\lambda'_{max}, \omega_{max} \in \mathbb{R}$  tais que

$$|\omega(\mu, \mu')| \leq \omega_{max} < \lambda' < \lambda'_{max}. \quad (2.3)$$

e a função  $B(\mu)$  é integrável.

### 2.1 Teoria de existência para equação de transporte

Nesta seção estabelecemos a existência de uma única solução para o problema (2.1a)-(2.1c) e derivamos de nossa análise uma representação operacional para a solução do problema. O

primeiro passo dessa análise consiste em mostrar que  $J(y, \mu)$ , definido por

$$J(y, \mu) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \omega(\mu, \mu') I(y, \mu') d\mu' \quad (2.4)$$

admite uma representação da forma

$$J(y, \mu) = S_g S(y, \mu) + S_b B, \quad (2.5)$$

onde  $B = (B_0(\mu), B_L(\mu))$  e  $S_b$  e  $S_g$  são operadores nos espaços  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$  e  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ .

**Lema 2.1.** *Se  $B(\mu)$  é integrável e a condição (2.3) é satisfeita, então o problema (2.1a)-(2.1c) admite a representação (2.5), com  $S_g$  e  $S_b$  operadores em  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$ .*

*Demonstração.* Consideramos o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= q(y, \mu) \\ I(\mu) &= \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0) B_0(\mu), \quad y = 0, \mu > 0, \\ I(\mu) &= \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L) B_L(\mu), \quad y = L, \mu < 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esse problema pode ser resolvido analiticamente pelo método das características (ver [19], [3], [29], [28] e [6]), ou seja,

$$\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\lambda'}{\mu} I = \frac{1}{\mu} q(y, \mu) \quad (2.7)$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial e^{\frac{\lambda' y}{\mu}} I}{\partial y} = \frac{e^{\frac{\lambda' y}{\mu}}}{\mu} q(y, \mu). \quad (2.8)$$

Podemos integrar de duas maneiras, a saber

$$I(y, \mu) e^{\frac{\lambda' y}{\mu}} - I(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^y e^{\frac{\lambda' s}{\mu}} q(s, \mu) ds \quad (2.9)$$

que leva a

$$I(y, \mu) = I(0, \mu) e^{-\frac{\lambda' y}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_0^y q(s, \mu) e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu}} ds, \quad (2.10)$$

ou, equivalentemente

$$I(L, \mu) e^{\frac{\lambda' L}{\mu}} - I(y, \mu) e^{\frac{\lambda' y}{\mu}} = \frac{1}{\mu} \int_y^L e^{\frac{\lambda' s}{\mu}} q(s, \mu) ds \quad (2.11)$$

que leva a

$$I(y, \mu) = I(L, \mu) e^{\frac{\lambda'(L-y)}{\mu}} - \frac{1}{\mu} \int_y^L q(s, \mu) e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu}} ds. \quad (2.12)$$

Observe que as expressões (2.10) e (2.12) são ambas válidas tanto para  $\mu > 0$  como para  $\mu < 0$ . Por questões de simplicidade das expressões e simetria, vamos preferir (2.10) para  $\mu > 0$  e (2.12) para  $\mu < 0$ . Aplicando as condições de contorno

$$I(0, \mu) = \rho_0(\mu) I(0, -\mu) + (1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu), \quad \mu > 0 \quad (2.13)$$

$$I(L, \mu) = \rho_L(\mu) I(L, -\mu) + (1 - \rho_L(\mu)) B_L(\mu), \quad \mu < 0 \quad (2.14)$$

em (2.10) e (2.12), temos

$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= \rho_0(\mu)I(L, -\mu)e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}} + \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L q(s, -\mu)e^{-\frac{\lambda's}{\mu}} ds \\ &\quad + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu), \quad t > 0, \mu > 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} I(L, \mu) &= \rho_L(\mu)I(0, -\mu)e^{\frac{\lambda'L}{\mu}} - \frac{\rho_L(\mu)}{\mu} \int_0^L q(s, -\mu)e^{-\frac{\lambda'(s-L)}{\mu}} ds \\ &\quad + (1 - \rho_L(\mu))B_L(\mu), \quad t > 0, \mu < 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

que, para  $\mu > 0$ , pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(0, \mu) - I(L, -\mu)\rho_0(\mu)e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}} &= \frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L q(s, -\mu)e^{-\frac{\lambda's}{\mu}} ds \\ &\quad + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu), \quad t > 0, \mu > 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} -I(0, \mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}} + I(L, -\mu) &= \frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L q(s, \mu)e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu}} ds \\ &\quad + (1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu), \quad t > 0, \mu > 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

A solução do sistema acima é

$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= \frac{\frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L \left( q(s, \mu)\rho_L(-\mu)e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu}} + q(s, -\mu)e^{-\frac{\lambda's}{\mu}} \right) ds}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu) + e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}}\rho_0(\mu)(1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} I(L, -\mu) &= \frac{\frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L \left( q(s, \mu)e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu}} + q(s, -\mu)\rho_0(\mu)e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu}} \right) ds}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu) + e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}}\rho_L(-\mu)(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Observe que

$$1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}} \geq 1 - e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}} > 0,$$

portanto  $I(L, -\mu)$  e  $I(0, \mu)$  estão bem definidos.

As duas soluções equivalentes são encontradas, para cada  $\mu > 0$ , quando substituimos (2.19) e (2.20) em (2.10) e (2.12), respectivamente:

$$\begin{aligned} I(y, -\mu) &= \frac{\frac{\rho_L(-\mu)}{\mu} \int_0^L \left( q(s, -\mu)e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu}} + q(s, \mu)\rho_0(\mu)e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu}} \right) ds}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu}} \\ &\quad + \frac{(1 - \rho_L(-\mu))B_L(-\mu) + e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}}\rho_L(-\mu)(1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu)}{1 - \rho_0(\mu)\rho_L(-\mu)e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu}} \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \int_y^L q(s, -\mu)e^{-\frac{\lambda'(s-y)}{\mu}} ds, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
I(y, \mu) &= \frac{\frac{\rho_0(\mu)}{\mu} \int_0^L \left( q(s, \mu) \rho_L(-\mu) e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu}} + q(s, -\mu) e^{-\frac{\lambda's}{\mu}} \right) ds}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} e^{-\frac{\lambda'y}{\mu}} \\
&+ \frac{(1 - \rho_0(\mu)) B_0(\mu) + e^{-\frac{\lambda'L}{\mu}} \rho_0(\mu) (1 - \rho_L(-\mu)) B_L(-\mu)}{1 - \rho_0(\mu) \rho_L(-\mu) e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} e^{-\frac{\lambda'y}{\mu}} \\
&+ \frac{1}{\mu} \int_0^y q(s, \mu) e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu}} ds. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Portanto, (2.21) e (2.22) nos fornecem a seguinte representação:

$$I(y, \mu) = L_g^\mu q(y, \mu) + L_b^\mu B(\mu). \tag{2.23}$$

Observe que  $q(y, \mu) = J(y, \mu) + S(y, \mu)$ , ou seja,

$$I(y, \mu) = L_g^\mu [J(y, \mu) + S(y, \mu)] + L_b^\mu B(\mu). \tag{2.24}$$

Quando multiplicamos (2.21) e (2.22) por  $\omega(\mu, \mu')$  e integramos, obtemos a seguinte equação operacional:

$$\begin{aligned}
J(y, \mu') &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \omega(\mu', \mu) \{ L_g^\mu [J(y, \mu) + S(y, \mu)] + L_b^\mu B(\mu) \} d\mu, \\
&:= L_g [J(y, \mu') + S(y, \mu')] + L_b B(\mu') \tag{2.25}
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
L_g q &= \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(-\mu', \mu) \left[ \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \frac{\rho_L e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}}}{\mu'} \times \right. \\
&\times \left. \int_0^L \left( q(s, -\mu') \rho_0 e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu'}} + q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu'}} \right) ds + \frac{1}{\mu'} \int_y^L q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds \right] d\mu' \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(\mu', \mu) \left[ \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \frac{\rho_0 e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}}}{\mu'} \times \right. \\
&\times \left. \int_0^L \left( q(s, \mu') \rho_L e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu'}} + q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda's}{\mu'}} \right) ds + \frac{1}{\mu'} \int_0^y q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds \right] d\mu' \tag{2.26} \\
&:= A + B
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L_b B &= \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(-\mu', \mu) \frac{e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \rho_L (1 - \rho_0) B_0(\mu') + (1 - \rho_L) B_L(-\mu')}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} d\mu' \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^1 \omega(\mu', \mu) \frac{e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \rho_0 (1 - \rho_L) B_L(-\mu') + (1 - \rho_0) B_0(\mu')}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} d\mu'. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Aqui omitimos a dependência de  $\mu$  de  $\rho_0 = \rho(\mu)$  e  $\rho_L = \rho_L(-\mu)$ . A equação (2.25) pode ser escrita da seguinte forma:

$$J(y, \mu) - L_g J(y, \mu) = L_g S(y, \mu) + L_b B(\mu), \tag{2.28}$$

ou seja,

$$(1 - L_g) J(y, \mu) = L_g S(y, \mu) + L_b B(\mu) \quad (2.29)$$

A equação (2.29) pode ser resolvida desde que o operador  $(1 - L_g)$  possa ser invertido. Sabemos que se a norma de  $L_g$  for menor que 1, então  $(1 - L_g)^{-1}$  existe. Por isso fazemos as estimativas de  $L_g$  em  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$ . Observe que  $|L_g| \leq |A| + |B|$ , onde

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \frac{\rho_L e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}}}{\mu'} \int_0^L \left( \rho_0 e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu'}} + e^{-\frac{\lambda'(s-L)}{\mu'}} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu'} \int_y^L e^{-\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds \right] d\mu' \\ &= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \frac{\rho_L e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}}}{\mu'} \frac{\mu'}{\lambda'} \left( -\rho_0 e^{-\frac{\lambda' 2L}{\mu'}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu' \lambda'} \left( -e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + 1 \right) \right] d\mu' \\ &= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \int_0^1 \left[ \frac{\rho_L e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} \left( -\rho_0 e^{-\frac{\lambda' 2L}{\mu'}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} + \left( -e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + 1 \right) \right] d\mu' \\ &= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \left( 1 + \int_0^1 \left[ \frac{-\rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda'(3L-y)}{\mu'}} + \rho_0 e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda'(2L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(2L-y)}{\mu'}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda'(3L-y)}{\mu'}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \right] d\mu' \right) \\ &= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} + \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \int_0^1 \left[ \frac{(\rho_0 - 1)e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + \rho_0(\rho_L - 1)e^{-\frac{\lambda'(2L-y)}{\mu'}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \right] d\mu' \\ &= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} - f_A, \end{aligned} \quad (2.30)$$

com

$$f_A := \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \int_0^1 \left[ \frac{(1 - \rho_0)e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} + \rho_0(1 - \rho_L)e^{-\frac{\lambda'(2L-y)}{\mu'}}}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \right] d\mu' \quad (2.31)$$



$$\begin{aligned}
|B| &\leq \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \frac{\rho_0 e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}}}{\mu'} \int_0^L \left( \rho_L e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu'}} + e^{-\frac{\lambda's}{\mu'}} \right) ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu'} \int_0^y e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds \right] d\mu' \\
&= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \frac{\rho_0 e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}}}{\mu'} \frac{\mu'}{\lambda'} \left( \rho_L e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} - \rho_L e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu'} \frac{\mu'}{\lambda'} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} \right) \right] d\mu' \\
&= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \left( \int_0^1 d\mu' + \int_0^1 \left[ \frac{1}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \rho_0 e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} \left( \rho_L e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \rho_L e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} + 1 \right) + \left( -e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} \right) \right] d\mu' \right) \\
&= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \left( 1 + \int_0^1 \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \frac{\rho_0\rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+L)}{\mu'}} - \rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+L)}{\mu'}} - \rho_0\rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+2L)}{\mu'}} + \rho_L e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} + \rho_0\rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+2L)}{\mu'}}}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \right] d\mu' \right) \\
&= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} + \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \int_0^1 \left[ \frac{(\rho_0 - 1)\rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+L)}{\mu'}} + (\rho_L - 1)e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}}}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \right] d\mu' \\
&= \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} - f_B, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

com

$$f_B := \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{2\lambda'} \int_0^1 \left[ \frac{(1 - \rho_0)\rho_L e^{-\frac{\lambda'(y+L)}{\mu'}} + (1 - \rho_L)e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}}}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} \right] d\mu'. \tag{2.33}$$

Portanto, pela condição (2.3),

$$\|L_g q\|_{C^0} \leq |A| + |B| \leq \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{\lambda'} - \inf(f_A + f_B) \leq \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{\lambda'} \leq \|q\|_{C^0}. \tag{2.34}$$

Observe que se  $0 < \rho < 1$ ,  $\inf(f_A + f_B) > 0$  e portanto vale a desigualdade estrita:

$$\|L_g q\|_{C^0} < \frac{\|q\|_{C^0\omega_{max}}}{\lambda'} \leq \|q\|_{C^0}. \tag{2.35}$$

A representação (2.5) é justificada quando definimos  $S_g$  and  $S_b$  da forma

$$S_g := (1 - L_g)^{-1} L_g \quad \text{and} \quad S_b := (1 - L_g)^{-1} L_b \tag{2.36}$$

e usamos a representação (2.29). Observe que  $S_g$  e  $S_b$  são operadores em  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Agora nós vamos garantir a existência de soluções nos espaços  $C^\alpha$  por dois motivos: a estimativa obtida aqui para  $\|L_g\|_{C^\alpha}$  é usada para garantir a estimativa do erro de truncamento

na seção 2.4 e também para provar a existência de soluções para o problema acoplado no capítulo 3.

**Lema 2.2.** *Se  $B(\mu)$  é integrável e a condição (2.3) é satisfeita, então o problema (2.1a)-(2.1c) admite a representação (2.5), com  $S_g$  e  $S_b$  operadores em  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ .*

*Demonstração.* A representação 2.5 já foi obtida no Lema 2.1, com  $S_g$  e  $S_b$  operadores em  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$ . Basta provar que  $S_g$  e  $S_b$  são operadores em  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$  (espaço induzido pela norma dada no apêndice A.1) e concluímos a demonstração. Para isso, consideremos a estimativa:

$$\begin{aligned}
& |(L_g q)(y, \mu') - (L_g q)(x, \mu')| \leq \\
& \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_L \left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}} \right)} \int_0^L \left( \rho_0 q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu'}} + q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu'}} \right) ds \right| d\mu' \\
& \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_y^L q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds - \frac{1}{\mu'} \int_x^L q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda'(s-x)}{\mu'}} ds \right| d\mu' \\
& + \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_0 \left( e^{-\frac{\lambda'y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'x}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}} \right)} \int_0^L \left( q(s, \mu') \rho_L e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu'}} + q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda's}{\mu'}} \right) ds \right| d\mu' \\
& \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_0^y q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-y)}{\mu'}} ds - \frac{1}{\mu'} \int_0^x q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-x)}{\mu'}} ds \right| d\mu' \\
& =: D + E + F + G. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

As estimativas de  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são obtidas a partir de manipulações elementares e do Lema A.4 do Apêndice A.2.

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_L \left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}} \right)} \int_0^L \left( q(s, -\mu') \rho_0 e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu'}} + q(s, \mu') e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu'}} \right) ds \right| d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{\rho_L \left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}} \right)} \frac{\mu'}{\lambda'} \left( -\rho_0 e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \right) \right] d\mu'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \frac{\rho_L \left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) \left( -\rho_0 e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} + 1 + \rho_0 e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \frac{\left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) \left( \rho_L - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} + (\rho_0 - 1) \rho_L e^{-\frac{\lambda'L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \frac{\left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) \left( \rho_L - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{\lambda'2L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu'}}} d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \left( e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} |x-y|^\alpha}{2\lambda'} C \|q\|_{C^0}, \tag{2.38}
\end{aligned}$$

supondo, sem perda de generalidade,  $y > x$ .

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-y} q(r+y, -\mu') e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr - \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-x} q(r+x, -\mu') e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right| d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-x} q(r+y, -\mu') e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr + \frac{1}{\mu'} \int_{L-x}^{L-y} q(r+x, -\mu') e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-x} q(r+x, -\mu') e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right| d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-x} |q(r+y, -\mu') - q(r+x, -\mu')| e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu'} \int_{L-x}^{L-y} |q(r+x, -\mu')| e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right] d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\mu'} \int_0^{L-x} [q]_{C^\alpha} |(r+y) - (r+x)|^\alpha e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr + \frac{1}{\mu'} \int_{L-x}^{L-y} \|q\|_{C^0} e^{-\frac{\lambda'r}{\mu'}} dr \right] d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\mu'} [q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha \frac{\mu'}{\lambda'} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) + \frac{\|q\|_{C^0} \mu'}{\lambda'} \left( e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} \right) \right] d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha \int_0^1 \left( 1 - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right) d\mu' + \|q\|_{C^0} \int_0^1 \left( e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} \right) d\mu' \right) \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} |y-x|^\alpha + \|q\|_{C^0} C |(L-y) - (L-x)|^\alpha \right) \\
&= \frac{\omega_{max} |x-y|^\alpha}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} + C \|q\|_{C^0} \right). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{\rho_0 \left( e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}} \right)} \int_0^L \left( q(s, \mu') \rho_L e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu'}} + q(s, -\mu') e^{-\frac{\lambda' s}{\mu'}} \right) ds \right| d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{\rho_0 \left( e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right)}{\mu' \left( 1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}} \right)} \frac{\mu'}{\lambda'} \left( \rho_L e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} - \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}} + 1 \right) \right] d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \frac{\rho_0 \left( e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right) \left( (\rho_L - 1) e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} + 1 - \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \frac{\left( e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right) \left( \rho_0 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}} \right)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} \|q\|_{C^0}}{2\lambda'} \int_0^1 \left( e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right) d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max} |y - x|^\alpha}{2\lambda'} C \|q\|_{C^0}, \tag{2.40}
\end{aligned}$$

supondo, sem perda de generalidade,  $y < x$ .

$$\begin{aligned}
G &= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_0^y q(y - r, \mu') e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr - \frac{1}{\mu'} \int_0^x q(x - r, \mu') e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr \right| d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\mu'} \int_0^y q(y - r, \mu') e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr - \frac{1}{\mu'} \int_0^y q(x - r, \mu') e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\mu'} \int_y^x q(x - r, \mu') e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr \right| d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\mu'} \int_0^y |q(y - r, \mu') - q(x - r, \mu')| e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr + \frac{1}{\mu'} \int_y^x |q(x - r, \mu')| e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr \right] d\mu' \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\mu'} \int_0^y [q]_{C^\alpha} |(y - r) - (x - r)|^\alpha e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr + \frac{1}{\mu'} \int_y^x \|q\|_{C^0} e^{-\frac{\lambda' r}{\mu'}} dr \right] d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \left[ \frac{[q]_{C^\alpha} |y - x|^\alpha \mu'}{\mu'} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} \right) + \frac{\|q\|_{C^0} \mu'}{\mu'} \left( e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} \right) \right] d\mu' \\
&= \frac{\omega_{max}}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} |y - x|^\alpha \int_0^1 \left( 1 - e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} \right) d\mu' + \|q\|_{C^0} \int_0^1 \left( e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} \right) d\mu' \right) \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} |y - x|^\alpha + \|q\|_{C^0} C |x - y|^\alpha \right) \\
&= \frac{\omega_{max} |x - y|^\alpha}{2\lambda'} \left( [q]_{C^\alpha} + C \|q\|_{C^0} \right). \tag{2.41}
\end{aligned}$$

A existência da constante  $C$  nas estimativas acima é garantida pelo lema A.4.

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\|L_g q\|_{C^\alpha} &= \omega_{max} C_1 \sup \frac{|(L_g q)(y, \mu) - (L_g q)(x, \mu)|}{|y - x|^\alpha} + \|(L_g q)(y)\|_{C^0} \\
&\leq \frac{\omega_{max}}{\lambda'} (C_1 [q]_{C^\alpha} + 2C_1 C \|q\|_{C^0} + \|q\|_{C^0}) \\
&\leq \frac{\omega_{max}(2C_1 C + 1)}{\lambda'} \left( \frac{C_1}{(2C_1 C + 1)} [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0} \right) \\
&\leq \frac{\omega_{max}(2C_1 C + 1)}{\lambda'} (C_1 [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0}) \\
&= \frac{\omega_{max}(2C_1 C + 1)}{\lambda'} \|q\|_{C^\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Tomando  $C_1 < \frac{\lambda'}{2C\omega_{max}}$ , temos

$$\|L_g\|_{C^\alpha} \leq \frac{\omega_{max}(2C_1 C + 1)}{\lambda'} < 1 \tag{2.43}$$

e o operador  $(1 - L_g)$  é inversível em  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ . Portanto a representação (2.5) é válida pela equação (2.29) e toma a seguinte forma quando invertemos  $(1 - L_g)$ :

$$J(y, \mu) = (1 - L_g)^{-1} (L_g S(y, \mu) + L_b B(\mu)) = S_g S(y, \mu) + S_b B(\mu) \tag{2.44}$$

com  $S_g$  e  $S_b$  definidos na expressão (2.36). Para concluir a demonstração, basta mostrar que  $L_b$  é um operador em  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ . Para isso fazemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
& |(L_b B)(y) - (L_b B)(x)| \\
& \leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} \rho_L (1 - \rho_0) B_0(\mu') + (1 - \rho_L) B_L(-\mu')}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \left| e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right| d\mu' \\
& + \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{\lambda' L}{\mu'}} \rho_0 (1 - \rho_L) B_L(-\mu') + (1 - \rho_0) B_0(\mu')}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \left| e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right| d\mu' \\
& \leq \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \frac{B_0(\mu') + B_L(-\mu')}{1 - e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \left| e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right| d\mu' \\
& + \frac{\omega_{max}}{2} \int_0^1 \frac{B_L(-\mu') + B_0(\mu')}{1 - e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu'}}} \left| e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right| d\mu' \\
& \leq \frac{\omega_{max}}{2} K_1 (B_0(\mu') + B_L(-\mu')) \left( \int_0^1 \left| e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda'(L-x)}{\mu'}} \right| d\mu' + \int_0^1 \left| e^{-\frac{\lambda' y}{\mu'}} - e^{-\frac{\lambda' x}{\mu'}} \right| d\mu' \right), \\
& \leq \frac{\omega_{max}}{2} K_1 (B_0(\mu') + B_L(-\mu')) (K_2 |(L-y) - (L-x)|^\alpha + K_3 |y-x|^\alpha) \\
& \leq \omega_{max} K (B_0(\mu') + B_L(-\mu')) |y-x|^\alpha, \quad K \text{ constante.}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

A existência das constante  $K_2$  e  $K_3$  são garantidas pelo Lema A.4. Assim,  $L_b B \in C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$  e portanto  $S_g$  e  $S_b$  estão em  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ .

Observe que a teoria de existência não depende da condição (2.2), mas é válida para núcleos  $\omega$  gerais.  $\square$

## 2.2 Metodologia para obter Solução Numérica

Para resolver numericamente o problema (2.1a)-(2.1c), definimos os momentos  $J_l(y)$  por:

$$J_l(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(y, \mu') d\mu'. \quad (2.46)$$

Usando (2.4) e (2.2), a função incógnita  $J(y, \mu)$  é escrita como

$$J(y, \mu) = \sum_{l=0}^M \beta_l J_l(y) P_l(\mu) \quad (2.47)$$

Nós usamos o fato que  $I(y, \mu) = L_g^\mu (J(y, \mu) + S(y)) + L_b^\mu B$  e (2.47) para obter o seguinte:

$$\begin{aligned} J_l(y) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_g^\mu \left[ \sum_{k=0}^M \beta_k J_k(y) P_k(\mu) + S(y) \right] d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_b^\mu B d\mu \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_g^\mu [\beta_k J_k(y) P_k(\mu)] d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_g^\mu S(y) d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_b^\mu B d\mu \\ &= \sum_{k=0}^M \beta_k K_g^{l,k} J_k(y) + K_g^{l,0} S(y) + K_b^l B \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde os operadores  $K_g^{l,k} : C^0[0, L] \rightarrow C^0[0, L]$  e  $K_b^l : (L^\infty[0, 1] \times L^\infty[-1, 0]) \rightarrow C^0[0, L]$  são dados por

$$K_g^{l,k} q(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_g^\mu [q(y) P_k(\mu)] d\mu \quad (2.49)$$

$$K_b^l B = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) L_b^\mu B d\mu \quad (2.50)$$

Observe que aqui, por simplicidade, a fonte  $S = S(y)$  e os termos de fronteira  $B = (B_0, B_L)$  não dependem de  $\mu$ .

A expressão (2.48) tomada para  $l = 0, \dots, M$  representa o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 - \beta_0 K_g^{0,0} & -\beta_1 K_g^{0,1} & \dots & -\beta_M K_g^{0,M} \\ -\beta_0 K_g^{1,0} & 1 - \beta_1 K_g^{1,1} & \dots & -\beta_M K_g^{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_0 K_g^{M,0} & -\beta_1 K_g^{M,1} & \dots & 1 - \beta_M K_g^{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(y) \\ J_1(y) \\ \vdots \\ J_M(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_g^{0,0} S(y) + K_b^0 B \\ K_g^{1,0} S(y) + K_b^1 B \\ \vdots \\ K_g^{M,0} S(y) + K_b^M B \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

O problema (2.51) é um sistema que pretendemos resolver numericamente discretizando cada operador integral envolvido. Portanto, se cada operador for truncado como uma matriz real  $N \times N$ , o problema (2.51) pode ser resolvido como um sistema linear real de ordem  $(M+1)N$ .

**Observação 2.1** (O caso isotrópico). *Quando  $\omega(\mu, \mu') = \omega = \beta_0$  é uma constante, o sistema (2.51) é de ordem  $N$ , sendo  $M = 1$ . Neste caso, a expressão (2.34) leva a seguinte estimativa*

$$\|L_g\|_{C^0} = \beta_0 \|K_g^{0,0}\|_{C^0} \leq \left( \frac{\omega}{\lambda'} - \inf_{0 < y < L} (f_A + f_B) \right) \leq 1. \quad (2.52)$$

Esse é o caso da equação do transporte no problema acoplado condutivo-radiativo, onde  $\omega(\mu, \mu') = \sigma'$  é constante, que será tratado nos capítulos 3 e 4.

**Observação 2.2** (Criticalidade). A inversa  $(1 - L_g)^{-1}$  pode existir mesmo no caso em que (2.3) não é satisfeita. As estimativas (2.34) e (2.52) mostram que esse pode ser o caso, visto que  $f_A > 0$  e  $f_B > 0$ . Um cálculo interessante que pode ser feito no caso  $\omega = \beta_0$  constante, é do valor crítico de  $\omega$  (maior valor de  $\omega$  tal que a inversa ainda possa ser calculada, dado  $\lambda'$  fixo). Observe que se  $\omega \|K_g^{00}\| < 1$ , então vale a representação

$$(1 - \omega K_g^{00})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k K_g^{00k}.$$

O teorema de Cauchy-Hadamard aplicado a essa representação nos dá a seguinte estimativa:

$$\omega r(K_g^{00}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\omega^k K_g^{00k}\|_{C^0}^{1/k} \leq \omega \|K_g^{00}\|_{C^0} \leq 1 \quad (2.53)$$

onde  $r(K_g^{00})$  é o raio espectral de  $K_g^{00}$ . Portanto, o valor crítico é  $\omega = 1/r(K_g^{00})$ . O cálculo da criticalidade é um problema clássico em teoria de transporte de neutrons e pode ser usado como benchmark para métodos numéricos aplicados a equação de transporte.

### 2.2.1 Momentos de ordem $p$

Uma quantidade importante em teoria de transporte são os momentos de ordem  $p$ , dados por

$$\mathcal{K}^p(y) := \int_{-1}^1 \mu^p I(y, \mu) d\mu,$$

para cada  $p$ . Uma vez conhecido  $J_l(y)$ , calculamos  $\mathcal{K}^p(y)$  da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^p(y) &= \int_{-1}^1 \mu^p L_g^\mu \left[ \sum_{k=0}^M \beta_k J_k(y) P_k(\mu) + S(y) \right] d\mu + \int_{-1}^1 \mu^p L_b^\mu B d\mu \\ &= \sum_{k=0}^M \int_{-1}^1 \mu^p L_g^\mu [\beta_k J_k(y) P_k(\mu)] d\mu + \int_{-1}^1 \mu^p L_g^\mu S(y) d\mu + \int_{-1}^1 \mu^p L_b^\mu B d\mu \\ &= \sum_{k=0}^M \beta_k H_g^{k,p} J_k(y) + H_g^{0,p} S(y) + H_b^p B, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde

$$H_g^{k,p} = \int_{-1}^1 \mu^p L_g^\mu [P_k(\mu)] d\mu \quad (2.55)$$

$$H_b^p = \int_{-1}^1 \mu^p L_b^\mu d\mu \quad (2.56)$$

Observe que os dois primeiros momentos são dados por  $\mathcal{K}^0(y) = 2J_0(y)$  e  $\mathcal{K}^1(y) = 2J_1(y)$ .

### 2.3 Discretização dos operadores $K_g^{l,k}$ , $K_b^l$

O método de discretização consiste em aproximar os operadores  $K_g^{l,k}$ ,  $K_b^l$  por matrizes, projetando-os em espaço de dimensão finita. Para esse propósito, começamos considerando a representação integral do operador  $K_g^{l,k}$ :

$$(K_g^{l,k} q)(y) = \int_0^L K^{l,k}(s, y) q(s) ds, \quad (2.57)$$

onde

$$\begin{aligned} K^{l,k}(s, y) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{P_l(-\mu)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} \frac{\rho_L e^{-\frac{\lambda'(L-y)}{\mu}}}{\mu} \left( P_k(-\mu) \rho_0 e^{-\frac{\lambda'(s+L)}{\mu}} + P_k(\mu) e^{\frac{\lambda'(s-L)}{\mu}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_l(-Si(s-y)\mu)}{\mu} P_k(-Si(s-y)\mu) e^{-\frac{\lambda'|s-y|}{\mu}} \right] d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{P_l(\mu)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} \frac{\rho_0 e^{-\frac{\lambda' y}{\mu}}}{\mu} \left( P_k(\mu) \rho_L e^{\frac{\lambda'(s-2L)}{\mu}} + P_k(-\mu) e^{-\frac{\lambda' s}{\mu}} \right) \right] d\mu \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde  $Si(x)$  é a função sinal de  $x$ ,

$$Si(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Definimos uma malha  $\{s_j\}_{j=1}^{2N+1}$ , com  $s_j = (j-1)h_s$  e  $h_s = \frac{L}{N}$  e aproximamos a função contínua  $q$  por uma  $\tilde{q}$  linear por partes:

$$\tilde{q}(s) = q(s_j) + (s - s_j) \frac{q(s_{j+1}) - q(s_j)}{h_s} \quad s_j \leq s \leq s_{j+1}. \quad (2.60)$$

Também, definimos o operador interpolação  $I_N : C^0[0, L] \rightarrow C_N^0[0, L]$  que mapeia  $q(s)$  em  $\tilde{q}(s)$ . A imagem de  $I_N$  em  $C^0[0, L]$  é o espaço  $N+1$ -dimensional de elementos finitos, que será denotado  $C_N^0([0, L])$ . Como  $I_N$  converge para a identidade, isto é,  $I_N q \rightarrow q$  para cada  $q \in C^0([0, L])$ , é natural aproximamos  $K_g^{l,k}$  por  $K_g^{l,k,N} := I_N K_g^{l,k} I_N$ . Devido ao isomorfismo  $\varphi_N$  entre  $C_N^0([0, L])$  e  $\mathbb{R}^{N+1}$  dado por

$$\begin{aligned} \varphi_N : C_N^0([0, L]) &\longleftrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \\ q(y) &\longleftrightarrow \left[ q(s_1) \quad \dots \quad q(s_N) \quad q(s_{N+1}) \right]^T, \end{aligned} \quad (2.61)$$

aproximamos  $K_g^{l,k}$  pela matriz

$$W^{l,k} := \varphi_N K_g^{l,k,N} \varphi_N^{-1} = \varphi_N I_N K_g^{l,k} I_N \varphi_N^{-1} =: \left( w_{ij}^{l,k} \right)_{i,j=1}^{N+1}. \quad (2.62)$$



onde as entradas  $w_{ij}^{l,k}$  são calculadas usando a representação integral (2.57) de  $K_g^{l,k}$ , como segue:

$$\begin{aligned}
K_g^{l,k}(I_N q) &= \int_0^L K^{l,k}(s, y) \tilde{q}(s) ds \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) \tilde{q}(s) ds \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) \left( q(s_j) + (s - s_j) \frac{q(s_{j+1}) - q(s_j)}{h_s} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^N q(s_j) \left( 1 + \frac{s_j}{h_s} \right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds - \sum_{j=1}^N \frac{q(s_j)}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \left( s_j \frac{q(s_{j+1})}{h_s} \right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds + \sum_{j=1}^N \frac{q(s_{j+1})}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \\
&= \sum_{j=1}^N q(s_j) \left[ \left( 1 + \frac{s_j}{h_s} \right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^N q(s_{j+1}) \left[ -\frac{s_j}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds + \frac{1}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \right] \\
&= \sum_{j=1}^N q(s_j) \left[ \left( 1 + \frac{s_j}{h_s} \right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N+1} q(s_j) \left[ -\frac{s_{j-1}}{h_s} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K^{l,k}(s, y) ds + \frac{1}{h_s} \int_{s_{j-1}}^{s_j} s K^{l,k}(s, y) ds \right] \\
&= \sum_{j=1}^{N+1} w_j^{l,k}(y) q(s_j),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
w_1^{l,k} &= \left( 1 + \frac{s_1}{h_s} \right) \int_{s_1}^{s_2} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_1}^{s_2} s K^{l,k}(s, y) ds \\
w_j^{l,k} &= \left( 1 + \frac{s_j}{h_s} \right) \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} s K^{l,k}(s, y) ds \\
&\quad - \frac{s_{j-1}}{h_s} \int_{s_{j-1}}^{s_j} K^{l,k}(s, y) ds + \frac{1}{h_s} \int_{s_{j-1}}^{s_j} s K^{l,k}(s, y) ds \quad \text{se } 2 \leq j \leq N \\
w_{N+1}^{l,k} &= -\frac{s_N}{h_s} \int_{s_N}^{s_{N+1}} K^{l,k}(s, y) ds + \frac{1}{h_s} \int_{s_N}^{s_{N+1}} s K^{l,k}(s, y) ds
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
w_1^{l,k} &= \int_{s_1}^{s_2} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_1}^{s_2} s K^{l,k}(s, y) ds \\
w_j^{l,k} &= \int_{s_j}^{s_{j+1}} K^{l,k}(s, y) ds - \frac{1}{h_s} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) K^{l,k}(s, y) ds \\
&\quad + \frac{1}{h_s} \int_{s_{j-1}}^{s_j} (s - s_{j-1}) K^{l,k}(s, y) ds \quad \text{se } 2 \leq j \leq N \\
w_{N+1}^{l,k} &= \frac{1}{h_s} \int_{s_N}^{s_{N+1}} (s - s_N) K^{l,k}(s, y) ds
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi_N I_N K_g^{l,k} I_N \tilde{q}(y) &= \varphi_N I_N K_g^{l,k} I_N \varphi_N^{-1} \mathbf{q} \\
&= \varphi_N I_N \sum_{j=1}^{N+1} w_j^{l,k}(y) q(s_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N+1} w_j^{l,k}(s_j) q(s_j) \\
&=: \sum_{j=1}^{N+1} w_{ij}^{l,k} q(s_j),
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{q} = \left[ q(s_1) \quad q(s_2) \quad \cdots \quad q(s_{N+1}) \right]^T,$$

O operador  $K_b^{l,N} = I_N K_b^l I_N$  pode ser obtido diretamente de (2.27) e é associado à matriz  $(N+1) \times 2$ ,  $V^l := (v_{ij}^l)_{i=1, j=1}^{N+1, 2} = \varphi_N L_b^N \varphi_N^{-1}$ :

$$v_{i,1}^l = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{P_l(-\mu) e^{-\frac{\lambda'(2L-y_i)}{\mu}} \rho_L (1-\rho_0) + P_l(\mu) e^{-\frac{\lambda' y_i}{\mu}} (1-\rho_0)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} d\mu, \quad (2.64)$$

$$v_{i,2}^l = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{P_l(\mu) e^{-\frac{\lambda'(y_i-L)}{\mu}} \rho_0 (1-\rho_L) + P_l(-\mu) e^{-\frac{\lambda'(L-y_i)}{\mu}} (1-\rho_L)}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} d\mu, \quad (2.65)$$

### 2.3.1 Discussão sobre o cálculo dos coeficientes de $W^{l,k}$

Observe que o núcleo  $K^{l,k}(s, y)$  e  $sK^{l,k}(s, y)$  podem ser integrado analiticamente com respeito a  $s$ . Além disso, como  $K(s, y)$  pode ser decomposto na forma

$$\begin{aligned}
K^{l,k}(s, y) &= \int_0^1 P_l(-\mu) P_k(-\mu) h_0(y-s+L, \mu) d\mu + \int_0^1 P_l(\mu) P_k(\mu) h_0(s-y+L, \mu) d\mu \\
&+ \int_0^1 P_l(-\mu) P_k(\mu) \rho_L h_1(s+y, \mu) d\mu + \int_0^1 P_l(\mu) P_k(-\mu) \rho_0 h_1(-y-s+2L, \mu) d\mu \\
&+ \int_0^1 P_l(-Si(s-y, \mu)) P_k(-Si(s-y, \mu)) h_2(|s-y|, \mu) d\mu.
\end{aligned} \quad (2.66)$$

onde

$$h_0(x, \mu) = \frac{\rho_0 \rho_L}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} \frac{e^{\frac{\lambda'(x-3L)}{\mu}}}{2\mu}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.67)$$

$$h_1(x, \mu) = \frac{1}{1 - \rho_0 \rho_L e^{-\frac{2\lambda' L}{\mu}}} \frac{e^{\frac{\lambda'(x-2L)}{\mu}}}{2\mu}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.68)$$

$$h_2(x, \mu) = \frac{e^{-\frac{\lambda' x}{\mu}}}{2\mu}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.69)$$

o número de integrais definidas a serem calculadas para completar o cálculo dos coeficientes de  $W$  crescem na ordem de  $N$ . Para explicitar esse fato, combinamos os coeficiente da matriz  $W$

(2.63) com a expressão (2.66), que resulta em um longa soma de integrais duplas. Para simplificar, omitimos os índices  $k$  e  $l$ , usando a seguinte notação

$$\begin{aligned} f_0^-(x, \mu) &= P_l(-\mu)P_k(-\mu)h_0(x, \mu), & f_0^+(x, \mu) &= P_l(\mu)P_k(\mu)h_0(x, \mu) \\ f_1^-(x, \mu) &= P_l(-\mu)P_k(\mu)\rho_L h_1(x, \mu), & f_1^+(x, \mu) &= P_l(\mu)P_k(-\mu)\rho_0 h_1(x, \mu) \\ f_2^-(x, \mu) &= P_l(-\mu)P_k(-\mu)h_2(x, \mu), & f_2^+(x, \mu) &= P_l(\mu)P_k(\mu)h_2(x, \mu) \end{aligned} \quad (2.70)$$

e obtemos as parcelas da soma:

$$\begin{aligned} \int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_0^1 f_0^\pm(s_i - s + L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(N+i-j-1)h_s}^{(N+i-j)h_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = N + i - j \\ \int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) \int_0^1 f_0^\pm(s_i - s + L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(N+i-j-1)h_s}^{(N+i-j)h_s} (s_i - x + L - s_j) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = N + i - j \\ \\ \int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_0^1 f_0^\pm(s - s_i + L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(N+j-i)h_s}^{(N+j-i+1)h_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = N + j - i + 1 \\ \int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) \int_0^1 f_0^\pm(s - s_i + L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(N+j-i)h_s}^{(N+j-i+1)h_s} (x + s_i - L - s_j) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = N + j - i + 1 \\ &= - \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \\ &+ h_s \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = N + j - i + 1 \\ \\ \int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_0^1 f_1^\pm(s + s_i, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(j+i-2)h_s}^{(j+i-1)h_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = j + i - 1 \\ \int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) \int_0^1 f_1^\pm(s + s_i, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(j+i-2)h_s}^{(j+i-1)h_s} (x - (j+i-2)h_s) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = j + i - 1 \\ &= - \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu \\ &+ h_s \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = j + i - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_0^1 f_1^\pm(-s_i - s + 2L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(2N-i-j+1)h_s}^{(2N-i-j+2)h_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu \\
&= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = 2N - i - j + 2 \\
\int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) \int_0^1 f_1^\pm(-s_i - s + 2L, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(2N-i-j+1)h_s}^{(2N-i-j+2)h_s} ((2N - j - i + 2)h_s - x) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu \\
&= \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad k = 2N - i - j + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_j}^{s_{j+1}} \int_0^1 f_2^\pm(|s - s_i|, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(j-i)h_s}^{(j-i+1)h_s} f_2^\pm(|x|, \mu) dx d\mu \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \int_{(j-i)h_s}^{(j-i+1)h_s} f_2^-(x, \mu) dx d\mu, & j - i \geq 0 \\ \int_0^1 \int_{(i-j-1)h_s}^{(i-j)h_s} f_2^+(x, \mu) dx d\mu, & i - j \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_2^-(x, \mu) dx d\mu, & k = j - i + 1, \quad k \geq 1 \\ \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_2^+(x, \mu) dx d\mu, & k = i - j, \quad k \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_j}^{s_{j+1}} (s - s_j) \int_0^1 f_2^\pm(|s - s_i|, \mu) d\mu ds &= \int_0^1 \int_{(j-i)h_s}^{(j-i+1)h_s} (x + (i - j)h_s) f_2^\pm(|x|, \mu) dx d\mu \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \int_{(j-i)h_s}^{(j-i+1)h_s} (x + (i - j)h_s) f_2^-(x, \mu) dx d\mu, & j - i \geq 0 \\ \int_0^1 \int_{(i-j-1)h_s}^{(i-j)h_s} (-x + (i - j)h_s) f_2^+(x, \mu) dx d\mu, & i - j \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_2^-(x, \mu) dx d\mu, & k = j - i + 1, k \geq 1 \\ \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (-x + kh_s) f_2^+(x, \mu) dx d\mu, & k = i - j, k \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_2^-(x, \mu) dx d\mu, & k = j - i + 1, k \geq 1 \\ - \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_2^+(x, \mu) dx d\mu \\ + h_s \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_2^\pm(x, \mu) dx d\mu, & k = i - j, k \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

A lista de integrais dada acima nos estimula as definições dos seguintes vetores:

$$F_k^{0\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.71a)$$

$$G_k^{0\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_0^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.71b)$$

$$F_k^{1\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.71c)$$

$$G_k^{1\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (kh_s - x) f_1^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.71d)$$

$$F_k^{2\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} f_2^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.71e)$$

$$G_k^{2\pm} = \int_0^1 \int_{(k-1)h_s}^{kh_s} (x - (k-1)h_s) f_2^\pm(x, \mu) dx d\mu, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.71f)$$

Portanto, os coeficientes da matriz  $W$  dados em (2.63) é calculado, para  $1 \leq i \leq N + 1$ , por

$$\begin{aligned}
w_{i1}^{l,k} &= F_{N+i-1}^{0-} - \frac{1}{h_s} G_{N+i-1}^{0-} + \frac{1}{h_s} G_{N-i+2}^{0+} + \frac{1}{h_s} G_i^{1-} + F_{2N-i+1}^{1+} \\
&\quad - \frac{1}{h_s} G_{2N-i+1}^{1+} + \mathcal{F}_{i1}^2 - \frac{1}{h_s} \mathcal{G}_{i1}^2 \\
w_{ij}^{l,k} &= F_{N+i-j}^{0-} - \frac{1}{h_s} G_{N+i-j}^{0-} + \frac{1}{h_s} G_{N+i-j+1}^{0-} + \frac{1}{h_s} G_{N+j-i+1}^{0+} - \frac{1}{h_s} G_{N+j-i}^{0+} + F_{N+j-i}^{0+} \\
&\quad + \frac{1}{h_s} G_{j+i-1}^{1-} - \frac{1}{h_s} G_{j+i-2}^{1-} + F_{j+i-2}^{1-} + F_{2N-j-i+2}^{1+} - \frac{1}{h_s} G_{2N-j-i+2}^{1+} + \frac{1}{h_s} G_{2N-j-i+3}^{1+} \\
&\quad + \mathcal{F}_{ij}^2 - \frac{1}{h_s} \mathcal{G}_{ij}^2 + \frac{1}{h_s} \mathcal{G}_{i,j-1}^2, \quad 2 \leq j \leq N \\
w_{i,N+1}^{l,k} &= \frac{1}{h_s} G_i^{0-} - \frac{1}{h_s} G_{2N+1-i}^{0+} + F_{2N+1-i}^{0+} - \frac{1}{h_s} G_{N+i-1}^{1-} + F_{N+i-1}^{1-} \\
&\quad + \frac{1}{h_s} G_{N-i+2}^{1+} + \frac{1}{h_s} \mathcal{G}_{N,j}^2 \quad (2.72)
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{F}_{ij}^2 = \begin{cases} F_{j-i+1}^{2-}, & \text{se } i \leq j \\ F_{i-j}^{2+}, & \text{se } i > j. \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq i \leq N + 1, \quad (2.73)$$

e

$$\mathcal{G}_{ij}^2 = \begin{cases} G_{j-i+1}^{2-}, & \text{se } i \leq j \\ -G_{i-j}^{2+} + h_s F_{i-j}^{2+}, & \text{se } i > j. \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq i \leq N+1. \quad (2.74)$$

Cada um dos vetores (2.71a)-(2.71f) pode ser integrado em  $x$  analiticamente, eles podem ser escrito na forma:

$$F_k^{0\pm} = \int_0^1 f_0^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 f_0^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.75a)$$

$$G_k^{0\pm} = \int_0^1 g_0^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 g_0^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.75b)$$

$$F_k^{1\pm} = \int_0^1 f_1^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 f_1^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.75c)$$

$$G_k^{1\pm} = \int_0^1 g_1^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 g_1^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq 2N \quad (2.75d)$$

$$F_k^{2\pm} = \int_0^1 f_2^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 f_2^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.75e)$$

$$G_k^{2\pm} = \int_0^1 g_2^{\pm}(kh_s, \mu) d\mu - \int_0^1 g_2^{\pm}((k-1)h_s, \mu) d\mu, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.75f)$$

onde as função  $f_0^{\pm}$ ,  $g_0^{\pm}$ ,  $f_1^{\pm}$ ,  $g_1^{\pm}$ ,  $f_2^{\pm}$  e  $g_2^{\pm}$  são obtidas de (2.67)-(2.69):

$$f_0^{\pm}(x, \mu) = \frac{P_l(\pm\mu)P_k(\pm\mu)}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \frac{\rho_0\rho_L e^{\frac{\lambda'(x-3L)}{\mu}}}{2\lambda'}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.76a)$$

$$g_0^{\pm}(x, \mu) = \frac{P_l(\pm\mu)P_k(\pm\mu)}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \frac{\rho_0\rho_L(kh_s\lambda' - \lambda'x + \mu)}{2\lambda'^2} e^{\frac{\lambda'(x-3L)}{\mu}}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.76b)$$

$$f_1^{\pm}(x, \mu) = \frac{P_l(\mp\mu)P_k(\pm\mu)}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \frac{\rho_{L,0} e^{\frac{\lambda'(x-2L)}{\mu}}}{2\lambda'}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.76c)$$

$$g_1^{\pm}(x, \mu) = \frac{P_l(\mp\mu)P_k(\pm\mu)}{1 - \rho_0\rho_L e^{-\frac{2\lambda'L}{\mu}}} \frac{\rho_{L,0}(kh_s\lambda' - \lambda'y + \mu)}{2\lambda'^2} e^{\frac{\lambda'(x-2L)}{\mu}}, \quad 0 \leq x \leq 2L \quad (2.76d)$$

$$f_2^{\pm}(x, \mu) = -\frac{P_l(\pm\mu)P_k(\pm\mu)e^{-\frac{\lambda'x}{\mu}}}{2\lambda'}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.76e)$$

$$g_2^{\pm}(x, \mu) = -\frac{P_l(\pm\mu)P_k(\pm\mu)(\lambda'y + \mu - kh_s\lambda' + h_s\lambda')}{2\lambda'^2} e^{-\frac{\lambda'x}{\mu}}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.76f)$$

O fato de realizar a integração na variável  $x$  ajuda a controlar a singularidade em  $\mu$ . Observe que o termo  $\frac{1}{\mu}$  desaparece na simplificação com o termo  $\mu$  vindo da integração de  $e^{-\frac{\lambda'x}{\mu}}$  em  $x$ . A solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 - \beta_0 W^{0,0} & -\beta_1 W^{0,1} & \dots & -\beta_M W^{0,M} \\ -\beta_0 W^{1,0} & 1 - \beta_1 W^{1,1} & \dots & -\beta_M W^{1,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_0 W^{M,0} & -\beta_1 W^{M,1} & \dots & 1 - \beta_M W^{M,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(y) \\ J_1(y) \\ \vdots \\ J_M(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0,0}S(y) + V^0B \\ W^{1,0}S(y) + V^1B \\ \vdots \\ W^{M,0}S(y) + V^MB \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

fornece os vetores  $J_l(y)$ ,  $1 \leq l \leq M$ , calculados nos pontos da malha.

As expressões (2.75) deixam claro que o cálculo dos coeficientes de  $W$  é da ordem de  $N$ . O cálculo de  $V$  também é da ordem de  $N$ , como pode ser observado diretamente de (2.27). O conjunto de equações (2.72), (2.73), (2.74), (2.75), (2.76) e (2.77) constituem um algoritmo enxuto do método  $GFD_N$ .

Observe que o método numérico não exige que (2.2) seja satisfeita. Basta que o núcleo possa ser decomposto na forma

$$\omega(\mu, \mu') = \sum_{l=1}^M \beta_l f_l(\mu) g_l(\mu'), \quad (2.78)$$

sendo  $f_l$  e  $g_l$  funções contínuas. A escolha dos polinômios de Legendre foi feita por razões físicas, tendo em vista que os ângulos de incidência e de reflexão são simétricos.

## 2.4 Erro de Truncamento para o método $GFD_N$

A estimativa de erro é feita sob as hipóteses do Lema 2.2, ou seja,  $\omega(\mu) \leq \omega_{max} < 1$ . Começamos com um lema que inclui várias estimativas úteis:

**Lema 2.3.** *Seja  $0 < \alpha < 1$  e  $q \in C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$ , então*

$$\|I_N q\|_{C^\alpha} \leq \|q\|_{C^\alpha} \quad (2.79a)$$

$$\|I_N q - q\|_{C^0} \leq \frac{3}{2} h_s^\alpha [q]_{C^\alpha}. \quad (2.79b)$$

$$\|(L_g I_N - L_g)q\|_{C^0} \leq \frac{3}{2} h_s^\alpha \|L_g\|_{C^0} \frac{\|q\|_{C^\alpha}}{C_1} \quad (2.79c)$$

$$\|((L_g I_N)^n - (L_g)^n)q\|_{C^0} \leq \frac{3}{2C_1} h_s^\alpha \|q\|_{C^\alpha} n \|L_g\|_{C^\alpha}^n \quad (2.79d)$$

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} L_g^{j+1} q - \sum_{j=0}^{\infty} (L_g I_N)^{j+1} q \right\|_{C^0} \leq \frac{3 \|q\|_{C^\alpha} h_s^\alpha}{2C_1} \frac{\|L_g\|_{C^\alpha}}{(1 - \|L_g\|)^2}. \quad (2.79e)$$

*Demonstração.* A prova da estimativa (2.79a) obtém-se das desigualdades

$$\begin{aligned} [I_N q]_{C^\alpha} &= \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \sup_x \sup_{y > x} \frac{|\tilde{q}(y, \mu) - \tilde{q}(x, \mu)|}{|y - x|^\alpha} \\ &\leq \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \sup_x \frac{|\tilde{q}(s_j, \mu) - \tilde{q}(x, \mu)|}{|s_j - x|^\alpha}, \quad \text{para algum } 0 \leq j \leq N + 1 \\ &\leq \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \frac{|\tilde{q}(s_j, \mu) - \tilde{q}(s_i, \mu)|}{|s_j - s_i|^\alpha}, \quad \text{para algum } 0 \leq i \leq N + 1 \\ &= \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \frac{|q(s_j, \mu) - q(s_i, \mu)|}{|s_j - s_i|^\alpha} \\ &\leq \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \sup_{0 < x < y < L} \frac{|q(y, \mu) - q(x, \mu)|}{|y - x|^\alpha} = [q]_{C^\alpha} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|I_N q\|_{C^0} &= \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \sup_y \tilde{q}(y, \mu) \\
&\leq \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \tilde{q}(s_i, \mu), \quad \text{para algum } 0 \leq i \leq N+1 \\
&= \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} q(s_i, \mu) \\
&\leq \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \sup_y q(y, \mu) \\
&= \|q\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

Para provar (2.79b), tomamos  $y \in (0, L)$  e  $s_i$  tal que  $|y - s_i| \leq \frac{h_s}{2}$ . Sabemos que existe  $1 \leq j \leq N+1$  tal que  $|i - j| = 1$  e  $i < y < j$  ou  $j < y < i$ . Supomos sem perda de generalidade  $j > i$ , então

$$\begin{aligned}
|\tilde{q}(y, \mu) - \tilde{q}(s_i, \mu)| &= \left| \frac{(s_j - y)q(s_i, \mu) + (y - s_i)q(s_j, \mu) - h_s q(s_i, \mu)}{h_s} \right| \\
&\leq \left| \frac{\frac{h_s}{2}q(s_i, \mu) + \frac{h_s}{2}q(s_j, \mu) - h_s q(s_i, \mu)}{h_s} \right| \\
&\leq \frac{h_s^\alpha}{2} \left| \frac{q(s_j, \mu) - q(s_i, \mu)}{(s_j - s_i)^\alpha} \right| \\
&\leq \frac{h_s^\alpha}{2} [q]_{C^\alpha}
\end{aligned}$$

Por definição,

$$|q(y, \mu) - q(s_i, \mu)| \leq [q]_{C^\alpha} |y - s_i|^\alpha.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|q(y, \mu) - \tilde{q}(y, \mu)| &\leq |q(y, \mu) - q(s_i, \mu)| + |\tilde{q}(s_i, \mu) - \tilde{q}(y, \mu)| \\
&\leq \frac{h_s^\alpha}{2} [q]_{C^\alpha} + [q]_{C^\alpha} \left(\frac{h_s}{2}\right)^\alpha \\
&\leq h_s^\alpha [q]_{C^\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^\alpha}\right) \\
&\leq \frac{3}{2} h_s^\alpha [q]_{C^\alpha}.
\end{aligned}$$

A prova de (2.79c) obtém-se usando (2.79b)

$$\begin{aligned}
\|(L_g I_N - L_g)q\|_{C^0} &= \|(L_g(I_N - 1))q\|_{C^0} \\
&\leq \|L_g\|_{C^0} \|I_N q - q\|_{C^0} \\
&\leq \|L_g\|_{C^0} \frac{3}{2} h_s^\alpha [q]_{C^\alpha} \\
&\leq \frac{3}{2} h_s^\alpha \|L_g\|_{C^0} \frac{\|q\|_{C^\alpha}}{C_1}.
\end{aligned}$$



Provamos a desigualdade (2.79d) usando (2.79c),

$$\begin{aligned}
E_n := \|((L_g I_N)^n - (L_g)^n)q\|_{C^0} &= \|[L_g I_N (L_g I_N)^{n-1} - L_g (L_g)^{n-1}]q\|_{C^0} \\
&\leq \|L_g (I_N - 1)(L_g I_N)^{n-1}q\|_{C^0} + \|L_g [(L_g I_N)^{n-1} - (L_g)^{n-1}]q\|_{C^0} \\
&\leq \|L_g\|_{C^0} \frac{3}{2C_1} h_s^\alpha \|(L_g I_N)\|_{C^\alpha}^{n-1} \|q\|_{C^\alpha} + \|L_g\|_{C^0} E_{n-1}
\end{aligned}$$

Disso e da desigualdade (2.79a), temos:

$$\begin{aligned}
E_n &\leq \frac{3}{2C_1} h_s^\alpha \|q\|_{C^\alpha} \sum_{i=1}^n \|L_g\|_{C^0}^i \|(L_g I_N)\|_{C^\alpha}^{n-i} \\
&\leq \frac{3}{2C_1} h_s^\alpha \|q\|_{C^\alpha} \sum_{i=1}^n \|L_g\|_{C^\alpha}^n \\
&= \frac{3}{2C_1} h_s^\alpha \|q\|_{C^\alpha} n \|L_g\|_{C^\alpha}^n.
\end{aligned}$$

A estimativa (2.79e) vem direto de (2.79d):

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=0}^{\infty} L_g^{j+1} q - \sum_{j=0}^{\infty} (L_g I_N)^{j+1} q \right\|_{C^0} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (L_g^{j+1} - (L_g I_N)^{j+1}) q \right\|_{C^0} \\
&\leq \frac{3\|q\|_{C^\alpha} h_s^\alpha}{2C_1} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \|L_g\|_{C^\alpha}^{j+1} \\
&\leq \frac{3\|q\|_{C^\alpha} h_s^\alpha}{2C_1} \frac{\|L_g\|_{C^\alpha}}{(1 - \|L_g\|_{C^\alpha})^2}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.1.** *O erro de truncamento  $\|L_g^N q - L_g q\|_{C^0}$  tem ordem  $h_s^\alpha$ . Ademais, o erro de truncamento  $\|(1 - L_g^N)^{-1} L_g^N q - S_g q\|_{C^0}$  também tem ordem  $h_s^\alpha$ .*

*Demonstração.* Para a primeira estimativa, observe que

$$\begin{aligned}
\|L_g^N q - L_g q\|_{C^0} &= \|I_N L_g I_N q - L_g q\|_{C^0} \\
&\leq \|I_N L_g I_N q - L_g I_N q\|_{C^0} + \|L_g I_N q - L_g q\|_{C^0} \\
&\leq \frac{3h_s^\alpha}{2C_1} \|L_g I_N q\|_{C^\alpha} + \frac{3h_s^\alpha}{2C_1} \|L_g\|_{C^0} \|q\|_{C^\alpha}.
\end{aligned}$$

Para a segunda, note que

$$(1 - L_g^N)^{-1} L_g^N = \sum_{j=0}^{\infty} (L_g^N)^{j+1} q \quad \text{e} \quad (1 - L_g)^{-1} L_g = \sum_{j=0}^{\infty} (L_g)^{j+1} q,$$

assim,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (L_g^N)^{j+1} q - \sum_{j=0}^{\infty} (L_g)^{j+1} q \right\|_{C^0} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} ((I_N L_g I_N)^{j+1} q - (L_g I_N)^{j+1} q) \right\|_{C^0} \\ &+ \left\| \sum_{j=0}^{\infty} ((L_g I_N)^{j+1} q - (L_g)^{j+1} q) \right\|_{C^0} \\ &:= A + B \end{aligned}$$

A estimativa para  $B$  é dada pelo Lema 2.3. Para estimar  $A$ , fazemos

$$\begin{aligned} A &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} ((I_N L_g I_N)^{j+1} q - (L_g I_N)^{j+1} q) \right\|_{C^0} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (I_N^{j+1} - 1) (L_g I_N)^{j+1} q \right\|_{C^0} \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (I_N - 1) (L_g I_N)^{j+1} q \right\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Pela estimativa (2.79c) nós temos

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3h_s^\alpha}{2C_1} \|(L_g I_N)^{j+1} q\|_{C^\alpha} \leq \frac{3h_s^\alpha}{2C_1} \sum_{j=0}^{\infty} \|L_g q\|_{C^\alpha}^{j+1} \\ &\leq \frac{3h_s^\alpha}{2C_1} \frac{\|L_g q\|_{C^\alpha}}{1 - \|L_g q\|_{C^\alpha}}. \end{aligned}$$

□

## 2.5 Resultados Numéricos para o Transporte

### 2.5.1 Validação do método

Os resultados numéricos encontrados na literatura são para  $\omega$  e  $\rho$  constante. Usamos esses resultados para validar o esquema numérico  $GFD_N$ . Primeiro, comparamos a nossa solução com os resultados obtidos por Vargas [31], que usou o método  $LTS_N$  com  $N = 300$ . A comparação ponto a ponto é dado nas Tabelas 2.1 e 2.2. As integrais envolvidas em (2.75) foram obtidas por um método de quadratura adaptativa com uma tolerância de  $10^{-12}$ . Observe na Tabela 2.2 que temos um bom resultado se comparamos com a solução exata, melhores que os obtidos por Vargas [31] usando o método  $LTS_{300}$ .

Também calculamos o máximo de  $\omega$  quando  $\lambda' = 1$  para que a equação de transporte tenha solução finita (criticalidade). Esse valor é obtido do raio espectral do operador  $K_g^{00}$ , que é estimado do raio espectral da matriz  $W$  (ver observação 2.2). Nas Tabelas 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6 comparamos nossos resultados com os de Naz [20] e Atalay [1]. Os resultados desses artigos foram obtidos por duas diferentes técnicas: solução da equação integral do transporte com subtração de singularidade e a técnica das autofunções singulares.

A figura (2.1) mostra resultados para  $\mathcal{I}$  para vários valores de  $\omega$  quando  $\lambda' = 1$ . Aqui podemos observar a existência de solução para o problema supercrítico ( $\omega > \lambda'$ ). Experimentos numéricos com o método  $GFD_N$  mostram que o erro de arredondamento é irrelevante frente ao erro de truncamento.

y	$LTS_{300}$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 1600$
0.0	0.335952	0.335875	0.335928	0.335942	0.335946	0.335947
0.05	0.398459	0.398382	0.398441	0.398456	0.39846	0.398461
0.1	0.452925	0.452842	0.452905	0.452921	0.452925	0.452926
0.15	0.502992	0.502904	0.502971	0.502988	0.502992	0.502994
0.2	0.548165	0.548071	0.548142	0.54816	0.548165	0.548166
0.25	0.587762	0.587629	0.587702	0.587721	0.587726	0.587727
0.3	0.621014	0.620913	0.620989	0.621009	0.621014	0.621015
0.35	0.647477	0.647373	0.647452	0.647471	0.647477	0.647478
0.4	0.666684	0.666579	0.666659	0.666679	0.666684	0.666685
0.45	0.678336	0.678224	0.678305	0.678325	0.67833	0.678332
0.5	0.682233	0.682126	0.682207	0.682228	0.682233	0.682234

Tabela 2.1: Comparação entre os valores calculados para  $\int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  quando  $\lambda' = \omega = 1.0$ , o termo fonte é  $S(y) = -y^2 + y$ , a condição de fronteira é  $B_0 = B_L = 0$  e  $\rho = 0$  com os resultados publicados por Vargas [31].

### 2.5.2 Validação via métodos espectrais

O desenvolvimento de métodos espectrais para equação diferenciais está bem desenvolvido na literatura. Aqui fazemos uma breve discussão sobre a discretização, sendo que maiores detalhes podem ser vistos em [9] e [14]. O objetivo é de comparar os resultados do método  $GFD_N$  com os obtidos por métodos espectrais.

Com esse propósito, fazemos uma projeção dos operadores em subespaços de elementos finitos pelo método de mínimos quadrados. Visamos aproximar os operadores  $K_g^{00}$  e  $K_b^0$  por operadores em espaços de dimensão finita usando projetores em  $L_2$ . Em geral, pode-

y	Exata	$LTS_{300}$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 1600$
0.0	0.516842	0.516841	0.516829	0.516838	0.516841	0.516841
0.1	0.600637	0.600634	0.600626	0.600634	0.600636	0.600637
0.2	0.647999	0.647997	0.647988	0.647996	0.647998	0.647999
0.3	0.678718	0.678715	0.678707	0.678715	0.678717	0.678718
0.4	0.696308	0.696303	0.696297	0.696305	0.696307	0.696308
0.5	0.702056	0.702053	0.702045	0.702053	0.702055	0.702055

Tabela 2.2: Comparação entre os valores calculados para  $\int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  quando  $\lambda' = \omega = 1.0$ , o termo fonte é  $S(y) = 1/8$ , a condição de fronteira é  $B_0 = B_L = 1/8$  e  $\rho = 0$  com os resultados publicados por Vargas [31].

L	Naz and Loyalka	N=100	N=200	N=400	N=800	N=1600
1.0	1.615379	1.615471	1.615403	1.615385	1.615380	1.615379
2.0	1.277102	1.277187	1.277125	1.277108	1.277103	1.277102
4.0	1.108468	1.108551	1.108490	1.108474	1.108469	1.108468
6.0	1.058296	1.058377	1.058317	1.058301	1.058297	1.058296
8.0	1.036402	1.036483	1.036423	1.036407	1.036403	1.036402
10.0	1.024879	1.024959	1.024900	1.024885	1.024881	1.024880
12.0	1.018072	1.018152	1.018093	1.018078	1.018074	1.018073
16.0	1.010766	1.010845	1.010787	1.010772	1.010768	1.010767
20.0	1.007136	1.007214	1.007156	1.007141	1.007137	1.007136

Tabela 2.3: Comparação entre os valores calculados para o valor crítico de  $\omega$  quando  $\lambda' = 1$ ,  $\rho = 0$  com o benchmark publicado por Naz [20].

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
N=400	3.83032	2.95952	2.23566	1.60333	1.02491
N=800	3.83031	2.95951	2.23566	1.60333	1.02491
Atalay	3.81843	2.94902	2.23324	1.60373	1.02503

Tabela 2.4: Comparação do valor crítico de  $\omega$  com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1$  e  $L = 0.2$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
N=400	1.27711	1.20373	1.13254	1.06444	1.00250
N=800	1.27710	1.20373	1.13254	1.06444	1.00250
Naz and Loyalka	1.27710	-	-	-	-
Atalay	1.27704	1.20396	1.13287	1.06469	1.00252

Tabela 2.5: Comparação do valor crítico de  $\omega$  com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando  $\rho$  varia entre 0 e 0.99,  $\lambda' = 1$  e  $L = 2.0$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
N=400	1.00714	1.00658	1.00568	1.00398	1.00025
N=800	1.00714	1.00658	1.00567	1.00397	1.00025
Naz and Loyalka	1.00714	-	-	-	-
Atalay	1.00714	1.00658	1.00568	1.00398	1.00117

Tabela 2.6: Comparação do valor crítico de  $\omega$  com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1$  e  $L = 20.0$ .

$y$	$LTS_{300}$		$GFD_{400}$		$GFD_{800}$	
	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$
0.0	3.514736	-0.682658	3.514725	-0.682651	3.514742	-0.682656
0.2	4.193457	-0.320120	4.193456	-0.320119	4.193467	-0.320119
0.4	4.306992	-0.023298	4.306991	-0.023298	4.307001	-0.023298
0.6	4.162764	0.219718	4.162763	0.219718	4.162773	0.219719
0.8	3.820951	0.418684	3.820951	0.418683	3.820960	0.418684
1.0	3.196350	0.581583	3.196338	0.581579	3.196349	0.581582

Tabela 2.7: Comparação entre os valores calculados para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  e  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 I(y, \mu') \mu' d\mu'$  quando  $\omega = \lambda' = 1.0$ , o termo fonte é dado por  $Q(y) = e^{-y}$ , a condição de fronteira é  $B_0 = B_L = 1.0$ ,  $L = 1.0$  e  $\rho = 0$  com os resultados publicados por Vargas [31].

$y$	$LTS_{300}$		$GFD_{1600}$		$GFD_{3200}$	
	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$	$\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$	$\mathcal{K}$
0	8.42592	-3.47483	8.429517	-3.466102	8.443685	-3.472449
20	16.9490	0.0700450	16.929820	0.069921	16.945922	0.0699867
40	12.7473	0.0700153	12.734579	0.069921	12.746721	0.0699867
60	8.54702	0.0699940	8.539338	0.069921	8.547520	0.0699867
80	4.34782	0.0699811	4.344098	0.069921	4.348319	0.0699867
100	0.121203	0.0699766	0.120914	0.069845	0.121160	0.0699643

Tabela 2.8: Comparação entre os valores calculados para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  e  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 I(y, \mu') \mu' d\mu'$  quando  $\omega = \lambda' = 1.0$ , o termo fonte é dado por  $Q(y) = e^{-y^2/4}$ , a condição de fronteira é  $B_0 = 1.0$  e  $B_L = 0.0$ ,  $L = 100.0$  and  $\rho = 0$  com os resultados publicados em [31].

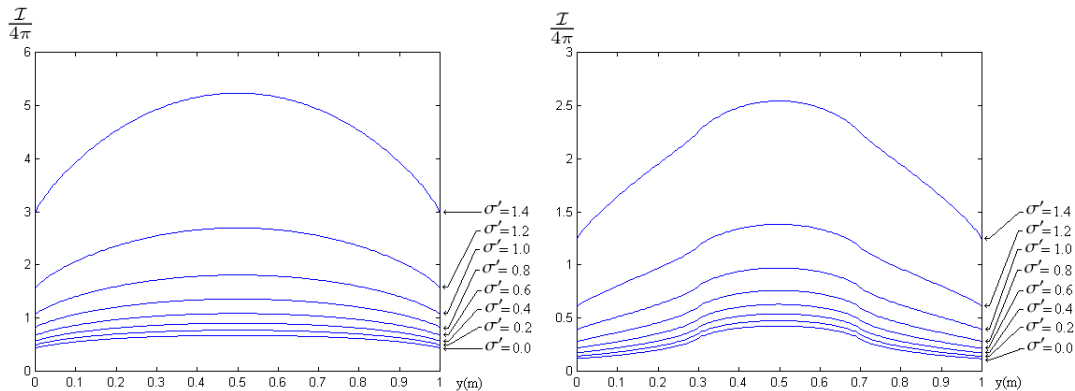


Figura 2.1: Perfil de  $\frac{\mathcal{I}}{4\pi}$  quando  $B_0 = B_L = 0$  e o termo fonte  $S(y)$  é constante igual a 1 no gráfico à esquerda e no gráfico à direita é dado pela sentença  $S(y) = 1$ , se  $0.3 < y < 0.7$  e 0 caso contrário. Em ambos gráficos  $\omega$  varia entre 0 e 1.4 em intervalos de 0.2.

mos considerar  $\{\psi_j\}_{j=1}^N$  uma família de vetores linearmente independentes em  $L_2(0, L)$  e  $\mathcal{M} := \text{span}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ . Definimos os operadores  $\tilde{K}_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  e  $\tilde{K}_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  da seguinte forma:

$$\tilde{K}_g := PK_g^{00} \quad \text{e} \quad \tilde{K}_b := PK_b^0,$$

onde  $P : L_2 \rightarrow \mathcal{M}$  é o projetor ortogonal de  $L_2(0, L)$  em  $\mathcal{M}$  definido como:

$$\|P(q) - q\|_{L^2} = \inf_{\phi \in \mathcal{M}} \|\phi - q\|_{L^2}.$$

Da teoria padrão de espaços de Hilbert [24],  $P$  está unicamente definido e é um operador limitado e auto-adjunto em  $L_2(0, L)$ . Denotamos por  $\varphi$  o isomorfismo entre  $\mathbb{R}^N$  e  $\mathcal{M}$  dado por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M} &\longleftrightarrow \mathbb{R}^N \\ q = \sum_{j=1}^N q^j \psi_j &\longleftrightarrow [q^1, q^2, \dots, q^N]^T = \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Assim, definimos a matriz quadrada  $W_0$  de ordem  $N$  como a representação de  $\tilde{K}_g$  na base  $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ :

$$W_0 := \varphi \tilde{K}_g \varphi^{-1} = \varphi PK_g^{00} P \varphi^{-1}.$$

Aqui usamos o fato de que  $P|_{\mathcal{M}}$  é o operador identidade. Nessa formulação fica explícito que o operador sobre um espaço de dimensão finita  $PK_g^{00}P$  é auto-adjunto e  $W$  deve ser uma matriz simétrica quando a base do espaço  $\mathcal{M}$  for ortonormal, ou seja  $\varphi^{-1} = \varphi^*$ . Também, definimos a matrix  $V$  de ordem  $N \times 2$  analogamente como

$$V := \varphi \tilde{K}_b = \varphi PK_b^0.$$

A fim de obtermos as matrizes  $W$  e  $V$ , consideramos  $q = \sum_{j=1}^N q^j \psi_j$  um elemento de  $\mathcal{M}$  e  $u := \tilde{K}_g q = \sum_{j=1}^N u^j \psi_j$  e, portanto  $\sum_{j=1}^N u^j \psi_j = \sum_{j=1}^N \tilde{K}_g q^j \psi_j$  o que é equivalente a seguinte identidade:

$$\sum_{j=1}^N u^j \langle \psi_j, \psi_i \rangle = \sum_{j=1}^N q^j \langle \tilde{K}_g \psi_j, \psi_i \rangle, \quad \forall 1 \leq i \leq N$$

que admite a forma matricial  $C\mathbf{u} = A\mathbf{q}$ , onde  $\mathbf{q} = \varphi q$  e  $\mathbf{u} = \varphi u$  e as matrizes simétricas  $A$  e  $C$  são dadas por:

$$A = \left( \langle \tilde{K}_g \psi_j, \psi_i \rangle \right) \quad \text{e} \quad C = (\langle \psi_j, \psi_i \rangle).$$

Notamos que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{K}_g \psi_j, \psi_i \rangle &= \langle PK_g \psi_j, \psi_i \rangle \\ &= \langle K_g \psi_j, P \psi_i \rangle \\ &= \langle K_g \psi_j, \psi_i \rangle \end{aligned}$$

Portanto podemos escrever  $u = \varphi^{-1} C^{-1} A \varphi q$  e  $W_0 = C^{-1} A$ .

Aplicamos um procedimento análogo para obter  $V$ , assim escrevemos  $V = \sum_{j=1}^N v^j \varphi_j = PK_b^0 \mathbf{B}$  e calculamos as projeções:

$$\begin{aligned} \langle PK_b^0 \mathbf{B}, \varphi_i \rangle &= \sum_{j=1}^N v^j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \\ &\downarrow \\ \langle K_b^0 \mathbf{B}, \varphi_i \rangle &= \sum_{j=1}^N v^j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \\ &\downarrow \\ F \mathbf{B} &= C \mathbf{v} \\ &\downarrow \\ v &= C^{-1} F \mathbf{B} \end{aligned}$$

ou seja,  $V = C^{-1}F$ , onde  $F$  é uma matriz  $N \times 2$  dada por

$$F_{ij} = \begin{cases} \langle L_b [1 \ 0]^T, \varphi_i \rangle, & j = 1 \\ \langle L_b [0 \ 1]^T, \varphi_i \rangle, & j = 2. \end{cases}$$

Agora, tomamos o caso particular quando  $\lambda' = 1$  e, a família de funções trigonométricas dadas pelos modos pares e ímpares

$$\cos\left(\frac{2i\pi}{L}y\right) \quad \text{e} \quad \text{sen}\left(\frac{2i\pi}{L}y\right),$$

respectivamente, para representar a família  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ . Primeiramente observamos que esses modos se desacoplam, no sentido que:

$$\left\langle L_g \text{sen}\left(\frac{2i\pi}{L}y\right), \cos\left(\frac{2j\pi}{L}y\right) \right\rangle = 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

Definimos

$$\int_0^1 f_{ij}(\mu) d\mu = \left\langle L_g \text{sen}\left(\frac{2i\pi}{L}y\right), \text{sen}\left(\frac{2j\pi}{L}y\right) \right\rangle$$

e

$$\int_0^1 g_{ij}(\mu) d\mu = \left\langle L_g \cos\left(\frac{2i\pi}{L}y\right), \cos\left(\frac{2j\pi}{L}y\right) \right\rangle,$$

onde

$$g_{ij} = \frac{(\rho - 1)\mu L^4 \left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{L}{\mu}} - \rho\right) (L^4 + 16j^2\pi^4\mu^4i^2 + 4\pi^2\mu^2L^2(i^2 + j^2))}, \quad i \neq j,$$

$$g_{ii} = \frac{1/2 L^3 \left(e^{\frac{L}{\mu}} - \rho\right) \left(2L\mu e^{-\frac{L}{\mu}} - 2L\mu + L^2 + 4i^2\pi^2\mu^2\right) + \mu L^4 \rho \left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right)^2 e^{-\frac{L}{\mu}}}{\left(e^{\frac{L}{\mu}} - \rho\right) (L^4 + 8L^2i^2\pi^2\mu^2 + 16i^4\pi^4\mu^4)}$$

$$g_{00} = \left(-\mu e^{\frac{L}{\mu}} + \mu + e^{\frac{L}{\mu}} L\right) e^{-\frac{L}{\mu}} + \frac{\rho \mu \left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right)^2 e^{-\frac{L}{\mu}}}{e^{\frac{L}{\mu}} - \rho}$$

$$f_{ij} = \frac{4ji\pi^2 L^2 \mu^3 \left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right) (1 + \rho)}{(L^4 + 4L^2(i^2 + j^2)\pi^2 \mu^2 + 16j^2\pi^4 \mu^4 i^2) \left(e^{\frac{L}{\mu}} + \rho\right)}, \quad i \neq j$$

$$f_{ii} = \frac{\frac{L^2}{4} \left(-4\left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right)Li\pi \mu^2 + 8\mu^3 i^2 \pi^2 \left(e^{\frac{L}{\mu}} - 1\right) + 2L^2 \mu i \pi e^{\frac{L}{\mu}} + e^{\frac{L}{\mu}} L^3 + 4e^{\frac{L}{\mu}} Li^2 \pi^2 \mu^2 + 8\mu^3 i^3 \pi^3 e^{\frac{L}{\mu}}\right) e^{-\frac{L}{\mu}}}{L^4 + 8L^2 i^2 \pi^2 \mu^2 + 16i^4 \pi^4 \mu^4} + \frac{4\mu^3 i^2 \pi^2 \rho L^2 \left(-1 + e^{\frac{L}{\mu}}\right)^2 e^{-\frac{L}{\mu}}}{(L^4 + 8L^2 i^2 \pi^2 \mu^2 + 16i^4 \pi^4 \mu^4) \left(e^{\frac{L}{\mu}} + \rho\right)},$$

$$f_{00} = 0.$$

Utilizamos este método para calcular os valores críticos do problema de transporte truncando a matriz infinita  $g_{ij}$  como uma matriz quadrada  $N \times N$ . Apresentamos nas Tabelas 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 o valor crítico de  $\omega$  quando  $\lambda' = 1$  e vários valores constantes de  $\rho$  (0, 0.25, 0.50, 0.75, 0.99). Nas Tabelas 2.9 e 2.11 temos a convergência do método com vários valores de  $N$  e nas Tabelas 2.10 e 2.12 comparamos com os resultados da literatura e o método  $GFD_N$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
Cossenos - $N = 10$	1.27713351	1.20375042	1.13254706	1.06444171	1.00250316
Cossenos - $N = 20$	1.27710655	1.20373480	1.13254020	1.06444008	1.00250315
Cossenos - $N = 30$	1.27710338	1.20373292	1.13253937	1.06443987	1.00250315
Cossenos - $N = 40$	1.27710253	1.20373240	1.13253914	1.06443982	1.00250315

Tabela 2.9: Valores críticos de  $\omega$  usando o método de expansão em cossenos quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1.0$  e  $L = 2.0$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
$GFD_{800}$	1.27710	1.20373	1.13254	1.06444	1.00250
Cossenos - $N = 40$	1.27710	1.20373	1.13254	1.06444	1.00250
Naz and Loyalka	1.27710	-	-	-	-
Atalay	1.27704	1.20396	1.13287	1.06469	1.00252

Tabela 2.10: Comparação do valores críticos de  $\omega$  obtidos com expansão em cossenos com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] e com o método  $GFD_N$  quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1.0$  e  $L = 2.0$ .



	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = 0.75$	$\rho = 0.99$
Cossenos - $N = 10$	1.00716820	1.00660907	1.00569920	1.00398489	1.00024495
Cossenos - $N = 20$	1.00714137	1.00658380	1.00567821	1.00397330	1.00024490
Cossenos - $N = 30$	1.00713771	1.00659021	1.00567510	1.00397152	1.00024490
Cossenos - $N = 40$	1.00713667	1.00657916	1.00567418	1.00397010	1.00024489

Tabela 2.11: Valores críticos de  $\omega$  obtidos com expansão em cossenos quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1.0$  e  $L = 20.0$ .

	$\rho = 0$	$\rho = 0.25$	$\rho = 0.50$	$\rho = .75$	$\rho = 0.99$
Cossenos - $N = 40$	1.00714	1.00658	1.00567	1.00397	1.00025
$GFD_{800}$	1.00714	1.00658	1.00567	1.00397	1.00025
Naz and Loyalka	1.00714	-	-	-	-
Atalay	1.00714	1.00658	1.00568	1.00398	1.00117

Tabela 2.12: Comparação do valores críticos de  $\omega$  obtidos com expansão em cossenos com os resultados de Atalay [1] e Naz [20] e com o método  $GFD_N$  quando  $\rho$  varia entre 0 and 0.99,  $\lambda' = 1.0$  e  $L = 20.0$ .

### 2.5.3 Vários resultados de simulações

Nós consideramos a metodologia validada e obtemos resultados numéricos para alguns casos mais gerais de  $\omega$  e  $\rho$ . Para  $\omega$  consideramos o caso isotrópico e linearmente anisotrópico. Uma das escolhas para  $\rho(\mu)$  é que ele satisfaça a equação de Fresnel (ver [19, pg.47])

$$\rho(\mu) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\tan^2(\theta_1 - \theta_2)}{\tan^2(\theta_1 + \theta_2)} + \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \right], \quad (2.80)$$

onde  $\cos \theta_1 = -\mu$  e  $\theta_2$  são dados pela lei de Snell (ver [19, pg.44])

$$\eta_1 \sin \theta_1 = \eta_2 \sin \theta_2,$$

sendo  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos de reflexão e de incidência e  $\eta_1$  e  $\eta_2$  são os índices de refração interno e externo, respectivamente.

Os valores de  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi}$  e  $\mathcal{K}^1$  são dados nas Tabelas 2.13 - 2.20. Nesses resultados consideramos  $L = 1.0m$ ,  $\lambda' = 1.0$  e  $N = 400$ , usando o método  $GFD_{400}$ . Nas Tabelas 2.13 e 2.14 as simulação são para  $\rho = 0.5$ ,  $S(y) = 0$ ,  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$  e  $\omega$  variando entre 0.1 e 1.1 em intervalos de 0.2. Nas figuras 2.15 e 2.16 trocamos a fonte para  $S(y) = e^{-y}$  e obtemos resultado para o caso linearmente anisotrópico  $0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  quando  $\beta_1 = -0.4, -0.2, 0.0, 0.2$  e  $0.4$ . Nas Tabelas 2.17 e 2.18 trocamos a fonte para  $S(y) = -y^2 + 1$  e  $\rho$  satisfazendo a condição de Fresnel (2.80) e obtemos resultados também para o caso linearmente anisotrópico  $0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  para algumas combinações de  $\eta_1$  e  $\beta_1$ . Finalmente, nas Tabelas 2.19 e 2.20, voltamos a fonte  $S(y) = e^{-y}$  e  $\rho = 0.5$ , trocamos a fronteira direita para  $B_L = 0.25$  e obtemos resultados para o caso de espalhamento de Rayleigh  $\omega = 0.1 + \beta_2 P_2(\mu) P_2(\mu')$  quando  $\beta_2 = -0.8, -0.4, 0.4$  e  $0.8$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\omega = 0.1$	0.394085	0.308092	0.295597	0.322948	0.3981832	0.599197
$\omega = 0.3$	0.455255	0.376538	0.366975	0.397257	0.474942	0.670610
$\omega = 0.5$	0.547692	0.481334	0.476855	0.510642	0.589553	0.774877
$\omega = 0.7$	0.704241	0.660817	0.665823	0.703859	0.780781	0.945278
$\omega = 0.9$	1.027922	1.035246	1.061086	1.104359	1.169499	1.285451
$\omega = 1.1$	2.091374	2.273055	2.369206	2.419063	2.425038	2.368937

Tabela 2.13: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = 0$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$  e  $L = 1.0$  para vários valores de  $\omega$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\omega = 0.1$	0.091348	0.030373	-0.023318	-0.078390	-0.142388	-0.227966
$\omega = 0.3$	0.081589	0.024937	-0.026616	-0.079646	-0.140016	-0.217202
$\omega = 0.5$	0.066771	0.016286	-0.031290	-0.080343	-0.134896	-0.201215
$\omega = 0.7$	0.041587	0.001061	-0.038569	-0.079491	-0.123798	-0.174651
$\omega = 0.9$	-0.010599	-0.031191	-0.052127	-0.073750	-0.096445	-0.120810
$\omega = 1.1$	-0.182203	-0.138273	-0.091765	-0.043811	0.004706	0.052818

Tabela 2.14: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = 0$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$  e  $L = 1.0$  para vários valores de  $\omega$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\beta_1 = -0.4$	2.171404	2.287915	2.228408	2.129973	2.039060	1.999342
$\beta_1 = -0.2$	2.172810	2.285582	2.225975	2.128928	2.039572	2.000564
$\beta_1 = 0.0$	2.174212	2.283228	2.223519	2.127872	2.040092	2.001812
$\beta_1 = 0.2$	2.175611	2.280854	2.221039	2.126806	2.040620	2.003085
$\beta_1 = 0.4$	2.177005	2.278459	2.218536	2.125729	2.041158	2.004384

Tabela 2.15: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  para vários valores de  $\beta_1$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\beta_1 = -0.4$	-0.179493	-0.043131	0.027270	0.052272	0.042998	0.004747
$\beta_1 = -0.2$	-0.179721	-0.043268	0.027390	0.052573	0.043322	0.004973
$\beta_1 = 0.0$	-0.179948	-0.043404	0.027514	0.052879	0.043653	0.005203
$\beta_1 = 0.2$	-0.180173	-0.043537	0.027644	0.053192	0.043990	0.005439
$\beta_1 = 0.4$	-0.180398	-0.043668	0.027778	0.053511	0.044333	0.005679

Tabela 2.16: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  para vários valores de  $\beta_1$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\eta_1 = 1.1$ e $\beta_1 = 0.0$	2.139750	2.162119	2.102876	2.020612	1.947920	1.916511
$\eta_1 = 1.3$ e $\beta_1 = 0.0$	2.538795	2.543428	2.435245	2.238801	2.007225	1.859391
$\eta_1 = 1.5$ e $\beta_1 = 0.0$	2.674822	2.658213	2.532869	2.323659	2.083518	1.931200
$\eta_1 = 1.1$ e $\beta_1 = 0.2$	2.283157	2.339636	2.274510	2.111902	1.904883	1.770508
$\eta_1 = 1.3$ e $\beta_1 = 0.2$	2.540122	2.539579	2.430887	2.236966	2.008923	1.862644
$\eta_1 = 1.5$ e $\beta_1 = 0.2$	2.673850	2.653722	2.528947	2.322986	2.086874	1.936458

Tabela 2.17: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho$  obedece a relação de Fresnel,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = -y^2 + 1$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  para vários índices de reflexão  $\eta_1$  e dois valores de  $\beta_1$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\eta_1 = 1.1$ e $\beta_1 = 0.0$	-0.269024	-0.122701	-0.039495	-0.002692	-0.001957	-0.031744
$\eta_1 = 1.3$ e $\beta_1 = 0.0$	-0.207152	-0.067573	0.045285	0.109681	0.100084	-0.016932
$\eta_1 = 1.5$ e $\beta_1 = 0.0$	-0.151652	-0.024587	0.077688	0.132996	0.115376	-0.009009
$\eta_1 = 1.1$ e $\beta_1 = 0.2$	-0.299995	-0.137502	-0.006496	0.072206	0.073990	-0.033573
$\eta_1 = 1.3$ e $\beta_1 = 0.2$	-0.207165	-0.067414	0.045887	0.110610	0.101018	-0.016279
$\eta_1 = 1.5$ e $\beta_1 = 0.2$	-0.151257	-0.023878	0.078846	0.134400	0.116642	-0.008209

Tabela 2.18: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho$  obedece a relação de Fresnel,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = -y^2 + 1$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 1.0$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.5 + \beta_1 \mu \mu'$  para vários índices de reflexão  $\eta_1$  e dois valores de  $\beta_1$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\beta_2 = -0.8$	1.420313	1.4187334	1.316498	1.196469	1.082103	0.980052
$\beta_2 = -0.4$	1.422188	1.420928	1.317645	1.196410	1.081049	0.978640
$\beta_2 = 0.4$	1.426277	1.425790	1.320271	1.196412	1.078875	0.975655
$\beta_2 = 0.8$	1.428517	1.428410	1.321786	1.196498	1.077769	0.974080

Tabela 2.19: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\frac{\mathcal{I}}{2\pi} = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 0.25$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.1 + \beta_2 P_2(\mu) P_2(\mu')$  para vários valores de  $\beta_2$ .

$y$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\beta_2 = -0.8$	-0.051574	0.052266	0.101442	0.117132	0.110456	0.087691
$\beta_2 = -0.4$	-0.052534	0.050794	0.100112	0.116247	0.110036	0.087532
$\beta_2 = 0.4$	-0.054730	0.047398	0.096981	0.114078	0.108919	0.087067
$\beta_2 = 0.8$	-0.055999	0.045420	0.095117	0.112738	0.108177	0.086735

Tabela 2.20: Resultados Numéricos pelo método  $GFD_{400}$  para  $\mathcal{K}^1 = \int_{-1}^1 \mu I(y, \mu) d\mu$  quando  $\rho = 0.5$ ,  $\lambda' = 1.0$ ,  $S(y) = e^{-y}$ , as condições de fronteira são  $B_0 = 0.5$ ,  $B_L = 0.25$ ,  $L = 1.0$  e  $\omega = 0.1 + \beta_2 P_2(\mu) P_2(\mu')$  para vários valores de  $\beta_2$ .

## 2.6 Conclusão

Nós estabelecemos neste capítulo a existência de soluções clássicas para o problema de transporte unidimensional. Observe que a análise é válida mesmo quando  $\rho(\mu)$  é idêntico a 1, desde que a condição (2.3) seja satisfeita. Isto é uma relevante característica em problemas de resfriamento de vidro, pois o parâmetro  $\rho$  assume o valor 1 quando o fenômeno é totalmente reflexivo (ver [3]). Da análise de existência de soluções para este problema, nós introduzimos uma nova metodologia para resolver numericamente o transporte unidimensional usando o vetor de Green. Esta análise permite-nos aproximar a solução baseada em matrizes fixas  $W$  and  $V$  para cada conjunto de parâmetros.

O método  $GFD_N$  apresenta algumas vantagens. Primeiramente, visto que as matrizes  $W$  and  $V$  agem como vetor de Green para a equação do transporte, podemos resolvê-la muitas vezes apenas por multiplicação matricial. Isso é muito importante quando a equação do transporte está acoplada com um problema evolutivo, de tal forma que deve ser resolvida a cada passo de tempo (ver discussão no capítulo 3). Segundo, visto que as matrizes podem ser calculadas apenas uma vez (para cada conjunto de parâmetros), um método preciso de quadratura pode ser aplicado para obter os coeficientes das matrizes  $W$  e  $V$  sem preocupação com a performance do algoritmo. Outra vantagem é que o condicionamento de  $(1 - Lg)^{-1}$ , é limitado por  $\frac{1}{1 - \|Lg\|_{C^0}}$ . Este valor é limitado mesmo quando a condição (2.3) não é satisfeita, desde que  $\rho(\mu) \neq 1$  (veja observação 2.2). Observe que o método  $LTS_N$  trabalhado por Vargas [31] não tem a mesma propriedade, pois dois a valores tendem para  $\infty$  quando  $\omega \rightarrow 1$ . Ademais, o método é estável mesmo para  $\omega \geq 1$ . Isto pode ser observado na Tabela (2.13), onde simulamos para  $\omega = 1.1$ .

Finalmente, afirmamos que o método  $GFD_N$  é computacionalmente robusto e gera resultados precisos para este tipo de problema, que tem uma dependência contínua da variável angular. Esta afirmação é garantida pela análise e resultados dados neste capítulo.

### 3 TEORIA DE EXISTÊNCIA E SIMULAÇÕES PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL ACOPLADO

Nesse capítulo, desenvolvemos a teoria de existência e simulações numéricas para o problema unidimensional acoplado (1.11), que teve uma versão resumida aceita para publicação num trabalho conjunto com F. Azevedo, M. Thompson e M. T. Vilhena [3].

#### 3.1 Teoria de Existência

Para estabelecer a existência de soluções, primeiro resolvemos a equação do transporte, supondo que  $T$  e  $T_b$  são conhecidos. Esse desacoplamento é útil, tendo em vista que pretendemos construir sequências convergindo para a solução, onde em cada iteração,  $T$  e  $T_b$  de fato serão conhecidos.

**Lema 3.1.** *Se  $T$  e  $T_b$  são conhecidos no problema (1.11e)-(1.11g) e  $\sigma' < \lambda'$ , então a densidade total de radiação  $\mathcal{I}$  admite a representação*

$$\frac{1}{4\pi}\mathcal{I} = S_g B(\nu, T) + S_b B(\nu, T_b),$$

onde  $S_g$  e  $S_b$  são operadores em  $C^\alpha$ .

*Demonstração.* A demonstração é direta dos lemas 2.1 e 2.2. Como nesse modelo  $\sigma'$  é constante,  $S_g$  e  $S_b$  são definidos da seguinte forma (ver observação 2.1):

$$S_g := (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa K_g^{00}, \quad \text{e} \quad S_b := (1 - \sigma' K_b^{00})^{-1} K_b^0,$$

onde  $K_g^{00}$  e  $K_b^0$  são dados pelas expressões (2.49) e (2.50). □

Ainda vamos demonstrar um lema sobre positividade de soluções para o transporte, que será útil quando tratarmos a monotonicidade da uma sequência de funções convergindo para a solução:

**Lema 3.2.** *Se  $I$  satisfaz o problema*

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} &\geq 0 \\ I(0, \mu) - \rho_0 I(0, -\mu) &\geq 0, \quad \mu > 0 \\ I(L, \mu) - \rho_L I(L, -\mu) &\geq 0, \quad \mu < 0, \end{aligned}$$

então  $I \geq 0$ .

*Demonstração.* Primeiro suponha  $\sigma' = 0$  e

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= q(y) \geq 0 \\ I(0, \mu) - \rho_0 I(0, -\mu) &= B_0 \geq 0, \quad \mu > 0 \\ I(L, \mu) - \rho_L I(L, -\mu) &= B_L \geq 0, \quad \mu < 0,\end{aligned}$$

então

$$\frac{\mathcal{I}}{4\pi} = K_g^{00} q + K_b^0 B,$$

onde  $B = (B_0, B_L)$ . Observe que  $K_g^{00}$  e  $K_b^0$  são operadores integrais com núcleos positivos, ou seja, preservam a positividade das funções  $q$  e  $B$ . Logo  $\mathcal{I} \geq 0$ . Se  $\sigma' \neq 0$ , então

$$\frac{\mathcal{I}}{4\pi} = S_g q + S_b B = (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} K_g^{00} q + (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} K_b^0 B.$$

Desde que  $(1 - \sigma' K_g^{00})$  possa ser invertido, vale

$$(1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\sigma' K_g^{00})^i.$$

Como a soma de operadores que preservam a positividade também tem a mesma propriedade,  $(1 - \sigma' K_g^{00})^{-1}$  preserva a positividade e, portanto,  $S_g$  e  $S_b$  levam funções positivas em funções positivas. Ou seja, novamente temos  $\mathcal{I} \geq 0$ . Agora,  $I = K_g^{00}(\mathcal{I} + q) + K_b^0 B$  e  $\mathcal{I} + q \geq 0$ , o que implica em  $I \geq 0$ .  $\square$

Agora, queremos mostrar que existe uma solução  $(T, I)$  do problema (1.11). Para esse fim, usaremos a técnica de sub e supersolução, como no livro de Pao [21]. Por isso, é necessário a seguinte definição:

**Definição 3.1.** *Os pares de funções  $(\tilde{T}, \tilde{I})$  e  $(\hat{T}, \hat{I})$  são chamadas supersoluções e subsoluções do problema (1.11), respectivamente, se  $\tilde{T} \geq \hat{T}$ ,  $\tilde{I} \geq \hat{I}$ ,  $\tilde{T}$  e  $\tilde{I}$  satisfazem*

$$c_v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \geq \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( \tilde{T} - 4\pi B(\nu, \tilde{T}) \right) d\nu, \quad y \in (0, L), t > 0 \quad (3.1a)$$

$$-k_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + h(\tilde{T} - T_b) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \tilde{T}) - B(\nu, T_b) \right) d\nu \geq 0, \quad y = 0, t > 0 \quad (3.1b)$$

$$k_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + h(\tilde{T} - T_b) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \tilde{T}) - B(\nu, T_b) \right) d\nu \geq 0, \quad y = L, t > 0 \quad (3.1c)$$

$$\tilde{T}(y, 0) \geq T_0(y), \quad y \in (0, L), t = 0 \quad (3.1d)$$

$$\mu \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} + \lambda' \tilde{I} \geq \frac{\sigma'}{4\pi} \tilde{I} + \kappa' B(\nu, \tilde{T}), \quad y \in (0, L), t > 0 \quad (3.1e)$$

$$\tilde{I}(\mu) - \rho_0 \tilde{I}(-\mu) \geq (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), \quad y = 0, t > 0, \mu > 0, \quad (3.1f)$$

$$\tilde{I}(\mu) - \rho_L \tilde{I}(-\mu) \geq (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), \quad y = L, t > 0, \mu < 0, \quad (3.1g)$$

e  $\hat{T}$  e  $\hat{I}$  satisfazem as desigualdades inversas em (3.1).

**Proposição 3.1.** *O par de funções*

$$\tilde{T} = \max \left\{ \sup_{y \in D} \{T_0(y)\}, \sup_{y \in \partial D} \{T_b(y)\} \right\} \quad e \quad \tilde{I} = B(\nu, \tilde{T})$$

é uma supersolução do problema (1.11), ou seja, satisfaz (3.1).

*Demonstração.* Observe que

$$\tilde{\mathcal{I}} = 2\pi \int_{-1}^1 \tilde{I} dy = 2\pi \int_{-1}^1 B(\nu, \tilde{T}) dy = 4\pi B(\nu, \tilde{T}).$$

Disso e do fato que  $\tilde{T}$  é constante, temos

$$c_v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} = \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( \hat{\mathcal{I}} - 4\pi B(\nu, \tilde{T}) \right) d\nu,$$

e portanto (3.1a) é satisfeita. Como  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} = 0$ ,  $\tilde{T} \geq T_b$  e  $B(\nu, \tilde{T}) \geq B(\nu, T_b)$  (veja lema A.1, apêndice A), então:

$$h\tilde{T} + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} B(\nu, \tilde{T}) d\nu \geq hT_b + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} B(\nu, T_b) d\nu,$$

ou seja, as expressões (3.1b) e (3.1c) são válidas. Naturalmente, a expressão (3.1d) segue da definição de  $\tilde{T}$ ,

$$\tilde{T}(y, 0) \geq T_0(y).$$

Agora,

$$\mu \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} + \lambda \tilde{I} = \lambda' B(\nu, \tilde{T})$$

e

$$\frac{\sigma'}{4\pi} \hat{\mathcal{I}} + \kappa' B(\nu, \tilde{T}) = (\sigma' + \kappa') B(\nu, \tilde{T}).$$

levam a

$$\mu \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} + \lambda \tilde{I} = \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, \tilde{T}),$$

provando a validade de (3.1e). As inequações (3.1f) e (3.1g) também são satisfeitas, pois  $\tilde{I}(\mu) = \tilde{I}(-\mu) = B(\nu, \tilde{T})$ ,  $B(\nu, \tilde{T}) \geq B(\nu, T_b(0))$  e  $B(\nu, \tilde{T}) \geq B(\nu, T_b(L))$ . Segue que o par  $(\tilde{T}, \tilde{I})$  é uma super solução do problema (1.11).  $\square$

**Proposição 3.2.** *O par de funções*

$$\hat{T} = \min \left\{ \inf_{y \in D} \{T_0(y)\}, \inf_{y \in \partial D} \{T_b(y)\} \right\} \quad e \quad \hat{I} = B(\nu, \hat{T})$$

é uma subsolução do problema (1.11).

*Demonstração.* Análoga a demonstração da proposição 3.1.  $\square$

Defina a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
c_v \frac{\partial T^k}{\partial t} &- \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T^k}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T^k}{\partial y} + c T^k \\
&= c T^{k-1} + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (T^{k-1} - 4\pi B(\nu, T^{k-1})) d\nu, \quad y \in (0, L), t > 0 \\
-k_0 \frac{\partial T^k}{\partial y} &+ h(T^k - T_b) + d T^k \\
&= d T^{k-1} + \alpha \pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, T^{k-1})) d\nu, \quad y = 0, t > 0 \\
k_0 \frac{\partial T^k}{\partial y} &+ h(T^k - T_b) + d T^k \tag{3.2} \\
&= d T^{k-1} + \alpha \pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, T^{k-1})) d\nu, \quad y = L, t > 0 \\
T^k(y, 0) &= T_0(y), \quad y \in (0, L), t = 0 \\
\mu \frac{\partial I^k}{\partial y} &+ \lambda' I^k = \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I}^k + \kappa' B(\nu, T^{k-1}), \quad y \in (0, L), t > 0 \\
I^k(\mu) &- \rho_0 I^k(-\mu) = (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), \quad y = 0, t > 0, \mu > 0, \\
I^k(\mu) &- \rho_L I^k(-\mu) = (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), \quad y = L, t > 0, \mu < 0,
\end{aligned}$$

onde

$$c = \max_{\hat{T} \leq T \leq \tilde{T}} \left\{ \frac{\partial f(T)}{\partial T} \right\}, \quad f(T) = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' B(\nu, T) d\nu \tag{3.3}$$

e

$$d = \max_{\hat{T} \leq T \leq \tilde{T}} \left\{ \frac{\partial g(T)}{\partial T} \right\}, \quad g(T) = \alpha \pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} B(\nu, T) d\nu \tag{3.4}$$

Observe que a existência das constantes  $c$  e  $d$  são garantidas pelos lemas A.2 e A.3 do Apêndice A, respectivamente.

Com a relação de recorrência (3.2) definimos duas seqüências: uma começando em  $(\hat{T}, \hat{I})$  que denotaremos por  $(\underline{T}^k, \underline{I}^k)$  e a outra começando em  $(\tilde{T}, \tilde{I})$  que denotaremos por  $(\overline{T}^k, \overline{I}^k)$ . Como  $(T^0, I^0)$  é um par de funções  $C^\alpha([0, L])$  em cada seqüência, a segunda parte do problema é resolvida pelo Lema 3.1, ou seja,

$$\frac{1}{4\pi} \mathcal{I}^1 = S_g B(\nu, T^0) + S_b B(\nu, T_b),$$

sendo  $\mathcal{I}^1(y)$  uma função em  $C^\alpha$ . Da teoria linear para operadores parabólicos garantimos a existência de  $T^1 \in C^\alpha$ . Assim, sucessivamente garantimos a existência de solução  $(T^2, I^2), \dots, (T^k, I^k)$  em  $C^\alpha$  para cada uma das seqüências.

**Lema 3.3.** *As seqüências  $(\underline{T}^k, \underline{I}^k)$  e  $(\overline{T}^k, \overline{I}^k)$  governadas por (3.2) possuem a propriedade de monotonicidade:*

$$(\hat{T}, \hat{I}) \leq (\underline{T}^k, \underline{I}^k) \leq (\underline{T}^{k+1}, \underline{I}^{k+1}) \leq (\overline{T}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \leq (\overline{T}^k, \overline{I}^k) \leq (\tilde{T}, \tilde{I}). \tag{3.5}$$



*Demonstração.* A demonstração segue por indução. Primeiro tomamos  $(T, I) = (\underline{T}^1 - \underline{T}^0, \underline{I}^1 - \underline{I}^0) = (\underline{T}^1 - \widehat{T}, \underline{I}^1 - \widehat{I})$ , então como  $(\widehat{T}, \widehat{I})$  é uma subsolução do problema, cada uma das desigualdades abaixo são válidas:

$$\begin{aligned}
c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T}{\partial y} + cT &= c(\underline{T}^0 - \widehat{T}) + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\underline{T}^0 - 4\pi B(\nu, \underline{T}^0)) d\nu - \mathcal{L}_t \widehat{T} \\
&= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\widehat{T} - 4\pi B(\nu, \widehat{T})) d\nu - \mathcal{L}_t \widehat{T} \\
&\geq 0 \\
-k_0 \frac{\partial T}{\partial y} + hT + dT &= d\widehat{T} + hT_b + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \widehat{T})) d\nu \\
&\quad - \left( k_0 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \eta} + h\widehat{T} + d\widehat{T} \right), \quad y = 0 \\
&\geq 0 \\
k_0 \frac{\partial T}{\partial y} + hT + dT &= d\widehat{T} + hT_b + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \widehat{T})) d\nu \\
&\quad - \left( k_0 \frac{\partial \widehat{T}}{\partial \eta} + h\widehat{T} + d\widehat{T} \right), \quad y = L \\
&\geq 0 \\
T(y, 0) &= T_0(y) - \widehat{T}(y, 0) \\
&\geq 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} &= \kappa' B(\nu, \widehat{T}) - \left( \mu \frac{\partial \widehat{I}}{\partial y} + \lambda' \widehat{I} - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{\mathcal{I}} \right), \\
&\geq 0 \\
I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)) - (\widehat{I}(\mu) - \rho \widehat{I}(-\mu)), \quad y = 0 \\
&\geq 0 \\
I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)) - (\widehat{I}(\mu) - \rho \widehat{I}(-\mu)), \quad y = L \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

onde o operador  $\mathcal{L}_t$  é definido na equação (1.11). Pelo lema 3.2, temos que  $I \geq 0$ , ou seja,  $\widehat{I} \leq \underline{I}^1$  e pelo lema da positividade do livro do Pao [21, página 54],  $T \geq 0$ , ou seja  $\widehat{T} \leq \underline{T}^1$ . Se definirmos  $(T, I) = (\overline{T}^0 - \overline{T}^1, \overline{I}^0 - \overline{I}^1) = (\overline{T}^1 - \widetilde{T}, \overline{I}^1 - \widetilde{I})$  e usarmos um argumento análogo, sabendo que  $(\widetilde{T}, \widetilde{I})$  é uma supersolução, obtemos que  $(T, I) \geq (0, 0)$ , ou seja  $(\overline{T}^1, \overline{I}^1) \leq (\widetilde{T}, \widetilde{I})$ . Agora tomamos  $(T^1, I^1) = (\overline{T}^1 - \underline{T}^1, \overline{I}^1 - \underline{I}^1)$  as desigualdades também são todas válidas, pois  $(\widetilde{T}, \widetilde{I}) \geq (\widehat{T}, \widehat{I})$ .

$$\begin{aligned}
c_v \frac{\partial T^1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T^1}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T^1}{\partial y} + cT^1 &= c(\bar{T}^0 - \underline{T}^0) \\
&+ \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( \bar{T}^0 - \underline{T}^0 - [4\pi B(\nu, \bar{T}^0) - 4\pi B(\nu, \underline{T}^0)] \right) d\nu \\
&= c(\tilde{T} - \hat{T}) \\
&+ \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( \tilde{T} - \hat{T} - [4\pi B(\nu, \tilde{T}) - 4\pi B(\nu, \hat{T})] \right) d\nu \\
&\geq c(\tilde{T} - \hat{T}) - 4\pi\kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( [B(\nu, \tilde{T}) - B(\nu, \hat{T})] \right) d\nu \\
&\geq 0 \\
-k_0 \frac{\partial T^1}{\partial y} + hT^1 + dT^1 &= d(\bar{T}^0 - \underline{T}^0) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \bar{T}^0) - B(\nu, \underline{T}^0) \right) d\nu, \quad y = 0, \\
&\geq 0 \\
k_0 \frac{\partial T^1}{\partial y} + hT^1 + dT^1 &= d(\bar{T}^0 - \underline{T}^0) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \bar{T}^0) - B(\nu, \underline{T}^0) \right) d\nu, \quad y = L, \\
&\geq 0 \\
T(y, 0) &= 0 \\
\mu \frac{\partial I^1}{\partial y} + \lambda' I^1 - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I}^1 &= \kappa' B(\nu, \bar{T}^0) - \kappa' B(\nu, \underline{T}^0) \\
&= \kappa' B(\nu, \tilde{T}) - \kappa' B(\nu, \hat{T}) \\
&\geq 0, \\
I^1(\mu) - \rho_0 I^1(-\mu) &= 0, \quad y = 0, \\
I^1(\mu) - \rho_L I^1(-\mu) &= 0, \quad y = L.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 3.2  $I^1 \geq 0$ , ou seja,  $\underline{I}^1 \leq \bar{I}^1$ . Novamente, pelo lema da positividade do livro do Pao [21, página 54],  $T^1 \geq 0$ , ou seja  $\underline{T}^1 \leq \bar{T}^1$ . Até agora provamos que  $\hat{T} \leq \underline{T}^1 \leq \bar{T}^1 \leq \tilde{T}$ . Observe que a existência de  $c$  e  $d$  da forma como são definidos em (3.3) e (3.4), respectivamente, são fundamentais para validade das desigualdades. Usando um argumento de indução, consideremos que

$$(\underline{T}^{k-1}, \underline{I}^{k-1}) \leq (\underline{T}^k, \underline{I}^k) \leq (\bar{T}^k, \bar{I}^k) \leq (\bar{T}^{k-1}, \bar{I}^{k-1}).$$

Seja  $(T, I) = (\underline{T}^{k+1} - \underline{T}^k, \underline{I}^{k+1} - \underline{I}^k)$ , então as desigualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial T}{\partial y} + cT &= c(\underline{T}^k - \underline{T}^{k-1}) \\
&+ \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( \underline{T}^k - \underline{T}^{k-1} - 4\pi[B(\nu, \underline{T}^k) - B(\nu, \underline{T}^{k-1})] \right) d\nu \\
&\geq c(\underline{T}^k - \underline{T}^{k-1}) \\
&- 4\pi\kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left( [B(\nu, \underline{T}^k) - B(\nu, \underline{T}^{k-1})] \right) d\nu \\
&\geq 0 \\
-k_0 \frac{\partial T}{\partial y} + hT + dT &= d \left( \overline{T}^{k-1} - \underline{T}^{k-1} \right) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{T}^{k-1}) - B(\nu, \underline{T}^{k-1}) \right) d\nu, \quad y = 0 \\
k_0 \frac{\partial T}{\partial y} + hT + dT &= d \left( \overline{T}^{k-1} - \underline{T}^{k-1} \right) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{T}^{k-1}) - B(\nu, \underline{T}^{k-1}) \right) d\nu, \quad y = L \\
T(y, 0) &= 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} &= \kappa' B(\nu, \underline{T}^k) - \kappa' B(\nu, \underline{T}^{k-1}) \\
&\geq 0, \\
I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= 0, \quad y = 0, \\
I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= 0, \quad y = L.
\end{aligned}$$

Novamente, pelo lema 3.2,  $I \geq 0$ , ou seja,  $\underline{I}^k \leq \underline{I}^{k+1}$  e pelo lema da positividade do livro do Pao [21, página 54],  $T \geq 0$ , ou seja  $\underline{T}^k \leq \underline{T}^{k+1}$ . Similarmemte, tomando  $(T, I) = (\overline{T}^{k+1} - \overline{T}^k, \overline{I}^{k+1} - \overline{I}^k)$  tem-se  $(T, I) \geq (0, 0)$ , ou seja  $(\overline{T}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \leq (\overline{T}^k, \overline{I}^k)$ . Também se prova de modo análogo que  $(T^{k+1}, I^{k+1}) = (\overline{T}^{k+1} - \underline{T}^{k+1}, \overline{I}^{k+1} - \underline{I}^{k+1}) \geq 0$ , ou seja,  $(\overline{T}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \geq (\underline{T}^{k+1}, \underline{I}^{k+1})$  e temos a validade da desigualdade (3.5).  $\square$

**Teorema 3.1.** *As sequências  $(\overline{T}^k, \overline{I}^k)$  e  $(\underline{T}^k, \underline{I}^k)$  convergem monotonicamente para as soluções do problema (1.11)  $(\overline{T}, \overline{I})$  e  $(\underline{T}, \underline{I})$ , respectivamente, e  $(\underline{T}, \underline{I}) \leq (\overline{T}, \overline{I})$ . Além disso, se existir uma outra solução  $(T^*, I^*)$ ,  $(\widehat{T}, \widehat{I}) \leq (T^*, I^*) \leq (\widetilde{T}, \widetilde{I})$ , então  $(\underline{T}, \underline{I}) \leq (T^*, I^*) \leq (\overline{T}, \overline{I})$ .*

*Demonstração.* De fato, como as sequências são limitadas e monótonas, existe convergência. Basta provar que  $(\underline{T}, \underline{I})$  e  $(\overline{T}, \overline{I})$  são soluções do problema (1.11). O sistema tem representação integral, tanto para  $T^k$ , dada no livro de Pao [21, capítulo 2], quando para  $I^k$ , dada na expressão (2.24). Portanto, pelo teorema da convergência monótona, as duas sequências convergem para as solução do problema (1.11).

Agora suponha que  $(T^*, I^*)$  seja outra solução tal que  $(\widehat{T}, \widehat{I}) \leq (T^*, I^*) \leq (\widetilde{T}, \widetilde{I})$ . Como  $(T^*, I^*)$  é uma supersolução do problema, então  $(\underline{T}^k, \underline{I}^k) \leq (T^*, I^*)$ ,  $\forall k \in \mathcal{N}$  e portanto

$(\underline{T}, \underline{I}) \leq (T^*, I^*)$ . Da mesma forma  $(T^*, I^*)$  é uma subsolução e assim  $(\overline{T}^k, \overline{I}^k) \geq (T^*, I^*)$ ,  $\forall k \in \mathcal{N}$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

### 3.1.1 Unicidade

Para completar a teoria de existência, basta mostrar que a solução é única na faixa  $(\widehat{T}, \widehat{I}) \leq (T, I) \leq (\widetilde{T}, \widetilde{I})$ . Para isso é necessário introduzir uma estimativa em  $L_2$ , como segue:

**Lema 3.4.** *A seguinte estimativa é válida*

$$\left\| (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right\|_2 \leq 2 \quad (3.6)$$

*Demonstração.* Observe que  $L_g$  pode ser escrito da seguinte forma integral, como em (2.57):

$$K_g^{00} q = \int_0^L K^{00}(s, y) q(s) ds, \quad (3.7)$$

onde  $K^{00}(s, y)$  é dado pela expressão (2.49). Segue que

$$\begin{aligned} \|K_g^{00} q\|_2^2 &\leq \int_0^L \left( \int_0^L |K^{00}(s, y)| |q(s)| ds \right)^2 dy \\ &= \int_0^L \left( \int_0^L |K^{00}(s, y)|^{1/2} |K^{00}(s, y)|^{1/2} |q(s)| ds \right)^2 dy \\ &\leq \int_0^L \left( \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right) \left( \int_0^L |K^{00}(s, y)| |q(s)|^2 ds \right) dy \\ &\leq \int_0^L \left( \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right) \left( \int_0^L |K^{00}(s, y)| |q(s)|^2 ds \right) dy \\ &= \left( \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right) \int_0^L \int_0^L |K^{00}(s, y)| |q(s)|^2 ds dy \\ &= \left( \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right) \int_0^L |q(s)|^2 \int_0^L |K^{00}(s, y)| dy ds \\ &\leq \left( \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right)^2 \int_0^L |q(s)|^2 ds \\ &= \left( \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \right)^2 \|q(s)\|_2^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|K_g^{00}\|_2 &\leq \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L |K^{00}(s, y)| ds \\
&= \sup_{y \in (0, L)} \int_0^L K^{00}(s, y) ds \\
&= \sup_{y \in (0, L)} K_g^{00} 1 \\
&\leq \|K_g^{00}\|_{C^0} \leq 1,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é dada na equação (2.52). Logo, a inversa  $(1 - \sigma' K_g^{00})^{-1}$  existe em  $L_2$  e

$$\|(1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00}\|_2 \leq \left(1 - \frac{\sigma'}{\lambda'}\right)^{-1} \frac{\kappa'}{\lambda'} = 1.$$

Portanto a estimativa (3.6) é válida.  $\square$

**Teorema 3.2.** *As soluções  $(\bar{T}, \bar{I})$  e  $(\underline{T}, \underline{I})$  são iguais e portanto a solução é única na faixa  $(\hat{T}, \hat{I}) \leq (T, I) \leq (\tilde{T}, \tilde{I})$ .*

*Demonstração.* Seja  $(V, W) = (\underline{T} - \bar{T}, \underline{I} - \bar{I})$ . Então

$$\begin{aligned}
c_v \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial V}{\partial y} &= \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} (\mathcal{W} - 4\pi B(\nu, \underline{T}) + 4\pi B(\nu, \bar{T})) d\nu, & y \in (0, L), t > 0 \\
-k_0 \frac{\partial V}{\partial y} + hV + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})] d\nu &= 0, & y = 0, t > 0 \\
k_0 \frac{\partial V}{\partial y} + hV + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})] d\nu &= 0, & y = L, t > 0 \\
V(y, 0) &= 0, & y \in (0, L), t = 0 \\
\mu \frac{\partial W}{\partial y} + \lambda' W &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{W} + \kappa' B(\nu, \underline{T}) - \kappa' B(\nu, \bar{T}), & y \in (0, L), t > 0 \\
W(\mu) - \rho_0 W(-\mu) &= 0, & y = 0, t > 0, \mu > 0, \\
W(\mu) - \rho_L W(-\mu) &= 0, & y = L, t > 0, \mu < 0,
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \mathcal{W} &= S_g(B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})) \\
&= (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} (B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T}))
\end{aligned}$$

que leva a

$$c_v \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) + c_v v \frac{\partial V}{\partial y} = 4\pi \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left[ (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right] (B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})) d\nu \quad (3.8)$$

Tomando o produto interno em  $L_2$  com  $V$  em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^L c_v \frac{\partial V}{\partial t} V dy - \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) V dy + \int_0^L c_v v \frac{\partial V}{\partial y} V dy \\
= \int_0^L 4\pi \kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left[ (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right] (B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})) V d\nu dy
\end{aligned}$$

que leva a

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|V\|_2^2 + \int_0^L k_0 \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 dy - k_0 V(L) \frac{\partial V}{\partial y}(L) + k_0 V(0) \frac{\partial V}{\partial y}(0) + c_v v V^2 \Big|_0^L - c_v \int_0^L \frac{\partial v}{\partial y} V^2 dy \\ = \int_0^L 4\pi\kappa' \int_{\nu_0}^{\infty} \left[ (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right] (B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})) V d\nu dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

Na fronteira vale:

$$\frac{\partial V}{\partial y}(L) = -hV(L) - \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{T}(L)) - B(\nu, \bar{T}(L))] d\nu \geq 0$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial y}(0) = hV(0) + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{T}(0)) - B(\nu, \bar{T}(0))] d\nu \leq 0$$

Logo

$$-V(L) \frac{\partial V}{\partial y}(L) + V(0) \frac{\partial V}{\partial y}(0) \geq 0. \quad (3.10)$$

O fluxo de massa pela fronteira é nulo, isto é,  $u(0) = u(L) = 0$ , que implica em  $uV^2 \Big|_0^L = 0$ . Usando (3.10) em (3.9) e usando que  $\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \leq \|u\|_{C^1}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{c_v}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|V\|_2^2 &\leq c_v \|v\|_{C^1} \|V\|_2^2 + \int_0^L \frac{4\pi\kappa'}{2} \int_{\nu_0}^{\infty} \left[ (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right] (B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T})) V d\nu dy \\ &\leq c_v \|v\|_{C^1} \|V\|_2^2 + \left\| (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right\|_2 \int_0^L 4\pi\kappa' |V| \left| \int_{\nu_0}^{\infty} B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T}) d\nu \right| dy \\ &\leq c_v \|v\|_{C^1} \|V\|_2^2 + 2 \cdot 4\pi\kappa' \int_0^L |V| \left| \int_{\nu_0}^{\infty} B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T}) d\nu \right| dy, \end{aligned}$$

onde usamos o Lema (3.4):

$$\left\| (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa' K_g^{00} - 1 \right\|_2 \leq 2.$$

Agora, pelo Lema A.2,

$$\left| \int_{\nu_0}^{\infty} B(\nu, \underline{T}) - B(\nu, \bar{T}) d\nu \right| \leq L|\underline{T} - \bar{T}|,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|V\|_2^2 &\leq \|v\|_{C^1} \|V\|^2 + \frac{8\pi\kappa'}{c_v} \int_0^L |V| L |\underline{T} - \bar{T}| dy \\ &= \|v\|_{C^1} \|V\|^2 + \frac{8L\pi\kappa'}{c_v} \int_0^L |V| |V| dy \\ &= \frac{C_1}{2} \|V\|_2^2, \end{aligned}$$

onde  $C_1 = \frac{16L\pi\kappa'}{c_v} + 2\|v\|_{C^1}$ . Pelo lema de Grönwall,

$$\|V\|_2^2 \leq \|V\|_2^2(0) e^{C_1 t}.$$

Como

$$\|V\|_2^2(0) = \int_0^L |V(y, 0)|^2 dy = 0,$$

então

$$\|V\|_2^2 = 0,$$

ou seja,  $\underline{T} = \bar{T}$ . Isso simplifica o problema para  $W$ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial W}{\partial y} + \lambda' W &= 0, & y \in (0, L), t > 0 \\ W(\mu) - \rho_0 W(-\mu) &= 0, & y = 0, t > 0, \mu > 0, \\ W(\mu) - \rho_L W(-\mu) &= 0, & y = L, t > 0, \mu < 0, \end{aligned}$$

Das expressões (2.10) e (2.12) temos  $W = 0$  e portanto  $\bar{T} = \underline{T}$ .  $\square$

### 3.2 Discretização do Problema Acoplado

Para a discretização do problema (1.11) usamos o método de Crank-Nicolson para o tempo e diferenças finitas para o espaço:

$$\begin{aligned} c_v \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{h_t} &- \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}(T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) - k_{0(j-1/2)}(T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1})}{h_s^2} + \frac{c_v}{2} v_j \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{2h_s} \\ &- \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}(T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}(T_j^n - T_{j-1}^n)}{h_s^2} + \frac{c_v}{2} v_j \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2h_s} \\ &= 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (W_{\sigma'} - 1) \mathbf{B}(\nu, T^n)_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde os vetores  $\mathbf{B}(\nu, T^n)$  e  $\mathbf{B}(\nu, T_b)$  são

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\nu, T^n) &= \begin{bmatrix} B(\nu, T_1^n) & B(\nu, T_2^n) & \cdots & B(\nu, T_{N+1}^n) \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{B}(\nu, T_b) &= \begin{bmatrix} B(\nu, T_b(0)) \\ B(\nu, T_b(L)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e  $W_{\sigma'}$  e  $V_{\sigma'}$  são as matrizes que representam as discretizações de  $S_g = (1 - \sigma' K_g^{00})^{-1} \kappa K_g^{00}$  e  $S_b = (1 - \sigma' K_b^{00})^{-1} K_b^0$ , respectivamente. As equações (3.11) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left( -h_t \frac{k_{0(j+1/2)}}{2h_s^2} + h_t \frac{c_v v_j}{4h_s} \right) T_{j+1}^{n+1} &+ \left( c_v + h_t \frac{k_{0(j+1/2)}}{2h_s^2} + h_t \frac{k_{0(j-1/2)}}{2h_s^2} \right) T_j^{n+1} \\ &+ \left( -h_t \frac{k_{0(j-1/2)}}{2h_s^2} - h_t \frac{c_v v_j}{4h_s} \right) T_{j-1}^{n+1} = c_v h_t v_j \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{4h_s} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}(T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}(T_j^n - T_{j-1}^n)}{h_s^2} + c_v T_j^n \\ &+ 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[ (W_{\sigma'} - 1) \mathbf{B}(\nu, T^n)_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j \right] d\nu, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $2 \leq j \leq N$ .

A discretização para os termos de fronteira é

$$-k_{0(1)} \frac{4T_2^{n+1} - 3T_1^{n+1} - T_3^{n+1}}{2h_s} = hT_b(0) - hT_1^{n+1} + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{n+1})] d\nu \quad (3.13)$$

$$k_{0(N+1)} \frac{3T_{N+1}^{n+1} + T_{N-1}^{n+1} - 4T_N^{n+1}}{2h_s} = hT_b(L) - hT_{N+1}^{n+1} + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{n+1})] d\nu \quad (3.14)$$

Para a parte não linear, usamos o método de Newton-Raphson e escrevemos

$$\begin{aligned} B(\nu, T_1^{n+1}) &= B(\nu, T_1^{n+1} - T_1^{lin} + T_1^{lin}) \\ &= B(\nu, T_1^{lin}) + (T_1^{n+1} - T_1^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) + O((T_1^{n+1} - T_1^{lin})^2) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} B(\nu, T_{N+1}^{n+1}) &= B(\nu, T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin} + T_{N+1}^{lin}) \\ &= B(\nu, T_{N+1}^{lin}) + (T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) + O((T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin})^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Desprezando termos de segunda ordem e substituindo (3.16) e (3.15) em (3.13) e (3.14), temos:

$$\begin{aligned} -k_{0(1)} \frac{4T_2^{n+1} - 3T_1^{n+1} - T_3^{n+1}}{2h_s} &= hT_b(0) - hT_1^{n+1} \\ &+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{lin}) - (T_1^{n+1} - T_1^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) \right] d\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{0(N+1)} \frac{3T_{N+1}^{n+1} + T_{N-1}^{n+1} - 4T_N^{n+1}}{2h_s} &= hT_b(L) - hT_{N+1}^{n+1} \\ &+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{lin}) - (T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) \right] d\nu \end{aligned}$$

Essas expressões equivalem a

$$\begin{aligned} T_3^{n+1} \left( \frac{k_{0(1)}}{2h_s} \right) + T_2^{n+1} \left( -\frac{2k_{0(1)}}{h_s} \right) + T_1^{n+1} \left( \frac{3k_{0(1)}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) d\nu \right) &= hT_b(0) \\ &+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{lin}) + T_1^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) \right] d\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{N-1}^{n+1} \left( \frac{k_{0(N+1)}}{2h_s} \right) + T_N^{n+1} \left( -\frac{2k_{0(N+1)}}{h_s} \right) + T_{N+1}^{n+1} \left( \frac{3k_{0(N+1)}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) d\nu \right) &= hT_b(L) \\ &+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{lin}) + T_{N+1}^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) \right] d\nu \end{aligned}$$

As últimas equações juntamente com (3.12) nos leva a um sistema  $AT^{n+1} = D^n$ , onde

$$T^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1^{n+1} & T_2^{n+1} & \dots & T_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix}^T,$$



$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N & c_N \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{N+1} & b_{N+1} \end{bmatrix},$$

com

$$a_j = -h_t \frac{k_{0(j)}}{2h_s^2} - h_t \frac{c_v v_j}{4h_s}, \quad 2 \leq j \leq N$$

$$a_0 = \frac{k_{0(N+1)}}{2h_s}, \quad a_{N+1} = -\frac{2k_{0(N+1)}}{h_s}$$

$$b_1 = \frac{3k_{0(1)}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) d\nu$$

$$b_j = c_v + h_t \frac{k_{0(j+1/2)}}{2h_s^2} + h_t \frac{k_{0(j-1/2)}}{2h_s^2}, \quad 2 \leq j \leq N$$

$$b_{N+1} = \frac{3k_{0(N+1)}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) d\nu$$

$$c_0 = \frac{k_{0(1)}}{2h_s}, \quad c_1 = -\frac{2k_{0(1)}}{h_s}$$

$$c_j = -h_t \frac{k_{0(j+1)}}{2h_s^2} + h_t \frac{c_v v_j}{4h_s}, \quad 2 \leq j \leq N$$

e

$$D^n = \begin{bmatrix} d_1^n & d_2^n & \cdots & d_{N+1}^n \end{bmatrix}^T,$$

e

$$d_1^n = hT_b(0) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{lin}) + T_1^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) \right] d\nu$$

$$d_j^n = c_v T_j^n + \frac{h_t k_{0(j+1/2)}(T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}(T_j^n - T_{j-1}^n)}{2h^2} - c_v v_j h_t \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2h_s}$$

$$+ 4\pi h_t \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa'((W_{\sigma'} - 1)\mathbf{B}(\nu, T^n))_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu, \quad 2 \leq j \leq N,$$

$$d_{N+1}^n = hT_b(L) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{lin}) + T_{N+1}^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) \right] d\nu$$

Aqui  $T_1^{lin}$  e  $T_{N+1}^{lin}$  começam em  $T_1^n$  e  $T_{N+1}^n$ , respectivamente, e o sistema é resolvido pelo algoritmo de Thomas (TDMA) até que

$$\frac{|T_1^{n+1} - T_1^{lin}|}{T_1^{n+1}} < \epsilon \quad \text{e} \quad \frac{|T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin}|}{T_{N+1}^{n+1}} < \epsilon$$

para alguma tolerância  $0 < \epsilon \ll 1$ . Observamos que o sistema  $AT^{n+1} = D^n$  pode ser transformado num sistema tridiagonal para aplicação do algoritmo TDMA. Nos resultados desse trabalho usamos  $\epsilon = 10^{-5}$ .

### 3.3 Simulações Numéricas para o Problema Acoplado

Nesta seção nós apresentamos vários resultados numéricos. Alguns dos parâmetros usados aqui, obtidos do trabalho de Larsen [17], são  $\eta_{vidro} = \eta_1 = 1,46$ ,  $k_0 = 1,1W/mK$ ,  $h = 1,0W/m^2K$  e  $c_v = c_m\rho_m$ , com  $c_m = 900J/KgK$ ,  $\rho_m = 2200Kg/m^3$  e

$$\alpha = 2\eta_1^2 \int_0^1 (1 - \rho(\mu))\mu d\mu. \quad (3.17)$$

Outros parâmetros são simulados com vários valores e por isso são informados durante o texto.

#### 3.3.1 Cálculo do Fluxo de Energia para Validação do Método Numérico

Conforme podemos observar, integrando a equação do transporte temos:

$$\int_{-1}^1 \mu \frac{\partial I}{\partial y} d\mu + \int_{-1}^1 \lambda' I d\mu = \int_{-1}^1 \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} d\mu + \int_{-1}^1 \kappa' B(\nu, T) d\mu$$

ou seja,

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-1}^1 \mu I d\mu \right) = \frac{\kappa'}{2\pi} (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, T))$$

que pode ser comparada com a equação da temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial T}{\partial y} = -2\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-1}^1 \mu I d\mu \right) d\nu$$

Supondo que o campo de velocidades seja nulo,  $u = 0$ , que é o caso do resfriamento de vidro e a temperatura esteja no estado estacionário,  $\frac{\partial T}{\partial t} \equiv 0$ , então

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( 2\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \mu I d\mu d\nu - k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.18)$$

sendo

$$J_T := 2\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \int_{-1}^1 \mu I d\mu d\nu \quad (3.19)$$

é o fluxo devido ao transporte e

$$J_D := -k_0 \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.20)$$

é o fluxo devido a difusão. As figuras 3.1 e 3.2 têm os gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$ ,  $\nu_0 = 4,2827494 \times 10^{13}/s$  e condições de contorno  $T(0) = 300K$  e  $T(L) = 1000K$ , com  $L = 1.0m$ . Observe que os gráficos de fato representam o esperado na expressão (3.18). Além disso, fica claro nas figuras que a contribuição da difusão aumenta em relação ao transporte conforme  $k_0$  e  $\lambda'$  crescem e a contribuição do transporte é menor onde as temperaturas são menores.

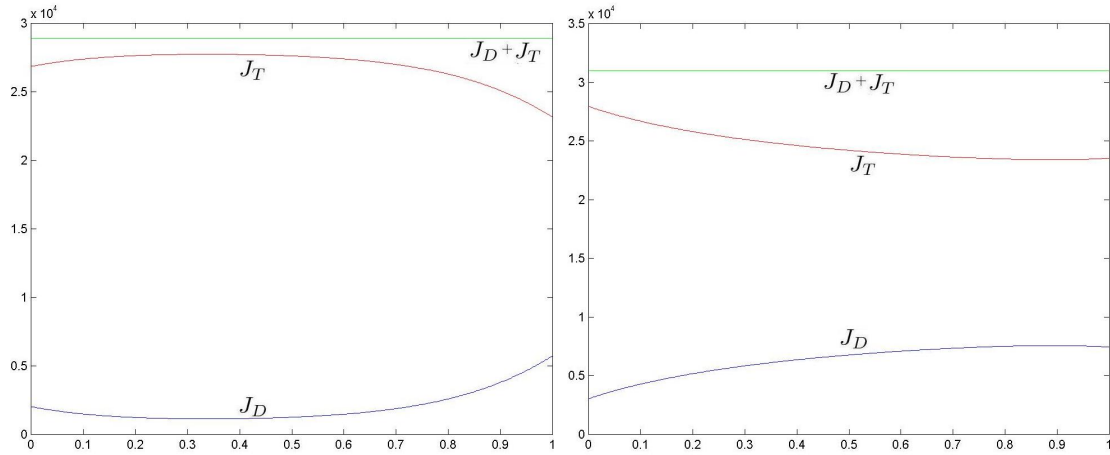


Figura 3.1: Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$ ,  $\lambda' = 1.0/m$  e  $L = 1.0m$  e as condições de contorno são  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$  para ambos os gráficos. No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10.0W/mK$  e no segundo  $k_0 = 100.0W/mK$ .

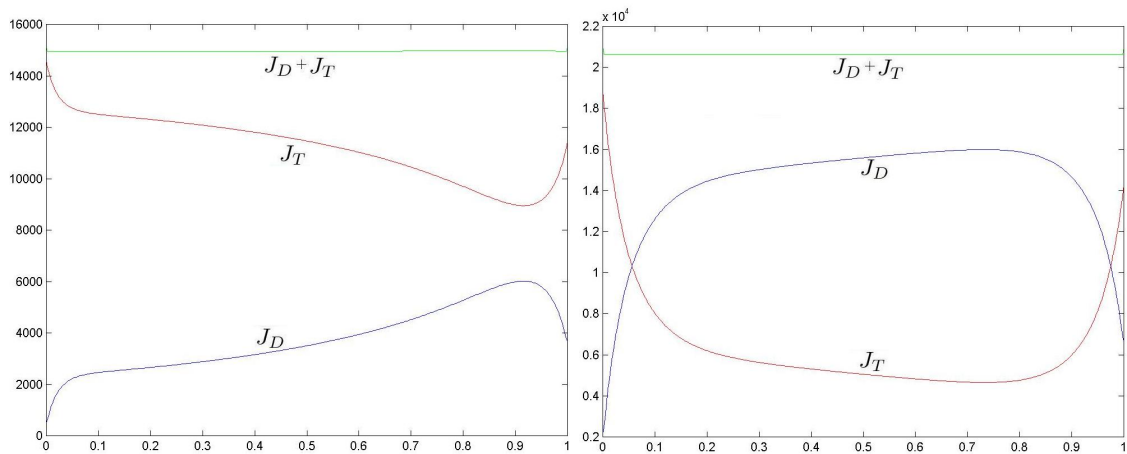


Figura 3.2: Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$ ,  $\lambda' = 10.0/m$ ,  $L = 1.0m$  e condições de contorno  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$ . No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10.0W/mK$  e no segundo  $k_0 = 100.0W/mK$ .

### 3.3.2 Resultados Numéricos

Os resultados apresentados aqui são para um modelo multi-banda, como em Larsen [17]. Os valores de  $\lambda'(\nu)$  são dados na tabela 3.1, sendo nesse modelo de oito bandas feita a seguinte aproximação para a integral no intervalo  $(\nu_0, \infty)$  que aparece no sistema (3.11):

$$\int_{\nu_0}^{\infty} (W_{\sigma'} - 1)\mathbf{B}(\nu, T^n)_j + (V_{\sigma'}\mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu = \sum_{i=1}^8 \int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} (W_{\sigma'} - 1)\mathbf{B}(\nu, T^n)_j + (V_{\sigma'}\mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu \quad (3.21)$$

Ademais, nestas simulações escolhemos  $\rho(\mu) = \rho_0(\mu) = \rho_L(\mu)$  satisfazendo a condição de Fresnel (2.80).

Os resultados das simulações estão apresentados em vários gráficos. Na figura 3.3, temos o perfil de temperatura variando com o espaço e tempo quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $\sigma' = 0, 5\lambda$ . Na figura 3.4 comparamos o perfil de temperatura para  $L = 5cm$  e  $L = 5mm$  para vários instantes de tempo quando  $\sigma' = 0.5\lambda'$ , temperaturas externas iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$ . Nas figuras 3.5 e 3.6 comparamos o perfil de temperatura para  $\sigma' = 0, 0.3\lambda', 0.6\lambda'$  e  $0.9\lambda'$  em vários instantes de tempo quando  $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita  $1000K$  e à fronteira esquerda  $300K$ . Na figura 3.7 temos os perfis de temperatura para  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 0.9\lambda'$  variando com o tempo em vários pontos da malha quando  $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita  $1000K$  e à fronteira esquerda  $300K$ . Na figura 3.8 temos o perfil de temperatura variando com o espaço e tempo quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $2000K$  à direita e  $1000K$  à esquerda, temperatura inicial constante igual a  $1500K$  e  $\sigma' = 0, 0$ . Na figura 3.9 comparamos os perfis de temperaturas para  $h = 1$  e  $h = 10$  em vários instantes de tempo e depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $1700K$  à direita e  $1000K$  à esquerda, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $\sigma' = 0, 0$ . Nas figuras 3.10-3.11 temos perfis de temperaturas depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$  e  $\sigma' = 0, 0$ . No primeiro gráfico da figura 3.10 as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $1000K$  à esquerda. Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $1000K$  a direita e variam de  $1000K$  a  $1700K$  a esquerda. Na figura 3.11 as temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $300K - 700K$ ,  $400K - 800K$ ,  $500K - 900K$  e  $600K - 1000K$ .

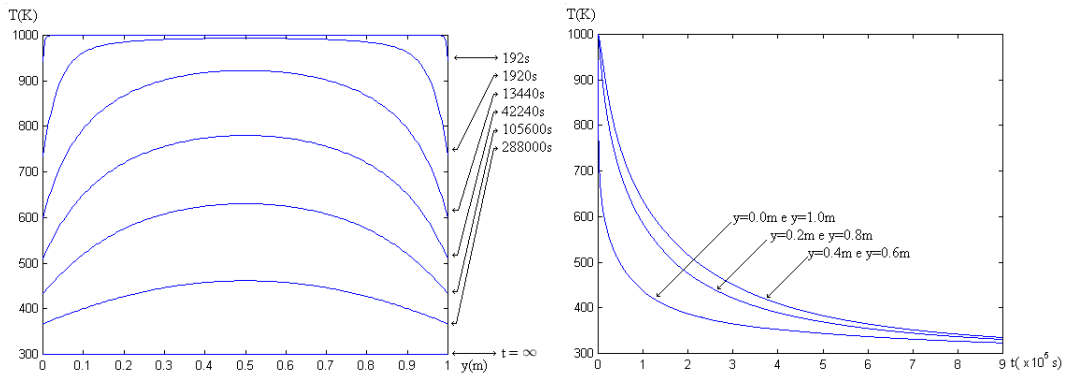


Figura 3.3: Temperatura variando com o espaço e tempo quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $\sigma' = 0,5\lambda$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária  $T = 300K$ . À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

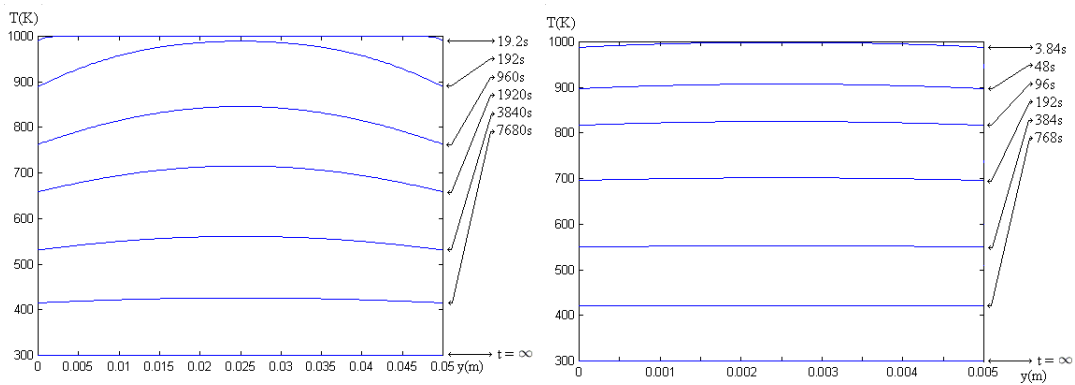


Figura 3.4: Perfil de temperatura para vários instantes de tempo quando  $\sigma' = 0,5\lambda'$ , temperaturas externas iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$ . À esquerda  $L = 5cm$  e à direita  $L = 5mm$ .

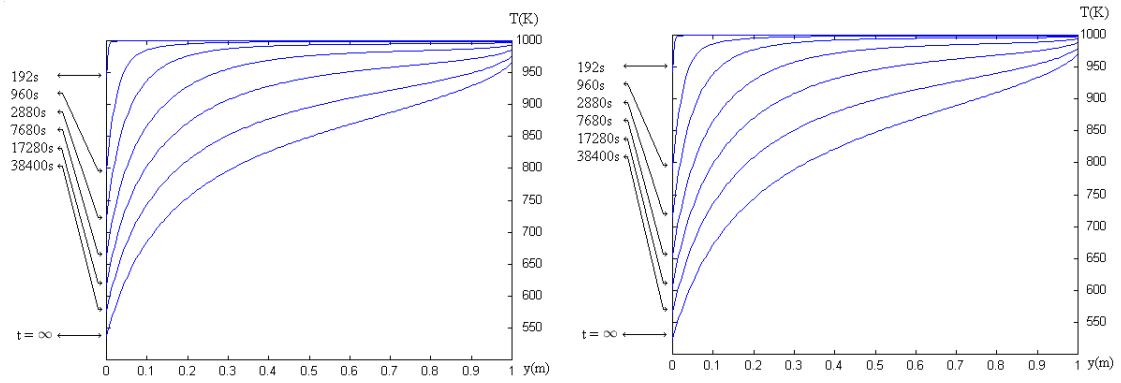


Figura 3.5: Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando  $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita  $1000K$  e à fronteira esquerda  $300K$ . Aqui  $\sigma = 0.0$  no gráfico à esquerda e  $\sigma = 0.3\lambda$  no gráfico à direita.

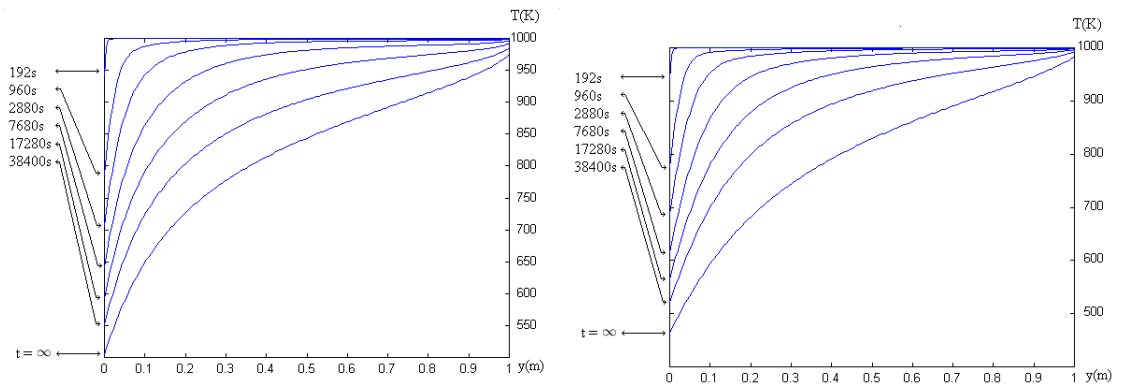


Figura 3.6: Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando  $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita  $1000K$  e à fronteira esquerda  $300K$ . Aqui  $\sigma = 0.6\lambda$  no gráfico à esquerda e  $\sigma = 0.9\lambda$  no gráfico à direita.

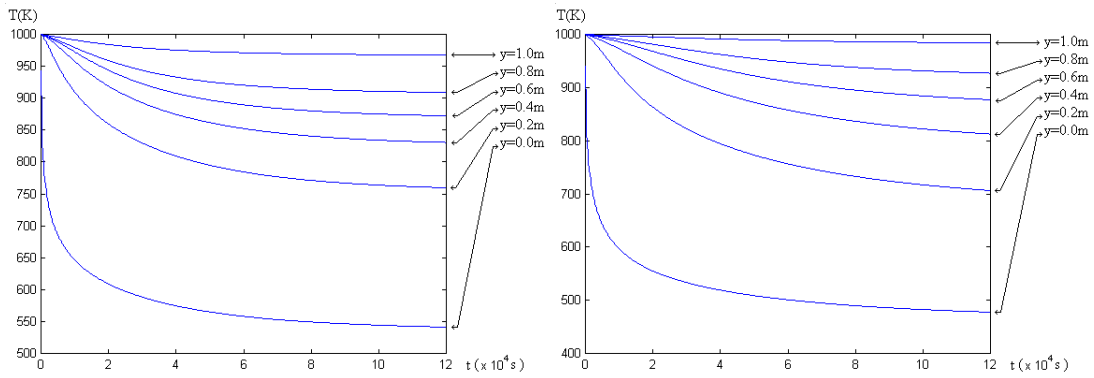


Figura 3.7: Perfil de temperatura variando com o tempo em vários pontos da malha quando  $L = 1m$ , temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa à fronteira direita  $1000K$  e à fronteira esquerda  $300K$ . Aqui  $\sigma = 0.0/m$  no gráfico à esquerda e  $\sigma = 0.9\lambda$  no gráfico à direita.

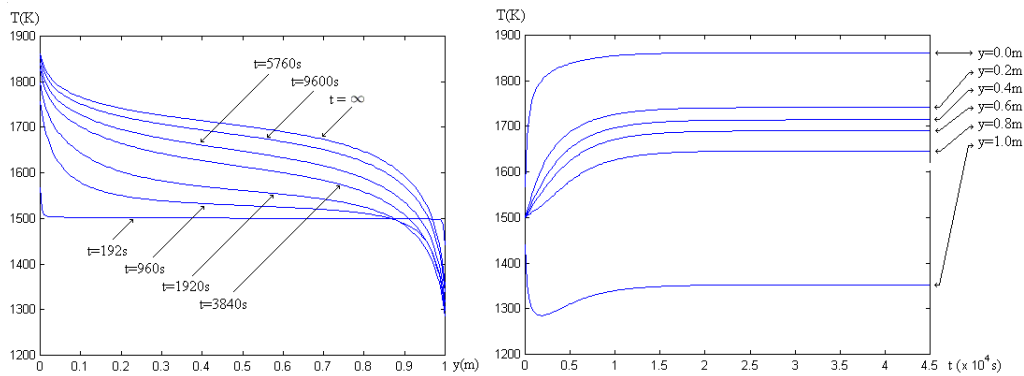


Figura 3.8: Temperatura variando com o espaço e tempo quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $2000K$  à direita e  $1000K$  à esquerda, temperatura inicial constante igual a  $1500K$  e  $\sigma' = 0,0$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária  $t = \infty$ . À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0, y = 0,2m, y = 0,4m, y = 0,6m, y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

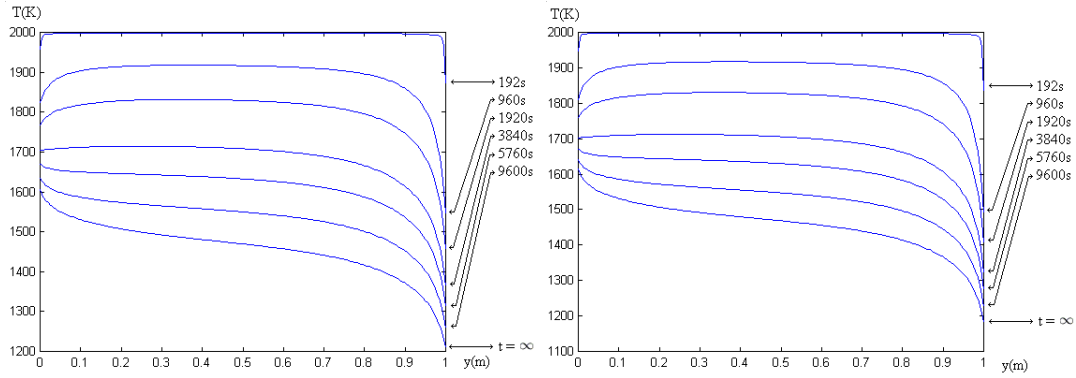


Figura 3.9: Perfis de temperaturas em vários instantes de tempo e depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$ , temperaturas externas iguais a  $1700K$  à direita e  $1000K$  à esquerda, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $\sigma' = 0,0/m$ . À direita temos  $h = 10,0W/m^2K$  e à esquerda  $h = 1,0W/m^2K$ .

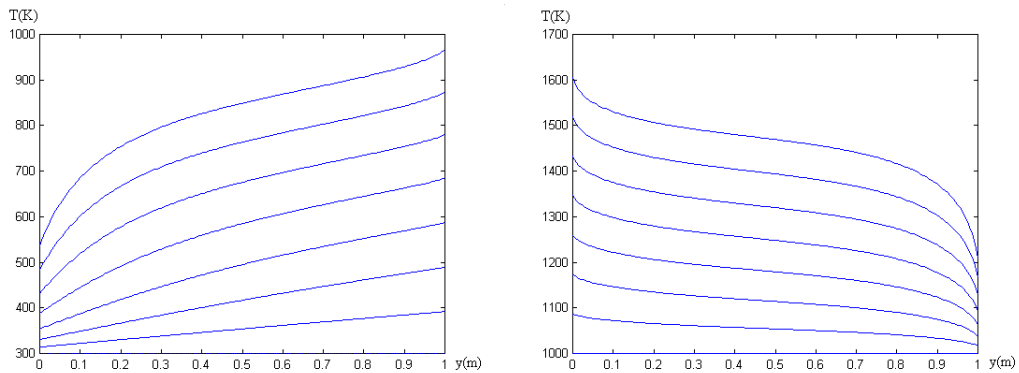


Figura 3.10: Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1m$  e  $\sigma' = 0,0/m$ . No primeiro gráfico as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $1000K$  à direita. Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $1000K$  a direita e variam de  $1000K$  a  $1700K$  a esquerda.



Banda	$\lambda_{j-1}$ ( $\mu\text{m}$ )	$\lambda_j$ ( $\mu\text{m}$ )	$\nu_{j-1}$ ( $10^6/\text{s}$ )	$\nu_j$ ( $10^6/\text{s}$ )	$\lambda'$ ( $1/\text{m}$ )
0	$\infty$	7	0	42827494	Opaco
1	7	6	42827494	49965410	7136,06
2	6	5,5	49965410	54507720	567,32
3	5,5	4,5	54507720	66620546	267,98
4	4,5	4	66620546	74948115	27,98
5	4	3,5	74948115	85654988	15,45
6	3,5	3	85654988	99930819	7,7
7	3	0,2	99930819	1498962290	0,5
8	0,2	0	1498962290	$\infty$	0,4

Tabela 3.1: Coeficientes de absorção de um modelo de oito bandas para vidro dado em Larsen ([17]), originalmente de ITWM, Kaiserlautern.

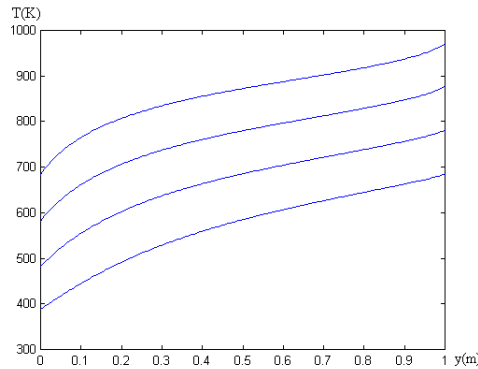


Figura 3.11: Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ) quando  $L = 1\text{m}$  e  $\sigma' = 0,0/\text{m}$ . As temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $300\text{K} - 700\text{K}$ ,  $400\text{K} - 800\text{K}$ ,  $500\text{K} - 900\text{K}$  e  $600\text{K} - 1000\text{K}$ .

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo estabelecemos a existência de soluções clássicas para o problema de transferência de calor unidimensional na presença de radiação, convecção e condução. Estes resultados não dependem de condições não físicas sobre os coeficientes  $\kappa'$ ,  $\sigma'$  e  $\lambda'$ , como é o caso do problema tridimensional estudado por Thompson [30]. Aqui é importante lembrar que a análise é válida mesmo quando  $\rho(\mu)$  é identicamente igual a 1. Esta é uma característica relevante, uma vez que o modelo de resfriamento de vidro requer  $\rho = 1$  quando o fenômeno é totalmente reflexivo. Nós enfatizamos também que os coeficientes  $\kappa'$ ,  $\sigma'$  e  $\lambda'$  são permitidos ter uma dependência seccionalmente contínua de  $\nu$ . Na verdade é exigido apenas que tais parâmetros sejam limitados e mensuráveis. Segue que nossa análise é adequada para um modelo multi-banda.

O método numérico usado neste capítulo possui algumas vantagens. Primeiramente, visto que as matrizes  $W_{\sigma'}$  and  $V_{\sigma'}$  agem como função vetorial de Green para a equação do transporte, podemos resolvê-lo incansavelmente como uma multiplicação de matrizes. Ademais, como essas matrizes são calculadas apenas uma vez (para cada conjunto de parâmetros), um método de quadratura preciso pode ser aplicado para obter os coeficiente de  $W_{\sigma'}$  and  $V_{\sigma'}$  sem comprometer a performance do algoritmo.

## 4 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL QUASILINEAR

Neste capítulo faremos a teoria de existência e simulações para o problema (1.11) quando o coeficiente de difusão  $k_0$  e a capacidade calorífica volumétrica dependem da temperatura, espaço e tempo ( $k_0 = k_0(y, t, T)$  e  $c_v = c_v(y, t, T)$ ). Aplicar as técnicas do capítulo 3 diretamente traz dificuldade quando queremos provar a monotonicidade das sequências. Aqui, introduzimos mudanças de variáveis para a temperatura que trabalham com os coeficientes  $k_0$  e  $c_v$  e transformam o sistema convenientemente num equivalente. Depois, usamos técnicas um pouco mais apurada do método de monotonicidade para sistemas quasilineares, adaptando trabalho de Pao [22]. O problema considerado nesse capítulo é

$$\begin{aligned}
c_v(y, t, T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0(y, t, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, T)) d\nu, & y \in (0, L), t > 0 \\
-k_0(y, t, T) \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T_b - T) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, & y = 0, t > 0 \\
k_0(y, t, T) \frac{\partial T}{\partial y} &= h(T_b - T) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, T)] d\nu, & y = L, t > 0 \\
T(y, 0) &= T_0(y), & y \in (0, L), t = 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, T), & y \in (0, L), t > 0 \\
I(\mu) &= \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), & y = 0, t > 0, \mu > 0, \\
I(\mu) &= \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), & y = L, t > 0, \mu < 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde  $k_0$  e  $c_v$  assumem as seguintes hipóteses:

$$0 < k_0^{\min} < k_0(y, t, T), \quad 0 < c_v(y, t, T) < c_v^{\max},$$

$k_0^{\min}$  e  $c_v^{\max}$  constantes. Observe que aqui a análise será desenvolvida apenas para o caso onde  $v \equiv 0$ , que é o caso de resfriamento de vidro.

### 4.1 Teoria de Existência

Definimos a seguinte mudança de variável

$$\tau = \int_0^t \frac{k_0(y, s, T(s))}{c_v(y, s, T(s))} ds. \tag{4.2}$$

Fazendo  $U(y, \tau) = T(y, t)$ , temos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{k_0(y, t, T(t))}{c_v(y, t, T(t))} \frac{\partial U}{\partial \tau}.$$

Portanto, o sistema assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
k_0 \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, U)) d\nu, & y \in (0, L), \tau > 0 \\
-k_0 \frac{\partial U}{\partial y} &= h(T_b - U) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, U)] d\nu, & y = 0, \tau > 0 \\
k_0 \frac{\partial U}{\partial y} &= h(T_b - U) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, U)] d\nu, & y = L, \tau > 0 \\
U(y, 0) &= T_0(y), & y \in (0, L), \tau = 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, U), & y \in (0, L), \tau > 0 \\
I(\mu) &= \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), & y = 0, \tau > 0, \mu > 0, \\
I(\mu) &= \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), & y = L, \tau > 0, \mu < 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

A mudança de variável (4.2), que associa cada  $t \in (0, \infty)$  a um  $\tau \in (0, \infty)$  é estritamente monótona, pois  $\frac{k_0}{c_v} \geq \frac{k_0^{min}}{c_v^{max}} > 0$ . Isso torna a transformação bijetora e inversível. Observe que

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{k_0(y, t, T(t))}{c_v(y, t, T(t))} = \frac{k_0(y, \tau, U(\tau))}{c_v(y, \tau, U(\tau))}.$$

A inversa da transformação é

$$t = \int_0^{\tau} \frac{c_v(y, s, U(s))}{k_0(y, s, U(s))} ds. \tag{4.4}$$

Portanto, se existir solução para o problema (4.3) para cada  $\tau \in [0, \tau_0]$ , significa que a solução do problema 4.1 existirá para cada  $t \in [0, t(\tau_0)]$ . Assim, o problema se reduz a provar existência de soluções para o problema (4.3). Para este propósito, usamos as técnicas de monotonicidade, adaptando os resultados de Pao para equações parabólicas quasilineares ([22]). Como no capítulo anterior, começamos definindo super e subsolução para o problema (4.3):

**Definição 4.1.** *Os pares de funções  $(\tilde{U}, \tilde{I})$  e  $(\hat{U}, \hat{I})$  são chamadas supersoluções e subsoluções do problema (4.3), respectivamente, se  $\tilde{U} \geq \hat{U}$ ,  $\tilde{I} \geq \hat{I}$ ,  $\tilde{U}$  e  $\tilde{I}$  satisfazem as desigualdades (3.1) (quando trocamos  $\tilde{U}$  por  $\tilde{T}$ ) e  $\hat{U}$  e  $\hat{I}$  satisfazem as desigualdades inversas.*

**Proposição 4.1.** *O par de funções*

$$\tilde{U} = \max \left\{ \sup_{y \in D} \{T_0(y)\}, \sup_{y \in \partial D} \{T_b(y)\} \right\} \quad e \quad \tilde{I} = B(\nu, \tilde{U})$$

*é uma supersolução do problema (4.3), ou seja, satisfaz a definição 4.1.*

*Demonstração.* Totalmente análoga a demonstração da proposição 3.1 do capítulo 3, visto que a solução é constante com respeito as variáveis  $y$  e  $t$ , tendo derivadas nulas, anulando a influência do coeficiente  $k_0(U)$ .  $\square$

**Proposição 4.2.** *O par de funções*

$$\hat{U} = \min \left\{ \inf_{y \in D} \{T_0(y)\}, \inf_{y \in \partial D} \{T_b(y)\} \right\} \quad e \quad \hat{I} = B(\nu, \hat{U})$$

é uma subsolução do problema (4.1).

*Demonstração.* Também análoga a demonstração da proposição 3.1, capítulo 3.  $\square$

Agora, defina

$$W = H(U) = \int_0^U k_0(S) dS. \quad (4.5)$$

A transformação tem derivada positiva,  $\frac{\partial W}{\partial U} = k_0(U) > 0$ . Portanto, a inversa existe e é uma função crescente de  $W$ , que denotaremos por  $U = J(W)$ . Também, vale as seguintes relações:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = k_0(U) \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad e \quad \frac{\partial W}{\partial y} = k_0(U) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.3), temos uma nova representação para o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, U)) d\nu, \quad y \in (0, L), \tau > 0 \\ -\frac{\partial W}{\partial y} &= h(T_b - U) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, U)] d\nu, \quad y = 0, \tau > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= h(T_b - U) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b) - B(\nu, U)] d\nu, \quad y = L, \tau > 0 \\ W(y, 0) &= W_0(y) = H(U_0(y)), \quad y \in (0, L), \tau = 0 \\ U &= J(W), \quad y \in [0, L], \tau \geq 0 \\ \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, U), \quad y \in (0, L), \tau > 0 \\ I(\mu) &= \rho_0 I(-\mu) + (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), \quad y = 0, \tau > 0, \mu > 0, \\ I(\mu) &= \rho_L I(-\mu) + (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), \quad y = L, \tau > 0, \mu < 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Defina a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^k}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W^k}{\partial y} \right) + \frac{c}{k_0^{min}} W^k &= \frac{c}{k_0^{min}} W^{k-1} \\
&+ \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I}^{k-1} - 4\pi B(\nu, U^{k-1})) d\nu, \quad y \in (0, L), \tau > 0 \\
-\frac{\partial W^k}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} W^k &= \frac{d}{k_0^{min}} W^{k-1} + h(T_b - U^{k-1}) \\
&+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, U^{k-1})) d\nu, \quad y = 0, \tau > 0 \\
\frac{\partial W^k}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} W^k &= \frac{d}{k_0^{min}} W^{k-1} + h(T_b - U^{k-1}) \\
&+ \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, U^{k-1})) d\nu, \quad y = L, \tau > 0 \\
W^k(y, 0) &= W_0(y), \quad y \in (0, L), \tau = 0 \\
U^k &= J(W^k), \quad y \in [0, L], \tau \geq 0 \\
\mu \frac{\partial I^k}{\partial y} + \lambda' I^k &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I}^k + \kappa' B(\nu, U^{k-1}), \quad y \in (0, L), \tau > 0 \\
I^k(\mu) - \rho_0 I^k(-\mu) &= (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)), \quad y = 0, \tau > 0, \mu > 0, \\
I^k(\mu) - \rho_L I^k(-\mu) &= (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)), \quad y = L, \tau > 0, \mu < 0,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde

$$c = \max_{\tilde{U} \leq U \leq \tilde{\tilde{U}}} \left\{ \frac{\partial f(U)}{\partial U} \right\}, \quad f(U) = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' B(\nu, U) d\nu$$

e

$$d = \max_{\tilde{U} \leq U \leq \tilde{\tilde{U}}} \left\{ \frac{\partial g(U)}{\partial U} \right\}, \quad g(U) = hU + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} B(\nu, U) d\nu$$

Observe que a existência das constantes  $c$  e  $d$  são garantidas pelos lemas A.2 e A.3, respectivamente.

Aqui definimos duas sequências: uma começando em  $(\widehat{U}, H(\widehat{U}), \widehat{I})$  que denotaremos por  $(\underline{U}^k, \underline{W}^k, \underline{I}^k)$  e a outra começando em  $(\widetilde{U}, H(\widetilde{U}), \widetilde{I})$  que denotaremos por  $(\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k)$ . Como  $(T^0, I^0)$  é um par funções  $C^\alpha$  em cada sequência, a segunda parte do problema é resolvida como no lema 3.1, ou seja,  $\frac{1}{4\pi} \mathcal{I}^1 = S_g B(\nu, T^0) + S_b B(\nu, T_b)$ , sendo  $\mathcal{I}^1(y)$  uma função em  $C^\alpha$ . Da teoria linear para operadores parabólicos garantimos a existência de  $W^1 \in C^\alpha$  e, conseqüentemente,  $U^1 \in C^\alpha$ . Assim, sucessivamente garantimos a existência de  $(U^2, W^2, I^2), \dots, (U^k, W^k, I^k)$  para as duas sequências.

**Lema 4.1.** *As seqüências  $(\underline{U}^k, \underline{W}^k, \underline{I}^k)$  e  $(\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k)$  governadas por (4.8) possuem a propriedade de monotonicidade:*

$$\begin{aligned}
(\widehat{U}, \widehat{W}, \widehat{I}) &\leq (\underline{U}^k, \underline{W}^k, \underline{I}^k) \\
&\leq (\underline{U}^{k+1}, \underline{W}^{k+1}, \underline{I}^{k+1}) \\
&\leq (\overline{U}^{k+1}, \overline{W}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \\
&\leq (\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k) \leq (\widetilde{U}, \widetilde{W}, \widetilde{I}).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

*Demonstração.* Seja  $(U, W, I) = (\underline{I}^1 - \underline{I}^0, \underline{W}^1 - \underline{W}^0, \underline{I}^1 - \underline{I}^0) = (\underline{U}^1 - \widehat{U}, \underline{W}^1 - \widehat{W}, \underline{I}^1 - \widehat{I})$ , então as seguintes desigualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{c}{k_0^{min}} W &= \frac{c}{k_0^{min}} (\underline{W}^0 - \widehat{W}) + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\underline{I}^0 - 4\pi B(\nu, \underline{U}^0)) d\nu - \mathcal{L}_\tau \widehat{W} \\
&= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\widehat{I} - 4\pi B(\nu, \widehat{U})) d\nu \\
&\quad - \left( k_0 \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( k_0 \frac{\partial \widehat{U}}{\partial y} \right) \right) \geq 0 \\
-\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} W &= \frac{d}{k_0^{min}} \underline{W}^0 + h(T_b - \underline{U}^0) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \underline{U}^0)) d\nu \\
&\quad - \left( -\frac{\partial \widehat{W}}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} \widehat{W} \right), \quad y = 0 \\
&= h(T_b - \widehat{U}) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \widehat{U})) d\nu + k_0 \frac{\partial \widehat{U}}{\partial y}, \\
&\geq 0, \\
\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} W &= \frac{d}{k_0^{min}} \underline{W}^0 + h(T_b - \underline{U}^0) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \underline{U}^0)) d\nu \\
&\quad - \left( \frac{\partial \widehat{W}}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} \widehat{W} \right), \quad y = L \\
&= h(T_b - \widehat{U}) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} (B(\nu, T_b) - B(\nu, \widehat{U})) d\nu - k_0 \frac{\partial \widehat{U}}{\partial y}, \\
&\geq 0, \\
W(y, 0) &= W_0(y) - \widehat{W}(y, 0) \\
&= H(U_0(y)) - H(\widehat{U}(y, 0)) \geq 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} &= \kappa' B(\nu, \widehat{U}) - \left( \mu \frac{\partial \widehat{I}}{\partial y} + \lambda' \widehat{I} - \frac{\sigma'}{4\pi} \widehat{\mathcal{I}} \right), \\
&\geq 0 \\
I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= (1 - \rho_0) B(\nu, T_b(0)) - (\widehat{I}(\mu) - \rho \widehat{I}(-\mu)), \quad y = 0 \\
&\geq 0 \\
I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= (1 - \rho_L) B(\nu, T_b(L)) - (\widehat{I}(\mu) - \rho \widehat{I}(-\mu)), \quad y = L \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}_\tau \widetilde{W} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y} \right).$$

A validade das desigualdades acima se deve ao fato que  $(\widehat{U}, \widehat{I})$  é uma subsolução. Aqui temos que  $I \geq 0$  pelo lema 3.2, ou seja,  $\widehat{I} \leq \underline{I}^1$  e pelo lema da positividade do livro do Pao [21, página 54],  $W \geq 0$ , ou seja  $\widehat{W} \leq \underline{W}^1$ . Também, a transformação  $J(W)$  é estritamente crescente e, portanto,  $\widehat{U} \leq \underline{U}^1$ .

Agora, tomemos  $(U, W, I) = (\overline{U}^0 - \underline{U}^1, \overline{W}^0 - \underline{W}^1, \overline{I}^0 - \underline{I}^1) = (\overline{U}^1 - \widetilde{U}, \overline{W}^1 - \widetilde{W}, \overline{I}^1 - \widetilde{I})$ .

Usando um argumento análogo e sabendo que  $(\widetilde{U}, \widetilde{I})$  é uma supersolução obtém-se que  $(U, W, I) \geq (0, 0, 0)$ , ou seja  $(\overline{U}^1, \overline{W}^1, \overline{I}^1) \leq (\widetilde{U}, \widetilde{W}, \widetilde{I})$ .

A seguir, tomemos  $(U^1, W^1, I^1) = (\overline{U}^1 - \underline{U}^1, \overline{W}^1 - \underline{W}^1, \overline{I}^1 - \underline{I}^1)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{W}^1}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \overline{W}^1}{\partial y} \right) + \frac{c}{k_0^{min}} \overline{W}^1 &= \frac{c}{k_0^{min}} (\overline{W}^0 - \underline{W}^0) \\ &+ \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( \overline{I}^0 - \underline{I}^0 - [4\pi B(\nu, \overline{U}^0) - 4\pi B(\nu, \underline{U}^0)] \right) d\nu \\ &= \frac{c}{k_0^{min}} (\widetilde{W} - \widehat{W}) + \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( \widetilde{I} - \widehat{I} - [4\pi B(\nu, \widetilde{U}) - 4\pi B(\nu, \widehat{U})] \right) d\nu \\ &\geq \frac{c}{k_0^{min}} \left( H(\widetilde{U}) - H(\widehat{U}) \right) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( [B(\nu, \widetilde{U}) - B(\nu, \widehat{U})] \right) d\nu \\ &\geq c \left( \widetilde{U} - \widehat{U} \right) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( [B(\nu, \widetilde{U}) - B(\nu, \widehat{U})] \right) d\nu \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \overline{W}^1}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} \overline{W}^1 &= \frac{d}{k_0^{min}} \left( \overline{W}^0 - \underline{W}^0 \right) - h(\overline{U}^0 - \underline{U}^0) \\ &- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{U}^0) - B(\nu, \underline{U}^0) \right) d\nu \\ &\geq d \left( \overline{U}^0 - \underline{U}^0 \right) - h(\overline{U}^0 - \underline{U}^0) - \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{U}^0) - B(\nu, \underline{U}^0) \right) d\nu \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{W}^1}{\partial y} + \frac{d}{k_0^{min}} \overline{W}^1 &= \frac{d}{k_0^{min}} \left( \overline{W}^0 - \underline{W}^0 \right) - h(\overline{U}^0 - \underline{U}^0) \\ &- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{U}^0) - B(\nu, \underline{U}^0) \right) d\nu \\ &\geq d \left( \overline{U}^0 - \underline{U}^0 \right) - h(\overline{U}^0 - \underline{U}^0) - \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \overline{U}^0) - B(\nu, \underline{U}^0) \right) d\nu \\ &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
W(y, 0) &= 0 \\
\mu \frac{\partial I^1}{\partial y} + \lambda' I^1 - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I}^1 &= \kappa' B(\nu, \bar{U}^0) - \kappa' B(\nu, \underline{U}^0) \\
&= \kappa' B(\nu, \tilde{U}) - \kappa' B(\nu, \hat{U}) \\
&\geq 0, \\
I^1(\mu) - \rho_0 I^1(-\mu) &= 0, \quad y = 0, \\
I^1(\mu) - \rho_L I^1(-\mu) &= 0, \quad y = L.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 3.2,  $I^1 \geq 0$ , ou seja,  $\underline{I}^1 \leq \bar{I}^1$ . Novamente, pelo lema da positividade do livro de Pao [21, página 54],  $W^1 \geq 0$ , ou seja  $\underline{W}^1 \leq \bar{W}^1$ . Disso temos que  $\underline{U}^1 \leq \bar{U}^1$ . Até agora provamos que  $\hat{U} \leq \underline{U}^1 \leq \bar{U}^1 \leq \tilde{U}$ ,  $\hat{W} \leq \underline{W}^1 \leq \bar{W}^1 \leq \tilde{W}$  e  $\hat{I} \leq \underline{I}^1 \leq \bar{I}^1 \leq \tilde{I}$ .

Usando um argumento de indução, considere que

$$\underline{U}^{k-1} \leq \underline{U}^k \leq \bar{U}^k \leq \bar{U}^{k-1}, \quad \underline{W}^{k-1} \leq \underline{W}^k \leq \bar{W}^k \leq \bar{W}^{k-1} \text{ e } \underline{I}^{k-1} \leq \underline{I}^k \leq \bar{I}^k \leq \bar{I}^{k-1}.$$

Seja  $(U, W, I) = (\underline{U}^{k+1} - \underline{U}^k, \underline{W}^{k+1} - \underline{W}^k, \underline{I}^{k+1} - \underline{I}^k)$ , então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{c}{k_0^{min}} W &= \frac{c}{k_0^{min}} (\underline{W}^k - \underline{W}^{k-1}) \\
&+ \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( \underline{I}^k - \underline{I}^{k-1} - 4\pi [B(\nu, \underline{U}^k) - B(\nu, \underline{U}^{k-1})] \right) d\nu \\
&\geq \frac{c}{k_0^{min}} (H(\underline{U}^k) - H(\underline{U}^{k-1})) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( [B(\nu, \underline{I}^k) - B(\nu, \underline{I}^{k-1})] \right) d\nu \\
&\geq c(\underline{U}^k - \underline{U}^{k-1}) - 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left( [B(\nu, \underline{I}^k) - B(\nu, \underline{I}^{k-1})] \right) d\nu \\
&\geq 0 \\
\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{d}{k_0^{min}} W &= \frac{d}{k_0^{min}} (\bar{W}^{k-1} - \underline{W}^{k-1}) - h(\bar{U}^{k-1} - \underline{U}^{k-1}) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \bar{U}^{k-1}) - B(\nu, \underline{U}^{k-1}) \right) d\nu \\
&\geq d(\bar{U}^{k-1} - \underline{U}^{k-1}) - h(\bar{U}^{k-1} - \underline{U}^{k-1}) \\
&- \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left( B(\nu, \bar{U}^{k-1}) - B(\nu, \underline{U}^{k-1}) \right) d\nu \\
&\geq 0 \\
T(y, 0) &= 0 \\
\mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I - \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} &= \kappa' B(\nu, \underline{U}^k) - \kappa' B(\nu, \underline{U}^{k-1}) \\
&\geq 0, \\
I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= 0, \quad y = 0, \\
I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= 0, \quad y = L.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo lema 3.2,  $I \geq 0$ , ou seja,  $\underline{I}^k \leq \underline{I}^{k+1}$  e pelo lema da positividade do livro de Pao [21, página 54],  $W \geq 0$ , ou seja  $\underline{W}^k \leq \underline{W}^{k+1}$ . Da monotonicidade da transformação (4.5) temos  $\underline{U}^k \leq \underline{U}^{k+1}$ .

Usando um argumento análogo e tomando  $(U, W, I) = (\overline{U}^{k+1} - \overline{U}^k, \overline{W}^{k+1} - \overline{W}^k, \overline{I}^{k+1} - \overline{I}^k)$  tem-se  $(U, W, I) \geq (0, 0, 0)$ , ou seja  $(\overline{U}^{k+1}, \overline{W}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \leq (\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k)$ . De forma similar se prova que  $(U^{k+1}, W^{k+1}, I^{k+1}) = (\overline{U}^{k+1} - \underline{U}^{k+1}, \overline{W}^{k+1} - \underline{W}^{k+1}, \overline{I}^{k+1} - \underline{I}^{k+1}) \geq (0, 0, 0)$ , ou seja,  $(\overline{U}^{k+1}, \overline{W}^{k+1}, \overline{I}^{k+1}) \geq (\underline{U}^{k+1}, \underline{W}^{k+1}, \underline{I}^{k+1})$  e temos a validade da desigualdade (4.9).  $\square$

**Teorema 4.1.** *As sequências  $(\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k)$  e  $(\underline{U}^k, \underline{W}^k, \underline{I}^k)$  convergem monotonicamente para as soluções do problema (4.7)  $(\overline{U}, \overline{W}, \overline{I})$  e  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I})$ , respectivamente, e  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I}) \leq (\overline{U}, \overline{W}, \overline{I})$ . Além disso, se existir um outra solução  $(U^*, W^*, I^*)$ ,  $(\widehat{U}, \widehat{W}, \widehat{I}) \leq (U^*, W^*, I^*) \leq (\widetilde{U}, \widetilde{W}, \widetilde{I})$ , então  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I}) \leq (U^*, W^*, I^*) \leq (\overline{U}, \overline{W}, \overline{I})$ .*

*Demonstração.* De fato, como as sequências são limitadas e monótonas, existe convergência. Basta provar que  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I})$  e  $(\overline{U}, \overline{W}, \overline{I})$  são soluções do problema (4.7). O sistema tem representação integral, tanto para  $W^k$  quando para  $I^k$ . A representação para  $I^k$  é dada por (2.25), (2.26) e (2.27) e para  $T^k$  é dada no livro de Pao [21, capítulo 2]. Portanto, pelo teorema da convergência monótona, as duas sequências convergem para as solução do problema (4.7).

Agora suponha que  $(U^*, W^*, I^*)$  seja outra solução tal que  $(\widehat{U}, \widehat{W}, \widehat{I}) \leq (U^*, W^*, I^*) \leq (\widetilde{U}, \widetilde{W}, \widetilde{I})$ . Como  $(U^*, W^*, I^*)$  é uma supersolução do problema, então  $(\underline{U}^k, \underline{W}^k, \underline{I}^k) \leq (U^*, W^*, I^*)$  para todo  $k \in \mathcal{N}$  e portanto  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I}) \leq (U^*, W^*, I^*)$ . Da mesma forma  $(U^*, W^*, I^*)$  é uma subsolução e assim  $(\overline{U}^k, \overline{W}^k, \overline{I}^k) \geq (U^*, W^*, I^*)$ ,  $\forall k \in \mathcal{N}$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

#### 4.1.1 Unicidade

A unicidade é estabelecida com a mesma técnica usada na subseção 3.1.1.

**Teorema 4.2.** *As soluções  $(\overline{U}, \overline{W}, \overline{I})$  e  $(\underline{U}, \underline{W}, \underline{I})$  são iguais e portanto a solução é única na faixa  $(\widehat{U}, \widehat{W}, \widehat{I}) \leq (U, W, I) \leq (\widetilde{U}, \widetilde{W}, \widetilde{I})$ .*

*Demonstração.* Seja  $(U, W, I) = (\underline{U} - \overline{U}, \underline{W} - \overline{W}, \underline{I} - \overline{I})$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) &= \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (\mathcal{I} - 4\pi B(\nu, \underline{U}) + 4\pi B(\nu, \overline{U})) d\nu, \quad y \in (0, L), t > 0 \\ -\frac{\partial W}{\partial y} + hU + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})] d\nu &= 0, \quad y = 0, t > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial y} + hU + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})] d\nu &= 0, \quad y = L, t > 0 \\ W(y, 0) &= 0, \quad y \in (0, L), t = 0 \\ U &= J(\underline{W}) - J(\overline{W}), \quad y \in [0, L], t \geq 0 \\ \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I} + \kappa' B(\nu, \underline{U}) - \kappa' B(\nu, \overline{U}), \quad y \in (0, L), t > 0 \\ I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= 0, \quad y = 0, t > 0, \mu > 0, \\ I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= 0, \quad y = L, t > 0, \mu < 0. \end{aligned}$$

Analogamente a equação (3.8), vale a seguinte equação:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[ (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right] (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) d\nu \quad (4.10)$$

Tomando o produto interno em  $L_2$  com  $W$  em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial W}{\partial t} W dy - \int_0^L \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) W dy \\ = \int_0^L 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[ (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right] (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) W d\nu dy \end{aligned}$$

que leva a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|W\|_2^2 + \int_0^L \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 dy - W(L) \frac{\partial W}{\partial y}(L) + W(0) \frac{\partial W}{\partial y}(0) + \\ = \int_0^L 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[ (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right] (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) W d\nu dy \quad (4.11) \end{aligned}$$

Na fronteira vale:

$$\frac{\partial W}{\partial y}(L) = -hU(L) - \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{U}(L)) - B(\nu, \overline{U}(L))] d\nu \geq 0$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial y}(0) = hU(0) + \int_0^{\nu_0} [B(\nu, \underline{U}(0)) - B(\nu, \overline{U}(0))] d\nu \leq 0.$$

Logo

$$-W(L) \frac{\partial W}{\partial y}(L) + W(0) \frac{\partial W}{\partial y}(0) \geq 0. \quad (4.12)$$

Usando (4.12) em (4.11), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|W\|_2^2 &\leq \int_0^L 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' \left[ (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right] (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) W d\nu dy \\ &\leq \left\| (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right\|_2 \int_0^L 4\pi |W| \left| \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) d\nu \right| dy \\ &\leq 8\pi \int_0^L |W| \left| \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' (B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) d\nu \right| dy, \end{aligned}$$

onde usamos o lema (3.4):

$$\left\| (1 - \sigma' L_g)^{-1} \kappa' L_g - 1 \right\|_2 \leq 2.$$

Agora, pelo lema A.2,

$$\left| \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa'(B(\nu, \underline{U}) - B(\nu, \overline{U})) d\nu \right| \leq M |\underline{U} - \overline{U}|,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|W\|_2^2 \leq 4\pi \int_0^L |W| M |\underline{U} - \overline{U}| dy = 4M\pi \int_0^L |W| |U| dy \quad (4.13)$$

Observe que

$$|W| = |\underline{W} - \overline{W}| = \left| \int_{\underline{U}}^{\overline{U}} k_0(S) dS \right| \geq k_0^{\min} |\overline{U} - \underline{U}| = k_0^{\min} |U| \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.13), temos

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|W\|_2^2 \leq \frac{4M\pi}{k_0^{\min}} \int_0^L |W|^2 dy = \frac{4M\pi}{k_0^{\min}} \|W\|_2^2 = \frac{C_1}{2} \|W\|_2^2, \quad (4.15)$$

onde  $C_1 = \frac{8M\pi}{k_0^{\min}}$ . Pelo lema de Gronwall,

$$\|W\|_2^2 = \|W\|_2^2(0) e^{C_1 t}.$$

Como

$$\|W\|_2^2(0) = \int_0^L |W(y, 0)|^2 dy = 0,$$

então

$$\|W\|_2^2 = 0,$$

obtendo,  $W = 0$ , ou seja,  $\underline{W} = \overline{W}$ . Naturalmente, pela expressão (4.5) e o fato de  $W = 0$ , temos  $U = 0$ , isto é  $\underline{U} = \overline{U}$ . Isso simplifica o problema para  $I$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \frac{\partial I}{\partial y} + \lambda' I &= \frac{\sigma'}{4\pi} \mathcal{I}, & y \in (0, L), t > 0 \\ I(\mu) - \rho_0 I(-\mu) &= 0, & y = 0, t > 0, \mu > 0, \\ I(\mu) - \rho_L I(-\mu) &= 0, & y = L, t > 0, \mu < 0, \end{aligned}$$

que, por sua vez, tem solução nula, ou seja,  $\underline{I} = \overline{I}$ .

□

## 4.2 Discretização do Problema Quasilinear Acoplado

A discretização do problema (4.1) é semelhante a discretização (3.11):

$$\begin{aligned} c_v \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{h_t} &- \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}^{\text{lin}} (T_{j+1}^{n+1} - T_j^{n+1}) - k_{0(j-1/2)}^{\text{lin}} (T_j^{n+1} - T_{j-1}^{n+1})}{h^2} \\ &- \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}^n (T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}^n (T_j^n - T_{j-1}^n)}{h^2} \\ &= \frac{4\pi \kappa'}{\varepsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} (W_{\sigma'} - 1) \mathbf{B}(\nu, T^n)_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde  $k_{0(j)}^n := k_0(y_j, t^n, T_j^n)$  e  $k_{0(j)}^{lin} := k_0(y_j, t^{n+1}, T_j^{lin})$ . Aqui  $T_j^{lin}$  é o valor da temperatura intermediário entre o tempo  $n$  e o tempo  $n+1$  introduzido para linearizar o problema. Os vetores  $\mathbf{B}(\nu, T^n)$  e  $\mathbf{B}(\nu, T_b)$  são

$$\mathbf{B}(\nu, T^n) = \begin{bmatrix} B(\nu, T_1^n) & B(\nu, T_2^n) & \cdots & B(\nu, T_{N+1}^n) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}(\nu, T_b) = \begin{bmatrix} B(\nu, T_b(0)) \\ B(\nu, T_b(L)) \end{bmatrix}$$

A discretização para os termos de fronteira é

$$-k_{0(1)}^{lin} \frac{3T_1^{n+1} + T_3^{n+1} - 4T_2^{n+1}}{2h_s} = hT_b(0) - hT_1^{n+1} + \alpha\pi \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{n+1})] d\nu, \quad (4.17)$$

$$k_{0(N+1)}^{lin} \frac{3T_{N+1}^{n+1} + T_{N-1}^{n+1} - 4T_N^{n+1}}{2h_s} = hT_b(L) - hT_{N+1}^{n+1} + \alpha\pi \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 \int_0^{\nu_0} [B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{n+1})] d\nu. \quad (4.18)$$

O sistema (4.16) pode ser reescrito da forma:

$$\begin{aligned} \left(-h_t \frac{k_{0(j+1/2)}^{lin}}{2h_s^2}\right) T_{j+1}^{n+1} &+ \left(c_v + h_t \frac{k_{0(j+1/2)}^{lin}}{2h_s^2} + h_t \frac{k_{0(j-1/2)}^{lin}}{2h_s^2}\right) T_j^{n+1} + \left(-h_t \frac{k_{0(j-1/2)}^{lin}}{2h_s^2}\right) T_{j-1}^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}^n (T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}^n (T_j^n - T_{j-1}^n)}{h^2} \\ &+ 4\pi h_t \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' [(W_{\sigma'} - 1)\mathbf{B}(\nu, T^n)]_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Introduzimos uma linearização pelo método de Newton-Raphson para a função de Planck, como nas equações (3.15)-(3.16) e obtemos as seguintes equações na fronteira:

$$\begin{aligned} -k_{0(1)}^{lin} \frac{3T_1^{n+1} + T_3^{n+1} - 4T_2^{n+1}}{2h_s} &= hT_b(0) - hT_1^{n+1} \\ &+ \alpha\pi \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{lin}) - (T_1^{n+1} - T_1^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) \right] d\nu, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} k_{0(N+1)}^{lin} \frac{3T_{N+1}^{n+1} + T_{N-1}^{n+1} - 4T_N^{n+1}}{2h_s} &= hT_b(L) - hT_{N+1}^{n+1} \\ &+ \alpha\pi \left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{lin}) - (T_{N+1}^{n+1} - T_{N+1}^{lin}) \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) \right] d\nu. \end{aligned} \quad (4.21)$$

As equações (4.19), (4.20) e (4.21) nos levam a um sistema  $AT^{n+1} = D^n$ , onde

$$T^{n+1} = \begin{bmatrix} T_1^{n+1} & T_2^{n+1} & \cdots & T_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N & c_N \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_{N+1} & b_{N+1} \end{bmatrix},$$

com

$$a_j = -h_t \frac{k_{0(j+1/2)}^{lin}}{2h_s^2}, \quad 2 \leq j \leq N$$

$$a_0 = \frac{k_{0(N+1)}^{lin}}{2h_s}, \quad a_{N+1} = -\frac{2k_{0(N+1)}^{lin}}{h_s}$$

$$b_1 = \frac{3k_{0(1)}^{lin}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) d\nu$$

$$b_j = c_v + h_t \frac{k_{0(j+1/2)}^{lin}}{2h_s^2} + h_t \frac{k_{0(j-1/2)}^{lin}}{2h_s^2}, \quad 2 \leq j \leq N$$

$$b_{N+1} = \frac{3k_{0(N+1)}^{lin}}{2h_s} + h + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) d\nu$$

$$c_0 = \frac{k_{0(1)}^{lin}}{2h_s}, \quad c_1 = -\frac{2k_{0(1)}^{lin}}{h_s}$$

$$c_j = -h_t \frac{k_{0(j+1/2)}^{lin}}{2h_s^2}, \quad 2 \leq j \leq N$$

e

$$D^n = \left[ d_1^n \quad d_2^n \quad \cdots \quad d_{N+1}^n \right]^T,$$

e

$$d_1^n = hT_b(0) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(0)) - B(\nu, T_1^{lin}) + T_1^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_1^{lin}) \right] d\nu$$

$$d_j^n = c_v T_j^n + \frac{h_t}{2} \frac{k_{0(j+1/2)}^n (T_{j+1}^n - T_j^n) - k_{0(j-1/2)}^n (T_j^n - T_{j-1}^n)}{h^2} + \frac{4\pi h_t}{\epsilon^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' ((W_{\sigma'} - 1)\mathbf{B}(\nu, T^n))_j + (V_{\sigma'} \mathbf{B}(\nu, T_b))_j d\nu, \quad 2 \leq j \leq N,$$

$$d_{N+1}^n = hT_b(L) + \alpha\pi \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \int_0^{\nu_0} \left[ B(\nu, T_b(L)) - B(\nu, T_{N+1}^{lin}) + T_{N+1}^{lin} \frac{\partial B}{\partial T}(\nu, T_{N+1}^{lin}) \right] d\nu$$

Aqui,  $T_j^{lin}$ ,  $1 \leq j \leq N+1$ , começam em  $T_j^n$  e o sistema é resolvido iterativamente pelo algoritmo de Thomas (TDMA) até que

$$\frac{|T_j^{n+1} - T_j^{lin}|}{T_j^{n+1}} < \epsilon \quad \forall 1 \leq j \leq N,$$

para alguma tolerância  $0 < \epsilon \ll 1$ . Observamos que o sistema  $AT^{n+1} = D^n$  pode ser transformado num sistema tridiagonal para aplicação do algoritmo TDMA. Nos resultados desse trabalho usamos  $\epsilon = 10^{-5}$ .

### 4.3 Resultados Numéricos para o problema quasilinear

Os parâmetros usados para simulações nesta seção são essencialmente os mesmo usados na seção 3.3, com poucas exceções:  $\eta_{vidro} = \eta_1 = 1,46$ ,  $h = 1,0W/m^2K$  e  $c_v = c_m\rho_m$ , com  $c_m = 900J/KgK$ ,  $\rho_m = 2200Kg/m^3$ ,  $L = 1m$ ,  $\sigma' = 0.5\lambda'$  e  $\alpha$  dado pelo expressão (3.17). Aqui apresentamos várias funções  $k_0(x, t, T(x, t))$  e observamos o comportamento da temperatura.

#### 4.3.1 Cálculo do Fluxo de Energia para Validação do Método Numérico

Observe que na subseção 3.3.1 a expressão (3.18) vale mesmo quando  $k_0$  depende da temperatura. Por isso calculamos os fluxos para alguns conjuntos de parâmetros e verificamos a validade da fórmula (3.18). Na figura 4.1 temos dois gráficos dos fluxos devido ao transporte ( $J_T$ ), do fluxo devido a difusão ( $J_D$ ) e da soma dos dois fluxos ( $J_D + J_T$ ) quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$  e  $L = 1.0m$  e as condições de contorno são  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$  para ambos os gráficos. No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10^{-2}TW/mK^2$  e no segundo  $k_0 = 10^{-3}T^2W/mK^2$ . Na figura 4.2 temos outros dois gráficos das mesmas quantidades, com o mesmo conjunto de parâmetros, exceto  $k_0$  e  $\lambda$ . No gráfico à esquerda temos  $k_0 = 10^{-2}TW/mK^2$  e à direita  $k_0 = 10^{-3}T^2W/mK^2$ .

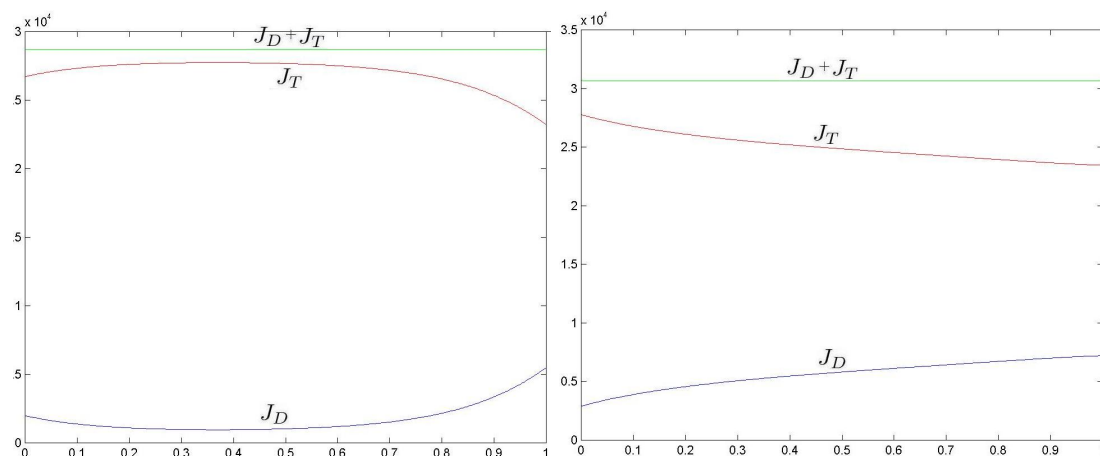


Figura 4.1: Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$  e  $L = 1.0m$  e as condições de contorno são  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$  para ambos os gráficos. No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10^{-2}TW/mK^2$  e no segundo  $k_0 = 10^{-3}T^2W/mK^2$ .

#### 4.3.2 Resultados Numéricos

Como na subseção (3.3.2), usamos um modelo de 8 bandas, sendo os valores de  $\lambda'(\nu)$  dados na tabela 3.1 e a integral no intervalo  $(\nu_0, \infty)$  que aparece no sistema (4.16) dada pela

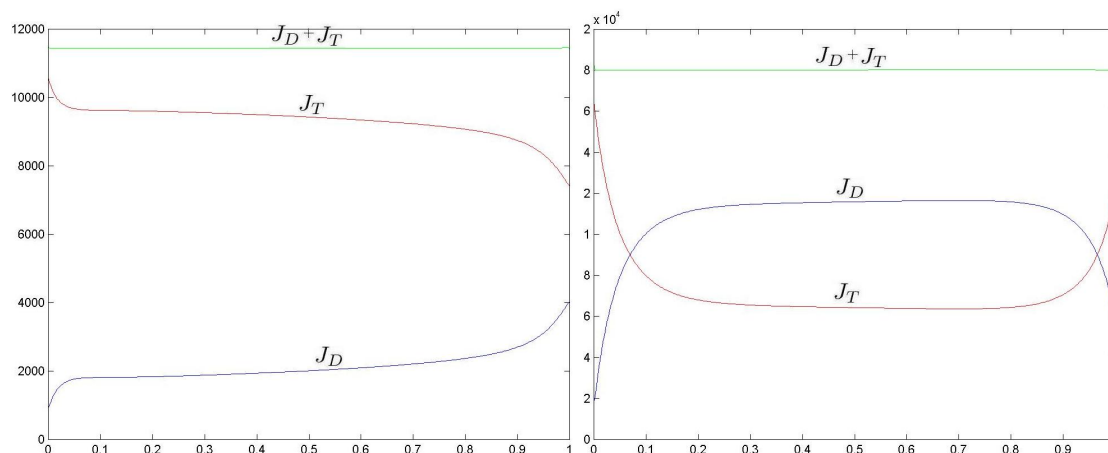


Figura 4.2: Gráficos do fluxo devido ao transporte, do fluxo devido a difusão e da soma dos dois fluxos quando  $\rho = 0.5$ ,  $\sigma' = 0.5/m$ ,  $\lambda' = 10.0/m$ ,  $L = 1.0m$  e condições de contorno  $T(0) = 1000K$  e  $T(L) = 300K$ . No primeiro gráfico temos  $k_0 = 10^{-5}T^2W/mK^2$  e no segundo  $k_0 = 10^{-7}W/mK^2$ .

expressão (3.21). Nestas simulações também escolhemos  $\rho(\mu) = \rho_0(\mu) = \rho_L(\mu)$  satisfazendo a condição de Fresnel (2.80).

Os resultados das simulações estão apresentados nas figuras 4.3-4.11. Na figura 4.3, temos o perfil de temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0 = 10^{-2}T$ . Na figura 4.4 temos novamente o perfil de temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas iguais a  $300K$  à esquerda,  $1000K$  à direita, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0 = 10^{-11}T^4$ . Na figura 4.5 mantemos os mesmos parâmetros da figura 4.4 e variamos  $k_0$ . O gráfico à esquerda temos  $k_0 = 10^{-12}T^5$  e no gráfico à direita  $k_0 = 0,14e^{0,0066T}$ . Nas figuras 4.6-4.9 aparecem gráficos da temperatura em termos do espaço e do tempo. Nessas figuras variamos apenas  $k_0$  e as condições iniciais e de contorno. Na figura 4.6 temos condições de contorno  $700K$  à esquerda e  $1200K$  à direita, com condição inicial  $1500K$  e  $k_0(T) = 10^{-1} \ln(T)$ . Na figura 4.7 temos condições de contorno  $1000K$  à esquerda e  $1700K$  à direita, com condição inicial  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-5}T^2$ . Na figura 4.8 temos condições de contorno  $1500K$  à esquerda e  $1700K$  à direita, com condição inicial  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-4}T^2$ . Na figura 4.9 temos condições de contorno  $1700K$  à esquerda e  $2000K$  à direita, com condição inicial  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-2}T + 10^{-5}T^2$ . Nas figuras 4.10-4.11 temos perfis de temperaturas depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ). No primeiro gráfico da figura 4.10 as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $900K$  à esquerda e  $k_0(T) = 0,35T - 89$ . Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $2000K$  a direita e variam de  $1300K$  a  $1900K$  à esquerda e  $k_0(T) = 10^{-1} \ln(T)$ . Na



figura 4.11 temos as temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $700K - 300K$ ,  $800K - 400K$ ,  $900K - 500K$  e  $1000K - 600K$  e  $k_0(T) = 0,14e^{0,0066T}$ .

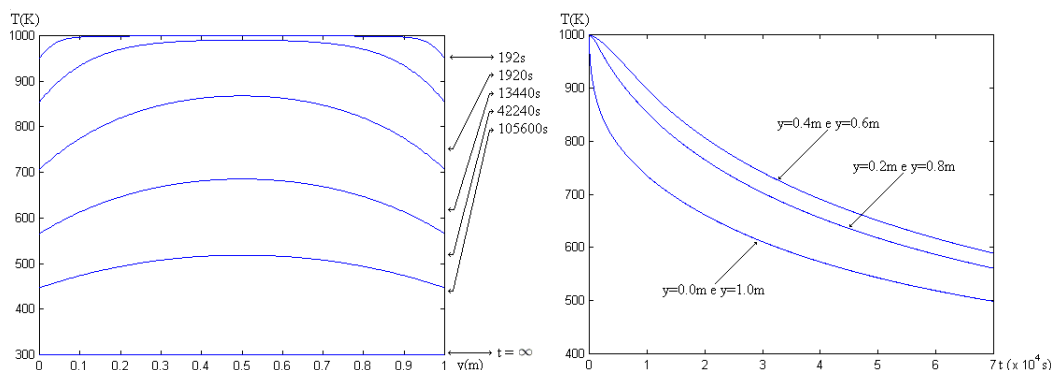


Figura 4.3: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $300K$  em ambas fronteiras, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0(T) = 10^{-2}T$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária  $T = 300K$ . À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

#### 4.4 Conclusão

Neste capítulo estabelecemos a existência de soluções clássicas para o problema de transferência de calor unidimensional na presença de radiação e condução quando a condutividade térmica  $k_0$  depende da temperatura. Os demais parâmetros ficaram sob as mesmas hipóteses do capítulo anterior. Observamos aqui que esse capítulo não generaliza o capítulo anterior porque essa análise não contempla o campo de velocidades, caso que é feito quando  $k_0$  é constante.

O método numérico usado aqui é essencialmente o mesmo do capítulo anterior, incluindo uma linearização para  $k_0(T)$ . Essa linearização não comprometeu significativamente o desempenho do algoritmo, sendo que as vantagens discutidas nos capítulos anteriores foram naturalmente herdadas aqui.

Os resultados numéricos apresentados mostram consistência com os resultados do capítulo anterior. Isso pode ser observado analisando os gráficos dos dois capítulos. As figuras 3.3 e 4.3 diferem apenas pela condutividade térmica  $k_0$ . Na figura 3.3 temos  $k_0 = 1.1$  e na figura 4.3 temos  $k_0 = 10^{-2}T$ . Como  $0 \leq T \leq 1000$ , então  $3 \leq k_0 = 10^{-2}T \leq 10$ . De fato, a temperatura na figura 4.3 cai mais rapidamente com o tempo e tende a ser mais suave, pois possui uma difusão maior no meio do domínio.

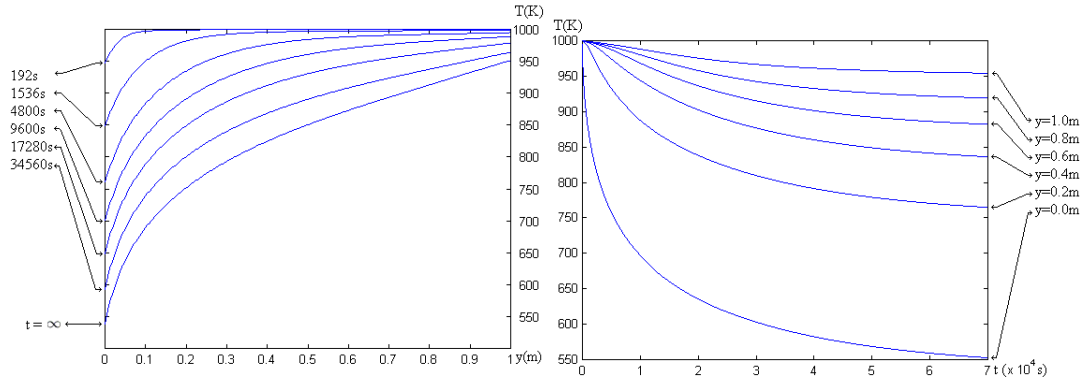


Figura 4.4: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $300K$  na fronteira à esquerda e  $1000K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $1000K$  e  $k_0(T) = 10^{-11}T^4$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

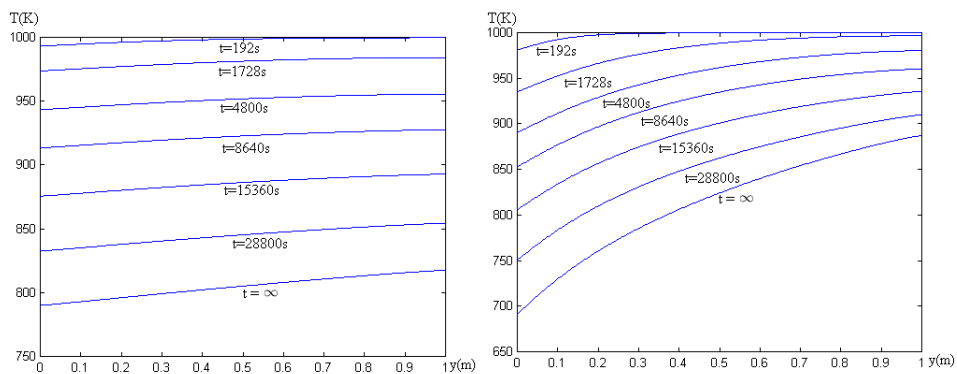


Figura 4.5: Perfil de temperatura em vários instantes de tempo quando a temperatura inicial constante igual a  $1000K$ , temperatura externa na fronteira à direita  $1000K$  e na fronteira à esquerda  $300K$ . No gráfico à esquerda  $k_0(T) = 10^{-12}T^5$  e no gráfico à direita  $0,14e^{0,0066T}$ .

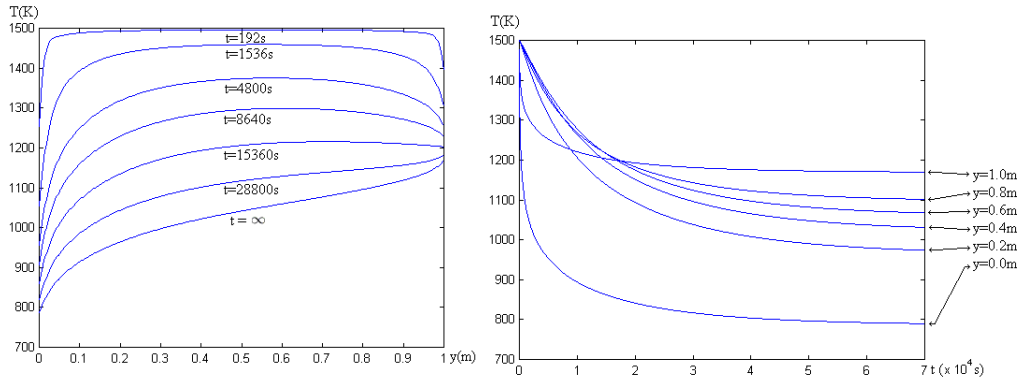


Figura 4.6: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $700K$  na fronteira à esquerda e  $1200K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $1500K$  e  $k_0(T) = 10^{-1} \ln(T)$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

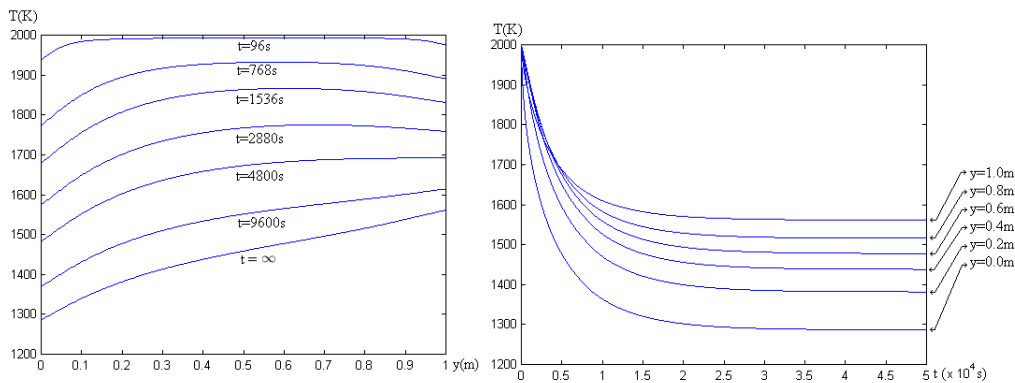


Figura 4.7: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1000K$  na fronteira à esquerda e  $1700K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-5} T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

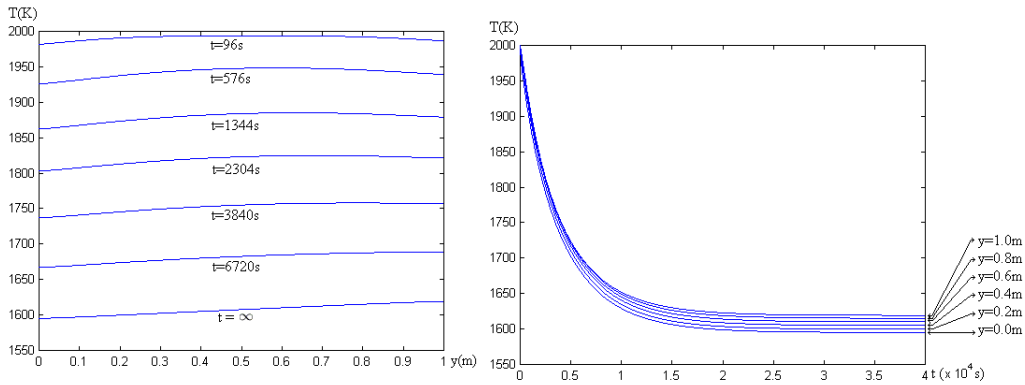


Figura 4.8: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1500K$  na fronteira à esquerda e  $1700K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-4}T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

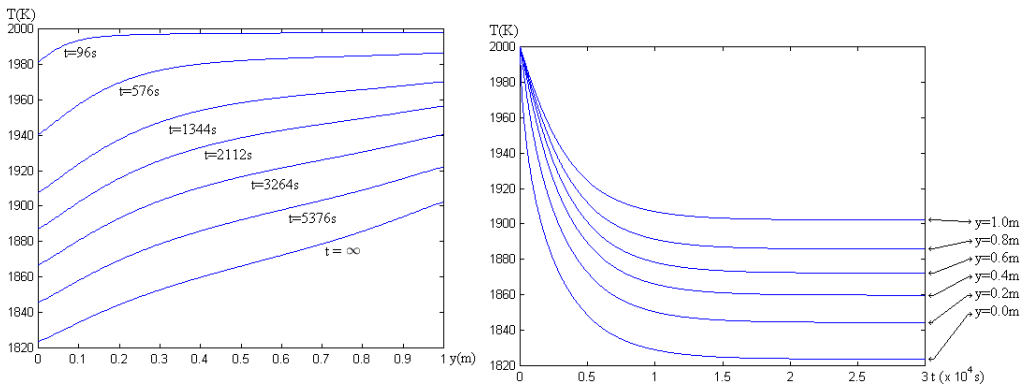


Figura 4.9: Gráficos da temperatura variando com o espaço e tempo quando as temperaturas externas são iguais a  $1700K$  na fronteira à esquerda e  $2000K$  na fronteira à direita, temperatura inicial constante igual a  $2000K$  e  $k_0(T) = 10^{-2}T + 10^{-5}T^2$ . À esquerda temos a evolução no tempo dos perfis de temperatura até a solução convergir para solução estacionária. À direita temos a temperatura nos cortes  $y = 0$ ,  $y = 0,2m$ ,  $y = 0,4m$ ,  $y = 0,6m$ ,  $y = 0,8m$  e  $y = 1,0m$ .

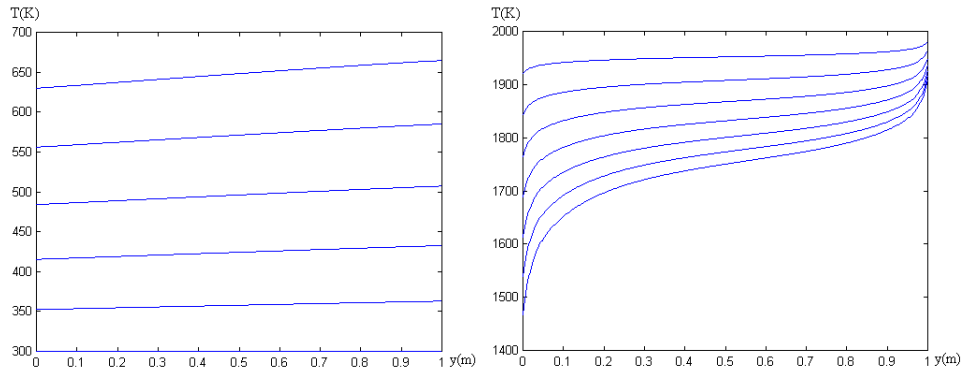


Figura 4.10: Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ). No primeiro gráfico as temperaturas externas são iguais a  $300K$  à esquerda e variam de  $300K$  a  $900K$  à direita e  $k_0 = 0,35T - 89$ . Já no segundo gráfico as temperaturas externas são  $2000K$  à direita e variam de  $1300K$  a  $1900K$  à esquerda e  $k_0(T) = 10^{-1} \ln(T)$ .

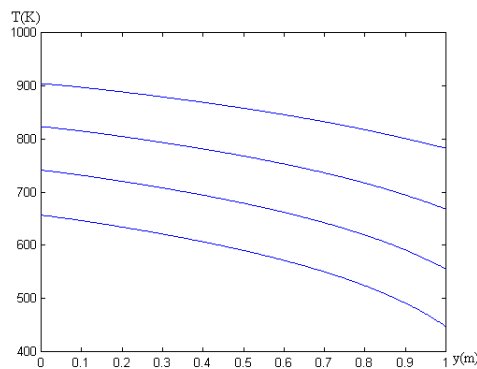


Figura 4.11: Perfis de temperaturas em depois de haver convergido para solução estacionária ( $t = \infty$ ). As temperaturas externas à esquerda e à direita para cada curva, respectivamente, são iguais a  $700K - 300K$ ,  $800K - 400K$ ,  $900K - 500K$  e  $1000K - 600K$  e  $k_0(T) = 0,14e^{0,0066T}$ .

## 5 TRABALHOS PARALELOS E FUTUROS

### 5.1 Problema Semi-Infinito

Nesta seção discutimos um trabalho desenvolvido pelo autor paralelamente a Tese. Apesar de ser um tópico relacionado a Tese, ele é tratado com um tópico paralelo porque a contribuição deste autor está apenas nas simulações numéricas. Os detalhes desse problema foi estudado na tese de F. Azevedo [2] e estão submetidos num trabalho conjunto com F. Azevedo, M. Thompson e M. Vilhena [4].

Colocaremos brevemente a idéia do problema: O sistema tridimensional acoplado (1.1)-(1.6), quando é introduzida uma adimensionalização adequada, é visto como uma perturbação do problema de Rosseland. A aproximação na fronteira resulta num problema que possui simetria e pode ser simplificado no seguinte sistema unidimensional num domínio semi-infinito  $(0, \infty)$ :

$$-\mu \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{I} + \lambda' \mathcal{I} = \int_{-1}^1 \left( \frac{\sigma'}{2} - \frac{2\pi\kappa'\tilde{\beta}_1}{\lambda'k_0} \mu'^2 \right) \mathcal{I} d\mu', \quad y > 0, \quad (5.1a)$$

$$\mathcal{I}(\mu) - \rho \mathcal{I}(-\mu) = g_b(\mu), \quad \mu < 0, \quad y = 0 \quad (5.1b)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{I}(y, \mu) = 0. \quad (5.1c)$$

A principal dificuldade desse problema reside no fato de o núcleo de espalhamento envolvido poder apresentar uma parte negativa que supera  $\lambda'$  em magnitude. De fato,  $\beta$  sendo um parâmetro crescente com o cubo da temperatura na fronteira, o principal interesse se voltava para altos valores de  $\beta$ , tipicamente três a quatro ordens de grandeza superiores a  $\lambda'$ . Para contornar essa dificuldade, o problema foi reformulado como uma equação integral e foram aplicadas técnicas de operadores auto-adjuntos para controlar a parte negativa do espalhamento.

A solução numérica do sistema (5.1) foi feita pelo método de ordenadas discretas  $S_N$ . Atualmente um outro trabalho relacionado está sendo desenvolvido onde o mesmo sistema é resolvido usando as mesmas técnicas do capítulo 2. A técnica funciona bem, pois a solução do problema semi-infinito possui decaimento exponencial quando  $y$  tende a infinito, como provado em [4].

### 5.2 Trabalhos Futuros

Vários problemas relacionados a tese podem ser abordados. Entre eles estão citados alguns:

1. Desenvolver a teoria de existência e unicidade de soluções do problema acoplado com o movimento. Para tal, poder-se-ia generalizar a teoria de [33]. Deve-se observar que tal teoria se baseia em técnicas bem distintas das utilizadas até o momento neste trabalho. O resultado seria, no entanto, de evidente relevância para o estudo dos fluxos radiativos.
2. Desenvolver uma teoria de existência e unicidade de soluções para o problema de transporte tridimensional em regiões não convexas.
3. Refinar a teoria de existência obtida em [30], obtendo soluções para o caso tridimensional sob hipóteses menos restritivas, aproximando a análise dos resultados obtidos para o caso unidimensional.
4. Realizar simulações numéricas de larga escala, buscando soluções aproximadas para problemas bidimensionais e tridimensionais.

## Apêndice A LEMAS TÉCNICOS E DEFINIÇÕES

### A.1 Definições

**Definição A.1.** *Introduzimos a norma que induz o espaço  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$  por*

$$\|q\|_{C^0} = \sup_{0 \leq y \leq L} \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} q(y, \mu). \quad (\text{A.1})$$

**Definição A.2.** *Para um  $\alpha$  fixo,  $0 < \alpha < 1$ , introduzimos a norma que induz o espaço  $C^\alpha([0, L], L^\infty[-1, 1])$  por*

$$\|q\|_{C^\alpha} = C_1 [q]_{C^\alpha} + \|q\|_{C^0} \quad (\text{A.2})$$

para alguma constante  $C_1 > 0$  que é definida convenientemente, onde

$$[q]_{C^\alpha} = \sup_{0 \leq x < y \leq L} \sup_{-1 \leq \mu \leq 1} \frac{|q(y) - q(x)|}{|y - x|^\alpha}$$

é a seminorma em  $C^\alpha$  e  $\|q\|_{C^0}$  é a norma de  $q$  em  $C^0([0, L], L^\infty[-1, 1])$ .

### A.2 Lemas Técnicos

**Lema A.1.** *A função de Planck*

$$B(\nu, T) = \eta_1^2 \frac{\nu_{ref}^3}{I_{ref}} \frac{2h_p \nu^3}{c^2} \left( e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} - 1 \right)^{-1}$$

possui primeira e segunda derivadas não negativas.

*Demonstração.* Como

$$B(\nu, T) = \eta_1^2 \frac{\nu_{ref}^3}{I_{ref}} \frac{2h_p \nu^3}{c^2} \left( e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} - 1 \right)^{-1},$$

então

$$\frac{\partial}{\partial T} B(\nu, T) = \eta_1^2 \frac{\nu_{ref}^3}{I_{ref}} \frac{2h_p \nu^3}{c^2} \left( e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} - 1 \right)^{-2} e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} \frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T^2 T_{ref}} \geq 0.$$

Também,

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} B(\nu, T) = C(\nu, T) \eta_1^2 \frac{\nu_{ref}^4}{I_{ref}} \frac{2h_p^2 \nu^4}{k_B c^2} \left( e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} - 1 \right)^{-3} e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} \frac{1}{T^4},$$

onde

$$C(\nu, T) = a e^{\frac{a}{T}} - 2T e^{\frac{a}{T}} + 2T + a, \quad a = \frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T_{ref}}.$$



Observe que basta mostrar que  $C(\nu, T) \geq 0$ . Para tal, escrevemos

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{a}{2T}\right) &= \int_0^{\frac{a}{2T}} \operatorname{sech}^2 s \, ds \\ &= \int_0^{\frac{a}{2T}} (1 - \tanh^2 s) \, ds \\ &\leq \int_0^{\frac{a}{2T}} ds \\ &= \frac{a}{2T}. \end{aligned}$$

Então

$$\tanh\left(\frac{a}{2T}\right) = \frac{e^{\frac{a}{2T}} - e^{-\frac{a}{2T}}}{e^{\frac{a}{2T}} + e^{-\frac{a}{2T}}} = \frac{e^{\frac{a}{T}} - 1}{e^{\frac{a}{T}} + 1} \leq \frac{a}{2T}.$$

Ou seja,

$$2T(e^{\frac{a}{T}} - 1) \leq a(e^{\frac{a}{T}} + 1),$$

o que implica em

$$C(\nu, T) = ae^{\frac{\nu}{T}} - 2Te^{\frac{\nu}{T}} + 2T + a \geq 0.$$

□

**Lema A.2.** Se  $\kappa'(\nu) < \lambda_{max}$ , então a função

$$g(T) = \frac{\partial}{\partial T} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' B(\nu, T) \, d\nu$$

satisfaz a seguinte estimativa:

$$g(T) \leq \lambda_{max} \frac{8\pi^4 h_p k_B^4 T_{ref}^4}{15 I_{ref} h^4 \nu_{ref} c^2} T^3 \quad (\text{A.3})$$

*Demonstração.* Pelo lema A.1, se  $\nu \geq 0$  e  $T > 0$ , então

$$\frac{\partial}{\partial T} B(\nu, T) \geq 0.$$

Isso nos leva a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \int_{\nu_0}^{\infty} \kappa' B(\nu, T) \, d\nu &= \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} \kappa' B(\nu, T) \, d\nu - \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\nu_0} \kappa' B(\nu, T) \, d\nu \\ &\leq \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} \kappa' B(\nu, T) \, d\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\infty} \kappa' \frac{\nu_{ref}^3}{I_{ref}} \frac{2h_p \nu^3}{c^2} \left( e^{\frac{h_p \nu \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}}} - 1 \right)^{-1} \, d\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \lambda_{max} \frac{2h_p k_B^4 T^4 T_{ref}^4}{I_{ref} h^4 \nu_{ref} c^2} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, dx \right), \quad x = \frac{h_p \nu_{ref}}{k_B T T_{ref}} \nu \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \lambda_{max} \frac{2h_p k_B^4 T^4 T_{ref}^4 \pi^4}{I_{ref} h_p^4 \nu_{ref} c^2 15} \right) \\ &= \lambda_{max} \frac{8\pi^4 h_p k_B^4 T_{ref}^4}{15 I_{ref} h_p^4 \nu_{ref} c^2} T^3, \end{aligned}$$

pois  $\kappa' \leq \lambda_{max}$ . Portanto, (A.3) é válida.

□

**Lema A.3.** A função

$$g(T) = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{\nu_0} B(\nu, T) d\nu$$

satisfaz a seguinte estimativa:

$$g(T) \leq \frac{8\pi^4 h_p k_B^4 T_{ref}^4}{15 I_{ref} h^4 \nu_{ref} c^2} T^3 \quad (\text{A.4})$$

*Demonstração.* Análoga ao lema A.2. □

**Lema A.4.** A função definida como

$$f(x) = \int_0^1 e^{-\frac{ax}{\mu}} d\mu \quad a > 0 \text{ e } x \geq 0$$

admite a seguinte estimativa:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \geq 0 \text{ e } C = C(a, \alpha)$$

*Demonstração.* Suponha sem perda de generalidade que  $x > y$ . Então temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \int_0^1 \left| e^{-\frac{ax}{\mu}} - e^{-\frac{ay}{\mu}} \right| d\mu \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{ay}{\mu}} \left| e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} - 1 \right| d\mu \\ &\leq \int_0^1 \left| e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} - 1 \right| d\mu \\ &= \int_0^1 \left( 1 - e^{-\frac{a(x-y)}{\mu}} \right) d\mu \\ &= 1 - f(z), \quad z = x - y \end{aligned}$$

Portanto, resta mostrar que

$$\sup_{z>0} \frac{1 - f(z)}{z^\alpha} < \infty$$

Defina

$$g(z) = \frac{1 - f(z)}{z^\alpha}.$$

Observe que  $g(z)$  é uma função contínua para  $z > 0$ . Para mostrar que  $g(z)$  é limitada é suficiente mostrar que são finitos os limites:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow 0} g(z).$$

Como  $f(z)$  é decrescente e positiva, o primeiro limite existe. Agora, basta calcular o limite dado por

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - f(z)}{z^\alpha} \quad (\text{A.5})$$

Para obter este limite, introduzimos a mudança de variáveis  $s = \mu^{-1}$ :

$$f(z) = \int_1^\infty e^{-azs} \frac{1}{s^2} ds$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left( -\frac{1}{s} e^{-azs} \right)_1^\infty - \int_1^\infty (-aze^{-azs}) \left( -\frac{1}{s} \right) ds \\ &= e^{-az} - az \int_1^\infty e^{-azs} \frac{1}{s} ds = e^{-az} - azE_1(az) \end{aligned}$$

onde  $E_1(x) := \int_1^\infty e^{-xs} \frac{1}{s} ds$  representa a função exponencial integral, cuja assintótica em torno da origem pode ser obtida expandindo o integrando em séries de Taylor e extraindo a singularidade logarítmica (ver [7, pág. 252] para detalhes):

$$E_1(x) = -(\gamma + \ln x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!}, \quad x > 0.$$

Assim temos o seguinte comportamento assintótico para  $f(z)$ :

$$f(z) = e^{-az} - azE_1(az) = 1 + az \ln(az) + O(z), \quad z \rightarrow 0$$

e finalmente, temos:

$$\frac{1 - f(z)}{z^\alpha} = -az^{1-\alpha} \ln(az) + O(z^{1-\alpha}), \quad z \rightarrow 0$$

o que implica que o limite (A.5) é finito.

Agora basta definir

$$C = \sup_{z>0} |g(z)|.$$

□

## Bibliografia

- [1] ATALAY, M. A. The critical slab problem for reflecting boundary conditions in one-speed neutron transport theory. *Ann. Nucl. Energy* 23 (1996), 183–193.
- [2] AZEVEDO, F. *Análise assintótica de um problema de transporte radiativo*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.
- [3] AZEVEDO, F. S., SAUTER, E., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. T. Existence theory and simulations for one-dimensional radiative flows. *Ann. Nucl. Energy* (aceito).
- [4] AZEVEDO, F. S., THOMPSON, M., SAUTER, E., AND VILHENA, M. T. Existence theory for a one-dimensional problem arising from the boundary layer analysis of radiative flows. *Prog. Nucl. Energy Special Issue INAC 2009* (submetido).
- [5] BARICHELLO, L. B., AND SIEWERT, C. E. A discrete ordinates solution for a non-grey model with complete frequency distribution. *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 62 (1999), 665 – 675.
- [6] BEL, M. G., AND GLASSTONE, S. *Nuclear Reactor Theory*. Van Nostrand Reinhold Co, New York, 1970.
- [7] BENDER, C. M. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, New York, 1978.
- [8] CALDEIRA, A. D. Application of the pn method to the matrix form transport equation. *Ann. Nucl. Energy* 32, 17 (2005), 1889 – 1894.
- [9] CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A., AND ZANG, T. A. *Spectral Methods. Fundamentals and Single Domains*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [10] DAVISON, B. *Neutron Transport Theory*. Oxford University Press, London, 1957.
- [11] FRANK, M., KLAR, A., LARSEN, E. W., AND YASUDA, S. Time-dependent simplified pn approximation to the equations of radiative transfer. *J. Comput. Phys.* 226, 2 (2007), 2289 – 2305.
- [12] FRANK, M., SEAİD, M., KLAR, A., RINNAM, R., AND THÖMMES, G. A comparison of approximate models for radiation in gas turbines. *Prog. Comput. Fluid Dyn.* 4 (2004), 191–197.
- [13] GARCIA, R. D. M., SIEWERT, C. E., AND THOMAS, J. R. J. The classical spherical-harmonics method in transport theory. *Trans. Ann. Nuclear Society* 71 (1994), 220 – 222.

- [14] GOTTLIEB, D., AND ORZAG, D. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1977.
- [15] HAUSER, E. B., P., P. R., AND VILHENA, M. T. An error bound estimate and convergence of the nodal-ltsn solution in a rectangle. *Ann. Nucl. Energy* 32, 10 (2005), 1146 – 1156.
- [16] KLAR, A., LANG, J., AND SEAİD, M. Adaptive solutions of spn-approximations to radiative heat transfer in glass. *International Journal of Thermal Sciences* 44, 11 (2005), 1013 – 1023.
- [17] LARSEN, E. W., THÖMMES, G., KLAR, A., SEAİD, M., AND GÖTZ, T. Simplified  $P_N$  approximations to the equations of radiative heat transfer and applications. *J. Comput. Phys.* 183 (2002), 652–675.
- [18] LEE, K. H., AND VISKANTA, R. Transient conductive-radiative cooling of an optical quality glass disk. *Int. J. Heat Mass Transfer* 41, 14 (1998), 2083 – 2096.
- [19] MODEST, M. F. *Radiative Heat Transfer*, second ed. Acad. Press, San Diego, 2003.
- [20] NAZ, S., AND LOYALKA, S. One speed criticality problems for a bare slab and sphere: Some benchmark results - ii. *Ann. Nucl. Energy* 35 (2008), 2426–2431.
- [21] PAO, C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, New York, 1992.
- [22] PAO, C. V. Quasilinear parabolic and elliptic equations with nonlinear boundary conditions. *Nonlinear Analysis* 66 (2007), 639–662.
- [23] PAZOS, R. P., THOMPSON, M., AND VILHENA, M. T. Error bounds for spectral collocation method for the linear Boltzmann equation. *Int. J. Comput. Numer. Analysis and Appl.* 1 (2002), 237–268.
- [24] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, terceira ed. Mcgraw-Hill, Singapura, 1986.
- [25] SAKURAI, A., MARUYAMA, S., SAKAI, S., AND NISHIKAWA, T. The effect of three-dimensional radiative heat transfer in cloud fields using the radiation element method. *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 93, 1-3 (2005), 79 – 87.
- [26] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T., AND LEITE, S. Q. B. The ltsn angular multigrid approach in a slab. *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 95, 3 (2005), 415 – 422.
- [27] SEGATTO, C. F., VILHENA, M. T., THOMPSON, M., AND BARROS, R. C. Generalized discrete ordinates methods for neutral particle transport problems in slab geometry. *Prog. Nucl. Energy* 50, 7 (2008), 788 – 794.

- [28] SIEWERT, C. E. On intensity calculations in radiative transfer. *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 50 (1993), 555 – 560.
- [29] SIEWERT, C. E. An improved iterative method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems. *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 54, 4 (1995), 599 – 605.
- [30] THOMPSON, M., VILHENA, M., AND BODMAN, B. Existence theory for radiative flows. *Transp. Theory Stat. Phys.* 37 (2008), 307–326.
- [31] VARGAS, R. F., SEGATTO, C. F., AND VILHENA, M. T. Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the  $LTS_N$ . *J. Quantit. Spectrosc. Radiat. Transf.* 105 (2007), 1–7.
- [32] VAZ, P. Neutron transport simulation (selected topics). *Radiation Physics and Chemistry* 78, 10 (2009), 829 – 842.
- [33] ZHANG, J., AND XIE, F. Global solution for one-dimensional model problem in thermally radiative magnetohydrodynamics. *Journal of Differential Equations*, 245, 7 (2008), 1853 – 1882.