

À Luz  
a quem agradeço  
de modo especial pela  
amizade e indispensável ajuda  
na organização bibliográfica deste trabalho.  
out/78  
caibj

rec 11.10.79

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

APLICAÇÃO DA ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL E DA  
ANÁLISE DE AGRUPAMENTOS HIERÁRQUICOS AO  
MAPEAMENTO COGNITIVO DE CONCEITOS FÍSICOS\*

Carlos Alberto dos Santos

Dissertação realizada sob a orientação  
do Dr. Marco Antonio Moreira, apresen-  
tada ao Instituto de Física da UFRGS  
em preenchimento parcial dos requisi-  
tos para a obtenção do título de Mes-  
tre em Física.

\* Trabalho parcialmente financiado pelas seguintes instituições:  
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior  
(CAPES) - Programa PICD/UFRN e Financiadora de Estudos e Proje-  
tos (FINEP).

Porto Alegre

1978

Dedico este trabalho a

Clodomiro e Albertina pela lição de vida;

Liana e Clarisse pela alegria de viver.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Marco Antonio Moreira, pela orientação e pelo apoio recebidos;

à Profª Victoria E. Herscovitz, pela preocupação em melhorar o trabalho, através de críticas e sugestões valiosíssimas;

à Maria Cecilia do Amaral, pelo cuidadoso e eficiente trabalho datilográfico;

ao Sr. Cleto Tartarelli, pela confecção dos gráficos e ilustrações;

ao Sr. Flávio Rafall Volcato, do CPD da UFRGS, pela valiosa colaboração na fase computacional do trabalho;

à UFRN, através do seu Departamento de Física Teórica e Experimental, pelo afastamento concedido;

à CAPES e à FINEP, pelas bolsas de estudo;

aos professores e colegas do Instituto de Física da UFRGS, cuja amizade tornou tão agradável a realização deste trabalho.

Porto Alegre, dezembro de 1979

Carlos Alberto dos Santos

## RESUMO

Investigou-se a influência da organização do conteúdo de Termodinâmica na estrutura cognitiva do aluno. O experimento foi realizado com estudantes de Física Geral da UFRGS.

Testes de associação de conceitos foram usados como instrumentos de medida, e analisados através de técnicas de análise multidimensional (AMD) e análise de agrupamentos hierárquicos (AAH), as quais fornecem um "mapeamento cognitivo" dos conceitos usados na pesquisa.

Os resultados obtidos sugerem que a influência de diferentes organizações dadas ao conteúdo da matéria de ensino sobre a estrutura cognitiva é detectada pela AMD e AAH.

## ABSTRACT

The effect of different approaches to content organization on the learner's cognitive structure was investigated. Subject matter was thermodynamics at introductory college level and the experiment was carried out at UFRGS.

Concept association tests were used as measurement instruments, and analysed through multidimensional scaling (MDS) and hierarchical clustering analysis (HCA), which provided a "cognitive mapping" of the concepts used in the investigation.

The obtained results suggest that the effect, on the learner's cognitive structure, of different content organizations given to the subject matter is detected by MDS and AAH.

## Í N D I C E

I - INTRODUÇÃO	1
II - NOÇÕES SOBRE A TEORIA COGNITIVA DE DAVID AUSUBEL	7
II.1 - Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica	7
II.2 - Subsunções	10
II.3 - Assimilação e Assimilação Obliteradora	11
II.4 - Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integrativa	14
II.5 - Aprendizagem Superordenada	16
III - MAPEAMENTO COGNITIVO	17
III.1 - Conceituação	17
III.2 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)	20
III.3 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)	28
IV - ARRANJO EXPERIMENTAL	30
IV.1 - As Amostras	30
IV.2 - As Duas Abordagens ao Conteúdo	31
V - ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL	35
V.1 - Introdução	35
V.2 - O Método de Torgerson	39
V.2.1 - Características Gerais	39
V.2.2 - Formalismo Matemático	40
V.3 - O Método de Kruskal	44
V.3.1 - Características Gerais	44
V.3.2 - Formalismo Matemático	46

V.3.3 - Uma Aplicação do Método	62
V.4 - O Método de Guttman e Lingoes	67
V.4.1 - Características Gerais	67
V.4.2 - Formalismo Matemático	69
V.4.3 - Comportamento do Algoritmo: Exemplo Numérico	81
V.5 - O Método de Carrol e Chang	87
V.5.1 - Características Gerais	87
V.5.2 - Formalismo Matemático	89
V.5.3 - Algumas Aplicações	92
VI - ANÁLISE DE AGRUPAMENTOS HIERÁRQUICOS	106
VI.1 - A Métrica da AAH	106
VII - RESULTADOS	116
VII.1 - Determinação das Dimensões Apropriadas na Análise Multidimensional	116
VII.2 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)	122
VII.3 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)	132
VII.3.1 - Grupo Controle	132
VII.3.2 - Grupo Experimental	139
VII.4 - Convergência dos Testes de Associação de Conceitos	147
VII.4.1 - Grupo Experimental	148
VII.4.2 - Grupo Controle	150
VIII - SUMÁRIO E CONCLUSÕES	152
VIII.1 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)	153

VIII.2 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)	156
VIII.3 - Continuidade do Trabalho: Algumas Sugestões	157
APÊNDICE	
A - CONTEÚDO DAS UNIDADES DO GRUPO EXPERIMENTAL	159
B - CONTEÚDO DAS UNIDADES DO GRUPO CONTROLE	160
C - GUIAS DE ESTUDO PARA O GRUPO EXPERIMENTAL E NOTAS DE TERMODINÂMICA ELABORADAS DE ACORDO COM A TEORIA DE AUSUBEL	161
D - GUIAS DE ESTUDO PARA O GRUPO CONTROLE	230
E - TESTES DE ASSOCIAÇÃO DE CONCEITOS	246
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	252

## I - INTRODUÇÃO

Os objetivos desse trabalho são: a) aplicar a análise multidimensional (AMD) [T58], [K64a], [K64b], [LR77], [She62a] e a análise de agrupamentos hierárquicos (AAH) [Jo67] ao "mapeamento cognitivo" de conceitos físicos; b) investigar a influência da organização dada ao conteúdo de ensino, na estrutura cognitiva do aluno, à luz da AMD e da AAH.

Os instrumentos de medidas usados na pesquisa foram dois testes de associação de conceitos (Capítulo III). No teste de associação numérica de conceitos (TANC) [T58], são apresentados todos os possíveis pares de conceitos selecionados para a pesquisa, aos quais se atribuem valores em uma escala de 1 a 7. Se o aluno julga que os conceitos de um par são extremamente relacionados, segundo seu critério, deve marcar o número 1. Ao contrário, se ele julga que os conceitos têm pouquíssima ou nenhuma relação, marcará o número 7. Os números de 2 a 6 são usados em situações intermediárias. Essas medidas, denominadas medidas de similaridade ou medidas de proximidade, formam uma matriz simétrica, com diagonal nula, que será objeto de análise estatística. Isto é, a matriz de similaridade é a entrada ("input") dos algoritmos numéricos da AMD e da AAH.

No outro instrumento usado, o teste de associação escrita de conceitos (TAEC) [GH63] cada conceito selecionado é escrito numa folha, e os alunos devem escrever abaixo de cada um, os conceitos que julga serem a ele relacionados. A tarefa é realizada em um minuto\* para cada conceito-chave (conceito selecio

---

\* Tempo usualmente adotado.



nado para a pesquisa). Ao contrário do TANC, que fornece diretamente as medidas de similaridade entre os conceitos, o TAEC fornece essas medidas apenas indiretamente. Isto é, cada conceito-chave é seguido por uma lista de conceitos a ele relacionados. A medida de similaridade entre dois conceitos-chave é proporcional ao número de conceitos associados iguais e às posições que esses conceitos ocupam em cada lista de conceitos associados. Com base nesse pressuposto, define-se um coeficiente de relacionamento [GH63] entre os conceitos-chave (Capítulo III). Esses coeficientes de relacionamento, que assumem valores de 0 a 1, irão constituir a matriz de similaridade a ser analisada pelos algoritmos numéricos.

A escolha dos referidos testes como instrumentos de medida deve-se ao fato de que são os mais usados, entre tantos outros [P77], e que não é do nosso conhecimento qualquer análise comparativa de suas aplicações.

Talvez a primeira aplicação de tais testes numa pesquisa na área de ensino de ciências seja o trabalho de Johnson [J67]. Surgiram a seguir outros trabalhos na mesma área [Sh72], [Sh73], [Sh74], [GS75], [Pr76], [RP76] e [M77a]. Johnson [J67] e Moreira [M77a] analisaram os resultados dos testes utilizando-se da estatística usual, basicamente análise de variância. Nos demais trabalhos citados os dados foram analisados segundo a análise multidimensional, uma técnica estatística capaz de estabelecer uma configuração de  $n$  pontos a partir das distâncias entre eles. Sob o ponto de vista de análise numérica, uma aplicação da AMD resume-se em efetuar o ajuste de uma configuração espacial a um conjunto de medidas, tais como distâncias entre pon

tos, correlações entre variáveis, ou medidas de similaridade entre conceitos de uma certa área do conhecimento. Isto é, dadas  $n(n-1)/2$  medidas de proximidade (distâncias, correlações ou similaridades) entre  $n$  objetos (pontos, variáveis, estímulos ou conceitos) a AMD estabelece uma configuração de  $n$  pontos de modo que as distâncias e as medidas de proximidade sejam monotonicamente relacionadas.

Sob o ponto de vista da aplicação ao "mapeamento cognitivo", a AMD exige que se suponha uma organização conceitual na memória dos alunos, constituindo o que se denomina "estrutura cognitiva". Supõe-se que essa organização pode ser visualizada através de um modelo geométrico, no qual uma configuração de  $n$  pontos, num espaço  $r$ -dimensional, representa a estrutura cognitiva. Os pontos representam os conceitos e as distâncias são relacionadas às medidas de similaridade, obtidas com a aplicação do TAEC e do TANC. Supõe-se ainda que a estrutura cognitiva pode ser representada por uma configuração num espaço Euclidiano, onde as distâncias entre os pontos são calculadas através da relação

$$d_{ij} = \left[ \sum_{\ell=1}^r (X_{i\ell} - X_{j\ell})^2 \right]^{1/2}, \quad (I.1)$$

$X_{i\ell}$  e  $X_{j\ell}$  sendo as  $\ell$ -ésimas coordenadas dos pontos  $i$  e  $j$ , respectivamente.

Vale salientar que utilizamos o caso particular do espaço Euclidiano, mas poderíamos ter usado um espaço métrico qual

quer, tal como o  $R_p^r$ , cuja distância é definida em (I.2)\*.

$$d_{ij} = \left[ \sum_{\ell=1}^r |x_{i\ell} - x_{j\ell}|^p \right]^{1/p} \quad (\text{I.2})$$

Isto é, no caso geral, a aplicação da AMD exige que se suponha a existência de um espaço métrico qualquer.

Existem dois tipos gerais de algoritmos de AMD: algoritmos métricos e não métricos. Os algoritmos métricos caracterizam-se fundamentalmente por usarem os valores das similaridades no processo de ajuste enquanto os não métricos usam apenas a ordenação dessas medidas. A ordenação das similaridades é pois, a única informação essencial para os algoritmos não métricos. No capítulo V são descritos alguns dos mais conhecidos algoritmos métricos e não métricos.

No nosso trabalho utilizamos um algoritmo não métrico, o MINISSA-I [L73], [LR77], cuja sigla significa "Michigan Israel Netherland Integrated Smallest Space Analysis". O programa inicia com uma configuração mais ou menos arbitrária e prossegue ajustando os pontos, de modo que a ordem das distâncias seja tão próxima quanto possível da ordem das similaridades, segundo o critério dos mínimos quadrados. Isto é, ajusta-se as distâncias às similaridades de modo que elas sejam monotonicamente relacionadas. O ajuste é feito em vários espaços com diferentes dimensões, e um critério de significância estatística (Capítulo VII)

---

\* Kolmogorov, A.N. & Formin, S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Vol. 1, Rochester, Graylock Press, 1957. p. 19.

orienta a escolha do espaço apropriado.

Conforme já foi dito, supõe-se que as medidas de similaridade reflitam uma estrutura métrica, particularmente no espaço Euclideano. Quando essas medidas violam de forma inaceitável tal hipótese, o ajuste não apresenta significância estatística, no sentido em que uma matriz de dados aleatórios poderia fornecer a mesma configuração. Nesse caso diremos que os conceitos não estão estruturados segundo tal métrica. Contudo, embora a organização não reflita uma métrica num espaço concreto, ela pode apresentar algum tipo de hierarquia conceitual. Tal informação pode ser obtida através da análise de agrupamentos hierárquicos (AAH), desenvolvida no Capítulo VI.

AAH é uma técnica alternativa, de muito valor quando as medidas de similaridade violam de forma inaceitável uma determinada métrica. Como pode ser visto no Capítulo VI, a definição de distância na AAH satisfaz a uma métrica particular, embora esta não defina um espaço concreto. AAH apresenta a hierarquia na formação de aglomerados de conceitos. Os conceitos mais fortemente relacionados e mais importantes no contexto do conteúdo são os primeiros a se agruparem. Os agrupamentos seguem-se numa ordem hierárquica, segundo a importância de cada conceito na organização do conteúdo.

AAH admite, portanto, que a configuração pertença a um espaço não-Euclideano, abstrato, com uma métrica particular. Nesse espaço abstrato não se pode evidentemente visualizar as posições dos pontos, ou conceitos, como no caso da AMD, mas pode-se saber como eles se agrupam, ou seja, a ordem na qual eles formam "clusters", o que não deixa de ser um dado relevante so

bre a organização espacial.

O segundo objetivo dessa dissertação é investigar a influência, na "estrutura cognitiva" do aluno, da organização dada ao conteúdo de ensino, à luz da AMD e da AAH. Isto é, até que ponto a organização de um conteúdo modifica a "estrutura cognitiva" existente antes da aprendizagem? Essa investigação é feita sob o ponto de vista da AMD e da AAH, e com a utilização dos dois testes de associação de conceitos já mencionados (TANC e TAEC).

Duas organizações do conteúdo de Termodinâmica, ao nível de Física Geral, foram apresentadas a duas turmas da disciplina Física II do Instituto de Física da UFRGS, no primeiro semestre de 1978. A organização apresentada ao grupo controle foi a do livro-texto Física, Vol. I-2, de Resnick e Halliday [RH74] enquanto que ao grupo experimental apresentou-se uma organização baseada na teoria da aprendizagem de Ausubel [A68], [M78]. Não se trata aqui de saber qual a melhor organização, mas como cada uma modifica a "estrutura cognitiva" existente antes da aprendizagem.

Tenta-se também abordar o problema de convergência dos testes de associação de conceitos, i.e., tenta-se investigar até que ponto eles medem as mesmas propriedades da "estrutura cognitiva".

Algumas noções da teoria de Ausubel, relevantes para o nosso estudo, serão apresentados no capítulo seguinte, enquanto no Capítulo IV encontra-se a descrição do arranjo experimental.

## II - NOÇÕES SOBRE A TEORIA COGNITIVA DE DAVID AUSUBEL

Como o próprio título sugere, neste capítulo apresentaremos uma descrição parcial da teoria de Ausubel, tendo em vista que ela foi usada na nossa experiência, e também porque ela nos parece ser potencialmente relevante para o ensino de Física em geral. Evidentemente a descrição da teoria de Ausubel num só capítulo é uma tarefa por demais ambiciosa, porém a apresentação de algumas noções fundamentais para a organização de conteúdos de Física nos parece imprescindível. Além da obra do próprio autor [A68], uma importante referência é o livro de J. D. Novak [N77], no qual ele apresenta uma compreensível interpretação de tal teoria.

O que se segue sobre a teoria de Ausubel foi extraído da referência [M78], onde aplicações no ensino de Física são especificamente abordadas.

### II.1 - Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica

A idéia central da teoria de Ausubel é a de aprendizagem significativa. Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo através do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com alguns conceitos específicos existentes na estrutura cognitiva, os quais Ausubel define como conceitos subsunçores ou simplesmente subsunçores.

A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais, mais inclusivos. Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo.

Em Física, por exemplo, se os conceitos de força e campo já existem na estrutura cognitiva do aluno eles servirão de subsunores para novas informações referentes a certos tipos de força e campo como, por exemplo, a força e o campo eletromagné-ticos. Entretanto, este processo de "ancoragem" da nova informação resulta em crescimento e modificação do conceito subsunocor. Isso significa que os subsunores existentes na estrutura cognitiva podem ser abrangentes e bem desenvolvidos ou limitados e pouco desenvolvidos dependendo da frequência com que ocorre a aprendizagem significativa em conjunto com um dado subsunocor. No exemplo dado, uma idéia intuitiva de força e campo serviria como subsunocor para novas informações referentes a forças e campos gravitacional, eletromagnético e nuclear, por exemplo; à medidá porém, que esses novos conceitos fossem aprendidos de maneira significativa isso resultaria em crescimento e elaboração dos conceitos subsunores iniciais. Isto é, os conceitos de força e campo ficariam mais elaborados, mais inclusivos e mais aptos a servir de subsunores para novas informações relativas a forças

e campos ou correlatas.

Contrastando com a aprendizagem significativa, Ausubel define aprendizagem mecânica como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Nesse caso, a nova informação é armazenada de maneira arbitrária, não havendo interação entre a nova informação e aquela já armazenada. O conhecimento assim adquirido fica arbitrariamente distribuído na estrutura cognitiva sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos. A aprendizagem de pares de sílabas sem sentido é um exemplo típico de aprendizagem mecânica, porém a simples memorização de fórmulas, leis e conceitos em Física, pode também ser tomada como exemplo embora se possa argumentar que algum tipo de associação ocorrerá nesse caso. Na verdade, Ausubel não estabelece a distinção entre aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica como sendo uma dicotomia e sim como um "continuum". Da mesma forma, essa distinção não deve ser confundida com a distinção entre aprendizagem por descoberta e aprendizagem por recepção. Segundo Ausubel, na aprendizagem por recepção o que deve ser aprendido é aprendido em sua forma final, enquanto que na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo estudante. Entretanto, após a descoberta em si a aprendizagem só é significativa se o conteúdo descoberto ligar-se a conceitos subsunçores relevantes já existentes na estrutura cognitiva. Ou seja, quer por recepção como por descoberta a aprendizagem é significativa, segundo a concepção Ausubeliana, se a nova informação incorpora-se de forma não



arbitrária à estrutura cognitiva.

## II.2 - Subsunçores

Supondo que a aprendizagem significativa deve ser preferida em relação à aprendizagem mecânica e que aquela pressupõe a existência prévia de conceitos subsunçores, o que fazer quando eles não existem? Como pode a aprendizagem ser significativa nesse caso? De onde vêm os subsunçores? Como se formam?

Uma resposta plausível é que aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire informação numa área de conhecimento completamente nova para ele. Isto é, aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados. À medida que a aprendizagem começa a ser significativa esses subsunçores vão ficando cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações.

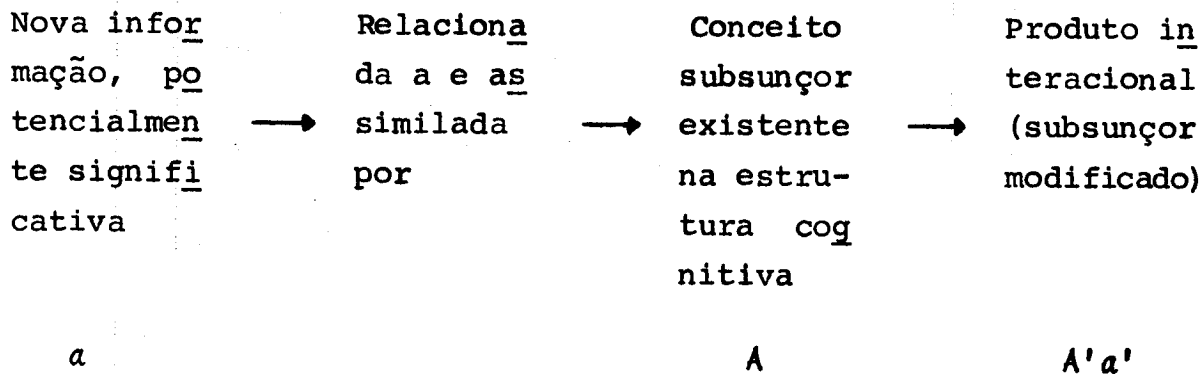
Outra possível resposta é que em crianças pequenas conceitos são adquiridos através de um processo conhecido como formação de conceitos o qual envolve generalizações de instâncias específicas. Porém ao atingir a idade escolar a maioria das crianças já possui um conjunto adequado de conceitos que permite a ocorrência da aprendizagem significativa. A partir daí, apesar de que ocasionalmente ocorre ainda a formação de conceitos, a maioria dos novos conceitos é adquirida através de assimilação,

diferenciação progressiva e reconciliação integrativa de conceitos [N77], processos que serão discutidos posteriormente.

Ausubel, por outro lado, recomenda o uso de organizadores avançados que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. O uso de organizadores avançados é uma estratégia proposta por Ausubel para deliberadamente manipular a estrutura cognitiva a fim de facilitar a aprendizagem significativa. Organizadores avançados são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si. Contrariamente a sumários que são ordinariamente apresentados ao mesmo nível de abstração, generalidade e inclusividade, simplesmente destacando certos aspectos do assunto, organizadores são apresentados num nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade. Segundo o próprio Ausubel, no entanto, a principal função do organizador avançado é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa. Ou seja, organizadores avançados são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como "pontes cognitivas".

### II.3 - Assimilação e Assimilação Obliteradora

Ausubel descreve o processo de subsunção através do que ele chama de "princípio da assimilação", o qual é representado simbolicamente da seguinte maneira:



Portanto, a assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição  $a$ , potencialmente significativo, é assimilado sob uma idéia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo. Tal como sugerido no diagrama, não só a nova informação  $a$  mas também o conceito subsunçor  $A$ , com o qual ela se relaciona, são modificados pela interação. Além disso,  $a'$  e  $A'$  permanecem relacionados como coparticipantes de uma nova unidade  $a'A'$ , que nada mais é do que o subsunçor modificado.

Por exemplo, se o conceito de força nuclear deve ser aprendido por um aluno que já possui o conceito de força bem estabelecido em sua estrutura cognitiva, o novo conceito específico (força nuclear) será assimilado pelo conceito mais inclusivo (força) já adquirido. Entretanto, considerando que esse tipo de força é de curto alcance (em contraposição a outros que são de longo alcance) não somente o conceito de força nuclear adquirirá significado para o aluno, mas também o conceito geral de força que ele já possuía será modificado e tornar-se-á mais inclusivo (i.e., seu conceito de força incluirá agora também forças

de curto alcance).

Ausubel sugere que a assimilação ou ancoragem provavelmente tem um efeito facilitador na retenção. Para explicar como novas informações recentemente assimiladas permanecem disponíveis durante o período de retenção ele admite que, durante um período de tempo variável, elas permanecem dissociáveis de suas idéias âncora e, portanto, reproduzíveis como entidades individuais:

$$A'a' \rightleftharpoons A' + a'$$

Ou seja, o produto interacional  $A'a'$ , durante um certo período de tempo, é dissociável em  $A'$  e  $a'$  favorecendo assim a retenção de  $a'$ . No entanto, apesar de que a retenção é favorecida pelo processo de assimilação, o conhecimento assim adquirido está ainda sujeito à influência erosiva de uma tendência reducionista da organização cognitiva: é mais simples e econômico reter apenas as idéias, conceitos e proposições mais gerais e estáveis do que as novas idéias assimiladas. Imediatamente após a aprendizagem significativa, começa um segundo estágio de subsunção: a assimilação obliteradora. As novas informações tornam-se espontânea e progressivamente menos dissociáveis de suas idéias âncora (subsunçores) até que não mais estejam disponíveis, i.e., não sejam mais reproduzíveis como entidades individuais. Atinge-se então um grau de dissociabilidade nulo e  $A'a'$  reduz-se simplesmente a  $A'$ . O esquecimento é, portanto, uma continuação temporal do mesmo processo de assimilação que facilita a aprendiza

gem e a retenção de novas informações.

Observa-se, no entanto, que a ocorrência da assimilação obliteradora como uma continuação natural da assimilação não significa que o subsunçor volta à sua forma original. O resíduo da assimilação obliteradora é  $A'$ , o membro mais estável do produto  $A'a'$ , i.e., o subsunçor modificado. Outro aspecto a ser destacado é que, obviamente, descrever o processo de assimilação em termos de uma única interação  $A'a'$  é uma simplificação pois, em menor escala, uma nova informação interage também com outros subsunçores e o grau de assimilação em cada caso depende da relevância do subsunçor.

#### II.4 - Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integrativa

À medida que a aprendizagem significativa ocorre, conceitos são desenvolvidos, elaborados e diferenciados em decorrência de sucessivas interações. Do ponto de vista Ausubeliano, o desenvolvimento de conceitos é facilitado quando os elementos mais gerais, mais inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar e, posteriormente, esse conceito é progressivamente diferenciado em termos de detalhe e especificidade. Segundo Ausubel, o princípio da diferenciação progressiva deve ser levado em conta ao programar o conteúdo, i.e., as idéias mais gerais e mais inclusivas da disciplina devem ser apresentadas no início para, somente então, ser progressivamente diferenen

ciadas em termos de detalhe e especificidade. Ao propor isso, Ausubel baseia-se em duas hipóteses: a) É mais fácil para seres humanos captar aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo, previamente aprendido, do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas. b) A organização do conteúdo de uma certa disciplina na mente de um indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as idéias mais inclusivas estão no topo da estrutura e progressivamente incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados.

Entretanto, a programação do conteúdo deve não só proporcionar a diferenciação progressiva mas também explorar explicitamente relações entre proposições e conceitos, chamar atenção para diferenças e similaridades importantes e reconciliar inconsistências reais ou aparentes. Isso deve ser feito para atingir-se o que Ausubel chama de reconciliação integrativa e que ele descreve como uma antítese à prática usual dos livros texto em separar idéias e tópicos em capítulos e seções.

Segundo Novak [N77], para atingir-se a reconciliação integrativa de forma mais eficaz deve-se organizar o ensino "descendo e subindo" nas estruturas conceituais hierárquicas a medida que a nova informação é apresentada. Isto é, começa-se com os conceitos mais gerais, mas é preciso ilustrar logo como os conceitos subordinados estão a eles relacionados e, então, voltar, através de exemplos, a novos significados para os conceitos de ordem mais alta na hierarquia.

## II.5 - Aprendizagem Superordenada

À medida que ocorre a aprendizagem significativa, além da elaboração dos conceitos subsunçores é também possível a ocorrência de associações entre esses conceitos. Por exemplo, à medida que uma criança desenvolve os conceitos de cão, gato, leão, etc., ela pode mais tarde aprender que todos esses são subordinados ao conceito de mamífero. À medida que o conceito de mamífero é desenvolvido, os conceitos previamente aprendidos assumem a condição de subordinados e o conceito de mamífero representa uma aprendizagem superordenada [N76].

### III - MAPEAMENTO COGNITIVO

#### III.1 - Conceituação

Instrução pode ser entendida como a comunicação da estrutura de um conteúdo através de uma fonte (i.e. professor, livro-texto etc) para outra fonte (i.e., aluno). Embora a instrução seja um processo interativo, essa visão unilateral tem um valor heurístico. Ela nos permite enumerar alguns dos importantes estágios que a estrutura de um conteúdo atravessa e através dos quais (provavelmente) é transformada. Shavelson [Sh74] sugere uma possível representação desse fluxo, apresentada na Figura III.1.

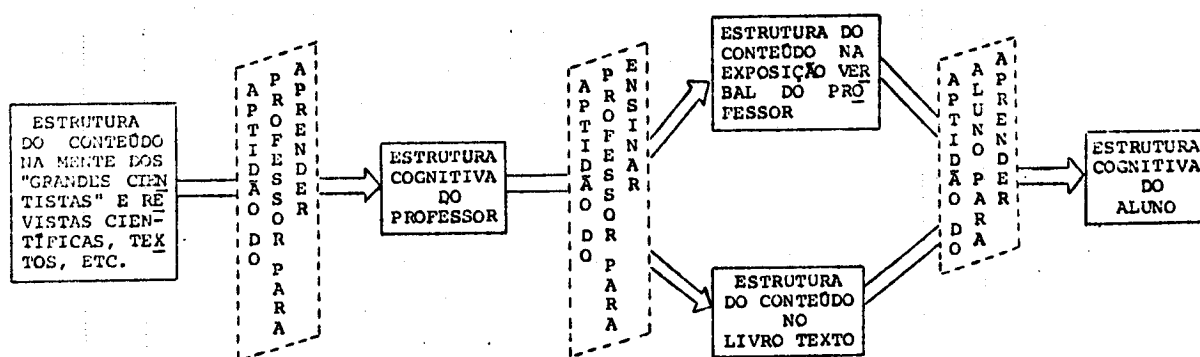


Figura III.1 - Estágios da transferência da estrutura de um conteúdo para a estrutura cognitiva do aluno.



Podemos esperar que a estrutura de um conteúdo repouse nas mentes dos "grandes cientistas". Esta estrutura é comunicada através dos seus trabalhos de pesquisa e livros textos avançados. Ela é "absorvida" e armazenada na estrutura cognitiva - aqui entendida como uma organização conceitual hierárquica - do professor em maior ou menor grau de "fidedignidade". O professor tenta comunicar a estrutura do conteúdo ao aluno através de exposição verbal, material escrito ou outro meio qualquer. Esta comunicação é facilitada ou limitada pela aptidão do professor para realizar a tarefa. Isto é, quando o professor lê os escritos dos "grandes cientistas", sua aptidão para a aprendizagem funciona como um filtro que terá conseqüências na formação da sua estrutura cognitiva. No momento em que ele vai ensinar, sua aptidão para ensinar também funciona como um filtro, podendo alterar a transmissão da sua estrutura no momento da exposição. Finalmente, a aptidão do aluno para aprender funciona como um terceiro filtro no processo de comunicação da estrutura de um conteúdo.

É evidente que esta é uma visão muito simplificada do processo ensino-aprendizagem. Poderíamos, por exemplo, fazer uma pergunta mais fundamental: Como o conhecimento que uma pessoa possui interage com o material instrucional para produzir uma nova estrutura de conhecimento? Porém, o acesso ao que uma pessoa sabe e, em particular, como o seu conhecimento é organizado, é um problema extremamente complicado. Contudo, se as pesquisas sobre o ensino devem progredir, alguma atenção deve ser concentrada no acesso à estrutura cognitiva.

Numa primeira aproximação, pode-se elaborar um modelo

bastante simples para a estrutura cognitiva, e à medida que os dados experimentais forem permitindo, pode-se sofisticá-lo. A estrutura cognitiva pode ser algo como uma configuração onde os pontos representam conceitos de uma certa área de conhecimento, e as distâncias entre os pontos medem o grau de relacionamento que há entre os conceitos. Quer dizer, quanto mais próximos, mais relacionados estão os conceitos. Outra propriedade de um modelo simples para a estrutura cognitiva poderia ser a organização hierárquica, sugerida por Ausubel [A68]. Assim, os conceitos mais gerais, mais inclusivos ficariam no topo dessa hierarquia.

Concretamente, o modelo para a estrutura cognitiva a ser testado nesse trabalho tem características geométricas, onde os conceitos são representados por pontos de uma configuração espacial, e as distâncias representam o grau de relacionamento entre os conceitos.

Outra característica importante do modelo refere-se à hierarquia conceitual, ou à hierarquia na formação de aglomerados de conceitos (Capítulo VI). Em primeiro lugar os conceitos mais importantes se agrupam, e esses aglomerados "atraem" outros conceitos a eles relacionados. Essa "atração" diminui com a diminuição da importância do conceito no contexto do conteúdo apresentado.

Definido o modelo, resta-nos desenvolver e testar técnicas de medida para sua investigação. No ensino de Ciências de um modo geral, e no de Física em particular, a solução de problemas tem sido largamente usada para investigar a aquisição de conhecimento conceitual. No caso de uma pesquisa sobre a estrutura cognitiva, esse instrumento talvez seja muito drástico, prin

principalmente se levarmos em conta a simplificação do nosso modelo, onde a habilidade básica exigida refere-se à memória. O aluno deve ser capaz de se lembrar dos conceitos relacionados a cada conceito dado, ou ser capaz de ter uma noção de proximidade para um dado par de conceito. A solução de um problema, ao contrário, envolve um número muito maior de habilidades, o que implica na necessidade de um controle de variáveis certamente muito complicado, e por isso mesmo talvez ineficiente no estágio atual das pesquisas nessa área.

Instrumentos que parecem adequados para a investigação da estrutura cognitiva, são os chamados testes de associação de palavras, os quais têm apresentado bons resultados na investigação da organização conceitual na memória [T58], [BP70], [Sh72], [Sh73], [RP76] e [Pr76].

Descrevemos a seguir os dois testes usados no experimento.

### III.2 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)

#### a) Coleta dos Dados

Cada conceito-chave, i.e., cada um dos conceitos selecionados para a pesquisa, é apresentado no topo de uma folha, e os sujeitos (Ss) devem escrever logo abaixo tantos conceitos (ou palavras) quantos puderem associar ao conceito dado, num certo tempo. A tarefa é geralmente feita em um minuto para

cada conceito-chave.

Um exemplo de um TAEC com as instruções dadas aos alunos, pode ser visto no apêndice E.

#### b) Análise dos Dados

Os dados do TAEC são transformados num coeficiente de relacionamento entre os conceitos-chave. Este coeficiente foi definido por Gaskorf e Houston [GH63], e varia entre 0 e 1, conforme o grau de relacionamento entre os conceitos.

A validade deste coeficiente está vinculada à premissa de que o grau de relacionamento, ou medida de proximidade entre dois conceitos varia com a ordem hierárquica dos conceitos ou palavras associados a esses conceitos. Na definição dessa hierarquia, temos duas condições a serem satisfeitas:

1. O número de elementos comuns aos dois grupos de conceitos, ou seja, o número de palavras comuns associadas aos dois conceitos dados.

2. A posição (rank) que cada conceito ou palavra ocupa nos respectivos grupos.

Assim, dois conceitos serão absolutamente idênticos, quando: primeiro, o número de palavras ou conceitos associados for o mesmo para ambos; e segundo, a posição (rank) ocupada por cada palavra ou conceito for exatamente a mesma nos dois grupos.

Tanto o número como a posição das palavras ou conceitos associados a um par de conceitos-chave são levados em conta no coeficiente de relacionamento, mas antes de defini-lo

é preciso introduzir os conceitos de "sentido associativo" e "relacionamento associativo".

Dado o conceito  $u$ , define-se o seu "sentido associativo" pela seqüência  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , onde  $a_1 = u$  e  $a_2, \dots, a_m$  são conceitos ou palavras associadas ao conceito dado  $u$ , por um indivíduo num dado tempo. Por exemplo, suponhamos que ao conceito-chave Força tenham sido associados os seguintes conceitos:

Força  
 Massa  
 Aceleração  
 Momentum  
 Tempo  
 Impulso.

O "sentido associativo" deste conceito é a seqüência (força, massa, aceleração, momentum, tempo, impulso).

O "relacionamento associativo" entre dois conceitos  $u$  e  $v$  é definido como uma função da intersecção ou superposição (overlap) dos respectivos "sentidos associativos" [GH63]. Essa intersecção depende tanto do número de conceitos comuns aos dois "sentidos", quanto da posição que conceitos associados ocupam nos dois grupos. Assim, dois conceitos que possuem o mesmo "sentido associativo" e a mesma ordenação, apresentam a máxima intersecção. Quando um "sentido associativo" é menor do que outro ou quando as posições (rank) dos conceitos associados são diferentes, tem-se uma intersecção menor.

O coeficiente de relacionamento ou medida de proximidade (MP) entre dois conceitos é a relação entre a intersecção obtida e a máxima intersecção possível.

Vejam agora como calcular essas intersecções. Ini-

cialmente devemos dar valores às posições ocupadas, ou seja, estabelecer o "rank" dos conceitos associados.

Sejam  $u$  e  $v$  dois conceitos-chave diferentes. Sejam os sentidos associativos

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_m); \quad a_1 = u$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n); \quad b_1 = v$$

Seja  $n \geq m$ . A cada elemento  $a_j$  de  $A$ , na  $j$ -ésima posição, atribui-se o valor  $(n - j + 1)^p$ , onde  $n$  é o número de elementos em  $B$  e  $p$  é um número positivo fixo ( $p \geq 0$ ). Da mesma forma,  $b_i$ , na  $i$ -ésima posição de  $B$  atribui-se o valor  $(n - i + 1)^p$ .

Isto significa que o primeiro conceito, tanto em  $A$  quanto em  $B$ , possui o valor  $n^p$ . A "importância psicológica" de cada conceito associado é uma função da sua ordem de emissão. O peso  $p$  caracteriza essa propriedade. Quanto maior o valor de  $p$ , maior será o peso dado ao primeiro conceito associado. O adequado valor de  $p$  depende das características dos conceitos-chave. Quando eles possuem conceitos associados dominantes (o que poderíamos denominar de "anisotropia no espaço semântico"), exigem um alto valor de  $p$ . Na realidade, a determinação de  $p$  é quase sempre feita com base em resultados empíricos. São calculados os coeficientes com vários  $p$ , e aquele que propiciar melhores resultados, i.e., melhor ajuste, será adotado.

Vejamos como calcular as intersecções. Sejam

$$A = (u, a_2, \dots, a_m)$$

e

$$B = (v, b_2, \dots, b_n)$$

Consideremos agora o conjunto  $C = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ , de todos os conceitos comuns a A e B. C é o conjunto intersecção dos conjuntos A e B. Vamos definir os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , cujas componentes são as posições associadas aos conceitos, i.e.

$$\vec{A} = \vec{B} = (n^p, (n-1)^p, \dots, 1) .$$

A partir de C, podemos definir os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , simplesmente substituindo elemento seu pelo correspondente elemento de  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , respectivamente.

A intersecção dos dois sentidos associativos é dada por  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ . Exemplo:

$$A = (a, b, c, d)$$

$$B = (h, d, a, e, b, f, g)$$

Supondo  $p = 1$ , e de acordo com a definição de atribuição de posição, segue que

$$\vec{A} = \vec{B} = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) ,$$

enquanto

$$C = (a, b, d)$$

Dai, teremos

$$\vec{A} = (7, 6, 4) \quad \text{e} \quad \vec{B} = (5, 3, 6)$$

A intersecção será

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 7 \times 5 + 6 \times 3 + 4 \times 6 = 77 .$$

É evidente que a máxima superposição ocorre quando os dois conceitos têm o mesmo sentido associativo e a mesma ordenação (conceitos iguais na mesma posição nas duas seqüências). Nesse caso, teríamos

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{A}_M = \vec{B}_M = (n^P, (n-1)^P, \dots, 1) ,$$

e a máxima intersecção seria

$$\vec{A}_M \cdot \vec{B}_M = \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{K=1}^n (K)^{2P} \quad (\text{III.1})$$

Contudo, o que se deseja é calcular o coeficiente de relacionamento entre dois conceitos diferentes. Neste caso, a intersecção máxima não é dada pela equação (III.1). Quando  $u \neq v$ , e têm posições trocadas, teremos

$$\vec{A}' = (n^P, (n-1)^P, \dots, 1) \quad \text{e} \quad \vec{B}' = ((n-1)^P, n^P, (n-2)^P, \dots, 1)$$

e a intersecção máxima será

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = n^P(n-1)^P + (n-1)^P n^P + \sum_{K=1}^{n-2} K^{2P} \quad (\text{III.2})$$

A equação (III.2) representa a intersecção máxima quando apenas um par de conceitos tem a posição invertida, em relação ao outro, no caso, justamente o par de conceitos-chave.



De (III.1) e (III.2), vem que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B - [n^p - (n-1)^p]^2 \quad . \quad (\text{III.3})$$

Sendo a intersecção obtida dada por  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , teremos que o coeficiente de relacionamento ou medida de proximidade será

$$MP = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\vec{A} \cdot \vec{B} - [n^p - (n-1)^p]^2} \quad (\text{III.4})$$

Isto é, a MP entre dois conceitos é a razão entre a intersecção obtida e a máxima possível para as seqüências de palavras ou conceitos associados aos dois conceitos-chave. Esse coeficiente pode assumir valores entre 0 e 1.

Para exemplificar, apresentaremos parte de um teste respondido por um aluno de Física II, no início e no final do estudo de Termodinâmica. Os conceitos-chave selecionados para o exemplo são temperatura e calor.

#### Início do Estudo

TEMPERATURA	CALOR
Quantidade de Calor (Q.C)	Efeito Joule (E.J)
Variação da Temperatura (V.T)	Trocas de Calor (T.C)
	Variação da Temperatura (V.T)
	Calorias (C)
	Quantidade de Calor (Q.C)
	Calor Específico (C.E)

Considerando  $p = 1$ , vem que

$$A = B = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$$

$$C = \{Q.C, V.T\}$$

$$\vec{A} = (6, 5) \text{ e } \vec{B} = (2, 4)$$

$$MP = \frac{6 \times 2 + 5 \times 4}{7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 - 1} = \frac{32}{139} = 0.23$$

Final do Estudo

#### TEMPERATURA

Quantidade de Calor (Q.C)

Entropia (E1)

Energia (E2)

#### CALOR

Calor Específico (C.E)

Trabalho (T)

Quantidade de Calor (Q.C)

Entropia (E1)

Energia (E2)

$$\vec{A} = \vec{B} = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$$

$$C = \{Q.C, E1, E2\}$$

$$\vec{A} = (5, 4, 3) \text{ e } \vec{B} = (3, 2, 1)$$

Usando a relação (III.4), teremos

$$MP = 0.29$$

Portanto, a MP indica que ao final do estudo o aluno estabeleceu uma maior relação entre os conceitos de temperatura e calor.

### c) Comentários

Este instrumento está de acordo com nosso modelo de estrutura cognitiva, na medida em que admitimos as "entidades" como sendo os conceitos, e a "operação" considerada como a associação. Além disso, a estrutura hierarquizada proposta por Ausubel está implícita no valor atribuído a  $p$ , na medida em que o valor de  $p$  relaciona-se com a importância dada aos primeiros conceitos associados.

## III.3 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)

### a) Coleta dos Dados

Formam-se todos os possíveis pares de conceitos selecionados para a pesquisa, distribuindo-os aleatoriamente. Cada par de conceitos é seguido por uma escala de 1 a 7, "1" significando o mais alto grau de relacionamento entre os conceitos de um dado par, de acordo com o ponto de vista do estudante, e "7" representando o menor grau de relacionamento. Isto é, quando dois conceitos de um par são extremamente relacionados, o estudante deve marcar o número 1, caso contrário marcará o 7. Os números de 2 a 6 representam situações intermediárias. Ao contrário do TAEC, o TANC não tem limite de tempo. O teste, com as instruções dadas aos alunos encontram-se no apêndice E.

## b) Análise dos Dados

O TANC fornece uma medida direta de proximidade entre os conceitos, portanto os dados são diretamente introduzidos nos programas de análise multidimensional, como se verá no capítulo VII.

#### IV - ARRANJO EXPERIMENTAL

Esta experiência tem como objetivo investigar a influência, na estrutura cognitiva do aluno, da organização dada ao conteúdo de ensino. Em outras palavras, procura-se investigar até que ponto determinada organização conceitual da matéria de ensino altera a estrutura cognitiva existente antes da instrução.

Duas organizações diferentes do conteúdo de Termodinâmica foram apresentadas a duas turmas regulares da disciplina Física II, do Departamento de Física da UFRGS, utilizando-se o sistema de Ensino Personalizado [M75], [M77b]. A fim de procurar restringir a diferença de tratamento à organização sequencial do conteúdo e aos correspondentes materiais instrucionais, os dois grupos tiveram o mesmo método de ensino, os mesmos testes, o mesmo sistema de avaliação e os mesmos monitores.

A experiência foi realizada durante o primeiro semestre de 1978, no Instituto de Física da UFRGS. Testes de associação de conceitos foram usados para investigar como os estudantes relacionam e organizam os conceitos básicos de Termodinâmica. Esses testes (TANC e TAEC) foram aplicados antes e após a instrução.

##### IV.1 - As Amostras

As amostras usadas nessa experiência eram constituí-

das respectivamente por 31 e 27 alunos de Ciências e Tecnologia, i.e., alunos de Física, Química, Matemática e dos Cursos de Engenharia.

Estas amostras não foram selecionadas aleatoriamente por motivos de ordem administrativa. No ato da matrícula os estudantes têm liberdade de escolher qualquer das turmas de Física II. As preferências são principalmente determinadas pelo horário (ambos os grupos tiveram horários situados na faixa da tarde).

Como já foi dito, os objetivos desse trabalho são: fazer uma aplicação da AMD e da AAH ao mapeamento cognitivo de conceitos físicos e investigar a influência da organização de um conteúdo na formação e, ou modificação da estrutura cognitiva. Portanto, não estamos interessados em descobrir as vantagens de uma ou outra organização. Conseqüentemente não nos interessa, em princípio, averiguar as diferenças ou equivalências entre os dois grupos.

#### IV.2 - As Duas Abordagens ao Conteúdo

O grupo controle foi submetido à organização conceitual do livro Física, vol. I-2 de Resnick e Halliday [RH74], enquanto a abordagem usada no grupo experimental foi baseada na teoria da aprendizagem de Ausubel. O objetivo desta seção é mos

trar as diferenças entre essas duas abordagens.

A figura IV.1 mostra a seqüência do conteúdo apresentado ao grupo controle.

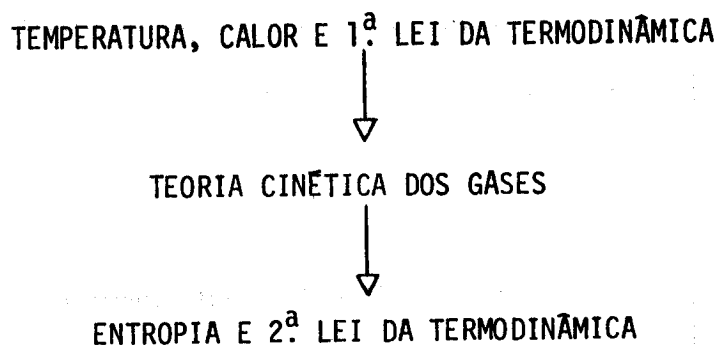


FIGURA IV.1 - Seqüência do conteúdo para o grupo controle.

Esta é a seqüência do livro-texto do curso [RH74], o qual foi usado pelo grupo controle.

A Figura IV.2 mostra a seqüência do conteúdo usado para o grupo experimental. Esta abordagem é uma tentativa de organizar o conteúdo de acordo com os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa, descritos no Capítulo II.

A seqüência inicia com uma discussão bastante geral sobre Física; conceitos em Física; situação da Termodinâmica e da Teoria Cinética no contexto da Física, e assim por diante. Após essa visão geral da Física, segue-se uma abordagem um pouco mais específica, focalizando os conceitos de temperatura, calor e entropia intuitivamente, sob o ponto de vista macroscópico. As três leis da Termodinâmica são também apresentadas de

forma genérica. Este é o conteúdo da primeira unidade, cujo texto pode ser visto no Apêndice C.

A segunda unidade retoma os conceitos de temperatura, calor e entropia e os discute sob o ponto de vista da teoria cinética dos gases. Finalmente, na terceira unidade os conceitos e as leis fundamentais são aplicados a situações específicas.

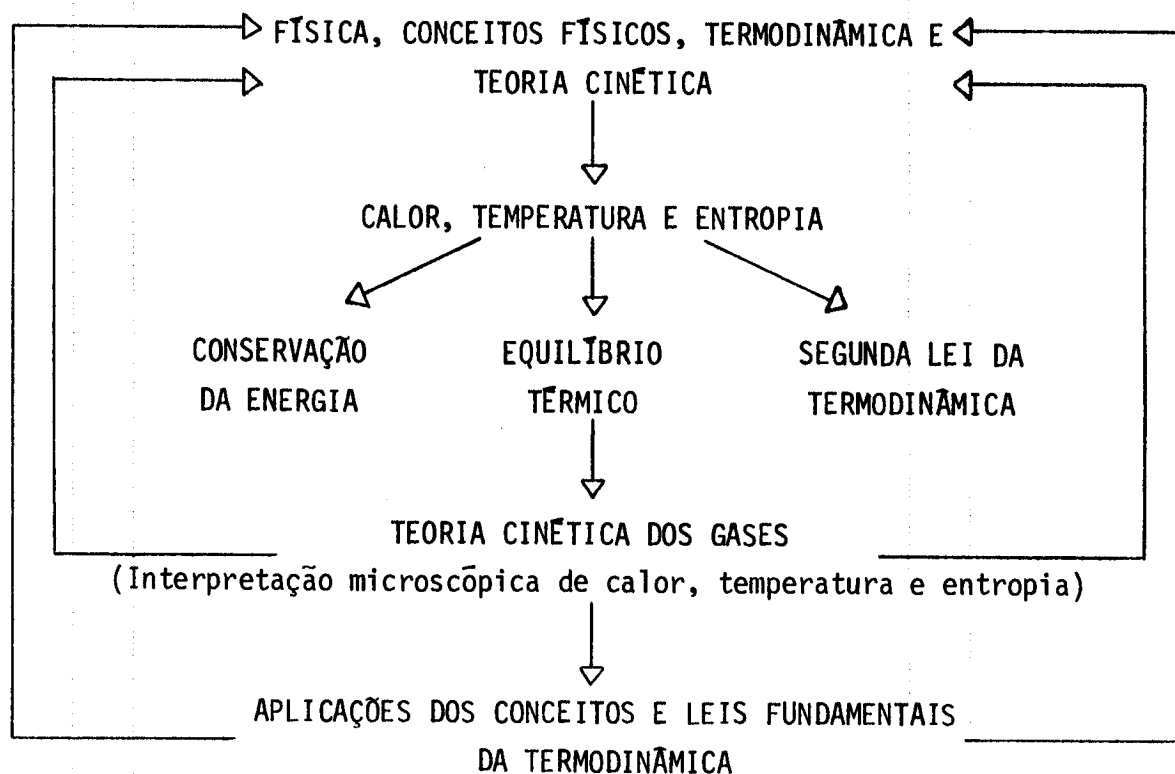


FIGURA IV.2 - Sequência do Conteúdo para o Grupo Experimental.

Na medida em que essa sequência introduz primeiramente os conceitos e idéias mais gerais sobre o assunto para, somente após, diferenciá-los em termos de detalhe e especificidade, ela enfatiza o princípio de diferenciação progressiva pro



posto por Ausubel.

Por outro lado, essa seqüência procura também explorar explicitamente relações de subordinação e superordenação entre conceitos. Embora os conceitos e idéias mais gerais e inclusivos sejam introduzidos no início da instrução, procura-se mostrar logo como conceitos e idéias subordinadas estão a eles relacionados e, então, se volta a novos significados para os conceitos de ordem mais alta na hierarquia. Com isso, procura-se atingir o que Ausubel chama de reconciliação integrativa.

Resumindo, tentou-se organizar o conteúdo da Termodinâmica de acordo com os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa numa forma de "vai-vem", "subindo" e "descendo" na hierarquia conceitual. Isto é, os conceitos mais fundamentais foram inicialmente apresentados de forma genérica, intuitiva. Seguiu-se a apresentação de alguns conceitos subordinados, para logo depois especificar mais cada conceito, elaborar cada lei, e apresentá-los em situações diferentes, com exemplos e problemas específicos.

Os guias de estudo do grupo controle são apresentados no Apêndice D, enquanto os do grupo experimental, juntamente com as apostilas de Termodinâmica encontram-se no Apêndice C.

## V - ANÁLISE MULTIDIMENSIONAL

### V.1 - Introdução

Análise multidimensional (AMD) é uma técnica estatística capaz de fornecer uma representação espacial de um conjunto de estímulos psicológicos, a partir das medidas de similaridade entre eles. Esses estímulos psicológicos podem, em princípio, ser de qualquer natureza, particularmente conceitos de uma determinada área do conhecimento, tais como conceitos de Eletricidade e Magnetismo, Termodinâmica, Mecânica etc. As medidas de similaridade podem ser obtidas com a aplicação de qualquer um dos atuais testes de associação de conceitos [P77], dois dos quais foram apresentados no Capítulo III.

Sob o ponto de vista de análise numérica, a AMD consiste basicamente em ajustar uma configuração de  $n$  pontos num espaço  $r$ -dimensional, tal que as distâncias nesse espaço e as medidas de similaridade sejam monotonicamente relacionadas.

Podemos dividir a AMD em dois tipos: métrico e não métrico. O tipo métrico se caracteriza pela necessidade de usar os valores das similaridades no processo de ajuste. Devido às características dos testes usados para a obtenção das similaridades, essas medidas geralmente violam a desigualdade triangular, i.e., dados três conceitos  $i$ ,  $j$  e  $k$ , nem sempre se tem

$$S_{jk} \leq S_{ij} + S_{ik} \quad , \quad \text{para todo } i, j, k, \quad (V.1)$$

onde  $S_{jk}$  é a medida de similaridade entre os conceitos  $j$  e  $k$ .

Para que um conjunto de similaridades possa ser ajustado através de um algoritmo métrico, todas as medidas devem satisfazer a relação (V.1). Na apresentação desses algoritmos discutiremos uma transformação que elimina as possíveis violações da relação (V.1).

O tipo não métrico não usa os valores das similaridades no processo de ajuste. Tudo de que ele necessita é da ordenação (rank) dessas medidas. Isto é, dada apenas a ordem crescente ou decrescente das similaridades, o algoritmo determina a configuração que melhor se ajusta aos valores experimentais. Esse ajuste é tal que a ordem (rank) das distâncias entre os pontos da configuração é tão próxima quanto possível da ordem das similaridades. Assim, se a medida de similaridade entre os conceitos  $i$  e  $j$  é a menor entre todas, i.e., ocupa a primeira posição na ordem crescente, então a distância entre os pontos  $i$  e  $j$  da configuração deverá ter um valor tão próximo quanto possível da primeira posição na ordenação das distâncias.

Na verdade, o algoritmo MINISSA-I, descrito na secção V.4 usa os valores das similaridades, apesar de ser do tipo não métrico. Essas medidas são usadas para se estimar a configuração inicial, após o que apenas a ordem passa a ser usada.

Outra característica que distingue um algoritmo da AMD é sua capacidade de ajustar apenas uma matriz de similaridades, ou várias delas simultaneamente. No primeiro caso, diremos que o algoritmo é de uma fonte, enquanto denominaremos de várias fontes o outro caso.

A matriz de entrada para um algoritmo de uma fonte é a média das matrizes de todos os sujeitos do grupo pesquisado.

Nos algoritmos de várias fontes, as matrizes individuais são os dados de entrada, e o ajuste final permite que se faça uma análise das diferenças apresentadas pelos indivíduos, quando solicitados a estimarem similaridades entre conceitos (ou qualquer outro estímulo psicológico).

Alguns algoritmos de uma fonte são apresentados nesse capítulo, e quando nos referirmos à medida de similaridade,  $S_{ij}$ , entre os conceitos  $i$  e  $j$ , na realidade estaremos nos referindo à média das similaridades entre os conceitos  $i$  e  $j$ , para o grupo de  $S_s$  que constitui a amostragem.

Apresentaremos apenas um algoritmo de várias fontes, o INDSCAL [CC70b]. Outros algoritmos podem ser encontrados nas seguintes referências: [B77], [TM63] e [TYD77].

Antes de iniciarmos o estudo dos vários algoritmos, é conveniente discutirmos mais alguns aspectos relativos ao ajuste das medidas.

Dadas  $n(n-1)/2^*$  medidas de similaridade entre  $n$  conceitos, é sempre possível estabelecer uma configuração de  $n$  pontos num espaço de  $n-1$  dimensões, tal que o ajuste seja perfeito, i.e., tal que a ordenação (rank) seja exatamente a mesma das similaridades. Se a similaridade entre os conceitos  $i$  e  $j$  ocupa a posição  $X$  na ordenação, então a distância entre os pontos  $i$  e  $j$  também ocupará a posição  $X$  na ordenação das distâncias. Para melhor compreensão, consideremos quatro conceitos, cu-

---

\*  $n(n-1)/2$  é justamente o número de elementos abaixo ou acima da diagonal de uma matriz  $n \times n$ .

jas similaridades estão assim ordenadas

$$s_{23} < s_{14} < s_{13} < s_{34} \quad . \quad (V.2)$$

Conforme já foi dito, é possível determinarmos uma configuração de quatro pontos, para esse caso num espaço tri-dimensional, tal que as distâncias obedecem à mesma ordenação (V.2), ou seja

$$d_{23} < d_{14} < d_{13} < d_{34} \quad (V.3)$$

Se iniciarmos com uma configuração tal como na Figura V.1, onde  $d_{12} = d_{13} = d_{14}$ , e  $d_{24} = d_{23} = d_{34}$ , podemos obter a ordenação (V.3) simplesmente efetuando rotações convenientes.

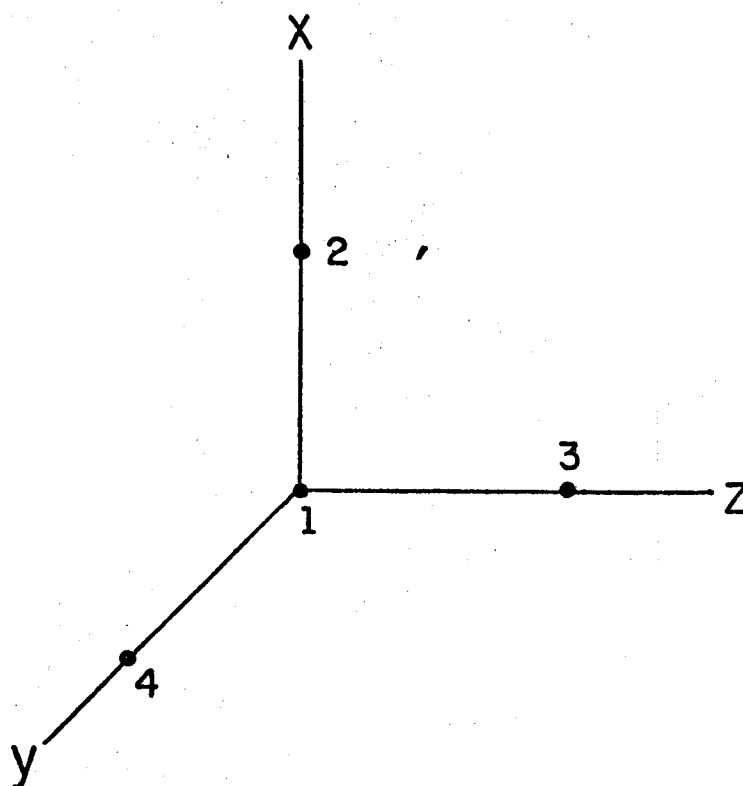


Figura V.1.

Exemplo de uma configuração inicial para um ajuste de quatro pontos.

Por exemplo, podemos girar o plano yz em torno do eixo y, até que o ponto 3 se aproxime o suficiente do ponto 2, sem alterar as outras distâncias. Procede-se dessa forma, até se obter a ordenação desejada.

Conforme será discutido no Capítulo VII, tal solução não tem significado estatístico, na medida em que a configuração resultante teria uma grande probabilidade de ser devida a uma matriz aleatória, ao invés de refletir a estrutura inerente aos resultados do teste utilizado. Portanto, o que se deseja numa aplicação da AMD é obter a configuração no espaço de menor dimensão possível, onde é menor a probabilidade do resultado ser devido a uma matriz aleatória.

Como já foi dito, a AMD é feita em vários espaços com diferentes dimensões, após o que se decide qual o espaço mais apropriado. Kruskal [K64a] sugere alguns procedimentos para se determinar a dimensão apropriada. No Capítulo VII apresentaremos essas sugestões, e um outro procedimento baseado no método Monte Carlo, sugerido por Klahr [K169].

## V.2 - O Método de Torgerson.

### V.2.1 - Características Gerais

Torgerson [T58] foi um dos primeiros pesquisadores a desenvolver um método de análise multidimensional. A partir do seu trabalho muitos algoritmos foram desenvolvidos, com graus

de sofisticação crescentes.

O algoritmo de Torgerson é do tipo métrico, pois usa os valores das medidas de similaridade no processo de ajuste. Essas medidas são submetidas a duas transformações. Na primeira, uma constante é somada a cada medida, de modo que elas satisfaçam a relação métrica da desigualdade triangular, e na segunda transformação essas novas "distâncias" dão origem a produtos escalares, após o que se procede ao ajuste, o que é feito através de uma fatoração da matriz dos produtos escalares, método já conhecido da técnica de análise fatorial [H60].

O método da constante aditiva foi inicialmente proposto por Torgerson, e aperfeiçoado por Messick e Abelson [MA56]. A idéia básica era de que a constante deveria ser tal que as medidas fossem representadas por uma configuração num espaço de menor dimensão possível.

Posteriormente, Carrol e Wish [CW74] mostraram que a constante deveria apenas possibilitar às medidas de similaridade satisfazerem a relação métrica da desigualdade triangular (V.1).

Tendo em vista o caráter de revisão desta seção apresentaremos apenas o ponto de vista de Carrol e Wish, mesmo por que atualmente existem outros algoritmos mais elaborados e mais eficientes. Esta breve revisão do método de Torgerson tem portanto, uma finalidade fundamentalmente histórica.

#### V.2.2 - Formalismo Matemático.

Para que uma configuração de  $n$  pontos seja ajustada

por um conjunto de  $n(n-1)/2$  medidas de similaridade, através de um método de AMD métrico, é necessário que essas medidas satisfazam a desigualdade triangular (V.1).

O problema de ajustar as medidas à desigualdade (V.1) pode ser resolvido pela adição de uma constante, i.e., pela transformação

$$\hat{S}_{jk} = S_{jk} + C, \quad (V.4)$$

sugerida por Carrol e Wish [CW74], onde  $C$  independe de  $j$  e  $k$ .

A transformação (V.4) deve ser tal que

$$\hat{S}_{jk} \leq \hat{S}_{jl} + \hat{S}_{kl}, \quad \text{para todo } j, k, l,$$

ou

$$S_{jk} + C \leq S_{jl} + C + S_{kl} + C,$$

e finalmente,

$$C \geq S_{jk} - S_{jl} - S_{kl}, \quad \text{para todo } j, k, l. \quad (V.5)$$

A menor constante  $C$ , que satisfaz (V.5) é

$$C_{\min} = \max(S_{jk} - S_{jl} - S_{kl}) \quad (V.6)$$



Os valores  $\hat{S}_{jk}$  são "distâncias" na medida em que satisfazem a desigualdade triangular (V.1), e  $\hat{S}_{jj} = 0$ .

Vejamos agora como essas "distâncias" dão origem a "produtos escalares". Sejam

$$\vec{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jr})$$

e

$$\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}) ,$$

dois vetores no espaço  $r$ -dimensional. O produto escalar é dado por

$$p_{jk} = (\vec{x}_j \cdot \vec{x}_k) = \sum_{a=1}^r x_{ja} x_{ka} \quad (V.7)$$

Vamos normalizar a configuração de modo que sua origem seja a centróide, cuja  $p$ -ésima coordenada é

$$c_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x'_{jp} \quad (V.8)$$

As novas coordenadas serão

$$x_{jp} = x'_{jp} - c_p ,$$

logo

$$x_{.t} = p_{.k} = p_{j.} = p_{..} = 0 , \quad (V.9)$$

onde a notação

$$X_{.t} = \sum_{j=1}^n X_{jt}$$

foi usada.

Por outro lado, em um espaço Euclidiano as distâncias são dadas por

$$d_{jk}^2 = \sum_{t=1}^r (X_{jt} - X_{kt})^2 = \sum_{t=1}^r (X_{jt}^2 + X_{kt}^2 - 2X_{jt} X_{kt})$$

isto é,

$$d_{jk}^2 = l_j^2 + l_k^2 - 2p_{jk} \quad (\text{V.10})$$

onde

$$l_j^2 = \sum_{t=1}^r X_{jt}^2$$

Segue de (V.9) e (V.10), que

$$d_{.k}^2 = l_{.}^2 + l_k^2 \quad (\text{V.11})$$

$$d_{j.}^2 = l_j^2 + l_{.}^2 \quad (\text{V.12})$$

$$d_{..}^2 = l_{.}^2 + l_{.}^2 \quad (\text{V.13})$$

Efetuada a operação (V.11) + (V.12) - (V.13), teremos

$$d_{.k}^2 + d_{j.}^2 - d_{..}^2 = l_j^2 + l_k^2, \text{ e} \quad (\text{V.14})$$

usando (V.10), chegaremos a

$$p_{jk} = -\frac{1}{2} \left( d_{jk}^2 - \sum_{j=1}^n d_{jk}^2 - \sum_{k=1}^n d_{jk}^2 + \sum_{j,k=1}^n d_{jk}^2 \right) \quad (V.15)$$

A forma matricial de (V.7) é

$$P = X(X'), \quad (V.16)$$

onde o sobrescrito ' representa a operação de transposição.

Então, dadas as similaridades, pode-se estimar a constante aditiva através de (V.6), determinar a matriz P por intermédio de (V.15), e resolver (V.16) por uma técnica de mínimos quadrados.

Conforme já foi dito, esse é o formalismo matemático do método de Torgerson, partindo da idéia de Carrol e Wish sobre a determinação da constante aditiva. Na realidade, o método de Torgerson é mais próximo da técnica de análise fatorial [H60], cuja discussão não está nos objetivos desse trabalho.

### V.3 - O Método de Kruskal

#### V.3.1 - Características Gerais

Na seção anterior vimos que Torgerson [T58] foi um dos primeiros pesquisadores a desenvolver um algoritmo métrico de AMD. A principal característica desse algoritmo é que ele usa os valores das similaridades no processo de ajuste e que é necessário supor uma relação definida entre as similaridades e as distâncias da configuração. Por exemplo, supor que exista uma

relação linear, ou exponencial.

Shepard [She62a], [She62b] mostrou que não é necessário definir a priori uma função relacionando similaridades e distâncias. Com a elaboração do seu algoritmo não métrico, ele mostrou que deve haver apenas uma relação monotônica. Isto é, o ajuste deve apenas preservar a ordem (rank) das similaridades.

Embora o método de Shepard tenha sido de fundamental importância para o desenvolvimento dos atuais algoritmos não métricos, não o apresentaremos aqui, visto que Kruskal [K64a] usou as principais características desse método na elaboração de um algoritmo semelhante, porém mais formal, sob o ponto de vista de análise numérica. Portanto, apresentaremos apenas o algoritmo de Kruskal, denominado MDSCAL (MultiDimensional SCALing).

O resultado fundamental do trabalho de Shepard refere-se ao fato de que necessitamos apenas de uma relação monotônica entre as similaridades e as distâncias da configuração ajustada. Isto é, devemos ajustar uma configuração inicial qualquer, até que a ordenação das distâncias seja tão próxima quanto possível da ordenação das similaridades.

Intuitivamente, o problema pode ser visto assim: Inicia-se com uma configuração qualquer. Como o objetivo é estabelecer a ordenação das similaridades, tenta-se aproximar os pontos que estão "muito longe", e afastar aqueles que estão "muito próximos". "Muito longe" e "muito próximo", no sentido de violação da ordem. Assim, se a similaridade  $S_{12}$ , entre os conceitos 1 e 2 ocupa a primeira posição da ordenação ("rank") das similaridades, e a distância  $d_{12}$ , entre os pontos 1 e 2 ocupa, por exemplo, a décima posição na ordenação das distâncias, então os

pontos 1 e 2 estão "muito afastados" um do outro. Nesse caso o algoritmo deve ser capaz de aproximá-los.

Da mesma forma, se a similaridade  $S_{38}$ , entre os conceitos 3 e 8 ocupa a oitava posição da ordenação das similaridades, e a distância  $d_{38}$  ocupa, por exemplo, a primeira da ordenação das distâncias, então os pontos 3 e 8 estão "muito próximos", e o algoritmo deve afastá-los.

Desse modo, deve haver algum tipo de "interação" entre os pontos. Isto é, deve haver uma "força de repulsão" ou de "atração" entre os pontos, capaz de afastá-los ou aproximá-los conforme o caso.

Essa idéia, desenvolvida por Shepard [She62a], foi usada por Kruskal [K64a] para definir uma função do tipo  $\chi^2$ , que ele denominou "Stress", que mede a qualidade do ajuste. Quanto menor o "Stress", melhor o ajuste. Assim, o objetivo do algoritmo MDSCAL é minimizar a função "Stress", o que é conseguido aproximando os pontos "muito afastados" e afastando aqueles que estão "muito próximos".

Tal operação é feita através do método do gradiente ("steepest descent"). Isto coloca o algoritmo no mesmo nível de uma regressão por mínimos quadrados. Assim, AMD pode ser encarada como um problema de ajuste estatístico - as similaridades são dadas e desejamos encontrar uma configuração cujas distâncias melhor se ajustem a essas medidas.

### V.3.2 - Formalismo Matemático

O que se segue sobre o formalismo do algoritmo MDSCAL

é baseado nas referências [K64a] e [K64b].

Para facilitar a exposição, vamos considerar que todas as similaridades sejam diferentes. Ao final introduziremos as técnicas para se considerar os casos onde existe mais de uma medida com o mesmo valor. Tendo em vista essa consideração, podemos estabelecer um "rank" para as similaridades.

$$S_{i_1j_1} < S_{i_2j_2} < \dots < S_{i_Mj_M} , \quad (V.17)$$

onde  $M = n(n-1)/2$ , e  $n$  é o número de conceitos (ou qualquer outro estímulo psicológico).

O problema é determinar uma configuração de  $n$  pontos num espaço  $r$ -dimensional, de forma que as distâncias entre os pontos obedeam, tanto quanto possível, ao "rank" (V.17). Isto é, que as distâncias e as similaridades sejam monotonicamente relacionadas.

Se fizermos um gráfico de  $S$  versus  $d$ , isto é, cada ponto  $(i, j)$  tem abscissa  $d_{ij}$  e ordenada  $S_{ij}$ , a monotonicidade é obtida quando tivermos uma curva ascendente, como na Figura V.2.

Vale salientar que a curva ascendente corresponde às medidas semelhantes às fornecidas pelo TANC (Capítulo III). Isto é, medidas cujo valor é proporcional à distância entre os conceitos. Quanto maior essa medida, mais afastados os conceitos.

As medidas fornecidas pelo TAEC são inversamente proporcionais às distâncias. Quanto maior o valor, mais próximos estão os conceitos. Nesse caso, a curva de monotonicidade é descendente. Sob o ponto de vista do formalismo, não exis-

te nenhuma diferença entre essas medidas, de modo que não nos preocuparemos em distinguir uma da outra.

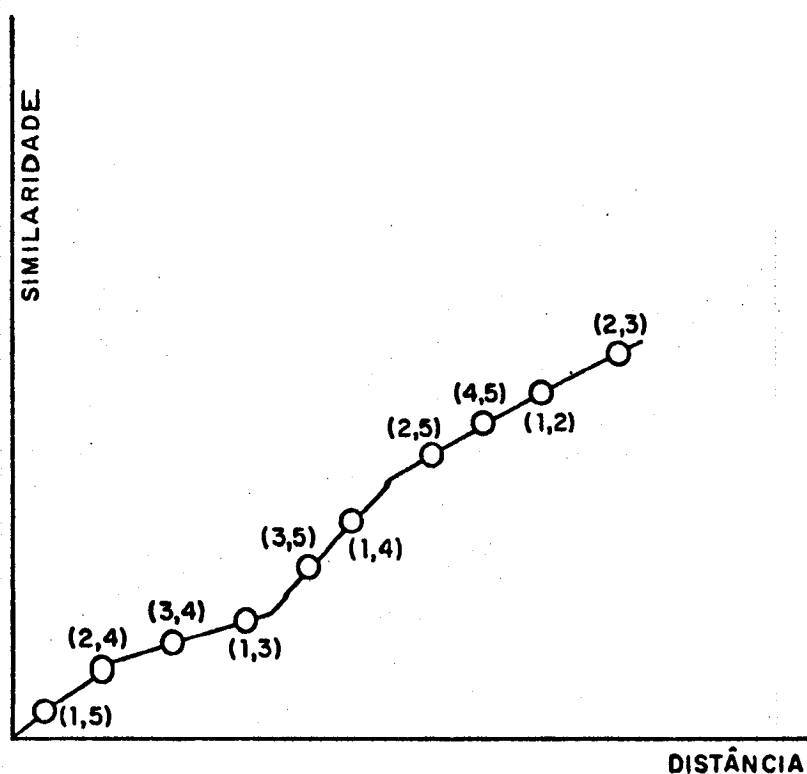


Figura V.2 - Relação monotônica perfeita entre similaridades e distâncias.

A Figura V.2 apresenta uma relação monotônica perfeita, o que dificilmente ocorre numa aplicação real.

Na verdade o que se faz é estabelecer um critério de ajuste, que informa quão bem uma configuração se ajusta às medidas experimentais.

Esse critério é estabelecido através de uma função do tipo  $\chi^2$ , denominada "Stress" (S). Define-se essa função da se-

seguinte forma

$$S = \frac{\sum_{i,j=1}^n (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i,j=1}^n d_{ij}^2} \quad (V.18)$$

onde  $d_{ij}$  é a distância Euclideana entre os pontos  $i$  e  $j$

$$d_{ij} = \left[ \sum_{a=1}^r (x_{ia} - x_{ja})^2 \right]^{1/2}, \quad (V.19)$$

e  $\hat{d}_{ij}$  são números monotonicamente relacionados a  $S_{ij}$ , ou seja, se

$$S_{ij} < S_{kl},$$

então

$$\hat{d}_{ij} < \hat{d}_{kl}$$

Posteriormente apresentaremos o algoritmo para determinar esses números. Por enquanto, é suficiente termos em mente que eles existem.

Vale lembrar que quando se ajusta uma configuração segundo o critério de monotonicidade, as distâncias não são ajustadas aos valores das similaridades, mas apenas o "rank" das distâncias é ajustado ao "rank" das similaridades. Isto significa que duas configurações cujas distâncias difiram por um fator constante  $K$  podem se ajustar igualmente bem a um mesmo conjunto de similaridades. Como  $\hat{d}_{ij}$  é proporcional a  $d_{ij}$ , é fácil compreender a necessidade do fator de normalização,  $\sum_{i,j=1}^n d_{ij}^2$  na defini-



nição (V.18).

O melhor ajuste é obtido quando a função  $S$  atinge o mínimo. Agora, podemos colocar uma questão de ordem metodológica. Como se determina uma configuração de "Stress" mínimo?

Conforme Kruskal [K64a], podemos responder a esta questão em três níveis. Ao nível intuitivo, podemos descrever o procedimento como de aproximação sucessiva.

Iniciamos com uma configuração arbitrária, movemos ligeiramente todos os pontos, de modo a melhorar a configuração, e então repetimos este procedimento até atingirmos uma configuração em relação a qual nenhuma melhora é possível. De modo geral movemos os pontos  $X_i$  em direção a  $X_j$  se  $\hat{d}_{ij} < d_{ij}$ , e em direção contrária se  $\hat{d}_{ij} > d_{ij}$ , de modo a fazer  $\hat{d}_{ij}$  o mais próximo possível de  $d_{ij}$ .

Ao nível teórico, vemos que nosso problema é minimizar uma função de muitas variáveis,  $S(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Na realidade o "Stress"  $S$  é uma função de  $n \times r$  variáveis, porque cada vetor  $X_i$  tem  $r$  coordenadas. O problema de minimizar uma função de muitas variáveis é um problema padrão em análise numérica, e para resolve-lo podemos usar uma técnica iterativa largamente adotada conhecida como o método do gradiente ("Steepest descent").

Ao nível prático a resposta será dada posteriormente, com a descrição detalhada do algoritmo desenvolvido por Kruskal [K64b].

Outra questão prática é a determinação do número de dimensões. Kruskal [K64a] sugere uma abordagem que passaremos a apresentar. No Capítulo VII apresentaremos um critério estatístico para orientar a escolha do número de dimensões, i.e.,

o espaço apropriado para o ajuste.

Segundo Kruskal, em última instância a determinação do número de dimensões necessário para descrever os dados ficará a cargo do pesquisador. Dependerá do seu julgamento científico, i.e., da sua vivência no problema pesquisado. Mesmo assim, ele considera algumas orientações metodológicas.

A análise poderá ser feita em vários espaços com diferentes dimensões. A dependência do "Stress" mínimo com a dimensão poderá fornecer alguma indicação da dimensão apropriada. Quando  $r$  (número de dimensões) cresce, o "Stress" diminui. Quando  $r \geq n - 1$ , o "Stress" é sempre nulo. Então, é razoável escolher um valor de  $r$ , acima do qual a variação do "Stress" mínimo é muito pequena. "Bons dados algumas vezes exibem um 'cotovelo' na curva de  $S$  versus  $r$ , indicando o valor apropriado de  $r$ " [K64a].

Um segundo critério é o da interpretabilidade das coordenadas. Nesse ponto, a vivência do pesquisador é de fundamental importância. Ele deve verificar que uma solução  $(r + 1)$  - dimensional acrescenta pouca informação àquela obtida em  $r$  dimensões, e nesse caso, admitir a solução  $r$ -dimensional.

Vejamos agora o problema sob o ponto de vista de análise numérica.

Conhecendo-se a função  $S$ , determina-se seu gradiente  $g = \left( \frac{\partial S}{\partial X_{11}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial X_{1r}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial X_{nr}} \right)$ , a partir do qual incrementa-se a configuração.

A nova configuração  $X'$  será obtida através de

$$X'_{is} = X_{is} - \frac{\alpha}{\text{mag}(g)} g_{is} \quad , \quad (\text{V.20})$$

onde  $\alpha$  é o passo de incrementação, e  $\text{mag}(g)$  é um fator de normalização dado por

$$\text{mag}(g) = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i,s} g_{is}^2 \right]^{1/2} .$$

O passo de incrementação  $\alpha$ , segundo Kruskal, "é o resultado de uma considerável experimentação numérica" [K64b, p. 121] e obedece à seguinte relação

$$\alpha_{\text{atual}} = \alpha_{\text{anterior}} \cdot (\text{fator angular}) \cdot (\text{fator de relaxação}) \cdot (\text{fator de boa sorte}) ,$$

onde

$$\text{fator angular} = 4.0 (\cos \theta)^{3.0} , \text{ sendo}$$

$\theta$  = ângulo entre o gradiente atual ( $g$ ) e o anterior ( $g''$ )

$$\cos \theta = \frac{\sum_{i,s} g_{is} g''_{is}}{\left[ \sum_{i,s} g_{is}^2 \sum_{i,s} g''_{is}^2 \right]^{1/2}}$$

$$\text{fator de relaxação} = \frac{1.3}{1 + (5SR)^{5.0}} , \text{ com}$$

$$5SR = \min \left[ 1, \left( \frac{\text{"Stress" atual}}{\text{"Stress" de 5 interações anteriores}} \right) \right] ;$$

$$\text{fator de boa sorte} = \min \left[ 1, \left( \frac{\text{"Stress" atual}}{\text{"Stress" anterior}} \right) \right] .$$

Em correspondência particular enviada a Roskam [LR77]

Kruskal justifica a definição de  $\alpha$ .

Para ele, "após termos dado um 'passo', podemos ver se este foi muito grande ou muito pequeno examinando o ângulo entre o gradiente atual e o anterior. Se o novo gradiente está quase na mesma direção do anterior (i.e., o ângulo entre eles é próximo de  $0^\circ$ ), então poderíamos ter dado um 'passo' maior. Se o novo gradiente é perpendicular ao anterior, o 'passo' que demos estava mais ou menos correto. Se o novo gradiente está na direção contrária ao anterior (i.e., o ângulo entre eles é próximo de  $180^\circ$ ), então o 'passo' que demos foi muito grande. Normalmente ocorre na prática que um bom tamanho para o próximo 'passo' é aproximadamente igual ao do 'passo' anterior. Usando este fato, ajustamos o tamanho do próximo 'passo' de modo que ele seja um pouco maior ou menor do que o anterior, dependendo do ângulo entre os gradientes... Ajustamos também o 'passo' de incrementação por outros fatores baseados em considerações secundárias, mas o mecanismo acima é o principal". [LR77, p. 393].

Substituindo (V.19) em (V.18), e tendo em vista que  $\hat{d}_{ij}$  é constante, mostra-se facilmente que as coordenadas de  $g$  são dadas por

$$g_{k\ell} = S \sum_{i,j} (\delta_{ki} - \delta_{kj}) \left[ \frac{d_{ij} - \hat{d}_{ij}}{S^*} - \frac{d_{ij}}{T^*} \right] \cdot \frac{(x_{i\ell} - x_{j\ell})}{d_{ij}}, \quad (\text{V.21})$$

onde  $\delta_{ki}$  é a delta de Kronecker usual,

$$S^* = \sum_{i,j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2, \quad e$$

$$T^* = \sum_{i,j} d_{ij}^2$$

Agora vejamos como determinar os  $\hat{d}_{ij}$ . Sabemos que se  $S_{ij} < S_{kl}$ , então  $\hat{d}_{ij} < \hat{d}_{kl}$ . Isto é,  $\hat{d}_{ij}$  é uma função de  $S_{ij}$  e  $d_{ij}$ , tal que minimiza S ("Stress"). Para uma melhor compreensão do algoritmo, acompanharemos a exposição com um exemplo bastante simples.

Sejam quatro "conceitos" hipotéticos, cuja matriz de similaridades é dada na Tabela V.1. Na verdade, só necessitamos conhecer os elementos acima ou abaixo da diagonal, pois ela é simétrica.

Tabela V.1  
Matriz de similaridades para quatro "conceitos" hipotéticos.

	1	2	3	4
1				
2	7.5			
3	6.8	1.5		
4	3.4	8.3	3.0	

A partir da Tabela V.1 podemos construir os vetores SIMIL e IJ

$$\text{SIMIL} = (1.5, 3.0, 3.4, 6.8, 7.5, 8.3)$$

(V.22)

$$\text{IJ} = (2.3, 3.4, 1.4, 1.3, 1.2, 2.4)$$

O vetor IJ fornece a ordenação crescente das similaridades, i.e.,

IJ(1) = 2.3 significa que a similaridade entre os "conceitos" 2 e 3 é a menor de todas. Assim, de acordo com IJ temos o seguinte "rank" de similaridades.

$$S_{23} < S_{34} < S_{14} < S_{13} < S_{12} < S_{24} \quad . \quad (V.23)$$

O MDSCAL inicia com uma configuração arbitrária. Calcula-se as distâncias entre todos os pontos dessa configuração e constroem-se o vetor DIST, de modo que DIST(k) é a distância entre os pontos correspondentes aos conceitos de IJ(k).

Supomos as distâncias calculadas, de modo que

$$\text{DIST} = (5, 4, 1, 2, 6, 3) \quad , \quad (V.24)$$

isto é,  $d_{23} = 5$ ,  $d_{34} = 4$ ,  $d_{14} = 1$ ,  $d_{13} = 2$ ,  $d_{12} = 6$  e  $d_{24} = 3$ . Isto decorre do fato de IJ(1) = 2.3, de modo que DIST(1) é a distância entre os pontos 2 e 3. Os outros elementos de DIST são determinados de modo análogo.

Podemos agora determinar os números  $\hat{d}_{ij}$ , e colocá-los no vetor  $\hat{D}$ . Os valores de  $\hat{d}_{ij}$  podem ser descritos da seguinte forma: existe uma partição de similaridades em blocos consecutivos  $b_1, b_2, \dots, b_\mu$ , tal que em cada bloco o valor de  $\hat{d}_{ij}$  é constante,  $\hat{d}_{b\ell}$  ( $1 < \ell < \mu$ ), e igual à média dos  $d_{ij}$  no bloco. O problema é encontrar a partição correta, de modo que os  $S_{ij}$  e os  $\hat{d}_{ij}$  sejam monotonicamente relacionados.

O algoritmo inicia com a partição mais geral, de  $n(n-1)/2$  blocos, cada um contendo uma medida de similaridade,

ou equivalentemente, cada um contendo um elemento de  $IJ$ . Neste caso inicial  $\hat{d}_{ij} = d_{ij}$ . A partir daí, prossegue-se acoplando blocos até se obter a partição correta.

Para descrevermos como se faz esse acoplamento, necessitamos introduzir algumas definições, relacionadas com o fato das similaridades estarem em ordem crescente, e com a necessidade de se obter uma relação monotônica entre os  $S_{ij}$  e os  $\hat{d}_{ij}$ .

Um bloco pode ser:

- a) Monotonicamente (mon.) satisfeito à direita, representado por  $|<$
- b) Mon. satisfeito à esquerda,  $<|$
- c) Ativo para cima (ou para a direita),  $\uparrow$
- d) Ativo para baixo (ou para a esquerda),  $\downarrow$
- e) Ativo para cima e satisfeito à direita,  $\uparrow<$ .

As outras possíveis combinações podem ser feitas por analogia a (e).

Um bloco é ativo quando ele pode ser acoplado com outro. Se ele pode ser acoplado com um bloco à direita (para cima), ele é  $\uparrow$ . Caso contrário, i.e., quando ele pode ser acoplado com um bloco à esquerda (para baixo), ele será  $\downarrow$ .

Se  $b_-$ ,  $b$  e  $b_+$  são três blocos adjacentes em ordem ascendente, então:

$$a) b \text{ é } |< \text{ se } \hat{d}_b < \hat{d}_{b+}$$

$$b) b \text{ é } <| \text{ se } \hat{d}_{b-} < \hat{d}_b.$$

No caso do nosso exemplo, a partição inicial fornece


o vetor

$$\hat{D} = (5, 4, 1, 2, 6, 3) \quad , \quad (V.25)$$

porque no início,  $\hat{D} = \text{DIST}$ . Considerando-se  $\hat{D}(2) = b_-$ ,  $\hat{D}(3) = b$  e  $\hat{D}(4) = b_+$ , vemos que  $\hat{D}(3) = b$  é  $|<$ . Por outro lado, se considerarmos  $\hat{D}(4) = b_-$ ,  $\hat{D}(5) = b$  e  $\hat{D}(6) = b_+$ , vemos que  $\hat{D}(5) = b$  é  $<|$ .

O primeiro bloco de uma partição é sempre  $<|$ , além de poder ser  $|<$ . Ao contrário, o último bloco é sempre  $|<$ , além de poder ser  $<|$ . No início do processo, o primeiro bloco é  $\uparrow$ .

Na Figura V.3 apresentamos o "fluxograma" do algoritmo, onde usamos as seguintes convenções:

  $\equiv$  Passa a ser (por exemplo,  $b_i$  passa a ser  $\uparrow$ )

$\oplus$   $\equiv$  Acoplamento (p.ex.,  $b_i \oplus b_{i+1}$ , significa que o bloco  $b_i$  será acoplado ao bloco  $b_{i+1}$ ).

Vamos usar o "fluxograma" da Figura V.3 para determinar a partição do exemplo dado na Tabela V.1.

Antes porém, necessitamos introduzir um "contador", que nos informará o número de blocos acoplados. No início, tal vetor é

$$\text{ICONT} = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad ,$$

e a partição inicial fornece o vetor apresentado em (V.25), onde  $\hat{D}(1) = 5$  é  $\uparrow$ , mas não  $\uparrow<$ ; logo,  $b_1 = b_1 \oplus b_2$ , i.e., o bloco 1 será acoplado ao 2.



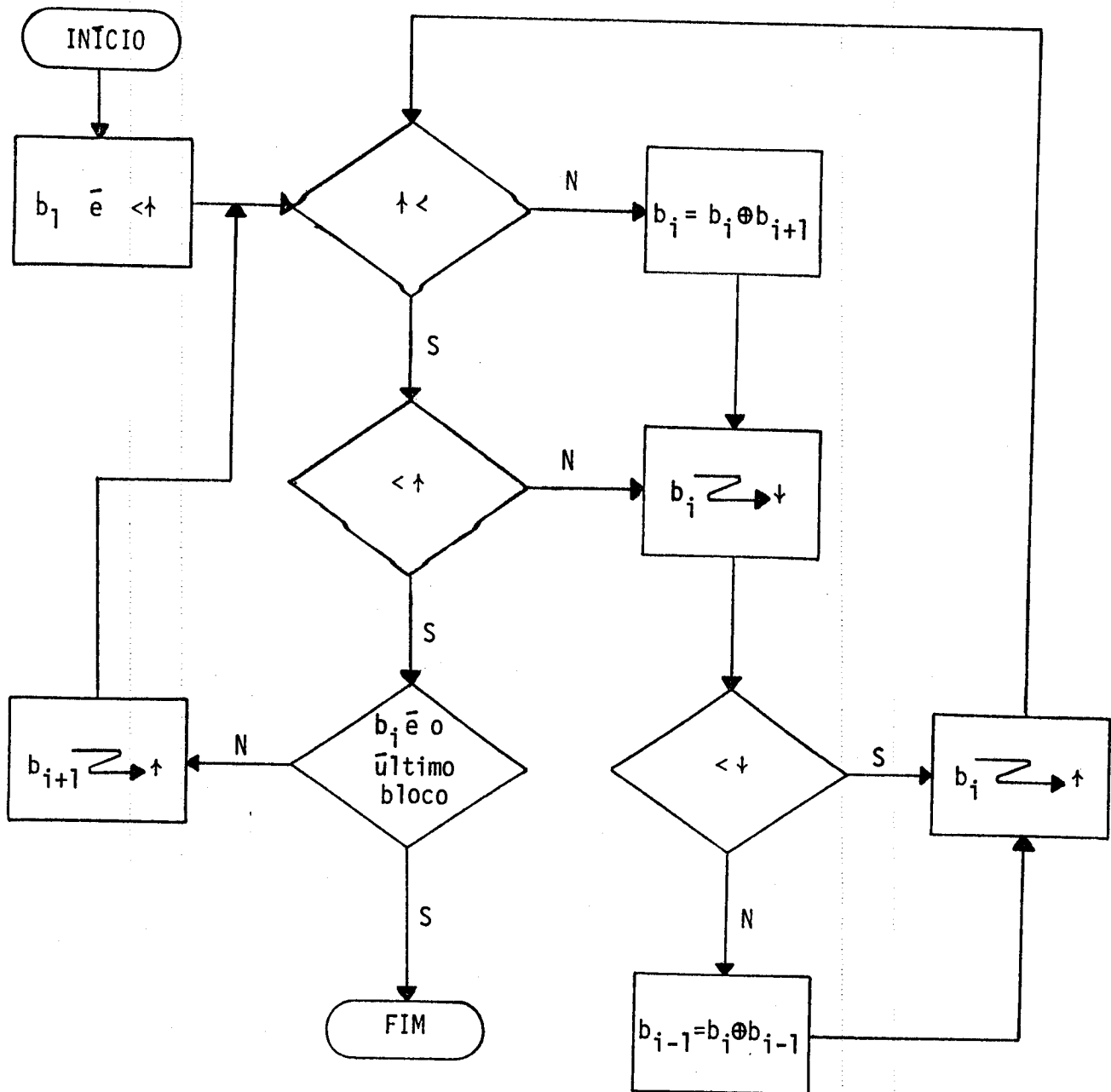


Figura V.3 - "Fluxograma" para determinar o vetor  $\hat{D}$ , cujas componentes são monotonicamente relacionadas às similaridades.

$$\hat{d}_{b1} = \frac{5+4}{2} = 4.5, \text{ de modo que agora teremos}$$

$$\text{ICONT} = (2, 1, 0, 0, 0, 0) ,$$

e

$$\hat{D} = (4.5, 1, 2, 6, 3) .$$

O vetor ICONT nos diz que o bloco 1 é o resultado do acoplamento de dois blocos, iniciando no primeiro, i.e., o primeiro e o segundo bloco.

Agora,  $\hat{D}(1)$  é  $\uparrow$  e  $\leftarrow\uparrow$ , passando a ser  $\uparrow$ ; mas não sendo  $\uparrow\leftarrow$ , resulta que  $\hat{d}_{b1} = \frac{4.5+1}{2} = 2.75$ , e

$$\text{ICONT} = (3, 1, 0, 0, 0, 0) ,$$

$$\hat{D} = (2.75, 2, 6, 3) .$$

De acordo com a Figura V.3,  $\hat{D}(1)$  é  $\uparrow$ , e  $\leftarrow\uparrow$ , logo, ele é  $\uparrow$ , mas não é  $\uparrow\leftarrow$ , daí

$$\text{ICONT} = (4, 1, 0, 0, 0, 0) ,$$

$$\hat{D} = (2.375, 6, 3) .$$

Agora,  $\hat{D}(1)$  é  $\leftarrow\uparrow$ , i.e. monotonicamente satisfeito à esquerda e à direita. Quando um bloco atinge tal situação, ele deixa de ser ativo, e o bloco seguinte (no caso,  $\hat{D}(2) = 6$ ) passa a ser  $\uparrow$ .

$$\hat{D}(2) \text{ não é } \uparrow\leftarrow, \text{ logo, } d_{b2} = \frac{6+3}{2} = 4.5, \text{ e}$$

$$\text{ICONT} = (4, 1, 0, 0, 2, 5) ,$$

$$\hat{D} = (2.375, 4.5) .$$

Nesse caso, ICONT diz que os quatro primeiros blocos formam um único, e os dois últimos formam outro bloco.

Com essa partição, temos o resultado final, ou seja,

$$\hat{D} = (2.375, 2.375, 2.375, 2.375, 4.5, 4.5) .$$

Vemos então, que  $\hat{D}$  e SIMIL são monotonicamente relacionados, porque se

$$\text{SIMIL}(K) < \text{SIMIL}(L) ,$$

então

$$\hat{D}(K) \leq \hat{D}(L) .$$

O fluxograma completo do MDSCAL é apresentado na Figura V.4.

A normalização da configuração é tal que a origem seja o centróide, cuja  $i$ -ésima coordenada é

$$C_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ji} ,$$

e

$$\sum_{i,s=1}^n X_{is}^2 = n .$$

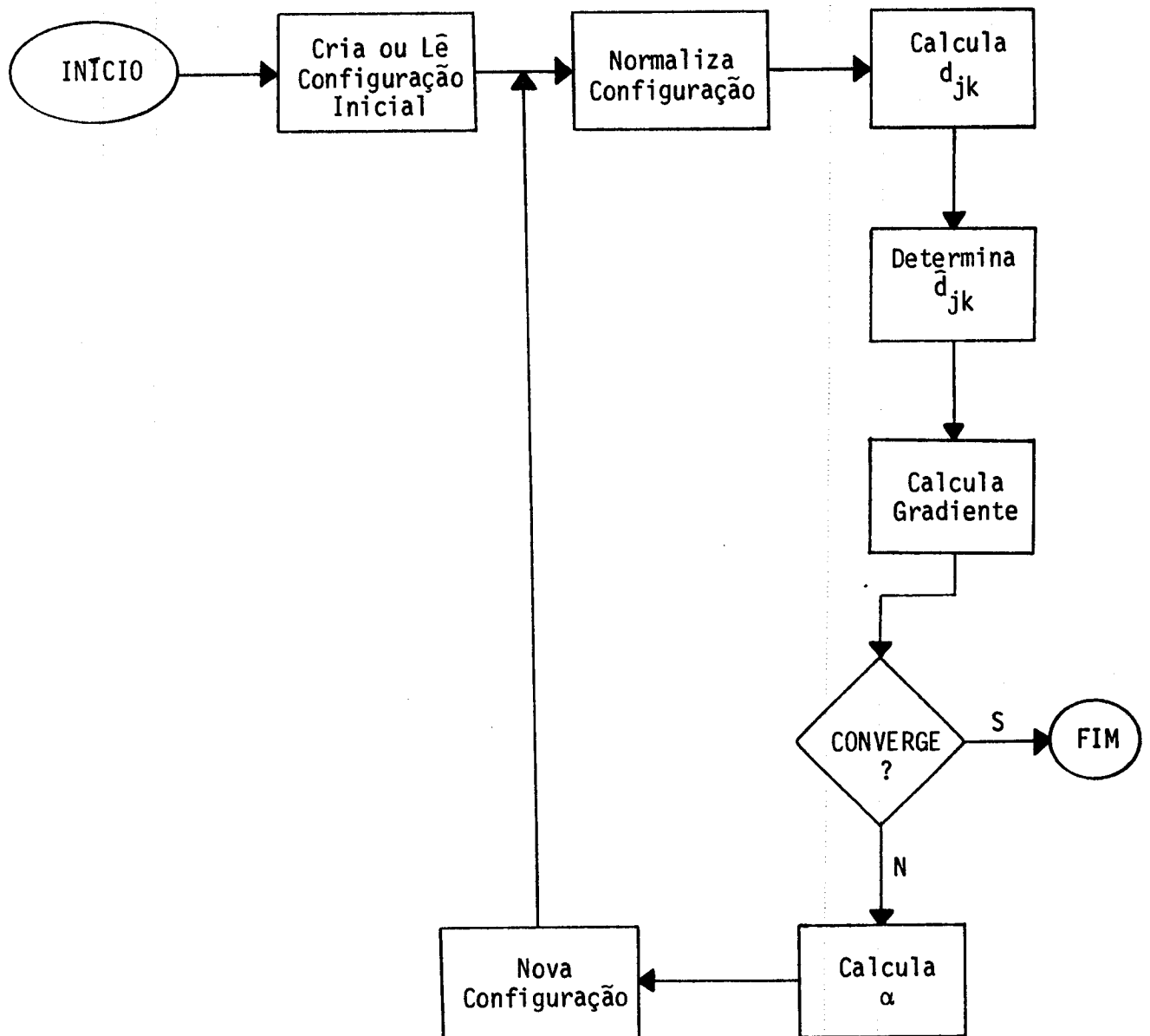


Figura V.4 - Fluxograma do algoritmo MDSCAL.

Vamos agora considerar a situação na qual duas ou mais medidas são iguais. Kruskal [K64a] propõe duas abordagens. A primeira não impõe nenhum vínculo a  $\hat{d}_{ij}$  e  $\hat{d}_{kl}$ , quando  $S_{ij} = S_{kl}$ . Isto é, o único vínculo entre  $\hat{d}_{ij}$  e  $\hat{d}_{kl}$  é o de monotonicidade, ou seja, se

$$S_{ij} < S_{kl} , \quad \text{então} \quad \hat{d}_{ij} \leq \hat{d}_{kl} .$$

A segunda abordagem impõe a igualdade dos  $\hat{d}_{ij}$ , quando ocorre uma igualdade nas similaridades, i.e., se

$$S_{ij} < S_{kl} , \quad \text{então} \quad \hat{d}_{ij} \leq \hat{d}_{kl} ,$$

e se

$$S_{ij} = S_{kl} , \quad \text{então} \quad \hat{d}_{ij} = \hat{d}_{kl} .$$

De Leeuw [D77] demonstra que as duas abordagens propostas por Kruskal são corretas.

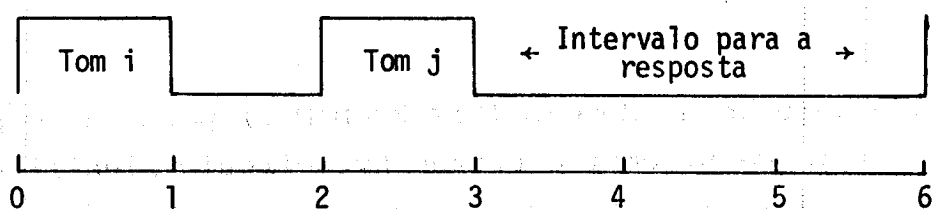
### V.3.3 - Uma Aplicação do Método

O algoritmo MDSCAL foi usado por Bricker e Pruzansky [BP70] para analisar uma matriz de similaridades entre 24 tons audíveis. Estes variavam em frequência (5, 10, 20 e 40 hertz), percentagem de modulação (3%, 10% e 25%) e forma de onda (senoidal e quadrada).

Inicialmente todos os tons eram apresentados aos su

jeitos, após o que liam as seguintes instruções: "Os tons que você acabou de ouvir serão apresentados aos pares durante a experiência. Existe um conjunto de números (0 a 9) na sua folha de resposta, para cada par de tons. Após ouvir cada par, marque o número, no conjunto correspondente, que melhor expressa quão diferentes são os tons. Se não houver qualquer diferença, i.e., se os tons parecem iguais, marque o número "0". Se a diferença entre os tons for pequena, marque "1". Se a diferença for extremamente grande, marque um dos maiores números. Para diferenças intermediárias, marque os números intermediários. Você terá apenas um breve intervalo de tempo após cada par, de modo que você deve marcar o número de acordo com a impressão geral. Lembre-se, use os números menores para as pequenas diferenças, e os números maiores para grandes diferenças" [BP70].

A seguir, os pares eram apresentados conforme o esquema abaixo.



Tempo, segundo.

O ajuste foi realizado num espaço Euclidiano tri-dimensional, conforme figuras V.5, V.6 e V.7.

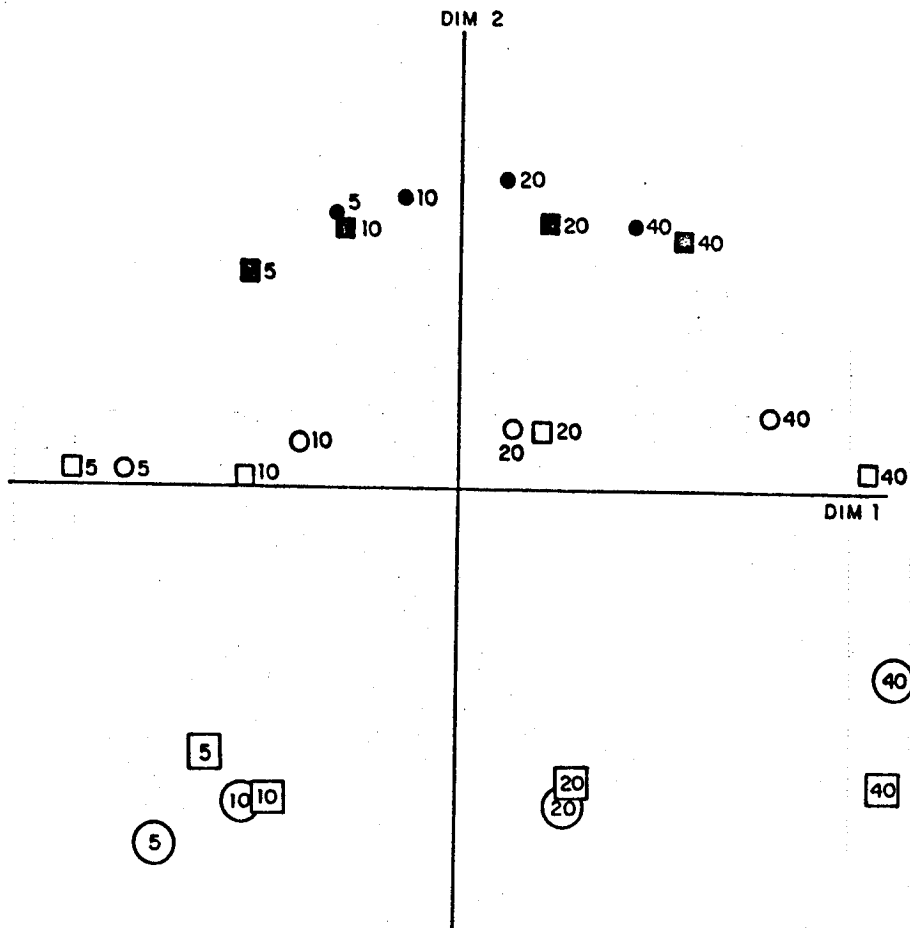


Figura V.5 - Solução do MDSCAL (DIM 2  $\times$  DIM 1) para a experiência de Bricker e Pruzansky: círculo significa onda senoidal, quadrado, onda quadrada. Os números correspondem às frequências. Figuras "cheias" representam 3%, "vazias" menores 10% e as maiores 25%, de percentagem de modulação.

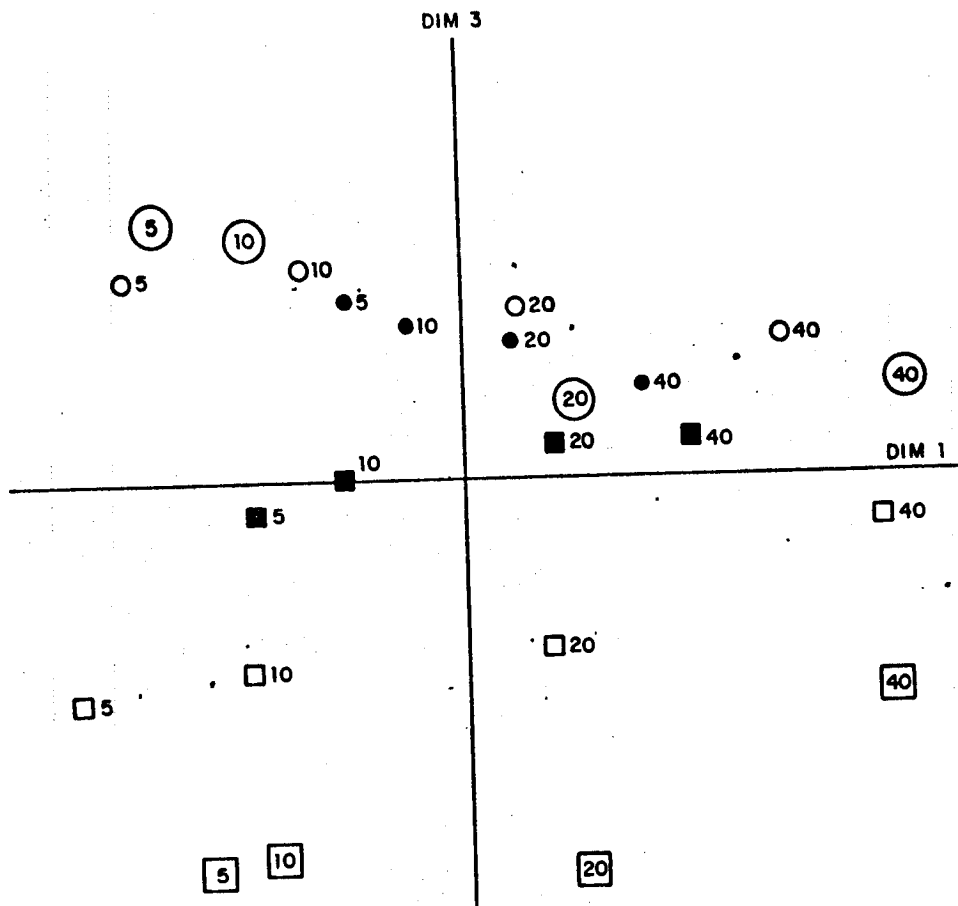


Figura V.6 - Solução do MDSAL (DIM 3 x DIM 1) para a experiência de Bricker e Pruzansky: círculo significa onda senoidal, quadrado, onda quadrada. Os números correspondem às frequências. Figuras "cheias" representam 3%, "vazias" menores 10% e as maiores 25%.



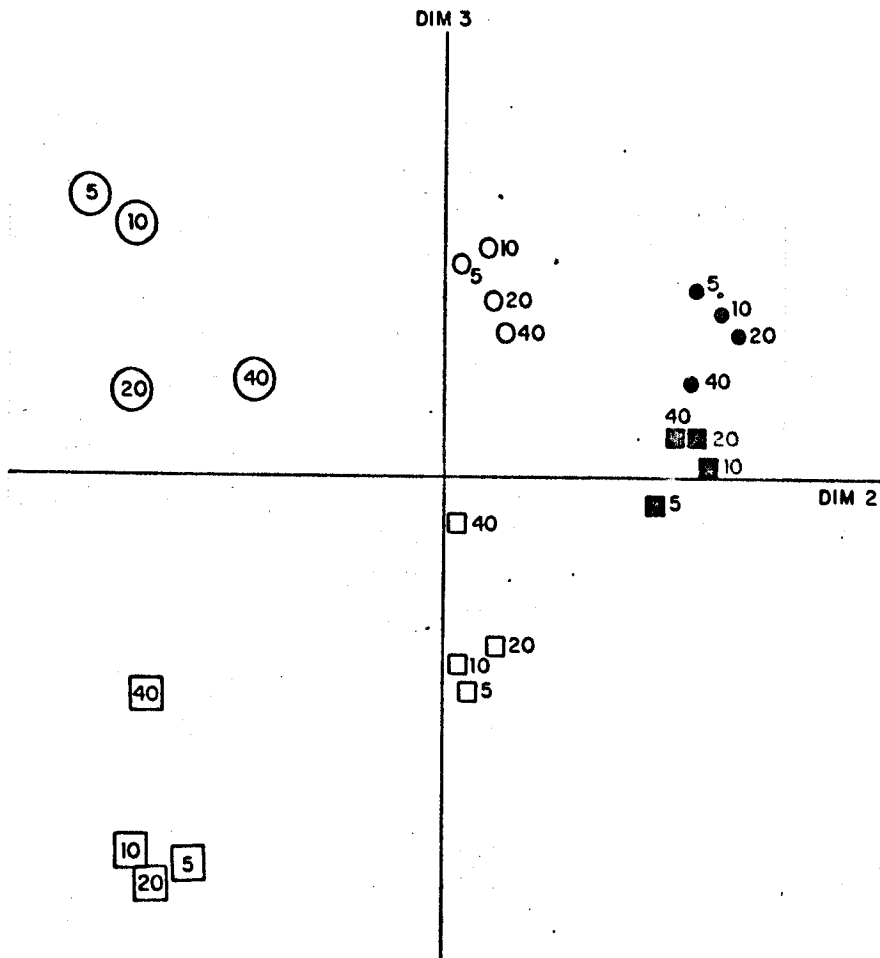


Figura V.7 - Solução do MDSCAL (DIM 3  $\times$  DIM 2) para a experiência de Bricker e Pruzansky: círculo significa onda senoidal, quadrado, onda quadrada. Os números correspondem às frequências. Figuras "cheias" representam 3%, "vazias" menores 10% e as maiores 25%.

Nessas figuras, o círculo significa onda senoidal, e o quadrado, onda quadrada. Os números correspondem às frequências. As figuras "cheias" representam 3% da modulação, as figuras "vazias" menores, 10%, e as maiores 25%.

A Figura V.5 mostra claramente que a dimensão 1 representa a frequência, e a 2 a percentagem de modulação. A forma da onda é representada pela dimensão 3, conforme podemos obser

var na Figura V.6.

A apresentação dessa aplicação do MDSCAL não tem o objetivo de discutir as implicações dos resultados, mas apenas mostrar a capacidade do teste (comparação de tons) e do algoritmo de restabelecerem as características físicas dos estímulos.

#### V.4 - O Método de Guttman e Lingoos.

##### V.4.1 - Características Gerais

O algoritmo SSA-I (Smallest Space Analysis-I) desenvolvido por Guttman e Lingoos [L73] é muito semelhante ao de Kruskal (MDSCAL), apresentado na seção V.3. Tanto Kruskal como Guttman e Lingoos partiram do trabalho de Shepard [She62a], e independentemente chegaram a resultados semelhantes\*. A principal diferença entre os dois algoritmos está na construção do passo de incrementação ("step-size") e na definição de matriz  $D^*$  do SSA-I e  $\hat{D}$  do MDSCAL.

No SSA-I a função  $\phi^*$  que caracteriza o "Stress" é minimizada através da variação simultânea das matrizes  $D$  e  $D^*$ , onde  $D$  é uma matriz de distância, e  $D^*$  é a "imagem em rank" de  $D$ . Essas matrizes coluna são relacionadas através de uma transformação  $T^*$  definida na seção seguinte.

---

\* No início do nosso estudo sobre análise multidimensional chegamos a desenvolver um algoritmo semelhante ao SSA-I, sem conhecermos o trabalho de Guttman e Lingoos.

No processo de minimização são usados dois algoritmos: algoritmo de uma fase, e algoritmo de duas fases. O objetivo fundamental do algoritmo de duas fases é determinar a forma final da transformação  $T^*$ , enquanto no algoritmo de uma fase modifica-se a matriz  $D$ , de modo a ajustar-se aos dados experimentais. Isto é, o algoritmo de duas fases envolve a solução separada de: primeiro, um conjunto de distâncias desconhecidas em termos de um conjunto de valores fixo e conhecido ( $d_{ij}^*$ ), e, segundo, um conjunto de valores desconhecidos ( $d_{ij}$ ) em termos de um conjunto de distâncias fixo e conhecido. No algoritmo de uma fase os dois conjuntos são desconhecidos.

Na seção seguinte descreveremos o formalismo matemático do SSA-I, usando sempre a função  $\phi^*$ . Para efeito de programação em computador, e equivalência com o MDSCAL, Guttman e Lingoes usam a função normalizada  $\phi$ ,

$$\phi = \frac{\phi^*}{2 \sum_{i,j} d_{ij}^2} \quad (V.26)$$

É fácil mostrar que a função  $S$ , do MDSCAL representa o seno entre os vetores  $D$  e  $\hat{D}$

$$S = \text{sen}(D, \hat{D}) ,$$

enquanto (V.26), implica em

$$\phi = 2 \text{sen}^2 \frac{\gamma}{2} , \text{ sendo } \gamma \text{ o ângulo entre } D \text{ e } D^* .$$

Para tornar os dois algoritmos mais equivalentes, de

fine-se o coeficiente de alienação K

$$\begin{aligned}
 K &= \left[ 1 - (1 - \phi)^2 \right]^{1/2} = \left[ 1 - \left( \frac{\sum_{i,j} d_{ij} d_{ij}^*}{\sum_{i,j} d_{ij}^2} \right)^2 \right]^{1/2} \\
 &= \left[ 1 - \cos^2(D, D^*) \right]^{1/2} = \text{sen}(D, D^*) \quad . \quad (V.27)
 \end{aligned}$$

A equação (V.27) pode ser demonstrada a partir das propriedades de D e D\* apresentadas na seção seguinte.

Na seção V.4.3 apresentaremos alguns resultados que mostram o comportamento do algoritmo SSA-I, particularmente com relação ao coeficiente K.

#### V.4.2 - Formalismo Matemático

O que se segue sobre o formalismo matemático do SSA-I foi baseado na referência [LR77].

Seja a função  $\phi^*$ , que caracteriza o "Stress".

$$\phi^* = \sum_{i,j} (d_{ij} - d_{ij}^*)^2 \quad (V.28)$$

onde  $d_{ij}^*$  é a "imagem em ordenação" ("rank image") de  $d_{ij}$ , satisfazendo às seguintes propriedades:

$$\sum_{i,j} d_{ij}^* = \sum_{i,j} d_{ij} \quad (V.29)$$

$$\sum_{i,j} d_{ij}^{*2} = \sum_{i,j} d_{ij}^2 \quad (V.30)$$

$$d_{ij}^* < d_{kl}^* \quad , \quad \text{se} \quad S_{ij} < S_{kl} \quad . \quad (V.31)$$

Como já foi dito, os vetores  $D$  e  $D^*$  são relacionados através da transformação  $T^*$ , que pode ser melhor especificada através das matrizes de ordem  $m = n(n-1)/2$ ,  $E$  e  $E^*$  cujos elementos são

$$e_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } S_{ij} \text{ ocupa a posição } k \text{ em } S \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$e_{ij}^{*k} = \begin{cases} 1, & \text{se } d_{ij} \text{ ocupa a posição } k \text{ em } D \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde,  $i = 1, \dots, n-1$ ;  $j = i+1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ .

A matriz transformação será

$$T^* = E(E^*)' \quad , \quad (V.32)$$

onde o sobrescrito  $'$ , representa a operação de transposição, e os elementos de  $T^*$  são tais que

$$t^*_{(ij)(kl)} = \begin{cases} 1, & \text{se } S_{ij} \text{ e } d_{kl} \text{ ocupam a mesma posição em } S \text{ e } D, \text{ respectivamente.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As "imagens" são obtidas através da relação

$$D^* = T^*D \quad . \quad (V.33)$$

Vejam<sup>os</sup> um exemplo para esclarecer melhor as definições de  $E$ ,  $E^*$  e  $T^*$ .

Consideremos quatro "conceitos", cujas similaridades satisfarão a seguinte ordenação

$$S_{34} < S_{23} < S_{12} < S_{24} < S_{13} < S_{14} \quad (V.34)$$

Supondo que num certo estágio do processo iterativo as distâncias entre os quatro pontos da configuração satisfaçam a ordenação abaixo

$$d_{13} < d_{23} < d_{14} < d_{24} < d_{12} < d_{34} \quad (V.35)$$

a matriz  $E$ , de ordem  $m = n(n-1)/2 = 4(4-1)/2 = 6$ , será

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

porque  $S_{12}$  é o terceiro elemento na ordenação (V.34),  $S_{13}$  é o quinto, e assim por diante, até  $S_{34}$  que é o primeiro da ordenação.

De modo análogo, determina-se  $E^*$ .

$$E^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

logo,

$$T^* = E(E^*)' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $T^*$  é uma espécie de "tabela cartesiana", com o seguinte formato

	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$d_{34}$
$s_{12}$	0	0	1	0	0	0
$s_{13}$	1	0	0	0	0	0
$s_{14}$	0	0	0	0	0	1
$s_{23}$	0	0	0	1	0	0
$s_{24}$	0	0	0	0	1	0
$s_{34}$	0	1	0	0	0	0

Dessa forma, podemos facilmente ver que

$$t_{(i,j)(kl)}^* = \begin{cases} 1, & \text{se } s_{ij} \text{ e } d_{kl} \text{ ocupam a mesma posição nas} \\ & \text{respectivas ordenações (V.34) e (V.35)} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É evidente também, que uma relação monotônica perfeita é obtida quando  $T^*$  é a matriz identidade.

A "imagem" de D será dada por

$$D^* = T^* D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \\ d_{23} \\ d_{24} \\ d_{34} \end{pmatrix}$$

do que resulta,

$$D^* = \begin{pmatrix} d_{14} \\ d_{12} \\ d_{34} \\ d_{23} \\ d_{24} \\ d_{13} \end{pmatrix}$$

Podemos testar essa solução, através de um gráfico do "rank" das distâncias versus o "rank" das similaridades. Cada unidade nos eixos coordenados corresponde ao "rank" ocupado pela respectiva similaridade ou distância.

Assim, se tivéssemos uma relação monotônica entre as distâncias e as similaridades, teríamos uma curva do tipo  $y = x$ . O desvio dessa curva é medido através do método da "imagem em ordenação", quer dizer, mede-se o desvio da monotonicidade.

No caso do nosso exemplo, teremos

A



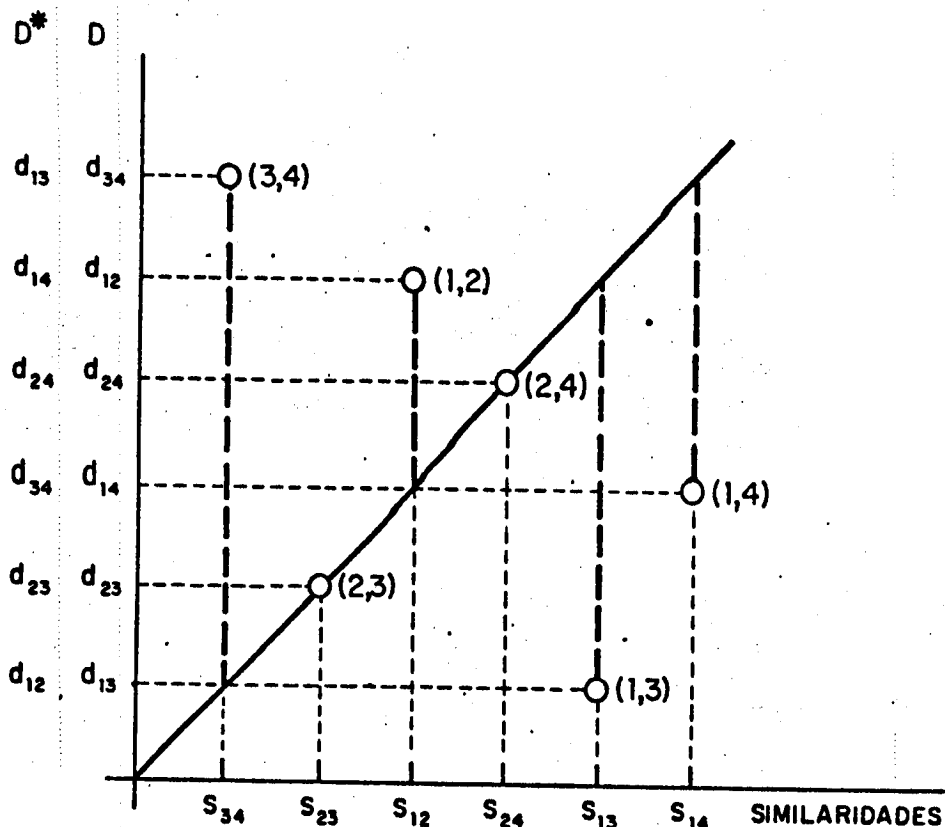


Figura V.8

Representação gráfica do método de "imagem em ordenação".

As linhas tracejadas são os desvios da reta de monotonicidade, que devem ser minimizadas. Essa é uma forma intuitiva de estabelecer o método da "imagem". As "imagens"  $d_{ij}^*$  determinadas a partir da Figura V.8 são exatamente iguais às determinadas analiticamente.

Então, dadas as similaridades  $S_{ij}$  e determinadas as "imagens"  $d_{ij}^*$ , o problema resume-se em minimizar a função  $\phi^*$ , ou equivalentemente, o coeficiente de alienação  $K$ .

Guttman e Lingo usam dois algoritmos no processo de minimização: algoritmo de uma fase e algoritmo de duas fases. A

seguir descrevemos esses dois algoritmos, e na seção V.4.3 apresentaremos alguns resultados a título de ilustração.

### Algoritmo de Uma Fase

Derivando (V.28) com relação a  $X_{ka}$ , obtemos

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_{ka}} = 2 \sum_{i,j} (d_{ij} - d_{ij}^*) \left( \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} - \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}} \right) = 2 \left[ \sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} + \sum_{i,j} \left( d_{ij}^* \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}} - d_{ij} \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}} - d_{ij}^* \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} \right) \right].$$

De acordo com a definição das "imagens", tem-se

$$\sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} = \sum_{i,j} d_{ij}^* \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}},$$

de modo que

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_{ka}} = 4 \sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} - 2 \sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}} - 2 \sum_{i,j} d_{ij}^* \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}} \quad (V.36)$$

A expressão

$$\sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}}$$

é a soma dos produtos das distâncias pelas derivadas das respec

tivas "imagens". A observação cuidadosa da Figura V.8 evidencia que

$$\sum_{i,j} d_{ij} \frac{\partial d_{ij}^*}{\partial X_{ka}} = \sum_{i,j} d_{ij}^{**} \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}}, \quad (V.37)$$

onde  $d_{ij}^{**}$  é a distância entre os pontos K e l, cuja imagem é  $d_{ij}$ .

Substituindo (V.37) em (V.36), teremos

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_{ka}} = 4 \sum_{i,j} \left[ d_{ij} - \frac{1}{2}(d_{ij}^{**} + d_{ij}^*) \right] \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_{ka}}, \quad (V.38)$$

onde

$$D^{**} = (T^*)' D .$$

Definindo

$$\hat{d}_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij}^{**} + d_{ij}^*) ,$$

e usando

$$d_{ij} = \left[ \sum_{a=1}^r (x_{ia} - x_{ja})^2 \right]^{1/2} ,$$

teremos

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_{ia}} = 4 \sum_j (d_{ij} - \hat{d}_{ij}) \left( \frac{x_{ia} - x_{ja}}{d_{ij}} \right) = 4 \sum_j \left( 1 - \frac{\hat{d}_{ij}}{d_{ij}} \right) (x_{ia} - x_{ja}) \quad (V.39)$$

Definindo a matriz  $\hat{C}$ , tal que

$$\hat{C}_{ij} = \begin{cases} 1 + \sum_k \frac{\hat{d}_{ik}}{d_{ik}}; & (i = j) \\ 1 - \frac{\hat{d}_{ij}}{d_{ij}}; & (i \neq j) \end{cases} ,$$

vemos que  $[n^{-1} \hat{C}]$  tem as seguintes propriedades importantes para o ajuste:

- é simétrica
- soma das filas e colunas igual a 1.
- quanto mais próximo de  $d_{ij}$  for  $\hat{d}_{ij}$ , mais próximo de zero serão os elementos fora da diagonal, e mais próximos da unidade serão os elementos da diagonal. De modo que, quando  $\phi^* = 0$ ,  $[n^{-1} \hat{C}]$  é a matriz identidade.

Com essa definição, (V.39) toma a seguinte forma

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_{ia}} = 4 \sum_j \hat{C}_{ij} (X_{ia} - X_{ja}) . \quad (V.40)$$

O mínimo de  $\phi^*$  ocorre quando

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X_{ia}} = 0 ,$$

ou seja

$$\sum_j \hat{C}_{ij} X_{ia} = \sum_j \hat{C}_{ij} X_{ja} .$$

Mas

$$\sum_j \hat{C}_{ij} = n ,$$

logo

$$x_{ia} = \frac{1}{n} \sum_j \hat{C}_{ij} x_{ja} .$$

Agora, podemos variar as coordenadas de acordo com a relação

$$x_{ia}^{(s+1)} = \frac{1}{n} \sum_j \hat{C}_{ij}^{(s)} x_{ja}^{(s)} . \quad (V.41)$$

De (V.40), temos

$$\left[ \frac{\partial \phi^*}{\partial x_{ia}} \right]^{(s)} = 4 \sum_j \hat{C}_{ij}^{(s)} x_{ia}^{(s)} - 4 \sum_j \hat{C}_{ij}^{(s)} x_{ja}^{(s)} ,$$

$$\left[ \frac{\partial \phi^*}{\partial x_{ia}} \right]^{(s)} = 4n x_{ia}^{(s)} - 4n x_{ia}^{(s+1)} ,$$

e finalmente, temos uma relação equivalente a (V.41) para o incremento das coordenadas

$$x_{ia}^{(s+1)} = x_{ia}^{(s)} - \frac{1}{4n} \left[ \frac{\partial \phi^*}{\partial x_{ia}} \right]^{(s)} . \quad (V.42)$$

#### Algoritmo de Duas Fases

A primeira fase do algoritmo consiste em minimizar a função

$$Q^* = \sum_{i,j} (d_{ij} - \delta_{ij})^2 , \quad (V.43)$$

onde  $\delta_{ij}$  são números dados, segundo critérios abaixo estabelecidos.

Então, dada a matriz  $\Delta$ , cujos elementos são os números  $\delta_{ij}$ , o problema é minimizar  $Q^*$ , ou seja encontrar a matriz  $D$  que minimiza  $Q^*$ . Após essa operação, entra-se na segunda fase, onde obtemos

$$\Delta^{(s+1)} = T^* D^{(s)}$$

Com esse novo valor de  $\Delta$ , entra-se novamente na primeira fase, determinando-se a nova matriz  $D$ . Dessa forma, saindo de uma fase e entrando na outra, o algoritmo prossegue até a convergência.

Em princípio, a matriz inicial  $D^{(0)}$  pode ser arbitrariamente escolhida, porém, segundo Lingoés e Roskam [LR77], uma boa matriz  $D^{(0)}$  pode ser formada com os auto-vetores de

$$C_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 + \sum_k \rho_{ik}/m; & (i = j) \\ 1 - \rho_{ij}/m & ; (i \neq j) \end{cases}$$

onde  $m = n(n-1)/2$ , e  $\rho_{ij}$  é a posição ocupada pela similaridade  $S_{ij}$ . Assim, se  $S_{ij}$  ocupa, por exemplo, a quinta posição no "rank" das similaridades, então  $\rho_{ij} = 5$ .

O algoritmo de duas fases usa dois índices de iteração,  $s$  e  $t$ . A primeira fase ocorre "dentro" de cada  $s$ , onde o  $t$  varia de 0 a  $t_{\max}$ .

Em outras palavras, a primeira fase consiste do procedimento iterativo

$$X_{ia}^{(t+1)} = \frac{1}{n} \sum_j C_{ij}^*(s, t) X_{ja}^{(t)}, \quad (\text{V.44})$$

onde  $t = 0, \dots, t_{\max}$ , e

$$C_{ij}^*(s, t) = \begin{cases} 1 + \frac{d_{ik}^*(s-1)}{k d_{ik}(t)} & (i = j) \\ 1 - \frac{d_{ij}^*(s-1)}{d_{ij}(t)} & (i \neq j). \end{cases}$$

Resultados experimentais têm mostrado que o valor de  $t_{\max}$  pode ficar em torno de cinco, i.e.,  $t_{\max} = 5$ .

No início de cada iteração  $s$ , calcula-se a matriz "imagem" da matriz distância da iteração  $s-1$ , ou seja, calcula-se

$$D^*(s) = \Delta(s) = T^* D(s-1) \quad (\text{V.45})$$

Conhecendo-se a matriz  $D^*(s)$ , inicia-se a primeira fase da iteração  $s$ , ou seja varia-se  $X_{ia}$  de acordo com (V.44), até atingir-se o mínimo de  $Q^*$ . Quando isso ocorrer, usaremos novamente (V.45), e assim por diante.

Antes da convergência,  $Q^*(s) \neq \phi^*(s)$ , pois

$$Q^*(s) = \sum_{i,j} \left[ d_{ij}(s) - d_{ij}^*(s-1) \right]^2$$

e

$$\phi^*(s) = \sum_{i,j} \left[ d_{ij}(s) - d_{ij}^*(s) \right]^2.$$

O algoritmo de duas fases só termina quando  $Q^* = \phi^*$ , ou seja, quando a matriz  $D$  na iteração  $s$  ajusta-se simultaneamente à matriz  $D^*$  da iteração  $s-1$  e da iteração  $s$ . Nesse momento, passa-se para o algoritmo de uma fase, onde a função  $\phi^*$  é minimizada, variando-se simultaneamente  $D$  e  $D^*$ .

Salienta-se que no algoritmo de duas fases, minimiza-se  $Q^*$ , variando-se apenas  $D$  na direção de  $D^*$ . Ao contrário, o algoritmo de uma fase varia  $D$  e  $D^*$  simultaneamente, para minimizar  $\phi^*$ .

Desse modo, a dupla fase funciona como um pré-ajuste, enquanto a fase única é o "ajuste fino" do processo total.

#### V.4.3 - Comportamento do Algoritmo: Exemplo Numérico

Para ilustrar o comportamento do algoritmo de duas fases, vejamos um exemplo apresentado por Lingoes e Roskam [LR77].

Dez pontos foram distribuídos aleatoriamente num espaço de cinco dimensões. A matriz "input", Tabela V.2, foi formada a partir da ordenação crescente das distâncias. Assim, na Tabela V.2 o elemento (10, 7) é 1, porque a distância  $d_{10, 7}$  ocupa a primeira posição na ordenação ("rank"), i.e.,  $d_{10, 7}$  é a menor distância.

O algoritmo foi usado para fazer um ajuste em duas dimensões com a configuração inicial da Tabela V.3, obtida pelo método de Guttman e Lingoes (seção V.4.2).



Tabela V.2 - Matriz de "similaridades".

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	16									
3	4	3								
4	23	40	28							
5	8	5	6	20						
6	10	32	14	2	7					
7	26	18	21	36	17	22				
8	24	31	29	44	33	35	9			
9	39	45	41	30	34	27	42	38		
10	15	12	19	37	11	25	1	13	43	

Tabela V.3 - Configuração inicial.

	DIM 1	DIM 2
1	-0.1472	0.0657
2	-0.2387	-0.0902
3	-0.1719	0.0441
4	0.0528	0.9185
5	-0.1177	0.0872
6	-0.0246	0.2738
7	-0.2076	-0.2163
8	-0.2047	-0.7011
9	1.2731	-0.2056
10	-0.2136	-0.1761

Usou-se  $t_{\max} = 5$  no algoritmo de duas fases, mas quando a variação de  $Q^*$  é muito lenta, a primeira fase é encerrada em  $t = 1$  ou  $2$ , passando-se à segunda fase.

Na Tabela V.4 temos a "história" do processo iterativo da dupla fase.

Tabela V.4 - "História" do processo iterativo na dupla fase.

s	t	K	$Q^*$
0		.30319	
1	0		9.4142
.	1		5.8414
.	2		5.0865
.	3		4.3462
.	4		4.2554
.	5		4.2304
1		.15593	
2	0		2.4464
.	1		1.8117
.	2		1.7060
.	3		1.6779
.	4		1.6602
.	5		1.6570
2		.11405	
3	0		1.3050
.	1		1.1764
.	2		1.1183
.	3		1.1070
.	4		1.1012
.	5		1.0991
3		.10491	
4	0		1.1037

Continua

Tabela V.4 - Continuação.

s	t	K	Q*
5	.	.10195	
6	0		1.0421
.	1		1.0353
.	2		1.0334
6	.	.10269	
7	0		1.0574
.	1		1.0528
.	2		1.0521
7	.	.10305	
8	0		1.0647
.	1		1.0612
.	2		1.0609
8	.	.10311	
9	0		1.0660
.	1		1.0628
.	2		1.0627
9	.	.10323	
10	0		1.0684
.	1		1.0653
10	.	.10332	
11	0		1.0703
.	1		1.0673
11	.	.10340	
12	0		1.0703
.	1		1.0690
12	.	.10347	
13	0		1.0734
.	1		1.0704
13	.	.10351	
14	0		1.0744
.	1		1.0715
14	.	.10356	

A partir de  $s = 14$  os valores de  $K$  e  $Q^*$  oscilam em torno de .10356 e 1.0715, respectivamente.

Observa-se que o menor valor de  $K$  é obtido em  $s = 5$ ,  $K = .10195$ . O programa volta para  $s = 5$ , considera  $x^{(s=5)}$  como configuração inicial, e inicia o algoritmo de uma fase, cuja "história" é apresentada na Tabela V.5.

Tabela V.5 - "História" do processo iterativo na fase única.

s	K	$\phi^*$
5	.10195	1.0421
6	.09824	.9675
7	.09651	.9336
8	.09627	.9289
9	.09607	.9251
10	.10110	1.0248
.	.	.
16	.09314	.8694

A partir de  $s = 16$  os valores de  $K$  e  $\phi^*$  apresentam uma pequena oscilação em torno de .09314 e .8694, respectivamente.

A configuração final é apresentada na Tabela V.6.

Tabela V.6 - Configuração final do exemplo numérico.

	K = .09314	
	D- I	D- II
1	-0.0629	0.6190
2	-0.9336	0.5053
3	-0.3561	0.4862
4	1.1672	0.5218
5	0.0416	0.2621
6	0.6210	0.3338
7	-0.6879	-0.4764
8	-0.6227	-1.0496
9	1.5359	-0.8798
10	-0.7025	-0.3225

Vale salientar que o exemplo apresentado refere-se a uma configuração num espaço de cinco dimensões, cujo ajuste foi feito em duas dimensões, razão pela qual se obteve um alto valor para o coeficiente de alienação ( $K = .09314$ ), considerando-se que os pontos realmente pertenciam a uma configuração espacial. Nesses casos, os valores de  $K$  costumam ser da ordem de  $10^{-3}$ .

Nos casos em que as medidas de similaridade apresentam algum nível de erro, os valores de  $K$  podem ser da ordem de  $10^{-1}$ . No Capítulo VII discutiremos essa questão do nível de erro, mas podemos adiantar que uma das principais fontes de erro é a violação da desigualdade triangular.

Na Tabela V.7 apresentamos os valores de  $K$  e o número de iterações para os ajustes dos nossos testes de associação de

conceitos.

Na coluna teste, a letra A refere-se ao TANC, e a B ao TAEC; o número refere-se à oportunidade de aplicação, enquanto E significa grupo experimental e C, grupo controle.

Por exemplo, A1E significa: TANC apresentado na primeira oportunidade (antes da instrução) ao grupo experimental.

Tabela V.7 - Valores de K e números de iterações para os diversos testes de associação de conceitos.

TESTE	K	ITERAÇÕES
A1E	.1076	74
A1C(*)		
A2E	.0412	67
A2C(*)		
B1E	.0033	100
B1C	.0613	42
B2E	.0013	38
B2C	.0313	75

(\*) Testes que não proporcionaram um ajuste com significância estatística ao nível de .01.

## V.5 - O Método de Carrol e Chang

### V.5.1 - Características Gerais

O método de Carrol e Chang, denominado INDSCAL (Individual Differences SCALing), trata das diferenças individuais.

O problema é encontrar uma configuração num espaço Euclídeo ponderado,  $r$ -dimensional, de modo que as distâncias, dadas pela relação

$$d_{ijk}^2 = \sum_{a=1}^r W_{ia} (X_{ja} - X_{ka})^2, \quad (V.46)$$

melhor se ajustem às medidas de similaridade.

Na equação (V.46),  $W_{ia}$  representa a importância que o sujeito  $i$  atribui à dimensão (ou fator)  $a$ , quando estima a similaridade entre dois conceitos. Por causa da existência dos pesos  $W_{ia}$ , é que o espaço é dito ponderado.

$X_{ja}$  é a coordenada do conceito  $j$  na dimensão  $a$ , e o espaço dos  $X_{ja}$  é denominado espaço dos conceitos, enquanto o dos  $W_{ia}$  é o espaço dos sujeitos.

Além desses dois espaços, temos um "espaço privado" para cada sujeito, representado pelas coordenadas  $Y_{ija}$ , conforme relação abaixo

$$Y_{ija} = W_{ia}^{1/2} X_{ja} \quad (V.47)$$

$Y_{ija}$  é a coordenada do objeto  $j$ , na dimensão  $a$ , atribuída pelo sujeito  $i$ . Assim, cada sujeito  $i$  atribui uma coordenada  $Y_{ija}$ , e teremos portanto,  $m$  espaços individuais, os quais representam as estruturas cognitivas dos sujeitos.

Substituindo (V.47) em (V.46), teremos

$$d_{ijk}^2 = \sum_{a=1}^r (Y_{ija} - Y_{ika})^2 \quad (V.48)$$

Assim, no caso de uma investigação sobre a estrutura cognitiva, trata-se de analisar as diferenças que existem entre os indivíduos para a formação dessa estrutura cognitiva. Isto é, o método tem como objetivo investigar como cada indivíduo organiza os conceitos na sua estrutura cognitiva.

Além de fornecer uma configuração ou "mapeamento cognitivo" para cada sujeito, o INDSCAL também fornece uma configuração representativa do grupo pesquisado, semelhante aos resultados dos métodos anteriores.

O algoritmo, elaborado por Carrol e Chang [CC70b], é do tipo métrico, porque transforma as similaridades em produtos escalares, e através de ajuste pelo método dos mínimos quadrados determina as coordenadas da configuração.

Pelo fato de ser um algoritmo métrico, o INDSCAL exige que as similaridades satisfaçam a desigualdade triangular (V.1). Essa exigência é atendida através da estimativa de uma constante aditiva, como na equação (V.6). As similaridades dão origem a produtos escalares através da equação (V.15).

O que se segue sobre o formalismo matemático do INDSCAL é baseado na referência [CC70b].

#### V.5.2 - Formalismo Matemático.

Sejam  $m$  sujeitos atribuindo medidas de similaridade entre  $n$  conceitos (ou quaisquer estímulos psicológicos).

$S_{ijk}$  é a medida de similaridade entre os conceitos  $j$  e  $k$ , fornecida pelo sujeito  $i$ .



A relação (V.48) segue a métrica Euclideana usual (não ponderada), de modo que o espaço privado do sujeito  $i$  é um espaço Euclideano.

O algoritmo numérico calcula os  $X_{ja}$  e  $W_{ia}$ , após o que podemos determinar os espaços privados que nos interessarem.

Já vimos que as similaridades dão origem a produtos escalares, de forma análoga à relação (V.15).

Por outro lado, temos que

$$b_{ijk} = \sum_a Y_{ija} Y_{ika} = \sum_a W_{ia}^{1/2} X_{ja} W_{ia}^{1/2} X_{ka} ,$$

ou seja,

$$b_{ijk} = \sum_{a=1}^r W_{ia} X_{ja} X_{ka} . \quad (V.49)$$

Podemos considerar que  $X_{ja}$  e  $X_{ka}$  pertençam a configurações diferentes, escrevendo

$$b_{ijk} = \sum_{a=1}^r W_{ia} X_{ja}^{(E)} X_{ka}^{(D)} . \quad (V.50)$$

O algoritmo consiste em atribuir valores a duas variáveis, e pelo método dos mínimos quadrados determinar a terceira, de modo que os  $b_{ijk}$  se ajustem aos valores  $b_{ijk}^*$ , obtidos a partir das medidas experimentais, conforme a relação (V.15).

Inicialmente atribui-se valores arbitrários a  $X^{(E)}$  e  $X^{(D)}$ , e define-se uma espécie de produto direto (ou de Kronecker) dessas duas matrizes  $n \times r$ , de forma que o resultado é uma matriz  $n^2 \times r$ .

Sejam  $x_1^E, x_2^E, \dots, x_r^E$  e  $x_1^D, x_2^D, \dots, x_r^D$  os vetores coluna  $(n \times 1)$  das matrizes  $X^E$  e  $X^D$ , respectivamente.

Isto é,

$$x_i^D = \begin{pmatrix} x_{1i}^E \\ x_{2i}^E \\ \vdots \\ x_{ni}^E \end{pmatrix} \quad e \quad x_i^D = \begin{pmatrix} x_{1i}^D \\ x_{2i}^D \\ \vdots \\ x_{ni}^D \end{pmatrix}$$

Define-se a matriz

$$G = X^E \boxtimes X^D ,$$

cujos vetores coluna são  $G_1, G_2, \dots, G_r$ , onde

$$G_1 = x_1^E \otimes x_1^D .$$

Ou seja, cada coluna de  $G$  é o produto direto usual das correspondentes colunas de  $X^E$  e  $X^D$ .

O "produto direto" que resulta em  $G$  foi representado pelo símbolo " $\boxtimes$ " para distinguir do produto de Kronecker usual, cujo símbolo é " $\otimes$ ".

Utilizando-se agora as estimativas dos  $b_{ijk}$ , teremos

$$B^* = W(G)' . \tag{V.51}$$

A solução de (V.51) segundo um critério de mínimos quadrados será

$$\hat{W} = B^*G[(G)'G]^{-1} . \quad (V.52)$$

A seguir, define-se o "produto direto" de  $\hat{W}$  e  $X^E$ , e determina-se  $\hat{X}^D$ .

O algoritmo prossegue conforme o esquema  $\hat{W} \boxtimes X^E = G' \Rightarrow \hat{X}^D \xrightarrow{\hat{W}} \hat{W} \boxtimes \hat{X}^D = G'' \Rightarrow \hat{X}^E \xrightarrow{\hat{X}^D} \hat{X}^E \boxtimes \hat{X}^D = G''' \Rightarrow \hat{W}$ , até à convergência, quando teremos  $X^E \approx X^D$ .

### V.5.3 - Algumas Aplicações.

O que se segue são extratos de alguns relatos de aplicações do INDSCAL.

#### a. Similaridades entre 24 tons audíveis

Carrol e Chang retomaram os dados coletados por Brickner e Pruzansky [BP70] e aplicaram o INDSCAL.

O arranjo experimental já foi descrito na seção V.3.3, de modo que passaremos a apresentar os resultados.

Como podemos observar nas figuras V.9, V.10 e V.11 o espaço dos conceitos determinado pelo INDSCAL aproxima-se bastante da solução do MDSCAL, apresentada na seção V.3.3.

A dimensão 1 foi interpretada como o eixo das frequências, a dimensão 2 como o das percentagens de modulação, e a dimensão 3 como o da forma da onda.

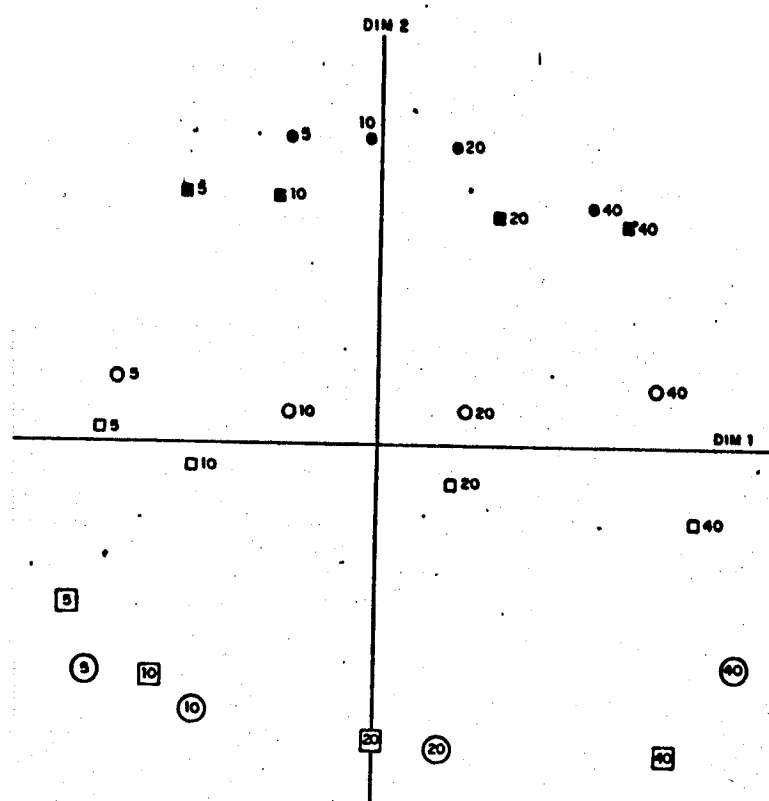


Figura V.9 - Círculo refere-se a onda senoidal, quadrado a onda quadrada. Os números referem-se às frequências. Figuras menores representam modulação a 3%, figuras intermediárias modulação a 10%, e as figuras maiores 25%.

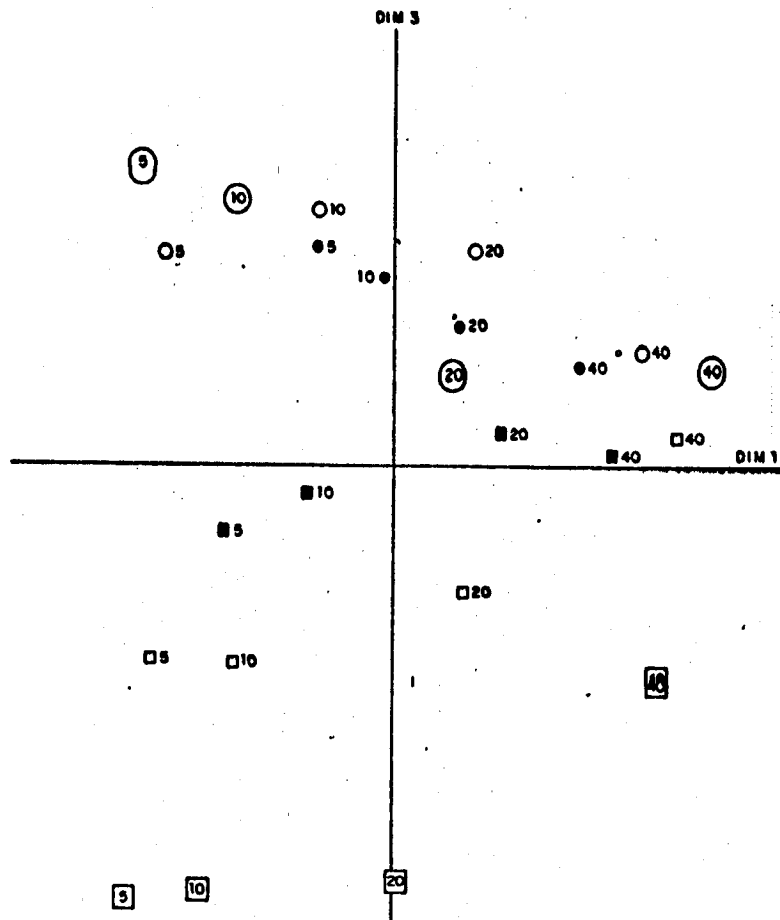


Figura V.10.

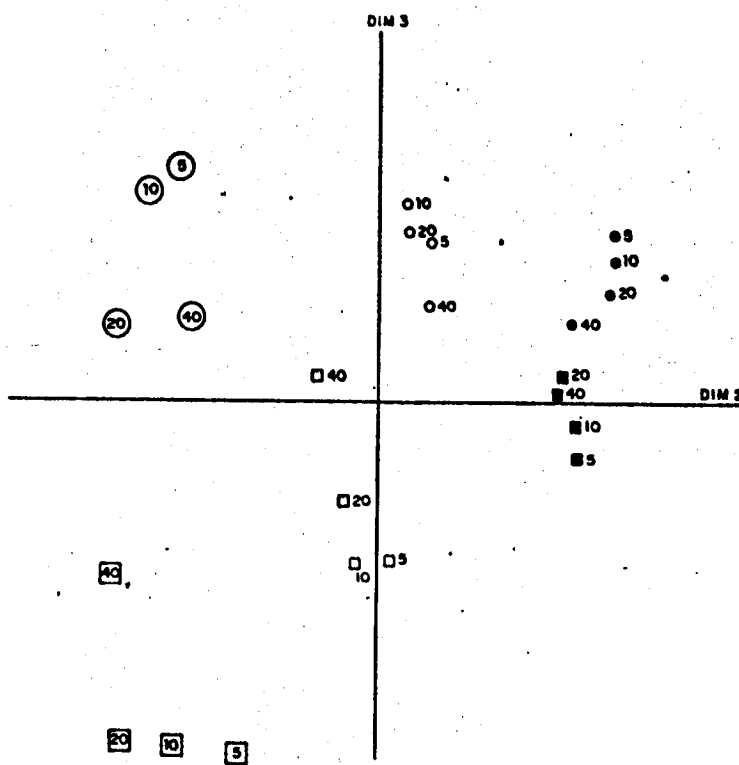


Figura V.11.

O espaço dos sujeitos, apresentado nas figuras V.12, V.13 e V.14, mostra que de um modo geral os sujeitos atribuíram pesos iguais às três dimensões. Isto é, quando julgaram ou atribuíram a similaridade entre dois tons, levaram em conta os três fatores, com igual importância. Isso está de acordo com o exame clínico, no qual todos os sujeitos apresentaram uma audição normal.

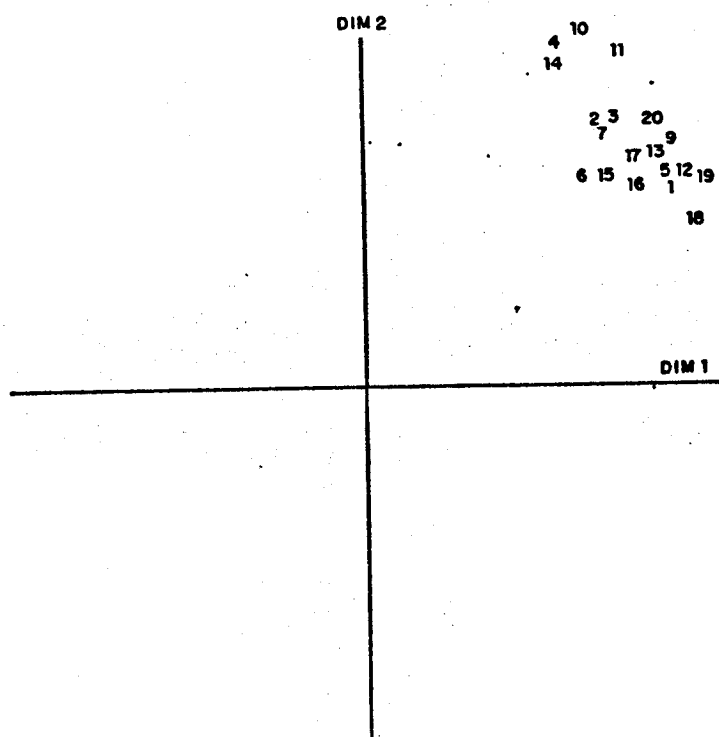


Figura V.12 - Espaço dos sujeitos.

DIM 1 = Frequências

DIM 2 = Percentagens de modulação

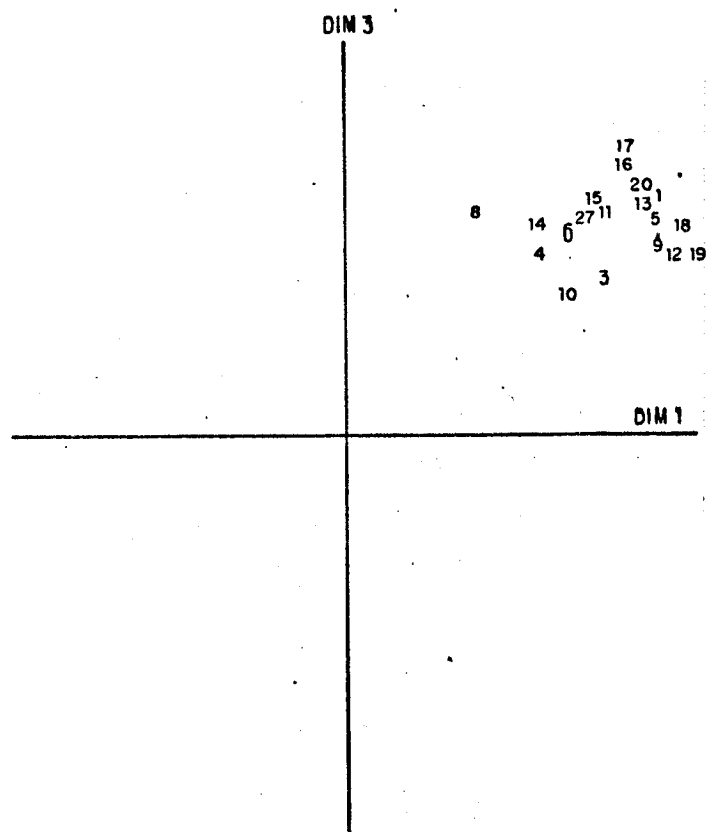


Figura V.13 ■ Espaço dos sujeitos  
 DIM 1 = Frequências  
 DIM 3 = Forma da onda

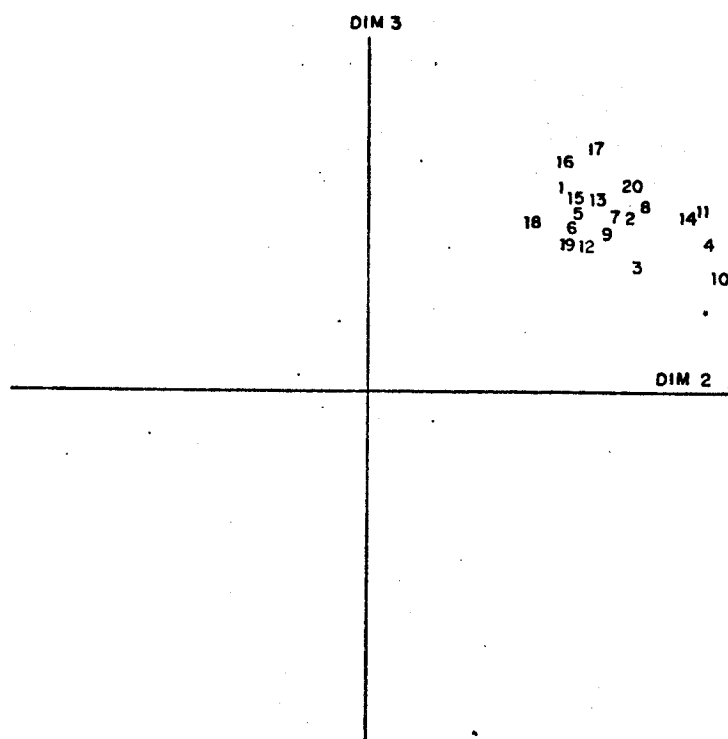


Figura V.14 - Espaço dos sujeitos.

b. Percepção das cores

Carrol e Wish [CW74] analisaram dados coletados por Helm em 1964, sobre percepção das cores.

Eles não descrevem o arranjo experimental elaborado por Helm, de modo que apresentaremos apenas os resultados e discussões apresentados por Carrol e Wish [CW74].

Encontrou-se uma configuração bi-dimensional, conforme a Figura V.15.

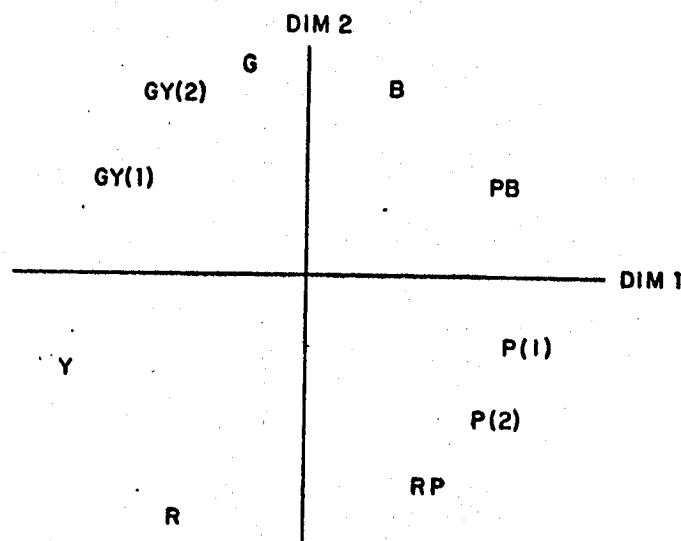


Figura V.15 - Aplicação do INDSCAL aos dados de Helm, sobre percepção de cores. DIM 1 representa o eixo amarelo-azul, e a DIM 2, o eixo verde-vermelho.

É interessante notar que a configuração apresentada na Figura V.15 ajusta-se perfeitamente ao diagrama de Munsell, encontrado em qualquer livro sobre a teoria das cores.

Outro resultado bastante interessante refere-se à de



ficiência visual de alguns sujeitos da amostragem. Exames clínicos usuais mostraram que quatro sujeitos do grupo, apresentavam defeitos visuais na faixa verde-vermelho ("deficient in red-green color vision").

A Figura V.16, que apresenta o espaço dos sujeitos (\*), mostra claramente a existência desses sujeitos com deficiência visual (sujeitos CD1, CD2, CD3 e CD4). Esses sujeitos deram uma importância muito maior à dimensão 1, quando atribuíram valores de similaridade entre cores.

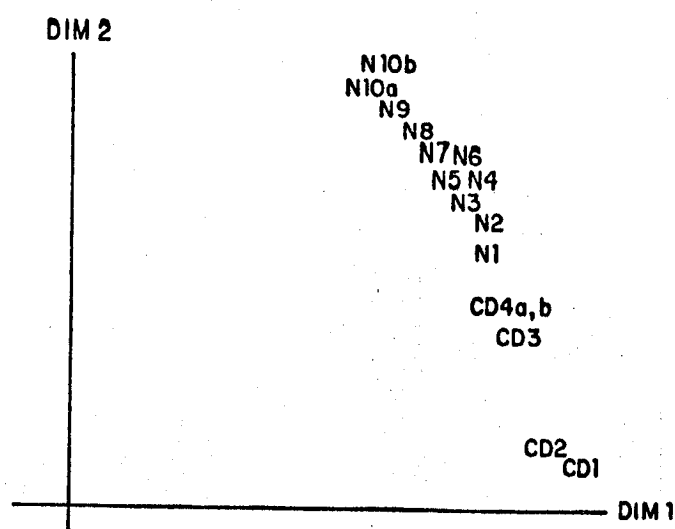


Figura V.16 - Espaço dos sujeitos. Aplicação do INDSCAL aos dados de Helm sobre percepção das cores.

A deficiência visual dos sujeitos CD1, 2, 3 e 4 é bem caracterizada, quando se determina seus espaços privados.

Um sujeito normal tende a apresentar um espaço priva

(\*) Os sujeitos CD4 e N10 foram submetidos ao teste duas vezes.

do aproximadamente igual ao espaço dos conceitos (Figura V.15), enquanto um deficiente tende a "achatar" a Figura V.15 na dimensão que corresponde à sua deficiência.

Isso pode ser observado nas figuras a seguir.

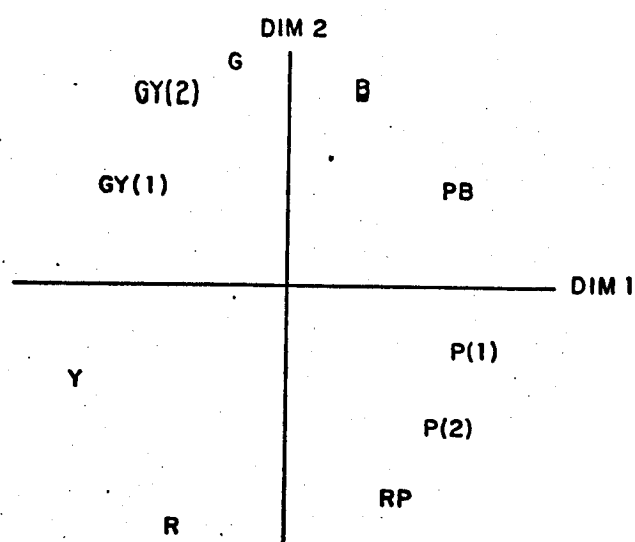


Figura V.17 - Espaço privado do sujeito N10a.

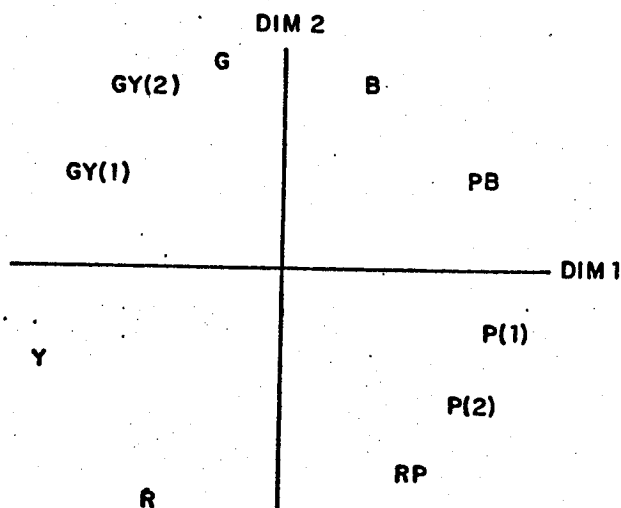


Figura V.18 - Espaço privado do sujeito N7.

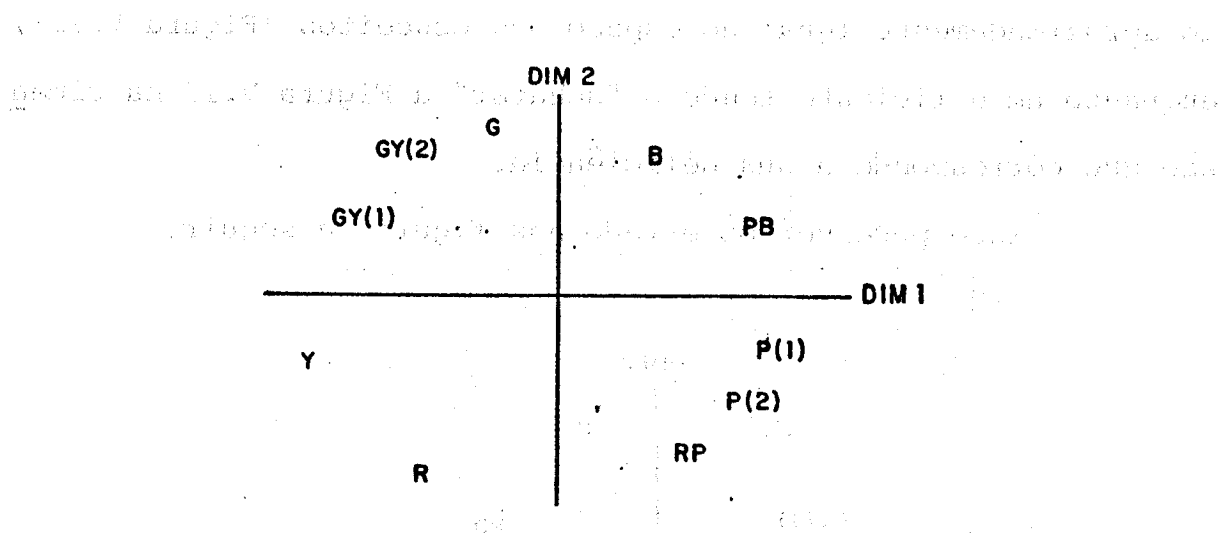


Figura V.19 - Espaço privado do sujeito CD4a.

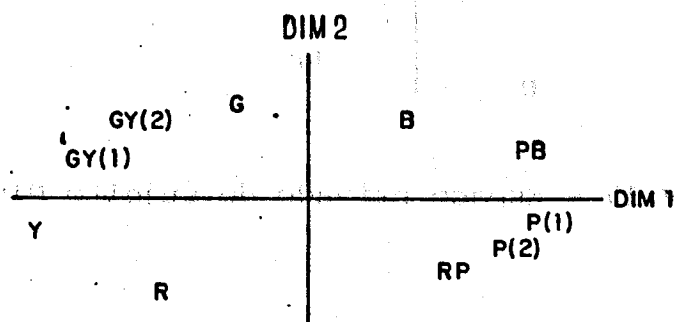


Figura V.20 - Espaço privado do sujeito CD1.

### c. Similaridade entre nações

Carrol e Wish [CW75] analisaram dados coletados por Wish, sobre as similaridades entre 12 países. O teste usado por Wish era muito semelhante ao TANC, descrito no Capítulo III. Todos os pares de países eram apresentados, seguidos de uma escala de zero a dez. Se os países eram muito semelhantes (para o su

jeito que julgava) marcava-se um número alto, próximo de dez, ou mesmo o dez. Caso contrário, i.e., se os países eram bastante diferentes, marcava-se um número próximo de zero, ou mesmo o zero.

Além desse teste, os sujeitos foram solicitados a indicar sua posição com relação à guerra do Vietnã. A partir da posição assumida, os Ss eram classificados como "Pombos" ("Doves"), "Falcões" ("Hawks") e "Moderados" ("Moderates").

Os dados permitiram o ajuste de uma configuração tri-dimensional, com dimensões representando "alinhamento político e ideologia" (essencialmente "comunista" versus "não-comunista"), "desenvolvimento econômico" e "geografia e cultura" (essencialmente "leste" versus "oeste").

As figuras V.21 e V.22 apresentam as projeções nos planos 1-2 e 1-3, respectivamente.

Na Figura V.23 vemos que os "Falcões" colocam maior ênfase no alinhamento político das nações, do que no desenvolvimento econômico. Isto é, quando um "Falcão" julga a similaridade entre duas nações, ele dará um valor tanto maior, quanto mais alinhadas, politicamente, elas forem. O fato de ambas serem desenvolvidas ou não, tem pouca importância no julgamento.

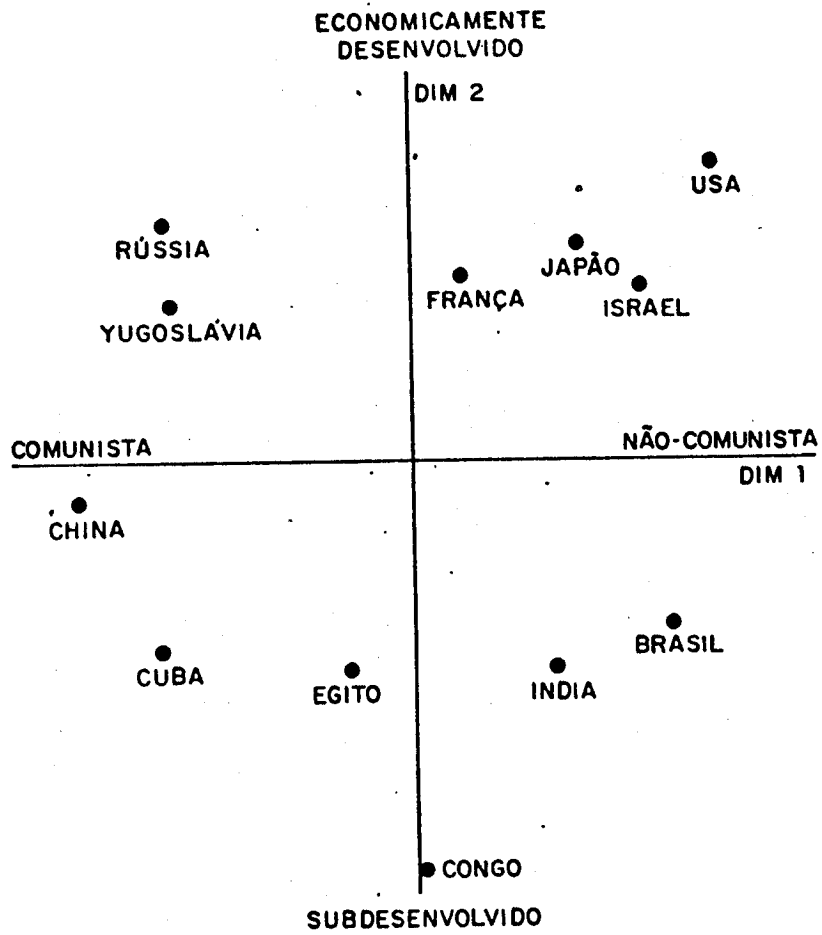


Figura V.21 - Aplicação do INDSCAL ao teste de simi-  
laridade entre nações. DIM 1 x DIM 2  
[CW75] .

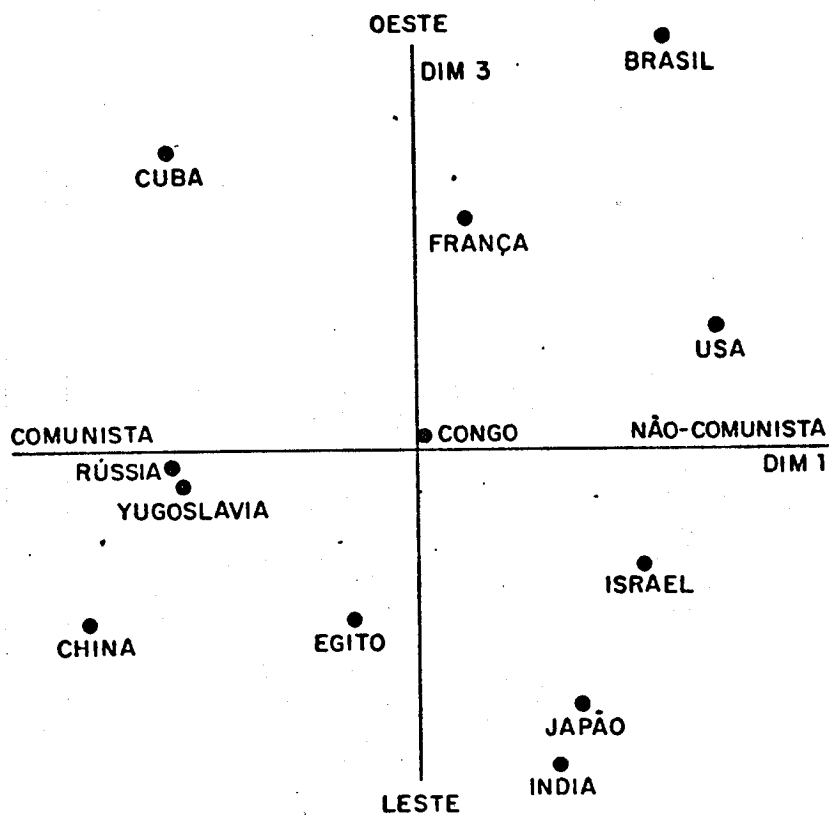


Figura V.22 - Aplicação do INDSCAL ao teste de similaridade entre nações. DIM 1 x DIM 3 [CW75].

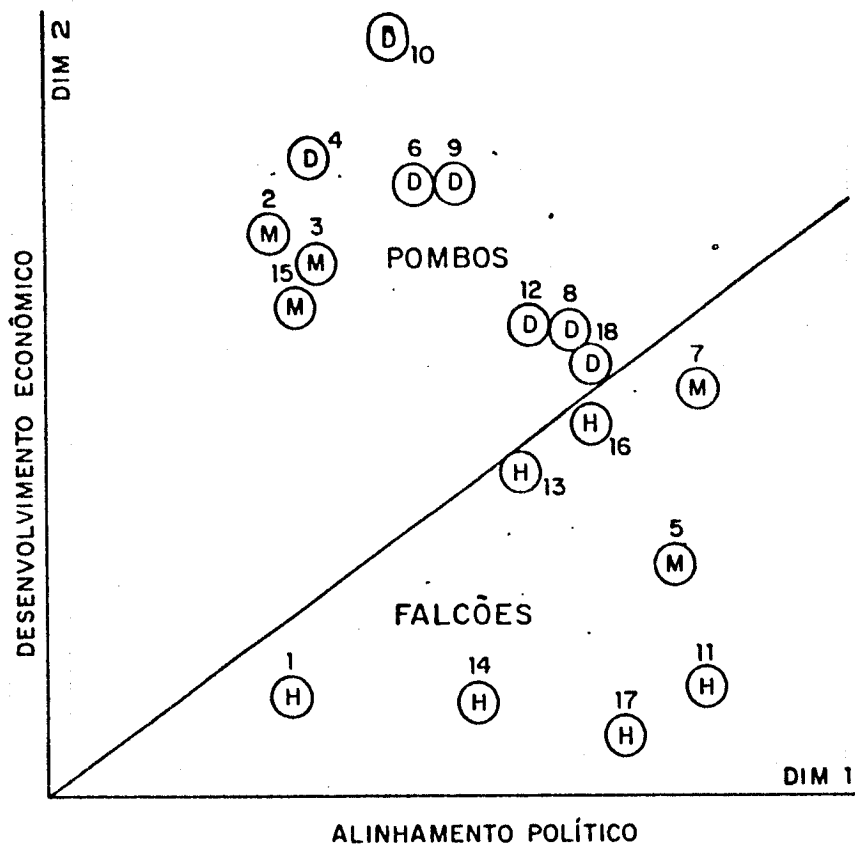


Figura V.23 - Espaço dos sujeitos para a aplicação do INDSICAL à experiência de Wish [CW75].

No caso da Rússia e Estados Unidos, um "Falcão" fornecerá um valor baixo para a similaridade, enquanto um "Pombo" procederá de forma contrária.

Para um "Falcão", Rússia e U.S.A. são muito diferentes, porque uma é comunista e o outro capitalista.

Para um "Pombo" essas duas nações são muito semelhantes, porque ambas são economicamente desenvolvidas.

Como acabamos de ver, a análise multidimensional, particularmente o modelo INDSICAL, pode simultaneamente fornecer informações sobre os estímulos psicológicos (tons, cores, nações

ou conceitos físicos) e sobre os sujeitos, cujos julgamentos constituem os dados da análise.



## VI - ANÁLISE DE AGRUPAMENTOS HIERÁRQUICOS\*

No capítulo II apresentamos alguns testes de associação que fornecem medidas de similaridade entre um dado conjunto de conceitos. O problema é descobrir a estrutura, se houver, inerente ao conjunto de medidas de similaridade.

No capítulo V apresentamos a AMD, uma técnica capaz de estabelecer tal estrutura, restrita a um espaço métrico, particularmente o espaço Euclidiano.

Veremos agora uma técnica alternativa, que não impõe tal restrição ao conjunto de dados. Isto é, enquanto a AMD supõe que os conceitos sejam representados por pontos num espaço Euclidiano, a análise de agrupamentos hierárquicos (AAH) supõe apenas a existência de uma estrutura com uma métrica particular, não necessariamente num espaço físico, concreto.

### VI.1 - A Métrica da AAH

A Figura VI.1 mostra um resultado típico de uma AAH.

---

\* Baseado na referência [Jo67]

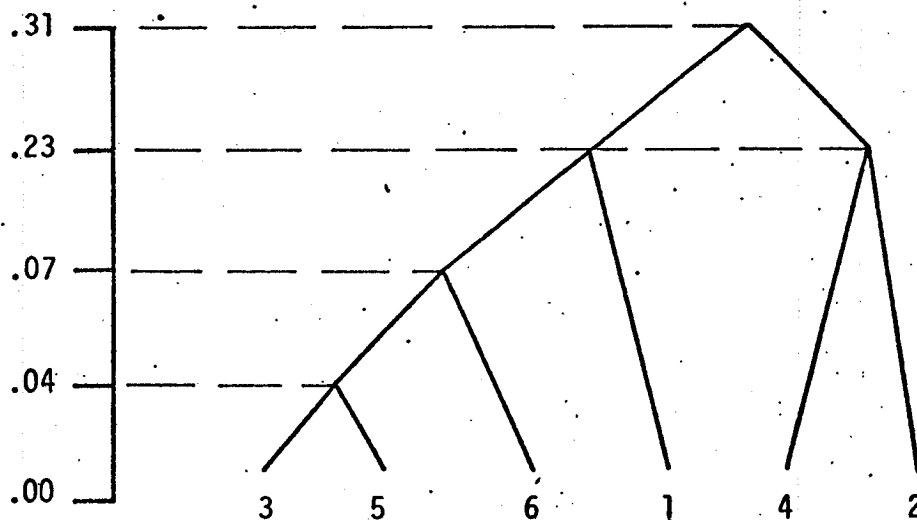


Figura VI.1 - Resultado de uma AAH para 6 "conceitos".

Vejamos algumas características desse resultado. No primeiro nível de agrupamento .00, cada conceito é um aglomerado, de modo que com "seis conceitos", teremos seis aglomerados. A seguir vem o nível .04, com cinco aglomerados; o conjunto {3, 5} é um aglomerado, e os outros quatro "conceitos" são eles próprios os aglomerados. No nível .07 temos quatro aglomerados {3, 5, 6}, {1}, {4} e {2}. No nível .23 temos {3, 5, 6, 1} e {4, 2}, e finalmente no nível .31 temos apenas um aglomerado {3, 5, 6, 1, 4, 2}. Podemos interpretar esses níveis como distâncias entre os aglomerados, satisfazendo uma determinada métrica, ou equivalentemente, como "interações" entre os aglomerados. Nesse sentido, no nível .00 teremos as "interações" mais "fortes". As "interações" vão se tornando mais "fracas" à medida que o nível de agrupamento vai aumentando. Para efeito de análise, consideraremos o nível .00 apenas como referência, de

modo que a "interação" mais "forte" é entre os "conceitos" 3 e 5, ao nível .04.

No nível .00 sempre temos tantos aglomerados quantos forem os conceitos. O número de aglomerados vai diminuindo até o valor unitário.

Se num dado agrupamento hierárquico (AH) a formação de aglomerados for tal que cada conceito se agrega a um aglomerado já formado, teremos um AH do tipo "linear". O exemplo da Figura VI.1 é "não linear", pois os conceitos 2 e 4 formam um grupo isolado no nível .23.

Vejamos agora como esse esquema de agrupamento hierárquico fornece um tipo particular de distâncias entre os "conceitos", i.e. uma métrica.

Sejam  $n$  "conceitos" e uma seqüência de  $m+1$  agrupamentos,  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$ . A cada agrupamento  $c_j$  está associado um nível  $\alpha_j$ .  $c_j$  é o número de aglomerados no nível  $\alpha_j$ . ( $\alpha_0 = 0$  e  $c_0 = n$ ).

Supondo que seja conhecido o resultado da Figura VI.1, o problema é determinar a métrica da estrutura, ou seja, as distâncias entre todos os "pontos", ou "conceitos".

Dados dois "conceitos"  $x$  e  $y$ , sabemos que em  $c_m$  (agrupamento de "interações" mais fracas)  $x$  e  $y$  estão no mesmo grupo. Seja  $j$  o menor inteiro do conjunto  $[0, 1, \dots, m]$ , tal que no agrupamento  $c_j$ ,  $x$  e  $y$  estejam no mesmo grupo.

Podemos definir a distância entre  $x$  e  $y$ ,  $d(x, y)$ , como:

$$d(x, y) = \alpha_j \quad (\text{VI.1})$$

Na Figura VI.1 temos  $d(3, 5) = .04$ ,  $d(1, 4) = .31$ ,  $d(1, 6) = .23$ ,  $d(5, 5) = .00$ , e assim por diante. A matriz distância para os seis "conceitos" da Figura VI.1 é dada na Tabela VI.1.

Tabela VI.1 - Matriz distância correspondente à Figura VI.1

	1	2	3	4	5	6
1	0	.31	.23	.31	.23	.23
2	.31	0	.31	.23	.31	.31
3	.23	.31	0	.31	.04	.07
4	.31	.23	.31	0	.31	.31
5	.23	.31	.04	.31	0	.07
6	.23	.31	.07	.31	.07	0

Da definição (VI.1) resulta que

$$d(x, x) = \alpha_0 = 0$$

$$d(x, y) = \alpha_j \neq 0 \quad \text{se } x \neq y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

Para mostrar que  $d$  é uma boa métrica, falta apenas mostrar a desigualdade triangular. Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  três "conceitos" quaisquer, e sejam

$$d(x, y) = \alpha_j,$$

$$d(y, z) = \alpha_k.$$

Então,  $x$  e  $y$  estão no mesmo aglomerado em  $c_j$  e  $y$  e  $z$  estão no mesmo aglomerado em  $c_k$ . Como os agrupamentos são hierárquicos, o grupo que corresponde ao maior dentre  $j$  e  $k$ , inclui o outro. Seja  $\ell$  este inteiro, i.e.,  $\ell = \max[j, k]$ . Então, em  $c_\ell$ ,  $x$ ,  $y$  e  $z$  estão todos no mesmo grupo. Da definição de  $d$ , podemos escrever

$$d(x, z) \leq \alpha_\ell$$

e

$$\alpha_\ell = \max[\alpha_j, \alpha_k] \quad ;$$

finalmente,

$$d(x, z) \leq \max[d(x, y), d(y, z)] \quad . \quad (\text{VI.2})$$

Por outro lado,

$$\max[d(x, y), d(y, z)] \leq d(x, y) + d(y, z) \quad ;$$

então

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad . \quad (\text{VI.3})$$

A relação (VI.2) é a desigualdade ultramétrica, que é muito mais "forte" que a desigualdade triangular (VI.3). Então, mostramos que dada uma seqüência de agrupamentos podemos obter

a métrica da estrutura. Façamos agora o contrário. Dada uma matriz distância, tal como na Tabela VI.1, representando alguma métrica  $d$  que satisfaz a relação (VI.2), devemos determinar uma sequência de agrupamentos tal como na Figura VI.1. No nível .00 nós temos o agrupamento de referência, com seis grupos. Cada "conceito" é um grupo. O menor elemento da matriz distância é .04, a distância entre os "conceitos" 3 e 5. Então, no nível .04 temos cinco aglomerados,  $\{3, 5\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\{6\}$ . Agora, note na Tabela VI.1 que 3 e 5 estão exatamente à mesma distância de todos os outros "conceitos". Isto é, se  $x$  representa qualquer dos "conceitos" 1, 2, 4 ou 6, então

$$d(3, x) = d(5, x) \quad , \quad \text{para todo } x.$$

O aglomerado  $\{3, 5\}$  passa a ser um novo "conceito", e a distância de qualquer "conceito"  $x$  ao grupo  $\{3, 5\}$  será

$$d(\{3, 5\}, x) = d(3, x) = d(5, x) \quad .$$

Dessa forma, podemos construir nova matriz, tal como na Tabela VI.2.

Podemos agora determinar o novo agrupamento, no nível .07 (menor elemento da matriz), com os grupos  $\{3, 5, 6\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{4\}$ . Prosseguindo assim, chegaremos ao último agrupamento, onde todos os "conceitos" formam um único aglomerado, tal como na Figura VI.1.

Tabela VI.2

Matriz 5x5 após o primeiro agrupamento.

	1	2	{3,5}	4	6
1	0	.31	.23	.31	.23
2	.31	0	.31	.23	.31
{3,5}	.23	.31	0	.31	.07
4	.31	.23	.31	0	.31
6	.23	.31	.07	.31	0

Evidentemente o algoritmo desenvolvido até aqui trata de um caso particular, no qual as distâncias satisfazem a desigualdade ultramétrica (relação (VI.2)). Ou seja, dados dois "conceitos"  $x$  e  $y$  agrupados no nível  $\alpha_j$ , i.e.  $d(x, y) = \alpha_j$ , a relação (VI.2) nos diz que  $d(x, z) = d(y, z)$ , porque se  $d(x, z) \neq d(y, z)$ , uma deve ser maior do que a outra, digamos

$$d(x, z) > d(y, z) \quad . \quad (VI.4)$$

Por outro lado, conforme a desigualdade (VI.2)

$$d(x, z) \leq \max[d(x, y), d(y, z)]$$

$$\leq \max[\alpha_j, d(y, z)]$$

Mas, devido a relação (VI.4)

$$d(x, z) \leq \alpha_j ;$$

Sendo  $\alpha_j$  o menor elemento da matriz distância, resulta

$$d(x, z) = \alpha_j$$

Levando esse resultado a (VI.4), teremos

$$d(y, z) < \alpha_j ,$$

o que é uma contradição, visto que  $\alpha_j$  é a menor distância, por definição. Assim, a distância entre um grupo  $\{x, y\}$  e um "conceito"  $z$  é dada por

$$d(\{x, y\}, z) = d(x, z) = d(y, z). \quad (\text{VI.5})$$

Em geral, as medidas de similaridade não satisfazem a relação (VI.2), e (VI.5) deve ser escrita como

$$d(\{x, y\}, z) = f(d(x, z), d(y, z)). \quad (\text{VI.6})$$

Uma função muito boa, quando se deseja um algoritmo não métrico, i.e., que preserva a ordem, é a função "mínimo". Assim, (VI.6) fica

$$d(\{x, y\}, z) = \min[d(x, z), d(y, z)] . \quad (\text{VI.7})$$

Então, dada uma matriz de similaridades, podemos construir uma seqüência de agrupamentos hierárquicos, de acordo com



o algoritmo abaixo:

- 1 - O agrupamento  $c_0$ , no nível .00 é o agrupamento de referência.
- 2 - Suponha que estamos no agrupamento  $c_{j-1}$ , com a matriz distância incluindo todos os aglomerados ou "conceitos", análogo à Tabela VI.2. Seja  $\alpha_j$  o menor elemento dessa matriz. Agrupe o par de "conceitos" e, ou aglomerados com distância  $\alpha_j$  para criar  $c_j$ , no nível  $\alpha_j$ .
- 3 - Determine uma nova matriz distância para  $c_j$ , da seguinte forma: se  $x$  e  $y$  estão agrupados em  $c_j$ , e não em  $c_{j-1}$  (i.e.,  $d(x, y) = \alpha_j$ ) defina a distância do aglomerado  $\{x, y\}$  a qualquer "conceito" ou aglomerado  $z$ , pela equação (VI.7). Se  $x$  e  $y$  são "conceitos" e, ou aglomerados em  $c_{j-1}$ , não agrupados em  $c_j$ ,  $d(x, y)$  permanece com o mesmo valor.
- 4 - Repita os passos 2 e 3 até atingir o agrupamento com um único aglomerado.

O algoritmo desenvolvido aqui aplica-se às medidas de similaridades tipo distâncias, ou seja, se dois conceitos  $x$  e  $y$  são muito semelhantes, a medida de similaridade deve ser pequena. Similaridade aqui é algo como proximidade. O TANC fornece medidas desse tipo.

Para o caso de medidas tipo correlação, para os quais dois conceitos muito semelhantes tendem a ter medida de similaridade alta, o algoritmo deve ser modificado, da seguinte forma:

- 1 -  $\alpha_0$  deve ser  $\infty$
- 2 -  $\alpha_j$  no passo 2 deve ser o maior elemento da matriz,

3 - a definição (VI.7) deve ser

$$d(\{x, y\}, z) = \max[d(x, z), d(y, z)] .$$

Sob o ponto de vista formal, não há nenhum problema, porque uma medida do tipo correlação, tais como aquelas fornecidas pelo TAEC, transformam-se em medidas tipo distância, conforme a equação

$$\delta' = 1 - \delta ,$$

onde  $\delta$  é uma medida tipo correlação, e  $\delta'$  é do tipo distância.

## VII - RESULTADOS

VII.1 - Determinação das Dimensões Apropriadas na Análise Multidimensional

Conforme discutido no Capítulo V, o método de análise multidimensional determina uma configuração num espaço  $r$ -dimensional que melhor se ajusta às medidas de similaridade obtidas com a aplicação dos testes de associação de conceitos. Para isso, minimiza-se uma função do tipo  $\chi^2$ , e o valor mínimo dessa função é o que se denomina critério de ajuste. No caso específico do programa MINISSA-I [L73] a função a ser minimizada é o coeficiente de alienação  $K$ , apresentado na secção V.4.

Então, para cada espaço determina-se um  $K$  mínimo que mede a qualidade do ajuste. Quanto menor o valor de  $K$ , melhor o ajuste. O problema é que para qualquer matriz de dados, a curva de  $K$  versus dimensão é sempre decrescente. Isso nos obriga a estabelecer critérios para a determinação da dimensão apropriada.

Segundo Kruskal [K64a] a curva do "stress" (no nosso caso,  $K$ ) versus dimensão deve apresentar um "cotovelo" pronunciado na dimensão apropriada. No entanto, conforme estudos posteriores [SK69], [IP74], [WP71], esse "cotovelo" só aparece em dados com poucos erros. Dados aleatórios ou com muitos erros apresentam uma curva "suave" do tipo exponencial. A questão do nível de erro tem sido estudada através de técnicas Monte Carlo\*,

---

\* Técnicas Monte Carlo são usadas na investigação do comportamento de matrizes aleatórias, quando submetidas a determinados algoritmos.

onde os erros são introduzidos nas matrizes. Nas aplicações reais torna-se difícil determinar o nível de erro, bem como a sua fonte. Acredita-se que um tipo de erro característico é a violação da desigualdade triangular. No teste de associação numérica, por exemplo, a variação do "zero" da escala pode provocar tal violação, i.e., o fato de uma medida igual a 3, por exemplo, não ter o mesmo significado para todos os Ss.

De qualquer forma, sabe-se que os erros num conjunto de dados dificultam a existência do "cotovelo" sugerido por Kruskal.

Por outro lado, costuma-se levantar a seguinte questão: Não será a configuração obtida devida a uma distribuição aleatória de similaridades? Nesse caso a estrutura apresentada pela análise multidimensional não representaria o grupo pesquisado, mas uma fonte qualquer. Isto é, haveria uma grande probabilidade de uma distribuição aleatória de similaridades fornecer a mesma estrutura.

Por isso, devemos estabelecer um critério de significância estatística. Esse critério pode ser estabelecido a partir da distribuição de probabilidade para a ocorrência de uma matriz com similaridades aleatórias.

O estudo Monte Carlo do programa a ser usado permite determinar a distribuição de probabilidades. Determina-se a curva de frequência acumulada de  $K$  versus  $K$ , e a partir daí estabelece-se o valor máximo permitido para  $K$ , em cada dimensão, a um dado nível de significância.

A curva de frequência acumulada relativa fornece a pro

babilidade para que uma matriz aleatória tenha determinado coeficiente de alienação  $K$ , em determinada dimensão. Por exemplo, na Figura VII.1 vemos que há uma probabilidade de 50% de uma matriz  $8 \times 8$  aleatória ter um valor .43 para  $K$ , em uma dimensão. Por outro lado, há uma probabilidade menor que 1%, para que uma matriz  $8 \times 8$  aleatória tenha  $K$  igual .296. Ou seja, ao nível de .01, o máximo  $K$  permitido é .296, em uma dimensão.

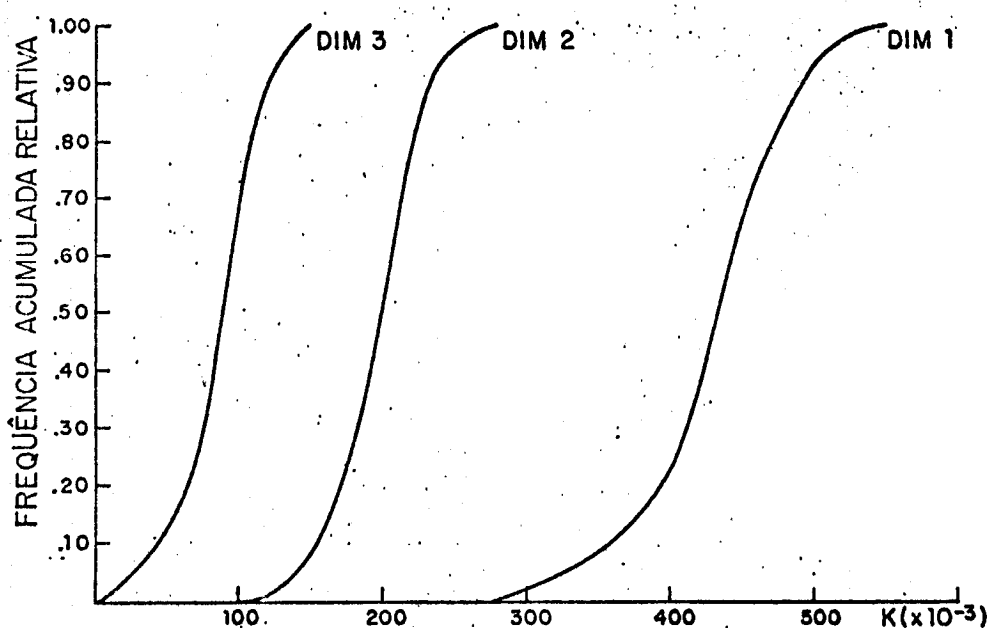


Figura VII.1 - Estudo Monte Carlo: Frequência acumulada relativa versus coeficiente de alienação  $K$ .

A Figura VII.1 foi obtida através da análise de 100 matrizes  $8 \times 8$  com elementos aleatórios. Estes resultados foram obtidos para 1, 2 e 3 dimensões, conforme pode-se ver na Figura VII.1. A Tabela VII.1 apresenta os valores máximos permitidos para  $K$  ao nível de .01. Isto é, um valor de  $K$  superior ao da tabela na dimensão correspondente, não é estatisticamente significativo ao nível de .01.

Tabela VII.1 - Máximo K permitido ao nível de .01.

Dimensão	K <sub>Máx.</sub>
1	.296
2	.118
3	.012

A Tabela VII.2 apresenta os valores obtidos para K nos vários testes aplicados. Nessa tabela, a letra "A" refere-se ao teste de associação numérica, e "B" ao teste de associação escrita. O número que se segue refere-se à oportunidade de aplicação. Assim "1" significa teste antes da instrução, e "2" ao final. "E" refere-se ao grupo experimental e "C" ao controle. Portanto, A1C é o teste de associação numérica aplicado antes da instrução ao grupo controle. B2E é o teste de associação escrita aplicado no final da instrução ao grupo experimental. "p" é o expoente que aparece na fórmula III.4.

Observa-se na Tabela VII.2, que alguns testes apresentam significado estatístico em mais de uma dimensão. Para decidir qual a dimensão mais apropriada, investigamos o coeficiente

$$\alpha = \frac{K_{\text{obtido}}}{K_{\text{máx.}}}$$

A dimensão com o menor  $\alpha$  será adotada como a mais apropriada uma vez que esse coeficiente é proporcional à probabilidade de uma matriz ser aleatória. Os valores de  $\alpha$  encontram-se na Tabela VII.3. Com esses resultados podemos fornecer as dimensões apropriadas (Tabela VII.4).

Tabela VII.2 - Valores obtidos para o coeficiente de alienação K.

DIMENSÃO		1	2	3
TESTE				
A1C		.392	.143	.058
A1E		.338	.108	.018
A2C		.429	.122	.022
A2E		.305	.041	.009
B	p=1	.287	.079	.046
1	p=2	.286	.061	.032
C	p=3	.278	.066	.055
B	p=1	.242	.072	.007
1	p=2	.250	.085	.003
E	p=3	.246	.094	.010
B	p=1	.328	.031	.014
2	p=2	.345	.103	.017
C	p=3	.379	.138	.025
B	p=1	.202	.036	.001
2	p=2	.241	.048	.009
E	p=3	.251	.051	.005

Tabela VII.3 - Valores do coeficiente  $\alpha$ .

DIMENSÃO		1	2	3
TESTE				
A1C		1.32	1.21	4.83
A1E		1.14	.92	1.50
A2C		1.45	1.03	1.83
A2E		1.03	.35	.75
B	p=1	.97	.67	3.83
1	p=2	.97	.52	2.67
C	p=3	.94	.56	4.58
B	p=1	.82	.61	.58
1	p=2	.84	.72	.25
E	p=3	.83	.80	.83
B	p=1	1.11	.26	1.17
2	p=2	1.17	.87	1.42
C	p=3	1.28	1.17	2.08
B	p=1	.68	.31	.08
2	p=2	.81	.41	.75
E	p=3	.85	.43	.42



Tabela VII.4 - Dimensões apropriadas para os vários testes.

TESTE	DIMENSÃO
A1C	Nenhuma
A1E	2
A2C	Nenhuma
A2E	2
B1C (p=2)	2
B1E (p=2)	3
B2C (p=1)	2
B2E (p=1)	3

### VII.2 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)

As médias dos testes de todos os Ss dos dois grupos, antes e após a instrução encontram-se nas Tabelas VII.5 e VII.6, onde os conceitos são representados por seus símbolos, i.e., Temperatura (T); Entropia (S); Calor (Q); Energia (U); Calor Específico (C); Variável de Estado (VE); Trabalho (W) e Equilíbrio Térmico (ET).

Conforme a Tabela VII.4 o TANC do grupo controle não apresentou, segundo a análise multidimensional, uma estrutura estatisticamente significativa ao nível .01, nem antes nem após a instrução. Ao contrário, o grupo experimental apresentou uma estrutura bidimensional nas duas oportunidades, sendo que ao final da instrução o coeficiente  $\alpha$  passou de .92 para .35 (Tabela VII.3), significando um melhor ajuste, ou equivalentemente,

Tabela VII.5 - Teste de associação numérica de conceitos anterior à instrução. Resultados do grupo experimental estão acima da diagonal, e do grupo controle abaixo.

	T	S	Q	U	C	VE	W	ET
T		2.34	1.80	2.53	2.83	2.20	4.40	1.83
S	2.00		2.57	2.89	4.54	4.14	4.29	4.04
Q	2.19	2.41		1.27	2.93	2.97	2.87	3.23
U	3.37	2.67	1.56		3.76	3.37	1.60	3.69
C	3.52	3.54	3.15	3.67		3.45	5.31	4.24
VE	2.67	3.70	3.22	4.41	3.89		4.67	3.17
W	4.93	3.63	2.33	1.41	5.15	4.73		5.20
ET	2.00	3.19	3.04	4.11	4.19	3.85	5.37	

Tabela VII.6 - Teste de associação numérica de conceitos após a instrução. Resultados do grupo experimental estão acima da diagonal, e do grupo controle abaixo.

	T	S	Q	U	C	VE	W	ET
T		1.90	1.93	2.20	2.73	4.20	3.60	1.20
S	2.33		3.00	3.13	5.41	1.67	3.57	2.63
Q	1.78	2.33		1.07	2.70	4.66	2.10	2.21
U	3.00	3.15	1.33		3.80	3.40	1.63	2.71
C	2.59	4.78	2.41	3.78		5.83	5.27	4.10
VE	2.41	2.00	4.52	4.04	4.56		4.47	4.00
W	3.74	3.85	1.69	1.44	5.11	5.00		3.87
ET	1.07	4.56	2.56	3.22	4.15	4.15	4.74	

uma estrutura com a métrica Euclideana mais bem definida.

Na Figura VII.2 temos os gráficos de  $K$  versus dimensão para os grupos experimental e controle. Observa-se claramente que o teste A2E apresenta um "cotovelo" na solução bidimensional, ao passo que as outras curvas se aproximam mais de uma exponencial "suave", resultado esperado para uma matriz aleatória, ou com muitos erros [SK69], [IP74], [WP71].

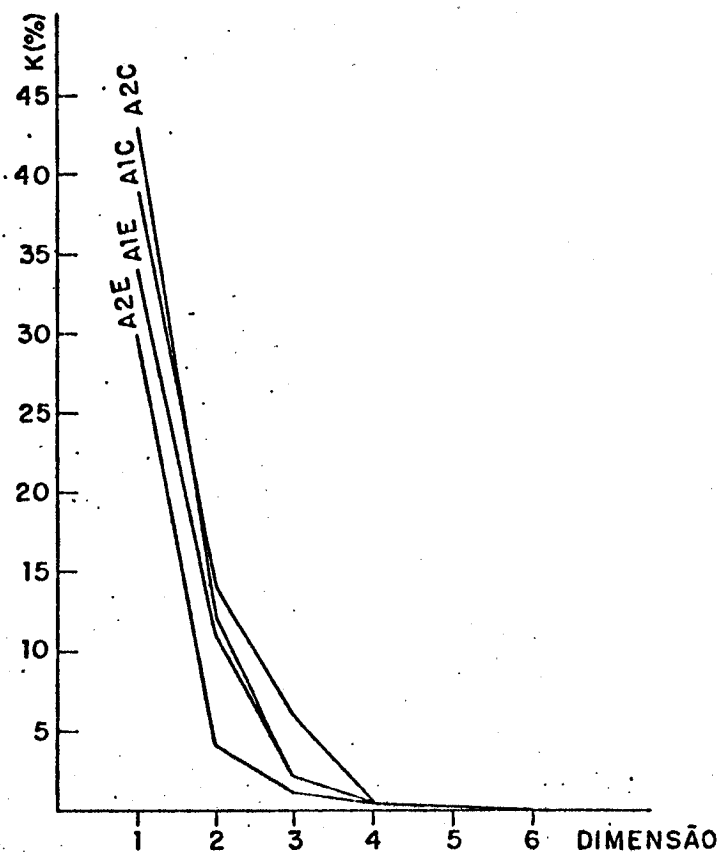


Figura VII.2 -  $K_{\text{obtido}}$  versus dimensão para os grupos experimental e controle: resultados do TANC antes e após a instrução.

As Figuras VII.3 e VII.4 apresentam o "mapeamento cognitivo" do grupo experimental antes e após a instrução, respec

tivamente. Comparando essas figuras, observamos uma sensível mo dificação na estrutura ao final da instrução. Na Figura VII.3 os conceitos estão espalhados, não havendo nenhum agrupamento pre dominante. Ao contrário, a Figura VII.4 apresenta três aglomerados distintos. Um com {Q, U, W}, outro com {T, ET}, e um terceiro com {S, VE}.

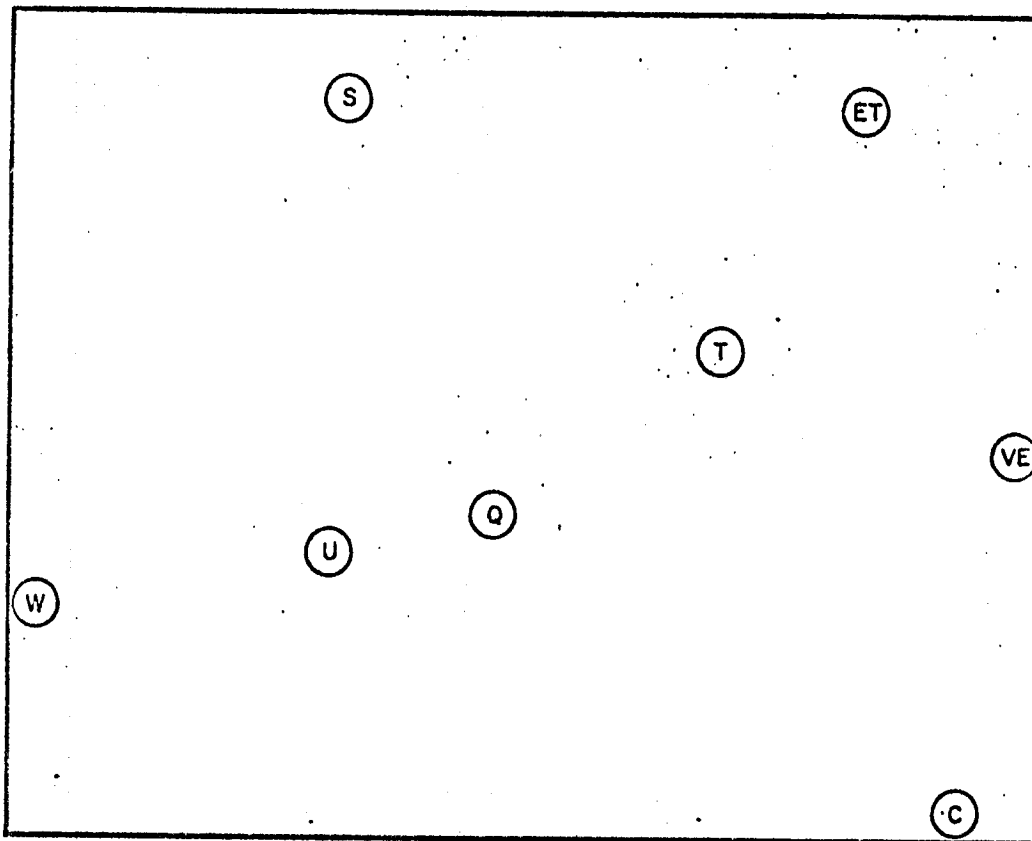


Figura VII.3 - "Mapeamento Cognitivo" do grupo experimental: re sultado do TANC anterior à instrução.

Podemos dizer que a "lei zero" da termodinâmica está representada pelo aglomerado {T, ET} e a primeira lei por {Q, U, W}.

Embora menos nitidamente, a segunda lei pode ser vi-

sualizada na proximidade dos dois "clusters" {T, ET} e {S, Ve}.

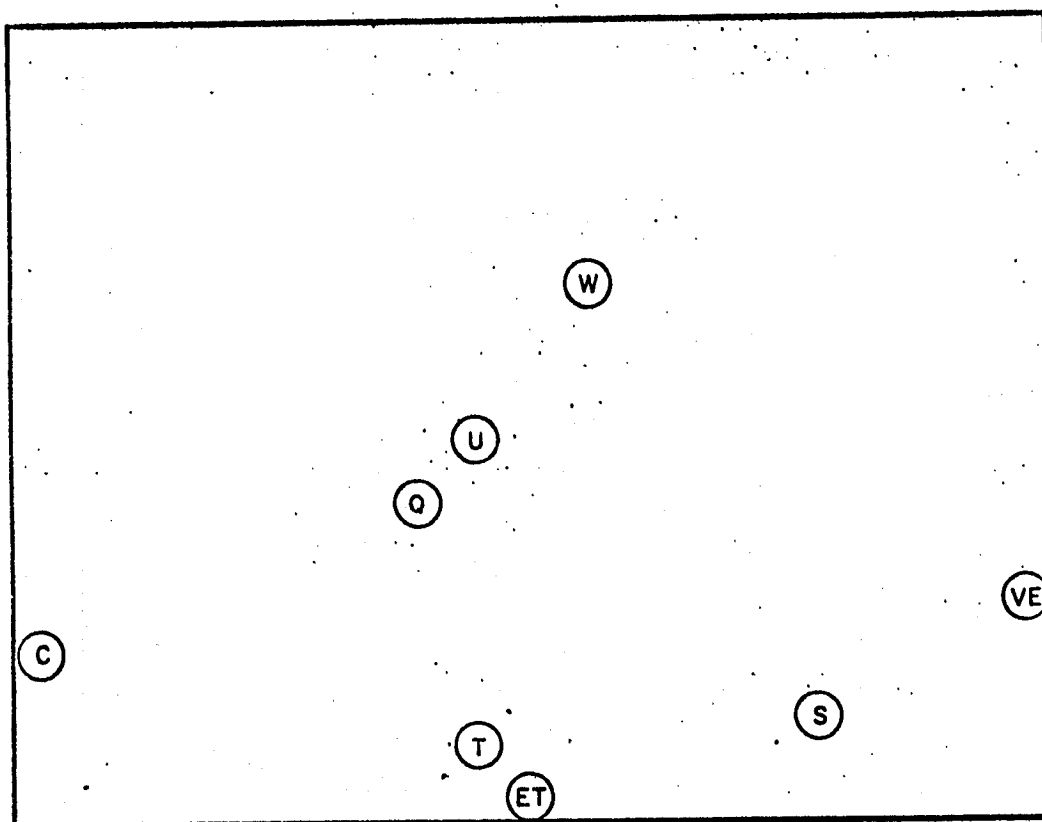


Figura VII.4 - "Mapeamento Cognitivo" do grupo experimental: resultado do TANC após a instrução.

A análise de agrupamentos hierárquicos (Capítulo VI) mostra claramente a existência desses três aglomerados (Figura VII.6). Além disso, a Figura VII.5 mostra que antes da instrução o grupo experimental apresentou uma formação de agrupamentos do tipo "linear", no sentido em que cada conceito foi se agregando a um aglomerado já existente. O contrário ocorreu no teste após a instrução, onde na escala hierárquica o primeiro grupo é {Q, U}.

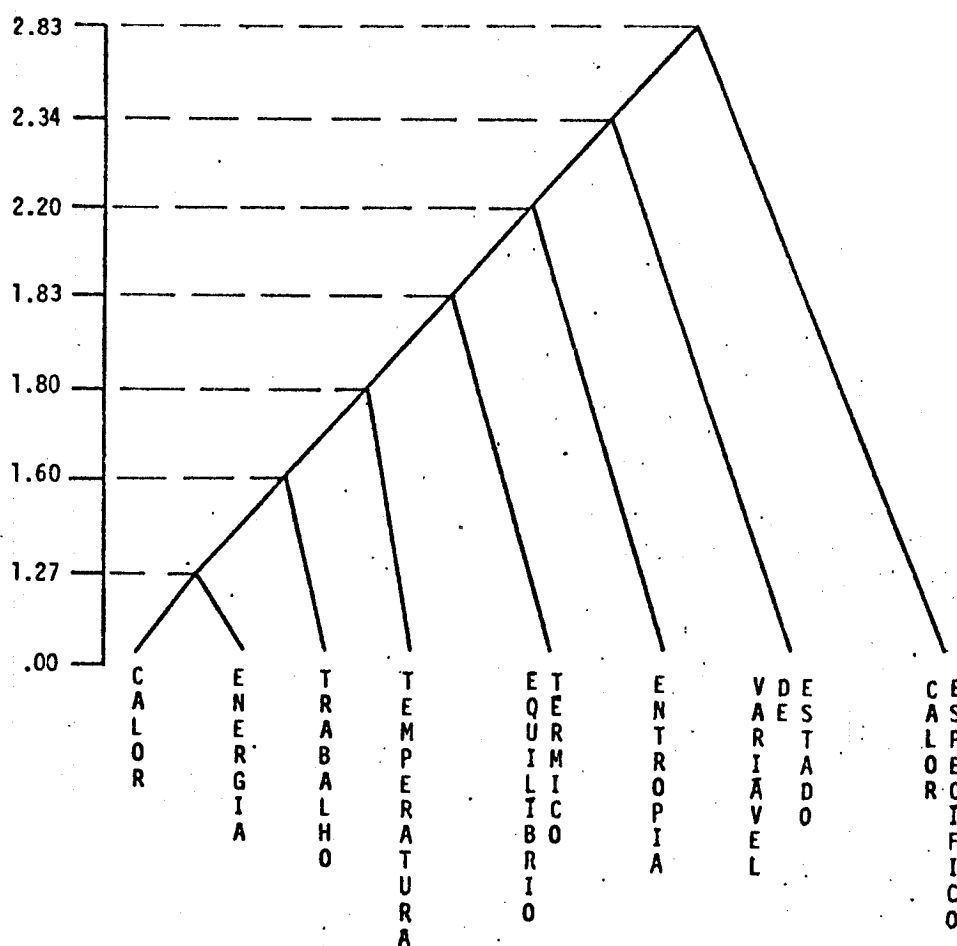


Figura VII.5 - Agrupamentos hierárquicos do grupo experimental: resultado do TANC anterior à instrução.

Podemos interpretar essa escala hierárquica como uma escala de "interações". As "interações fortes" estão no topo da hierarquia, o que para o TANC significa o menor valor da escala. Assim, devemos consultar as Figuras VII.5, VII.6, VII.7 e VII.8 tendo em mente que quanto maior o ponto de ligação dos conceitos, menor a "interação" entre eles. Desse modo, a Figura VII.6 mostra que a "interação" entre {W} e {Q, U} é menor que entre {T} e {ET}.

Outra informação obtida a partir da Figura VII.6 diz

respeito à estrutura do conteúdo. Podemos dizer que a "estrutura cognitiva" do grupo experimental, ao final da instrução, rerepresentada na Figura VII.4, cuja organização conceitual hieráruquica é apresentada na Figura VII.6, se ajusta muito bem à "esutrutura Ausubeliana", apresentada aos Ss (Capítulo II).

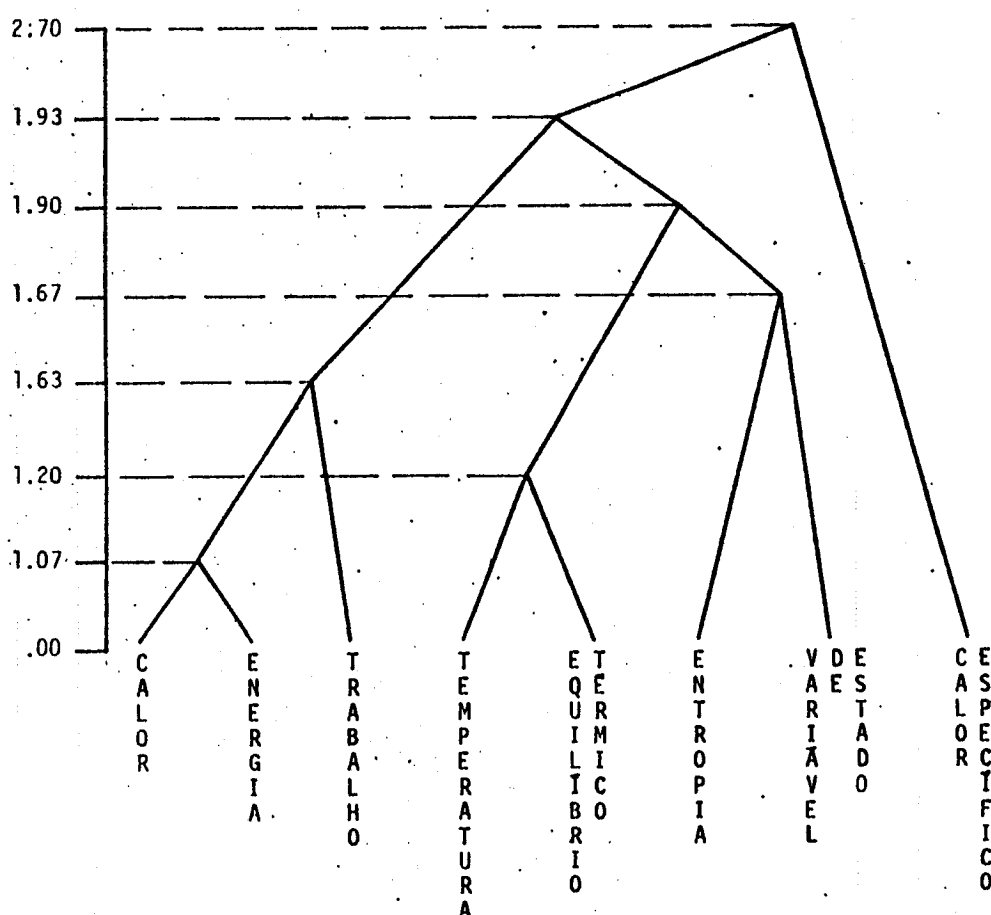


Figura VII.6 - Agrupamentos hierárquicos do grupo experimental: resultado do TANC após a instrução.

Podemos notar que o agrupamento "linear" antes da instrução foi bastante modificado após a instrução. Na Figura VII.6 vemos que os conceitos mais fortemente associados são CALOR (C) e ENERGIA (U), em segundo lugar vem TEMPERATURA (T) e EQUILÍBRIO

TÉRMICO (ET), depois TRABALHO (W) agrega-se ao par {Q, U}. Em seguida surge o par {S, VE}. A existência desses três aglomerados reflete muito bem a organização do conteúdo segundo a teoria de Ausubel.

Os resultados obtidos com o grupo experimental sugerem fortemente que os Ss adquiriram a estrutura do conteúdo como ela foi apresentada. Além disso, essa estrutura possui uma métrica Euclideana num espaço bidimensional que possibilitou o ajuste apresentado na Figura VII.4.

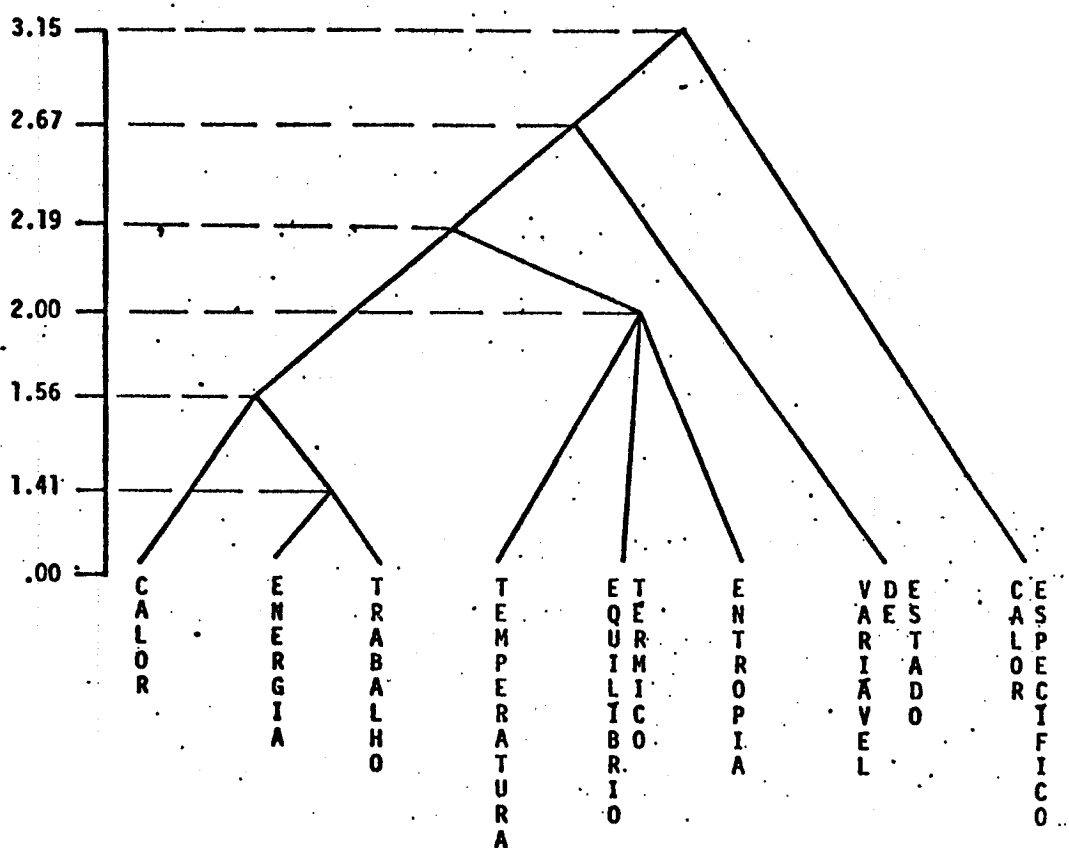


Figura VII.7 - Agrupamentos hierárquicos do grupo controle: resultado do TANC anterior à instrução.



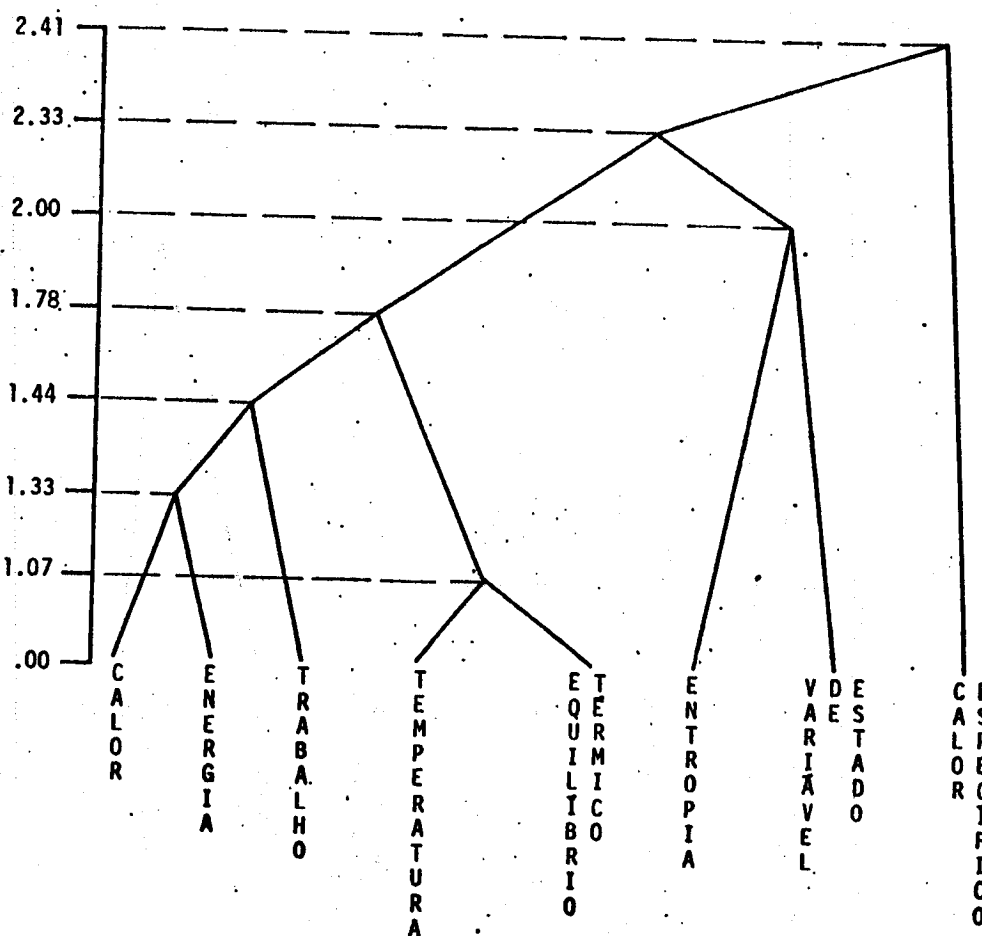


Figura VII.8 - Agrupamentos hierárquicos do grupo controle: resultado do TANC após a instrução.

Como já vimos, o grupo controle não apresentou uma estrutura com uma métrica Euclideana definida, visto que o ajuste não teve significado estatístico. O resultado da análise multidimensional mostra apenas a inexistência da estrutura métrica (Euclideana). Por outro lado, a análise de agrupamentos hierárquicos é capaz de extrair a estrutura existente numa matriz de similaridades, com uma métrica não Euclideana (Capítulo VI).

As Figuras VII.7 e VII.8 mostram os resultados de aplicação dessa análise ao grupo controle. Observa-se na Figura VII.7

o carater "linear" do agrupamento, com apenas uma violação no nível 2.00, onde T, ET e S agregam-se, para depois se agruparem com o aglomerado {Q, U, W}, já existente.

Após a instrução o grupo controle apresentou a estrutura da Figura VII.8. Podemos dizer que os resultados do grupo controle refletem a organização de conteúdo do livro de Resnick & Halliday [RH74], discutida no capítulo IV.

As Figuras VII.6 e VII.8 mostram as diferenças entre as "estruturas cognitivas" dos grupos experimental e controle.

A diferença fundamental está no nível 1.90 da Figura VII.6, onde o par {T, ET} agrega-se ao par {S, VE}, formando um aglomerado que podemos interpretar como relacionado à segunda lei da Termodinâmica. Além disso, o grupo experimental, ao final da instrução, apresentou claramente os aglomerados ligados às três leis da Termodinâmica, enquanto o grupo controle não caracterizou nitidamente a segunda lei como uma consequência do equilíbrio térmico.

Em resumo, temos que duas organizações de conteúdos diferentes, foram apresentadas a dois grupos de alunos. A análise de agrupamentos hierárquicos aplicada aos testes de associação numérica de conceitos mostrou que as "estruturas cognitivas" dos dois grupos, ao final da instrução, apresentaram diferenças estruturais relevantes e que essas diferenças talvez sejam devidas às diferentes organizações de conteúdo.

Além disso, a análise multidimensional permite concluirmos que o grupo experimental apresentou uma estrutura com uma métrica Euclideana bidimensional, enquanto o grupo controle

não apresentou essa métrica, pelo menos ao nível de significância estatística de .01.

Como já foi esclarecido, este trabalho não pretende analisar a vantagem de uma organização sobre outra, mas apenas investigar até que ponto a organização de um conteúdo influencia a formação da estrutura cognitiva. Nesse sentido, tanto a análise multidimensional quanto a análise de agrupamentos hierárquicos sugerem essa influência.

### VII.3 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)

#### VII.3.1 - Grupo Controle

Conforme discutido no Capítulo III, o valor apropriado para o expoente  $p$  que aparece na eq. (III.4) deve ser determinado empiricamente. Para isso, analisamos cada TAEC com  $p=1, 2, 3$ . O valor de  $p$  que fornece o melhor ajuste parece ser o mais apropriado. Assim, conforme as Tabelas VII.2 e VII.3, aos testes antes da instrução associamos  $p=2$ , e após a instrução  $p=1$ .

As matrizes correspondentes a esses valores de  $p$  encontram-se nas Tabelas VII.7 e VII.8.

Conforme os resultados da Tabela VII.3, o grupo experimental apresenta uma configuração tridimensional nas duas oportunidades, com o coeficiente  $\alpha$  diminuindo de .25 para .08. O grupo controle apresentou uma configuração bidimensional nas duas oportunidades e  $\alpha$  diminuiu de .52 para .26. Isto significa que os dois grupos apresentaram estruturas com menor nível de erro ao final da instrução. Isto é, as propriedades métricas das estruturas são mais evidentes ao final da instrução.

Tabela VII.7 - Teste de associação escrita de conceitos ( $p = 2$ ) anterior à instrução. Resultados do grupo experimental estão acima da diagonal e do grupo controle abaixo.

	T	S	Q	U	C	VE	W	ET
T		.02	.45	.13	.10	.17	.06	.20
S	.16		.08	.07	.01	.01	.03	.02
Q	.51	.22		.31	.08	.08	.17	.13
U	.10	.09	.21		.02	.02	.31	.07
C	.14	.06	.28	.06		.05	.03	.11
VE	.16	.07	.12	.04	.10		.00	.06
W	.07	.05	.13	.31	.06	.04		.04
ET	.33	.09	.25	.08	.08	.13	.05	

Tabela VII.8 - Teste de associação escrita de conceitos ( $p = 1$ ) após a instrução. Resultados do grupo experimental estão acima da diagonal e do grupo controle abaixo.

	T	S	Q	U	C	VE	W	ET
T		.33	.46	.33	.33	.15	.28	.50
S	.41		.27	.20	.18	.32	.17	.33
Q	.52	.39		.46	.43	.13	.43	.36
U	.31	.22	.42		.22	.14	.47	.28
C	.36	.21	.44	.18		.08	.21	.26
VE	.25	.34	.20	.17	.12		.15	.15
W	.27	.20	.49	.49	.22	.15		.23
ET	.48	.27	.40	.20	.29	.18	.22	

As Figuras VII.9 e VII.10 apresentam os gráficos de K versus dimensão para os grupos experimental e controle, respectivamente. Os "cotovelos" evidenciam as dimensões apropriadas.

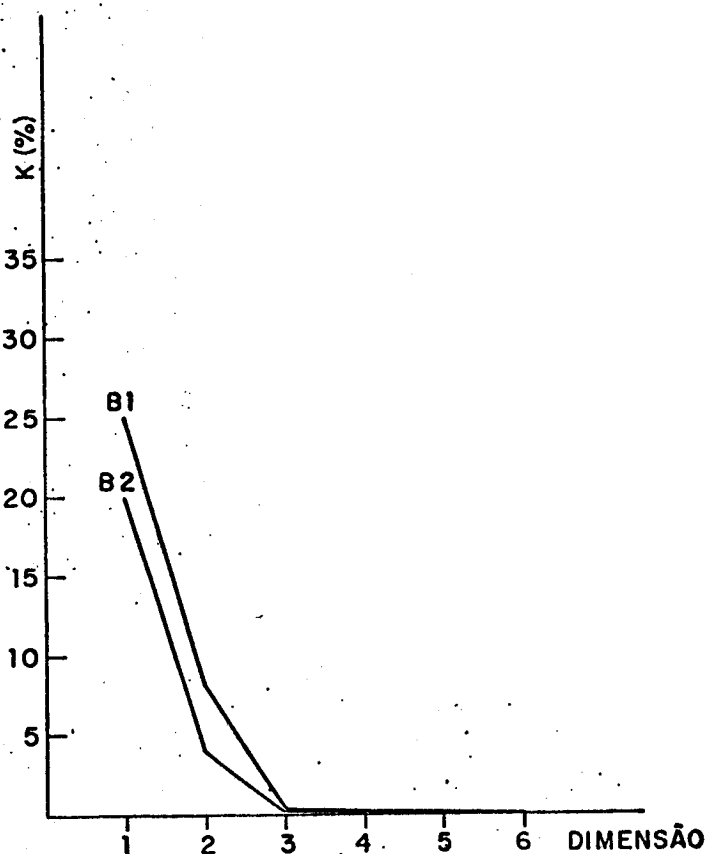


Figura VII.9 -  $K_{\text{obtido}}$  versus dimensão para o grupo experimental: resultado do TAEC ( $p=2$ ) antes e após a instrução.

Os resultados da aplicação da análise multidimensional ao grupo controle são apresentados nas Figuras VII.11 e VII.12. As principais modificações na estrutura anterior à instrução (Figura VII.11), são a aproximação dos conceitos S e VE, e o fato de a configuração como um todo ter sido "comprimada", i.e. todos os valores abaixo da diagonal da Tabela VII.7 são menores

que os correspondentes na Tabela VII.8. Isto significa que ao final da aprendizagem, o grupo controle estabeleceu um maior grau de relacionamento entre os conceitos.

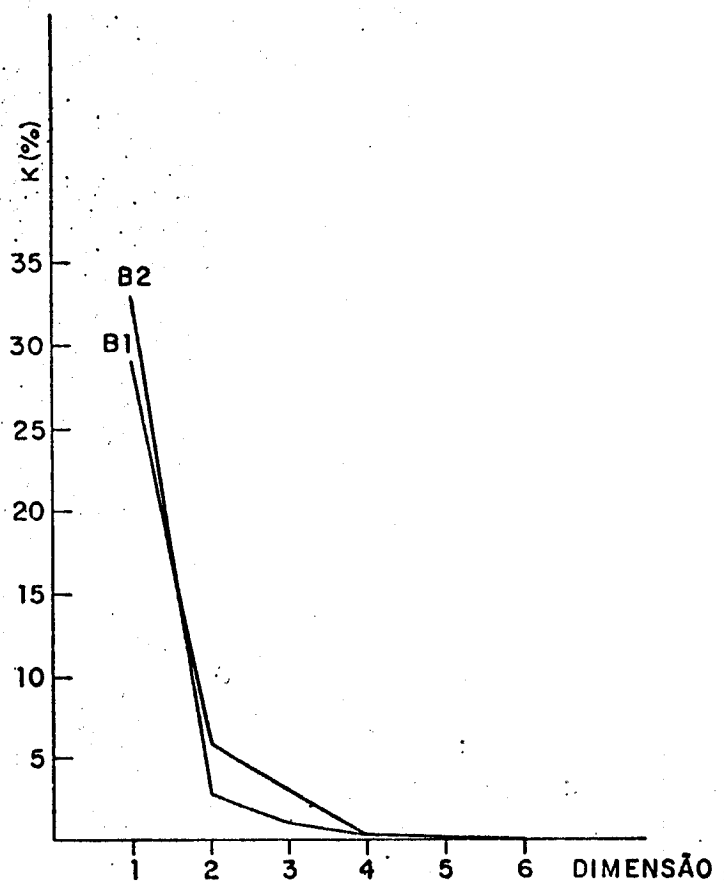


Figura VII.10 -  $K_{\text{obtido}}$  versus dimensão para o grupo controle: resultados do TAEC ( $p=2$ ) antes e após a instrução.

Em termos estruturais podemos dizer que houve apenas uma modificação. Na Figura VII.11 os conceitos S, ET e VE estão alinhados nessa ordem, enquanto na Figura VII.12 a ordem é ET, S e VE.

Na medida em que o TAEC é capaz de fornecer um "mapeamento cognitivo" podemos dizer que a instrução produziu uma al

teração na "estrutura cognitiva", no que se refere ao grau de relacionamento entre os conceitos. Para falar em termos geométricos, a instrução produziu uma "compressão" na "estrutura cognitiva". Em termos de organização conceitual, porém, a alteração foi pouco relevante.

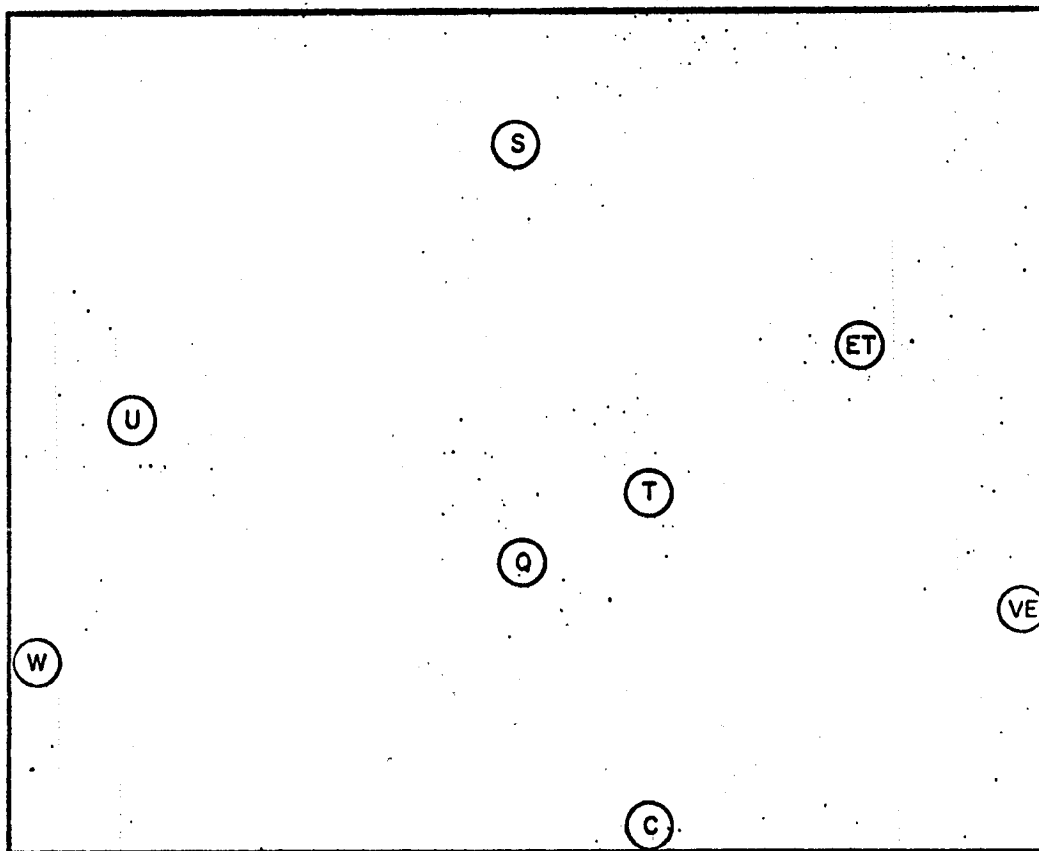


Figura VII.11 - "Mapeamento cognitivo" do grupo controle: resultado do TAEC (p = 2) anterior à instrução.

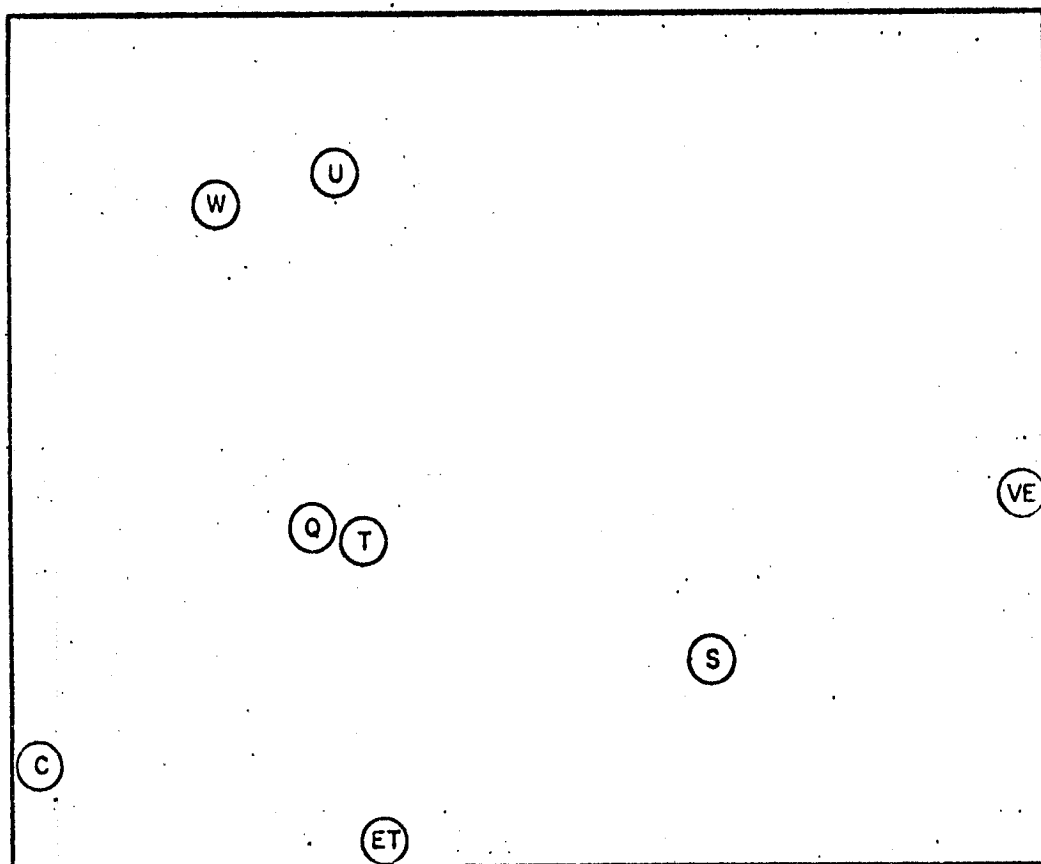


Figura VII.12 - "Mapeamento cognitivo" do grupo controle: resultado do TAEC ( $p = 1$ ) após a instrução.



Este resultado é confirmado pela análise de agrupamentos hierárquicos, apresentada nas Figuras VII.13 e VII.14, onde os agrupamentos antes e após a instrução são do tipo "linear", com apenas uma violação no nível .31 da Figura VII.13.

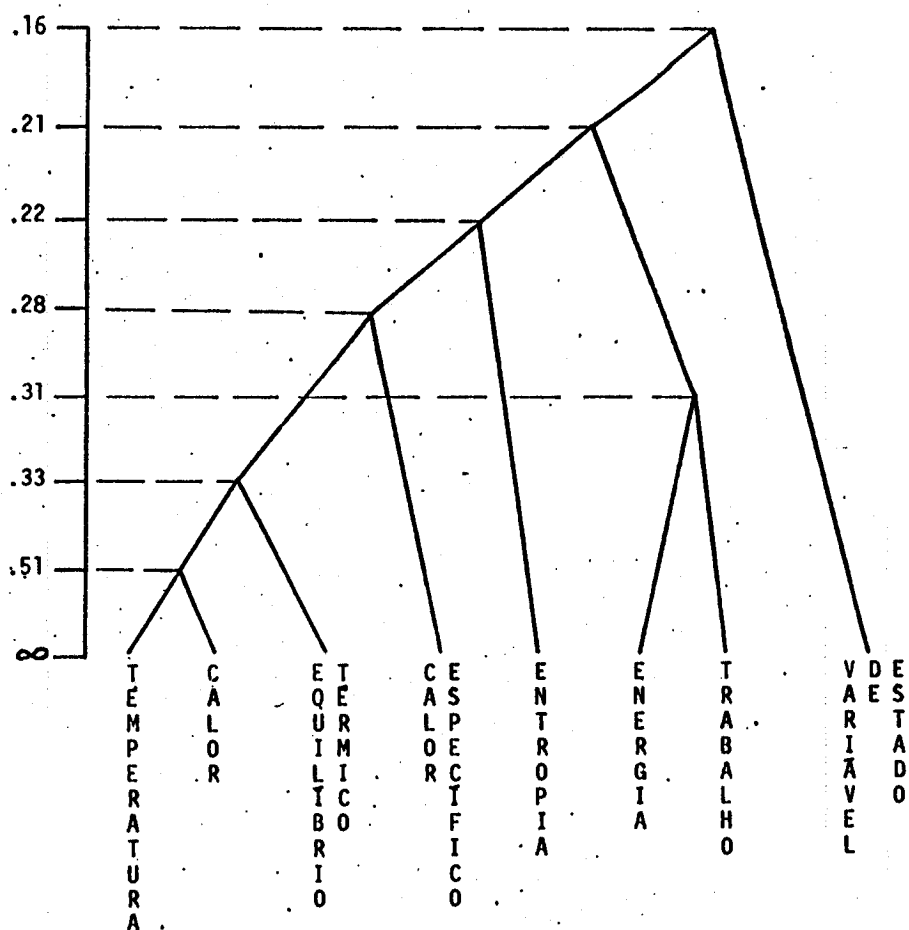


Figura VII.13 - Agrupamentos hierárquicos do grupo controle: resultado do TAEC ( $p=2$ ) anterior à instrução.

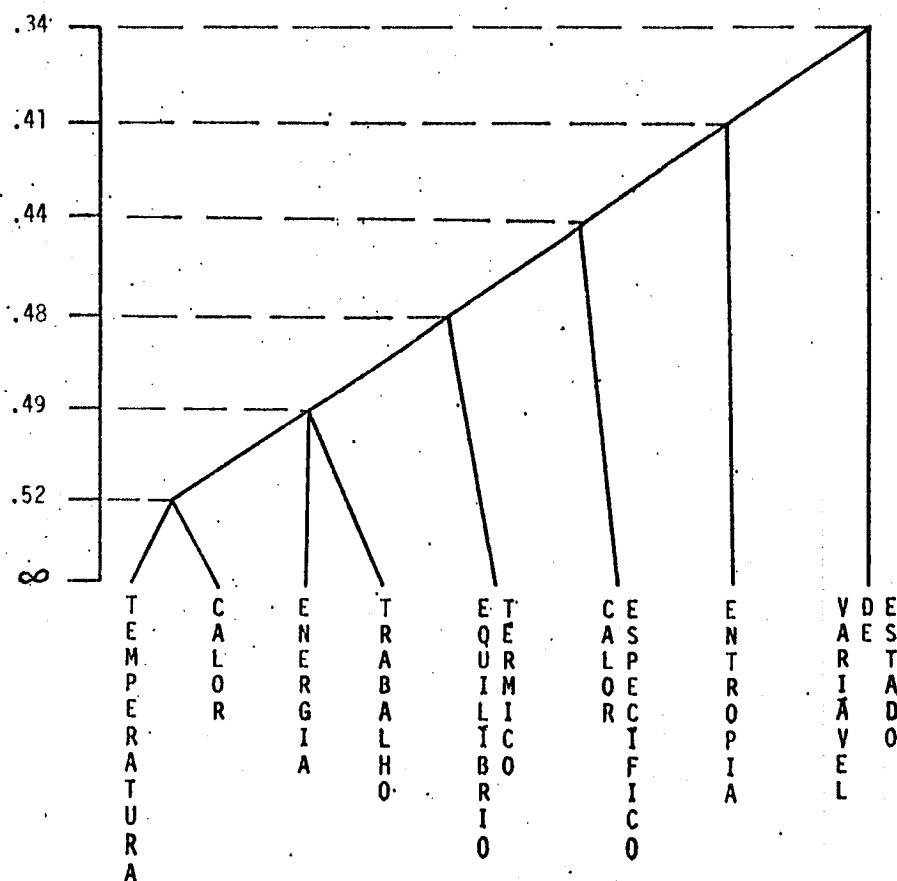


Figura VII.14 - Agrupamentos hierárquicos do grupo controle: resultado do TAEC ( $p=1$ ) após a instrução.

### VII.3.2 - Grupo Experimental

As projeções nos três planos coordenados das configurações tridimensionais do grupo experimental são apresentadas nas Figuras VII.15, VII.16 e VII.17 para o teste anterior à instrução, e nas Figuras VII.18, VII.19 e VII.20 para o teste após a instrução.

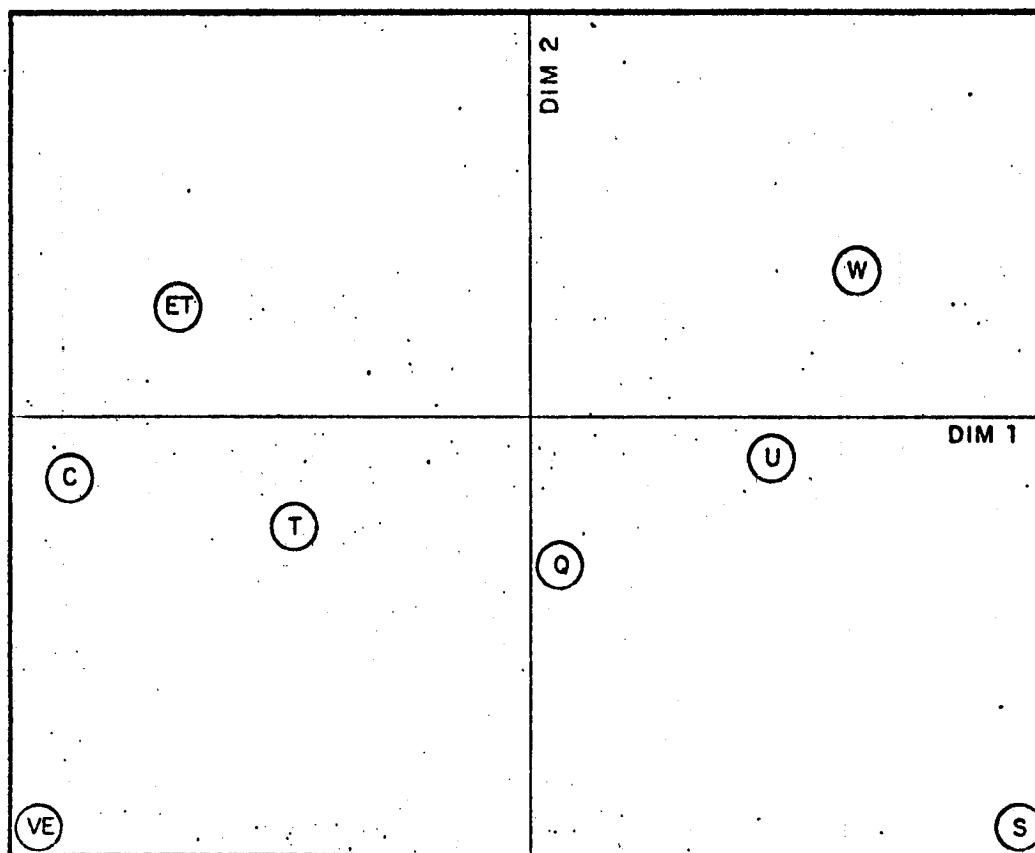


Figura VII.15 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 2 x DIM 1) do grupo experimental: resultado do TAEC (p = 2) anterior à instrução.

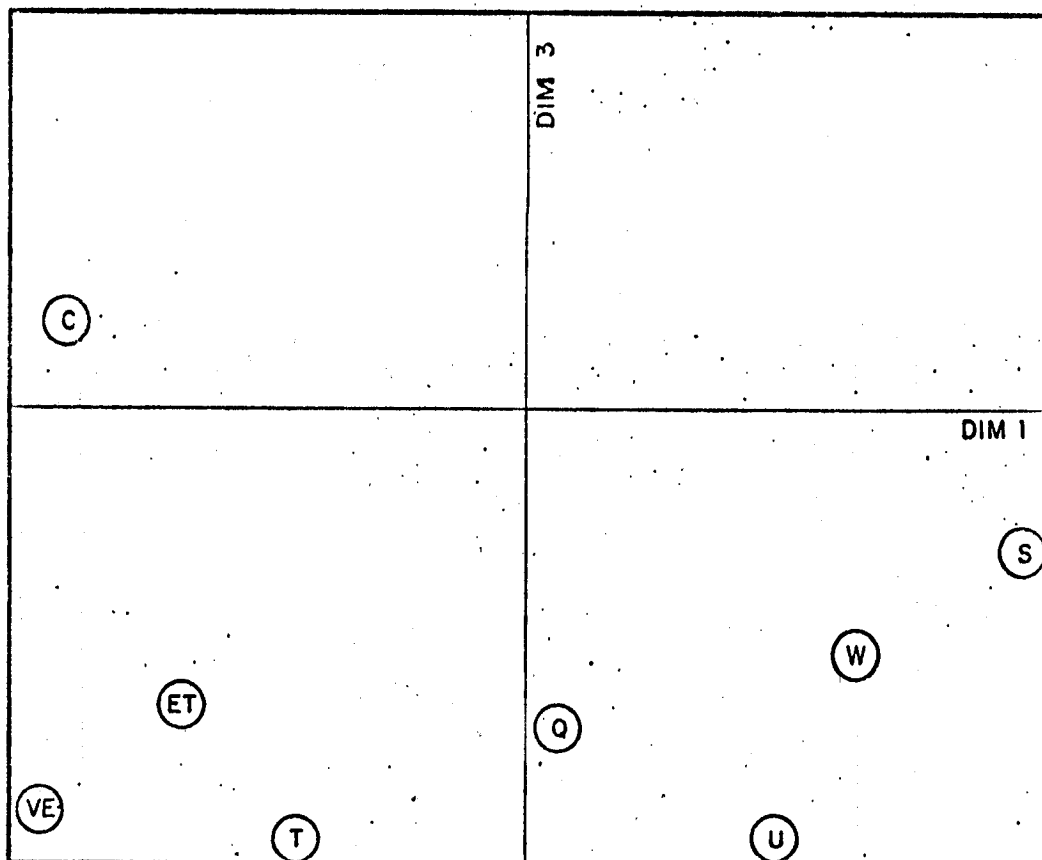


Figura VII.16 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 3  $\times$  DIM 1) do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p=2$ ) anterior à instrução.

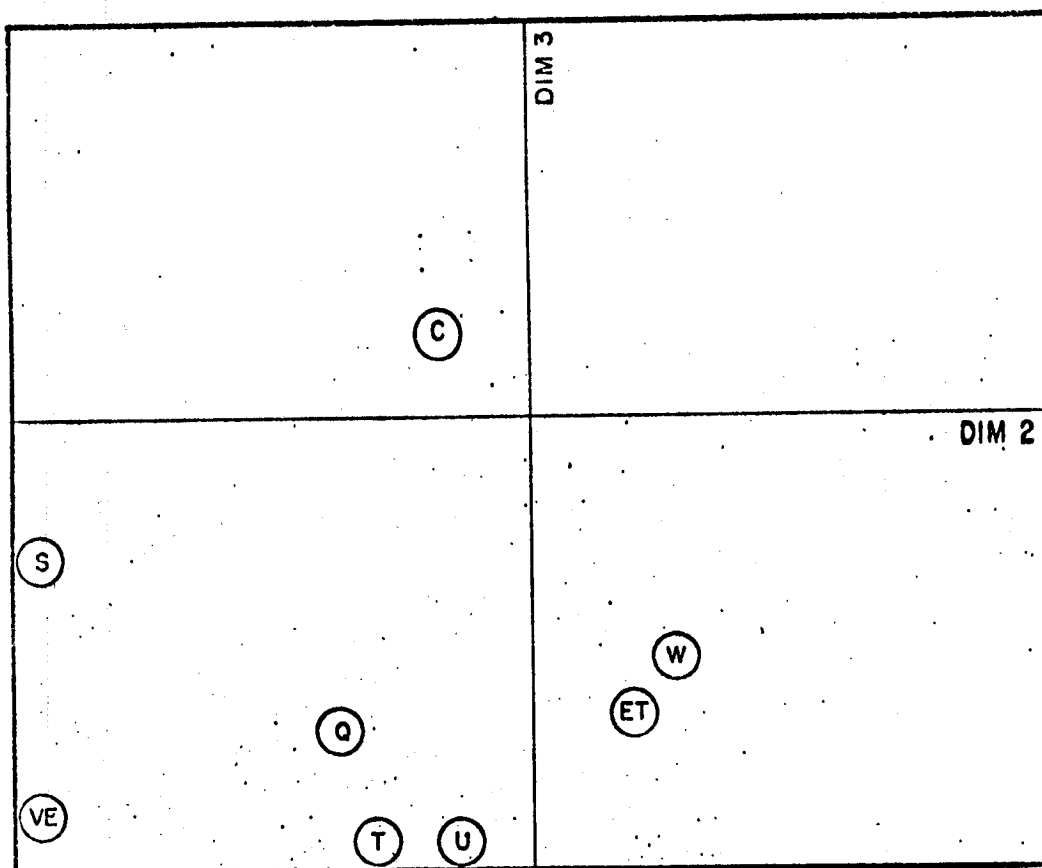


Figura VII.17 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 3  $\times$  DIM 2) do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p=2$ ) anterior à instrução.

Comparando as figuras correspondentes ao teste inicial com as do teste final comprovamos que há uma diferença estrutural relevante. A linha formada pelos conceitos C, Q, U e W não é encontrada em nenhum plano do teste inicial. Da mesma forma, o conjunto isolado {S, T, ET} inexistente na configuração inicial.

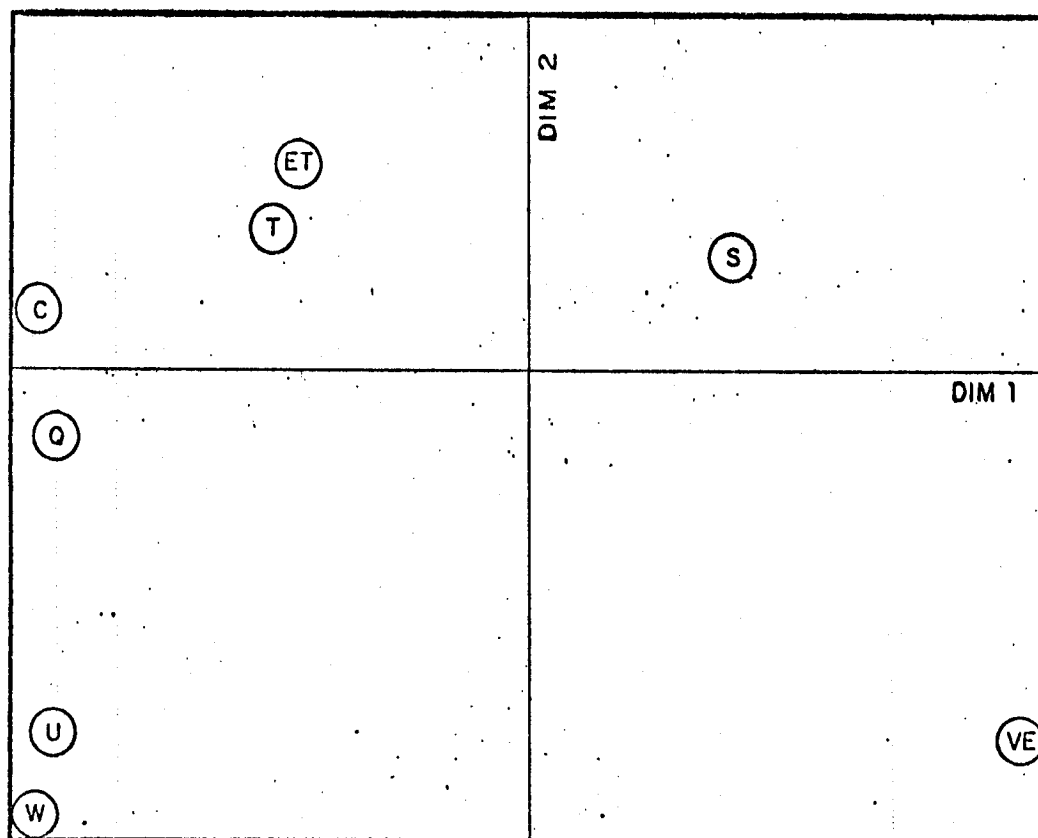


Figura VII.18 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 2  $\times$  DIM 1) do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p = 1$ ) após a instrução.

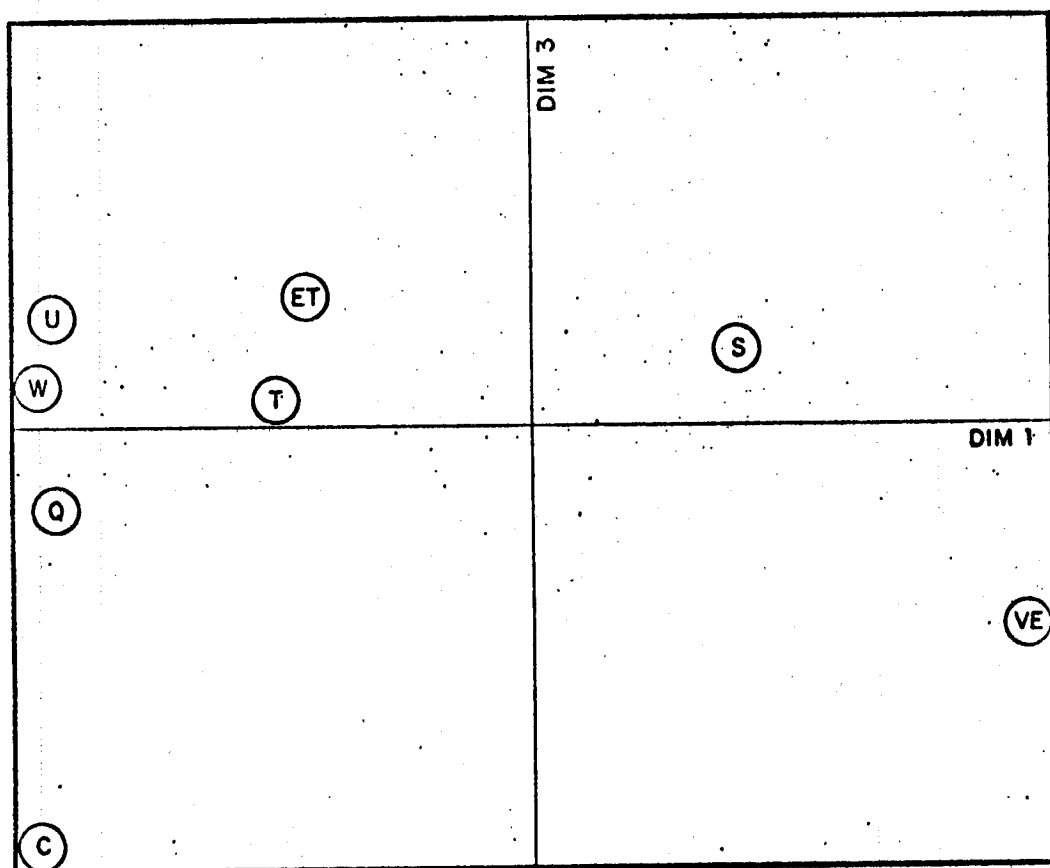


Figura VII.19 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 3  $\times$  DIM 1) do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p = 1$ ) após a instrução.

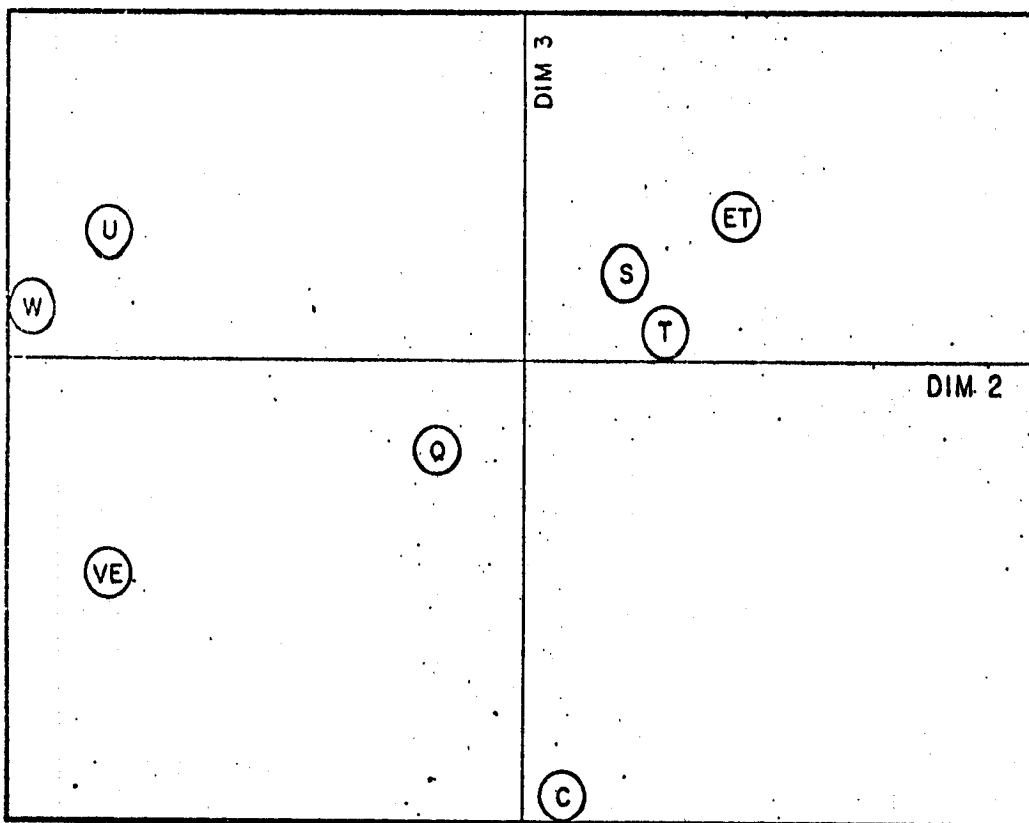


Figura VII.20 - "Mapeamento cognitivo" (DIM 3  $\times$  DIM 2) do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p=1$ ) após a instrução.

Na Figura VII.19 temos dois aglomerados bem caracterizados. Um representando a lei zero da Termodinâmica, com os conceitos T e ET, e o outro correspondendo à primeira lei, com os conceitos Q, W e U. A segunda lei pode ser representada pelo aglomerado {T, S, ET} da Figura VII.20, reforçado pela proximidade de Q.

Do que foi exposto pode-se concluir que o grupo experimental apresentou uma estrutura cognitiva onde as três leis da Termodinâmica são caracterizadas pela existência de aglomerados



com os conceitos envolvidos em cada uma das leis, o que está coerente com os resultados do TANC.

A análise de agrupamentos hierárquicos para o grupo experimental (Figuras VII.21 e VII.22) mostra uma "linearidade" no primeiro teste, e uma não "linearidade" no segundo, onde os aglomerados da lei zero e da primeira lei ocorrem nos níveis .50 e .46, respectivamente, mas a segunda lei da Termodinâmica não está bem caracterizada.

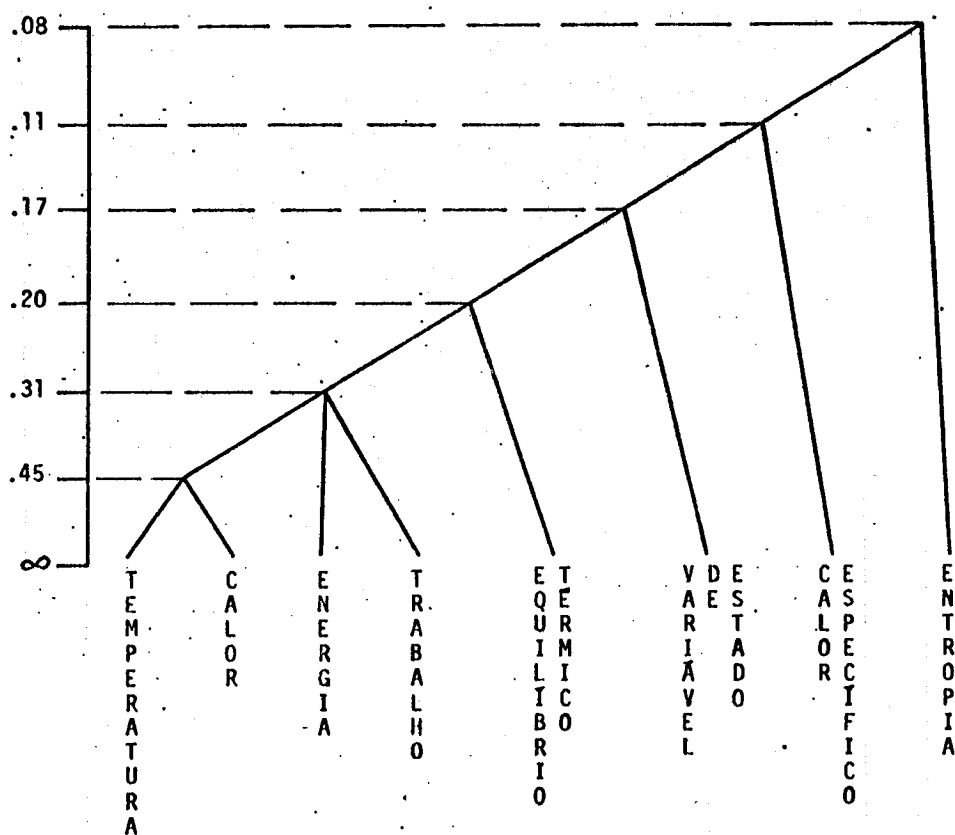


Figura VII.21 - Agrupamentos hierárquicos do grupo experimental: resultado do TAEC (p=2) anterior à instrução.

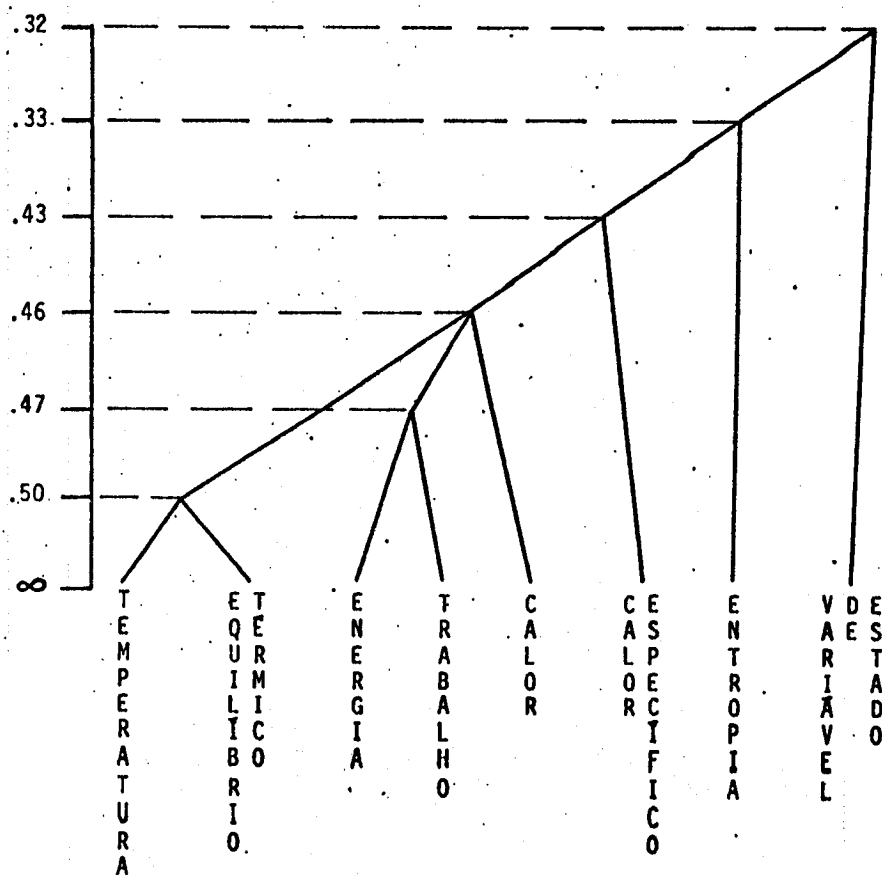


Figura VII.22 - Agrupamentos hierárquicos do grupo experimental: resultado do TAEC ( $p = 1$ ) após a instrução.

#### VII.4 - Convergência dos Testes de Associação de Conceitos.

Os testes de associação de conceitos foram usados como instrumento de acesso à estrutura cognitiva. Supõe-se portanto que, se os conceitos forem organizados na memória dos Ss de forma estruturada, essa estrutura deve ser refletida pelas medidas de similaridade fornecidas pelos testes.

AMD e AAH são, por outro lado, técnicas capazes de ex

trair a estrutura inerente às medidas. O "mapeamento cognitivo" da AMD ou os agrupamentos hierárquicos da AAH seriam representações geométricas ou organizacionais da estrutura cognitiva.

Uma questão que surge é sobre a capacidade de representação dessas técnicas. Isto é, até que ponto as figuras da AMD e a organização da AAH representam a estrutura cognitiva.

Uma possível resposta a tal questão poderia ser dada com base no nosso "conhecimento" da estrutura do conteúdo. Poderíamos investigar até que ponto a solução da AMD e, ou da AAH se ajusta ao que entendemos por estrutura do conteúdo. Isto tem sido feito durante a apresentação dos resultados. Outra questão importante refere-se à convergência dos dois testes, i.e., medirão eles a mesma habilidade? Serão eles capazes de representar os mesmos aspectos da organização conceitual?

Nesta secção tentaremos investigar essa convergência, a partir dos resultados da AAH, porque os resultados da AMD indicam que sob o ponto de vista métrico provavelmente os dois testes medem aspectos diferentes da estrutura cognitiva, haja visto que para o grupo controle, o TANC não forneceu uma estrutura ajustável, ao nível de .01, enquanto o TAEC se ajustou a uma configuração bidimensional.

#### VII.4.1 - Grupo Experimental

As Figuras VII.5 e VII.21 apresentam os resultados da AAH para o TANC e TAEC, respectivamente.

Observa-se que além do caráter "linear", os resulta

dos convergem razoavelmente bem, principalmente se levarmos em conta que o TAEC tem uma forte componente de ordem semântica. Isto é, além das relações que dois conceitos possam ter sob o ponto de vista físico, há a possibilidade de que eles sejam as sociados pelo significado que seus nomes tenham na linguagem co mum. Esse talvez seja um aspecto que interfere no TAEC, e não no TANC. Essa interferência é mais sensível ao final da instru ção, quando o resultado do TANC apresenta uma organização hierárquica bastante compatível com o modelo Ausubeliano (Figura VII.6), enquanto o TAEC continuou apresentando a dependência se mântica (Figura VII.22), apesar da estrutura ser bem diferente daquela da Figura VII.21. Mesmo assim, podemos identificar uma certa convergência nas figuras VII.6 e VII.22. O conjunto {T, ET} encontra-se em ambas as figuras. O fato de que T e ET sejam mais fortemente associados no TAEC do que no TANC talvez seja devido à componente semântica. Isto é, além desses conceitos estarem bastante relacionados no contexto da Termodinâmica, eles têm uma grande ligação no que diz respeito aos significados dos seus nomes.

O aglomerado {Q, U, W} da Figura VII.6, por pouco não apareceu na Figura VII.22, no nível .47. A partir desse nível, a dependência semântica predominou na Figura VII.22. Observa-se no entanto, que os conceitos S e VE quase se agrupam ao mesmo tempo ao grupo {T, ET, U, W, Q, C}, no nível .33.

Concluindo, podemos dizer que existe uma certa conver gência dos testes, e que os dados estão a indicar uma pequena violação aparentemente devida a uma componente semântica do TAEC.

## VII.4.2 - Grupo Controle

A influência da componente semântica é bastante sensível na Figura VII.13, quando comparada com a Figura VII.7. Podemos observar uma boa convergência entre as figuras VII.5 e VII.7 (TANC dos grupos experimental e controle, respectivamente), enquanto as figuras VII.13 e VII.21 (TAEC dos grupos experimental e controle, respectivamente) apresentam diferenças sensíveis. Nos parece que essa diferença seja devida a uma maior predominância da componente semântica no grupo controle, antes da instrução.

Após a instrução a interação mais forte apresentada pelo TANC foi entre T e ET, enquanto no TAEC continuou sendo entre T e Q. Mesmo assim, a convergência melhorou ao final da instrução. O conjunto {Q, T, U, W, ET} existente nos níveis 1.78 (Figura VII.8) e .48 (Figura VII.14) indica um certo grau de convergência, mas o fato de que C se agrupa a esse grupo na Figura VII.14, e não na Figura VII.8 talvez seja devido à componente semântica.

Portanto, os dados apresentados sugerem que os dois testes (TAEC e TANC) possibilitam o acesso à estrutura cognitiva, mas há uma possibilidade de que eles meçam aspectos diferentes dessa estrutura. Parece que existe uma componente semântica na medida fornecida pelo TAEC. Essa componente tenderia a associar conceitos cujos nomes têm significados semelhantes na linguagem comum, cotidiana. Isto é, além das relações que dois conceitos possam ter no contexto de determinada disciplina, eles

podem se relacionar pelo fato de seus nomes lembrarem coisas se  
melhantes no senso comum.

## VIII - SUMÁRIO E CONCLUSÕES

A influência da organização do conteúdo de Termodinâmica na estrutura cognitiva do aluno, foi investigada.

Duas organizações diferentes desse conteúdo foram apresentadas a duas turmas da disciplina Física II, no Instituto de Física da UFRGS, no primeiro semestre de 1978.

Ao grupo controle apresentou-se a organização do livro-texto Física, de Resnick e Halliday [RH74], e ao grupo experimental uma organização baseada na teoria de aprendizagem de Ausubel [A68], [M77a] e [M78].

A organização conceitual na estrutura cognitiva do aluno foi investigada através de dois testes de associação de conceitos.

No teste de associação numérica de conceitos (TANC), são apresentados todos os possíveis pares de conceitos selecionados para a pesquisa, e ao lado de cada par existe uma escala de 1 a 7.

Se o aluno julga que os conceitos de um par são extremamente relacionados, segundo seu critério de julgamento, deve marcar o número 1. Ao contrário, se ele julga que os conceitos têm pouquíssima ou nenhuma relação, marcará o número 7. Os números de 2 a 6 representam situações intermediárias.

No outro instrumento usado, o teste de associação escrita de conceitos (TAEC), cada conceito selecionado é escrito numa folha, e os alunos devem escrever abaixo de cada um, os conceitos que julgam ser a ele relacionados. A tarefa é realizada

em um minuto para cada conceito-chave.

Os dados do TAEC são transformados num coeficiente de relacionamento [GH63], proporcional à similaridade entre os conceitos.

As matrizes de similaridade do TANC e do TAEC foram analisadas através da técnica de análise multidimensional (AMD) e da análise de agrupamentos hierárquicos (AAH).

Salienta-se que este trabalho não teve o objetivo de investigar as vantagens de uma organização sobre outra. Não nos interessou saber se a organização Ausubeliana é mais, ou menos, eficiente do que a do livro de Resnick e Halliday.

O que se procurou investigar, foi até que ponto determinada organização conceitual da matéria de ensino altera a estrutura cognitiva existente antes da instrução.

Além disso, a investigação fundamentou-se nos resultados dos testes de associação de conceitos (TANC e TAEC) e nas análises numéricas apresentadas.

#### VIII.1 - Teste de Associação Numérica de Conceitos (TANC)

Como já foi dito, a AMD supõe a existência de uma métrica Euclideana subjacente às matrizes de similaridades.

Os resultados da aplicação da AMD aos TANC, apresentados na seção VII.2 mostraram que o grupo controle deixou de apresentar uma organização conceitual com significância estatística ao nível de .01.



Isto é, o TANC do grupo controle antes e após a instrução não permitiu um ajuste, com significância estatística, em dimensão alguma.

O grupo experimental, ao contrário, apresentou uma configuração bidimensional antes e após a instrução.

Não nos foi possível identificar precisamente as dimensões das configurações bidimensionais do grupo experimental. Em outras palavras, se essas dimensões representam fatores relevantes para o julgamento das similaridades entre conceitos de Termodinâmica, não sabemos exatamente quais são esses fatores.

Porém, ao final da instrução, o "mapeamento cognitivo" do grupo experimental (Figura VII.4) sugere que o eixo vertical separa os conceitos de acordo com as leis da Termodinâmica. Particularmente a lei zero e a primeira lei da Termodinâmica estão bem caracterizadas.

Outra interpretação que pode ser dada ao "mapeamento cognitivo" refere-se à organização conceitual.

Nesse sentido, os dados permitem concluir que ao final da instrução o grupo experimental apresentou uma configuração na qual as leis da Termodinâmica são identificadas pela existência de grupos de conceitos envolvidos em cada uma delas.

Em outras palavras, os conceitos de calor, energia e trabalho, que participam explicitamente da primeira lei da Termodinâmica, formam um grupo bem definido, e mais ou menos isolado.

Da mesma forma temperatura e equilíbrio térmico, rela

cionados através da lei zero, constituem um grupo isolado.

Quanto à segunda lei da Termodinâmica, a formação de um aglomerado que a representasse seria muito difícil numa configuração bidimensional, embora possamos imaginar que a proximidade dos grupos {T, ET} e {S, VE}, na Figura VII.4, indique uma representação da segunda lei da Termodinâmica.

Resumindo, a AMD do TANC permite-nos concluir que pelo menos ao nível de significância estatística de .01, a organização Ausubeliana proporcionou uma modificação sensível na estrutura cognitiva do grupo de alunos da amostragem.

É importante salientar que o "mapeamento cognitivo" do grupo experimental após a instrução apresentou-se bastante coerente com a organização do conteúdo.

A análise de agrupamentos hierárquicos (AAH) do grupo experimental confirma as conclusões até aqui apresentadas, razão pela qual passaremos aos resultados do grupo controle.

Comparando as figuras VII.7 e VII.8 podemos dizer que, segundo a AAH, houve uma modificação na estrutura cognitiva do grupo controle ao final da instrução.

Além disso, podemos verificar que o tipo de agrupamento da Figura VII.8 sugere uma organização conceitual semelhante àquela do livro-texto de Resnick e Halliday [RH74].

Concluindo, podemos dizer que os resultados do TANC sugerem que as diferentes organizações de conteúdo provocaram modificações diferentes nas estruturas cognitivas dos dois grupos que constituíram as amostras da pesquisa.

## VIII.2 - Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)

Os resultados do TAEC, apresentados na seção VII.3, indicam que a modificação na estrutura cognitiva do grupo experimental foi mais relevante do que a do grupo controle.

Quando falamos de modificação mais relevante, estamos nos referindo ao aspecto estrutural.

A análise multidimensional do TAEC do grupo controle, por exemplo, mostrou que antes e após a instrução o "mapeamento cognitivo" permaneceu basicamente o mesmo. A modificação mais sensível ficou por conta de uma "compressão" na configuração. Isto é, alguns conceitos, ao final da instrução, se aproximaram mais, enquanto outros se afastaram.

Em termos estruturais, no entanto, não houve modificação relevante.

Já o grupo experimental apresentou uma sensível modificação no "mapeamento cognitivo". Ao final da instrução surgiram grupos de conceitos ("clusters") representando as três leis da Termodinâmica, o que não ocorreu com o grupo controle.

Uma informação importante sugerida pelos resultados do TAEC é a existência de uma "componente semântica".

Além das relações que dois conceitos possam ter sob o ponto de vista físico, no contexto da disciplina estudada, há a possibilidade de que eles sejam associados pelo significado que seus nomes tenham na linguagem comum.

Esse talvez seja um aspecto que interfere no TAEC e não no TANC. É provável que essa interferência tenha afetado a

convergência dos dois testes, conforme discutido na seção VII.4.

### VIII.3 - Continuidade do Trabalho: Algumas Sugestões

Considerando-se a extensão do assunto e o caráter in  
trodutório deste trabalho, era de se esperar a existência de  
"pontos pendentes", os quais serão apresentados a título de su  
gestões para futuras pesquisas.

#### a. Análise Multidimensional

Acreditamos que um passo natural a ser dado na aplica  
ção da AMD é a utilização de algoritmos de várias fontes, tais  
como o INDSCAL, apresentado na seção V.5, ou o ALSCAL [TYD77].

Estudos de Monte Carlo para determinação da dimensão  
apropriada também são de grande utilidade prática. Até o presen  
te momento, temos conhecimento de tais estudos apenas com o  
MDSCAL.

A capacidade do coeficiente  $\alpha$  (Tabela VII.3) de orien  
tar a escolha da dimensão apropriada, também merece uma investi  
gação mais aprofundada.

Finalmente, esforço deve ser feito na tentativa de se  
identificar as dimensões, como fatores relevantes para o julga  
mento de similaridades.

#### b. Teste de Associação Escrita de Conceitos (TAEC)

Acreditamos que o TAEC merece estudos no sentido de

se determinar a forma de aplicação mais apropriada. Particularmente o intervalo de tempo adotado e o expoente  $p$  da equação (III.4).

Talvez seja válido tentar outro tipo de TAEC, onde ao lado de cada conceito-chave é dada uma lista de conceitos, e os Ss são solicitados a colocarem tais conceitos em ordem, de acordo com o grau de relação ao conceito-chave. Nesse caso, o teste não teria limite de tempo.

É provável que a "componente semântica" esteja ligada à questão do tempo, e o teste acima proposto poderia fornecer alguma informação a esse respeito.

#### c. Outros Testes de Associação de Conceitos

É importante também que se tente a utilização de outros testes de associação de conceitos, tais como os sugeridos na referência [P77], e se proceda à comparação com os testes aqui descritos (TANC e TAEC).

## APÊNDICE A

## CONTEÚDO DAS UNIDADES DO GRUPO EXPERIMENTAL

- UNIDADE I - CONCEITOS E LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA: Introdução; Física Clássica Moderna e Contemporânea; Conceitos em Física; os Conceitos de Temperatura e Calor; o Conceito de Entropia; a Primeira Lei da Termodinâmica; a Segunda Lei da Termodinâmica; Conclusão.
- UNIDADE II - TEORIA CINÉTICA DOS GASES: Introdução; Definição Macroscópica de um Gás Ideal; Equação de Estado; Definição Microscópica de um Gás Ideal: Teoria Cinética; a Pressão de um Gás; a Temperatura de um Gás Ideal; Calor Específico de um Gás Ideal - Equipartição da Energia.
- UNIDADE III - APLICAÇÕES DOS CONCEITOS E LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA: Primeira Lei da Termodinâmica; Teoria Cinética dos Gases; Transformações Reversíveis e Irreversíveis; o Ciclo de Carnot; a Segunda Lei da Termodinâmica; Rendimento das Máquinas.

## APÊNDICE B

## CONTEÚDO DAS UNIDADES DO GRUPO CONTROLE

- UNIDADE I - TEMPERATURA, CALOR E PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA: Descrições Macroscópica e Microscópica; Equilíbrio Térmico - A "Lei Zero" da Termodinâmica; Calor, Uma Forma de Energia; Quantidade de Calor e Calor Específico; Capacidade Térmica Molar dos Sólidos; Condução de Calor; Equivalente Mecânico do Calor; Calor e Trabalho; Primeira Lei da Termodinâmica; Algumas Aplicações da Primeira Lei da Termodinâmica.
- UNIDADE II - TEORIA CINÉTICA DOS GASES: Introdução; Gás Ideal - Descrição Macroscópica; Gás Ideal - Definição Microscópica; Cálculo Cinético da Pressão; Interpretação Cinética da Temperatura; Forças Intermoleculares; Calor Específico de um Gás Ideal; Equipartição da Energia.
- UNIDADE III - ENTROPIA E SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA: Introdução; Transformações Reversíveis e Irreversíveis; O Ciclo de Carnot; a Segunda Lei da Termodinâmica; o Rendimento das Máquinas; a Escala Termodinâmica de Temperatura; Entropia - Processos Reversíveis; Entropia - Processos Irreversíveis; Entropia e Segunda Lei; Entropia e Desordem.

APÊNDICE C - GUIAS DE ESTUDO PARA O GRUPO EXPERIMENTAL  
E NOTAS DE TERMODINÂMICA DE ACORDO COM A  
TEORIA DE AUSUBEL



INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103) - 1978

## Unidade I

### CONCEITOS E LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

#### I - INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos térmicos dentro do curso que você está agora iniciando restringe-se às três primeiras unidades. Na primeira delas procuraremos situar este estudo dentro do contexto da Física e introduziremos os conceitos e leis fundamentais da Termodinâmica de um ponto de vista macroscópico, geral e intuitivo. Na segunda, usaremos a Teoria Cinética dos Gases para chegar a uma interpretação microscópica dos conceitos e leis introduzidas na primeira. Finalmente, na terceira unidade, concluiremos o estudo dos fenômenos térmicos dando ênfase a aplicações dos conceitos e leis estudados nas duas primeiras.

Estas três unidades estão sequenciadas no sentido do geral para o particular porque acreditamos que sua aprendizagem será facilitada se antes de entrar em detalhes você tiver uma visão geral do assunto. Como o livro texto deste curso não se adapta bem a esse tipo de abordagem, preparamos textos especiais para acompanhar as duas primeiras unidades. Quando for possível, no entanto, faremos uso do livro-texto indicando-lhe as partes do mesmo a serem consultadas e/ou estudadas. (Isso acon

tecerá principalmente na terceira unidade).

## II - OBJETIVOS

Ao término desta unidade você deverá ser capaz de:

1. Distinguir entre Termodinâmica e Teoria Cinética, situando-as no contexto da Física.
2. Explicar o que se entende por temperatura de um sistema, a partir da noção de equilíbrio térmico e da Lei Zero (ou Princípio Fundamental) da Termodinâmica.
3. Identificar calor como uma forma de energia, estabelecendo a diferença entre calor e temperatura.
4. Distinguir entre capacidade térmica e calor específico,
5. Usar as equações 2 e 3 do texto anexo para calcular quantidades de calor e diferenças de temperatura.
6. Explicar de um ponto de vista macroscópico e intuitivo o que se entende por entropia de um sistema.
7. Enunciar a Primeira Lei da Termodinâmica e identificá-la com o Princípio de Conservação da Energia.
8. Distinguir entre calor e trabalho.
9. Explicar o que se entende por energia interna de um sistema.
10. Dentre as grandezas  $Q$  (calor trocado com o meio ambiente),  $W$  (trabalho realizado) e  $\Delta U$  (variação da energia interna), dizer qual(is) depende(m) do processo utilizado para levar o sistema termodinâmico de um determinado estado inicial a um determinado estado final.

11. Enunciar a Segunda Lei da Termodinâmica em termos de entropia e dar exemplos ilustrativos.
12. Distinguir entre temperatura, calor e entropia, em termos macroscópicos.

### III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

- Leia cuidadosamente o texto anexo e, se necessário, discuta suas dúvidas com um monitor ou com o professor.

- Procure fazer uma auto-avaliação. Você acredita que é capaz de fazer o que está previsto nos objetivos? Inclusive se os mesmos forem avaliados indiretamente através de questões de um teste?

- As seguintes questões de estudo poderão auxiliá-lo nessa auto-avaliação:

1. Questões 1, 3, 5, 8, 10, 16, 17, 18, 20 e 23 do capítulo 22 do Halliday-Resnick, vol. I-2.
2. Quando juntamos as cartas de um baralho ou quando construímos uma casa de tijolos, por exemplo, estamos aumentando a ordem do mundo físico. Isto viola a segunda Lei da Termodinâmica?
3. Considere uma caixa que contém um certo número muito pequeno de moléculas, digamos cinco. Algumas vezes acontecerá por acaso que todas estas moléculas estejam na metade esquerda da caixa, ficando a metade direita completamente vazia. Isso é possível no caso em que a caixa contenha um grande número de moléculas? Explique. Relacione com entropia.

4. A entropia obedece alguma lei de conservação? Explique.
5. Comente a afirmativa: "Uma máquina térmica converte movimento mecânico desordenado em movimento mecânico organizado".

- Resolva os seguintes problemas (eles referem-se ao objetivo 5):

22-5, 6 e 11 do capítulo 22 do Halliday & Resnick. (No problema 11, o calor específico médio é calculado por

$$\bar{c} = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T c dT, \quad \text{Teorema do valor médio}$$

Resposta do problema 6: 45,5°C.

- Em relação ao objetivo 10, na primeira metade da seção 22-6 do Halliday & Resnick os autores deixam bem claro quais as grandezas que dependem ou não do trajeto (na segunda metade tais grandezas são relacionadas através da Primeira Lei da Termodinâmica). No final da seção 22-5 está demonstrado que o trabalho depende da trajetória; leia esta parte e depois tente mostrar isso sem consultar o livro.

- Quando você se sentir suficientemente preparado em relação aos objetivos desta unidade peça o teste da mesma a um monitor. Se o resultado desse teste mostrar que você atingiu os objetivos da unidade, você receberá o material da 2a. unidade. Caso contrário você deverá reestudar a unidade e submeter-se a novo teste tantas vezes quantas forem necessárias a fim de que você demonstre domínio sobre o conteúdo da unidade.

## Unidade I

## CONCEITOS E LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

## INTRODUÇÃO: Termodinâmica e Teoria Cinética

Nas três primeiras unidades deste curso você estudará tópicos relativos a duas áreas da Física conhecidas como Termodinâmica e Teoria Cinética. Na Teoria Cinética estuda-se propriedades da matéria do ponto de vista atômico tentando entender tais propriedades com base na suposição de que a matéria é constituída de átomos que obedecem certas leis. É possível, no entanto, estabelecer relações entre várias propriedades de certos materiais sem conhecer a sua estrutura interna, i.e., sem levar em conta a existência de átomos e moléculas. Justamente esse é o objeto da Termodinâmica, i.e., determinar relações entre propriedades de materiais sem levar em conta suas estruturas internas. (Na verdade deveríamos dizer sem conhecer estruturas internas porque, historicamente, a Termodinâmica foi desenvolvida antes de que se chegasse a um certo nível de compreensão acerca da estrutura interna da matéria). Pode-se também distinguir entre Termodinâmica e Teoria Cinética dizendo que a primeira lida apenas com variáveis macroscópicas tais como a pressão, a temperatura e o volume enquanto que a segunda pressupõe a existência de átomos e aplica as leis da Mecânica aos átomos que constituem a matéria. Ambas, no entanto, lidam com o mesmo tipo de fenômenos físicos.

Nesta primeira unidade procuraremos nos ater mais à Termodinâmica, i.e., a certas relações entre propriedades macroscópicas da matéria e à interpretação macroscópica dos conceitos físicos fundamentais envolvidos nessas relações. Na segunda unidade analisaremos estas mesmas relações e conceitos do ponto de vista microscópico. Finalmente, na terceira unidade, para completar nosso estudo de fenômenos térmicos enfatizaremos aplicações das leis e conceitos estudados nas duas primeiras unidades.

Entretanto, antes de nos tornarmos mais específicos no estudo desta unidade talvez seja conveniente situarmos a Termodinâmica e a Teoria Cinética no contexto da Física.

#### FÍSICA CLÁSSICA, MODERNA E CONTEMPORÂNEA\*

As fases do desenvolvimento da Física podem ser divididas (um pouco arbitrariamente) em clássica, moderna e contemporânea. Antes do final do século XIX, um conhecimento detalhado havia sido adquirido em subdisciplinas da Física tais como Mecânica, Termodinâmica, Eletromagnetismo, Ótica e Hidrodinâmica. Por volta de 1900, parecia que a descrição teórica dessas áreas estava praticamente completa e não haviam mais descobertas importantes a serem feitas. Coletivamente, estas subdisciplinas constituem o que se convencionou chamar de Física Clássica.

---

\* Traduzido e adaptado do livro "Physics and the Physical Universe" de Jerry B. Marion.

No entanto, os últimos anos de século XIX e as três décadas do século XX produziram uma série de novas idéias em Física. Durante essa época a Radioatividade foi descoberta e posteriormente usada para investigar a estrutura do átomo. O desenvolvimento da Teoria da Relatividade forçou o cuidadoso exame e a posterior modificação dos conceitos de espaço e tempo então existentes. A Teoria Quântica foi formulada a partir das tentativas feitas para descrever o comportamento de sistemas atômicos. Esses anos decisivos, durante os quais a Física foi sacudida por novas descobertas e novas teorias, é o período correspondente à Física Moderna.

Os anos 30 testemunharam a primeira observação de ondas de rádio emitidas por estrelas, a descoberta do neutron e da fissão nuclear e a detecção da primeira partícula elementar não encontrada naturalmente nos átomos. Descobertas como essas levaram a uma enorme quantidade de resultados experimentais e teóricos em todos os novos campos da Física. Tais resultados continuam a ser obtidos atualmente nos laboratórios de pesquisa e o desenvolvimento científico, as novas idéias e as novas descobertas que lhes deram origem constituem a Física Contemporânea.

Como se pode depreender da descrição acima, a Termodinâmica está claramente inserida na Física Clássica (assim como a Mecânica que você já estudou). A Termodinâmica atingiu seu maior desenvolvimento no fim do século XIX com o trabalho de cientistas como Carnot, Joule, Kelvin e outros. E a Teoria Cinética? Bem, no fundo é também Física Clássica porque foi também desenvolvida até o final do século XIX e lança mão apenas de con

ceitos da Mecânica Clássica. Por outro lado, parece estar de certa forma bastante próxima da Física Moderna porque na verdade é um ramo subsidiário da Mecânica Estatística a qual, através da incorporação de conceitos da Física Quântica, deu origem à Mecânica Estatística Quântica. Na Mecânica Estatística as leis da Mecânica são aplicadas estatisticamente através de técnicas mais formais e abstratas do que as da Teoria Cinética (esta usa técnicas matemáticas relativamente simples para calcular valores médios enquanto que aquela usa, por exemplo, probabilidades). A propósito, as leis da Termodinâmica podem também ser expressas, quantitativamente, na linguagem da Mecânica Estatística.

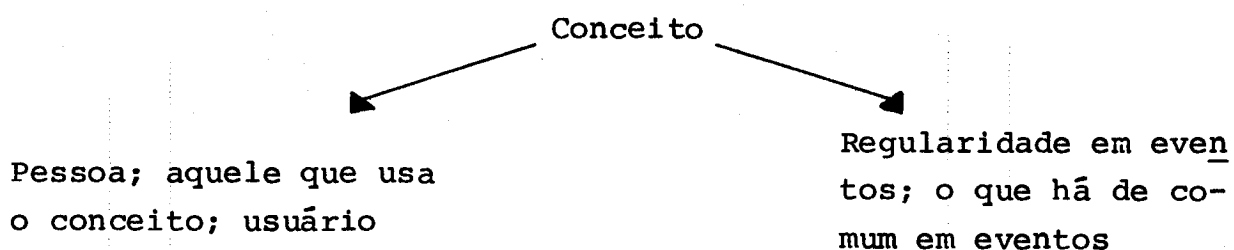
Como já foi dito, nosso estudo limitar-se-á a tópicos de Termodinâmica e Teoria Cinética. Além disso, no estudo da Teoria Cinética nos restringiremos a aplicá-la aos gases porque nelas as interações entre átomos são muito mais fracas do que nos líquidos e nos sólidos, o que simplifica grandemente o tratamento matemático. Dissemos também que nesta primeira unidade nos ateríamos mais à Termodinâmica, i.e., a certas relações entre propriedades macroscópicas da matéria. Também as leis da Termodinâmica serão introduzidas nesta unidade, porém tanto essas leis como outras relações entre variáveis termodinâmicas implicam na utilização de conceitos. Assim sendo, passaremos agora a uma discussão sobre conceitos em Física e logo após introduziremos três "conceitos-chave" da Termodinâmica.



## CONCEITOS EM FÍSICA

Você talvez já tenha ouvido dizer que conceitos são muito importantes em Física. (Muita gente diz isso mas não põe em prática, em muitos cursos e livros-texto os conceitos mais importantes, "conceitos-chave", ficam perdidos em meio a uma grande quantidade de fatos irrelevantes). Mas afinal, o que é um conceito?

Bem, confiamos que em cursos anteriores você tenha aprendido alguns conceitos físicos (por exemplo, massa, comprimento, tempo e energia) e podemos poupar o esforço necessário por tentar explicar precisamente o que é um conceito. Assim sendo, sem procurar uma definição rigorosa, interpretaremos um conceito como sendo um "pedaço de linguagem" que aponta em duas direções:



O conceito de trabalho, por exemplo, para físicos (aqueles que usam) é usado para exprimir processos de transferência de energia (regularidades) que não sejam devidos a diferenças de temperatura; para outros usuários esse conceito geralmente está associado a esforço físico ou mental. Da mesma forma, o conceito de tempo (ou intervalo de tempo) pode também ser usado para mostrar que conceitos dependem dos usuários. Entretanto, no

contexto da Física é importante ter sempre em mente que conceitos descrevem regularidades em eventos físicos, ou seja, coisas que acontecem no mundo físico.

Os conceitos físicos tem um caráter evolutivo, i.e., eles mudam ao longo do tempo. Por exemplo, os conceitos de massa, espaço e tempo foram modificados pela Teoria da Relatividade. O conceito de um átomo como sendo um "pudim de ameixas" (Modelo de Thomson) foi modificado pelo Modelo Nuclear. Obviamente, os conceitos <sup>U</sup>não mudam somente porque outros são sugeridos, ou seja, para seguir a moda. A evolução dos conceitos físicos é uma decorrência da evolução da própria Física. As vezes, leva muito tempo para que um conceito seja modificado e em muitos casos velhos conceitos não são simplesmente abandonados em favor dos outros. O que ocorre é que os limites da aplicabilidade desses conceitos são determinados pelo avanço da Física. Por exemplo, os conceitos de massa, espaço e tempo como não dependentes da velocidade são perfeitamente válidos na Mecânica não relativística (velocidades muito inferiores a da luz).

Outras vezes, não só um determinado conceito é modificado em decorrência de novas evidências experimentais mas toda uma estrutura conceitual (conceitos-chave inter-relacionados) é sucedida por outra. A Física Moderna, por exemplo, é melhor distinguida da Física Clássica pela sua estrutura conceitual do que por qualquer outra coisa. A Física Moderna começou a desenvolver-se somente quando ficou claro que os conceitos clássicos não podiam ser usados para explicar vários resultados experimentais de grande importância.

Nas três primeiras unidades deste curso enfatizaremos os conceitos físicos mais relevantes ao estudo da Termodinâmica e da Teoria Cinética. Entretanto, como você talvez tenha notado em cursos anteriores alguns conceitos são mais importantes do que outros, mais gerais, mais inclusivos. Por exemplo, os conceitos de massa, comprimento e tempo são conceitos básicos porque muitos outros conceitos, tais como velocidade, quantidade de movimento, densidade, etc., podem ser definidos em função desses conceitos fundamentais.

Assim sendo, passaremos agora a concentrar nossa atenção em três conceitos fundamentais para o estudo da Termodinâmica: Calor, Temperatura e Entropia. Nesta unidade discutiremos estes conceitos do ponto de vista macroscópico enquanto que na unidade seguinte procuraremos, através da Teoria Cinética, dar uma interpretação mecânica a estes conceitos que, no fundo, é uma interpretação do ponto de vista microscópico.

## OS CONCEITOS DE TEMPERATURA E CALOR

Começaremos com os conceitos de temperatura e calor porque do primeiro todos temos uma noção intuitiva enquanto que o segundo está muito relacionado com um outro conceito que já lhe é bastante familiar, o de energia.

A noção intuitiva de temperatura que todos temos nos é dada através do sentido do tato. Por meio do tato podemos distinguir, embora grosseiramente, entre quente e frio. Podemos inclusive estabelecer uma ordem de aquecimento, i.e., decidir se

um corpo A está mais quente do que um outro corpo B, se B está mais quente do que um terceiro corpo C, e assim por diante. Isso nos dá uma idéia do que seja temperatura, mas sabemos também que nosso tato pode ser "tapeado": por exemplo, coloquemos uma mão em água fria e a outra em água quente e, depois, coloquemos as duas simultaneamente em água morna. Nesse caso, a mão que estava na água fria sentirá a água morna como quente e a outra que estava na água quente sentirá a água morna como fria. Este exemplo é suficiente para mostrar que o nosso sentido intuitivo de temperatura não é fidedigno e certamente não é adequado do ponto de vista da Física. Além disso, o intervalo de nosso sentido de temperatura é bastante limitado. Procuremos então uma idéia mais objetiva de temperatura:

Suponha que um objeto A, que parece frio em contato com a nossa mão, e um objeto idêntico, B, que parece quente, sejam colocados em contato com um outro. Após um intervalo de tempo suficiente, A e B darão origem a mesma sensação de temperatura. Dizemos, então, que A e B estão em equilíbrio térmico um com o outro. Podemos generalizar esta expressão "dois corpos estão em equilíbrio térmico" para significar que os dois corpos estão em estado tais que, se os dois fossem colocados em contato, os sistemas\* combinados estariam em equilíbrio térmico. A comprovação lógica e operacional do equilíbrio térmico

---

\* Ao analisarmos uma situação física, usualmente focalizamos nossa atenção em uma porção de matéria que separamos, mentalmente, do meio externo a ela. Uma tal porção se denomina sistema. Tudo aquilo que não pertence ao sistema e que exerce influência direta em seu comportamento denomina-se a vizinhança.

co consiste em usar um terceiro corpo, ou corpo de prova, tal como um termômetro. Isto é resumido num postulado, freqüentemente denominado Lei Zero da Termodinâmica: Se A e B estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo C (o "termômetro"), então A e B estão em equilíbrio térmico entre si.

Esta discussão exprime a idéia de que a temperatura de um sistema é uma propriedade que, eventualmente, atinge o mesmo valor que a de outros sistemas, quando todos eles são colocados em contato. Este conceito concorda com nossa idéia diária de temperatura como sendo uma medida do estado de aquecimento ou frieza de um sistema porque, tanto quanto podemos confiar em nosso sentido de temperatura, o estado de aquecimento de todos os objetos torna-se o mesmo após se manterem em contato por um tempo suficiente.

Uma maneira mais formal, mas talvez mais fundamental, de expressar a Lei Zero é a seguinte: Existe uma grandeza escalar, denominada temperatura, que é uma propriedade de todos os sistemas termodinâmicos (em estado de equilíbrio), tal que a igualdade de temperatura é uma condição necessária e suficiente para o equilíbrio térmico. (Halliday & Resnick, Física, vol. I-2, 586)

Você talvez esteja pensando que a idéia de que a temperatura de um sistema é uma propriedade que, eventualmente, atinge o mesmo valor que a de outros sistemas, quando todos eles são colocados em contato, ainda não é suficiente para captar o conceito de temperatura. Concordamos, mas lembre-se que estamos pensando em termos macroscópicos. Uma melhor compreensão deste conceito virá com a visão microscópica dada pela Teoria Cinética. Por enquanto ficaremos no nível macroscópico. Observe, no entanto, que não estamos tentando definir temperatura. Assim co

mo comprimento, massa e tempo, temperatura é um conceito fundamental e como tal não é definido ou é definido operacionalmente. Qual seria então uma definição operacional de temperatura? Sim plesmente, a quantidade medida por um termômetro.

Existem diversas grandezas físicas mensuráveis que va riam quando varia a nossa percepção de temperatura. Entre estas estão o volume de um líquido, o comprimento de uma barra, a resistência elétrica de um fio, a pressão de um gás mantido a volume constante, o volume de um gás mantido a pressão constante e a cor do filamento de uma lâmpada. Qualquer destas grandezas pode ser usada para construir um termômetro, isto é, para estabelecer uma determinada escala termométrica. Uma tal escala termométrica é estabelecida pela escolha de uma determinada substância termométrica e de uma determinada propriedade termométrica desta substância. Em seguida, defini mos a escala termométrica, admitindo uma relação monotô nica contínua entre a propriedade escolhida da nossa substância e a temperatura medida em nossa escala. Por exemplo, a substância termométrica poderá ser um líquido em um tubo de vidro capilar e a propriedade termomé trica poderá ser o comprimento da coluna líquida; ou a substância termométrica poderá ser um gás, mantido em um recipiente a volume constante, e a propriedade termo métrica poderá ser a pressão do gás, e assim por diante. Deve-se entender que cada escolha de uma substância e propriedades termométricas, juntamente com a relação ad mitida entre a propriedade e a temperatura, conduz a uma escala termométrica específica cujas medidas não de vem coincidir necessariamente com as medidas realizadas em outra escala termométrica qualquer, definida de maneira independente. (Halliday & Resnick, Física, vol. I-2, p.p. 586 e 587)

(O conteúdo deste curso não inclui estudo de termôme-

tros e escalas termométricas, mas se você estiver interessado no assunto sugerimos consultar a referência acima.)

Passemos agora ao conceito de calor. Durante o século XVII uma teoria foi desenvolvida segundo a qual o calor era um "sutil"\* fluído elástico cujas partículas se repeliam entre si mas eram atraídas pelas partículas constituintes dos corpos materiais comuns e cuja presença dentro de um corpo determinava o calor desse corpo. Esse fluído recebeu o nome de calórico e a teoria correspondente ficou conhecida como teoria do calórico. Até o fim do século XIX os fenômenos térmicos eram explicados admitindo-se a existência de uma substância material chamada calórico. Acreditava-se, por exemplo, que um corpo a uma temperatura mais alta possuía mais calórico do que outro a uma temperatura mais baixa. Quando os dois corpos eram colocados em contato aquele que tinha mais calórico cedia parte dessa substância ao outro até que ambos atingissem a mesma temperatura, i.e., que tivessem a mesma quantidade de calórico.

Nos fundamentos da teoria do calórico estava a idéia de que o calor era uma quantidade física que se conservava. A maioria das experiências e observações feitas pelos proponentes da teoria do calórico foram feitas em condições muito particulares cujos resultados sugeriam que o calor tal como eles o defi

---

\* O adjetivo "sutil" era geralmente aplicado a qualquer fenômeno que envolvesse alguma coisa cuja ação pudesse ser observada mas que era invisível e não podia ser detectada por instrumentos de pesagem.

niam era uma quantidade que permanecia sempre constante, i.e., poderia ser transferida de um corpo para outro mas não poderia ser criada nem destruída. Entretanto, o conceito de calor como substância, cuja quantidade total permanecia constante, não sobreviveu a subsequentes evidências experimentais. A teoria do calórico foi encontrando cada vez mais dificuldades para explicar fatos experimentais que por sua vez levaram à conclusão que o calor é uma forma de energia ao invés de uma substância.

O conceito de energia certamente lhe é familiar. Hoje em dia até os jornais falam diariamente em energia. Falam do esgotamento de nossas fontes naturais de energia, da energia nuclear, do aproveitamento da energia solar e assim por diante. No seu curso de Física I você trabalhou muito com o conceito de energia e aprendeu que a energia se conserva (princípio ou lei de conservação da energia), ou seja, a energia como um todo se conserva, não pode ser criada nem destruída somente transferida e transformada em outra forma. Por outro lado, você deve estar lembrado que o princípio de conservação da energia não é necessariamente válido para uma forma particular de energia. A "lei de conservação da energia mecânica", por exemplo, tem sérias dificuldades. Esta "lei" é válida somente se o trabalho feito pelas forças de atrito for desprezado. Quando existem forças de atrito atuando num sistema, sua energia mecânica total diminui. Fala-se então em dissipação da energia mecânica pelo trabalho feito por forças dissipativas. Entretanto, o que ocorre, na verdade, é que apesar de que há uma perda de energia mecânica uma quantidade equivalente de energia aparece sob forma chamada ener

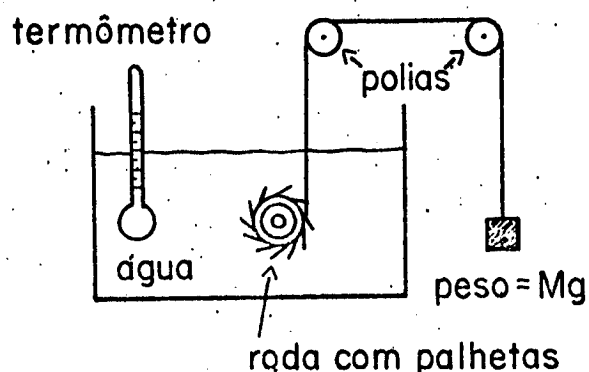


gia térmica, i.e., calor.

Assim sendo, no exemplo acima o que se conserva é a energia total e não a energia mecânica. A perda de energia mecânica é igual ao acréscimo de energia térmica do sistema, de modo que a energia como um todo se conserva. Aliás, a igualdade:

$$\text{Acréscimo de energia térmica} = \text{Energia mecânica fornecida}$$

nos permite imaginar uma experiência que estabeleça uma relação de equivalência entre estas duas formas de energia. Esse tipo de experiência foi feito muitas vezes, entre 1840 e 1868, por um inglês chamado James Joule. Esquematicamente, o dispositivo experimental usado por Joule está representado na Figura 1.



A medida que a massa  $M$  cai ao longo de uma altura  $h$  ela perde uma energia potencial  $U=Mgh$ . A queda do peso faz a roda girar e agitar a água que, conseqüentemente, se aquece. Ao fim do processo quando a água volta ao repouso, o acréscimo de temperatura  $\Delta T$  é registrado pelo termômetro. O acréscimo de energia térmica da água depende não só da temperatura mas também da

própria massa  $m$  de água. Através de suas experiências Joule estabeleceu a seguinte relação:

$$\text{Acréscimo de energia térmica da água} = (4,2 \cdot 10^3 \text{ Joule/kg}^\circ\text{C}) m \Delta T$$

Levando em conta que este acréscimo é igual a perda de energia (mecânica) potencial  $Mgh$  e trabalhando com valores numéricos chega-se à relação:

$$1 \text{ caloria} = 4,18 \text{ Joules}$$

que é comumente conhecida como equivalente mecânico do calor. (Caloria é a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1g de água de 14,5 a 15,5 °C.)

Calor é então uma forma de energia; aquecer ou esfriar um corpo significa simplesmente aumentar ou diminuir sua energia térmica. Aproveitamos esta idéia para ilustrar algo que já foi dito anteriormente: os conceitos físicos não são imutáveis. O conceito de energia é um dos mais importantes de toda a Física, porém, inicialmente, era empregado de forma bastante restrita, principalmente em termos de energia mecânica. Aos poucos, no entanto, a própria evolução da Física foi tornando este conceito muito mais abrangente, incluindo energia térmica, energia elétrica, energia magnética, energia nuclear e muitas outras formas de energia. O conceito de energia é hoje tão importante na Física que não seria exagero dizer que Física é um estudo da energia. Por exemplo, como veremos mais adiante, a pri

meira lei da Termodinâmica nada mais é do que uma aplicação do princípio de conservação da energia.

Antes de passarmos ao conceito de entropia, vamos introduzir dois conceitos subordinados aos conceitos de calor e temperatura: capacidade térmica e calor específico. (Este parece ser o momento oportuno para introduzir estes conceitos por que acabamos de falar em temperatura e calor.)

Chama-se capacidade térmica,  $C$ , de um corpo o quociente entre a quantidade de calor (energia térmica),  $\Delta Q$ , fornecida ao corpo e o correspondente acréscimo de temperatura,  $\Delta T$ .

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (\text{Eq. 1})$$

A palavra "capacidade" não deve ser interpretada como "a quantidade de calor que um corpo pode reter", uma vez que ela significa, simplesmente, o calor fornecido a um corpo para elevar de uma unidade sua temperatura.

A capacidade térmica por unidade de massa de um corpo, denominada calor específico (ou calor de massa), depende da natureza da substância da qual ele é feito e é definido como o quociente entre sua capacidade térmica e sua massa:

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \quad (\text{Eq. 2})$$

Tanto a capacidade térmica quanto o calor específico de uma dada substância não são constantes, mas dependem da temperatura. As equações anteriores fornecem apenas os valores médios destas grandezas no intervalo de temperatura considerado,

$\Delta T$ . A uma dada temperatura  $T$ , o calor específico de um corpo é definido como

$$c = \frac{dQ}{m dT} \quad (\text{Eq. 3})$$

A partir desta expressão, a quantidade de calor fornecida a um corpo de massa  $m$ , para levá-lo de uma temperatura inicial  $T_i$  a uma temperatura final  $T_f$ , é calculada por

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c dT \quad (\text{Eq. 4})$$

onde  $c$  é o calor específico do corpo e, em geral, é uma função da temperatura, embora dentro de certos intervalos ele possa ser considerado constante. (Halliday & Resnick, Física, vol. I-2, p.p. 607-608).

Uma vez introduzidos estes conceitos subordinados, passemos ao terceiro conceito-chave para o nosso estudo de Termodinâmica e Teoria Cinética: entropia.

#### O CONCEITO DE ENTROPIA

O conceito de entropia é um conceito que não pode ser precisamente definido exceto através de complexos termos técnicos. Entretanto, é um conceito de tanta importância e tão frequentemente usado que vale à pena procurar entender intuitivamente seu significado. A entropia está intimamente relacionada com as idéias de ordem e desordem quando estas são definidas em termos de probabilidade de ocorrência de uma determinada distri

buição estatística para um conjunto de elementos. Alguns exemplos esclarecerão isso. Suponhamos que uma camada de areia fina branca é colocada numa jarra e sobre ela é colocada uma outra camada de areia fina preta. Sacudindo suficientemente a jarra é de se esperar que com o tempo a areia branca se misture com a preta e a mistura passe a ter cor cinza. Entretanto, por mais que se sacuda a jarra, é altamente improvável que se consiga obter novamente a distribuição inicial, i.e., as duas camadas separadas de areia branca e preta. Por que isso? A resposta estatística é que existem milhões de maneiras mais através das quais os grãos de areia podem se entremear do que o número de maneiras através das quais eles podem se distribuir em duas camadas distintas. A disposição ordenada inicial (duas camadas distintas) tornou-se desordenada durante o processo de sacudir a jarra (o qual dá movimento aleatório aos grãos de areia); a distribuição menos provável foi suplantada por outra mais provável. Não se está, no entanto, dizendo que se continuasse sacudindo a jarra não se poderia após um longo período de tempo reproduzir a disposição ordenada inicial de duas camadas distintas; está se dizendo somente que é altamente improvável. Quanto maior o número de grãos de areia no conjunto (mistura), mais improvável se torna a reprodução da ordem original. Considere agora um conjunto pequeno: um baralho de cartas que quando novo estava separado por naipes, (portanto, ordenado) é embaralhado e se torna desordenado durante o processo. A probabilidade de reproduzir a ordem original, apesar de pequena, é ainda suficientemente grande para que isso ocorra ocasionalmente. De vez em quando numa ro

dada de bridge ocorre que cada jogador recebe 13 cartas do mesmo naipe.

Ao considerar conjuntos de moléculas, no entanto, se está considerando números extremamente grandes. O número de moléculas em  $1 \text{ cm}^3$  de gás é superior a  $10^{19}$ , o qual é maior do que a soma de todos os grãos de areia de todas as praias do mundo. Se conectarmos dois recipientes - um dos quais completamente vazio (vácuo) e o outro cheio de gás - o gás, através do movimento aleatório de suas moléculas, rapidamente ocupará também o espaço existente no recipiente inicialmente vazio. Teoricamente, devido ao fato de que o movimento aleatório das moléculas continua, é possível que no futuro todas elas retornem ao recipiente onde estavam, deixando o outro vazio. Não existe nada na dinâmica Newtoniana que impeça isso. Porém, a probabilidade estatística contra isso é tão grande que considera-se impossível que ocorra. (O tempo que seria necessário para que esta improvável ocorrência acontecesse é muitas, muitas vezes maior do que os bilhões de anos de existência do universo.)

A medida desta tendência de grandes conjuntos de moléculas em movimento aleatório irem de uma menos provável configuração (um arranjo ordenado) para uma mais provável (mais desordenada) é chamada entropia. Podemos, então, definir entropia como uma medida do grau de desordem. A tendência de todas as mudanças físicas em irem na direção de uma configuração mais provável até que um estado de equilíbrio seja atingido o qual corresponde a máxima probabilidade chama-se segunda lei da Termodinâmica. Enunciada de outra forma, essa lei diz que qualquer mu

dança espontânea num sistema de partículas (ou seja, qualquer mudança que ocorre no sistema sem ganho ou perda de energia em relação à vizinhança) será na direção do aumento de entropia e que a entropia será máxima quando for atingido o equilíbrio (Ripley, J.A.Jr., The Elements and Structure of the Physical Sciences, p.p. 233-234)

Posteriormente, ainda nesta unidade, voltaremos a falar de entropia e da segunda lei da Termodinâmica. Por enquanto fiquemos apenas com a noção de que entropia é uma medida do grau de desordem de um sistema.

#### A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

De um modo geral, pode-se dizer que a Termodinâmica é o ramo da Física que trata da influência mútua entre calor, trabalho e energia. A primeira lei da Termodinâmica estabelece uma relação entre estes conceitos, porém, antes de introduzi-la discutamos um pouco tais conceitos.

Calor como já vimos é uma forma de energia, a energia térmica. Energia pode ser definida como capacidade de realizar trabalho. Trabalho pode ser transformado em calor (um exemplo disso é a experiência de Joule) e vice-versa (nas máquinas térmicas utiliza-se calor para realizar trabalho). Isso significa que estes três conceitos (calor, trabalho e energia) estão profundamente relacionados. Mas, por outro lado talvez você esteja tendo dificuldades em discriminá-los. Você pode estar se pergun

tando: Afinal qual é a diferença entre calor e trabalho?

Vamos então estabelecer uma distinção entre estes dois conceitos:

Definiremos calor como energia em trânsito de um corpo (ou sistema) a outro, devido a diferença em temperatura entre eles. Ao transmitir-se de um corpo a outro, exclusivamente devido a diferença de temperaturas entre eles, é que a energia recebe a denominação de energia térmica. Se o calor fosse uma substância, ou um tipo de energia que não se transformasse enquanto estivesse contida no sistema, não seria possível retirar calor indefinidamente deste, sem alterá-lo. No entanto, tomando como exemplo o aparelho de Joule podemos retirar da água uma quantidade indefinida de calor, por exemplo, ligando-a a um sistema mais frio, sem alterar as condições dela. Para isso, é claro, é preciso que o aparelho esteja funcionando continuamente.

Da mesma forma, o trabalho também não é algo que um sistema contenha em quantidade definida; pode-se fornecer uma quantidade indefinida de trabalho a um sistema sem alterar suas condições, como também ilustra o aparelho de Joule. O trabalho, como o calor, implica em transferência de energia. Porém, para distinguir entre calor e trabalho define-se este último como a energia que é transferida de um sistema para outro de modo tal que a diferença de temperaturas não esteja diretamente envolvida. O termo trabalho inclui todos os processos que envolvem transferência de energia, mas exclui especificamente aqueles em que a transferência de energia seja devida a diferença de temperatura. (Observe que essa definição é consistente com a definição  $dW = Fdx$



que você estudou anteriormente; a força  $F$  podia ser de natureza elétrica, magnética, gravitacional, etc., e não havia diferença de temperatura envolvida nessa definição.)

Uma vez estabelecida uma distinção entre calor e trabalho resta ainda discutir um pouco o terceiro conceito (energia) envolvido na formulação da primeira lei da Termodinâmica.

Todas as coisas materiais consistem de átomos e moléculas, os quais estão continuamente em movimento tanto se o material for gasoso, líquido ou sólido. Portanto, mesmo se um objeto está em repouso, numa posição de energia potencial zero (em relação a um certo nível de referência), existe energia associada ao movimento interno dos átomos e moléculas que o constituem. Ou seja, existe sempre uma certa energia interna para qualquer conjunto de átomos ou moléculas. Se alterarmos o sistema fazendo com que seus átomos e moléculas se movam mais violentamente, dizemos que foi adicionada energia térmica ao sistema (fazendo trabalho sobre o sistema ou cedendo calor ao mesmo), aumentando assim a energia interna.

A conservação da energia é uma lei geral da Física e, como tal, deve ser válida quando consideramos tanto a energia interna de um sistema como possíveis formas de energia "externa". Chamemos de  $U$  a energia interna de um sistema e de  $Q$  a quantidade de calor (ou energia térmica) fornecida a esse sistema. Se o sistema recebe uma quantidade de calor  $Q$  e não realiza nenhum trabalho, sua energia interna é aumentada de uma quantidade de  $\Delta U$  exatamente igual à quantidade de calor recebida:  $\Delta U = Q$ . O sistema, no entanto, pode realizar um certo trabalho,  $W$ , quan

do suprido da energia térmica (calor)  $Q$ ; por exemplo, se o sistema é um gás contido num cilindro com um êmbolo ele pode se expandir elevando o êmbolo, i.e., exercendo uma força sobre o êmbolo e provocando um deslocamento do mesmo, fazendo então um trabalho. Nesse caso, obviamente, o acréscimo de energia interna é menor porque parte do calor recebido foi gasto na realização do trabalho. Então, segundo o princípio de conservação da energia, a variação de energia interna é igual ao calor fornecido ao sistema menos o trabalho feito por ele:

$$\Delta U = Q - W \quad (\text{Eq. 5})$$

Esta equação é chamada Primeira Lei da Termodinâmica, mas é simplesmente um enunciado do princípio de conservação da energia quando existe energia térmica envolvida no processo.

Nesta equação,  $Q$  é considerado positivo quando o calor é recebido pelo sistema e negativo quando é cedido enquanto que  $W$  é positivo quando o trabalho é realizado pelo sistema e negativo quando é realizado sobre o sistema.

Se o sistema sofre uma variação infinitesimal de estado, então apenas uma quantidade infinitesimal de calor  $dQ$  é absorvida ou cedida e apenas uma quantidade infinitesimal de trabalho  $dW$  é realizada, de modo que a variação da energia interna  $dU$  será também infinitesimal. Neste caso, a primeira lei tem a seguinte forma diferencial.

$$dU = dQ - dW \quad (\text{Eq. 6})$$

Nota importante: Para completar o estudo do assunto desta secção é indispensável a leitura das secções 22-6 e 22-7 do livro de texto (Halliday & Resnick, vol. I-2)

## A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

Como já vimos, o fato de que qualquer mudança espontânea (i.e., sem ganho ou perda de energia em relação à vizinhança) num sistema de partículas ocorre na direção do acréscimo de entropia e que a entropia será máxima quando for atingido o equilíbrio é conhecido como Segunda Lei da Termodinâmica. Exploremos um pouco mais o assunto:

É esta famosa lei que determina a direção do fluxo de calor. Dois corpos isolados que estão a diferentes temperaturas quando postos em contato acabarão por atingir a mesma temperatura de equilíbrio, i.e., passarão de uma distribuição mais ordenada (diferentes temperaturas) para uma menos ordenada (mesma temperatura) porém mais provável. Devido a esta lei, a vasta quantidade de energia térmica dos oceanos, por exemplo, não está disponível. Somente se fizemos com que esta energia flua para um outro corpo a temperatura mais baixa é que poderíamos aproveitá-la. Relacionado a isso, está a idéia de "morte térmica" do universo... tem sido argumentado que devido a aparente inviolabilidade da segunda lei da Termodinâmica o universo marcha inexoravelmente para um estado de máxima entropia no qual todos os corpos estariam num estado de energia mínima. Quando isso acontecesse, daqui há bilhões de anos, nada novo ou significativo poderia ocorrer no universo porque não haveria diferenças de energia (consequentemente, não haveria fluxo de ener

gia, não haveria energia disponível para a vida, por exemplo). Entretanto, por mais impressionante e depressivo que este prognóstico possa parecer ele é, na verdade, mera especulação. Sabemos tão pouco sobre o universo e o temos observado por um período de tempo tão pequeno que qualquer extrapolação do conhecimento que temos agora é simples especulação... É verdade que até agora a segunda lei da Termodinâmica nunca foi violada. Ela continua sendo uma generalização empírica, uma útil diretriz para futuras investigações científicas, mas ainda assim não é uma certeza mais absoluta do que a lei de conservação da matéria que era tão amplamente aceita há uma ou duas gerações atrás. (Ripley, J.A. Jr., The Elements and Structure of the Physical Sciences, p.p. 234-235)

Uma das características que distinguem a entropia de conceitos tais como energia, quantidade de movimento e outros que obedecem leis de conservação é que não existe um princípio de conservação da entropia. Na realidade, sucede o contrário. A entropia aumenta em cada transformação natural, caso se considerem todos os sistemas que participam da transformação. Já vimos exemplos disso, mas consideremos mais um: misturemos um litro de água a  $100^{\circ}\text{C}$  com um litro de água a  $0^{\circ}\text{C}$ . Após a mistura das águas quente e fria teremos 2 litros de água a uma temperatura de  $50^{\circ}\text{C}$ . Se calculássemos (faremos isso na terceira unidade deste estudo) a entropia do sistema antes e depois da mistura chegaríamos à conclusão de que a entropia da mistura é maior do que a soma das entropias das águas quente e fria separadamente. Houve, portanto, um aumento de entropia na transformação.

Na verdade, não é necessária a mistura física das

águas quente e fria para obter o estado de equilíbrio final. Poder-se-ia simplesmente permitir o fluxo de calor por condução ou por radiação da água quente à fria. O mesmo aumento de entropia resultaria.

Pode ocorrer que a entropia de um certo sistema que participa de uma transformação natural (a água quente, por exemplo) diminua, mas quando se adicionam todas as variações de entropia na transformação, os aumentos de entropia são sempre maiores, em valor absoluto, que os decréscimos. Somente em alguns casos especiais as variações positivas e negativas são iguais em módulo de modo que a entropia total permanece constante, de um modo geral há um aumento de entropia. Pode-se então formular um princípio geral, considerado parte da segunda lei da Termodinâmica, segundo o qual, em todas as transformações, a entropia aumenta ou permanece invariável. Ou seja, não existe transformação alguma na qual a entropia decresça.

O que significa, no entanto, esse aumento de entropia que acompanha qualquer transformação espontânea na natureza? A resposta, ou pelo menos uma resposta, é que ele representa uma medida da indisponibilidade da energia. Expliquemos: considere-mos de novo o exemplo da mistura da água quente e fria. Antes da mistura, poderíamos ter usado a água quente como a fonte a alta temperatura (fonte quente) e a água fria como a fonte a baixa temperatura (fonte fria) de uma máquina térmica\* e, durante

---

\* Máquina térmica é qualquer dispositivo que transforme calor em trabalho (ou vice-versa); este assunto será estudado na terceira unidade.

a transmissão do calor, da fonte quente à fria, poder-se-ia obter algum trabalho mecânico. Entretanto, uma vez que tenham sido misturadas as águas quente e fria e que ambas hajam atingido uma temperatura uniforme, perde-se por completo, esta oportunidade de converter calor em trabalho. A água morna jamais se desmisturará (ou melhor, é altamente improvável que isso aconteça) separando-se em uma parte quente e outra fria. Não há, no entanto, diminuição de energia quando as águas quente e fria se misturam, o que existe é uma diminuição da quantidade disponível de energia ou um aumento da parte não disponível de energia, significando tal expressão que uma dada quantidade de energia não mais poderá ser utilizada para conversão em trabalho. Logo, quando a entropia aumenta, passa-se a dispor de menos energia disponível para conversão em trabalho. A entropia pode então ser interpretada também como uma medida da indisponibilidade da energia.

A segunda lei da Termodinâmica pode também ser enunciada de várias outras maneiras, geralmente relacionadas a máquinas térmicas, porém todas são conseqüências diretas da formulação dessa lei em termos de entropia que é a mais geral. Assim sendo, deixaremos outras formulações da segunda lei para mais tarde. Por enquanto estamos discutindo apenas os aspectos mais gerais e inclusivos da Termodinâmica.

## CONCLUSÃO

Nesta unidade, procuramos dar-lhe uma visão geral do

estudo que você está iniciando. Primeiramente falamos um pouco de Física e situamos a Termodinâmica e a Teoria Cinética no contexto da Física. Depois, introduzimos os conceitos-chave para o estudo da Termodinâmica: temperatura, calor (energia) e entropia. A seguir, discutimos a primeira e a segunda leis da Termodinâmica. Tudo isso foi feito de uma maneira bem geral e introdutória porque acreditamos que sua aprendizagem será facilitada se você antes de entrar nos detalhes tiver uma visão do todo enfatizando apenas os conceitos e leis mais importantes.

Na próxima unidade, você estudará Teoria Cinética, a qual constará, essencialmente, de uma interpretação dos conceitos de temperatura, calor e entropia do ponto de vista da Mecânica. Obviamente, alguns novos conceitos serão introduzidos, mas basicamente o que se procurará fazer é diferenciar ainda mais os três conceitos-chave introduzidos nesta primeira unidade.

Finalmente, na terceira unidade entraremos nas aplicações destes conceitos e das leis da Termodinâmica. Isto é, entraremos nos detalhes, nos cálculos. Deixamos esta parte para o fim porque acreditamos que antes de se aplicar conceitos e leis físicas é preciso tê-los bem definidos, diferenciados e organizados em nossa mente. Caso contrário ficamos a fazer cálculos sem saber porque e a obter resultados que não significam nada para nós. (Você já não passou pela experiência de ficar aplicando fórmulas e mais fórmulas sem saber por que ou sem saber o que elas significam?)

## BIBLIOGRAFIA

Halliday e Resnick, R., Física, vol. I-2, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio, 1973.

Ripley, J.A. Jr., The Elements and Structure of the Physical Sciences.

Marion, J.B., Physics and the Physical Universe, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

Cooper, L.N., An Introduction to the Meaning and Structure of Physics, Harper & Row Publishers, New York, 1968.

Sears, F.W., Física, vol. I, Ao Livro Técnico Ltda, Rio, 1958.

Feynman, R., Leighton, R.B., and Sands, M., The Feynman Lectures on Physics, vol. II, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965.

Tilley, D.E. and Thumm, W., College Physics, Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, Cal., 1971.

Alonso, M. and Finn, E.J., Fundamental University Physics, vol.III, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

Armstrong, R.L. and King, J.D., Mechanics, Waves and Thermal Physics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.



INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103) - 1978

## Unidade II

### TEORIA CINÉTICA DOS GASES

#### I - INTRODUÇÃO

Nesta unidade abordaremos os conceitos de temperatura calor e entropia desde um ponto de vista microscópico. (Lembre que na unidade anterior eles foram introduzidos sob um ponto de vista macroscópico). Para atingir esse objetivo, primeiramente desenvolveremos um modelo microscópico (isto é, um modelo que leve em conta que a matéria é formada por átomos e moléculas) para um gás ideal. Depois aplicaremos a mecânica Newtoniana ao agregado de partículas que compõem o gás para, finalmente, chegarmos à interpretação microscópica dos conceitos de temperatura, calor e entropia. Basicamente, essa é a essência da Unidade, porém, ao longo dela alguns novos conceitos serão introduzidos e, sobretudo, uma importante equação - a equação de estado dos gases ideais - será também introduzida.

Observe que esta unidade representa, de um modo geral, um detalhamento da primeira, pois os mesmos conceitos e leis serão aqui discutidos de forma mais específica, mais minuciosa. Porém em relação à próxima unidade esta unidade é ainda um pouco geral porque não entra em aplicações mais práticas. A aplicação

dos conceitos e leis fundamentais da Termodinâmica será objeto da terceira unidade, com a qual encerraremos o estudo dos fenômenos térmicos.

## II - OBJETIVOS

Ao término desta unidade você deverá ser capaz de:

1. Definir gás ideal do ponto de vista macroscópico (ou seja, por meio de uma equação de estado) e descrevê-lo do ponto de vista microscópico, segundo o modelo da Teoria Cinética (ou seja, enunciar e explicar as hipóteses básicas do modelo).
2. Interpretar do ponto de vista microscópico a pressão exercida por um gás ideal, especificando de que fatores ela depende.
3. Interpretar do ponto de vista microscópico a temperatura de um gás ideal e comparar essa interpretação com a obtida do ponto de vista macroscópico.
4. Relacionar a interpretação microscópica de temperatura com o trabalho realizado sobre um sistema isolado e com a velocidade das moléculas de um gás.
5. Interpretar do ponto de vista microscópico (i.e., à luz do modelo de um gás ideal) o conceito de calor e mostrar que essa interpretação é consistente com a interpretação macroscópica.
6. Especificar sob que condições se pode obter trabalho a partir da energia térmica e relacionar isso com a segunda lei da Termodinâmica.

7. Interpretar do ponto de vista microscópico o conceito de entropia e mostrar que essa interpretação é consistente com a interpretação macroscópica.
8. Estabelecer a relação entre a energia interna e a temperatura de um gás ideal monoatômico (gás perfeito), deduzindo a partir desta relação e da primeira lei da Termodinâmica as expressões de  $C_v$  e  $C_p$  (capacidades térmicas molares a volume constante e a pressão constante respectivamente).
9. Explicar o que se entende por equipartição de energia e aplicá-la no cálculo de calores específicos molares (capacidades térmicas molares) de gases ideais, conhecido o número de graus de liberdade.

### III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

- Leia com atenção o texto anexo e as secções do Halliday & Resnick recomendadas ao seu final. Esclareça suas dúvidas com um monitor ou com o professor.

- Procure se auto testar para ver se é capaz de fazer o que se espera de você nos objetivos desta unidade.

- As seguintes questões de estudo poderão auxiliá-lo nessa auto-testagem:

1. Procure explicar com suas próprias palavras as hipóteses básicas do modelo microscópico proposto para o gás ideal.
2. Tente reproduzir o cálculo da pressão consultando o texto apenas quando necessário. Interprete fisicamente a expressão final da pressão.

3. Utilize suas próprias palavras para interpretar do ponto de vista microscópico os conceitos de temperatura, calor e entropia. Essas interpretações são coerentes com as interpretações macroscópicas? Explique.
4. Qual é o problema em utilizar a energia térmica do oceano para realizar trabalho?
5. Explique por que a realização de um trabalho sobre um gás contido num recipiente isolado provoca um aumento na temperatura do gás.

- Em relação aos objetivos 8 e 9 sugere-se o seguinte:

- a. Leia as secções 23-7 e 8.
- b. Responda a questão 23-19 (obs.: Capacidade Térmica Molar = Calor Específico Molar).
- c. Reproduza separadamente para gases monoatômicos, diatômicos e poliatômicos os cálculos de  $C_p$ ,  $C_v$  e  $\gamma$  feitos na secção 23-8 a partir da equipartição de energia.
- d. Se um gás tiver 9 graus de liberdade, determine  $C_v$  e  $C_p$ .
- e. Resolva os problemas 23-26 e 30 (Respostas: 30:220 cal, 70%; 26:  $3,1 \times 10^3$  J/kg<sup>0</sup>K)

- Quando você se sentir suficientemente preparado em relação aos objetivos desta unidade apresente-se para fazer o teste da unidade.

## Unidade II

## TEORIA CINÉTICA DOS GASES

## I - INTRODUÇÃO

Como dissemos na unidade anterior, a Mecânica Estatística, lidando com a mesma área da Termodinâmica, pressupõe a existência de átomos e moléculas e aplica as leis da Mecânica aos átomos e moléculas que constituem o sistema. No nível chamado Teoria Cinética, a Mecânica Estatística utiliza técnicas matemáticas relativamente mais simples para calcular médias como, por exemplo, a energia cinética média das moléculas de um gás. A Teoria Cinética pode ser aplicada não só a gases como também a sólidos e líquidos, porém no caso de gases as interações entre átomos são muito mais fracas do que nos líquidos e sólidos, o que simplifica grandemente o tratamento matemático do problema.

Na unidade anterior, enfatizamos três conceitos-chave: temperatura, calor (energia térmica) e entropia. Esses conceitos foram introduzidos sem muito rigorismo, de um ponto de vista macroscópico, lançando mão de exemplos intuitivos e procurando relacioná-los com o que você já sabia. Dissemos, no entanto, que na segunda unidade procuraríamos diferenciar melhor tais conceitos através de uma interpretação mecânica e microscópica dos mesmos. Precisamente isso é o que faremos nesta unidade:

Construiremos um modelo mecânico, palpável, com o qual possamos interpretar os conceitos de temperatura, calor e entropia.

pia. Especificamente, proporemos um modelo para um gás ideal e aplicaremos as leis de Newton para determinar o comportamento do agregado de moléculas que compõe o gás. Isto é, construiremos um modelo de um gás e procuraremos, usando somente conceitos mecânicos (massa, espaço, tempo e as leis de movimento), obter quantidades que possam ser interpretadas como temperatura, calor e entropia.

Passaremos, então, agora a desenvolver o modelo do gás; feito isso, usaremos esse modelo para interpretar os conceitos de temperatura, calor e entropia. No desenvolvimento desse modelo, você verá que outros conceitos, tais como pressão e volume, são também importantes para o estudo dos fenômenos térmicos. Além disso, uma equação muito importante será introduzida: a equação de estado dos gases ideais.

## II - DEFINIÇÃO MACROSCÓPICA DE UM GÁS IDEAL: Equação de Estado

Já dissemos que nos sólidos e líquidos as interações inter-atômicas são muito complexas e por isso nos restringiremos aos gases. Entretanto, em muitos casos, os gases também apresentam interações complexas e devido a isso temos que distinguir entre gás ideal e gás real. Fundamentalmente, um gás ideal é aquele no qual as forças intermoleculares são desprezíveis, de modo que as interações entre as moléculas são devidas apenas aos eventuais choques elásticos entre as mesmas. Por isso, nos concentraremos no modelo de um gás ideal. Além da simplicidade, os resultados obtidos com esse modelo fornecem uma boa aproximação

para gases reais. Gases reais sob determinadas condições comportam-se quase que como gases ideais.

Podemos estudar um gás ideal sob o ponto de vista macroscópico como do ponto de vista microscópico. Passaremos agora à definição macroscópica de um gás ideal:

Seja um recipiente de volume  $V$ , contendo uma quantidade de gás de massa  $m$ . Define-se massa específica do gás, pela relação

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

A experiência mostra que se a massa específica for suficientemente baixa (valor de  $V$  muito grande comparado com  $m$ ), todos os gases, qualquer que seja sua composição química, tendem a apresentar uma certa relação simples entre as variáveis termodinâmicas  $p$ ,  $V$ ,  $T$  (pressão, volume e temperatura).

Essa relação é uma consequência de duas leis experimentais:

1. Lei de Boyle: Para uma dada massa de gás, mantida a temperatura constante, a pressão varia inversamente com o volume.
2. Lei de Charles/Gay-Lussac: Para uma dada massa de gás, mantida a pressão constante, o volume varia diretamente com a temperatura.

Esses dois resultados experimentais podem ser resumidos na relação

$$pV = \mu RT \quad , \quad (2)$$

onde  $\mu$  é a massa do gás em moles e  $R$  é uma constante universal chamada constante dos gases

$$R = 8,314 \text{ Joule/mol}^{\circ}\text{K} = 1,986 \text{ cal/mol}^{\circ}\text{K} ,$$

Esta equação é chamada equação de estado de um gás ideal; definimos um gás ideal, do ponto de vista macroscópico, como aquele que obedece a esta equação sob quaisquer condições. Obviamente, tal gás não existe na realidade, mas é um conceito útil devido ao fato de que a densidades suficientemente baixas, o comportamento de todos os gases reais se aproxima do comportamento do gás ideal.

Nos exercícios desta unidade e na unidade seguinte, voltaremos a tratar esta relação com maior profundidade. Por enquanto, o importante, é sabermos que  $PV$  é proporcional a  $T$ , e que a constante de proporcionalidades é  $\mu R$ .

### III - DEFINIÇÃO MICROSCÓPICA DE UM GÁS IDEAL: Teoria Cinética

Como já vimos, a parte da Física que estudo o comportamento dos gases (e outros tipos de material) nos processos em que há troca de calor, sob o ponto de vista macroscópico, denomina-se Termodinâmica. A equação de estado apresentada na secção anterior é uma das relações mais fundamentais da Termodinâmica. Posteriormente veremos algumas aplicações dessa relação.

Nossa tarefa agora, é tratar o gás ideal sob o ponto de vista microscópico. Isto significa que em princípio deveria



mos aplicar as leis de mecânica a cada molécula do gás e então, descrever o comportamento do sistema. No entanto, esse tipo de abordagem é impossível, dado o grande número de moléculas (de ordem  $10^{23}$ !). Mas esse obstáculo não é motivo de desespero, porque o que nos interessa são os efeitos do movimento molecular, as grandezas macroscópicas. Essas grandezas são resultados médios do comportamento de todas as moléculas. Por exemplo, quando estamos interessados numa grandeza relacionada com a velocidade das moléculas o que nos interessa é a velocidade média de todas as moléculas.

Pelo fato de usar as leis da mecânica e da estatística, essa parte da Física (que lida com a mesma área da ciência que a Termodinâmica, mas que leva em consideração a existência de átomos e moléculas denomina-se Mecânica Estatística.

Novamente deveremos definir o que entendemos por gás ideal. No caso macroscópico, a definição estava ligada à relação entre a massa do gás e o volume do recipiente e à equação de estado. Agora, deveremos vincular nossa definição aos aspectos microscópicos. Para nós, um gás ideal é aquele que satisfaz às seguintes condições:

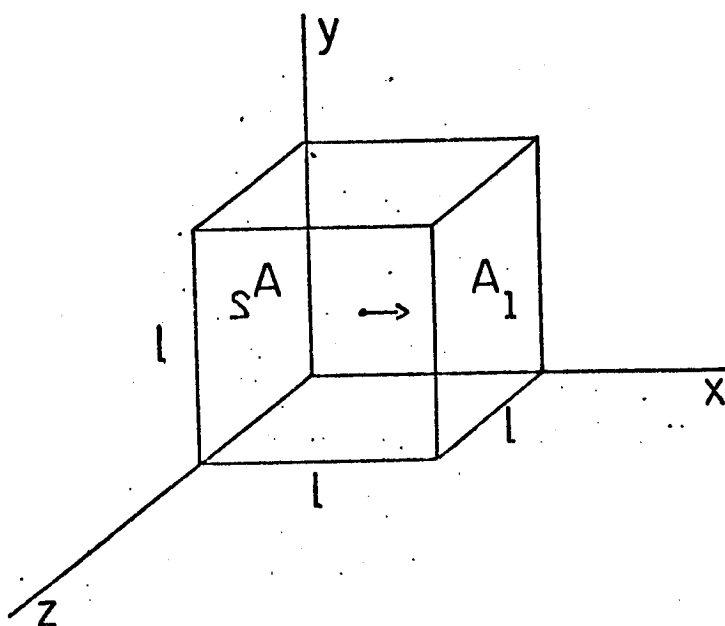
1. As moléculas são dotadas de movimento desordenado e obedecem às leis da Newton. As moléculas podem mover-se em todas as direções, com várias velocidades. Para podermos determinar as características de seus movimentos, supomos que as leis de Newton sejam válidas no nível microscópico. Esta hipótese será aceita ou rejeitada, conforme os fatos experimentais previstos com base nelas sejam ou não corretos.

2. O número total de moléculas do gás é grande. O sentido, a direção e o módulo da velocidade das moléculas podem sofrer mudanças bruscas devido às colisões com outras moléculas e com as paredes do recipiente. Por causa das colisões, as trajetórias das moléculas serão em ziguezague. Entretanto, por causa do número tão elevado de moléculas, supomos que a ocorrência de inúmeras colisões manterá a distribuição de velocidades, bem como o movimento desordenado das moléculas.
3. O volume das moléculas é uma fração desprezível do volume ocupado pelo gás. Apesar de existir um grande número de moléculas, elas são extremamente pequenas. Sabemos que o volume de um gás pode variar grandemente sem muita dificuldade e que, se o gás for condensado, o volume ocupado pelo líquido pode ser milhares de vezes menor do que o volume do gás. Logo, essa hipótese é plausível. (Investigações posteriores relativas ao tamanho das moléculas nos mostraram a necessidade de modificar essa hipótese (eq. de Van der Waals) no caso de densidades elevadas).
4. As forças que atuam sobre as moléculas são desprezíveis, exceto durante uma colisão. Como consequência dessa hipótese, o movimento das moléculas é retilíneo e uniforme entre duas colisões. A distância média entre as moléculas é muito grande comparada a seus tamanhos, devido à suposição de que as moléculas são muito pequenas. Logo, o alcance das forças moleculares é suposto comparável ao tamanho molecular.
5. As colisões são elásticas e de duração desprezível. O momento linear (ou momentum), bem como a energia cinética, são con

servados nas colisões entre duas moléculas ou entre as moléculas e as paredes do recipiente. O tempo que decorre entre duas colisões sucessivas é muito maior do que o tempo de duração de uma colisão. Como conseqüência, tem-se que a energia cinética, convertida em energia potencial durante a colisão, seja de novo disponível como energia cinética, em intervalos de tempo tão breves, que podemos ignorar inteiramente essa transformação.

#### IV - A PRESSÃO DE UM GÁS (\*)

Vamos agora calcular a pressão de um gás, sob o ponto de vista microscópico, ou seja, a partir da teoria cinética. Para simplificar consideraremos o gás em um recipiente cúbico de paredes perfeitamente elásticas.



De acordo com a nossa definição de gás ideal, nenhuma molécula exerce força sobre outra, a única interação entre elas é devida aos eventuais choques. As moléculas se movimentam de uma forma caótica, em ziguezague, e de vez em quando chocam-se com outra molécula ou com as paredes do recipiente, mudando a direção do seu movimento. Sempre que uma molécula choca-se com uma parede do recipiente, ela transfere uma certa quantidade do seu momento linear. De acordo com a segunda lei de Newton, a quantidade de momento linear transferida para um corpo na unidade de tempo, é justamente a força exercida naquele corpo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3)$$

Por outro lado, a força por unidade de área é a pressão exercida sobre a superfície do corpo.

$$\text{pressão} = p = \frac{\text{FORÇA}}{\text{ÁREA}} = \frac{F}{A} \quad (4)$$

Então, tudo que temos a fazer, é calcular a quantidade de momento linear transferido para uma parede, por todas as moléculas, na unidade de tempo. Isso nos dá a força exercida pelas moléculas na parede. Dividindo a força pela área da parede, teremos a pressão exercida pelo gás.

Para simplificar o cálculo, podemos proceder da seguinte forma: calculamos a pressão exercida por uma molécula qualquer. O resultado final será a soma das pressões de todas as moléculas.

Para simplificar ainda mais o cálculo, faremos a análise do movimento apenas na direção  $X$ .

Se uma molécula colidir com a parede  $A_1$ , sua componente  $v_x$  mudará de sinal; a variação  $\Delta p$  do momento linear será

$$\Delta p_1 = p_f - p_i = mv_{x1} - (-mv_{x1}) = -2mv_{x1} \quad (5)$$

Devido ao fato que o momento linear se conserva, a quantidade de momento linear transferida à parede será  $2mv_{x1}$ .

Podemos descrever o movimento da molécula, qualitativamente: ela choca-se com  $A_1$  e dirige-se para  $A_2$ . No caminho, ela pode colidir com outras moléculas, mas vamos supor que isso não ocorra (a essa altura, já se percebe porque dissemos na introdução que a nossa análise era bastante simplificada). Nesse caso, após colidir com  $A_2$ , retorna em direção a  $A_1$ . Qual o tempo necessário para esse trajeto de ida e volta? Ou seja, qual o tempo entre duas colisões na parede  $A_1$ ?

$$X = vt \Rightarrow 2\ell = v_{x1} t \Rightarrow t = \frac{2\ell}{v_{x1}} \quad (6)$$

Então, o número de colisões com  $A_1$  por unidade de tempo, será  $\frac{v_{x1}}{2\ell}$ .

Em uma colisão, a molécula transfere  $2mv_x$  para a parede. Em  $\frac{v_{x1}}{2\ell}$  colisões, a quantidade de momento linear transferida será

$$2mv_{x1} \frac{v_{x1}}{2\ell} = \frac{mv_{x1}^2}{\ell}$$

$\frac{mv_x^2}{\ell}$  é a quantidade de momento linear transferida à parede, por unidade de tempo,  $\frac{dp}{dt}$ . Ou seja, a força exercitada pela molécula sobre a parede.

A pressão será

$$p_1 = \frac{mv_x^2}{\ell} \cdot \frac{1}{\ell^2} = \frac{mv_x^2}{\ell^3} \quad (7)$$

A pressão total será

$$\begin{aligned} p &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \frac{m}{\ell^3} (v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + \dots + v_{xn}^2) = \\ &= \frac{m}{\ell^3} N \left( \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xn}^2}{N} \right) = \frac{Nm}{\ell^3} \frac{\sum v_{xi}^2}{N} \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $N$  é o número de moléculas no recipiente.

$n = \frac{N}{\ell^3}$  é a densidade de moléculas, o número de moléculas por unidade de volume e  $\frac{\sum v_{xi}^2}{N}$  é o valor médio de  $v_x^2$ , representado por  $\overline{v_x^2}$  ou  $\langle v_x^2 \rangle$ .  $p = mn\overline{v_x^2} = \rho \overline{v_x^2}$ , onde  $\rho = mn$  é a massa por unidade de volume, isto é, a massa específica ou densidade.

Para qualquer moléculas tem-se  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Como as partículas (ou moléculas) se movem desordenadamente, sem nenhuma direção preferencial, os valores médios  $\overline{v_x^2}$ ,  $\overline{v_y^2}$  e  $\overline{v_z^2}$  são iguais

$$\begin{aligned} \overline{v_x^2} &= \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \\ \overline{v^2} &= \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \\ p &= \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Apesar da simplicidade utilizada no cálculo dessa ex pressão, como a eliminação dos choques entre as moléculas, o re sultado seria o mesmo se considerássemos tais colisões, por cau-  
sa da conservação do momento linear e da energia cinética nos choques elásticos.

A raiz quadrada de  $\overline{v^2}$  é chamada velocidade quadrática média; é uma espécie de média da velocidade molecular.

#### V - A TEMPERATURA DE UM GÁS IDEAL

Na unidade anterior foi apresentada uma noção geral do conceito de temperatura. Sob o ponto de vista macroscópico, ele é uma grandeza que pode ser medida com o auxílio de um ter mômetro. Observa-se também que se dois corpos estão em equilí brio térmico com um terceiro, estão em equilíbrio entre si. Es ta afirmação é o teor da lei zero da termodinâmica. Por outro lado, a diferença de temperatura entre dois corpos indica o sen tido do fluxo de calor. Quando dois corpos de temperaturas diferentes são colocados em contato, o calor passa do corpo de tem peratura maior para o de temperatura menor.

Sob o ponto de vista microscópico, a temperatura está relacionada com a energia cinética média das moléculas do gás.

Essa energia cinética média é devida ao movimento de translação das moléculas em relação ao centro de massa do gás. Isto significa que a temperatura do gás não é modificada pelo mo vimento do centro de massa.

Neste caso, o equilíbrio térmico entre dois corpos é atingido quando as energias cinéticas médias de suas moléculas forem iguais.

Vejamos agora como escrever a temperatura em função da energia cinética média das moléculas.

Se multiplicarmos pelo volume  $V$  ambos os membros da (Eq. 9), obtemos

$$pV = \frac{1}{3} \rho V \overline{v^2}$$

$\rho V$  = massa total do gás =  $\mu M$ , onde  $\mu$  é a massa em moles e  $M$  o peso molecular.

Então,

$$pV = \frac{1}{3} \mu M \overline{v^2} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \mu M \overline{v^2} \right) \quad (10)$$

$\frac{1}{2} \mu M \overline{v^2}$  é a energia cinética total de translação das moléculas, pois

$$\begin{aligned} \text{Energia cinética total} &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m v_n^2 = \\ &= \frac{1}{2} m N \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N} = \frac{1}{2} m N \overline{v^2} = \frac{1}{2} \mu M \overline{v^2} . \end{aligned}$$

A equação de estado de um gás ideal (Eq. 2), é

$$pV = \mu RT \quad (\text{Eq. 2})$$

Comparando as equações 2 e 10, tem-se que



$$\mu RT = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \overline{\mu M v^2} \right)$$

$$T = \frac{2}{3R} \left( \frac{1}{2} \overline{M v^2} \right) \quad (11)$$

OU

$$\left( \frac{3}{2} RT = \frac{1}{2} \overline{M v^2} \right)$$

Na relação (11) temos a temperatura como função da energia cinética total de translação por mol de um gás ideal.

Nós sabemos que o número de Avogadro,  $N_0$ , é o número de moléculas por mol. Assim,  $\frac{M}{N_0} = m$  é a massa de uma molécula, e podemos escrever 11 de outra forma

$$T = \frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{1}{N_0} N_0 \left( \frac{1}{2} \overline{M v^2} \right) = \frac{2}{3} \frac{1}{R} \left( \frac{1}{2} \frac{M}{N_0} \overline{v^2} \right)$$

$\frac{R}{N_0}$  é uma constante denominada constante de Boltzmann,  $K$ . Podemos dizer que  $K$  é a constante do gás por molécula.

Finalmente teremos

$$T = \frac{2}{3K} \left( \frac{1}{2} \overline{m v^2} \right) \implies \boxed{\frac{3}{2} KT = \frac{1}{2} \overline{m v^2}} \quad (12)$$

## VI - INTERPRETAÇÃO MECÂNICA DOS CONCEITOS DE TEMPERATURA, CALOR E ENTROPIA

Conforme foi proposto no início desta unidade, após o desenvolvimento de um modelo para um gás ideal usaríamos este modelo para interpretar mecânica e microscopicamente os conceitos de temperatura, calor e entropia. Na construção do modelo, definimos gás ideal do ponto de vista macroscópico (equação de

estado) e microscópico. Depois calculamos a pressão exercida por um gás ideal e finalmente obtivemos uma expressão para a temperatura. Esta expressão (Eq. 12) foi a seguinte:

$$T = \frac{2}{3K} \cdot (\text{energia cinética média das moléculas do gás})$$

Esta expressão nos diz que a temperatura do gás é proporcional à energia cinética média das moléculas do gás. Podemos dizer que esta equação é uma definição microscópica e mecânica de temperatura: microscópica porque foi obtida com base na teoria cinética dos gases que é uma teoria microscópica, mecânica porque relaciona a temperatura a conceitos da Mecânica (massa, espaço e tempo). Observe que essa definição não contradiz em nada a interpretação macroscópica de temperatura dada na unidade anterior. Naquela oportunidade dissemos que a temperatura de um sistema é uma propriedade que, eventualmente, atinge o mesmo valor que a de outros sistemas, quando todos eles são colocados em contato. Dissemos que operacionalmente temperatura é a quantidade medida por um termômetro; dissemos também que a temperatura é uma propriedade que determina a direção do fluxo de calor entre dois corpos. Todas essas noções macroscópicas de temperatura não entram em conflito com a interpretação microscópica dada a esse conceito nesta unidade.

Por exemplo, quando dois ou mais sistemas atingem a mesma temperatura (equilíbrio térmico) isso significa que suas moléculas têm a mesma energia cinética média. Se um sistema está a uma temperatura mais elevada do que a de outro isso significa que a energia cinética média de suas moléculas é maior do

que a do outro, e assim por diante.

O fato de que a temperatura de um gás é proporcional à energia cinética média de suas moléculas é também consistente com a observação de que quando o trabalho é feito sobre um gás, contido num recipiente isolado, sua temperatura aumenta e o acréscimo é proporcional à quantidade de trabalho feito sobre o gás. Uma vez que o trabalho é feito sobre o sistema de partículas microscópicas que compõem o gás, este trabalho só pode resultar em aumento da energia cinética média dessas unidades microscópicas. Esse aumento de energia cinética é igual ao trabalho feito sobre o gás. Porém, aumentar a energia cinética média significa aumentar a temperatura, logo, o acréscimo de temperatura será proporcional ao trabalho feito sobre o gás.

Observe que neste exemplo estamos essencialmente lidando com a primeira lei da Termodinâmica para o caso em que o sistema não troca calor com o meio exterior:

$\Delta U = Q - W$  é a expressão da 1ª lei; nesse caso  $Q = 0$  e  $W$  é negativo porque é realizado sobre o sistema, logo  $\Delta U = W$  ou seja, o trabalho feito sobre o sistema é igual ao acréscimo de energia interna do sistema, o que por sua vez implica em acréscimo de temperatura porque esta é proporcional à energia cinética média das moléculas cujo aumento decorre do aumento de energia interna.

Outra consequência da definição microscópica de temperatura está relacionada com a velocidade das moléculas de um gás. Da equação (12) tem-se que:

$$\overline{v^2} = \frac{3KT}{m} \quad (13)$$

onde  $v_{qm} = \sqrt{v^2}$  é chamada velocidade quadrática média. Considerando dois gases, compostos de moléculas de massas diferentes, à mesma temperatura, segue-se da expressão acima que as moléculas do gás mais pesado movem-se em média mais vagarosamente do que as do gás mais leve uma vez que a energia cinética média é a mesma.

A equação 12 nos permite também definir uma escala absoluta de temperaturas, i.e., nos prevê uma escala com um zero natural e não arbitrário:

$$T = \frac{2}{3K} \left( \frac{1}{2} \overline{mv^2} \right)$$

Quando a energia cinética média das moléculas for zero, i.e., quando as moléculas do gás estiverem em completo repouso e, conseqüentemente, não houver nenhum movimento aleatório de moléculas, a temperatura, tal como definida acima, estará no zero absoluto. (Esta é uma interpretação clássica, do ponto de vista da Mecânica Quântica, o zero absoluto não é mais associado à ausência de todo e qualquer movimento das moléculas, o qual nunca ocorre em sistemas quânticos, e sim com o estado energético mais baixo possível do sistema. Para um sistema clássico esse estado mais baixo é o de ausência total de movimento).

Passemos agora ao conceito de calor. Na unidade anterior este conceito foi introduzido, do ponto de vista macroscópico, como sendo uma forma de energia, a energia térmica. Vamos agora abordá-lo do ponto de vista microscópico. Obviamente esta abordagem leva em consideração o fato de que a matéria é consti

tuída de moléculas e estas de átomos. Na verdade, o fato de que a matéria é constituída de átomos é tão importante, que segundo Feynman\*, se houvesse um cataclisma e todo conhecimento científico fosse perdido, com exceção de uma sentença que seria deixada para as gerações futuras, essa sentença haveria de ser: "To das as coisas são feitas de átomos - pequenas partículas que se movem continuamente, exercendo atrações umas sobre as outras quando estão próximas, mas repelindo-se quando comprimidas entre si".

Se tivéssemos um super-microscópico, que nos capacitasse a observar o interior da matéria (se isso fosse possível!) veríamos pequenos corpos, as moléculas, num incessante movimento de ziguezague, como nos gases, ou num contínuo movimento vibratório, como nos sólidos. Justamente esse movimento molecular é o que representamos pelo conceito de calor. Quando maior o movimento das moléculas, quanto maior a velocidade, quanto maior a energia cinética das moléculas (maior temperatura!) maior será o calor, ou energia térmica do sistema. Invertendo a ordem das palavras, quanto maior a temperatura, maior energia cinética, maior movimento e, conseqüentemente, maior será a energia térmica.

Consideremos um cristal de gelo. Apesar de que existe uma estrutura cristalina definida, i.e., os átomos tem posições definidas no cristal, eles não estão parados, eles estão vibrando "no lugar". A medida que aumentamos a temperatura, eles vi

---

\* R.P.Feynman, The Feynman Lectures on Physics, vol. I, p. 1-2

bram com amplitudes cada vez maiores até que "saem do lugar" e a "estrutura começa a desmoronar". A isso chamamos fusão. O gelo passa então para o estado líquido sob a forma de água. Aumentando-se continuamente a temperatura da água chega-se a um ponto em que ela começa a se transformar em vapor. Isto é, aumentando-se a temperatura aumenta-se a energia térmica da água e isso leva à evaporação. Sob o ponto de vista microscópico, como isso funciona? O vapor que se forma é resultante da liberação de moléculas de água. Na temperatura ambiente isso não ocorre (ou ocorre em pequena escala) porque as forças de atração entre as moléculas são relativamente intensas. Porém, quando se aumenta a temperatura, aumenta-se a energia cinética média das moléculas, elas se movimentam muito mais e chega-se a um ponto em que muitas delas conseguem vencer as forças de atração e abandonam o líquido formando o vapor.

Observe que a interpretação microscópica e mecânica de calor em termos de movimento molecular é consistente com a definição macroscópica dada na unidade anterior. Naquela oportunidade definimos calor como energia em trânsito de um sistema a outro, devido a diferença de temperatura entre eles. Consideremos, então dois gases em temperaturas diferentes. Se as temperaturas são diferentes isso significa que suas moléculas estão com energias cinéticas médias diferentes. Colocando esses sistemas (gases) em contato haverá uma transferência de energia cinética das moléculas mais energéticas (maior temperatura) para as menos energéticas (menor temperatura) até que todas tenham a mesma energia cinética média (temperatura de equilíbrio) atingindo-se,

assim, o equilíbrio térmico. Há, portanto, uma transferência de energia de um sistema para o outro devido a diferença de temperaturas. A energia em trânsito nessa situação é chamada de calor ou energia térmica.

Na mesma oportunidade em que definimos calor como energia em trânsito devido a diferença de temperaturas, distinguimos entre calor e trabalho definindo este como sendo energia em trânsito em processos nos quais a transferência de energia não seja devida a diferença de temperatura. Mostramos também que é possível obter-se calor a partir da realização de um trabalho (experiência de Joule). Agora, no entanto, que estamos discutindo o conceito de calor do ponto de vista cinético (microscópico) podemos perguntar: Quando se pode obter trabalho a partir de calor?\*

Já nos referimos ao fato de que um trabalho realizado sobre um gás contido num recipiente isolado é convertido em energia cinética das moléculas do gás, aumentando a temperatura do mesmo. Pode-se inverter o processo permitindo que um corpo quente se resfrie e converta energia térmica em trabalho? Energia por definição é capacidade de realizar trabalho, logo, em princípio, deve ser possível obter trabalho a partir da energia térmica. Em que circunstâncias então?

Por exemplo, uma barra de ferro quente pode realizar trabalho: se jogarmos esta barra numa certa quantidade de água,

---

\* Adaptado de "An Introduction to the Meaning and Structure of Physics" por L.N.Cooper.

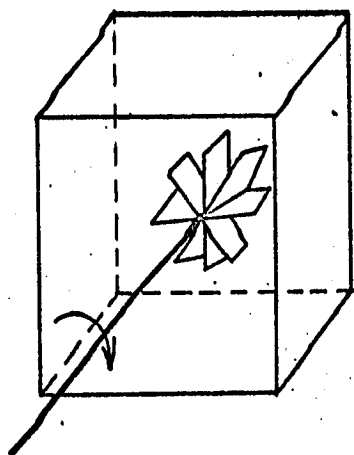
parte dessa água irá ferver e produzir vapor que pode ser usado para acionar uma máquina térmica a vapor. Por outro lado, por que não é possível, no verão, extrair um pouco da energia térmica da atmosfera e usar essa energia para realizar um trabalho útil, resfriando assim a atmosfera deixando-a mais agradável?

Voltemos ao nosso modelo de um gás ideal. A energia térmica do gás é devida ao movimento caótico, aleatório, das moléculas. A fim de poder usar essa energia para a realização de um trabalho, precisamos de alguma maneira converter esse movimento aleatório em movimento organizado. Uma maneira de se conseguir isso é dispor de uma grande quantidade de certo material (chamemos de reservatório) em uma temperatura muito mais baixa do que a temperatura da substância da qual estamos tentando obter trabalho. Então (tal como no caso da barra de ferro quente jogada na água fria) pode-se obter trabalho a partir da substância quente enquanto ela esfria e o reservatório aquece.

Suponha, no entanto, que (tal como no caso da atmosfera) não existe um enorme reservatório a uma temperatura muito abaixo da temperatura da atmosfera. Como poderíamos obter trabalho a partir da energia térmica do gás? Considere o arranjo mostrado na figura abaixo. Uma roda de pás é colocada dentro de um gás de tal modo que possa girar em torno de um eixo. Se as moléculas do gás cooperassem e batessem nas pás de um lado só, elas poderiam fazer a roda girar. Isto é, poderiam fazer um trabalho e, conseqüentemente o gás esfriaria. (Uma roda d'água funciona assim, mas o movimento da água é organizado). Entretanto, as moléculas não cooperam. Elas bombardeiam as pás de todos os



lados e a roda fica imóvel.



Poder-se-ia tentar melhorar o arranjo usando um dispositivo que fizesse com que a roda girasse num só sentido, mas o dispositivo acabaria aquecendo tanto que dentro de pouco tempo não mais faria com que a roda girasse num só sentido. O fato é que as partículas não se organizam por si mesmas (ou pelo menos isso é altamente improvável) de tal modo que possamos obter trabalho a partir de seu movimento aleatório, a menos que tenhamos um reservatório com partículas cujo movimento seja muito menos intenso (isto é, a uma temperatura mais baixa).

Tal fato está implícito na segunda lei da Termodinâmica e intimamente relacionado com o conceito de entropia. Este conceito como já foi visto na unidade anterior está relacionado com o grau de desordem do sistema considerado. Consideremos o sistema formado por dois reservatórios, um quente e o outro frio. Existe, então, uma certa ordem inicial, isto é, a energia cinética média das moléculas de cada reservatório é bem definida e diferente da do outro. Colocando os reservatórios em contato haverá um fluxo de calor entre os dois e poderemos usar esse calor para realizar trabalho. Mas esse fluxo de calor é uma transforma-

ção natural que ocorre no sistema, a qual, de acordo com a segunda lei da Termodinâmica, ocorre na direção do aumento da entropia. Aumento de entropia significa maior desordem no sistema (mesma temperatura) em relação a ordem inicial (diferentes temperaturas). Ao atingir-se o equilíbrio térmico (entropia máxima) entre os reservatórios volta-se a situação de um único reservatório do qual não se pode obter trabalho espontaneamente.

Portanto, a possibilidade ou não de se obter trabalho a partir da energia térmica está relacionada com a segunda lei da Termodinâmica e com o conceito de entropia. Vamos agora examinar esse conceito do ponto de vista microscópico. Antes porém devemos esclarecer melhor o que significa, nesse contexto, ordem e desordem.

Suponha que dividamos o espaço em pequenos elementos de volume. Se nós tivermos um certo número de "moléculas brancas" e "moléculas pretas", de quantos modos podemos distribuí-las entre os elementos de volume, de modo que as "brancas" fiquem de um lado e as "pretas" do outro? Por outro lado, quantos modos poderíamos distribuí-las, sem nenhuma restrição do tipo "quem vai para onde", i.e., qualquer uma pode ir em qualquer lugar? Obviamente existem muito mais modos de distribuir as moléculas no segundo caso. Quer dizer, é muito mais fácil distribuir as moléculas, de modo que qualquer uma ocupe qualquer lugar, do que separá-las em duas regiões, cada uma delas contendo moléculas de apenas um tipo. Repetindo, existem muito mais formas, ou modos, de distribuir as moléculas "à vontade", do que com a condição de separar as "brancas" das "pretas".

É claro que a situação pode ser vista sob dois aspectos, um externo, que chamamos macroscópico, e outro interno, ou microscópico.

A visão macroscópica, como o nome sugere, é o aspecto exterior do conjunto, ou sistema. Por exemplo, todas as "brancas" de um lado e as "pretas" do outro. A visão macroscópica é apenas isto, as "brancas" de um lado e as "pretas" do outro. Agora, internamente, sob o ponto de vista microscópico, a situação é outra. Considere apenas as "brancas", e separe duas delas, denominando-as A e B. Agora, fixe-se em dois elementos de volume 1 e 2. É claro que externamente, pouco importa que A esteja em 1 ou em 2. O que importa é que as "brancas" estejam juntas, separadas das "pretas". Internamente existe uma diferença, A e B podem estar juntas, de duas formas diferentes: A em 1 e B em 2, ou o contrário. É por isso que existe um grande número de maneiras de se distribuir as moléculas internamente, sem alterar o aspecto exterior, ou macroscópico.

O aspecto exterior, nós chamamos de estado macroscópico ou MACROESTADO, enquanto que o interior é denominado estado microscópico ou MICROESTADO. Então, do que foi dito acima, conclui-se que para um determinado macroestado existem muitos microestados.

Nós medimos a desordem pelo número de modos que nós podemos distribuir as moléculas, de modo que externamente o conjunto tenha o mesmo aspecto, ou melhor, a desordem é o número de microestados que fornecem o mesmo macroestado. O LOGARITMO DO NÚMERO DE MICROESTADOS (ou o logaritmo da desordem) É A EN

TROPIA. A desordem no caso em que as "moléculas brancas" são separadas das "moléculas pretas" é menor do que quando elas são distribuídas "à vontade", de modo que a entropia naquele caso é menor.

Na primeira unidade foi apresentada uma primeira abordagem do conceito de entropia, e ali se enfatizou a idéia de que a entropia era uma medida do grau de desordem. Agora, você é capaz de entender melhor, sob o ponto de vista microscópico, o que significa isso. E mais, você acaba de ver uma relação quantitativa. A entropia é o logaritmo da "desordem". Se  $W$  é o número de microestados então, a entropia  $S$ , será

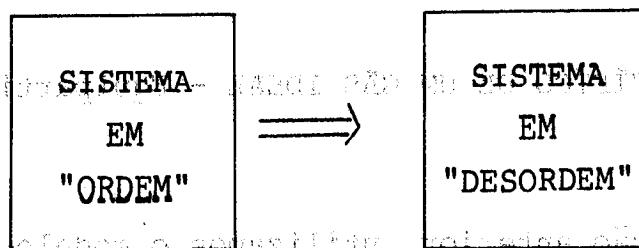
$$S = K \ln W$$

$K$  é a constante de Boltzmann.

O conceito de ordem está ligado às restrições que se impõem quando se deseja distribuir um certo número de moléculas. No exemplo das moléculas "brancas" e "pretas", o fato de se exigir que as "brancas" fiquem separadas das "pretas", implica numa restrição muito maior do que se elas pudessem ser distribuídas à vontade. No primeiro caso (moléculas separadas) a ordem é maior, porque tem-se mais restrições na distribuição. Como existem muito mais modos diferentes de se distribuir as moléculas "à vontade" do que separadas, a probabilidade de ocorrer naturalmente uma distribuição aleatória ("à vontade") é muito maior do que uma distribuição de moléculas separadas (pretas de um lado e brancas do outro).

Isto significa que os processos naturais vão da "orde

dem" para a "desordem", de modo que a entropia tende a aumentar.



Entropia inicial (estado em "ordem") =  $S_i$

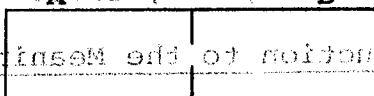
Entropia final (estado em "desordem") =  $S_f$

$$S_i < S_f$$

Na verdade, esse fato é a essência da segunda lei da

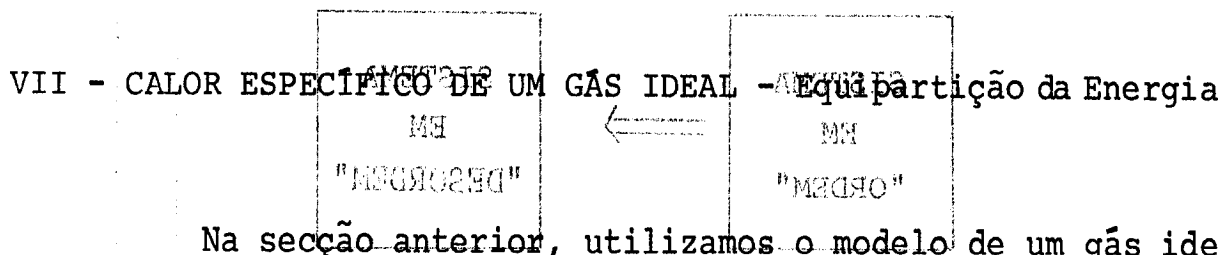
Termodinâmica. Aqui você viu uma interpretação microscópica dessa lei.

Vejamos outro exemplo: considere uma caixa, com uma divisão no centro, dividindo-a em duas regiões A e B.



Se tivermos uma certa quantidade de gás, vale dizer um número de moléculas, podemos colocá-los na caixa, de vários modos. Dois exemplos de macroestados são: todas as moléculas na região A, (ou na região B) e as moléculas espalhadas por toda a caixa. O segundo macroestado apresenta um grau de desordem muito maior, conseqüentemente uma entropia maior. Então, se deixarmos o gás na caixa ele irá ocupar todo o volume, porque é essa configuração que apresenta a maior entropia. Na unidade seguinte você ve

rá algumas aplicações e cálculos de entropia.



al para interpretar microscopicamente os conceitos de temperatu  
 ra, calor e entropia. Agora, à guiza de complementação do estu  
 do de gases ideais vamos aplicar o modelo para explicar o calor  
 específico dos gases:

ESTE ASSUNTO DEVERÁ SER ESTUDADO NAS SECÇÕES 23-7 e

23-8 do HALLIDAY & RESNICK, vol. I-2.

Na verdade, esse fato é a essência da segunda lei da  
 Termodinâmica. Aqui você viu uma interpretação microscópica das

**BIBLIOGRAFIA**

Vejam os outros exemplos: considere uma caixa, com uma  
 Halliday, D. e Resnick, R. "Física", vol. I-2, Livros Técnicos e  
 Científicos Editora S.A., Rio, 1973.  
 Cooper, L.N., An Introduction to the Meaning and Structure of  
 Physics, Harper & Row Publishers, New York, 1968.  
 Feynman, R.P. et al., The Feynman Lectures on Physics, Addison-  
 Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass., 1965.

exemplos de macroestados são: todas as moléculas na região A,  
 (ou na região B) e as moléculas espalhadas por toda a caixa. O  
 segundo macroestado apresenta um grau de desordem muito maior.  
 Consequentemente uma entropia maior. Então, se deixarmos o gás  
 na caixa ele irá ocupar todo o volume, porque é essa configuração  
 que apresenta a maior entropia. Na próxima seguinte você

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103) - 1978

### Unidade III

#### APLICAÇÕES DOS CONCEITOS E LEIS FUNDAMENTAIS DA TERMODINÂMICA

##### I - INTRODUÇÃO

Nas duas unidades anteriores discutimos os conceitos e leis fundamentais da Termodinâmica. Os conceitos-chave foram temperatura, calor e entropia e as leis foram a lei zero (equilíbrio térmico), a primeira lei (conservação da energia) e a segunda lei (aumento da entropia). Na primeira unidade adotamos um ponto de vista macroscópico, isto é, esses conceitos e leis foram introduzidos sem levar em conta a natureza atômica e molecular da matéria. Na segunda, analisamos esses mesmos conceitos e leis do ponto de vista microscópico, fazendo uso da Teoria Cinética aplicada a um modelo de um gás ideal que levou em conta o fato de que a matéria é constituída de átomos e moléculas.

Nessas duas unidades foram também introduzidos outros conceitos tais como energia interna, capacidade térmica, calor específico, pressão, volume e densidade de um gás. Foi também introduzida uma importante equação, a equação de estado dos gases ideais. Além disso, dois conceitos já bastante conhecidos - trabalho e energia - tiveram papel importante no estudo dessas unidades. (Tivemos também oportunidade de fazer uso de outros

conceitos já conhecidos tais como força e momento linear).

Como já foi explicado, estas três unidades referentes ao estudo de fenômenos térmicos obedecem uma seqüência que vai do geral para o particular. Começamos com uma discussão geral sobre Física, depois falamos de Termodinâmica e Teoria Cinética e introduzimos os conceitos e leis fundamentais sob um ponto de vista macroscópico, intuitivo e exemplificativo. A seguir nos aprofundamos um pouco adotando o ponto de vista microscópico. Seguindo essa orientação deixamos muitas das aplicações específicas, os cálculos, para esta terceira unidade. Cremos que assim você não se defrontará com as dificuldades que muitos alunos têm ao aplicar conceitos e leis para resolver um problema: não sabem o que estão fazendo porque já estão aplicando conceitos e leis sem tê-los antes aprendido bem, sem compreender o seu significado físico.

Na próxima unidade deste curso será iniciado o estudo dos fenômenos elétricos e magnéticos.

## II - OBJETIVOS

Ao término desta unidade você deverá ser capaz de:

1. Aplicar a Primeira Lei da Termodinâmica às transformações termodinâmicas sofridas por um determinado sistema, representando essas transformações num diagrama p-V e calculando uma das grandezas  $Q$ ,  $W$  e  $\Delta U$  a partir das outras duas.
2. Resolver problemas envolvendo uma ou mais das seguintes equa



ções: 1a. Lei da Termodinâmica (eq. 5, Unidade I), equação de estado dos gases ideais (eq. 2, Unidade II), energia cinética média de translação por molécula (eq. 23-8, Halliday & Resnick), calores específicos molares dos gases ideais monoatômicos (eqs. 23-10 e 23-11, Halliday & Resnick), equação das transformações adiabáticas (eq. 23-12).

3. Distinguir entre transformações reversíveis e irreversíveis em termos de estados de equilíbrio e não-equilíbrio.
4. Representar um Ciclo de Carnot em um diagrama P-V, descrevendo suas quatro etapas, e explicar porque ele atua como uma máquina térmica.
5. Resolver problemas envolvendo o Ciclo de Carnot e o rendimento de máquinas térmicas.
6. Explicar o que se entende por variável de estado e identificar a entropia  $S$  como uma variável de estado, mostrando que  $\int ds$  entre dois estados de equilíbrio tem o mesmo valor para todos os caminhos reversíveis ligando esses estados.
7. Enunciar a 2a. Lei da Termodinâmica em termos de entropia.
8. Distinguir entre processos reversíveis e irreversíveis em termos de entropia.
9. Calcular a variação de entropia em processos térmicos simples.

### III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

Para ajudá-lo a atingir os objetivos desta unidade sugere-se que você siga o roteiro abaixo.

## 1. Objetivo 1:

- Leia a seção 22-7 do Halliday e Resnick (inclusive o exemplo 3);
- Resolva os problemas 22-23, 24 e 25.

## 2. Objetivo 2:

- Examine os exemplos 1 e 2 do Capítulo 23 do Halliday e Resnick;
- Resolva os problemas 23-3, 4, 5, 6 e 7;
- Mostre que  $pV = \mu RT$  pode ser escrita como  $pV = NKT$ ;
- Resolva os problemas 23-11 e 16;
- Examine o exemplo 5 e resolva os problemas 23-39 e 40.

## 3. Objetivo 3:

- Leia as seções 25-1 e 2;
- Procure distinguir claramente processos reversíveis de irreversíveis;
- Responda as questões 25-4, 5 e 7;
- O que se pode afirmar sobre transformações isotérmicas e adiabáticas, no que diz respeito à sua reversibilidade? (ver a edição antiga do Halliday).

## 4. Objetivos 4 e 5:

- Leia as seções 25-3, 4 e 5, exceto a demonstração do Teorema de Carnot;
- Observe que a expressão 25-1 é o resultado que se obtém aplicando a 1ª Lei da Termodinâmica ao Ciclo de Carnot;
- Analise cuidadosamente os exemplos 1 e 2 do Capítulo 25;
- Responda as questões 12 e 13;
- Resolva os problemas 1, 7, 8, 10, 11, 13 e 14.

## 5. Objetivos 6, 7, 8 e 9:

- Leia as seções 25-7, 8 e 9;
- Estabeleça em termos de entropia, uma distinção entre problemas reversíveis e irreversíveis, e compare-a com a distinção feita anteriormente em termos de estados de equilíbrio;
- Enuncie a 2a. Lei da Termodinâmica em termos de entropia;
- Analise os exemplos 3 e 4;
- Responda a questão 25-16;
- Resolva os problemas 25-16, 17 e 22.

## 6. Respostas de problemas pares:

22-24:	a)	$Q$	$W$	$\Delta U$	b) $W = -20J$
	$A \rightarrow B \rightarrow$	$+$	$+$	$+$	$ABCA$
	$B \rightarrow C \rightarrow$	$+$	$0$	$+$	
	$C \rightarrow A \rightarrow$	$-$	$-$	$-$	

23-4:  $Q = RT \ln(V_f/V_i)$

23-6: 0,039 moles:  $494^{\circ}K$

23-16:  $3,67 \times 10^{16}$  moléculas

25-10: 0,07J; 0,5J; 2J; 5J

25-14: 12,2J

25-22: Calor absorvido:

1a. transformação:  $Q = RT \ln 2$  (1a. fase)

$Q = 3C_V T$  (2a. fase)

2a. transformação:  $Q = RT \ln(1/2)$  (1a. fase)

$Q = 3pV + 3C_V T$  (2a. fase)

$= 3C_p T$

Trabalho executado:

1a. transformação:  $W = RT \ln 2$  (1a. fase)

$W = 0$  (2a. fase)

2a. transformação:  $W = RT \ln(1/2)$  (1a. fase)

$W = 3pV$  (2a. fase)

Variação da Energia Interna:

1a. transformação:  $\Delta U = 0$  (1a. fase)

$$\Delta U = 3C_V T \text{ (2a. fase)}$$

2a. transformação:  $\Delta U = 0$  (1a. fase)

$$\Delta U = 3C_V T \text{ (2a. fase)}$$

Variação de Entropia:

1a. transformação:  $\Delta S = R \ln 2$  (1a. fase)

$$\Delta S = C_V \ln 4 \text{ (2a. fase)}$$

2a. transformação:  $\Delta S = R \ln (1/2)$  (1a. fase)

$$\Delta S = R \ln 4 + C_V \ln 4 \text{ (2a. fase)}$$

$$= C_p \ln 4$$

**APÊNDICE D - GUIAS DE ESTUDO PARA O GRUPO CONTROLE**

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103)

## Unidade I

TEMPERATURA, CALOR E 1.<sup>a</sup> LEI DA TERMODINÂMICA  
(Halliday & Resnick, Vol. I-2, Caps. 21 e 22).

### I - INTRODUÇÃO

Até aqui seus estudos de Física estiveram relacionados com diversos tipos de fenômenos mecânicos. Três conceitos fundamentais, comprimento, massa e tempo, foram usados mas não foram definidos rigorosamente. Ao invés disso, procurou-se dar a você uma idéia intuitiva de seu significado físico.

Nas duas primeiras unidades do curso que você está agora iniciando serão estudados fenômenos térmicos. Inicialmente estes fenômenos serão discutidos em termos de outro conceito fundamental, temperatura, de uma maneira essencialmente não mecânica. Na Unidade II a interpretação mecânica do conceito de temperatura será discutida. Antes disso, porém, você estudará o Primeiro Princípio da Termodinâmica, o qual nada mais é do que o Princípio de Conservação da Energia aplicado a fenômenos térmicos. Uma advertência, no entanto, se faz necessária: apesar de que o calor pode ser identificado como uma forma de energia, não é de se esperar que o calor seja uma quantidade que se conserva. A energia, como um todo, se conserva, mas não necessariamente

uma certa forma de energia. A energia mecânica, por exemplo, nem sempre se conserva. Por outro lado, sendo o calor uma forma de energia, é razoável esperar que possa ser transformado em outras formas de energia ou em trabalho. Além disso, não deve ser surpresa o fato de que todos os processos de transformação de calor em trabalho ou em outras formas de energia devam obedecer o princípio de conservação da energia, que nesse caso aparece com o nome de Primeiro Princípio da Termodinâmica.

## II - OBJETIVOS

Ao término dessa unidade você deverá ser capaz de:

1. Explicar o que se entende por temperatura de um sistema, a partir da noção de equilíbrio térmico e da "Lei Zero" (ou Princípio Fundamental) da Termodinâmica.
2. Identificar calor como uma forma de energia, estabelecendo a diferença entre calor e temperatura.
3. Distinguir entre capacidade térmica e calor específico.
4. Usar as expressões 22-1 e 22-3 para calcular quantidades de calor e diferenças de temperatura.
5. Distinguir entre calor e trabalho.
6. Dentre as grandezas  $Q$  (calor trocado com o meio ambiente),  $W$  (trabalho realizado) e  $\Delta U$  (variação da energia interna), dizer qual(is) depende(m) do processo utilizado para levar o sistema termodinâmico de um determinado estado inicial a um determinado estado final.

7. Aplicar a Primeira Lei da Termodinâmica às transformações termodinâmicas sofridas por um determinado sistema, representando essas transformações num diagrama p-V e calculando uma das grandezas Q, W e U a partir das outras duas.

### III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

1. Objetivo 1:

- Leia as seções 21-1 e 21-2;
- Tente explicar com suas próprias palavras o que se entende por temperatura. Parta da "Lei Zero" (ou Princípio Fundamental) da Termodinâmica.

2. Objetivo 2:

- Leia a seção 22-1;
- Responda a questão 22-1;

3. Objetivos 3 e 4:

- Leia a seção 22-2;
- Responda as questões 22-6 e 10;
- Resolva os problemas 22-5 e 6;
- Resolva o problema 22-11.

Auxílio: o calor específico médio é calculado por:

$$\bar{c} = \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T c dT \quad . \quad \text{Teorema do valor médio}$$

4. Objetivo 5:

- Leia as seções 22-5 e 22-6;
- Responda a questão 22-16;



- Resolva os problemas 22-1 e 14;
- Obtendo, sem consultar o livro, uma expressão para calcular o trabalho total realizado por um gás, contido num cilindro, quando o gás se expande de um volume  $V_i$  até um volume  $V_f$ ;
- Mostre, usando um diagrama p-V, que o trabalho executado por um sistema depende não só dos estados inicial e final mas também do trajeto intermediário.

#### 5. Objetivos 6 e 7:

- Leia a seção 22-7.

Na primeira metade dessa seção o autor deixa claro quais as grandezas que dependem ou não do trajeto. Na segunda metade tais grandezas são relacionadas através da Primeira Lei da Termodinâmica (eq. 22-6), que é muito importante e por isso você deve gravá-la. Evite, no entanto, a simples memorização. Procure entender o que está dito nessa equação. Observe que ela simplesmente expressa o resultado da aplicação do Princípio de Conservação da Energia às transformações termodinâmicas.

- Responda a questão 22-23;
- Resolva o problema 22-22;
- Leia a seção 22-8;
- Responda a questão 22-20;
- Resolva os problemas 22-23, 24 e 25.

#### 6. Leitura Opcional:

- Seções 21-3 a 8. Estas seções tratam de assuntos bastante simples, tais como termômetros, escalas termométricas e dilatação dos corpos, com os quais supõe-se que você

- esteja familiarizado. Caso, no entanto, isso não for verdadeiro, recomenda-se fortemente a leitura dessas seções;
- As seções 22-3 e 4 ficam excluídas e os seus conteúdos não serão exigidos em testes;
  - Para ver como o assunto desta unidade é abordado em outros textos, sugere-se:

SEARS-ZEMANSKY, Física, Vol. 2. Editora da Universidade de Brasília.

B. ALVARENGA, A. MÁXIMO, Física, Vol. 2.

7. Respostas dos problemas pares:

22-6:  $45,5^{\circ}\text{C}$

22-14:  $153,7^{\circ}\text{C}$

22-22:  $1 \text{ cal} = 4,19\text{J}$

22-24: a)

	Q	W	$\Delta U$
A $\rightarrow$ B	+	+	+
B $\rightarrow$ C	+	0	+
C $\rightarrow$ A	-	-	-

b)  $W_{ABCA} = -20 \text{ J}$

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103)

## Unidade II

### TEORIA CINÉTICA DOS GASES

(Halliday & Resnick, Vol. I-2, Cap. 23)

#### I - INTRODUÇÃO

Na unidade anterior, os conceitos de temperatura e calor não foram relacionados com conceitos mecânicos. Na verdade, temperatura e calor foram definidos (ao menos intuitivamente) independentemente da mecânica. Ocorre, no entanto, que uma interpretação mecânica desses conceitos é muito útil para compreendê-los melhor. Para chegar a essa interpretação é necessário antes um modelo mecânico para um gás ideal e investigar as consequências das leis de Newton aplicadas a esse gás. Este estudo chama-se Teoria Cinética dos gases e de posse do modelo mecânico obtido a partir desta teoria é possível obter uma interpretação microscópica para o conceito de temperatura, por exemplo.

#### II - OBJETIVOS

Ao término desta unidade, você deverá ser capaz de:

1. Definir gás ideal do ponto de vista macroscópico (ou seja,

- por meio de uma equação de estado) e descrevê-lo do ponto de vista microscópico, segundo o modelo da Teoria Cinética (ou seja, enunciar e explicar as seis hipóteses básicas do modelo).
2. Interpretar do ponto de vista microscópico a pressão exercida por um gás ideal, especificando de que fatores ela depende.
  3. Interpretar do ponto de vista microscópico a temperatura de um gás ideal e comparar essa interpretação com a obtida do ponto de vista macroscópico.
  4. Estabelecer a relação entre a energia interna e a temperatura de um gás ideal monoatômico (gás perfeito), deduzindo a partir desta relação e da 1ª Lei da Termodinâmica as expressões de  $C_v$  e  $C_p$  (capacidades térmicas molares a volume constante e a pressão constante, respectivamente).
  5. Resolver problemas envolvendo uma ou mais das seguintes equações: 1ª Lei da Termodinâmica (eq. 22-6), equação de estado dos gases ideais (eq. 23-2), energia cinética média de translação por molécula (eq. 23-8), calores específicos molares dos gases ideais monoatômicos (eqs. 23-10 e 23-11), equações das transformações adiabáticas (eq. 23-12).
  6. Explicar o que se entende por equipartição de energia e aplicá-la no cálculo de calores específicos molares (capacidades térmicas molares) de gases ideais, conhecido o número de graus de liberdade.

### III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

#### 1. Objetivos 1 e 5:

- Leia as seções 23-1, 23-2 e 23-3;
- Observe que a equação 23-2 pode ser considerada como de finindo um gás ideal em escala macroscópica;
- Procure explicar com suas próprias palavras as seis hipóteses básicas do modelo microscópico apresentado na seção 23-3;
- Resolva os problemas 3, 4, 5, 6 e 7.

#### 2. Objetivo 2:

- Leia a seção 23-4;
- Tente reproduzir o cálculo da pressão consultando o livro apenas quando necessário;
- Interprete fisicamente a equação 23-3;
- Examine o exemplo 4 e resolva o problema 23-12.

#### 3. Objetivos 3 e 5:

- Leia a seção 23-5;
- Procure gravar a expressão 23-5 pois a partir dela é que se obtém a interpretação mecânica, ou microscópica, da temperatura;
- Deduza a expressão 23-6 consultando o livro quando necesário, porém procure gravá-la na forma  $U = \frac{3}{2} kT$  que é uma expressão importante.
- Observe que da equação 23-5 também obtemos a energia cinética média de translação para  $\mu$  moles,  $\frac{3}{2} \mu RT$ , e da 23-6 a energia cinética média de translação para  $N$  moléculas,  $\frac{3}{2} NkT$ .

- Mostre que  $pV = \mu RT$  pode ser escrita  $pV = NkT$ .
- Resolva os problemas 23-11 e 16.

#### 4. Objetivos 4 e 5:

- Leia a seção 23-7;
- Responda a questão 23-19 (Obs.: capacidade térmica molar = calor específico molar);
- Resolva o problema 23-26;
- Examine o exemplo 5 e resolva os problemas 23-39 e 40.

#### 5. Objetivo 6:

- Leia a seção 23-8;
- Reproduza separadamente para gases monoatômicos, diatômicos e poliatômicos, os cálculos de  $C_p$ ,  $C_v$  e  $\gamma$  feitos nessa seção a partir da equipartição de energia.
- Se um gás tiver 9 graus de liberdade, determine  $C_v$  e  $C_p$ ;
- Resolver o problema 23-30.

#### 6. Problemas opcionais:

- Como exercício, sugere-se que os problemas 25 e 29 sejam também resolvidos.

#### 7. Leitura opcional:

- Todos os assuntos do Cap. 24 são interessantes e úteis como base para um segundo curso de termodinâmica. Tais assuntos não foram incluídos no programa da disciplina unicamente por falta de tempo. A leitura desse capítulo é, portanto, recomendada mas não será exigida em testes;
- Para você ver como o assunto desta unidade é abordado em outros textos, sugere-se:

B. ALVARENGA - A. MÁXIMO, Física, Vol. 2.

SEARS-ZEMANSKY, Física, Vol. 2 - Ed. Universidade de Brasília.

REFERENCE-LEMON-STEPHENSON, Calor.

8. Respostas dos problemas pares:

4:  $Q = RT \ln (V_f/V_i)$

6: 0,039 mol; 494°K

12: a. 424m/s;      b. 73°K, 1172°K

16:  $3,67 \times 10^{16}$  moléculas

26:  $3,1 \times 10^3$  J/kg°K

30: 220 cal, 70%

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

FÍSICA II (FIS 103) - 1977

### Unidade III

## ENTROPIA E 2.<sup>a</sup> LEI DA TERMODINÂMICA (Halliday & Resnick, Vol. I-2, Cap. 25)

### I - INTRODUÇÃO

A Primeira Lei da Termodinâmica, estudada na Unidade I, corresponde ao Princípio da Conservação da Energia, e estabelece simplesmente que só podem ocorrer na natureza aqueles processos termodinâmicos que conservam a energia total do sistema mais meio ambiente. No entanto, nem todos os processos que conservam a energia podem ocorrer na natureza. Por exemplo, a passagem espontânea de calor de um corpo frio a um corpo mais quente, esfriando ainda mais o primeiro e aquecendo ainda mais o segundo, é um processo que, embora conservando a energia total, não ocorre na natureza. Deve portanto haver uma lei, ainda mais restritiva que a Primeira, capaz de especificar, dentre os processos que conservam a energia, quais os que efetivamente podem ocorrer na natureza.

Esta lei, denominada de 2.<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica, será estudada nesta unidade. Para chegar a um enunciado preciso e a uma boa compreensão da 2.<sup>a</sup> Lei, deveremos antes estudar o Ciclo de Carnot e as Máquinas Térmicas, assunto este de grande inte-



resse prático, bem como introduzir o conceito de Entropia.

Esta é a última unidade sobre fenômenos térmicos. A partir da próxima unidade passaremos ao estudo dos fenômenos elétricos.

## II - OBJETIVOS

Ao término desta unidade, você deverá ser capaz de:

1. Distinguir entre transformações reversíveis e irreversíveis em termos de estados de equilíbrio e não-equilíbrio.
2. Representar um Ciclo de Carnot em um diagrama P-V, descrevendo suas quatro etapas, e explicar porque ele atua como uma máquina térmica.
3. Resolver problemas envolvendo o Ciclo de Carnot e o rendimento de máquinas térmicas.
4. Enunciar a 2.<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica tanto na formulação de Clausius quanto na de Kelvin-Planck.
5. Explicar o que se entende por variável de estado e identificar a entropia  $S$  como uma variável de estado, mostrando que  $\int dS$  entre dois estados de equilíbrio tem o mesmo valor para todos os caminhos reversíveis ligando esses estados.
6. Enunciar a 2.<sup>a</sup> Lei da Termodinâmica em termos de entropia.
7. Distinguir entre processos reversíveis e irreversíveis em termos de entropia.
8. Calcular a variação de entropia em processos térmicos simples.

## III - PROCEDIMENTO SUGERIDO

## 1. Objetivo 1:

- Leia as seções 25-1 e 2;
- Procure distinguir claramente processos reversíveis e ir reversíveis;
- Responda as questões 4, 5 e 7;
- O que se pode afirmar sobre transformações isotérmicas e adiabáticas, no que diz respeito à sua reversibilidade? (ver a edição antiga do Halliday);

## 2. Objetivos 2 e 3:

- Leia as seções 25-3 e 5, exceto a demonstração do Teorema de Carnot;
- Observe que a expressão 25-1 é o resultado que se obtém aplicando a 1ª Lei da Termodinâmica ao Ciclo de Carnot;
- Analise cuidadosamente os exemplos 1 e 2;
- Responda as questões 12 e 13;
- Resolva os problemas 1, 7, 8, 10, 11, 13 e 14.

## 3. Objetivo 4:

- Leia a seção 25-4;
- Enuncie a Segunda Lei da Termodinâmica em termos das for mulações de Clausius e de Kelvin-Planck.

## 4. Objetivos 5, 6, 7 e 8:

- Leia as seções 25-7, 8 e 9;
- Estabeleça, em termos de entropia, uma distinção entre processos reversíveis e irreversíveis e compare-a com a distinção feita anteriormente em termos de estados de equilíbrio.

- Enuncie a 2ª Lei em termos de entropia;
- Analise os exemplos 3 e 4;
- Responda a questão 16;
- Resolva os problemas 16, 17 e 22.

5. Leitura opcional:

- A seção 25-10 é extremamente interessante, porém fora do escopo desta unidade. Sua leitura é recomendada, mas seu conteúdo não será exigido em testes. Também não se exigirá em testes o conteúdo da seção 25-6;
- Sugere-se ainda a leitura dos seguintes textos:
 

FÍSICA - Sears & Zemanski, Vol. 2, Ed. Universidade de Brasília.

FÍSICA - Beatriz Alvarenga & Antonio Máximo, Vol. 2.

CURSO DE FÍSICA - Ference Jr., Lemon, Stephenson, Ed. Edgard Blücher Ltda.

6. Respostas dos Problemas Pares:

10: 0,07J; 0,5J; 2J; 5J.

14: 12,2J

22: Calor absorvido:

$$1.^{\text{a}} \text{ transformação: } Q = RT \ln 2 \quad (1.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$Q = 3 C_V T \quad (2.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$2.^{\text{a}} \text{ transformação: } Q = RT \ln(1/2) \quad (1.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$Q = 3pV + 3C_V T \quad (2.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$= 3 C_P T$$

Trabalho executado:

$$1.^{\text{a}} \text{ transformação: } W = RT \ln 2 \quad (1.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$W = 0 \quad (2.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$2.^{\text{a}} \text{ transformação: } W = RT \ln(1/2) \quad (1.^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$W = 3 pV \quad (2.^{\text{a}} \text{ fase})$$

Variação da energia interna:

$$1^{\text{a}} \text{ transformação: } \Delta U = 0 \quad (1^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$\Delta U = 3C_V T \quad (2^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$2^{\text{a}} \text{ transformação: } \Delta U = 0 \quad (1^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$\Delta U = 3 C_V T \quad (2^{\text{a}} \text{ fase})$$

Variação de entropia:

$$1^{\text{a}} \text{ transformação: } \Delta S = R \ln 2 \quad (1^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$\Delta S = C_V \ln 4 \quad (2^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$2^{\text{a}} \text{ transformação: } \Delta S = R \ln(1/2) \quad (1^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$\Delta S = R \ln 4 + C_V \ln 4 \quad (2^{\text{a}} \text{ fase})$$

$$= C_P \ln 4$$

APÊNDICE E - TESTES DE ASSOCIAÇÃO DE CONCEITOS:  
INSTRUÇÕES E PÁGINA EXEMPLO

## TESTE I

## ASSOCIAÇÃO ESCRITA DE CONCEITOS

## INSTRUÇÕES

Este primeiro teste destina-se a verificar quantos conceitos físicos você é capaz de associar a um dado conceito num determinado tempo. Nós lhe daremos uma palavra (ou palavras) que representa(m) um conceito físico e você deverá escrever ao lado dela tantas outras palavras quanto possível. Estas palavras deverão ser do campo da Física, da linguagem usual da Física que você conhece de cursos anteriores, deste curso e de livros onde estudou ou está atualmente estudando. Não esperamos que você seja capaz de preencher todos os espaços existentes numa certa página. O que esperamos é que você preencha tanto quanto possível.

Abaixo, apresentamos um exemplo:

## CARGA ELÉTRICA

Carga elétrica	<del>campo elétrico</del> ...	Carga elétrica	<del>elêtron</del> .
Carga elétrica	<del>corrente elétrica</del>	Carga elétrica	.....
Carga elétrica	<del>força</del> .....	Carga elétrica	.....

Em cada uma das páginas seguintes você encontrará um único conceito físico. Proceda tal como no exemplo acima escrevendo ao lado desse conceito tantas palavras quantas você seja capaz de a ele associar dentro do campo da Física. Assegure-se de sempre pensar no conceito dado e não nas palavras que você

já escreveu. O conceito dado está repetido justamente por isso.

Você terá um minuto para cada página. O professor ou monitor lhe dirá quando mudar de página. Não passe para a página seguinte antes do aviso dado pelo professor.

25/04/2011

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]*

25/04/2011

*[Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page]*

TEMPERATURA

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_

Temperatura \_\_\_\_\_



## TESTE II

## ASSOCIAÇÃO NUMÉRICA DE CONCEITOS

## INSTRUÇÕES

Este teste destina-se a verificar com que grau de intensidade você relaciona ou associa certos conceitos físicos. A página seguinte conterá um certo número de pares de conceitos. Ao lado de cada par existe uma escala numérica que vai de 1 a 7. Nessa escala, 1 corresponde a um alto grau de relacionamento entre os conceitos (e.g., carga elétrica e campo elétrico, corrente e resistência) e 7 a praticamente nenhuma relação (e.g., momento e volume). Se você achar que os conceitos de um determinado par estiverem intimamente relacionados coloque um X sobre o número 1 da escala. Por outro lado, se na sua opinião um conceito do par não tiver nada a ver com o outro, coloque o X no número 7. Estas são as duas situações extremas, os números entre 1 e 7 refletem situações intermediárias: quanto mais perto de 1 você colocar o X maior é o relacionamento que você vê entre os conceitos e quanto mais perto de 7 menor esse relacionamento.

(Não há limite de tempo para este teste).



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- A68 AUSUBEL, D.P. Educational psychology; a cognitive view.  
New York, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
- B77 BORG, I. Geometric representation of individual differences. In: Lingoës, J.C. Geometric representation of relational data. Michigan, Mathesis, 1977. p.609-55.
- BP70 BRICKER, P.D. & PRUZANSKY, S. A comparison of sorting and pair-wise similarity judgment techniques for scaling auditory stimuli. Murray Hill, Bell Telephone Laboratories, 1970. p.1-9. Mimeografado.
- CC70a CARROL, J.D. & CHANG, J.J. A "quasi-nonmetric" version of INDSCAL, a procedure for individual differences multidimensional scaling. Murray Hill, Bell Laboratories, 1970. Trabalho apresentado no Spring 1970 meeting of the Psychometric Society, Stanford. 3p.
- CC70b \_\_\_\_\_ Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition. Psychometrika, Chicago, 35(3):283-319, Sept. 1970.
- CW74 CARROL, J.D. & WISH, M. Models and methods for three-way multidimensional scaling. In: Krantz, D.H. ed. et alii. Contemporary developments in mathematical psychology. San Francisco, Freeman, 1974. p.57-105.
- CW75 \_\_\_\_\_ Multidimensional scaling; models, methods and relations to delphi. Murray Hill, Bell Laboratories, 1975. p.1-4. Mimeografado.

- D77 De LEEUW, J. Correctness of Kruskal's algorithms for monotone regression with ties. Psychometrika, Chicago, 42(1):141-4, Mar. 1977.
- GBC66 GOLDSTEIN, K.M.; BLACKMAN, S.; COLLINS, D.J. Relationship between sociometric and multidimensional scaling measures. Perceptual and Motor Skills, Missoula, 23:639-43, 1966.
- GH63 GARSKOF, B.E. & HOUSTON, J.P. Measurement of verbal relatedness; and idiographic approach. Psychological Review, Washington, 70(3):277-88, 1963.
- GS75 GEESLIN, W.E. & SHAVELSON, R.J. An exploratory analysis of the representation of a mathematical structure in students' cognitive structures. American Educational Research Journal, Washington, 12(1):21-39, 1975.
- H60 HARMAN, H.H. Modern factor analysis. Chicago, The University of Chicago Press, 1960.
- IK60 INDOW, T. & KANAZAWA, K. Multidimensional mapping of Munsell colors varying in hue, chroma, and value. Journal of Experimental Psychology, Washington, 59(5):330-6, 1960.
- IP74 ISAAC, P.D. & POOR, D.D.S. On the determination of appropriate dimensionality in data with error. Psychometrika, Chicago, 39(1):91-101, Mar. 1974.
- IU60 INDOW, Y. & UCHIZONO, T. Multidimensional mapping of Munsell colors varying in hue and chroma. Journal of Experimental Psychology, Washington, 59(5):321-9, 1960.

- J67 JOHNSON, P.E. Some psychological aspects of subject-matter structure. Journal of Educational Psychology, Washington, 58(2):75-83, 1967.
- JM63 JACKSON, D.N. & MESSICK, S. Individual differences in social perception. British Journal of Social and Clinical Psychology, London, 2:1-10, 1963.
- JMS57 JACKSON, D.N.; MESSICK, S.J.; SOLLEY, C.M. A multidimensional scaling approach to the perception of personality. The Journal of Psychology, Provincetown, 44:311-8, 1957.
- Jo67 JOHNSON, S.C. Hierarchical clustering schemes. Psychometrika, Chicago, 32(3):241-54, Sept. 1967.
- K64a KRUSKAL, J.B. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. Psychometrika, Chicago, 29(1):1-27, Mar. 1964.
- K64b \_\_\_\_\_ Nonmetric multidimensional scaling; a numerical method. Psychometrika, Chicago, 29(2):115-29, June, 1964.
- K169 KLAHR, D. A Monte Carlo investigation of the statistical significance of Kruskal's nonmetric scaling procedure. Psychometrika, Chicago, 34(3):319-30, Sept. 1969.
- L73 LINGOES, J.C. The Guttman-Lingoes nonmetric program series. Michigan, Mathesis, 1973. p.39-79.
- LR77 LINGOES, J.C. & ROSKAM, E.E. A mathematical and empirical analysis of two multidimensional scaling algorithms. In: \_\_\_\_\_ Geometric representations of relational data. Michigan, Mathesis, 1977. p.371-3.

- M75 MOREIRA, M.A. New approaches to teaching and learning in universities. Porto Alegre, Instituto de Física, 1975.  
Trabalho apresentado na International Conference on Physics Education, Edinburgh, 1975.
- M77a \_\_\_\_\_ An Ausubelian approach to physics instruction; an experiment in an introductory college course in eletromagnetism. Ithaca, Cornell University, 1977.  
Tese de doutorado.
- M77b \_\_\_\_\_ O uso do sistema de instrução personalizada (SIP) em um curso universitário básico de física durante sete semestres consecutivos. Revista Brasileira de Física, São Paulo, 7(3):711-35, dez. 1977.
- M78 \_\_\_\_\_ A teoria de aprendizagem de David Ausubel como sistema de referência para a organização de conteúdos de física. Será publicado na Revista Brasileira de Física, São Paulo, 9(1) 1979.
- MA56 MESSICK, S.J. & ABELSON, R.P. The additive constant problem in multidimensional scaling. Psychometrika, Chicago, 21(1):1-15, Mar. 1956.
- N76 NOVAK, J.D. Understanding the learning process and effectiveness of teaching methods in the classroom, laboratory and field. Science Education, New York, 80:493-512, 1976.
- N77 \_\_\_\_\_ A theory of education. Ithaca, Cornell University, 1977.
- P77 POSNER, G.J. The assessment of cognitive structure. Ithaca, Cornell University, 1977. (Research report; 5)

- Pr76 PREECE, P.F.W. Mapping cognitive structure; a comparison of methods. Journal of Educational Psychology, Washington, 68(1):1-8, 1976.
- RH74 RESNICK, R. & HALLIDAY, D. Física. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1974. v.1-2, p.584-710.
- RP76 RUDNITSKY, A.N. & POSNER, G.J. The effect of content sequence on student learning. Ithaca, Cornell University, 1976. Trabalho apresentado na 1976 Annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- S75 SUBKOVIK, M.J. The use of multidimensional scaling in educational research. Review of Educational Research, Washington, 45(3):387-423, 1975.
- Sh72 SHAVELSON, R.J. Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. Journal of Educational Psychology, Washington, 63(3):225-34, 1972.
- Sh73 \_\_\_\_\_ Learning from physics instruction. Journal of Research in Science Teaching, New York, 10(2):101-11, 1973.
- Sh74 \_\_\_\_\_ Methods for examining representations of a subject-matter structure in a student's memory. Journal of Research in Science Teaching, New York, 11(3):231-49, 1974.
- She62a SHEPARD, R.N. The analysis of proximities; multidimensional scaling with an unknown distance function. I. Psychometrika, Chicago, 27(2):125-40, June, 1962.

- She62b \_\_\_\_\_ II. Psychometrika, Chicago, 27(3):219-46,  
Sept. 1962.
- She74 \_\_\_\_\_ Representation of structure in similarity data;  
problems and prospects. Psychometrika, Chicago,  
39(4):373-421, Dec. 1974.
- SL69 STENSON, H.H. & KNOLL, R.L. Goodness of fit for random  
rankings in Kruskal's nonmetric scaling procedure.  
Psychological Bulletin, Washington, 71(2):122-6, 1969.
- Sp72 SPENCE, I. A Monte Carlo evaluation of three nonmetric  
multidimensional scaling algorithms. Psychometrika,  
Chicago, 37(4):461-86, Dec. 1972.
- T58 TORGERSON, W.S. Theory and methods of scaling. New York,  
John Wiley, 1958. cap. 11.
- TM63 TUCKER, L.R. & MESSICK, S. An individual differences  
model for multidimensional scaling. Psychometrika,  
Chicago, 28(4):333-67, Dec. 1963.
- TYD77 TAKANE, Y.; YOUNG, F.W.; De LEEUW, J. Nonmetric  
individual differences multidimensional scaling: an  
alternating least squares methods with optional  
scaling features. Psychometrika, Chicago, 42(1):7-67,  
Mar. 1977.
- WP71 WAGENAAR, W.A. & PADMOS, P. Quantitative interpretation  
of stress in Kruskal's multidimensional scaling  
technique. British Journal of Mathematical Psychology,  
Bristol, 24:101-10, 1971.