

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

**Dinâmica Regular e Caótica em Sistemas de
Interação Cíclotron-Laser[†]**

Renato Pakter

Tese realizada sob a orientação do Dr. Felipe Barbedo Rizzato e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Porto Alegre

1995

[†]Trabalho parcialmente financiado por CNPq e FINEP. Cálculos Numéricos parcialmente realizados no Cray YMP-2E do Centro de Super-computação desta universidade.

Aos meus avós Bernardo, Geni e Rita,
pais Boris e Paulette,
irmãos Ernani e Marcelo
e à companheira de todas as horas Helena.

AGRADECIMENTOS

- Ao Felipe por toda sua dedicação e estímulo ao longo destes anos.
- À prof. Ruth Schneider pela orientação nos tempos de iniciação científica e por ter me introduzido nesta área.
- À prof. Victória Herscovitz por todo auxílio e interesse desde *o princípio*.
- Ao prof. Darcy Dillenburg pelo importante papel na promoção deste trabalho a tese de doutorado.
- À European Physical Society pelo auxílio quando da participação no 4th European Particle Accelerator Conference.
- À Comissão de Pós-Graduação deste Instituto pelas inúmeras vezes que prestou auxílio para a participação em congressos científicos e seus secretários Cecília e Daniel pela presteza.
- Aos colegas e amigos de grupo, de sala e de viagens, em especial Gilberto Corso, Leonardo Garcia, Glaucius de Oliveira, Martin Fleck, Fernando Haas, Rudi Gaelzer, Joecir Palandi, José Carlos Mombach, David Dominguez, Flávia Couto e Tibério Caetano.
- Enfim, a todos, dentro e fora deste Instituto, que de alguma forma ajudaram em minha formação acadêmica e científica e em especial na realização desta tese.

RESUMO

Nesta tese analisamos a dinâmica regular e caótica na interação de partículas magnetizadas com ondas circularmente polarizadas que propagam-se perpendicularmente ao campo magnético de fundo. Para tanto desenvolvemos um formalismo Hamiltoniano auto-consistente que inclui tanto a dinâmica das partículas quanto a dos campos da onda. Com relação a utilização do referido sistema como esquema de aceleração de partículas, investigamos via aproximação de macropartícula os efeitos da dispersão dos campos eletromagnéticos, bem como de um possível descasamento inicial entre as frequências da onda e de cíclotron. Através da integração numérica das equações de movimento identificamos dois regimes distintos dependendo do valor inicial da energia das partículas. Para baixas energias ocorre uma aglomeração das partículas no espaço de fases, reduzindo o número de graus de liberdade e validando a aproximação de macropartícula. Para valores maiores, a aglomeração não acontece e todos os graus de liberdade são efetivos. Neste caso o sistema perde a intergrabilidade, dando lugar ao aparecimento de atividade caótica que tem como um dos ingredientes básicos a difusão de Arnold. Analisamos, também, os efeitos da modulação dos campos do maser na caotização global do sistema.

ABSTRACT

In this thesis we analyse the regular and chaotic dynamics in the interaction of magnetized particles and circularly polarized waves that propagate parallel to the background magnetic field. To this end we develop a self-consistent Hamiltonian formalism that takes into account both particle and wave dynamics. Regarding particle acceleration, we investigate by means of the macroparticle approximation the effects of wave dispersion and frequency mismatch. Based on numerical analysis we identify two different regimes depending on the initial particles energy. For low energies, a bunching process occurs in the phase space, reducing the number of degrees of freedom and validating the macroparticle approximation. For larger values, the bunching does not take place and all degrees of freedom are effective. In this case, the system loses its integrability, leading to the onset of chaotic activity with Arnold diffusion as one of its major ingredients. We also analyse the effects of maser field modulations on the global chaotization of system dynamics.

Índice

I	Introdução	1
II	Dinâmica de uma Partícula Sujeita a Campos Dados	6
II.1	Introdução	6
II.2	Modelo	7
II.3	Autoressonância	8
II.4	Formalismo Hamiltoniano e Potencial Efetivo	12
II.5	Discussão	15
II.5.1	Caso autoressonante	16
II.5.2	Caso dispersivo	18
II.5.3	Caso com descasamento inicial de frequências	19
II.6	Algumas Observações à Respeito do Período da Órbita da Partícula	21
III	Formalismo Auto-consistente	25
III.1	Introdução	25
III.2	Dinâmica da onda	26
III.2.1	Expansão perturbativa com múltiplas escalas de tempo	27
III.2.2	Cálculo da contribuição secular da densidade de corrente	30
III.2.3	Equações de movimento para as variáveis da onda	31
III.3	Formalismo Hamiltoniano e Constantes de Movimento para a Dinâmica Auto-consistente	32

III.4 Aproximação de Macropartícula e Dinâmica de Feixes Inicialmente de Baixa Energia	33
III.4.1 Espaço de fases	35
III.4.2 Potencial efetivo	37
III.4.3 Discussão	38
III.5 Análise Numérica e Verificação da Aproximação de Macropartícula	41
III.6 O que Veremos nos Próximos Capítulos	46
IV Caos Auto-consistente e Difusão de Arnold	48
IV.1 Introdução	48
IV.2 Modelo Considerado	49
IV.3 Simulações Iniciais no Espaço de Fases	50
IV.3.1 Estados aglomerados	51
IV.3.2 Estados não aglomerados	52
IV.4 Estados Regulares e Caóticos	55
IV.4.1 Estados regulares e caóticos do sistema global	55
IV.4.2 Localizando o caos	58
IV.5 Difusão de Arnold x Caos de Separatriz	61
IV.6 Modelo de Baixa Dimensionalidade	64
V Bifurcações e Caos Gerados pela Modulação do Maser	72
V.1 Introdução	72
V.2 O Modelo e suas Características Relevantes	74
V.3 Investigação Numérica	77
V.3.1 Análise de estabilidade	77
V.3.2 Mapas de Poincaré	81
V.4 Discussão dos Resultados Obtidos	84
VI Conclusão	86

<u>Índice</u>	<u>iii</u>
A Modos TE numa Guia de Ondas Cilíndrica	90
B Variáveis de Centro-guia e Dinâmica em um Campo Magnético	93
C Diagonalização do Hamiltoniano não Auto-consistente	97
D O Algoritmo de Newton-Raphson para Órbitas Periódicas	100

Capítulo I

Introdução

Aceleração de partículas a altas energias foi e tem sido uma das áreas de grande interesse entre os físicos desde o final do século passado e durante todo este século, haja visto seu infindável número de aplicações tanto em física, relacionado ao estudo da estrutura de sólidos, núcleos e partículas, como em outras áreas, como medicina e química, por exemplo. Inicialmente, os métodos de aceleração baseavam-se puramente na submissão de partículas carregadas a *grandes* diferenças de potencial eletrostático, seja em aceleradores lineares ou em cíclotrons, onde além do campo eletrostático há um campo magnético que mantém as partículas num movimento circular, reduzindo, assim, o tamanho do equipamento. Vale ressaltar que os aceleradores lineares são usados largamente até hoje em dia para o estudo de sólidos, átomos e núcleos a baixas energias.

Mais recentemente, com a crescente necessidade de maiores e maiores energias para o estudo cada vez mais detalhado da estrutura interna da matéria e seus componentes, passou-se a desenvolver os aceleradores *gigantes* como o CERN (*European Organization for Nuclear Research*), onde as partículas giram num longo anel sendo periodicamente aceleradas por rf (rádio frequência), defletidas por dipolos magnéticos e *focadas* por quadiupolos e sextopolos magnéticos[1]. Devido a grande engenhosidade, tamanho físico e, conseqüentemente, custo na construção e manutenção deste tipo de equipamento, sua utilização tem sido cada vez mais restritiva.

Sendo assim, nas últimas décadas tem-se visto um crescente interesse pelo estudo de

novos esquemas de aceleração de partículas carregadas baseados principalmente na sua interação não linear com campos eletromagnéticos de grande amplitude seja no vácuo ou em plasmas[2, 3]. Entre estes esquemas de aceleração podemos citar os aceleradores de ondas de batimento (*beat-wave*)[4]-[7], de campos de rastro (*wake field*)[8, 9], de ondas em plasmas[10]-[13], de campos eletromagnéticos no vácuo[14]-[17] e em meios dielétricos[18, 19] e de ressonância cíclotron-laser[20]-[36]. Note-se que o estudo da interação não linear ondas-partículas também foi fortemente impulsionado pela astrofísica, visto que no espaço uma série de processos deste tipo ocorrem[37].

Devotaremos total atenção nesta tese aos aceleradores de ressonância cíclotron-laser, onde uma onda eletromagnética transfere energia para um feixe de partículas carregadas girando em um campo magnético guia. Este esquema mostrou-se bastante promissor como um método para a aceleração de partículas devido ao processo de autoressonância[20]. Considerando partículas inicialmente em ressonância com a onda eletromagnética e sob certas condições ideais, viu-se que à medida que as partículas se energizam e aumentam sua velocidade na direção paralela ao campo magnético guia, os efeitos do desvio Doppler sobre a frequência da onda sentida pelas partículas e da variação relativística da frequência ciclotrônica se compensam, *autosustentando* assim a ressonância inicial ao longo de todo o processo de aceleração.

Observou-se, entretanto, que uma destas condições ideais é dificilmente conseguida em esquemas experimentais de laboratório. Esta particular condição é a necessidade de a onda eletromagnética ser não dispersiva, uma condição bastante restritiva se consideramos os efeitos dispersivos inerentes à presença de uma guia de ondas confinante[32]. De fato, a presença de dispersão na onda mostra-se como um forte inibidor da troca de energia entre onda e feixe, diminuindo em muito a aceleração máxima possível[21, 25, 26]. Sendo assim, uma série de trabalhos têm se focado na possibilidade de reverter toda ou parcialmente os efeitos dispersivos sobre a interação onda-partículas, mantendo a condição de ressonância e a transferência de energia. Alguns dos métodos sugeridos são : a inclusão de campos eletrostáticos, seja paralelos[27] ou transversais[28] ao campo magnético guia; variar-se a

velocidade de fase da onda[29], seja, por exemplo, variando o raio da guia de ondas[30]; e finalmente, variando-se o a intensidade do campo magnético guia e conseqüentemente a frequência ciclotrônica[32]-[35] de forma tal a manter a ressonância que seria destruída pela dispersão [este último, em especial, recebeu inclusive um nome próprio: acelerador laser autoressonante (*autoresonance laser accelerator*)]. Note-se que estes métodos apresentam dificuldades e restrições seja do ponto de vista teórico ou experimental.

Nesta tese, estudamos um método alternativo para a reobtenção de grande energização por parte das partículas e que parece bastante viável de ponto de vista experimental. Investigamos os efeitos de um possível descasamento inicial entre as frequências de cíclotron das partículas e da onda. Veremos que é realmente possível retomar grande parte da energização perdida devido a dispersão, por meio do descasamento de frequências, isto é para um dado valor de dispersão veremos que a transferência de energia máxima da onda para as partículas não ocorre quando estas estão exatamente em ressonância inicial.

Dado que conseguimos reobter uma troca de energia eficiente e substancial entre onda e partículas passa a ser necessário a inclusão de efeitos dinâmicos na onda, de forma tal a levar em conta a quantidade finita de energia existente nos campos do laser. Desenvolvemos então um formalismo Hamiltoniano geral auto-consistente para a interação onda-feixe que engloba em si a possibilidade de um descasamento entre as frequências iniciais. A investigação analítica do sistema auto-consistente se torna possível graças à aproximação de macropartícula que nos permite, dadas algumas condições iniciais, supor uma rápida aglomeração das partículas do feixe no espaço de fases logo nos primeiros momentos da interação e, sendo assim, tratar toda a distribuição de partículas como uma única entidade, a macropartícula. Veremos que a redução dos graus de liberdade introduzida pela aproximação acima torna o sistema completamente integrável, possibilitando uma aceleração regular do feixe que é bastante reforçada se um conveniente valor para o descasamento de frequências é adotado. Aplicamos nossos resultados para modos eletromagnéticos na faixa das microondas (frequências da ordem de GHz), onde veremos que mesmo nos casos dispersivos é possível, através de uma escolha cuidadosa do descasamento de frequências,

recobramos energização total, i.e., a onda transferindo toda sua energia inicial para as partículas.

A hipótese da rápida aglomeração no espaço de fases e da formação da macropartícula é testada via integração numérica do conjunto de equações referentes a um feixe de número grande (tipicamente 500) de partículas. Encontramos que para feixes de energia inicial suficientemente baixa, a aglomeração efetivamente acontece, havendo grande concordância entre os resultados numéricos e os obtidos via aproximação.

Por outro lado, se a energia inicial não é suficientemente baixa, a aglomeração não ocorre. Neste caso, o sistema é efetivamente multidimensional e sua dinâmica passa a apresentar características bem diferentes das anteriormente encontradas. Em especial, apontamos a presença de atividade caótica no sistema com a divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas. A investigação destes estados caóticos nos leva a crer que a difusão de Arnold[39, 40] além do usual caos de separtriz[41] se apresentam como principais ingredientes para o surgimento do caos auto-consistente. Para chegarmos a estas conclusões analisamos não somente a atividade caótica global do sistema, mas também sua intensidade *local* em diferentes regiões do espaço de fases. A partir daí, nos valem de um modelo de baixa dimensionalidade que se mostra como fiel detentor das características básicas do sistema relevantes ao caos.

Finalmente, analisamos quais são os efeitos da introdução de uma modulação *externa* sobre a dinâmica de uma partícula teste. Este se mostra um bom modelo para a descrição de partículas de *alta* energia inicial quando estas representam uma pequena parte de uma distribuição de partículas que encontra-se majoritariamente a baixas energias e que interage auto-consistentemente com a onda eletromagnética. De fato, ele representa igualmente uma gama de outros processos físicos onde as partículas interagem com ondas periodicamente moduladas, como é o exemplo de ondas eletromagnéticas que sob certas condições tornam-se instáveis desenvolvendo auto-modulações não lineares[42] ou de modulações criadas em laboratório através da variação de parâmetros externos como o raio da guia de ondas[30].

A tese é organizada da seguinte forma. No capítulo II, consideramos a dinâmica de

uma partícula na configuração do acelerador de ressonância cíclotron-laser interagindo com campos dados e investigamos os casos pertinentes: autoressonância, inclusão da dispersão no campo do laser e o efeito do descasamento de frequências. No capítulo III, analisamos a dinâmica auto-consistente. Inicialmente, derivamos as equações de movimento para as variáveis da onda, obtendo, logo a seguir, um Hamiltoniano geral que descreve a interação auto-consistente feixe-onda. Utilizando a aproximação de macropartícula, construímos um potencial efetivo para as variações da energia do feixe que nos possibilita estudar os diferentes casos relevantes à aceleração. Ao final, realizamos uma série de análises numéricas tendo como objetivo principal checar a aproximação usada anteriormente. No capítulo IV, investigamos a presença de caos auto-consistente no sistema. O critério adotado para a determinação da existência ou não de atividade caótica nos diferentes regimes e porções do espaço de fases é o aparecimento ou não de divergência exponencial de trajetórias inicialmente próximas. Introduzimos um modelo de baixa dimensionalidade que possui as principais características do sistema global e a partir do qual explicamos os resultados obtidos no que concerne ao caos. No capítulo V, analisamos a influência de modulações introduzidas externamente na amplitude da onda sobre a dinâmica da partícula. Nos focamos nas bifurcações que levam a instabilização das órbitas que possuem a mesma periodicidade da modulação, dado que são estas órbitas as mais estáveis do sistema e, conseqüentemente, sua instabilização está conectada a completa caotização do espaço de fases. Finalmente, no capítulo VI concluímos a tese, apontando os principais resultados obtidos ao longo do trabalho.

Capítulo II

Dinâmica de uma Partícula Sujeita a Campos Dados

II.1 Introdução

Neste capítulo analisamos o que poderia ser considerado como o modelo mais simples para um acelerador de ressonância cíclotron-laser, a saber, o de uma partícula interagindo com um campo magnético constante e uma onda eletromagnética dada, ou seja, desprezando efeitos da partícula sobre a onda. Com isso, pretendemos obter alguns resultados qualitativos do que poderá ser encontrado no caso do acelerador real.

Nossa intenção principal é a de descobrir quando será possível uma troca eficiente de energia, de tal forma que haja grande aceleração. Para tanto, construiremos um potencial efetivo para a energia da partícula, do qual, facilmente obteremos a informação do valor máximo de aceleração.

Veremos que no caso ideal de onda plana sem dispersão a troca de energia será ilimitada, desde que partícula e onda estejam inicialmente em ressonância. Isto se deve ao efeito de autoressonância que introduziremos na seção II.3.

Já no caso de laser dispersivo, veremos que a aceleração será drasticamente reduzida, visto que a presença de dispersão cessa o fenômeno de autoressonância.

Restar-nos-á, discutir um meio de reimplementar a aceleração mesmo na presença de dispersão. Aí introduziremos o descasamento inicial entre as frequências da onda e de ciclotron da partícula.

II.2 Modelo

Consideremos um feixe de partículas de carga $-e$ e massa m girando num campo magnético constante \mathbf{B}_0 , orientado paralelamente ao eixo z . Façamo-la interagir com uma onda circularmente polarizada que é excitada em uma guia de ondas cilíndrica de raio R com eixo paralelo a \mathbf{B}_0 . O campo elétrico da onda é suposto transversal a direção de propagação, i.e., um modo TE.

A forma geral dos campos eletromagnéticos de um modo TE circularmente polarizada propagando-se numa guia cilíndrica é¹:

$$\mathbf{E}_w = -E \left[\frac{n}{k_\perp r} J_n \text{sen}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_r + J'_n \text{cos}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right] \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{kc}{\omega} E \left[J'_n \text{cos}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{n}{k_\perp r} J_n \text{sen}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{k_\perp}{k} J_n \text{sen}(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_z \right], \quad (\text{II.2})$$

onde E é a amplitude do campo elétrico, $\alpha \equiv kz - \omega t + n\varphi + \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}$ uma fase arbitrária², $\hat{\mathbf{e}}_\chi$ o versor na direção χ , J_n as funções de Bessel de primeiro tipo de ordem n e J'_n sua derivada, com n inteiro não nulo. O argumento das funções de Bessel é $k_\perp r$. Além disso, ω , k e k_\perp são, respectivamente, a frequência e a componente longitudinal e transversal do vetor de propagação da onda. A relação de dispersão é dada por:

$$\omega = c\sqrt{k^2 + k_\perp^2} = \frac{kc}{f}, \quad (\text{II.3})$$

tendo-se definido o parâmetro de dispersão f como

$$f \equiv \frac{k}{\sqrt{k^2 + k_\perp^2}} = \frac{kR}{\sqrt{k^2 R^2 + j_{n\nu}^2}}, \quad (\text{II.4})$$

¹ver apêndice A

²a partir do resultado obtido no apêndice A, tomou-se $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{\sigma} + 3\pi/2$

sendo $j_{n\nu}$ a ν -ésima raiz de J'_n .

Por motivos que logo ficarão claros, passaremos a trabalhar exclusivamente com os modos de onda $TE_{1\nu}$, ou seja, os que tem $n = 1$. Faremos, também, a suposição de que o raio R da guia de ondas é bem maior que o raio de Larmor $r_L = mv/eB$ da partícula. A validade desta condição será melhor estudada posteriormente, quando já tivermos alguns dados numéricos. Desta forma $k_\perp r_L = j_{1\nu} r_L / R \ll 1$ e as funções de Bessel podem ser aproximadas para:

$$J_1(k_\perp r_L) \simeq \frac{k_\perp r_L}{2}$$

$$J'_1(k_\perp r_L) \simeq \frac{1}{2},$$

podendo-se escrever o campo eletromagnético que efetivamente interagirá com a partícula como sendo:

$$\mathbf{E} = -\frac{E}{2} [\sin(kz - \omega t + \varphi + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_r + \cos(kz - \omega t + \varphi + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi] \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{B} = \frac{fE}{2} [\cos(kz - \omega t + \varphi + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_r - \sin(kz - \omega t + \varphi + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_\varphi] + B_o \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (\text{II.6})$$

onde foi igualmente desprezada a contribuição magnética da onda na direção z , supondo-se esta muito menor do que $B_o = |\mathbf{B}_o|$. Reescevendo II.5 e II.6 em coordenadas cartesianas, temos:

$$\mathbf{E} = -\frac{E}{2} [\sin(kz - \omega t + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_x + \cos(kz - \omega t + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_y] \quad (\text{II.7})$$

$$\mathbf{B} = \frac{fE}{2} [\cos(kz - \omega t + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_x - \sin(kz - \omega t + \hat{\sigma}) \hat{\mathbf{e}}_y] + B_o \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (\text{II.8})$$

da onde percebemos claramente que para estes modos $TE_{1\nu}$ o elétron vê a onda como se ela fosse plana, o que será de extrema importância no capítulo seguinte e justifica sua utilização.

II.3 Autoressonância

Antes de começarmos a análise mais quantitativa dos diferentes tipos de dinâmica que a partícula pode apresentar sob as diferentes condições iniciais, nos detenhemos um pouco

na discussão qualitativa dos processos físicos que ocorrem na interação e em especial num caso muito interessante: o caso autoressonante.

Por simplicidade, consideremos como exemplo o caso mostrado esquematicamente na figura II.1. Lá, no instante inicial, a partícula encontra-se exatamente sobre o ponto A com velocidade anti-paralela ao campo elétrico da onda, de forma tal que a partícula está sendo acelerada por \mathbf{E} . Simultaneamente, ela adquire velocidade na direção paralela à \mathbf{B}_o devido ao campo magnético da onda que deflete sua trajetória nesta direção. Sendo assim, se inicialmente a partícula se encontrava exatamente em ressonância com a onda, i.e., $\Omega_c = \omega$, onde Ω_c é a frequência de cíclotron da partícula, os movimentos subsequentes tenderiam a deslocá-la da ressonância através de dois processos diferentes. O primeiro, é diretamente ligado ao campo elétrico, visto que este cede energia a partícula, tornando-a mais massiva e conseqüentemente diminuindo sua frequência de cíclotron. O segundo efeito é o desvio Doppler na frequência da onda sentida pela partícula ao adquirir velocidade na direção paralela a \mathbf{k} (paralelo a \mathbf{B}_o). Este efeito está diretamente vinculado ao campo magnético da onda, responsável pela deflexão da partícula. Logo, a importância relativa destes dois efeitos está ligada à razão $|\mathbf{B}|/|\mathbf{E}| = f$, o parâmetro de dispersão.

No caso sublumínico $f > 1$ (que corresponde ao caso do sistema estar mergulhado num meio dielétrico, que não é o de nosso interesse), os efeitos devidos a \mathbf{B} seriam mais relevantes, de tal forma que o desvio Doppler seria o principal responsável pela quebra da ressonância. Já no caso superlumínico $f < 1$, os efeitos de \mathbf{E} seriam mais relevantes, sendo o incremento relativístico na massa o principal responsável pela quebra da ressonância. Em ambos os casos, o ângulo entre a velocidade da partícula e o campo elétrico, que inicialmente era π , permanecerá variando ao longo de todo o processo até se tornar agudo. A partir deste momento todo processo é invertido, havendo uma perda de energia por parte da partícula em sua interação com \mathbf{E} e aceleração no sentido anti-paralelo à \mathbf{B}_o devido a \mathbf{B} . Resumindo, a partícula passaria alternadamente por momentos de ganho e perda de energia, não havendo uma aceleração eficiente.

Porém, no caso sem dispersão $f = 1$, os efeitos de desvio Doppler e variação relativística

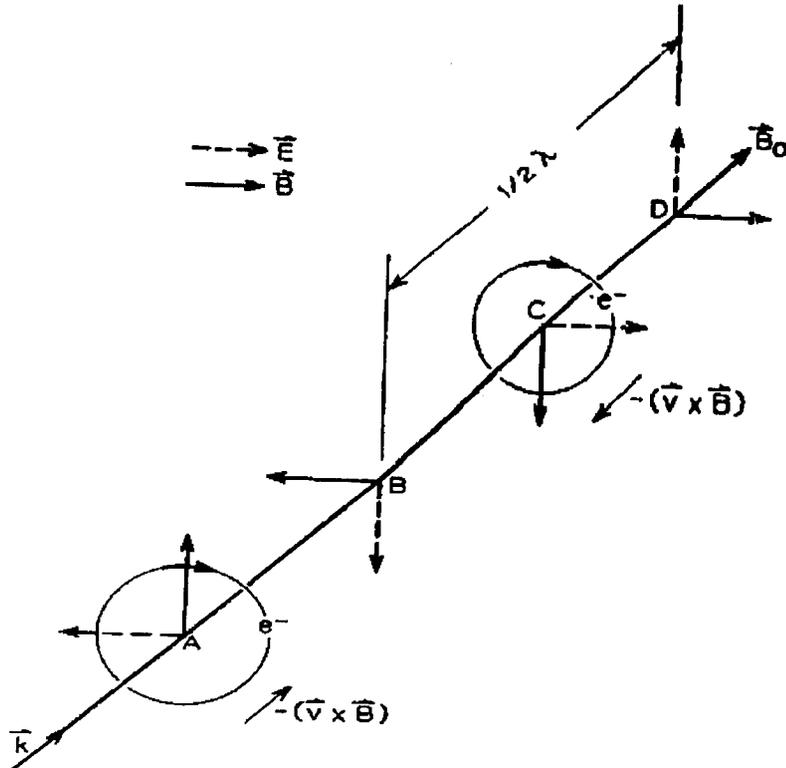


Figura II.1: Partícula sujeita a um campo magnético constante e a uma onda circularmente polarizada (extraída da Ref. [21]). λ aqui se refere ao comprimento de onda.

de massa se processam sincronizadamente de forma tal que a ressonância é mantida ao longo de todo o período de interação havendo, assim, uma aceleração eficiente.

Vale ressaltar que na discussão acima o efeito de emissão ciclotrônica foi desconsiderado, visto que este passa a ser relevante apenas para energias da ordem de TeV [31] que estão além das energias pretendidas neste tipo de acelerador.

Para mostrarmos que o processo de autoressonância realmente ocorre, calculemos como variam as frequências de cíclotron e da onda à medida que a partícula é acelerada. A exposição a seguir segue a apresentada por Davydovskii[20].

Começemos pela frequência de cíclotron da partícula, dada por

$$\Omega_c = \frac{eB_0}{\gamma mc} = \frac{eB_0 c}{\varepsilon},$$

sendo γ o fator relativístico e ε sua energia. Derivando-se a expressão acima em relação ao tempo obtemos diretamente a expressão desejada:

$$\frac{d\Omega_c}{dt} = -\frac{\Omega_c}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{II.9})$$

Agora, nos preocupemos com a frequência da onda vista pela partícula ω_{ef} , o que nos dará um pouco mais de trabalho. Sua forma é dada por

$$\omega_{ef} = \frac{d}{dt}(kz - \omega t) = kv_z - \omega, \quad (\text{II.10})$$

onde v_z é a componente longitudinal da velocidade. Para calcularmos sua variação no tempo, utilizamos a equação de Lorentz para o movimento da partícula:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde \mathbf{p} é o momento linear que pode ser reescrito como

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} = \frac{\varepsilon \mathbf{v}}{c^2}.$$

Juntando as duas expressões acima e tomando a componente na direção z , temos:

$$\frac{v_z}{c} \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{dv_z}{dt} = -e \left[\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \right]. \quad (\text{II.11})$$

Utilizando, então, os campos II.7 e II.8, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = f \mathbf{v} \cdot \mathbf{E},$$

que juntamente com a relação

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E},$$

nos leva a

$$\varepsilon \frac{dv_z}{dt} = (cf - v_z) \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (\text{II.12})$$

Usando a relação de dispersão II.3 e o fato de que

$$\frac{d\omega_{ef}}{dt} = k \frac{dv_z}{dt},$$

chegamos finalmente a

$$\frac{1}{kv_z - f^2\omega} \frac{d\omega_{ef}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{II.13})$$

que é a expressão desejada.

Comparando-se o caso não dispersivo ($f = 1$) de II.13 com II.9 percebemos que as variações das duas frequências estão relacionada por

$$\frac{1}{\omega_{ef}} \frac{d\omega_{ef}}{dt} = \frac{1}{\Omega_c} \frac{d\Omega_c}{dt}. \quad (\text{II.14})$$

Que pode ser integrado, nos levando a

$$\omega_{ef} = C\Omega_c,$$

onde C é uma constante. Logo, se inicialmente a relação de ressonância $\Omega_c = \omega$ é válida, ou seja, $C = 1$, assim o será ao longo de todo o processo de aceleração.

II.4 Formalismo Hamiltoniano e Potencial Efetivo

Como podemos perceber já nas contas feitas na seção anterior, a caracterização da dinâmica da partícula a partir da equação de Lorentz nos leva a cálculos um tanto tediosos, sendo necessário a utilização de várias fórmulas que relacionam as grandezas físicas envolvidas, bem como de alguns *truques* algébricos muitas vezes nada óbvios. Desta forma, para tornarmos o estudo da dinâmica da partícula e a construção do potencial efetivo mais enxutos, nos valeremos do formalismo Hamiltoniano. A dedução do potencial efetivo baseada na equação de Lorentz pode ser encontrada na Ref. [21].

Inicialmente, introduzamos as normalizações, as quais serão utilizadas não somente aqui mas também ao longo de todo o resto do texto. Tempo e espaço serão normalizados a partir da frequência de ciclotron não relativística, $\Omega_{co} \equiv eB_0/mc$, segundo

$$\Omega_{co}t \rightarrow t \quad \text{e} \quad \frac{\Omega_{co}\mathbf{r}}{c} \rightarrow \mathbf{r}.$$

Além disso, momentum, potencial vetor e energia (Hamiltoniano) serão normalizados, respectivamente, à

$$\frac{\mathbf{P}}{mc} \rightarrow \mathbf{P}, \quad \frac{e\mathbf{A}}{mc^2} \rightarrow \mathbf{A} \quad \text{e} \quad \frac{H}{mc^2} \rightarrow H.$$

O Hamiltoniano de uma partícula de carga $-e$ sujeita a campos eletromagnéticos (na ausência de campos eletrostáticos) é então dado por[44]

$$H = \sqrt{1 + (\mathbf{P} + \mathbf{A})^2}, \quad (\text{II.15})$$

onde o potencial vetor é tal que satisfaça as seguintes relações (na forma dimensional)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -c \mathbf{E} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

com \mathbf{E} e \mathbf{B} dados pelas equações II.7 e II.8. Tomando-se o calibre de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) e utilizando as devidas normalizações podemos escrever o potencial vetor na forma

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_o\} + \{\mathbf{A}_w\} \equiv \{x \hat{\mathbf{e}}_y\} + \sqrt{\hat{\rho}} \{\cos[w(fz - t) + \hat{\sigma}] \hat{\mathbf{e}}_x - \text{sen}[w(fz - t) + \hat{\sigma}] \hat{\mathbf{e}}_y\}, \quad (\text{II.16})$$

onde \mathbf{A}_o contém a contribuição estática devido à \mathbf{B}_o e \mathbf{A}_w a contribuição eletromagnética devido à onda, $w \equiv \omega/\Omega_{co}$ e $\hat{\rho} \equiv (eE/2mc\omega)^2$. O Hamiltoniano para a partícula carregada sujeita a um campo magnético constante e a uma onda circularmente polarizada propagando-se paralelamente ao campo é então dado por

$$H = \sqrt{1 + \{P_x + \sqrt{\hat{\rho}} \cos[w(fz - t) + \hat{\sigma}]\}^2 + \{P_y + x - \sqrt{\hat{\rho}} \text{sen}[w(fz - t) + \hat{\sigma}]\}^2 + P_z^2}. \quad (\text{II.17})$$

A partir do Hamiltoniano acima percebemos diretamente que P_y é uma constante de movimento (y é variável cíclica). Isto significa que o sistema possui na realidade apenas dois graus de liberdade espaciais, o que já era esperado visto que existe uma degenerescência em relação ao plano x - y .

A estrutura do Hamiltoniano pode ser simplificada se utilizamos variáveis de centro-guia (I, ψ) introduzidas a partir da função geratriz³

$$\mathcal{F}_3(P_x, P_y, P_z, \psi \equiv x', y', z') = P_x P_y - \frac{P_x^2 \tan \psi}{2} - P_y y' - P_z z',$$

com $I \equiv P'_x$ e onde a linha representa variáveis transformadas. Vale dizer que (I, ψ) representa o par ação-ângulo para o caso de cíclotron sem onda eletromagnética ($\hat{\rho} = 0$) e que I é proporcional ao momento angular da partícula. Escrevendo as *velhas* variáveis em função das novas temos

$$P_x = \sqrt{2I} \cos \psi, \quad x + P_y = \sqrt{2I} \text{sen} \psi,$$

³ver apêndice B

$$P_y = P'_y, \quad y = y' - P_x, \quad (\text{II.18})$$

$$P_z = P'_z \quad \text{e} \quad z = z',$$

sendo o Hamiltoniano dado por (suprimindo-se as linhas)

$$H = \sqrt{1 + 2I + \hat{\rho} + 2\sqrt{2I\hat{\rho}} \cos[\psi + w(fz - t) + \hat{\sigma}]} + P_z^2.$$

Dado que a dependência nas variáveis z , t e ψ só se dá na forma $\psi + w(fz - t)$, é natural que introduzamos uma nova transformação canônica

$$\mathcal{F}_2(I', P'_z, \psi, z, t) = [\psi + w(fz - t)]I' + zP'_z$$

que nos leva a

$$\psi + w(fz - t) \rightarrow \phi, \quad P_z \rightarrow P'_z + wfI \quad \text{e} \quad H \rightarrow H + wI. \quad (\text{II.19})$$

Note-se que a nova variável ϕ representa a diferença de fases entre onda e partícula. O novo Hamiltoniano, que agora não mais depende do tempo e que possui apenas um grau de liberdade, sendo então completamente integrável, passa a ser escrito como

$$H = \sqrt{1 + 2I + \hat{\rho} + 2\sqrt{2I\hat{\rho}} \cos(\phi + \hat{\sigma})} + (P'_z + wfI)^2 - wI \equiv \Gamma - wI, \quad (\text{II.20})$$

onde Γ é o fator relativístico que nas quantidades dimensionalizadas representa a energia. Convém ressaltar que igualmente ao Hamiltoniano, P'_z também é uma quantidade conservada. Esta quantidade será tomada daqui em diante como sendo igual a zero. A implicação física disto é que estaremos analisando a dinâmica de partículas que apresentam uma certa equipartição entre momenta longitudinal e transversal dada pela fórmula $wfI = p_z$, onde $p_z = P_z$ é o momento linear na direção z . Além disso, como estaremos interessados em partículas que inicialmente possuem energia baixa, ou seja, $I \rightarrow 0$, a condição $P'_z = 0$ informa que inicialmente tanto velocidades transversal quanto longitudinal são pequenas.

Levando em conta que H é independente do tempo, podemos deduzir diretamente de II.20 a relação

$$w \frac{dI}{dt} = \frac{d\Gamma}{dt}, \quad (\text{II.21})$$

da onde vemos que variações na ação I estão diretamente relacionadas a variações na energia da partícula. Desta forma, analisando a dinâmica de I através de um potencial efetivo para suas variações estaremos simultaneamente obtendo informação sobre a energização (aceleração) da partícula. Mais explicitamente, como estamos interessados em partículas que inicialmente possuem baixa energia, tomaremos como condição inicial $I = 0$ (energia cinética inicial = 0), de tal forma que ação e energia estarão relacionados por

$$I = (\Gamma - \Gamma_o)/w, \quad (\text{II.22})$$

onde $\Gamma_o = h$ é o valor inicial do fator relativístico e h representa o valor numérico da constante de movimento H . No que segue encontraremos o potencial efetivo que rege a dinâmica de I .

A equação para a evolução temporal da ação é derivada a partir de II.20 como

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\sqrt{2I\hat{\rho}} \text{sen}(\phi + \hat{\sigma})}{\Gamma}. \quad (\text{II.23})$$

Isolando $\cos(\phi + \hat{\sigma})$ e Γ em II.20 como funções de I e da constante h e utilizando estes resultados em II.23, obtemos uma equação fechada para I na forma

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 + V(I) = 0.$$

Na equação acima, $V(I)$ é o potencial efetivo que dita a dinâmica de I , escrito como

$$V(I) = \frac{[w^2 I^2 (f^2 - 1) + 2I(1 - hw)]^2 - 8I\hat{\rho}}{4(h + wI)^2} \quad (\text{II.24})$$

onde foi utilizado o fato de que $h = \sqrt{1 + \hat{\rho}}$. A partir do potencial acima, podemos obter facilmente informação sobre a máxima aceleração I_{max} da partícula sob diferentes condições, bastando, para tanto, encontrarmos as raízes de $V(I)$. É o que faremos na próxima seção.

II.5 Discussão

Tendo-se encontrado o potencial efetivo que dita a variação de I , passaremos agora à análise dos diferentes tipos de dinâmica possíveis no sistema.

II.5.1 Caso autoressonante

Como foi visto na seção II.3, para o caso de partícula inicialmente em ressonância com a onda e sendo esta não dispersiva, ocorre o fenômeno da autoressonância. O sincronismo inicial entre partícula e onda é auto-sustentado ao longo de todo o período de aceleração levando a um ganho de energia ilimitado por parte da partícula. Analisemos agora este caso do ponto de vista do formalismo Hamiltoniano e utilizando $V(I)$.

Tomando-se a condição de laser não dispersivo, $f = 1$, e a condição de ressonância inicial, a qual pode ser inferida a partir da definição de w como sendo

$$w \equiv \omega/\Omega_{co} = h^{-1}, \quad (\text{II.25})$$

podemos reescrever II.24 como

$$V(I) = -\frac{2I\hat{\rho}}{h^2(h^2 + I)^2}. \quad (\text{II.26})$$

Na figura II.2 é mostrado (linha sólida) o potencial acima para $\hat{\rho} = 1$. Não entraremos em detalhe aqui na discussão do que representa na prática o valor de amplitude escolhido (bem como dos demais parâmetros vindouros), visto que neste capítulo estamos interessados apenas numa análise qualitativa da dinâmica da partícula, e esta se mostra independente dos valores específicos dos parâmetros. Além da raiz trivial, o potencial vai a zero apenas para $I \rightarrow \infty$, da onde vemos que a variação de I para este caso é realmente ilimitada.

O aparecimento da autoressonância pode ser mais diretamente notado se analisamos a dinâmica de ϕ . Para o caso autoressonante, derivamos de II.20 a seguinte expressão

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{1 + \sqrt{\hat{\rho}/2I} \cos \phi + w^2 I}{\Gamma} - w. \quad (\text{II.27})$$

Devido a existência do termo $\sqrt{\hat{\rho}/2I} \cos \phi$ em II.27 e ao fato de $I \sim 0$ para $t = 0$, podemos concluir que logo nos primeiros instantes da interação a partícula migrará rapidamente para o ponto $\phi = \pi/2$. A partir daí, utilizando II.22 e II.25, vemos que II.27 reduz-se simplesmente a $d\phi/dt = 0$, independente do valor de I e portanto que se preserva ao longo de todo o período restante. Isto mostra que a sincronia entre onda e partícula é realmente mantida.

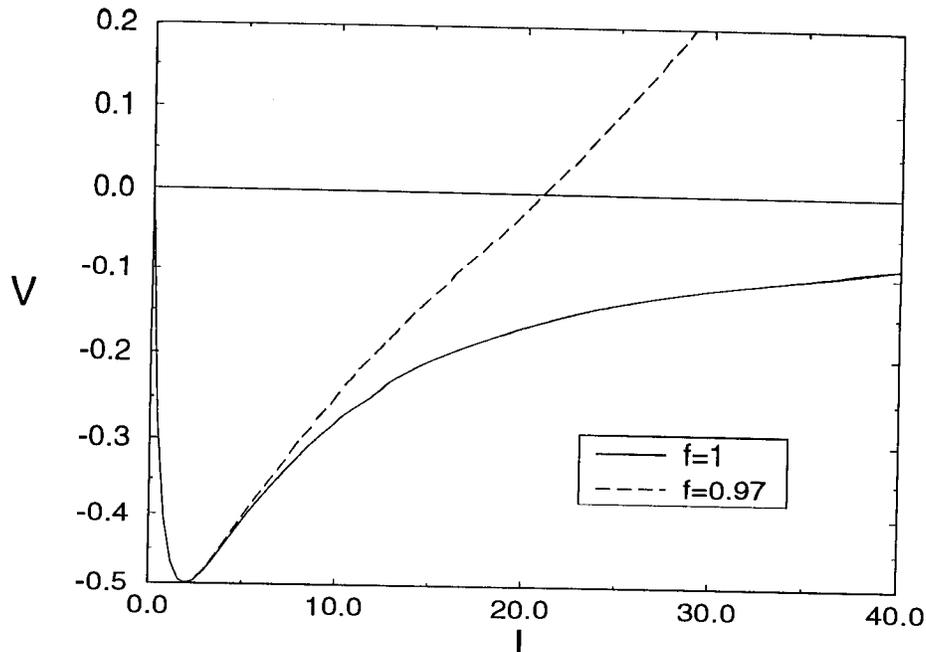


Figura II.2: Potencial efetivo $V(I)$ vs. I para o caso ressonante com $\hat{\rho} = 1$.

Como uma última característica interessante da autoressonância, podemos calcular qual é o ganho de energia da partícula ao longo do processo de aceleração. Para tanto, utilizemos a relação II.21 juntamente com II.23 que nos permite escrever

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\sqrt{2w(\Gamma - h)}\hat{\rho}}{\Gamma}. \quad (\text{II.28})$$

Esta equação pode ser integrada diretamente, levando a

$$2\sqrt{\Gamma - h} [3\Gamma - 2(\Gamma - h)] = 3\sqrt{2w\hat{\rho}}t.$$

No limite assintótico em que $t \rightarrow \infty$ e $\Gamma \gg h$ a expressão acima reduz-se a

$$\Gamma \approx \left(\frac{9w\hat{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (\text{II.29})$$

da onde vemos que a aceleração é bastante eficiente com a energia da partícula crescendo segundo $\Gamma \sim t^{2/3}$.

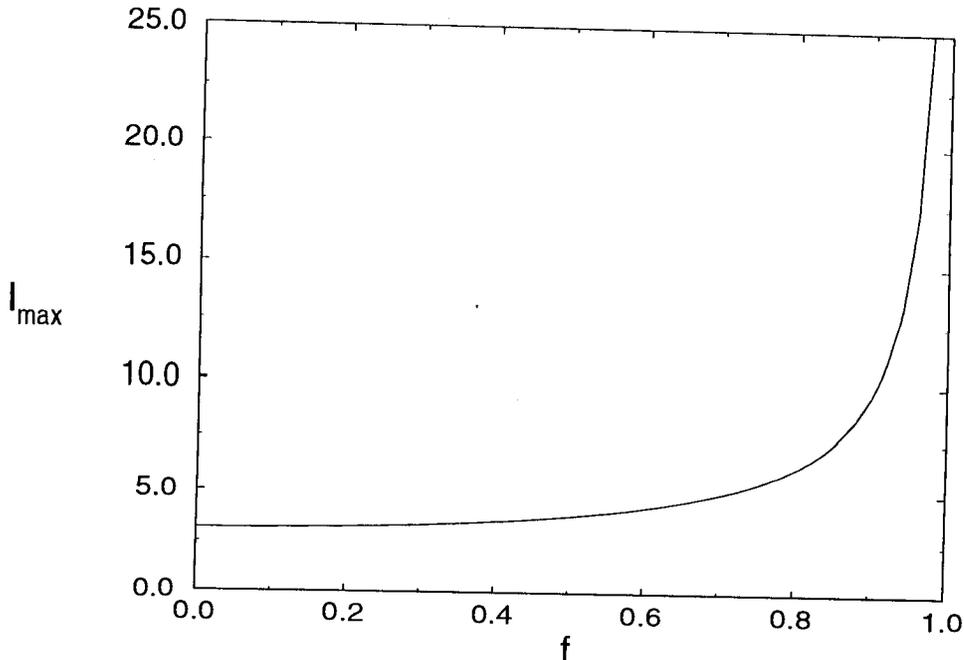


Figura II.3: Valor máximo da ação I_{max} vs. f para $\hat{\rho} = 1$.

II.5.2 Caso dispersivo

Passemos agora para o caso dispersivo onde $f \neq 1$. Neste caso, o potencial efetivo é dado por

$$V(I) = \frac{w^4 I^4 (f^2 - 1)^2 - 8I\hat{\rho}}{4(h + wI)^2}. \quad (\text{II.30})$$

Retome-se a figura II.2 onde compara-se $V(I)$ para o caso $f = 1$ e $f \neq 1$. Percebemos diretamente que devido a inclusão do termo dispersivo em $V(I)$, este passa a apresentar uma nova raiz não trivial que limita as excursões de I . Definindo I_{max} como o máximo valor possível para ação, obtemos de II.30

$$I_{max} = 2 \left[\frac{\hat{\rho}(1 + \hat{\rho})^2}{(f^2 - 1)^2} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{II.31})$$

Na figura II.3 é plotado I_{max} vs. f obtido a partir de II.31. Na figura vemos claramente a relevância do papel da dispersão na aceleração da partícula, que rapidamente cai à medida que tomamos $f < 1$. Isto já era esperado dado que neste caso a partícula não entra em sincronia com a onda, ganhando e perdendo energia desta.

Infelizmente, em experimentos reais em laboratório sempre haverá a guia de ondas confinante onde o modo eletromagnético é excitado. Desta forma, na prática estaremos

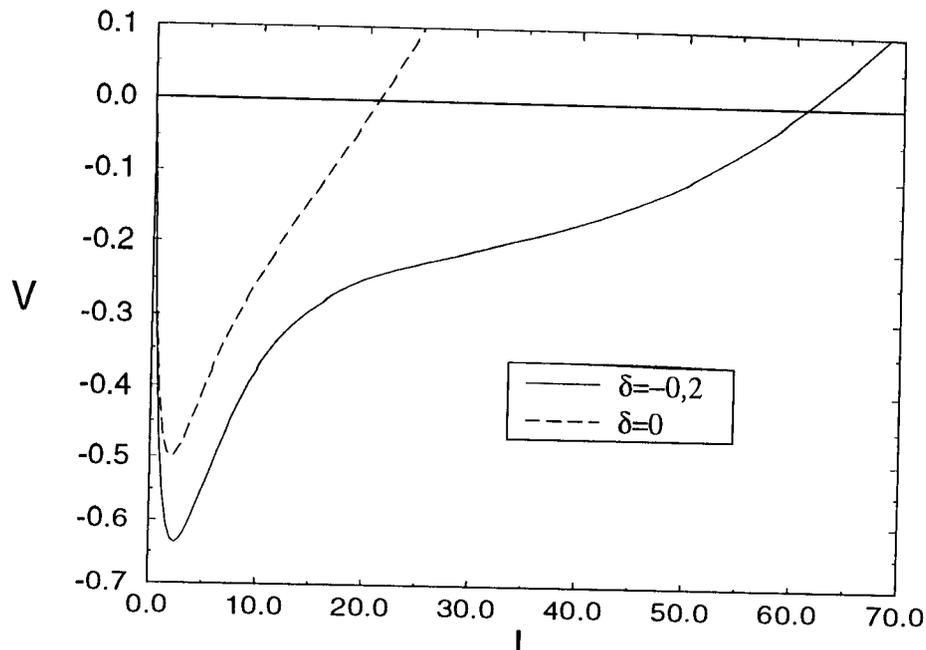


Figura II.4: Comparação entre os potências efetivos $V(I)$ obtidos sem ($\delta = 0$) e com descasamento de frequências, para $\hat{\rho} = 1$ e $f = 0,97$

sempre lidando com casos em que $f \neq 1$ e onde a aceleração é extremamente ineficiente. Devemos então procurar alguma forma de reverter o processo de dessincronização imposto pela dispersão. Como foi dito na Introdução, Cap. I, alguns métodos já foram idealizados com este propósito. Aqui, proporemos um novo método: a inclusão de um descasamento inicial entre as frequências de cíclotron e da onda. Ou seja, estudaremos que efeitos há sobre a dinâmica da partícula o fato de inicialmente não tomarmos a condição de ressonância exata.

II.5.3 Caso com descasamento inicial de frequências

O descasamento inicial entre as frequências de cíclotron e da onda é introduzido tomando-se

$$w = h^{-1} + \delta, \quad (\text{II.32})$$

onde δ é definido como o parâmetro (normalizado) de descasamento de frequências. Utilizando-se a relação acima em II.24 obtemos o potencial efetivo a partir do qual analisaremos a dinâmica da partícula.

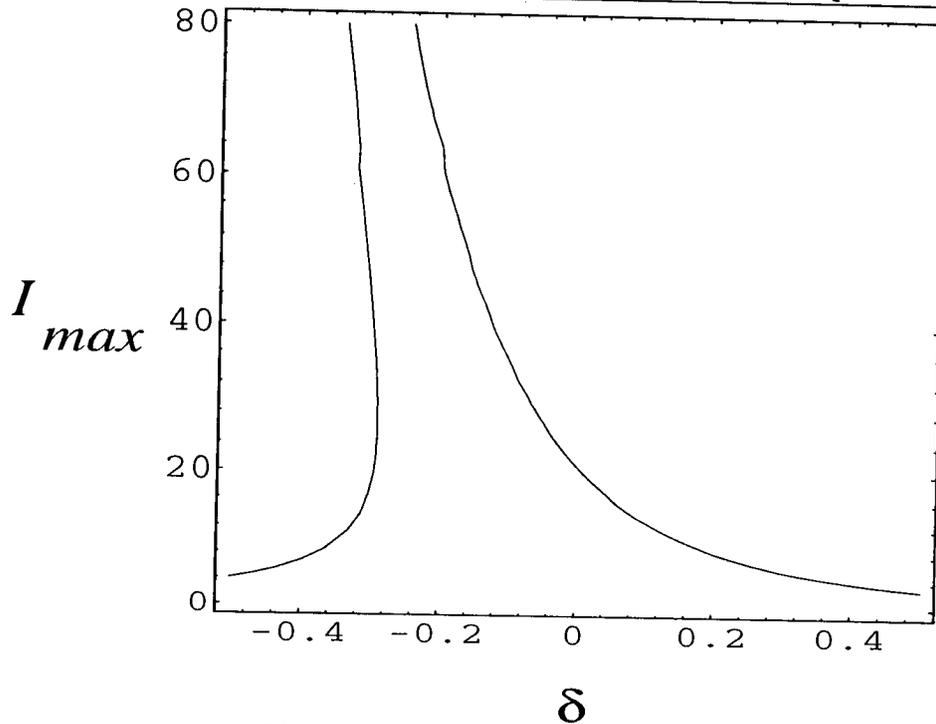


Figura II.5: I_{max} vs. δ para $\hat{\rho} = 1$ e $f = 0,97$

Inicialmente comparamos $V(I)$ para dois casos com dispersão, um sem descasamento de frequências ($\delta = 0$) e outro com. Isto é mostrado na figura II.4. Vemos claramente que neste caso a introdução de uma pequena defasagem inicial entre as frequências levou a um aumento considerável na energia máxima possível para a partícula.

Uma melhor análise do efeito da inclusão do descasamento de frequências pode ser obtida a partir da figura II.5, onde são mostradas as raízes de $V(I)$ (lembrando que I_{max} é a primeira raiz não trivial do potencial). Estas raízes são a solução da equação polinomial abaixo

$$w^4(f^2 - 1)^2 I^3 + 4w^2(f^2 - 1)(1 - \delta h) I^2 + 4(1 + \delta h)^2 I + 8(1 - h^2) = 0. \quad (\text{II.33})$$

Como vemos na figura, escolhendo-se convenientemente o valor de δ é possível quase que reobter a total aceleração conseguida no caso sem dispersão, aumentando em muito a máxima energia possível da partícula. Para o caso mostrado este valor é $\delta \approx -0,25$.

Até o momento, nada foi dito a respeito do efeito que a dinâmica da partícula exerce sobre a onda. Na prática, contudo, certamente a onda sente a presença da partícula respondendo dinamicamente à ela. Nos casos apresentados na sub-seção II.5.2, até poderíamos argumentar que como a interação onda-partícula é pouco eficiente, a dinâmica da onda é

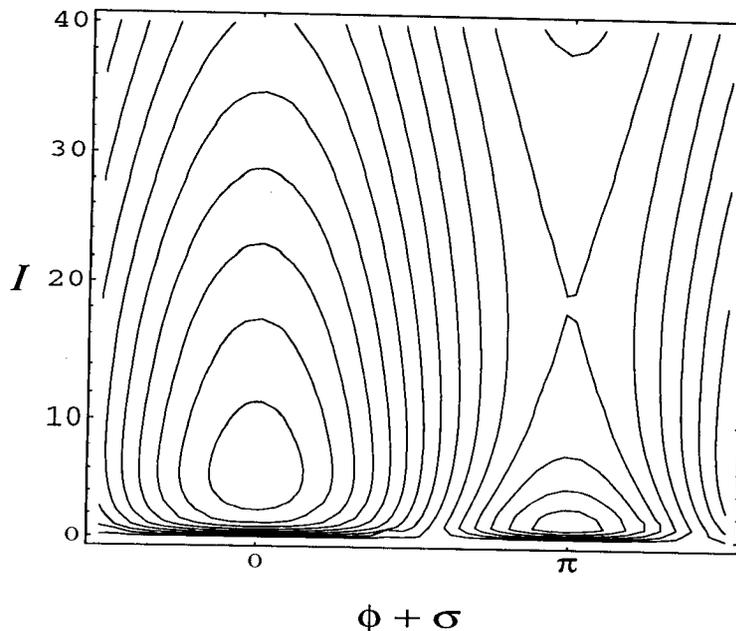


Figura II.6: Espaço de fases do Hamiltoniano para $\hat{\rho} = 1$, $f = 0,97$ e $\delta = -0,2$.

igualmente pouco importante, podendo ser desprezada. Entretanto, como vimos acima, a inclusão do descasamento de frequências possibilita reverter, de certa forma, o processo de de-sincronização onda-partícula causado pela dispersão, levando novamente a uma interação eficiente. Logo, vemos da necessidade da inclusão dos efeitos auto-consistentes na interação onda-partícula para uma correta descrição da física do sistema.

II.6 Algumas Observações à Respeito do Período da Órbita da Partícula

Antes, porém, de ingressarmos no estudo do formalismo auto-consistente façamos uma breve discussão no que concerne ao período das órbitas descritas pela partícula, seja ela de baixa ou alta energia. Nossa intenção com isso é a de mostrar que este período pode ser considerado como sendo bem maior que o período da onda eletromagnética $T_w = 2\pi/\omega$. A importância disto se tornará clara no próximo capítulo.

Inicialmente investiguemos o espaço de fases referente ao Hamiltoniano II.20. Na figura II.6 ele é mostrado para valores típicos de dispersão e descasamento de frequências, $f = 0,97$ e $\delta = -0,2$. Analisando a figura percebemos a presença de dois pontos fixos elípticos na

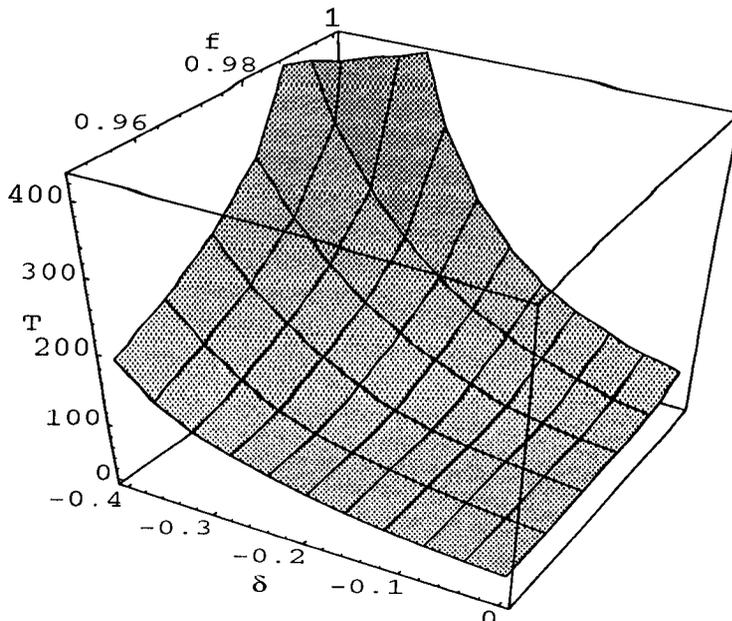


Figura II.7: Período T associado a dinâmica da partícula como função de δ e f para $\phi_f = 0$. Consideramos $\hat{\rho} = 1$

região $I \sim 5$. Partículas próximas a estes pontos possuem um período finito associado ao seu movimento. À medida que nos afastamos dos pontos fixos, o período naturalmente tende a aumentar⁴ indo a infinito na separatriz[39]. Vemos claramente na figura a separatriz associada ao ponto fixo direito, o que nos leva a crer que para este *lobo* (direito) do espaço de fases a variação do período à medida que nos afastamos do ponto elíptico é bastante grande (ou pelo menos bastante maior que a do lobo esquerdo). Contudo, o que nos importa neste momento é que o período dos pontos fixos representa o mínimo valor que poderemos encontrar no sistema. Desta forma, mostrando que estes são maiores que o período da onda, estaremos automaticamente mostrando que isto é válido para todas as trajetórias possíveis do sistema.

Tanto da figura quanto da equação II.23 para dI/dt percebemos que os pontos fixos encontram-se para $\sin(\phi_f + \hat{\sigma}) = 0$, ou seja, $\phi_f + \hat{\sigma} = 0, \pi$, onde o subíndice “ f ” representa ponto fixo. A determinação de I_f é obtida resolvendo-se

$$\frac{d\phi_f}{dt} = \frac{\partial H(I, \phi_f)}{\partial I} = 0. \quad (\text{II.34})$$

⁴veremos isto mais detalhadamente no capítulo V

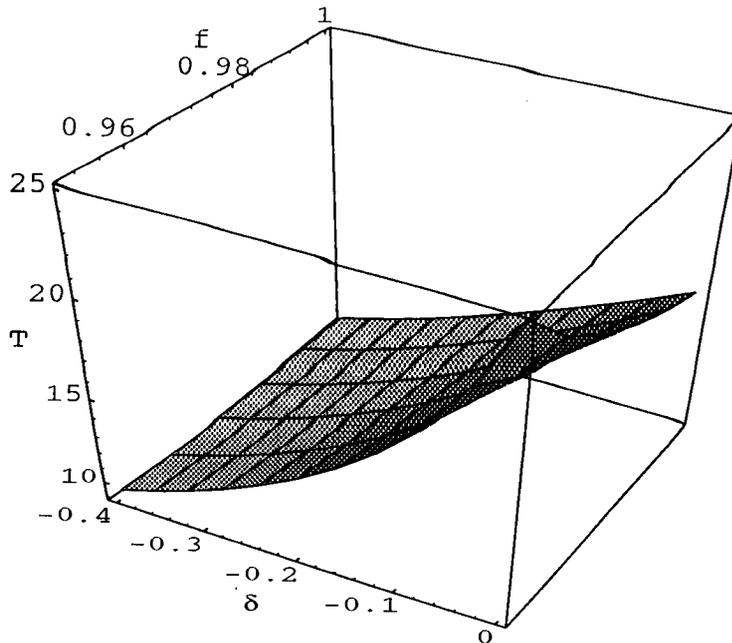


Figura II.8: Período T associado a dinâmica da partícula como função de δ e f para $\phi_f = \pi$. Consideramos $\hat{\rho} = 1$

Tendo-se posse das coordenadas do ponto fixo, seu período T pode ser encontrado expandindo-se o Hamiltoniano II.20 em torno de (I_f, ϕ_f)

$$H(I, \phi) \approx \frac{1}{2}[F(I - I_f)^2 + G(\phi - \phi_f)^2], \quad (\text{II.35})$$

onde $F \equiv \partial^2 H(I_f, \phi_f)/\partial I^2$ e $G \equiv \partial^2 H(I_f, \phi_f)/\partial \phi^2$, sendo $T = 2\pi/\sqrt{FG}$.

Nas figuras II.7 e II.8 é mostrado T como função de δ e f para o ponto fixo $\phi_f = 0$ e $\phi_f = \pi$, respectivamente. No primeiro caso, o mínimo valor de período encontrado é $T \sim 30$ para $\delta = 0$ e $f = 0,95$. Este valor cresce rapidamente para maiores (e, como veremos no futuro, mais realísticos) valores de f , de tal forma que para este lobo, que sem dúvida representa a maior porção do espaço de fases, T realmente pode ser considerado bem maior que T_w . Para o lobo esquerdo, o mínimo valor de T é $T \sim 10$, não havendo uma grande dependência nos valores de δ e f . Este valor poderia ser considerado como sendo da ordem de T_w . Porém, devemos lembrar que para este lobo o crescimento de T à medida que nos afastamos do ponto fixo é extremamente rápido, de forma que apenas uma região bem próxima a (ϕ_f, I_f) apresenta tão baixos períodos. Ou seja podemos crer que a maior porção do espaço de fases realmente cumpre a relação $T \gg T_w$. Vale ressaltar ainda que

qualquer diminuição na amplitude da onda levaria a um aumento no período da partícula.

Capítulo III

Formalismo Auto-consistente

III.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos o formalismo auto-consistente, ou seja, encontraremos o formalismo que descreve a interação partículas-onda levando em conta não só a dinâmica que as partículas apresentam, que foi o que discutimos no capítulo anterior, mas igualmente a dinâmica que a onda apresenta devido à presença das partículas. Para tanto, deveremos obter as equações de movimento que descrevem a evolução da onda eletromagnética a partir das equações de Maxwell. Neste intuito, faremos uso do método de múltiplas escalas de tempo, onde suporemos que as variações que ocorrem na amplitude e na fase da onda são muito mais lentas do que sua oscilação de alta frequência. Isto é, suporemos que a onda é lentamente modulada. A dedução das equações para a dinâmica da onda será apresentada na seção III.2.

Nas demais seções, faremos uma análise da dinâmica auto-consistente. Iniciaremos por apresentar na seção III.4 a análise feita a partir da aproximação de macropartícula que nos possibilita descrever todas as partículas do feixe utilizando apenas uma. Neste caso, a dinâmica é de baixa dimensionalidade (apenas dois graus de liberdade: um da onda e outro da macropartícula) e será possível construir um potencial efetivo para as variações de energia das partículas aos moldes do que foi feito no capítulo anterior.

Na seção subsequente, então, testaremos a aproximação de macropartícula a partir da in-

tegração numérica das equações auto-consistentes para a interação onda-feixe de partículas. Compararemos resultados obtidos numericamente com os obtidos via sistema de baixa dimensionalidade, analisando para quais situações a aproximação é válida.

Os principais resultados deste capítulo encontram-se na referência [43].

III.2 Dinâmica da onda

A partir das equações de Maxwell obtemos a equação para a evolução do potencial vetor no calibre de Coulomb dada na forma dimensional por[44]

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_\perp, \quad (\text{III.1})$$

sendo \mathbf{J}_\perp a componente transversal do vetor densidade de corrente \mathbf{J} . Por componente transversal entendemos a componente de \mathbf{J} que possui divergente igual a zero. Não é difícil perceber, dado o movimento que as partículas descrevem em torno do campo magnético \mathbf{B}_0 (o qual é discutido no apêndice B) e o fato de que as partículas são aceleradas ao longo do eixo z , que esta componente é justamente a componente da densidade de corrente no plano perpendicular a \mathbf{B}_0 . Sendo assim, podemos escrevê-la como

$$\mathbf{J}_\perp(\mathbf{r}, t) = -e \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{\perp,j}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)], \quad (\text{III.2})$$

onde N é o número total de partículas presentes no sistema e $\mathbf{v}_{\perp,j}(t)$ e $\mathbf{r}_j(t)$ representam a componente perpendicular da velocidade e a posição instantânea da j -ésima partícula, respectivamente.

Nosso trabalho, então, é resolver auto-consistentemente a equação III.1 dado III.2. Para tanto, suporemos que a densidade do feixe de partículas (e conseqüentemente a densidade de corrente) é suficientemente tênue de forma tal que a presença das partículas seja sentida apenas como uma perturbação sobre o vácuo existente na guia de ondas. Sendo assim, III.1 pode ser resolvida perturbativamente.

Antes de mais nada, escrevamos as equações acima na forma adimensional. Sendo a

densidade de corrente adimensionalizada segundo $c^2 \mathbf{J} / e \Omega_{co}^3 \rightarrow \mathbf{J}$, temos

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A} = -\frac{4\pi e^2 \Omega_{co}}{mc^3} \mathbf{J}_\perp, \quad (\text{III.3})$$

onde

$$\mathbf{J}_\perp(\mathbf{r}, t) = -\sum_{j=1}^N \mathbf{v}_{\perp,j}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)], \quad (\text{III.4})$$

com $\mathbf{v}/c \rightarrow \mathbf{v}$ e \mathbf{r} adimensional.

III.2.1 Expansão perturbativa com múltiplas escalas de tempo

Para uma descrição mais detalhada do método perturbativo com múltiplas escalas de tempo ver o final do Cap. 1 da referência [45], onde também é apresentado um exemplo bastante ilustrativo. Porém, sucintamente podemos descrever o método da seguinte forma. Numa análise perturbativa convencional, expandiríamos o potencial vetor em série de potências de um parâmetro perturbativo μ (no nosso caso, por exemplo, a densidade normalizada de partículas)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \mu \mathbf{A}^{(1)} + \mu^2 \mathbf{A}^{(2)} + \dots, \quad (\text{III.5})$$

e resolveríamos III.3 a cada ordem de μ . Este procedimento, entretanto, nos levaria ao aparecimento de termos seculares nas soluções $\mathbf{A}^{(n)}$, o que sabemos não ser fisicamente aceitável. Além disso, já de antemão podemos imaginar que como o feixe é bastante tênue, a onda terá de interagir um tempo *razoável* com as partículas para que os efeitos destas sobre a primeira sejam notados, isto é, as variações na onda devido a interação ocorrerão tipicamente para tempos bem maiores que seu próprio período de oscilação. Ou seja, devido à presença das partículas, a onda apresentará sobre suas oscilações rápidas uma modulação lenta. Para incorporar ao método perturbativo esta disparidade entre tempos típicos de oscilação e modulação e ainda nos possibilitar a remoção dos termos seculares, estendemos o número de variáveis temporais de uma variável t para várias variáveis t_0, t_1, t_2, \dots , onde $t_0 = t, t_1 = \mu t, t_2 = \mu^2 t$, etc, e tomando-as como variáveis independentes do ponto de vista

operacional. Desta forma, a derivada segunda no tempo passa a ser escrita como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} + \dots \quad (\text{III.6})$$

A inclusão explícita do parâmetro perturbativo μ foi feita neste parágrafo apenas em caráter ilustrativo, sendo ela desnecessária. No que segue, não explicitaremos um parâmetro perturbativo.

Em ordem zero de perturbação, a equação fica

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \right] \mathbf{A}^{(0)} = 0. \quad (\text{III.7})$$

Rigorosamente, juntamente com a equação III.3 deveríamos levar em conta as condições de contorno impostas pela guia de ondas, de tal forma que a equação acima nos levaria ao potencial vetor associado aos campos eletromagnéticos em uma guia cilíndrica, eqs. II.7 e II.8, mais a contribuição proveniente de \mathbf{B}_o . Contudo, sabemos que no limite que nos interessa (raio de giro das partículas muito menor que o raio da guia de ondas) a onda que efetivamente interagirá com as partículas é dada pelo potencial vetor \mathbf{A}_w da eq. II.16, sendo a parte transversal da equação acima (derivadas em x e y) responsável apenas pelo aparecimento da dispersão $f \neq 1$. Sendo assim, adotaremos como solução de III.7 $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}_w + \mathbf{A}_o$ que será escrito na forma conveniente

$$\mathbf{A}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\hat{\rho}} e^{i\hat{\sigma}} e^{i\omega(fz-t_0)} \hat{\mathbf{e}}_c + c.c. \right] + x \hat{\mathbf{e}}_y, \quad (\text{III.8})$$

com $\hat{\mathbf{e}}_c \equiv \hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y$. Além disso, como a onda é lentamente modulada no tempo, temos que $\hat{\rho} = \hat{\rho}(t_1)$ e $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(t_1)$. Na realidade, $\hat{\rho}$ e $\hat{\sigma}$ poderiam depender igualmente de t_2 , t_3 , ..., porém, aqui nos ateremos a primeira ordem perturbativa de tal forma que estas dependências serão suprimidas.

A equação em primeira ordem é

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \right] \mathbf{A}^{(1)} - 2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}^{(0)}}{\partial t_0 \partial t_1} = - \frac{4\pi e^2 \Omega_{co}}{mc^3} \mathbf{J}_\perp^{(0)}, \quad (\text{III.9})$$

onde o sobrescrito "(0)" na densidade de corrente indica que esta deve ser calculada a partir do movimento das partículas sujeitas aos campos descritos por $\mathbf{A}^{(0)}$, ou seja, a partir

do Hamiltoniano II.20. Utilizando III.8 em III.9, encontramos

$$\left[\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \right] \mathbf{A}^{(1)} = -w \left[i \frac{d(\sqrt{\rho} e^{i\hat{\sigma}})}{dt_1} e^{i\omega(fz-t)} \hat{\mathbf{e}}_c + c.c. \right] - \frac{4\pi e^2 \Omega_{co}}{mc^3} \mathbf{J}_\perp^{(0)}. \quad (\text{III.10})$$

A equação acima deve ser pensada como uma equação para $\mathbf{A}^{(1)}$. Como o operador diferencial que atua sobre $\mathbf{A}^{(1)}$ é o mesmo que atuava sobre $\mathbf{A}^{(0)}$ em III.7, os termos responsáveis pelo aparecimento de secularidades na solução de III.10 são aqueles proporcionais a $e^{\pm i\omega(fz-t_0)}$, e, sendo assim, devemos removê-los.

Certamente, o primeiro termo à direita da igualdade em III.10 é um termo secular. Além deste, possivelmente $\mathbf{J}_\perp^{(0)}$ também possui alguma contribuição do tipo secular. Para podermos determinar qual é esta contribuição, expandimos $\mathbf{J}_\perp^{(0)}$ em série de Fourier nas variáveis rápidas na seguinte forma

$$\mathbf{J}_\perp^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{p_x, p_y, p_z, q=-\infty}^{\infty} J_{p_x, p_y, p_z, q} e^{i\omega(\vec{\kappa} \cdot \mathbf{r} - qt_0)} \hat{\mathbf{e}}_c + c.c. \quad (\text{III.11})$$

onde

$$J_{p_x, p_y, p_z, q} = \frac{1}{VT} \int_0^T dt'_0 \int_V d^3 \mathbf{r}' (\mathbf{J}_\perp \cdot \hat{\mathbf{e}}_c^*) e^{-i\omega(\vec{\kappa} \cdot \mathbf{r}' - qt'_0)}, \quad (\text{III.12})$$

$\vec{\kappa} \equiv 2\pi c(p_x \hat{\mathbf{e}}_x + p_y \hat{\mathbf{e}}_y)/\omega r_\perp + p_z f \hat{\mathbf{e}}_z$, r_\perp representa o raio típico do feixe, o superescrito “*” indica complexo conjugado e são introduzidos o volume V e o período T (adimensionais) tais que

$$\frac{1}{VT} \int_0^T dt'_0 \int_V d^3 \mathbf{r}' e^{-i\omega[(\vec{\kappa} - \vec{\kappa}') \cdot \mathbf{r}' - (q - q')t'_0]} = \delta_{p_x, p'_x} \times \delta_{p_y, p'_y} \times \delta_{p_z, p'_z} \times \delta_{q, q'},$$

sendo $\delta_{k, k'}$ a delta de Kronecker. Com isso, a condição de não secularidade pode ser expressa como

$$i \frac{d(\sqrt{\rho} e^{i\hat{\sigma}})}{dt_1} = -\frac{2\pi e^2 \Omega_{co}}{wmc^3} J_{0,0,1,1}. \quad (\text{III.13})$$

A equação acima nos fornece a dinâmica lenta das variáveis da onda. Devemos, então, calcular explicitamente a componente $J_{0,0,1,1}$ da série de Fourier.

III.2.2 Cálculo da contribuição secular da densidade de corrente

Utilizando a expressão para a corrente, eq. III.4, em III.12, obtemos para o termo $J_{0,0,1,1}$ a seguinte equação

$$J_{0,0,1,1} = -\frac{1}{VT} \sum_{j=1}^N \int_0^T dt'_0 [\mathbf{v}_{\perp,j}(t'_0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_c^*] \int_V d^3\mathbf{r}' \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t'_0)] e^{-iw(fz' - t'_0)}. \quad (\text{III.14})$$

A parte espacial pode ser integrada diretamente, levando a

$$J_{0,0,1,1} = -\frac{1}{VT} \sum_{j=1}^N \int_0^T dt'_0 [\mathbf{v}_{\perp,j}(t'_0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_c^*] e^{-iw(fz_j - t'_0)}. \quad (\text{III.15})$$

Agora, para integrarmos a parte temporal necessitamos escrever a expressão para a velocidade das partículas. Para tanto, utilizamos a equação que relaciona momento cinético e momento canônico, dada por $\mathbf{p} = \mathbf{P} - e\mathbf{A}/c$, onde $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ é o momento cinético da partícula. Reescrevendo a expressão na forma adimensional, encontramos para a componente transversal da velocidade da j -ésima partícula em ordem zero

$$\Gamma_j \mathbf{v}_{\perp,j} = \mathbf{P}_{\perp,j} + \mathbf{A}^{(0)}. \quad (\text{III.16})$$

Fazendo-se uso das relações canônicas II.18 e da expressão III.8 para $\mathbf{A}^{(0)}$, obtemos

$$[\mathbf{v}_{\perp,j}(t'_0) \cdot \hat{\mathbf{e}}_c^*] = \frac{\sqrt{2I_j}}{\Gamma_j} e^{-i\psi_j} + \frac{\sqrt{\hat{\rho}}}{\Gamma_j} e^{i\hat{\sigma}} e^{iw(fz_j - t'_0)}, \quad (\text{III.17})$$

com Γ_j dado pela eq. II.20. Sendo assim, eq. III.15 passa a ser escrita como

$$J_{0,0,1,1} = -\frac{1}{VT} \sum_{j=1}^N \int_0^T dt'_0 \left[\frac{\sqrt{2I_j}}{\Gamma_j} e^{-i\psi_j} + \frac{\sqrt{\hat{\rho}}}{\Gamma_j} e^{i\hat{\sigma}} \right], \quad (\text{III.18})$$

onde foi usada a relação canônica adicional $\phi = \psi + w(fz - t)$, eq. II.19.

Neste estágio, percebemos que todas as variáveis do integrando acima, não só as relativas a onda $(\hat{\rho}, \hat{\sigma})$, mas também as relativas as partículas (I_j, ϕ_j) , possuem dependência temporal apenas na escala lenta. Isto foi mostrado na seção II.6 através do cálculo direto do período associado aos pontos fixos (que são as trajetórias de menor período) do sistema Hamiltoniano II.20. Lá, encontramos que possivelmente apenas uma pequena porção de

espaço de fases próxima a um dos pontos fixos poderia apresentar períodos da ordem do período da onda, entretanto, como estas trajetórias possuem por si só uma dinâmica bastante restrita, sua relevância na dinâmica da onda também será pequena. De qualquer forma, é intuitivo que esta disparidade entre períodos das partículas e da onda realmente ocorra, dado o significado físico das quantidades I_j e ϕ_j . Qual seja, ϕ_j representa a diferença de fases entre a partícula e a onda e a variação de I_j está diretamente associada a variação da energia da partícula que, por sua vez, se dá ao longo de vários ciclos da onda.

Desta forma, obtemos

$$J_{0,0,1,1} = -\frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\sqrt{2I_j}}{\Gamma_j} e^{-i\phi_j} + \frac{\sqrt{\hat{\rho}}}{\Gamma_j} e^{i\hat{\sigma}} \right]. \quad (\text{III.19})$$

III.2.3 Equações de movimento para as variáveis da onda

Utilizando III.19 em III.13 e separando as partes real e imaginária, chegamos finalmente as equações de movimento para as variáveis da onda

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{2I_j}\hat{\rho}}{\Gamma_j} \text{sen}(\phi_j + \hat{\sigma}) \quad (\text{III.20})$$

e

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = -\frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\Gamma_j} \left[\sqrt{\frac{2I_j}{\hat{\rho}}} \cos(\phi_j + \hat{\sigma}) + 1 \right], \quad (\text{III.21})$$

onde já foram suprimidos os sub-índices referentes à múltipla escala de tempo e definimos $\lambda = \omega_p^2/\Omega_{co}\omega$, com $\omega_p^2 \equiv 4\pi e^2 N/mV_d$ fazendo o papel de uma frequência de plasma média, sendo $V_d = c^3V/\Omega_{co}^3$ o volume dimensional (convenientemente usado para o aparecimento da frequência de plasma). Note-se que o parâmetro λ é proporcional a densidade $n \equiv N/V_d$ do feixe de partículas, sendo ele o parâmetro perturbativo que satisfaz $\lambda \ll 1$ e que dita a dinâmica temporal lenta.

III.3 Formalismo Hamiltoniano e Constantes de Movimento para a Dinâmica Auto-consistente

Analisando-se as equações encontradas na seção anterior que descrevem a dinâmica da onda juntamente com as equações derivadas a partir do Hamiltoniano II.20 que descrevem a dinâmica de cada uma das partículas, chega-se a uma interessante conclusão: basta introduzirmos uma mudança de escala nas variáveis da onda segundo $\hat{\rho} = \lambda\rho$ e $\hat{\sigma} = -\sigma/N$ que passa a ser possível descrever toda a dinâmica auto-consistente a partir de um único Hamiltoniano generalizado que nos fornece tanto a dinâmica das partículas quanto a dinâmica da onda. Este Hamiltoniano generalizado é dado por

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N H_j \quad (\text{III.22})$$

com

$$H_j = \sqrt{1 + 2I_j + (wfI_j)^2 + 2\sqrt{2\lambda I_j \rho} \cos(\phi_j - \sigma/N)} + \lambda\rho - wI_j = \Gamma_j - wI_j, \quad (\text{III.23})$$

sendo as equações de movimento:

$$\frac{dI_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_j} = \frac{\sqrt{2\lambda I_j \rho}}{\Gamma_j} \text{sen}(\phi_j - \sigma/N), \quad (\text{III.24.a})$$

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_j} = \frac{1 + w^2 f^2 I_j + \sqrt{\lambda\rho/2I_j} \cos(\phi_j - \sigma/N)}{\Gamma_j} - w, \quad (\text{III.24.b})$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{2\lambda I_i \rho}}{\Gamma_i} \text{sen}(\phi_i - \sigma/N), \quad (\text{III.24.c})$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \lambda \sum_{i=1}^N \frac{1 + \sqrt{2I_i/\lambda\rho} \cos(\phi_i - \sigma/N)}{2\Gamma_i}. \quad (\text{III.24.d})$$

No Hamiltoniano acima, o par (ρ, σ) é canonicamente conjugado, sendo ρ o momento e σ a coordenada. Visto que o Hamiltoniano III.22 não depende explicitamente do tempo, imediatamente reconhecemos \mathcal{H} como uma primeira constante de movimento, nos possibilitando derivar a relação

$$w \frac{d\langle I_j \rangle}{dt} = \frac{d\langle \Gamma_j \rangle}{dt}, \quad (\text{III.25})$$

onde $\langle \rangle$ representa a média sobre partículas (i.e., média sobre j).

Além disso, por comparação direta das equações III.24a e III.24c é fácil ver que a quantidade

$$\rho_c \equiv \rho + \langle I_j \rangle \quad (\text{III.26})$$

também é uma constante de movimento. Combinando as duas quantidades conservadas que obtivemos é possível escrever

$$\frac{d}{dt}[w\rho + \langle \Gamma_j \rangle] = 0,$$

uma relação que indica a conservação de energia entre partículas e onda. Note-se que $mc^2 w\rho_0 = u_{em} V_d/N$ pode ser encarada como a energia eletromagnética média disponível por partícula, onde o sub-índice “0” passa a indicar valor inicial e $u_{em} = E^2/16\pi$ é a densidade de energia eletromagnética contida na onda que efetivamente interage com as partículas.

III.4 Aproximação de Macropartícula e Dinâmica de Feixes Inicialmente de Baixa Energia

Semelhante ao que foi feito no capítulo anterior, passemos à análise dos diferentes tipos de dinâmica possíveis no sistema, sabendo que agora os efeitos auto-consistentes da dinâmica das partículas sobre a onda estão sendo corretamente levados em conta. Para tanto, nos utilizaremos da aproximação de macropartícula que nos possibilitará a construção de um potencial efetivo para as variações de energia das partículas.

A aproximação de macropartícula consiste em tomar todas as partículas como uma única entidade: a macropartícula. Sua precisão está diretamente relacionada ao termo proporcional a $\cos(\phi_j - \sigma/N)/\sqrt{I_j}$ presente na equação III.24b. Como já foi discutido no Cap. II, se inicialmente uma partícula possui uma energia *suficientemente* baixa, ela tenderá rapidamente para o ponto $\phi_j - \sigma/N = \pi/2$. Supondo agora que o feixe de partículas é frio, ou seja, o valor inicial da ação I_j é igual para todas as partículas (batizemos este valor de I_0) e

que este valor é suficientemente baixo, o termo acima citado dirigirá rapidamente cada uma das partículas para o mesmo ponto no espaço de fases caracterizado por $\phi_j - \sigma/N = \pi/2$ e $I_j = I_0$, havendo lá uma aglomeração logo nos primeiros momentos da interação. A partir daí, todas as partículas passarão a apresentar uma dinâmica aproximadamente igual, não importando o quão difusa era a distribuição inicial das fases ϕ_j . Nas seções vindouras esta hipótese será testada através da integração direta das equações III.24 para um número grande de partículas, porém por agora a tomaremos como verdadeira.

Sendo este o caso, o índice j das partículas e as somas se tornam desnecessárias e vemos imediatamente que a dinâmica auto-consistente passa a ser descrita pelo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_m = \sqrt{1 + 2I_m + (wfI_m)^2 + 2\sqrt{2\lambda I_m \rho} \cos(\phi_m - \sigma) + \lambda\rho} - wI_m, \quad (\text{III.27})$$

com

$$\frac{dI_m}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \phi_m}, \quad \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial I_m}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \rho},$$

e onde o subscrito “ m ” indica macropartícula. Vale ressaltar que o Hamiltoniano \mathcal{H}_m é com certeza integrável, visto que possui dois graus de liberdade e que já conhecemos duas quantidades conservadas relacionadas à sua dinâmica. Através da transformação canônica $\phi_m - \sigma \rightarrow \phi_m$ e $\rho \rightarrow \rho_c - I_m$, reduzimos os graus de liberdade do sistema (note-se que foi utilizada a constante de movimento ρ_c), nos atendo àqueles da macropartícula. O sistema canônico efetivo é então descrito por

$$\frac{dI_m}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial \phi_m}, \quad \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_m}{\partial I_m},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m &= \sqrt{1 + 2I_m + (wfI_m)^2 + 2\sqrt{2\lambda I_m (\rho_c - I_m)} \cos \phi_m + \lambda(\rho_c - I_m)} - wI_m \\ &= \Gamma_m - wI_m. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

No que segue, faremos a análise da dinâmica auto-consistente para feixes inicialmente de baixa energia, aplicando o formalismo descrito acima a algumas situações relevantes do ponto de vista experimental. Dentre estas situações, nos focaremos naquelas em que o

sistema esta operando com ondas eletromagnéticas na faixa de micro-ondas, visto que nesta faixa de frequências as condições mostram-se experimentalmente mais factíveis. Outras faixas de frequências não devem, no entanto, ser descartadas, porém não serão investigadas mais a fundo aqui.

Consideremos um modo TE_{11} com frequência da ordem $\omega \approx 100$ GHz interagindo com um feixe tênue de elétrons de energia inicial pequena $I_0 = 0$ e de densidade $n \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ cm}^{-3}$. Desta forma, a frequência de plasma associada ao feixe é de $\omega_p \sim 10$ GHz, o que implica em $\lambda \approx 0.01$. Serão considerados dois regimes de amplitude da onda eletromagnética: *pequenas* amplitudes com campos elétricos da ordem de $E \approx 10^8 \text{ V/m}$ e *grandes* amplitudes com campos elétricos da ordem de $E \approx 3 \times 10^8 \text{ V/m}$. Estas amplitudes equivalem a $\rho_0 = 10$ e $\rho_0 = 100$, respectivamente.

III.4.1 Espaço de fases

Iniciemos por uma análise mais qualitativa da interação auto-consistente a partir do espaço de fases referente ao Hamiltoniano III.28 para os diferentes tipos de dinâmica. Nesta sub-seção estaremos sempre considerando o regime de grandes amplitudes.

Primeiramente, investiguemos o caso de laser não dispersivo e com partículas e onda inicialmente em ressonância, i.e., $f = 1$ e $w = (1 + \lambda\rho_c)^{-1/2}$. Vale lembrar que sob estas circunstâncias o formalismo não auto-consistente levava ao aparecimento da autoressonância, onde as equações dinâmicas para I e ϕ implicavam na constância da variável angular e no crescimento ilimitado do momentum. Para efeitos de comparação, na figura III.1 mostramos as trajetórias no espaço de fases referentes ao Hamiltoniano sem auto-consistência II.20 e com auto-consistência III.28. Da figura, concluímos que a auto-consistência leva realmente a uma limitação na energização das partículas, dado que a energia do sistema é finita. Mais do que isso, a partir da equação de movimento para a fase auto-consistente calculada no ponto onde a autoressonância se fazia presente ($\phi_m = \pi/2$)

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{\partial}{\partial I_m} \left[\sqrt{(1/w + wI_m)^2 - \lambda I_m} - wI_m \right], \quad (\text{III.29})$$

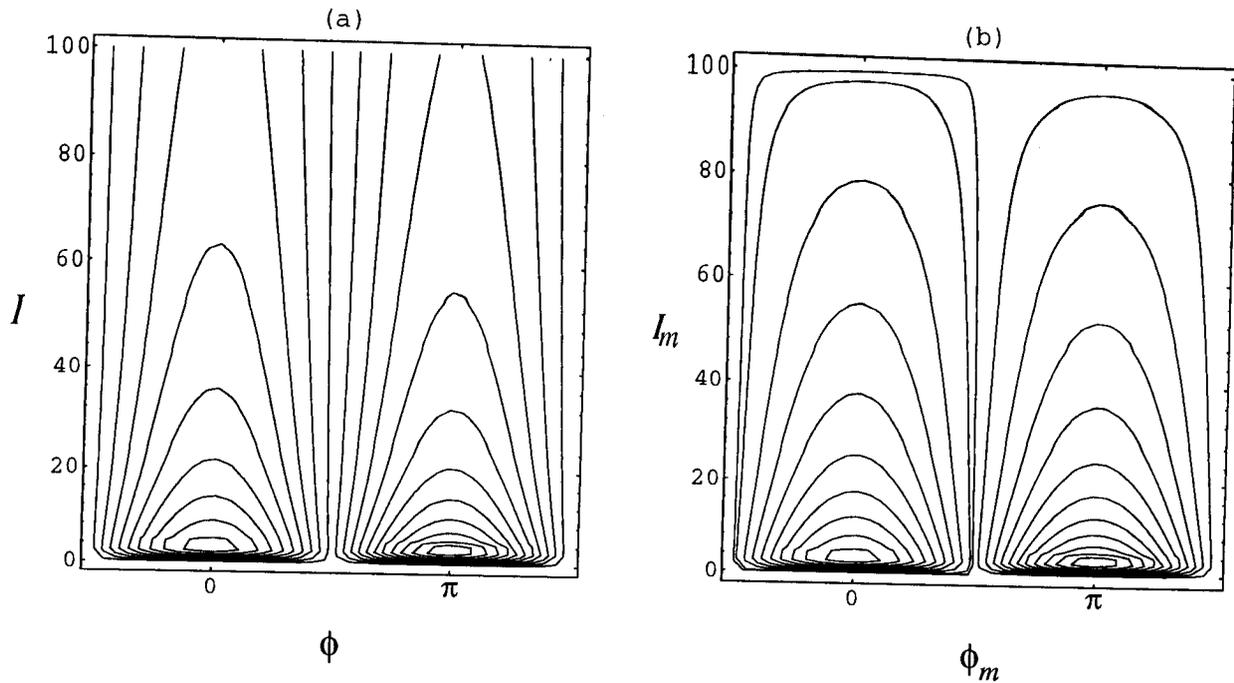


Figura III.1: Espaço de fases não auto-consistente (a) e auto-consistente (b) para o caso sem dispersão e inicialmente ressonante.

vemos que o processo de sincronização entre as fases da onda e das partículas ($d\phi_m/dt = 0$) só ocorre para $\lambda I_m \rightarrow 0$, ou seja, quando a densidade de partículas é suficientemente baixa para que seus efeitos sobre a onda possam ser desprezados ou a potência do laser é tão pequena que o ganho de energia por parte das partículas é inexpressivo. Apesar disto, mesmo no caso auto-consistente a aceleração ainda é bastante eficiente com uma troca grande de energia entre onda e feixe.

Passemos, então, para o caso mais realístico onde o maser é dispersivo. Na figura III.2(a) é apresentado o espaço de fases auto-consistente para $f = 0,97$ e partículas e onda inicialmente em ressonância. Vemos que a auto-ressonância é rapidamente destruída neste caso. Guiando-se pelos resultados obtidos no cap. II, introduzimos um pequeno descasamento entre as frequências iniciais das partículas e da onda $w = (1 + \lambda\rho)^{-1/2} + \delta$, pretendendo com isso aumentar a energização final. Na figura III.2(b) é mostrado o mesmo caso que na figura III.2(a), mas com $\delta = -0,25$. Semelhante aos resultados sem auto-consistência, percebemos que a inclusão de $\delta \neq 0$ retoma parte da aceleração perdida com a inclusão da dispersão.

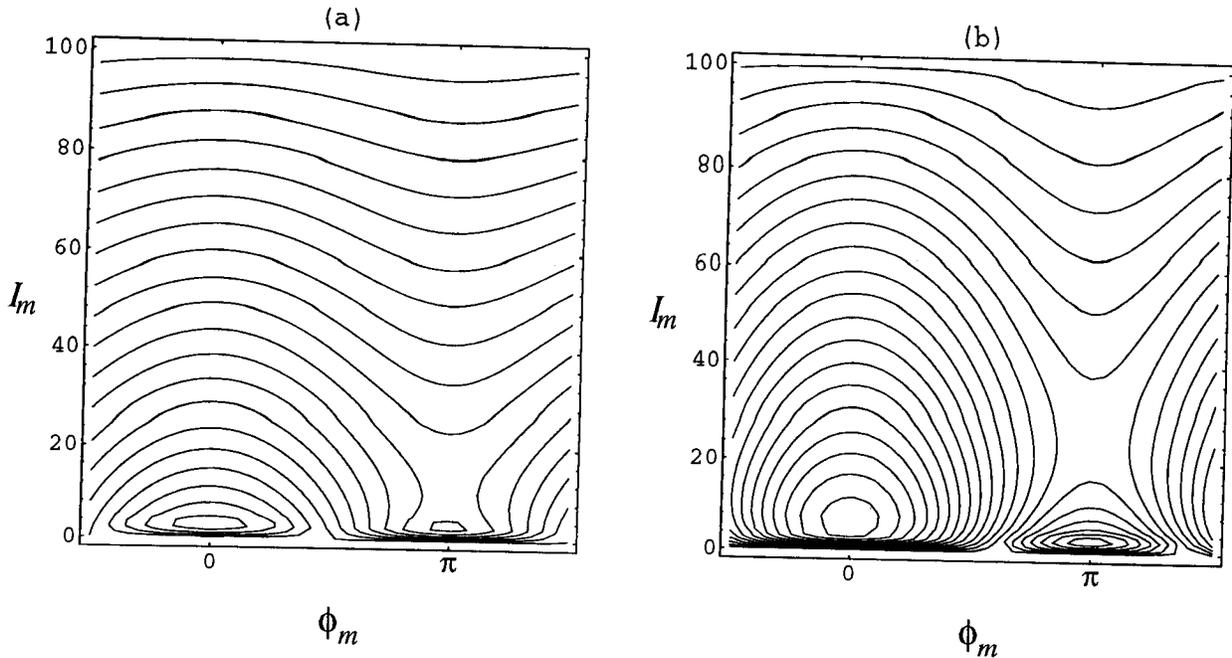


Figura III.2: Espaço de fases auto-consistente para o caso dispersivo $f = 0,97$ sem (a) e com (b) descasamento de frequências δ . $\delta = -0,25$ em (b).

III.4.2 Potencial efetivo

Para que possamos analisar a dinâmica auto-consistente macropartícula-onda dada pelo Hamiltoniano III.28 de uma forma mais quantitativa construiremos um potencial efetivo para as variações de I_m , obtendo a partir deste potencial os valores máximos $I_{m,max}$ possíveis para a ação da macropartícula. Sendo assim, teremos uma idéia mais precisa da eficiência da inclusão do descasamento de frequências δ .

Seguindo os mesmos passos descritos na seção II.4, mas agora utilizando o Hamiltoniano auto-consistente da macropartícula, encontramos uma equação fechada para a dinâmica da ação na forma

$$\left(\frac{dI_m}{dt}\right)^2 + \hat{V}(I_m) = 0,$$

onde $\hat{V}(I_m)$ é o potencial efetivo que dita a dinâmica de I_m , dado por

$$\hat{V}(I_m) = \frac{[w^2 I_m^2 (f^2 - 1) + 2I_m(2h_m \delta - \lambda)]^2 - 8\lambda I_m(\rho_c - I_m)}{4(h_m + wI_m)^2}, \quad (\text{III.30})$$

com $h_m = \sqrt{1 + \lambda\rho_c}$ o valor numérico de \mathcal{H}_m . $I_{m,max}$ é dado pela primeira raiz não trivial da função $\hat{V}(I_m)$.

Antes de começarmos a investigação do caso dispersivo mais a fundo, façamos uma breve discussão dos efeitos da auto-consistência sobre a aceleração do feixe de partículas no caso não dispersivo. Tomando-se $f = 1$, obtemos de III.30 que

$$I_{m,max} = \frac{8\lambda\rho_c}{(2h\delta - \lambda)^2 + 8\lambda}. \quad (\text{III.31})$$

Vemos então que devido inclusão dos efeitos auto-consistentes já é necessário introduzir um pequeno descasamento de frequências $\delta = \lambda/2h$ para obtermos energização máxima $I_{m,max} = \rho_c$ mesmo no caso não dispersivo. Sem a introdução do descasamento de frequências a ação máxima é $I_{m,max} \simeq \rho_c(1 - \lambda/8)$. Além disso, analisando a equação para $d\phi_m/dt$ chegamos a conclusão de que em nenhum caso uma aceleração do tipo sincronizada e irreversível ocorre.

Tomemos agora o caso geral $f \leq 1$. Nas figuras III.3 e III.4 é mostrado I_{max} vs. δ para três valores diferentes do parâmetro de dispersão no regime de pequenas e grandes amplitudes, respectivamente. Nas figuras podemos apreciar o papel do descasamento de frequências; enquanto para $f = 1$ a maior excursão de I ocorre para $\delta \approx 0$, para $f < 1$ a maior excursão ocorre para $\delta < 0$.

No regime de grandes amplitudes do maser como o apresentado na figura III.4 os efeitos dos parâmetros δ e f são ainda mais finos. Se não escolhermos δ convenientemente os valores de ação alcançados são muito menores que o máximo possível $I_{m,max} = \rho_c$. Entretanto, fazendo-se a escolha apropriada podemos remover as limitações impostas pela dispersão e chegar à máxima energização possível. Note-se, porém que esta máxima energização não acontece sempre. Para amplitude da onda ou f^{-1} suficientemente grande, $I_{m,max} = \rho_c$ pode não ser acessível a partir de pequenos valores de I_m , similar ao que acontece nos aceleradores de ondas de batimento[5].

III.4.3 Discussão

Alguns efeitos como a interação eletrostática entre as partículas[38], a emissão sincrotrônica e o alargamento do feixe podem reduzir o processo de energização mesmo no

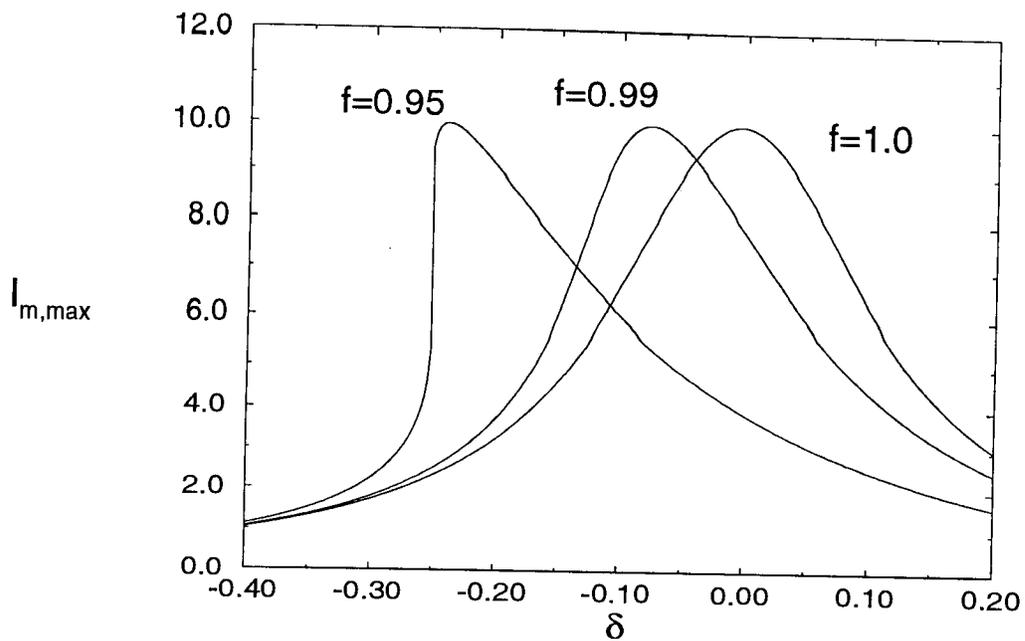


Figura III.3: $I_{m,max}$ vs. δ para $I_0 = 0$ e diferentes valores de f no regime de pequenas amplitudes.

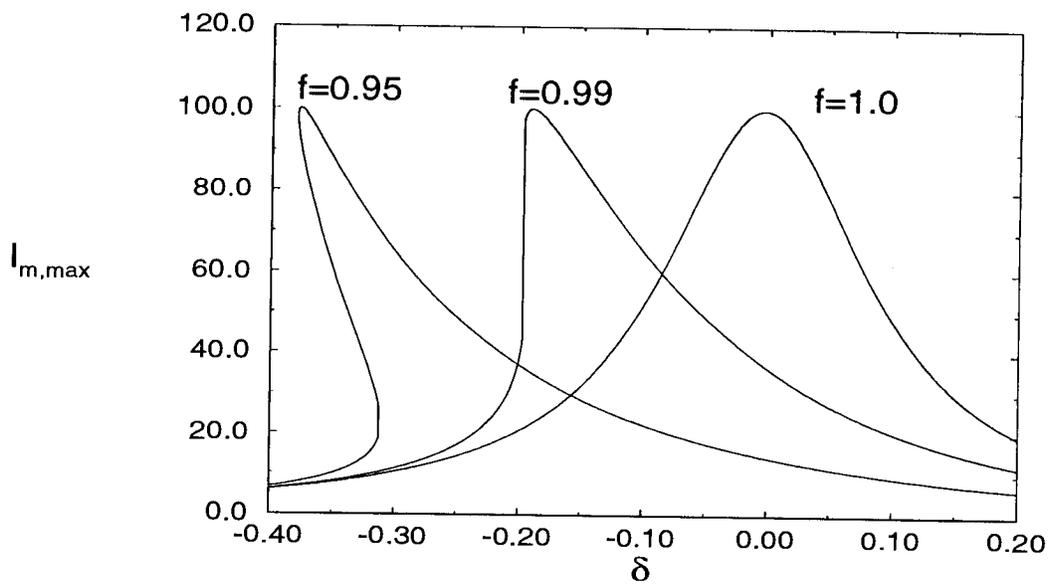


Figura III.4: $I_{m,max}$ vs. δ para $I_0 = 0$ e diferentes valores de f no regime de grande amplitudes.

âmbito da aproximação de macropartícula, devendo ser levados em conta como possíveis limitadores da aceleração[24]. Inicialmente, com relação a interação eletrostática, convém ressaltar que o fato das partículas aglomerarem-se no espaço de fases **não** indica que elas aglomeram-se no espaço *real*. Indica sim, que todas as partículas possuem uma mesma diferença de fase com relação a onda. Mais especificamente, foi mostrado que os efeitos eletrostáticos podem ser desconsiderados nos regimes típicos de aceleradores[31]. Da mesma forma, a emissão sincrotrônica é importante para partículas com energias da ordem de TeV[31], as quais são bem maiores que as adquiridas por partículas interagindo com ondas eletromagnéticas na faixa de micro-ondas. Por exemplo, mesmo nos casos em que se está operando no regime de grandes amplitudes e $I_{m,max} = \rho_c = 100$, a máxima energia cinética alcançada é dada aproximadamente por $K_{max} = (\Gamma_{m,max} - \Gamma_{m,0})mc^2 = wI_{m,max}mc^2 \lesssim 0,1$ GeV se $mc^2 \lesssim 1$ MeV. Já o alargamento do feixe se apresenta como um fator limitador visto que à medida que o raio das partículas aumenta, aumentam também os efeitos da borda da guia de ondas, tornando a aproximação de onda plana feita aqui ruim. Porém, tomando como exemplo o caso $f = 0,99$ apresentado na figura III.4, obtemos para o raio máximo da partícula $r_{max} \approx (c/\Omega_{co})\sqrt{2I_{m,max}} \approx 2$ cm, enquanto que o raio da guia de ondas é $R \approx 7$ cm. Com isso, a variação radial relativa dos campos eletromagnéticos até $r = r_{max}$ é apenas $\sim 0,1$. Qualquer aumento no campo \mathbf{B}_o (com subsequente aumento na frequência ressonante) ou qualquer redução na amplitude da onda ρ_0 reduz R e o alargamento do feixe ainda mais.

Se notarmos que a escala lenta de tempo é regulada pelo parâmetro λ , o tempo de interação t_{max} necessário para que ocorra a máxima energização pode ser estimado como $\omega t_{max} \sim 1/\lambda$, com ω a frequência dimensional da onda. Esta relação nos permite estimar o comprimento (L) necessário para máxima energização como $L \lesssim c/\lambda\omega$. Considerando a faixa de microondas com $\lambda = 0,01$ e $\omega \sim 10-100$ GHz, obtemos aproximadamente $L \sim 1$ m, com um gradiente de aceleração da ordem de 1-100 MeV/m.

III.5 Análise Numérica e Verificação da Aproximação de Macropartícula

Toda discussão apresentada na seção anterior sobre a dinâmica auto-consistente foi feita supondo-se $I_0 = 0$, a condição inicial ideal para o aparecimento da aglomeração no espaço de fases e validade da aproximação de macropartícula. Sendo assim, uma análise mais aprofundada sobre o que acontece com o sistema à medida que consideramos maiores (e mais realísticos) valores para a ação inicial é de grande importância. E é justamente isto que faremos nesta seção.

Investigaremos numericamente a dinâmica do sistema auto-consistente III.24 sem a utilização da supra mencionada aproximação. Com este fim, consideramos um grande número de partículas injetadas no acelerador satisfazendo as condições usuais encontradas em experimentos: feixes frios de *baixa* energia e com fases iniciais distribuídas homogeneamente. Ou seja, tomamos como condições iniciais $I_j = I_0$ para todo j (o valor inicial da ação, I_0 , é suposto como independente do índice da partícula, modelando assim o feixe frio), e ϕ_j homogeneamente distribuído entre 0 e 2π , $\phi_j = 2\pi j/N$, com N tipicamente na faixa 500-1000. Além disso, nos concentramos aqui no regime de ondas de grande amplitude, muito embora as conclusões sobre validade da aproximação de macropartícula e efeitos da dispersão da onda e do descasamento de frequências são qualitativamente as mesmas para valores menores da amplitude.

Do ponto de vista computacional, utilizamos tanto um integrador do tipo Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável quanto um integrador do tipo preditor-corretor. Em ambos os casos, a precisão exigida estava na faixa de 1 parte em 10^7 - 10^9 , sendo esta testada continuamente através das constantes de movimento apresentadas na seção III.3.

Procedemos então com a apresentação e discussão dos resultados numéricos obtidos.

Iniciamos comparando na figura III.5 os valores máximos da ação calculados via o potencial efetivo III.30 utilizando aproximação de macropartícula (curva cheia) com os valores médios, $\langle I_j \rangle_{max}$, encontrados através da simulação numérica (representada por símbolos)

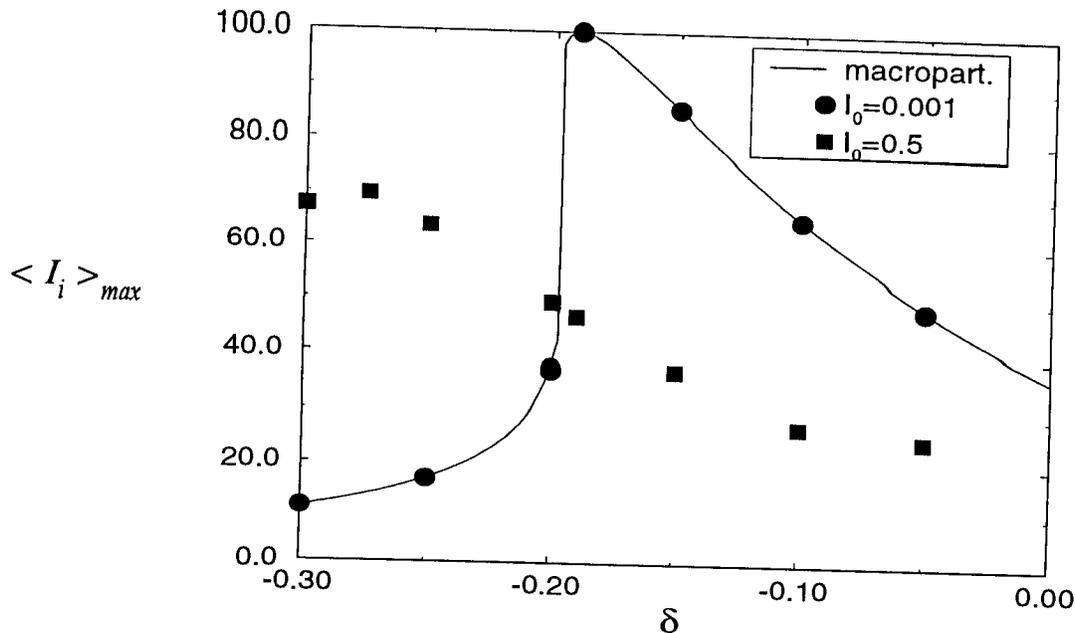


Figura III.5: Comparação dos resultados obtidos com a aproximação de macropartícula apresentados na figura I.4 para $f = 0,99$, com os obtidos via simulação numérica. As simulações foram feitas para $I_0 = 0,001$ (círculos) e $I_0 = 0,5$ (quadrados).

à medida que o parâmetro de descasamento δ é variado. No caso onde consideramos $I_0 = 0,001$, podemos perceber que os resultados obtidos para os diferentes valores de δ coincidem com os resultados analíticos. Isto é um forte indicativo de que para este particular valor da ação inicial a aglomeração das fases ocorre, validando a aproximação de macropartícula. Que isto é precisamente o que acontece pode ser confirmado com a ajuda da figura III.6 onde mostramos o espaço de fases para $t = 300$ e $\delta = -0,1$. Nesta figura vemos que a distribuição de partículas é realmente bastante concentrada num certo ponto, apresentando apenas pequena dispersão ao longo dos eixos de ação e fase.

À medida que aumentamos o valor de I_0 , como o caso apresentado nas figuras III.5 e III.7 para $I = 0,5$, a situação muda bastante. Através da figura III.5 pode-se ver que os resultados da simulação pouco ou nada coincidem com os obtidos analiticamente. A suspeita de que o efeito de aglomeração não seja mais efetivo neste caso pode ser confirmado com a ajuda da figura III.7 onde as partículas apresentam-se espalhadas pelo espaço de fases de uma forma bastante difusa. Entretanto, uma característica que vale a pena ser

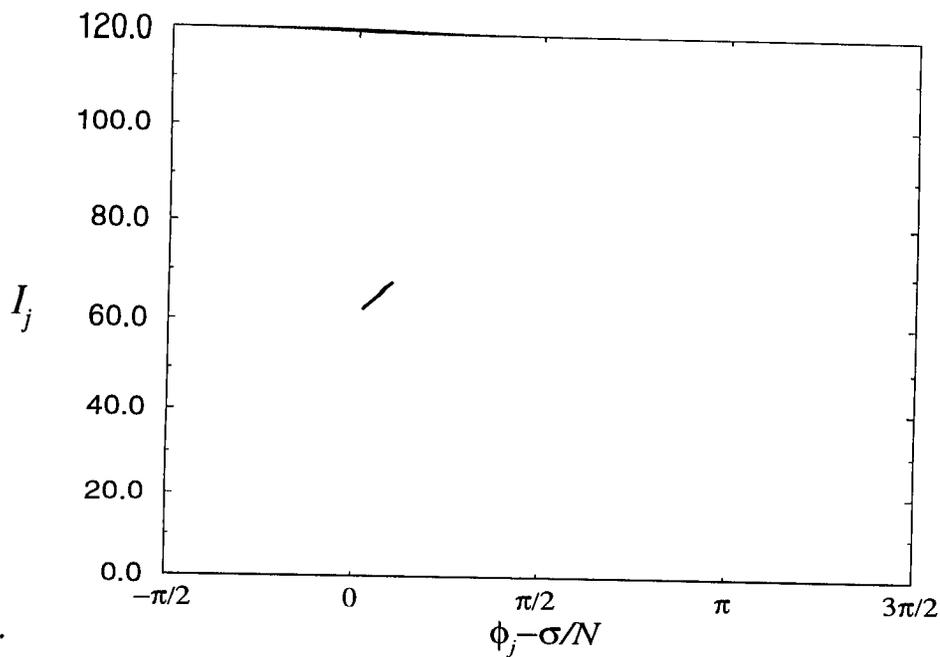


Figura III.6: Espaço de fases das partículas obtido numericamente para $I_0 = 0,001$ e $t = 300 \dots$

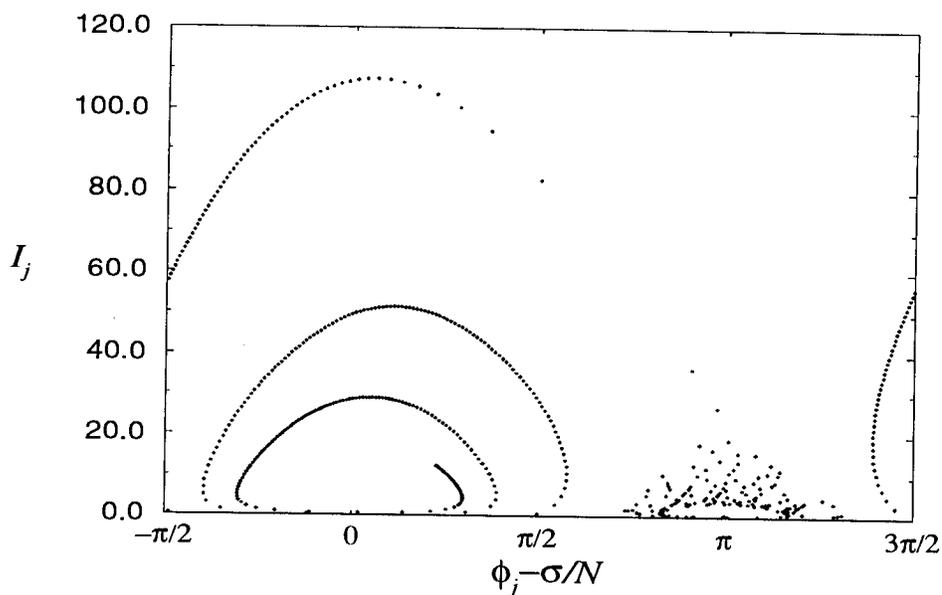


Figura III.7: ... e $I_0 = 0,5$ e $t = 600$. Consideramos $f = 0,99$, $\delta = -0,1$ e $N = 512$.

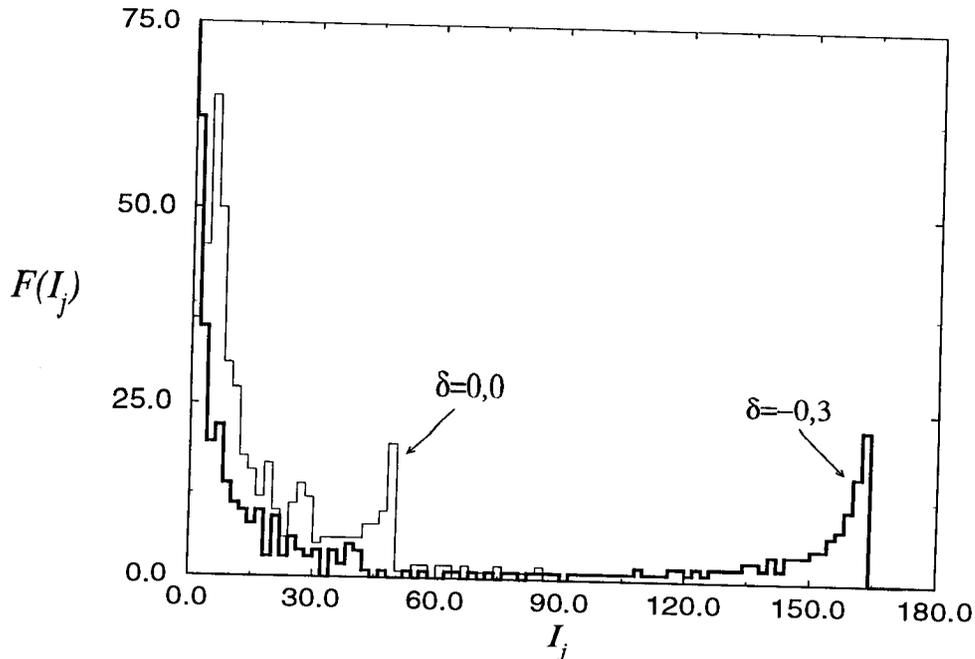


Figura III.8: Função distribuição $F(I_j)$ das ações para dois valores diferentes de δ e $t = 600$. Demais parâmetros permanecem iguais à figura anterior.

ressaltada a respeito destes sistemas *não aglomerados* é o fato de a troca de energia feixe-onda ainda apresentar uma sensibilidade ao descasamento de frequências[46]. Observamos na figura III.5 que variando δ podemos intensificar a troca de energia mesmo no caso em que o efeito de aglomeração não se dá, fato que é ressaltado na figura III.8, onde é apresentada a função distribuição $F(I_j)$ das ações para $\delta = 0$ e $\delta = -0,3$. Esta figura revela que tomando-se convenientemente o valor do descasamento de frequências (neste caso $\delta = -0,3$), ao menos uma fração de partículas é energizada à valores de ação um tanto além dos conseguidos na dinâmica aglomerada. O que parece estar acontecendo é que estas partículas *supra* aceleradas aparecem como consequência das seguintes circunstâncias: uma grande excursão da amplitude da onda ρ é gerada por uma escolha conveniente de δ , um número considerável de partículas permanece com baixas energias ao longo de todo o processo de aceleração e a necessidade da conservação de $\rho_c = \rho + \langle I_j \rangle$. Dado que uma escolha cuidadosa de δ leva a um grande amortecimento da onda e conseqüentemente a uma grande variação de $\langle I_j \rangle$ e que um certo número de partículas permanece com baixas energias, pelo menos uma fração da população de partículas deve ser acelerada a valores de

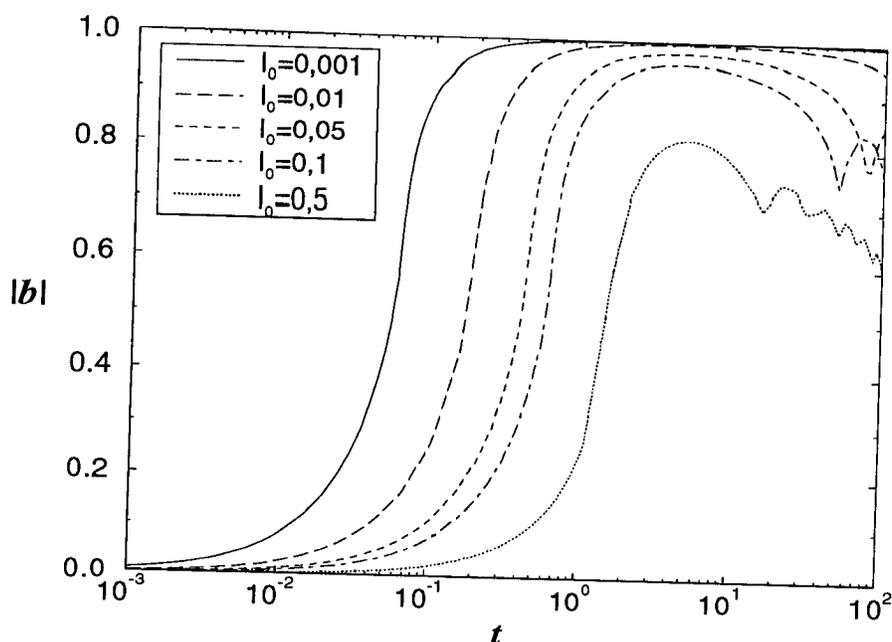


Figura III.9: Evolução temporal do módulo do parâmetro de aglomeração $|b| \equiv |\langle e^{i\phi_j} \rangle|$ para diferentes valores de I_0 . Consideramos $f = 0,99$ e $\delta = -0,2$.

ação bem maiores que a média. Olhando novamente para a figura III.8 percebemos que é realmente necessária uma escolha adequada do descasamento de frequências para que haja o aparecimento das partículas supra aceleradas, não bastando para tanto a simples não existência da aglomeração no espaço de fases. Vemos, porém, que embora existam estas partículas que sofrem um aumento substancial de energia, o processo é acompanhado por uma perda na qualidade e coerência do feixe.

Para completar os resultados obtidos, na figura III.9 comparamos a evolução temporal do módulo do parâmetro de aglomeração (*bunching parameter*)[47], $|b| \equiv |\langle e^{i\phi_j} \rangle|$, para uma série de valores da ação inicial I_0 . Vale lembrar que b é definido de tal forma que $0 \leq |b| \leq 1$, assumindo seu valor mínimo quando as fases estão distribuídas de uma forma completamente difusa e seu valor máximo quando todas as fases ϕ_j tem o mesmo valor (estado completamente aglomerado). Uma vez mais, vemos que o efeito de aglomeração é dominante para baixos valores da ação inicial, onde ele ocorre durante os primeiros momentos da interação. À medida que I_0 cresce, esta característica é perdida. De fato, nos quatro primeiros casos ($I_0 = 0,001; 0,01; 0,05$ e $0,1$) ainda podemos detectar um processo

de aglomeração de certa forma eficiente, embora no terceiro e no quarto casos pareça que a aglomeração já começa a se desfazer para $t \sim 100$. Enquanto isso, para $I_0 = 0,5$ a aglomeração é praticamente inexistente já nos primeiros momentos, passando, a seguir, a destruir-se por completo. Logo, tomando $I_0 \approx 0,01$ como um valor limiar para a validade da aproximação de macropartícula, a energia cinética inicial máxima para a qual elétrons efetivamente se aglomeram é de aproximadamente 1–10 KeV.

III.6 O que Veremos nos Próximos Capítulos

Neste texto, até o momento, sempre estivemos primeiramente interessados na interação feixe-onda do ponto de vista de aceleração de partículas. Iniciamos por uma análise bastante básica dos papéis que a dispersão e, um pouco mais adiante, o descasamento inicial de frequências cumpriam na dinâmica de uma partícula interagindo com uma onda dada. Posteriormente, incluímos os efeitos auto-consistentes da dinâmica da onda no formalismo e passamos a estudar o processo de aceleração na interação feixe-onda de uma forma bem mais realística. Este estudo foi possível analiticamente graças à aproximação de macropartícula que nos permitia tomar o feixe de partículas como uma entidade única no espaço de fases. Com isso, podíamos determinar com precisão a dinâmica de feixes que inicialmente possuem partículas de baixa energia.

No final deste capítulo, apresentamos alguns resultados obtidos via integração numérica do sistema feixe-onda. Estes resultados mostraram que a aproximação de macropartícula é realmente boa quando a energia inicial das partículas é suficientemente baixa. Neste caso, os graus de liberdade se reduzem a dois, sendo a dinâmica completamente integrável (lembre-se que encontramos duas constantes de movimento associadas ao sistema). Porém, nos demais casos onde o efeito de aglomeração não se faz presente e temos de levar em conta todos os graus de liberdade referentes as partículas, como se processa a dinâmica auto-consistente?

Nos capítulos que seguem, responderemos esta pergunta a partir da investigação mais detalhada da dinâmica não aglomerada. Esta investigação será baseada principalmete na

análise de dados obtidos a partir da integração numérica das equações de movimento do sistema.

De fato, o leitor poderá notar que nos próximos capítulos a ênfase de nossa análise mudará. Tudo que tínhamos a dizer a respeito da dinâmica integrável do sistema, relacionada tipicamente a aceleração regular de partículas (i.e., ao acelerador de ressonância cíclotron-laser), já foi abordado. Agora nos voltaremos ao estudo do sistema partículas-onda do ponto de vista de sistemas dinâmicos, ou seja, concentrando-se na análise dos efeitos que a auto-consistência tem sobre o sistema como um todo e as principais consequências destas alterações sobre a dinâmica.

Capítulo IV

Caos Auto-consistente e Difusão de Arnold

IV.1 Introdução

A denominação “caos auto-consistente” (*self-consistent chaos*) foi utilizada primeiramente por Tennyson et al.[48]. Lá é estudada a interação eletrostática auto-consistente entre um feixe de partículas e uma onda de plasma que aparece devido a instabilidade onda-feixe correspondente a condição inicial de feixe frio. O fato de a interação ser tomada auto-consistentemente leva ao aparecimento de caos na dinâmica do sistema.

No nosso caso, vimos que quando os efeitos auto-consistentes sobre a onda são desprezados na interação onda-partícula, a dinâmica da partícula é descrita por um Hamiltoniano de apenas um grau de liberdade, eq. II.20, sendo este completamente intergrável[39]. Mais ainda, analisando a interação auto-consistente entre uma onda eletromagnética e um feixe de partículas inicialmente de energia nula, mostramos que a dinâmica ainda é do tipo regular. Isto é fato, dado que sob estas condições iniciais o feixe como um todo sofre uma rápida aglomeração no espaço de fases, passando a comportar-se como uma única macropartícula, reduzindo o número de graus de liberdade efetivos do sistema e tornando-o integrável. Contudo, se, por outro lado, o controle sobre o feixe injetado é pobre, a condição de baixa energia inicial provavelmente não se cumprirá. Logo, ao longo da interação passamos a ter um feixe bastante incoerente, cuja descrição envolve todos os graus de liberdade do sistema. Tendo em vista este caráter multidimensional, a dinâmica associada é quase

certamente caótica.

Nossa intenção neste capítulo é, portanto, investigar a presença do caos auto-consistente em nosso sistema onda-partículas. Para tanto, procederemos da seguinte forma. Consideraremos um feixe frio de partículas com fases homogeneamente distribuídas interagindo com um maser no regime de grandes amplitudes. Examinaremos, então, os expoentes de Lyapunov relevantes através da medida da divergência de trajetórias do sistema como um todo. A presença de divergência exponencial de trajetórias será tomada como sinalizando a existência de estados caóticos. Mostraremos que de fato o sistema auto-consistente apresenta caos. Veremos, também, que ao contrário do que usualmente é encontrado em sistemas típicos de interação onda-partícula, a atividade caótica é grande não só nas regiões do espaço de fases próximas à separatriz do sistema, mas também naquelas próximas aos pontos fixos elípticos.

Finalmente, na seção IV.6 proporemos um modelo de baixa dimensionalidade que apresenta as propriedades básicas observadas no sistema completo. Discutiremos a relação de nossos resultados com aqueles obtidos por Boozer no que diz respeito a difusão de Arnold[40].

Os resultados principais deste capítulo encontram-se na ref. [49].

IV.2 Modelo Considerado

Para a análise do caos auto-consistente tomaremos como modelo um feixe de partículas (tipicamente $N = 500$) interagindo com um modo eletromagnético não dispersivo e que se encontra em exata ressonância com partículas em seu movimento ciclotrônico. Além do que, continuaremos supondo $P'_z = P_z - wI = 0$ mesmo para os casos em que a energia inicial das partículas não é baixa ($I \gtrsim 1$). Apesar destas condições não serem as mais realísticas e apropriadas para um acelerador de ressonância ciclotron-laser de laboratório, acreditamos que os resultados a serem apresentados aqui não sofram mudanças dramáticas se usamos um conjunto de condições diferentes das acima citadas. De qualquer forma, o estudo da aceleração ciclotrônica se mostra importante também em outros sistemas, como por exemplo

em astrofísica, onde as condições que cercam a interação são um tanto arbitrárias.

O sistema é, então, descrito pelo Hamiltoniano generalizado III.22 com $f = 1$ e $\delta = 0$, sendo as equações de movimento dadas por III.24. Deste Hamiltoniano, percebemos que as equações dinâmicas para uma dada partícula “ j ” podem ser obtidas a partir de outro Hamiltoniano que depende somente das coordenadas I_j e ϕ_j da própria partícula e das variáveis do maser,

$$H_j = H_j(I_j, \phi_j, \rho, \sigma).$$

Esta característica do formalismo nos mostra que a interação entre partículas é exclusivamente mediada pelo campo do maser, i.e., não há nenhuma interação direta do tipo partícula-partícula. No que diz respeito ao caos isto evidencia seu caráter auto-consistente, pois se não levassemos em conta a dinâmica da onda teríamos apenas um conjunto de partículas interagindo isoladamente com uma onda dada de forma regular (integrável); ao *ligarmos* a auto-consistência, no entanto, a onda passa a acoplar a dinâmica das partículas, quebrando a integrabilidade. Estas são informações importantes porque vemos que os aspectos básicos do sistema poderiam ser entendidos se de alguma forma pudéssemos obter um modelo suficientemente preciso para a evolução temporal dos campos da onda. Obter este modelo é certamente nada trivial. A princípio teria-se que resolver o sistema completo para então, olhando para a dinâmica de ρ e σ , determinar o modelo apropriado. Entretanto, como veremos, em certos casos existem algumas propriedades básicas da dinâmica do maser que parecem ser suficientemente independentes de influências provindas de condições iniciais e da escolha dos parâmetros externos. Faremos uso destas propriedades para estudarmos o tipo de dinâmica caótica que temos em mãos.

IV.3 Simulações Iniciais no Espaço de Fases

De forma similar ao que foi feito na seção III.5, integraremos numericamente o conjunto de equações III.24 tomando como condições iniciais um feixe monoenergético (frio) com $I_j(t = 0) = I_0$ e fases homoganeamente distribuídas ao longo 0 e 2π , e consideraremos

o regime de grandes amplitudes, $\rho_0 = 100$ e $\lambda = 0,01$, com $\sigma_0 = 0$ (condição que é arbitrária, não apresentando qualquer influência na dinâmica). Além disso, como estamos nos concentrando num maser não dispersivo em ressonância perfeita, tomamos $f = 1$ e $w = (1 + \lambda\rho_0)^{-1/2} = 1/\sqrt{2}$.

Antes de entrarmos a fundo na simulação numérica lembremos qual é a forma do espaço de fases integrável para I e ϕ , mantendo a onda sem dinâmica, ou seja, ρ e σ constantes. Este certamente não representa a situação física real, entretanto, ele pode nos fornecer informações úteis para o que segue. Este gráfico é mostrado na figura III.1(a). Entre outras características, recordemos duas de relevância: (i) existem dois pontos fixos localizados em $\phi = 0, \pi$ e (ii) partículas inicialmente próximas de $I = 0$ e $\phi = \pi/2$ tendem a ser aceleradas quase verticalmente no espaço de fases, ganhando grandes quantidades de energia, i.e., a autoressonância. Ressaltamos que tanto o que foi discutido no capítulo II quanto a análise dos resultados do apêndice C indica que a frequência associada ao movimento das partículas (giro-frequência) tende a zero à medida que nos aproximamos da órbita autoressonante. Neste sentido, a curva autoressonante pode ser vista como uma separatriz, que de fato *separa* as trajetórias que orbitam o ponto fixo $\phi = 0$ das que orbitam o ponto fixo $\phi = \pi$.

No que segue analisamos a dinâmica auto-consistente.

IV.3.1 Estados aglomerados

Consideremos inicialmente o caso $I_0 \ll 1$. Como já sabemos, neste caso o efeito de aglomeração no espaço de fases é bastante forte, havendo uma grande concentração das partículas do feixe num dado ponto do espaço de fases e formando a macropartícula. Isto pode ser vislumbrado na figura III.6 (embora lá seja considerado um sistema com $f \neq 1$ e $\delta \neq 0$, os resultados são qualitativamente os mesmos que no caso não dispersivo e ressonante que nos interessa aqui). Sendo assim, há uma redução nos graus de liberdade efetivos do sistema sendo este integrável. A figura IV.1, que mostra a série temporal da amplitude da onda, confirma nossa suposição de integrabilidade dado que $\rho(t)$ é periódico: onda e macropartícula apenas ficam trocando energia entre si de uma forma regular. Da

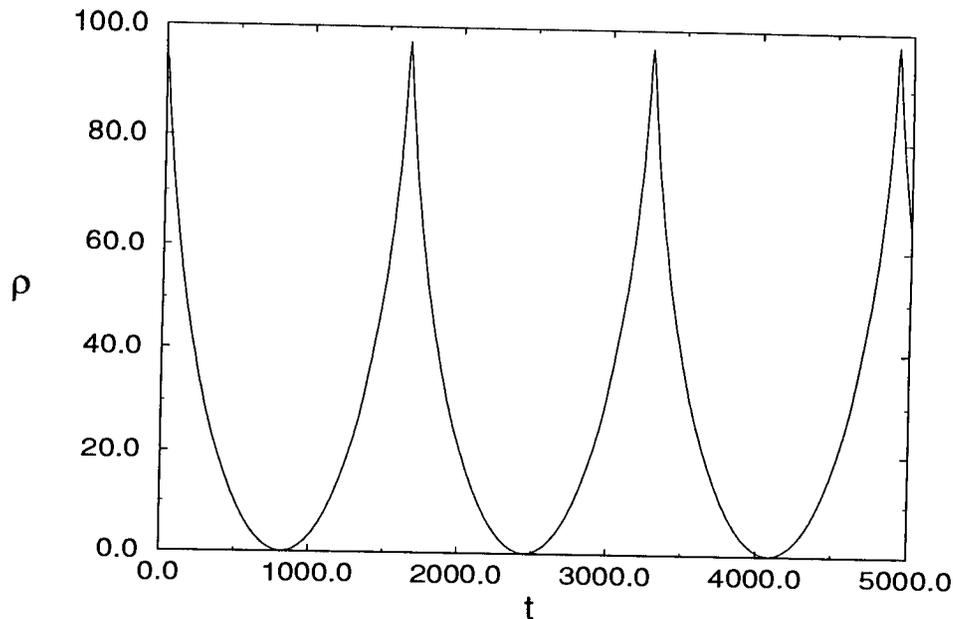


Figura IV.1: Série temporal da amplitude da onda, $\rho(t)$, para o caso aglomerada com $I_0 = 0,001$.

mesma forma, a evolução temporal de $\sigma(t)$ (que não é mostrada aqui) também é periódica, apresentando o mesmo período que $\rho(t)$.

IV.3.2 Estados não aglomerados

Passemos agora para o caso onde $I_0 \gtrsim 1$. Neste caso, a faixa de sintonia entre onda e partículas é pequena. Se fixamos a amplitude inicial da onda como no caso anterior, mas consideramos valores muito maiores de I_0 , é esperado que aceleração do tipo coerente não ocorra mais. Este tipo de situação representa sistemas pouco controlados (como é o caso de sistemas astrofísicos) onde uma ressonância precisa entre onda e partículas é bastante improvável. Sendo assim, o efeito de aglomeração é pouco ou nada eficiente e nenhuma redução dos graus de liberdade efetivos do sistema é esperada. Logo, é provável que a dinâmica apresente características mais complexas e, possivelmente, caos.

Inicialmente, apresentamos na figura IV.2 o espaço de fases de partículas com $I_0 \gtrsim 1$ (além de fases homoganeamente distribuídas) após um tempo $t = 11200$. A princípio esta figura é bastante semelhante a figura III.7 onde já nos foi possível identificar a ausência da aglomeração. Agora, porém, tomamos $I_0 = 2$, $f = 1$ e $\delta = 0$ e o tempo de integração é

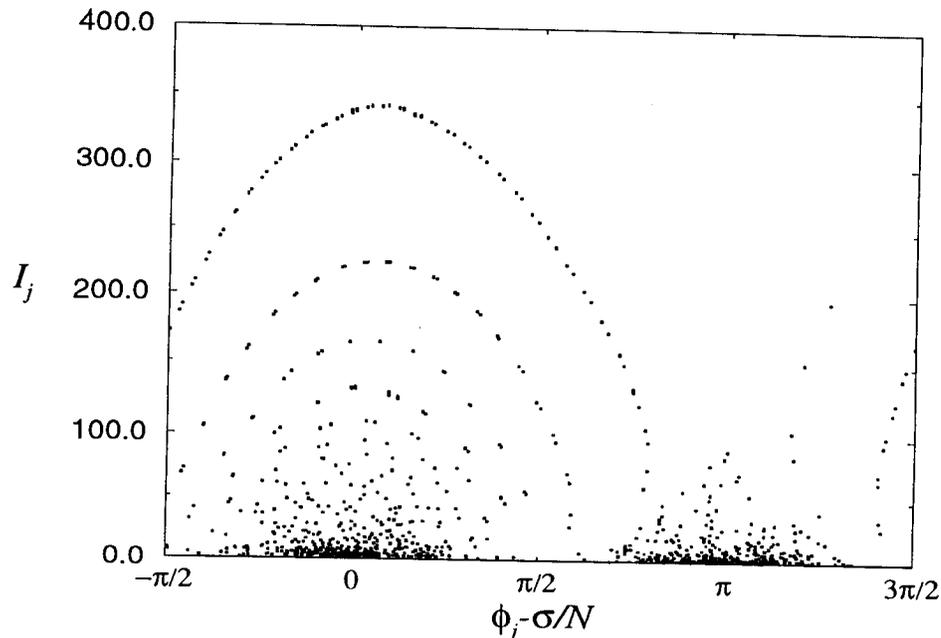


Figura IV.2: Espaço de fases auto-consistente para $I_0 = 2$ após um tempo $t = 11200$. $f = 1$ e $\delta = 0$.

bem maior, de forma a ressaltar as características irregulares da dinâmica.

Dado que a distribuição das partículas acaba por tornar-se difusa no espaço de fases, a troca de energia média entre onda e partículas é um tanto menos eficiente que anteriormente; enquanto algumas partículas estão ganhando energia, outras estão perdendo de forma tal a haver uma certa equipartição da energia. Isto é verdade, como pode ser visualizado na figura IV.3 onde a série temporal para $\rho(t)$ é mostrada. Após algum transiente inicial (não apresentado na figura) onde o maser compartilha seu *excesso* de energia com as partículas, ele estaciona em um valor médio próximo a $\rho = 60$, havendo pequenas flutuações em torno desta média. Para a evolução da fase da onda encontramos algo da forma

$$\frac{\sigma(t)}{N} = \omega_\sigma t + \text{flutuações},$$

onde $\omega_\sigma \ll 1$ representa a frequência *média* da evolução da fase da onda¹. Vale ressaltar que analisando a dinâmica do sistema constatamos que o movimento médio de σ caracterizado

¹Esta evolução média tem como possível origem a interação da onda com as partículas pousadas próximas aos dois pontos fixos elípticos, os quais apresentam diferentes frequências orbitais (não só em sinal, mas também em módulo).

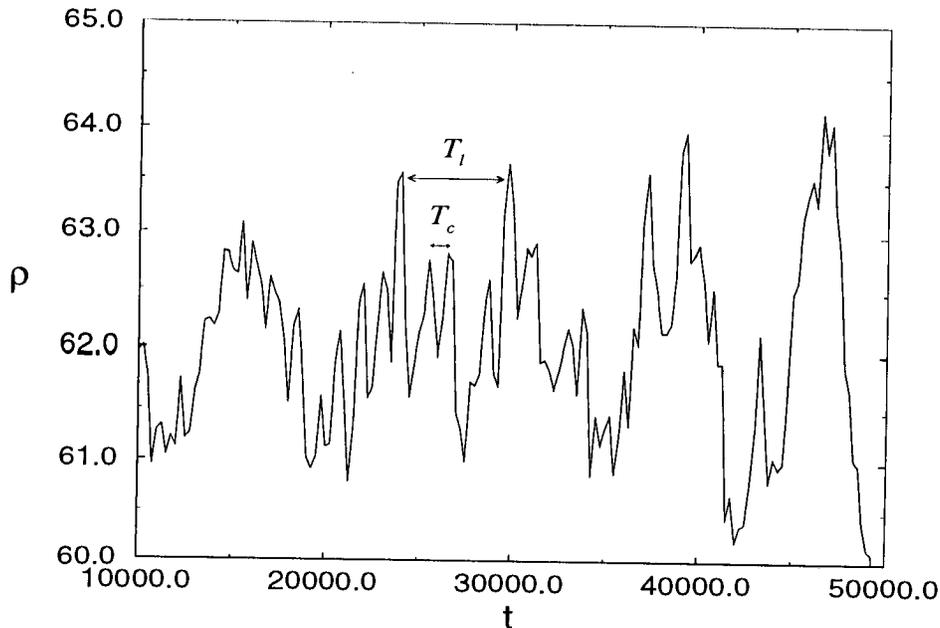


Figura IV.3: Série temporal da amplitude da onda, $\rho(t)$, para o caso não aglomerada com $I_0 = 2, 0$.

por ω_σ é rapidamente compensado pela dinâmica das fases das partículas, de tal forma que $\phi_j - \sigma/N$ não apresenta esta componente de variação. Acreditamos que este seja o cenário que qualquer estado com $I_0 \gtrsim 1$ atinge assintoticamente.

A partir da figura IV.3, percebemos que as pequenas flutuações em torno do valor médio de $\rho(t)$ estão distribuídas, grosso modo, em duas escalas diferentes de tempo: uma escala longa T_l , e uma escala curta T_c . Estas escalas são dadas aproximadamente por $T_l \sim 5000 - 10000$ e $T_c/T_l \sim 0,1$. Uma análise semelhante na dinâmica de σ nos mostra que suas flutuações apresentam estas mesmas características.

Ambas escalas foram comparadas com as frequências típicas das órbitas das partículas calculadas numericamente, chegando-se às seguintes conclusões.

A escala longa é ditada pela interação da onda com partículas que movem-se com frequências muito pequenas. Estas partículas são aquelas que descrevem as órbitas mais exteriores no espaço de fases mostrado na figura IV.2. Justamente por estarem próximas à órbita autoressonante é que as frequências são pequenas. Isto pode ser visualizado na figura III.1(a), onde quanto mais próximo a partícula está da autoressonância, maior é a

trajetória descrita por ela.

Por outro lado, a escala curta aparece devido a interação envolvendo partículas na região mais interior da distribuição. Estas partículas estão mais próximas dos pontos fixos, descrevendo, assim, órbitas de frequência maior.

Cabe ressaltar, finalmente, que a existência das flutuações é real e inerente ao sistema e não apenas uma mera consequência introduzida pela finitude do número de partículas usadas na simulação. Foram feitas simulações com um número maior de partículas ($N = 1000$ e $N = 1500$) e os resultados encontrados foram idênticos aos apresentados aqui.

IV.4 Estados Regulares e Caóticos

Passaremos agora para a investigação direta da presença de caos no sistema onda-partículas.

IV.4.1 Estados regulares e caóticos do sistema global

Para determinarmos a presença de caos ou não na dinâmica do sistema adotaremos o seguinte procedimento. Juntamente com a distribuição original de partículas que interage auto-consistentemente com os campos da onda, consideraremos uma segunda distribuição que possui o mesmo número de partículas. Esta segunda distribuição sofre os efeitos da onda exatamente como a primeira o faz, porém sua presença não é sentida pela onda. Ou seja, a segunda distribuição representa uma distribuição teste. Partículas desta distribuição (a qual denotaremos daqui por diante como distribuição *linha*) possuem condições iniciais localizadas bem próximas as da distribuição original de acordo com

$$I'_j = I_j(1 + \epsilon), \quad \phi'_j = \phi_j(1 + \epsilon),$$

com $j = 1, 2, \dots, N$ e onde ϵ é um número pequeno, tipicamente $\epsilon = 10^{-10}$. A partir daí, introduzimos a função $L(t)$ definida como

$$L(t) \equiv \ln \left\{ \sqrt{\sum_{j=1}^N [(I_j(t) - I'_j(t))^2 + (\phi_j(t) - \phi'_j(t))^2]} \right\} - L_0, \quad (\text{IV.1})$$

que mede o logaritmo da distância euclidiana no espaço de fases entre as duas distribuições de partículas, com $L_0 \equiv \ln \sqrt{2N\epsilon^2}$ sendo o logaritmo da distância euclidiana inicial. Sempre que L apresentar um comportamento do tipo linear, $L \approx \gamma_L t$, estaremos a frente de uma dinâmica que apresenta divergência exponencial de trajetórias e, conseqüentemente, caos[39]. Mais ainda, o coeficiente linear da reta γ_L representa o maior expoente de Lyapunov do sistema original.

Na figura IV.4 mostramos simultaneamente três séries temporais de $L(t)$ para três casos já discutidos aqui: (a) o caso auto-consistente não aglomerado com $I_0 = 2,0$, o caso auto-consistente aglomerado com $I_0 = 0,001$ e o caso sem auto-consistência onde a amplitude e a fase da onda são mantidas constantes artificialmente. A função $L(t)$ se comporta como uma linha reta com coeficiente linear positivo somente no primeiro caso. Ainda neste caso, observamos a formação de um platô relacionado ao tamanho finito do espaço de fases do sistema. No segundo caso, apenas uma pequena, se alguma, divergência exponencial de trajetórias aparece. No terceiro, finalmente, o comportamento é visivelmente logarítmico, i.e., $L(t) \sim \log t$. Ressaltamos que este comportamento logarítmico é bastante típico de sistemas multidimensionais integráveis (quase-periódicos)[39].

Guiando-se pelo que foi dito acima, somente no primeiro caso podemos afirmar com segurança que realmente há o aparecimento de caos na dinâmica global do sistema. Mesmo assim, para nos certificarmos de tal conclusão, nos utilizamos também de uma outra técnica para o cálculo do expoente de Lyapunov máximo. À saber, a técnica de renormalizações [39, 50]. O valor encontrado para o expoente foi $\gamma_L \approx 7,0 \times 10^{-4}$, que concorda plenamente com a curva (a) apresentada na figura IV.4.

O fato de identificarmos a presença de caos na interação auto-consistente de um modo eletromagnético confinado a uma guia de ondas com um tênue feixe de partículas pode ser entendido também como um tipo de “caos genuíno de onda eletromagnética” (*genuine electromagnetic wave chaos*), expressão esta introduzida por Blümel [51]. Em seu trabalho, Blümel considera uma onda eletromagnética confinada a uma cavidade ressonante que apresenta uma das paredes móveis, sendo esta parede ligada a uma mola. Ele mostra

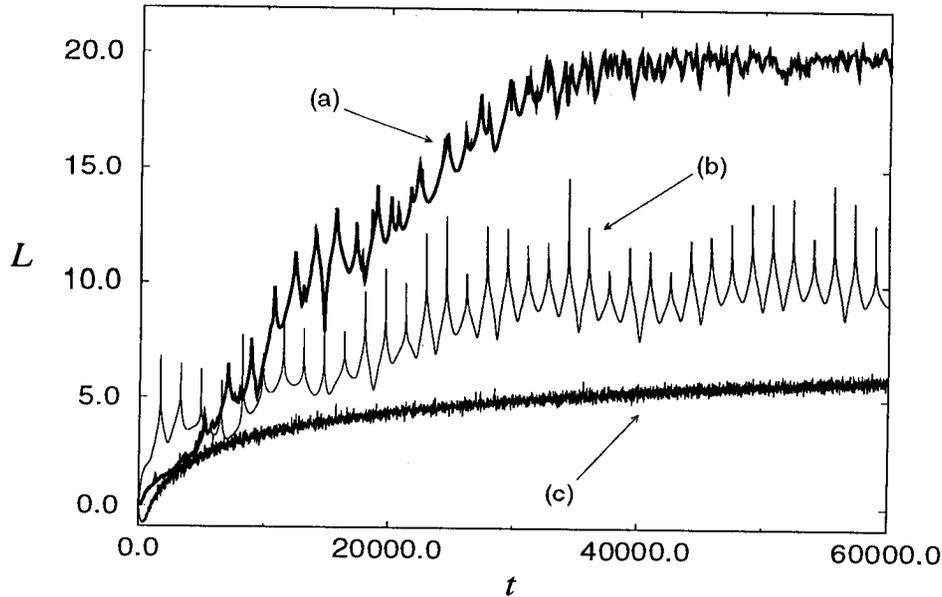


Figura IV.4: Série temporal da divergência orbital $L(t)$. Caso auto-consistente não aglomerada ($I_0 = 2, 0$) e aglomerado ($I_0 = 0, 001$) em (a) e (b), respectivamente; caso não auto-consistente e não aglomerado ($I_0 = 2, 0$) em (c).

que a dinâmica auto-consistente onda-mola (intermediada pela parede móvel) leva a uma caotização da evolução temporal da amplitude da onda, denominando este como “caos genuíno de onda eletromagnética”. No nosso caso, o mesmo tipo de comportamento caótico é encontrado, com a diferença, porém, de que a onda não interage auto-consistentemente com as bordas (parede da cavidade), mas sim, com o meio (feixe de partículas) no qual se encontra.

A onda também é uma entidade dinâmica do sistema, logo suas variáveis dinâmicas correspondentes, amplitude e fase, deveriam ser igualmente incluídas na soma que define a quantidade $L(t)$. Isto foi feito e não encontrou-se diferenças significantes nos resultados quando comparados com os obtidos utilizando o procedimento adotados aqui. Isto está de acordo com o fato de que o maser pode ser visto como uma entidade dependente, pois a dinâmica da onda poder ser realmente removida das equações III.24 através de uma transformação canônica (que no fundo envolve a utilização da constante de movimento ρ_c , eq. III.26). Concluindo, a função $L(t)$, definida como foi, parece medir satisfatoriamente a

presença de atividade caótica no sistema.

IV.4.2 Localizando o caos

Dado que caos está realmente presente no sistema, pretendemos agora determinar em quais porções do espaço de fases ele é mais ou menos intenso. Nosso interesse nesta determinação é o seguinte. Considerando-se um sistema qualquer de interação partícula-onda, sabemos que tipicamente o caos iniciaria e seria mais intenso nas regiões próximas a separatriz do sistema, onde as órbitas de menor giro-frequência se encontram. No nosso caso, em especial, isto significaria que a atividade caótica seria maior para aquelas partículas que descrevem órbitas mais exteriores na figura IV.2. Mais ainda, se este cenário fosse o correto, a intensidade do caos deveria reduzir gradualmente à medida que nos aproximássemos dos pontos fixos elípticos. A pergunta então é: será que esta *distribuição* usual de atividade caótica é a que se encontra em nosso sistema?

Como veremos, a resposta é não.

Para levar adiante esta análise, introduzimos uma nova quantidade, $L_j(t)$, que pode ser encarada como uma medida da divergência de trajetórias local no espaço de fases. Ela é definida de forma semelhante a $L(t)$ como

$$L_j(t) \equiv \ln \left\{ \sqrt{\sum_{i=-N'+1}^{N'} [(I_{j+i}(t) - I'_{N'+i}(t))^2 + (\phi_{i+j}(t) - \phi'_{i+N'}(t))^2]} \right\} - L_{j,0}, \quad (IV.2)$$

com $L_{j,0} \equiv \ln \sqrt{4N'\epsilon^2}$ e condições iniciais $I'_{N'+i} = I_{j+i}(1+\epsilon)$ e $\phi'_{i+N'} = \phi_{j+i}(1+\epsilon)$. O que esta função realmente faz, é medir uma média da divergência de trajetórias em torno da j -ésima partícula da distribuição original de partículas. As mesmas considerações apresentadas em IV.4.1 com respeito à relação entre o comportamento temporal da função $L(t)$ e a existência de caos podem ser aplicadas à função $L_j(t)$. Em especial, o fato de que o coeficiente linear encontrado nas situações caóticas representa o expoente de Lyapunov (agora local) do sistema. Escolhemos N' tal que cumpra $N \gg N' \gg 1$. Mais especificamente, tomamos $2N'/N = 0, 1$.

Façamos então a análise da distribuição da atividade caótica ao longo do espaço de fases.

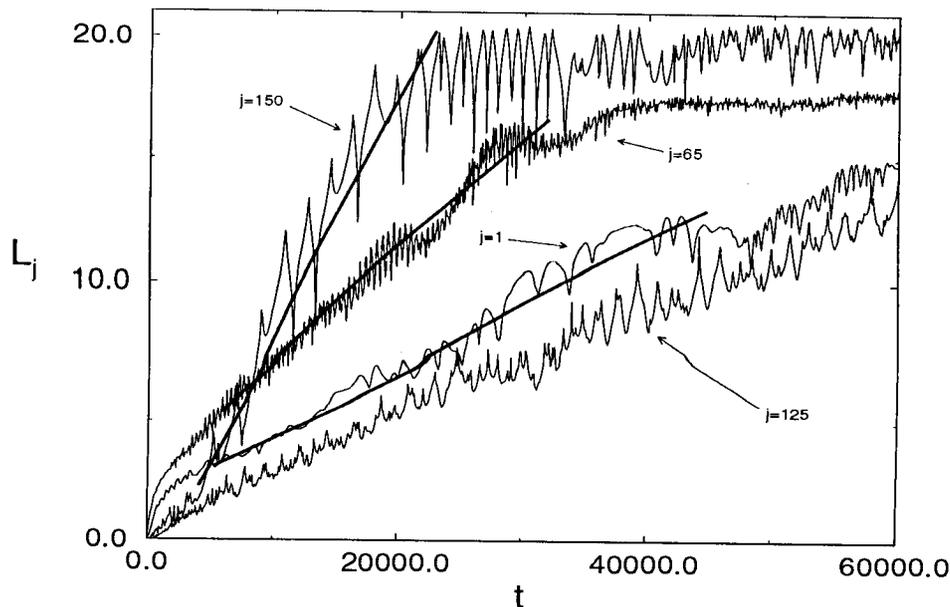


Figura IV.5: Série temporal para a divergência orbital local $L_j(t)$ para $I_0 = 2, 0$. Foram traçadas juntamente retas que descrevem o comportamento médio da divergência exponencial.

Na figura IV.5, apresentamos a função $L_j(t)$ calculada para quatro casos representativos: $j = 1$, $j = 65$, $j = 125$ e $j = 150$. Estes valores de j correspondem a partículas com fases iniciais próximas a $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$ e $\phi = 3\pi/5$, respectivamente. Vemos claramente que o caos é maior para $j = 150$ e $j = 65$, e menor nos outros dois casos. De fato, são igualmente apresentadas na figura IV.5 retas que bem descrevem o comportamento médio da divergência exponencial e a partir das quais estimou-se os expoentes de Lyapunov máximos como sendo $\gamma_L^{j=150} \approx 10^{-4}$, $\gamma_L^{j=65} \approx 5 \times 10^{-5}$ e $\gamma_L^{j=125} \approx \gamma_L^{j=1} \approx 2,5 \times 10^{-5}$.

Partículas nas vizinhanças de $j = 150$ são aquelas que descrevem as órbitas mais externas do espaço de fases da figura IV.2. Vale ressaltar, que estas não seriam as partículas mais aceleradas se mantivessemos a onda constante. O que acontece é que a complexa interação não linear onda-partícula juntamente com variação auto-consistente da amplitude e da fase da onda movem estas partículas para esta localização tão especial logo nos primeiros momentos da interação. Isto foi constatado a partir do acompanhamento individualizado da partícula $j = 150$. Esta mesma interação complexa remove a partícula $j = 125$ de sua posição original, a qual seria associada a autoressonância no caso sem dinâmica da

onda, empurrando-a na direção da região mais interior da distribuição de partículas. Ou seja, quando a onda varia auto-consistentemente, a excursão máxima da ação da partícula $j = 125$ ($\phi_0 = \pi/2$) é **menor** do que a associada a partícula $j = 150$ ($\phi_0 = 3\pi/5$). De qualquer forma, o período da órbita, T_{orb} , das partículas que apresentam uma excursão grande no espaço de fases é muito maior que o período curto das flutuações da onda, i.e., $T_{orb} \gg T_c$. Como sabemos das teorias que descrevem o caos de separtriz[39], a grande disparidade nas escalas de tempo associadas às órbitas próximas à separtriz de um sistema e à perturbação sobre este, representada pela desigualdade acima, reduzem drasticamente a distância entre ressonâncias vizinhas, garantindo a presença de sobreposição (*overlapping*) de ressonâncias e caos mesmo para pequenas amplitudes da perturbação, como as encontradas na figura IV.3. Logo, o tipo de dinâmica atribuído às partículas de grande excursão mencionadas acima contém todos aspectos relacionados ao caos de separtriz, havendo uma diminuição da atividade caótica à medida nos afastamos da separtriz, ou seja, quando vamos de $j = 150$ para $j = 125$.

Indo para valores ainda menores de j ($j = 65$) onde se encontram as partículas que estão próximas ao ponto fixo elíptico, percebemos que o caos torna-se forte novamente. Ressaltamos que atividade caótica não é tipicamente esperada nestas regiões próximas ao ponto elíptico, porém aqui ele se mostra mais intenso que em posições mais externas do espaço de fases como em $j = 150$ (note que $\gamma_L^{j=65} \approx 2\gamma_L^{j=150}$).

Finalmente, quando chegamos extremamente perto do ponto fixo elíptico o caos volta a diminuir, ficando com uma intensidade parecida com a encontrada nas regiões intermediárias ($j = 125$).

Note-se que embora o caos esteja distribuído de forma não homogênea ao longo do espaço de fases, ele se mostra sempre presente. Identificamos, no entanto, que a distribuição de caos realmente não se dá segundo o que tipicamente é encontrado em sistemas onda-partícula, como foi mencionado no início desta sub-seção. Nos resta, então, analisar as possíveis causas desta distribuição não usual da atividade caótica.

IV.5 Difusão de Arnold x Caos de Separatriz

O aparecimento da distribuição não usual da atividade caótica ao longo do espaço de fases pode ser entendida se percebemos que a sobreposição de ressonâncias que leva ao caos para valores arbitrariamente pequenos das flutuações da onda pode ser encontrada não somente quando T_{orb} é muito maior que alguma escala típica das flutuações, que é o que acontece na separatriz. Se T_{orb} for muito menor que alguma escala típica das flutuações e se estas flutuações forem *suficientemente* não harmônicas, a condição de sobreposição de ressonâncias é cumprida novamente.

A razão que nos leva à conclusão acima foi descoberta por Boozer[40] e é similar a explicação usada no caos de separatriz. Basicamente ela pode ser expressa assim: se T_{orb} é muito maior que escalas de tempo típicas das flutuações, harmônicos da frequência orbital estarão em ressonância com a frequência básica das flutuações (isto representa o caos de separatriz), enquanto que se T_{orb} for muito menor que escalas típicas das flutuações, harmônicos das flutuações (se estas forem suficientemente não harmônicas) estarão em ressonância com a frequência básica associada a órbita. Desta forma, no nosso caso esperamos encontrar intensa atividade caótica não só onde $T_{orb} \gg T_c$ (próximo a separatriz), mas também onde $T_{orb} \ll T_l$ (próximo ao ponto fixo), o que concorda com o que foi encontrado na simulação. O fato de o caos diminuir quando estamos extremamente perto do ponto fixo se deve a forte estabilidade encontrada nas órbitas da vizinhança próxima do ponto elíptico a qual prevalece sobre a componente geradora do caos[40, 52]. A razão para toda esta estabilidade está no fato de estas órbitas possuírem pouca anarmonicidade. No que segue, por “próximas” ao ponto fixo entenda-se partículas suficientemente próximas para que a condição $T_{orb} \ll T_l$ seja satisfeita mas suficientemente afastadas para que as partículas não estejam capturadas nesta pequena região de estabilidade.

Mais explicitamente, a razão para o surgimento do caos pode ser entendida como segue. Como foi discutido na seção IV.2, a dinâmica de cada partícula é descrita por um Hamiltoniano H_i que depende somente das coordenadas da partícula e da onda, i.e., $H_i = H_i(I_i, \phi_i, \rho(t), \sigma(t))$, que em última instância é $H_i = H_i(I_i, \phi_i, t)$. Dado que as flutu-

ações das variáveis da onda (que são as responsáveis pela dependência temporal do Hamiltoniano acima) são pequenas, podemos escrever H_i na forma bastante usual

$$H_i(J, \theta) = H_i^{(0)}(J) + H_i^{(1)}(J, \theta, t), \quad (\text{IV.3})$$

onde (J, θ) representa o par ângulo-ação referente a $H_i^{(0)}(J)$ que, por sua vez, dita a dinâmica da partícula quando a onda não apresenta flutuações (a variável J é calculada explicitamente no apêndice C) e $H_i^{(1)}(J, \theta, t)$ contém a contribuição vinda das flutuações. O surgimento de ressonâncias no espaço de fases está conectado ao cumprimento da relação

$$p\omega_{orb}(J_{p,q}) = q\omega_{flut}, \quad (\text{IV.4})$$

com $\omega_{orb} = 2\pi/T_{orb}$ e ω_{flut} as frequências associadas à órbita das partículas e às flutuações da onda (i.e. $H_i^{(1)}(J, \theta, t)$ tem dependência temporal com frequência ω_{flut}), respectivamente, p e q números inteiros e $J_{p,q}$ representa o valor de J na ressonância.

O caos de separatriz pode ser entendido seguindo-se o cenário de Chirikov[41]. Na região próxima a cada uma das ressonâncias acima se forma uma ilha do tipo pêndulo cuja largura é proporcional a raiz quadrada da amplitude da flutuação. Supondo que a dependência da perturbação $H_i^{(1)}$ na variável ação é fraca, vemos que

$$\varepsilon_{lim} \sim \omega_{orb}^2 / \left(\frac{d\omega_{orb}}{dJ} \right) \quad \text{para } J \rightarrow \infty,$$

onde ε_{lim} representa pictoricamente o valor limite para a amplitude das flutuações acima do qual passa a ocorrer a sobreposição de ressonâncias e difusão caótica. Geralmente em sistemas de interação onda-partícula é encontrado que $\omega_{orb} \rightarrow 0$ mais rápido que sua derivada à medida que nos aproximamos da separatriz, de tal forma que ε_{lim} também vai a zero neste limite. Isto é, próximo a separatriz flutuações com amplitudes tão pequenas quanto as encontradas na figura IV.3 são suficientes para gerar o aparecimento do caos. Fica claro a partir da figura IV.5 que este é o caso no sistema que temos em mãos, dado que esta comprova a existência de caos intenso próximo à curva autoressonante.

Agora consideremos o caso de partículas que se encontram longe da separatriz orbitando com uma frequência ω_{orb} finita e que estejam sendo perturbadas (através das variáveis da

onda) por um sinal suficientemente aperiódico. Boozer em seu trabalho considerou este sinal aperiódico como sendo o limite de um sinal periódico com período tendendo a infinito ($\omega_{flut} \rightarrow 0$) e um grande número de harmônicos (o que equivale a $q_{max} \rightarrow \infty$, onde q_{max} representa o máximo valor de q que ainda induz ressonâncias *relevantes* no sistema). Neste caso, para um dado p fixo, a distância entre ressonâncias secundárias adjacentes $q' + 1$ e q' , com q' grande dado a disparidade entre as frequências, seria da ordem de ω_{flut} . Fossem as flutuações por demais harmônicas, a relevância de ressonâncias deste tipo, com q grande, seria bastante exígua e mesmo que a distância entre elas fosse pequena, a sobreposição não ocorreria. Porém, se as flutuações são anarmônicas, a contribuição destas ressonâncias passa a ser, eventualmente, o suficiente para que mesmo flutuações com amplitudes tão pequenas quanto as encontradas na figura IV.3 estabeleçam a sobreposição e o caos. Boozer identificou este limite de $\varepsilon_{lim} \rightarrow 0$ (e $q_{max} \rightarrow \infty$) como sendo difusão de Arnold, dado que o sinal aperiódico na forma discutida aqui é típico de sistemas de vários graus de liberdade. Certamente, usando a mesma idéia de continuidade utilizada por Boozer, somos levados a crer que se o período das flutuações é finito porém grande, como T_l no nosso caso, ε_{lim} é ainda bastante pequeno para órbitas que satisfaçam $T_{orb} \ll T_l$ e o aparecimento de caos para pequenas amplitudes pode facilmente ocorrer.

Dado o que foi discutido acima, fica bastante fácil explicar a razão da distribuição não usual da atividade caótica ao longo do espaço de fases. Como já foi dito, para as partículas próximas a $j = 150$ o caos é do tipo caos de separatriz, visto que $T_{orb} \gg T_c$. Para aquelas próximas a $j = 125$ a intensidade do caos diminui já que T_{orb} neste caso não é nem suficientemente grande quando comparado com T_c nem suficientemente pequeno quando comparado com T_l . Para valores ainda menores de j , que é o caso de $j = 65$, a condição $T_{orb} \ll T_l$ passa a ser cumprida, havendo um aumento na intensidade do caos. Finalmente, próximo ao ponto fixo elíptico o que prevalece é sua estabilidade, fazendo com que atividade caótica volte a diminuir.

IV.6 Modelo de Baixa Dimensionalidade

Relembremos alguns pontos importantes analisados até o momento. Para o caso não aglomerado ($I_0 \gtrsim 1$), observamos a presença de intensa atividade caótica em regiões onde $T_{orb} \sim T_c \ll T_l$. Isto não é típico de sistemas onda-partícula onde o caos esta principalmente concentrado na separatriz ($T_{orb} \sim T_l \gg T_s$). Mais ainda, seguindo o trabalho de Boozer pudemos reconhecer esta intensa atividade caótica para $T_{orb} \ll T_l$ como sendo difusão de Arnold.

Nesta seção, então, investigaremos a presença da difusão no sistema global descrito pelas equações III.24. Introduziremos, também, um modelo de uma partícula que apresenta as principais características necessárias para o aparecimento de difusão segundo o que foi discutido na seção anterior. A partir da comparação dos resultados veremos que o modelo possui as características básicas detectadas na dinâmica do sistema global, indicando que a difusão de Arnold realmente é uma componente importante na caotização deste.

Uma análise detalhada da figura IV.3 revela a presença de outros períodos além de T_l e T_c , entretanto estes períodos parecem bem menos relevantes à dinâmica pois possuem uma amplitude espectral menor. Desta forma, em nossa investigação da difusão no sistema global, daremos ênfase a inspeção na região do espaço de fases onde $T_{orb} \ll T_l$, i.e., próximo ao ponto fixo, visto que nesta região uma atividade caótica mais intensa é esperada.

Não faremos o cálculo explícito dos coeficientes de difusão do sistema global, porém as figuras IV.6 e IV.7 indicam claramente que a difusão está realmente presente no sistema. Na figura IV.6 imprimimos periodicamente a localização no espaço de fases de 30 partículas (selecionadas entre as 500 usadas na simulação) até um tempo $t = 3,5 \times 10^4$. A figura IV.7 é construída da mesma forma, porém até um tempo $t = 5 \times 10^5$.

Para construirmos o modelo de baixa dimensão (para uma partícula) lembramos que tanto a fase quanto a amplitude da onda consistem numa componente média mais pequenas flutuações cujos períodos mais longos são resultantes da interação com as partículas próximas à autoressonância e, os mais curtos, com as partículas mais internas da distribuição. Além disso, uma série de simulações numéricas revelou que a dinâmica da fase da

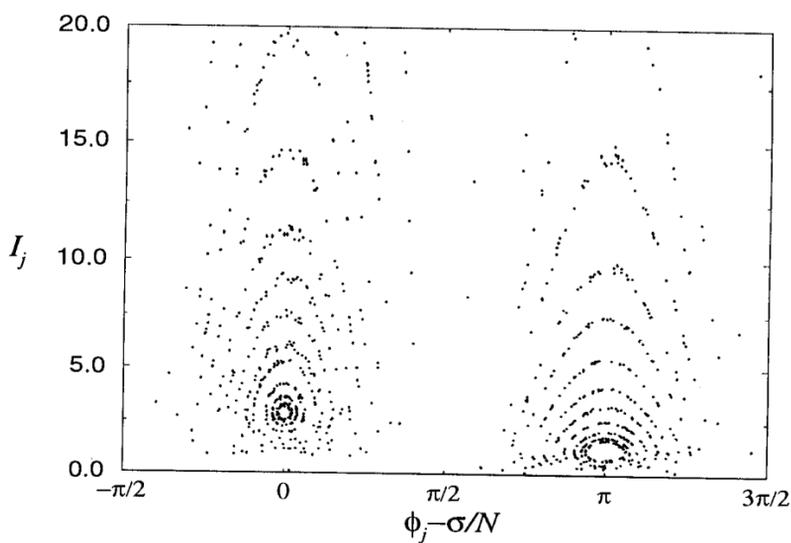


Figura IV.6: Difusão caótica do sistema real obtida para $t = 3,5 \times 10^4$ e ...

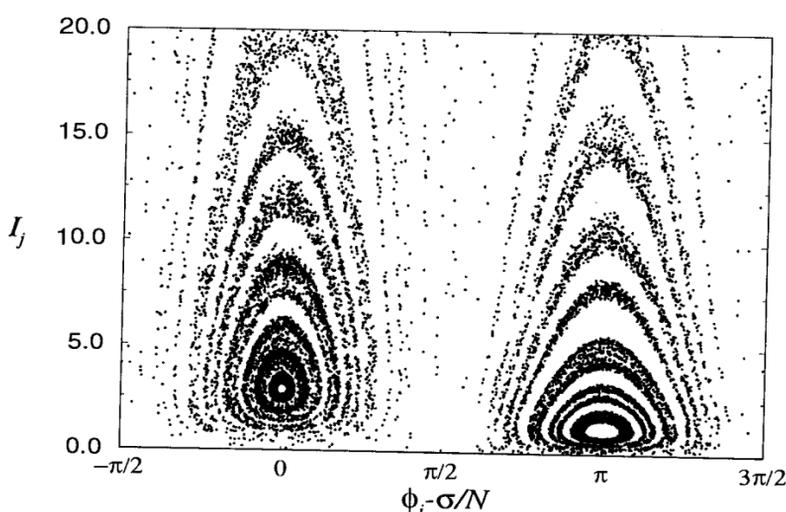


Figura IV.7: ... $t = 5 \times 10^5$ para o caso não aglomerado $I_0 = 2$.

onda se apresenta mais importante do que a dinâmica da amplitude no que diz respeito ao caos. Introduzimos, então, o seguinte modelo para as variáveis do maser

$$\rho_{\text{modelo}}(t) = \text{constante} \quad (\text{IV.5})$$

e

$$\frac{\sigma_{\text{modelo}}(t)}{N} = \begin{cases} +\bar{\sigma}, & \text{se } nT < t < (n + \frac{1}{2})T \\ -\bar{\sigma}, & \text{se } (n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T, \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, que deverão ser utilizadas nas equações dinâmicas para as variáveis da partícula III.24a e III.24b. ρ_{modelo} , a amplitude $\bar{\sigma} \ll 1$ e o período T de variação de σ_{modelo} devem ser escolhidos de tal forma a refletir os resultados obtidos na simulação do sistema global. Tomamos $\rho_{\text{modelo}} = 60$. A amplitude das flutuações da fase da onda é bem representada por $\bar{\sigma} = 0,01$. O período T , como já foi largamente discutido, deve ser bem maior que o período típico das partículas próximas ao ponto fixo elíptico. Tomamos $T \sim T_l \sim 5000$. As descontinuidades de σ_{modelo} como função do tempo introduzem as variações nas escalas mais rápidas, que resultam no caráter não harmônico da variável. Com isso pretendemos modelar a presença de anarmonicidade no espectro de variação da onda que, segundo Boozer, é a responsável pela profusão da sobreposição de ilhas de ressonância e pelo surgimento de difusão caótica nas proximidades dos pontos fixos elípticos.

Antes de entrarmos no estudo do modelo acima, discutamos mais a fundo um ponto bastante importante. Se, ao contrário de IV.6, a perturbação sobre a dinâmica da partícula introduzida pela dependência temporal das variáveis da onda contivesse apenas alguns poucos harmônicos, a atividade caótica próxima aos pontos fixos seria muito pequena, ou quase inexistente, para os valores de amplitude $\bar{\sigma} \ll 1$ usados. Isto é mostrado na figuras IV.8 e IV.9, onde comparamos uma versão expandida ao longo do eixo dos I da figura IV.7 – de tal forma que possamos ver mais claramente as órbitas autoressonantes, fig. IV.8 – com o gráfico (fig. IV.9) obtido quando modelamos a fase da onda como sendo dada por apenas uma harmônica, $\sigma(t)/N = \bar{\sigma} \text{sen}(2\pi t/T)$. Em ambos os casos vemos o caos de separatriz, porém somente no primeiro o caos estende-se as regiões mais internas do espaço de fases. No segundo caso, em desacordo como o que encontramos nas simulações auto-consistentes,

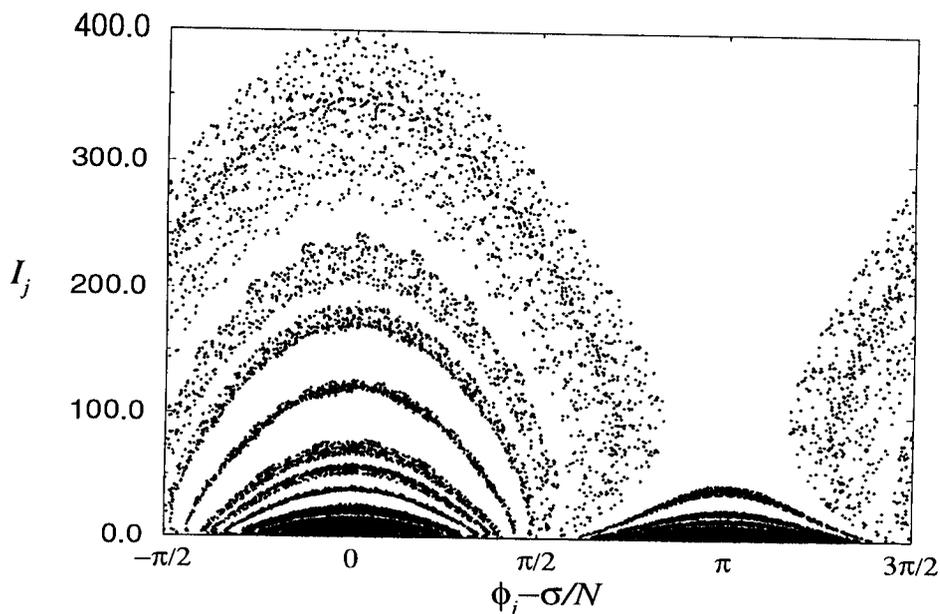


Figura IV.8: Difusão caótica do sistema real, comparada ...

o espaço de fases torna-se essencialmente regular à medida que nos movemos na direção dos pontos elípticos.

Finalmente, utilizamos o modelo não harmônico IV.6 para estudar a difusão nas figuras IV.10 e IV.11, onde os tempos são os mesmos usados nas figuras IV.6 e IV.7, respectivamente.

Comparando as figuras IV.10 e IV.11, percebemos que a difusão está realmente presente. Além disso, a repentina regularização de órbitas *extremamente* próximas ao ponto elíptico também pode ser apreciada.

O fato de utilizarmos um modelo descontínuo que possui derivadas divergentes num conjunto de equações diferenciais contínuas poderia levantar alguma dúvida no que diz respeito a precisão dos resultados. Ressaltamos, entretanto, que este problema não existe dado que as derivadas de ρ_{modelo} e σ_{modelo} não são calculadas em momento algum – somente as derivadas das variáveis das partículas são necessárias. De qualquer forma, um teste adicional para checar a validade do procedimento numérico adotado é representar $\sigma_{modelo}(t)$ através de sua série de Fourier,

$$\frac{\sigma_{modelo}}{N} = \frac{4\bar{\sigma}}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi(2m+1)t}{T'} \right], \quad (\text{IV.7})$$

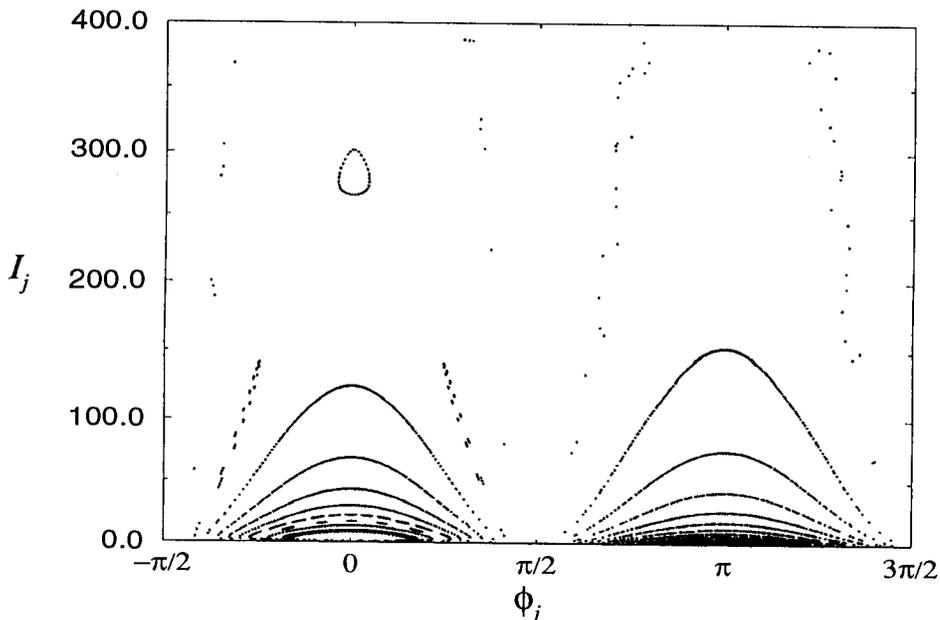


Figura IV.9: ... à difusão obtida usando o modelo harmônico com $\rho_{modelo} = 60$ e $T = 5000$

que é uma função analítica. Fizemos isto, aumentando gradualmente o número de termos na série. Para efeito de ilustração, nas figuras IV.12 e IV.13 são apresentados os gráficos obtidos para $M = 50$ e $M = 1000$, respectivamente, após 200 ciclos de σ_{modelo} . Nos focamos na região próxima ao ponto fixo situado em $\phi = 0$. Analisemos estas figuras juntamente com IV.9 e IV.11 onde são mostrados os resultados para o modelo harmônico ($M = 1$) e para o modelo anarmônico. Para $M \sim 1$, figura IV.9, o caos está bem longe do ponto elíptico, não havendo indício algum de difusão nas suas proximidades. Ao aumentarmos o valor de M , começam a surgir cada vez mais ressonâncias em regiões cada vez mais internas do espaço de fases, levando eventualmente ao aparecimento de sobreposição e difusão. Isto pode ser vislumbrado na figura IV.12 onde já percebemos a presença de atividade caótica que, no entanto, ainda é entrecortada por algumas ilhas de ressonância que não sofreram sobreposição. Para $M \gg 1$, figura IV.13, o caos estende-se por todo o espaço de fases (com exceção da região de *super* estabilidade em torno do ponto fixo), da mesma forma que o encontrada com $\sigma_{modelo}(t)$ dado por IV.6 e apresentado na figura IV.11.

Como conclusão, podemos dizer que o modelo introduzido para as flutuações da onda, embora completamente regular, conseguiu reproduzir as principais características obtidas na

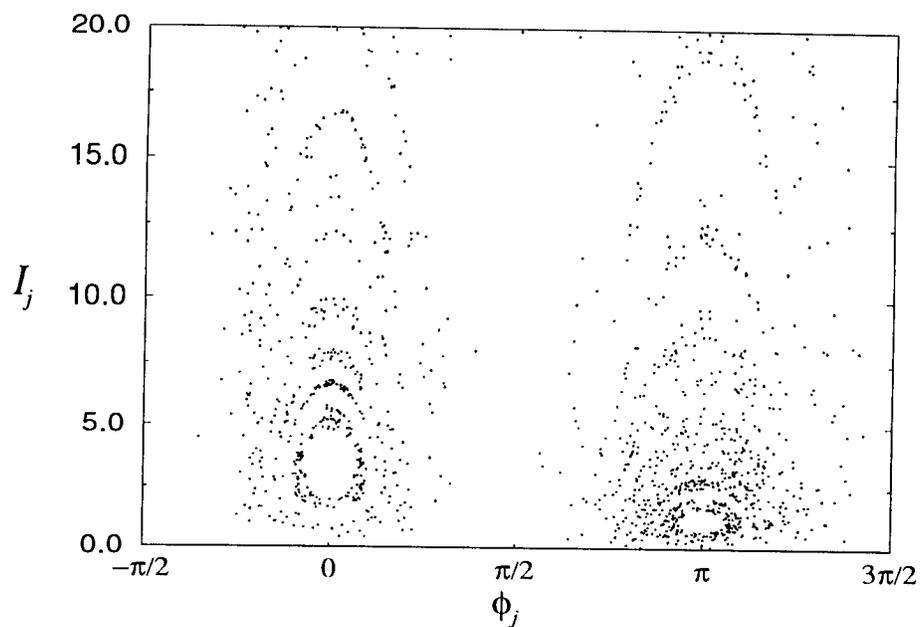


Figura IV.10: Difusão caótica obtida com o modelo não harmônico para $t = 3,5 \times 10^4$ e ...

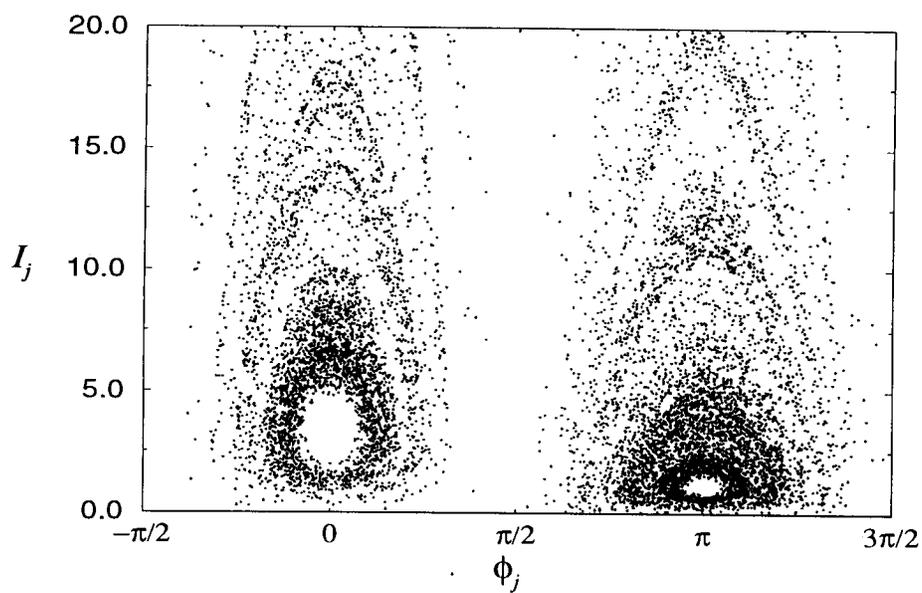


Figura IV.11: ... $t = 5 \times 10^5$ para o caso não aglomerado $I_0 = 2$.

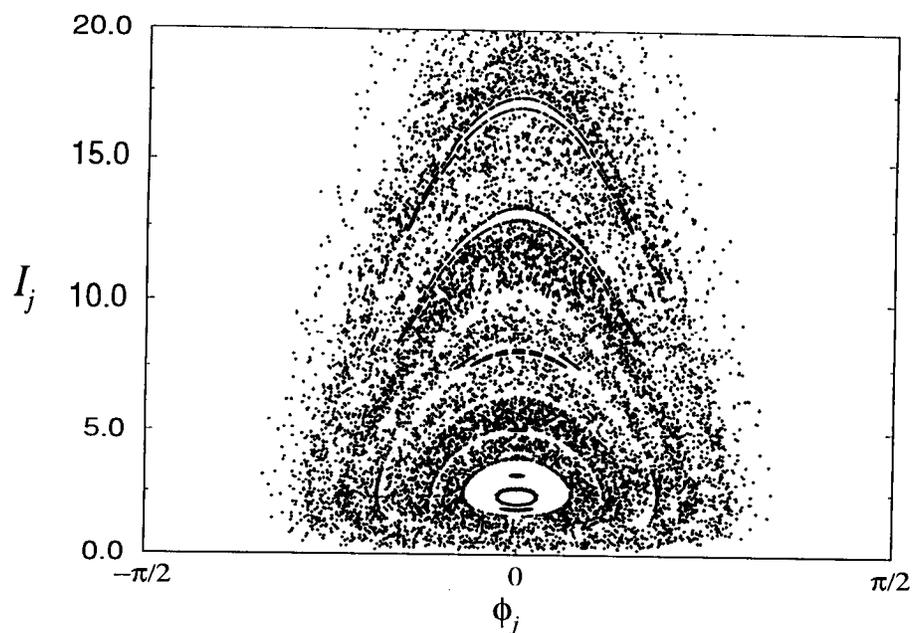


Figura IV.12: Difusão obtida para a série de Fourier de σ_{modelo} truncada para $M = 50$...

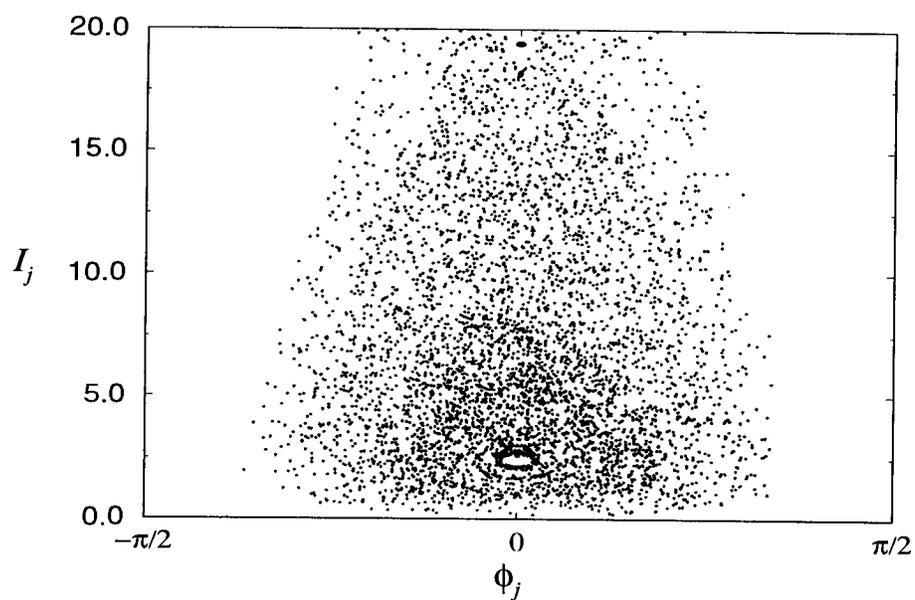


Figura IV.13: ... e $M = 1000$ harmônicas. $T = 5000$ e $\bar{\sigma} = 0,01$.

simulação auto-consistente, i.e., o caráter anarmônico do modelo foi suficiente para gerar o caos observado. Isto comprova que a difusão de Arnold, no contexto aqui discutido, tem importante papel no surgimento do caos auto-consistente.

Capítulo V

Bifurcações e Caos Gerados pela Modulação do Maser

V.1 Introdução

No capítulo anterior, nos dedicamos ao estudo detalhado da dinâmica auto-consistente para um feixe frio de partículas. Vimos que tênues flutuações nas variáveis da onda geradas por sua interação com a distribuição de partículas eram responsáveis pelo aparecimento de difusão caótica no sistema, quando este se encontrava num estado não aglomerado. Por outro lado, se as condições iniciais eram tais que o efeito de aglomeração era efetivo, a figura da macropartícula aparecia, sendo sua interação com a onda regular e havendo uma grande troca de energia de uma forma periódica entre estas entidades.

Imaginemos agora, que o feixe de partículas não seja monoenergético. Mais especificamente, suponhamos que a concentração inicial de partículas é bastante intensa nas regiões de baixas energias ($I_{j,0} \ll 1$, lembrando que o subscrito “0” indica condição inicial), havendo, no entanto, uma pequena parte do feixe que se encontra em regiões mais energizadas ($I_{j,0} \gtrsim 1$) do espaço de fases. Neste caso, baseando-se no que foi analisado anteriormente, podemos imaginar que a dinâmica se apresentaria da seguinte forma. As partículas de baixa energia, que representam quase que a totalidade da distribuição de partículas, se aglomerariam criando uma macropartícula que seria a responsável principal pela dinâmica da onda, havendo um grande amortecimento desta última em favor da energização da pri-

meira. A troca de energia onda-macropartícula seria regular, sendo a amplitude da onda periodicamente variável no tempo (aos moldes da figura IV.1). Com isso, aquelas partículas que se encontravam inicialmente com energias mais altas, que portanto não fazem parte do aglomerado e que pouco ditam na variação da onda, terão uma dinâmica semelhante ao de partículas teste sujeitas a um maser modulado.

É justamente a dinâmica destas partículas que estaremos investigando neste capítulo.

Certamente o processo de excitação de ondas com amplitude modulada discutido acima não é único, havendo várias outras situações físicas onde são encontradas partículas interagindo com campos eletromagnéticos de amplitude variável. Entre eles, citamos pelo menos outros dois de relevância: (i) sob certas condições ondas eletromagnéticas são instáveis podendo frequentemente desenvolver uma auto-modulação não linear de sua amplitude[42]; (ii) lentas modulações da amplitude da onda também podem ser produzidas em laboratório através da lenta variação dos parâmetros de controle de um experimento[30]. Em certos casos, a modulação se dá espaço-temporalmente[53], porém nos ateremos aqui à modulação puramente temporal.

Será mostrado que a modulação da amplitude, independentemente de sua origem precisa, induz ao aparecimento de bifurcações e caos nas órbitas periódicas da dinâmica das partículas. Nosso estudo se focará nas ressonâncias primárias que apresentam a mesma periodicidade da modulação quando esta é pequena. Isto porque este tipo de trajetória tende a ser dentre todas presentes no sistema a mais estável, de tal forma que sua desestabilização usualmente está intimamente ligada a completa difusão do caos por todo o espaço de fases[54]. A investigação será feita a partir da análise dos diagramas de estabilidade para as trajetórias periódicas em questão e dos mapas de Poincaré apropriados.

Para que seja possível uma análise de ressonâncias adequada para o nosso problema será necessário o cálculo explícito das frequências orbitais das partículas, o que será discutido na seção V.2.

Vale a pena, antes de entrarmos efetivamente na análise da influência da modulação da amplitude da onda, tecer rapidamente algumas comparações entre o que foi estudado

no capítulo anterior e o que será feito aqui. Lá, as flutuações das variáveis da onda eram *pequenas*, não sendo a amplitude delas o ingrediente principal para a caotização do espaço de fases. De fato, o que era importante, era sua forma que necessariamente tinha de ser suficientemente aperiódica para que houvesse a sobreposição de ressonâncias próximo aos pontos fixos elípticos. Sendo esta sobreposição a responsável pelo aparecimento da difusão de Arnold, que se caracteriza como uma difusão bastante lenta. Agora, no entanto, as coisas mudam de figura. A modulação passa a apresentar um caráter tipicamente periódico envolvendo *grandes* amplitudes. Ou seja, a amplitude passa a ser importante em detrimento da forma. Com isso, os efeitos da modulação sobre a dinâmica das partículas são bem menos sutis que no caso anterior, levando o sistema possivelmente a um estado bem mais caótico com taxas de difusão bem maiores.

Principais resultados deste capítulo são apresentados na ref. [55].

V.2 O Modelo e suas Características Relevantes

Para analisarmos a influência da modulação do campo do maser sobre a dinâmica das partículas *teste*, tomamos como modelo uma partícula interagindo com uma onda de grande amplitude que é *externamente* modulada temporalmente, tendo sua fase (que apresenta papel secundário neste caso) constante ($\sigma = 0$) e sua amplitude dada por

$$\lambda\rho(t) = \bar{\rho}[1 + \varepsilon \cos(\Omega_{mod}t)], \quad (\text{V.1})$$

onde $\bar{\rho}$ representa a amplitude *média* da onda e $0 \leq \varepsilon \leq 1$ e Ω_{mod} a amplitude e a frequência adimensionalizadas da modulação, respectivamente. Consideramos, também, a onda como sendo não dispersiva ($f = 1$) e em ressonância com partículas inicialmente de baixa energia ($w = 1/\sqrt{1 + \lambda\rho_0}$). A escolha da forma da modulação como sendo composta apenas por uma harmônica foi feita por simplicidade. Ela não parece descrever fidedignamente, por exemplo, o que é mostrado na figura IV.1. Porém, como foi discutido na seção anterior, o que acreditamos ser realmente relevante na dinâmica da partícula é a amplitude da modulação ε , não havendo grandes alterações fosse escolhida uma outra forma periódica para a

modulação. Igualmente, a introdução de fracas dispersões ou pequenos descasamentos de frequência não alterariam grandemente os processos de caotização e bifurcação de órbitas periódicas a serem discutidos aqui, levado em conta, é claro, seus efeitos sobre a frequência orbital das partículas.

A dinâmica da partícula é, então, descrita pelo Hamiltoniano não auto-consistente II.20, sendo agora a amplitude dependente do tempo, $\hat{\rho}(t) = \lambda\rho(t)$ dado acima. Iniciemos por estudar mais a fundo a dinâmica regular encontrada para $\varepsilon = 0$. Neste caso, a partícula descreve uma dinâmica exatamente igual àquela discutida no capítulo II. Tomando o caso típico $\rho = 100$ e $\lambda = 0,01$, o espaço de fases da partícula, que já foi analisado no capítulo anterior, é representado pela figura III.1(a).

Para este caso completamente integrável onde o Hamiltoniano é uma quantidade conservada podemos introduzir uma variável ação J , dada por[56]

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint I(H, \phi) d\phi. \quad (\text{V.2})$$

Isolando $I = I(H, \phi)$ e utilizando esta expressão na equação acima, obtemos para o Hamiltoniano como função de J ¹

$$H(J) = a \cos\left(\frac{b}{3} + c\right) - \frac{d}{3}, \quad (\text{V.3})$$

onde

$$a = \frac{2\sqrt{3 + 3\bar{\rho}^2 + 8J + w^{-2} + 4J^2w^2}}{3},$$

$$b = \arccos\left(\frac{K}{D}\right), \quad c = 0, \quad \frac{4\pi}{3}$$

e

$$d = 2Jw - \frac{1}{w},$$

com

$$K = \frac{2}{w^3} - \frac{18}{w} + \frac{9\bar{\rho}}{w} - \frac{30J}{w} - 18(1 + \bar{\rho})Jw - 48J^2w - 16J^3w^3,$$

$$D = 2(3 + 3\bar{\rho} + 8J + w^{-2} + 4J^2w^2)^{\frac{3}{2}}.$$

¹ver apêndice C

A variável c assume dois valores distintos referentes a duas soluções físicas possíveis. Estas soluções correspondem as duas classes de trajetórias existentes. Cada uma destas classes orbita em torno de um dos pontos fixos *centrais* do sistema não perturbado, os quais serão denominados aqui de CFP_{\pm} (*C*entral *F*ixed *P*oints), com $c_+ = 0$ e $c_- = 4\pi/3$, e sendo o sub-índice relacionado à posição do ponto fixo (ϕ_{\pm}, I_{\pm}) por $\cos \phi_{\pm} = \pm 1$.

As frequências orbitais (girofrequências) das partículas, ω_{\pm} , são obtidas como função da ação J a partir de

$$\omega_{\pm}(J) = \frac{\partial H_{\pm}}{\partial J}. \quad (\text{V.4})$$

Na figura V.1 estas frequências são plotadas para os ramos $+$ e $-$. Percebemos que similar ao que é encontrado no caso sem onda² as girofrequências são monotonicamente decrescentes com J . Isto significa que ressonâncias primárias localizadas em J_n ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) com

$$n\omega_{\pm}(J_n) = \Omega_{mod} \quad (\text{V.5})$$

e ressonâncias secundárias localizadas em $J_{n,p}$ com

$$n\omega_{\pm}(J_{n,p}) = p\Omega_{mod} \quad (\text{V.6})$$

e $p \neq \pm 1$, são tais que quanto maior é n maior é o valor da ação $J_{n,p}$ correspondente.

Ilustraremos o comportamento típico das bifurcações do sistema, nos atendo daqui em diante à análise de um dos *lóbulos* do espaço de fases. Escolhemos o lóbulo direito apresentado na figura III.1(a) (aquele cujo ponto fixo satisfaz $\cos \phi = -1$), visto que é este que desenvolve atividade caótica mais expressiva.

Para que sejamos consistentes com os resultados numéricos obtidos até o momento nesta tese, assumimos a seguinte condição : $\omega_-(J = 0) > \Omega_{mod}$. Isto implica que a primeira ressonância primária encontrada no sistema é aquela que apresenta $n = +1$.

Adiantando um pouco o que veremos, mencionamos por final que num mapa periódico de Poincaré (que serão utilizados mais adiante) cada uma das ressonâncias encontradas para $J = J_{n,p}$ aparecem como uma cadeia de ilhas com seus respectivos pontos fixos elípticos

²onde a girofrequência vai com $1/\gamma$ (ver apêndice B)

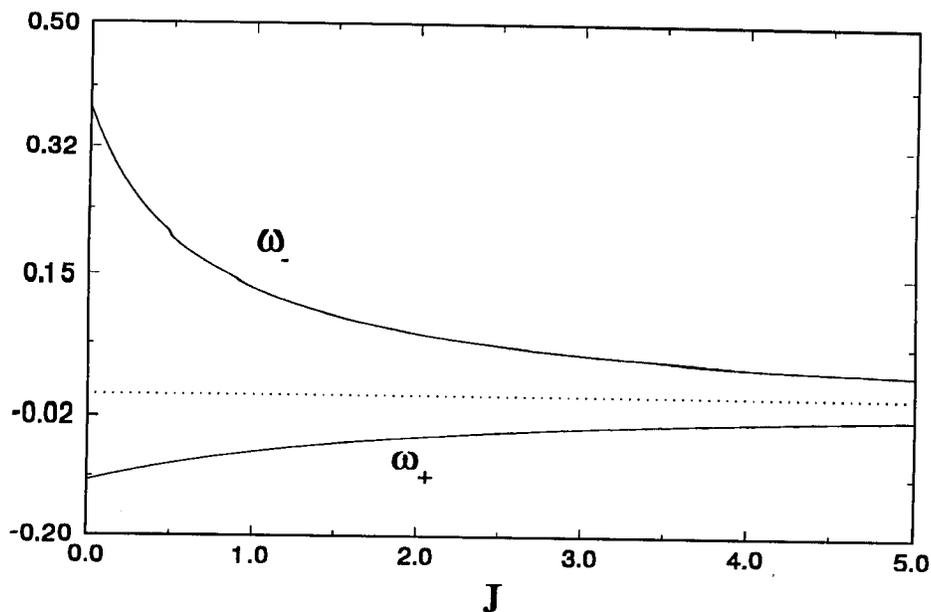


Figura V.1: Girofrequências ω_+ e ω_- como função da ação J para o caso não perturbado $\varepsilon = 0$. $\bar{\rho} = 1$

e hiperbólicos. Estes pontos fixos são na realidade mapeamentos discretos de órbitas periódicas e sempre que forem mencionadas devem ser entendidos neste contexto. Pontos fixos elípticos de uma ressonância $J_{n,p}$ serão denotados por $(J_{n,p})_e$ e pontos hiperbólicos por $(J_{n,p})_h$. Além disso, vale ressaltar que quando a modulação da onda é *ligada*, os pontos fixos centrais do sistema não perturbado adquirem a mesma periodicidade da modulação, i.e., a modulação remove a degenerescência dos pontos fixos centrais.

V.3 Investigação Numérica

Como já foi mencionado, toda investigação numérica será feita com base na análise de estabilidade e em mapas de Poincaré no plano $\phi \times I$. Estas duas formas se mostrarão complementares uma à outra.

V.3.1 Análise de estabilidade

O comportamento dos pontos fixos como função da amplitude de modulação ε pode ser precisamente estudado utilizando-se o algoritmo de Newton-Raphson para órbitas

periódicas³ juntamente com os respectivos diagramas de estabilidade. No diagrama de estabilidade, mostra-se o assim chamado índice de estabilidade, α , de uma particular órbita periódica como função do parâmetro perturbador, o fator ε no nosso caso.

Como é discutido no apêndice D, se $|\alpha| < 1$ a órbita correspondente é estável (ponto fixo elíptico) e se $|\alpha| > 1$ a órbita é instável (ponto fixo hiperbólico). Para $|\alpha| = 1$ encontramos, então, uma bifurcação da(s) órbita(s) periódica(s). Dois tipos de bifurcação são típicos para este tipo (baixa dimensionalidade) de sistema Hamiltoniano: dobramento direto ou inverso de período e bifurcação tangente inversa. No primeiro caso, o dobramento direto acontece quando uma órbita estável torna-se instável dando origem a duas novas órbitas periódicas estáveis cujo período é o dobro da primeira, sendo o dobramento inverso obviamente a bifurcação acontecendo no sentido contrário[57]. Ambos ocorrem para $\alpha = -1$. No segundo, uma órbita estável e uma instável do sistema que possuem a mesma periodicidade colidem, simplesmente deixando de existir[52]. Isto ocorre para $\alpha = +1$.

Estas são as características principais que serão necessárias para a investigação das propriedades de estabilidade das órbitas.

A análise será feita para dois regimes representativos da frequência de modulação Ω_{mod} . Estes regimes são caracterizados pelo valor normalizado da dessintonia Δ entre esta frequência e a frequência orbital não perturbada do ponto fixo central em questão [$\omega_-(J = 0)$]. A dessintonia é definida como

$$\Delta \equiv \left| \frac{\omega_-(J = 0) - \Omega_{mod}}{\omega_-(J = 0)} \right|, \quad (V.7)$$

valendo portanto $0 < \Delta < 1$.

O primeiro regime é aquele no qual $\Delta \ll 1$, i.e., quando a frequência da modulação é próxima a $\omega_-(J = 0)$. Para que a desigualdade acima se cumpra tomamos $\Omega_{mod} = 0,32$, o que implica em $\Delta \approx 0,16$. O diagrama de estabilidade associado é apresentado na figura V.2, lembrando sempre que nosso interesse é voltado para as órbitas que possuem mesma periodicidade da modulação.

³ver apêndice D

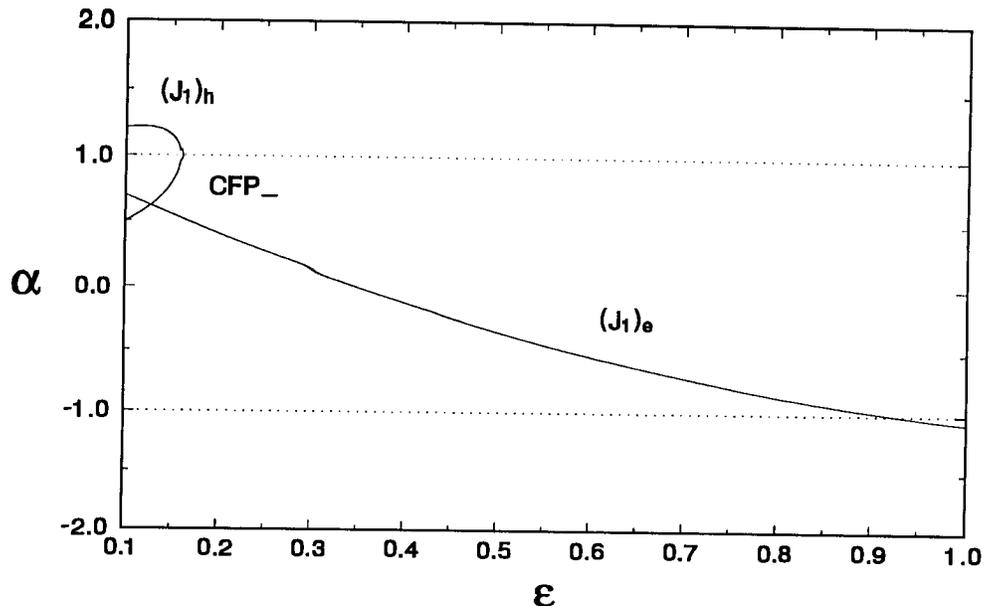


Figura V.2: Diagrama de estabilidade no caso de pequena dessintonia, $\Omega_{mod} = 0,32 \leftrightarrow \Delta \approx 0,16$.

Neste caso, três pontos fixos têm a mesma periodicidade da modulação e são apresentados na figura. Um deles é o CFP_- e os outros dois os pontos fixos elíptico $(J_1)_e$ e hiperbólico $(J_1)_h$ relacionados a ressonância J_1 . Vemos que o CFP_- desaparece quando colapsa com $(J_1)_h$ através de uma bifurcação tangente inversa. Mais adiante ($\varepsilon \sim 0,9$), $(J_1)_e$ sofre bifurcação direta de dobramento de período, tornando-se instável.

Acompanhamos ainda duas das bifurcações seguidas por $(J_1)_e$ (que se processam rapidamente), e fizemos uma inspeção no espaço de fases que indicou a ausência de órbitas bifurcadas estáveis de periodicidade superior para $\varepsilon = 1$. A conclusão é que $(J_1)_e$ sofre uma cascata infinita de dobramentos de período à medida que a amplitude de modulação cresce até seu valor máximo. Logo, nesta situação é esperado um grau bastante elevado de atividade caótica ao longo de todo o espaço de fases.

Passemos agora para o outro caso limite, o regime de grandes valores de dessintonia. Na figura V.3 é mostrado o diagrama de estabilidade para $\Omega_{mod} = 0,1$ que nos leva a $\Delta \approx 0,75$. Vemos que o comportamento orbital como um todo é bem diferente do caso anterior.

Iniciemos a análise enfatizando que neste caso não só ressonâncias do tipo J_1 aparecem.

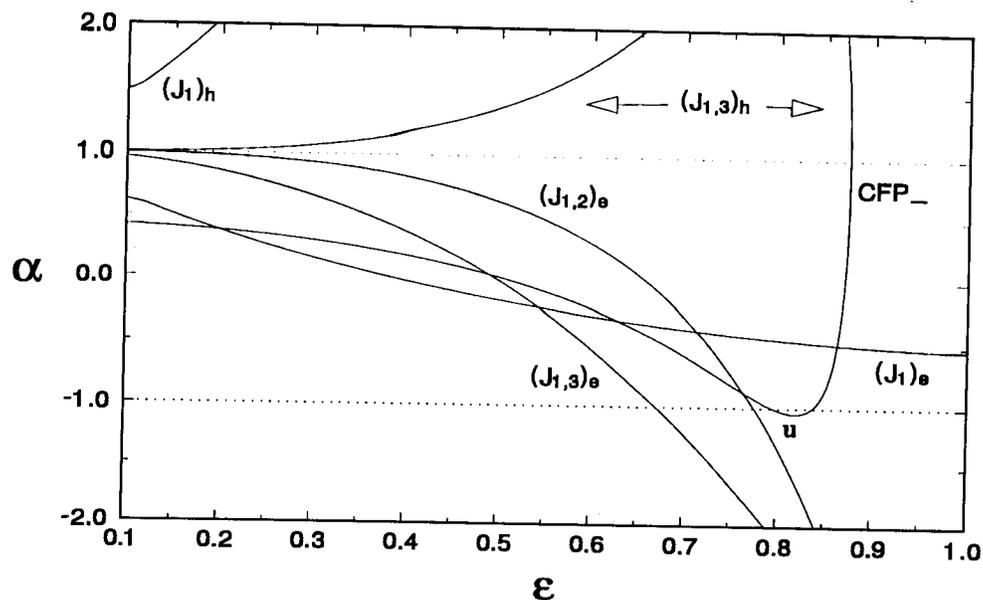


Figura V.3: Diagrama de estabilidade no caso de grande dessintonia, $\Omega_{mod} = 0,1 \leftrightarrow \Delta \approx 0,75$.

Aparecem igualmente ressonâncias do tipo $J_{1,2}$ e $J_{1,3}$ ($J_1 > J_{1,2} > J_{1,3}$), dado que agora a equação V.6 pode ser resolvida não apenas para valores positivos de J_1 mas também para valores positivos de $J_{1,2}$ e $J_{1,3}$.

Pela figura vemos que o CFP_- ainda desaparece via bifurcação tangente inversa, colapsando com um ponto hiperbólico na sua vizinhança. Note-se contudo, que este ponto hiperbólico não é mais o ponto hiperbólico associado a primeira ressonância J_1 , mas sim $(J_{1,3})_h$, que é o ponto hiperbólico de periodicidade $n = 1$ mais próximo do CFP_- .

A seguir, observamos que o CFP_- passa por um período de instabilidade antes de reobter a estabilidade e colapsar. Nesta região do diagrama de estabilidade onde o CFP_- se apresenta instável, denotado na figura por “u”, ele sofre um único dobramento de período. Para que este dobramento de período não aparecesse seria necessário que o ponto hiperbólico estivesse mais próximo do CFP_- , o que indica que este tipo de desestabilização temporária é típica de casos com grande dessintonia Δ . No caso de pequena dessintonia, o fato de as ilhas de ressonância apresentarem um tamanho maior parece causar o colapso sem que tenha havido uma desestabilização anterior do CFP_- . O aparecimento do dobramento de período do CFP_- será apreciado também nos mapas de Poincaré.

Finalmente, consideramos o comportamento do pontos estáveis $(J_1)_e$, $(J_{1,2})_e$ e $(J_{1,3})_e$. Destes três pontos vemos que apenas o primeiro, $(J_1)_e$, não é desestabilizado para $\varepsilon \leq 1$. Os outros dois sofrem bifurcação de dobramento de período. Como no caso anterior, não foi encontrado nenhum ponto fixo estável de período mais elevado originário destes para $\varepsilon = 1$, de modo que ambos realmente sofrem uma cascata infinita de dobramentos de período. De qualquer forma, independente das sequências de dobramento de período, o fato de $(J_1)_e$ permanecer estável ao longo de toda excursão possível do parâmetro ε nos leva a crer que a caotização global do espaço de fases é inibida neste caso.

V.3.2 Mapas de Poincaré

Passemos agora a examinar algumas características peculiares do sistema reveladas pelos diagramas de estabilidade através dos mapas de Poincaré.

Na figura V.4 é mostrada uma sequência de mapas feita para o caso de pequena dessintonia ($\Omega_{mod} = 0,32$) à medida que a amplitude da modulação cresce. Na figura V.4(a) podemos observar tanto o CFP₋ quanto a ressonância J_1 por completo, com ambos pontos fixos, elíptico e hiperbólico, presentes. Na figura V.4(b), somente o ponto elíptico $(J_1)_e$ sobrevive. Logo acima do valor de ε associado a seu dobramento de período observado na figura V.2, encontramos a figura V.4(c).

Também o caso $\varepsilon = 1$ foi considerado. Uma procura por pontos elípticos de período mais elevado originários de $(J_1)_e$ foi feita, utilizando-se para tanto um conjunto de 50×50 condições iniciais nas proximidades de sua última posição. Entretanto, como foi mencionado anteriormente, nada foi encontrado. Logo, podemos associar pequenas dessintonias a uma tendência ao aparecimento de cascatas infinitas de dobramentos de período de $(J_1)_e$ e caos global.

Examinemos o caso de grande dessintonia ($\Omega_{mod} = 0,1$) mostrado na figura V.5. Na figura V.5(a) observamos a presença do CFP₋ juntamente com as ressonâncias J_1 , $J_{1,2}$ e $J_{1,3}$ por completo. Note-se que a localização dos pontos fixos no plano $\phi \times I$ satisfaz $(I_{1,2})_h < (I_{1,2})_e$ e $(I_{1,3})_h > (I_{1,3})_e$. Na figura V.5(b) mostramos em detalhe o espaço de

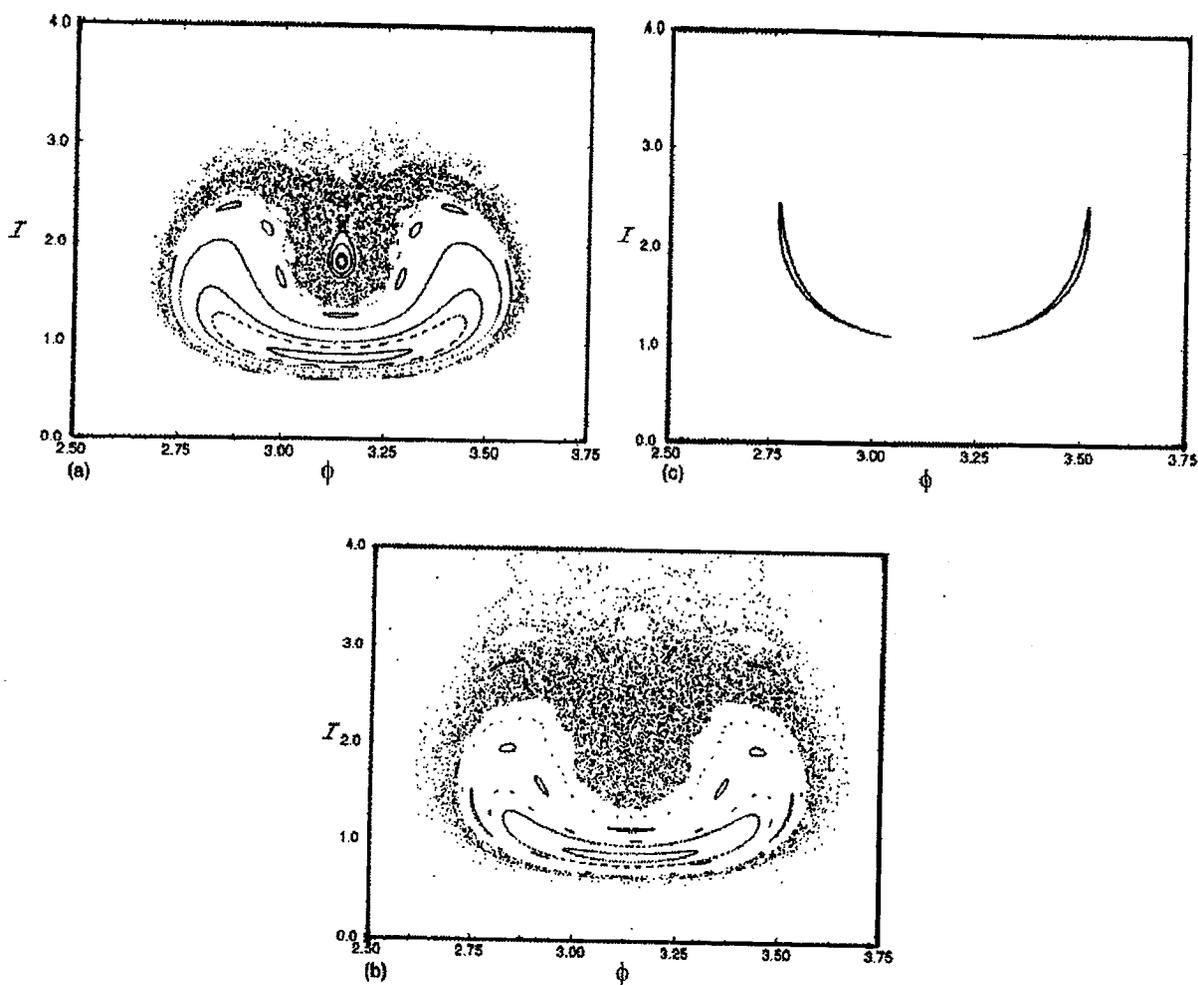


Figura V.4: Sequência de bifurcações para o regime de pequenas dessintonias, $\Delta \approx 0,16$. Tomamos $\varepsilon(a;b;c)=0,14; 0,16$ e $0,937$, respectivamente. (Atente para a ordem das figuras.)

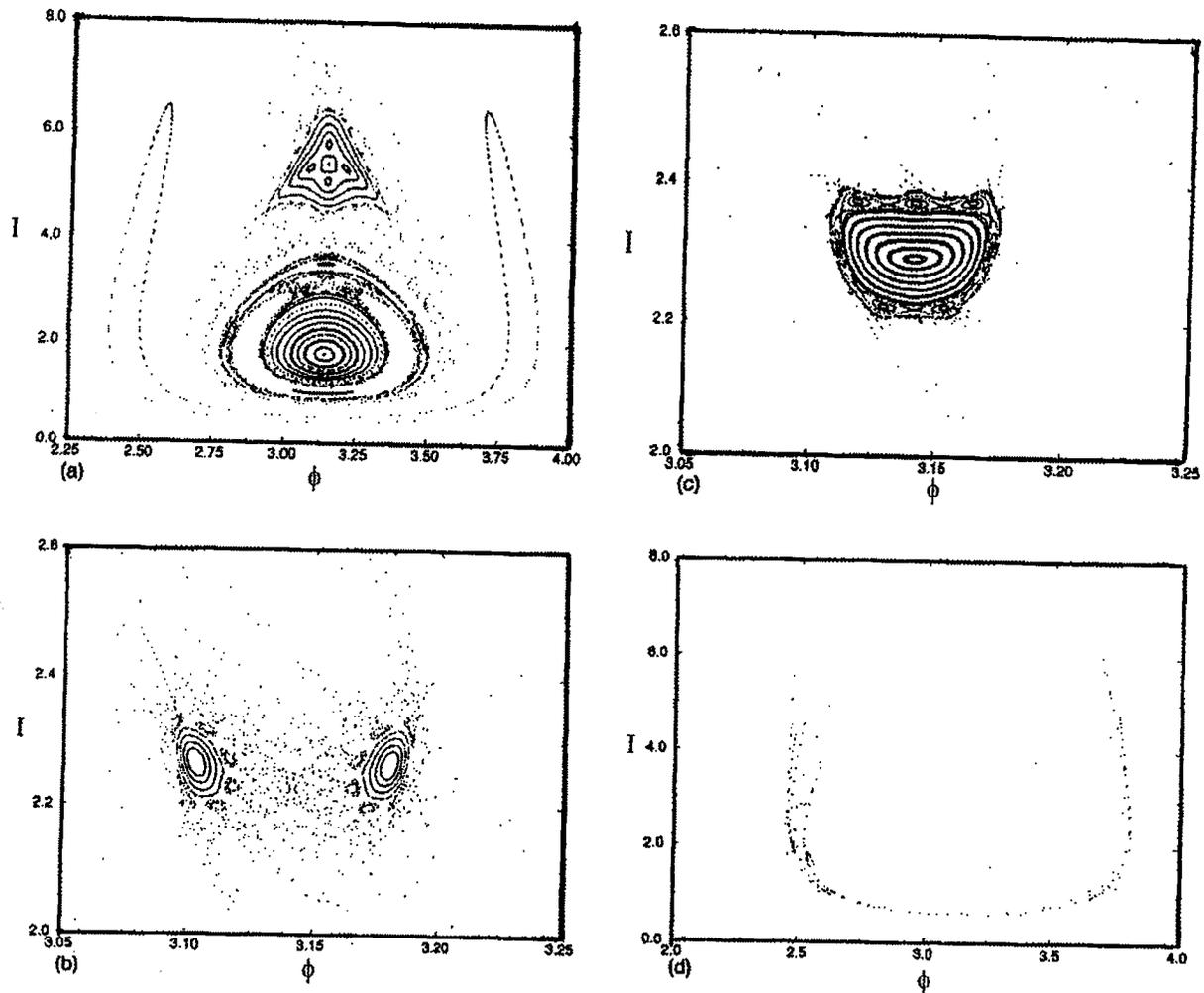


Figura V.5: Sequência de bifurcações para o regime de grandes dessintonias, $\Delta \approx 0,75$. Tomamos $\varepsilon(a;b;c;d)=0,5; 0,82; 0,84$ e $1,0$, respectivamente. (Atente para a ordem das figuras.)

fases próximo ao CFP₋ justamente quando este se encontra instável (região “u” da figura V.3). Na figura V.5(c), o CFP₋ reestabilizado é mostrado. Finalmente, na figura V.5(d), a presença do ponto fixo estável $(J_1)_e$ é confirmada para o valor máximo da amplitude de modulação $\varepsilon = 1$. Caos global é portanto inibido, visto que orbitas com condições iniciais suficientemente próximas de $(J_1)_e$ não sofrerão difusão caótica.

V.4 Discussão dos Resultados Obtidos

Os resultados obtidos através da análise numérica do sistema poderiam ser sumarizados da seguinte forma. O espaço de fases não perturbado (sem modulação dos campos do maser) das partículas apresenta dois lóbulos, sendo que cada lóbulo apresenta trajetórias que orbitam em torno de um ponto fixo elíptico CFP. Quando a modulação do maser é ligada, este ponto fixo passa a apresentar a periodicidade da modulação e aparecem novos pontos fixos referentes às ressonâncias J_n e $J_{n,p}$ também. Focando-se apenas nos pontos fixos que possuem a periodicidade da onda para ε pequeno, vimos que quando a dessintonia entre frequências da modulação e das órbitas não perturbadas das partículas é pequeno apenas dois pontos fixos aparecem. Um deles é o próprio CFP e o outro o associado a ressonância J_1 . Aumentando-se a amplitude da modulação, o CFP desaparece através de uma bifurcação tangente inversa com um ponto hiperbólico vizinho e o outro sofre uma cascata infinita de dobramentos de período. Neste caso há uma globalização do caos no espaço de fases. Quando a dessintonia é grande, o CFP ainda desaparece através de uma bifurcação tangente inversa, mas o ponto fixo estável associado a J_1 deixa de sofrer qualquer dobramento de período, permanecendo estável mesmo para a máxima amplitude de modulação $\varepsilon = 1$. Neste caso, entretanto, outras órbitas estáveis associadas a $p = 1$ e $p = 2$ que sofrem cascata infinita de dobramentos de período estão presentes. Para valores ainda maiores da dessintonia, seria esperado o aparecimento de outros pontos fixos estáveis (e instáveis obviamente) associados a ressonâncias do tipo $J_{1,p}$ com valores maiores de p , sendo que aqueles com valores relativamente pequenos de p não sofreriam nenhuma bifurcação de dobramento de período. Desta forma, para casos gerais onde a dessintonia entre as frequências é grande uma inibição da difusão global do caos ao longo do espaço de fases é esperada.

Estes resultados, como já foi dito, tem relevância não só no estudo do sistema onda-partícula que temos analisado ao longo desta tese, onde a partir de uma variação na densidade do feixe podemos alterar a escala de tempo da modulação da onda e assim obter uma larga faixa de valores da dessintonia Δ , mas também em outros sistemas tanto de

laboratório onde a onda é externamente modulada variando-se os parâmetros de controle do experimento (como o raio da guia de ondas, por exemplo)[30], quanto astrofísicos onde a radiação é auto-modulada devido a efeitos não lineares[42].

Capítulo VI

Conclusão

Nesta tese analisamos a dinâmica não linear na interação de partículas magnetizadas com uma onda eletromagnética circularmente polarizada que propaga-se paralelamente ao campo magnético de fundo. Inicialmente, nos focamos na sua aplicação como um esquema para aceleração de partículas, estudando aquele que pode ser considerado o modelo mais simples para a descrição do sistema, qual seja, uma partícula de baixa energia sujeita a campos dados. Mesmo com toda a simplicidade do modelo, a partir dele pudemos investigar o processo de autoressonância, onde mostramos que no caso de maser não dispersivo, ou seja, na ausência de guia de ondas confinante, as fases da onda e da partícula entram numa sincronia que é auto-sustentada pelos processos cinemáticos (variação relativística de massa e efeito Doppler) ao longo de toda a aceleração. Além disso, pudemos ter uma primeira noção dos efeitos limitadores impostos pela dispersão e a possibilidade de reobtenção de troca eficiente de energia via introdução de um descasamento inicial entre as frequências da onda e de cíclotron.

Aliando-se os fatos de que uma escolha conveniente do descasamento inicial de frequências possibilita uma retomada de grande energização e que na prática a quantidade de energia disponível na onda é finita, viu-se a necessidade de considerar a dinâmica da onda para uma correta descrição da interação onda-partículas. Desenvolvemos, então, um formalismo Hamiltoniano auto-consistente que engloba tanto a dinâmica das partículas quanto da onda. Deste formalismo foi possível determinar duas constantes de movimento que nos levam

a conservação da energia total do sistema.

Tomando o caso pertinente para aceleração, isto é, quando a energia inicial das partículas é pequena, a dinâmica destas é tal que nos primeiros momentos da interação há uma forte aglomeração num mesmo ponto do espaço de fases de forma que torna-se possível a descrição de toda a distribuição de partículas através de uma única entidade: a macropartícula. Neste caso, há uma redução dos graus de liberdade efetivos do sistema para dois (um referente à onda e outro à macropartícula), sendo este completamente integrável. A eficiência da aceleração, enfocando os efeitos da dispersão do maser e do descasamento de frequências foi investigada analiticamente utilizando-se um potencial efetivo que dita a variação da energia da macropartícula. Encontrou-se que o descasamento de frequências realmente permite contornar os efeitos restritivos impostos pela dispersão, chegando em certos casos a promover uma total transferência de energia da onda para o feixe. Em especial, considerando um modo $TE_{1,1}$ propagando-se numa guia de ondas de raio $R \approx 7$ cm com frequência na faixa $\omega \sim 100$ GHz (microondas) e amplitude da ordem de $E \sim 3 \times 10^8$ V/m interagindo com um feixe tênue de elétrons de densidade $n \sim 10^{11} - 10^{12}$ cm⁻³, estimou-se o ganho das partículas em $K \sim 0,1$ GeV com um gradiente de aceleração da ordem de 1-100 MeV/m.

A validade da aproximação de macropartícula foi testado a partir da integração numérica do conjunto de equações referentes a um número grande (tipicamente 500) de partículas. Constatou-se que para energias cinéticas iniciais da ordem ou abaixo de 1-10 KeV o processo de aglomeração no espaço de fases é eficiente, havendo efetivamente a criação de uma macropartícula. Neste caso, os resultados referentes a máxima aceleração obtidos numericamente estão em acordo com aqueles obtidos via potencial efetivo. Por outro lado, se a energia inicial vai além do valor acima, o processo de aglomeração é não eficiente ou mesmo inexistente, invalidando a aproximação de macropartícula e reduzindo em muito a energização média das partículas. Nota-se, contudo, que ainda assim a troca de energia é sensível à variação do descasamento de frequências, de tal forma que uma escolha adequada deste parâmetro possibilita a obtenção de um feixe de má qualidade (grandes disparidades entre as energias de cada partícula) porém com algumas partículas muito energizadas, com

energias inclusive maiores que as esperadas para o caso aglomerado.

Uma outra característica importante dos sistemas em que a aproximação de macro-partícula não é válida é o fato de que nestes casos todos os graus de liberdade são efetivos e conseqüentemente a integrabilidade não está mais assegurada. Sendo assim, muito provavelmente atividade caótica esteja presente na dinâmica. De fato, baseado na existência de divergência exponencial de trajetórias, constatamos a presença de caos. Mais do que isto, investigando como se dá a distribuição do caos ao longo do espaço de fases descobrimos que este não é intenso somente próximo a separatriz (curva autoressonante em nosso caso), o que é o usual em sistemas de interação onda-partículas, mas também próximo aos pontos fixos elípticos do sistema.

A razão para esta distribuição *anômala* da atividade caótica pode ser entendida com base na grande disparidade existente entre as frequências orbitais das partículas que povoam o espaço de fases. Esta disparidade faz com que a evolução temporal das variáveis da onda, que intermediam o acoplamento partícula-partícula, apresente flutuações com um caráter anarmônico, i.e., um sinal que apresenta componentes de Fourier relevantes em diferentes faixas do espectro (tanto *pequenas* quanto *grandes* frequências). Desta forma, a amplitude das flutuações necessária para que haja sobreposição de ressonâncias e caos vai a zero tanto perto da separatriz, onde a frequência orbital é muito **menor** que algumas componentes do espectro das flutuações, quanto próximo ao ponto fixo, onde a frequência orbital é muito **maior** que algumas componentes do espectro das flutuações. Esta atividade caótica intensa longe da separatriz pode ser assim entendida como uma difusão de Arnold. Cabe ressaltar que *bem* próximo ao ponto fixo a atividade caótica sofre uma redução devido à pouca não linearidade das órbitas nesta região.

Finalmente, passamos à análise do caos na dinâmica de uma partícula teste sujeita a campos modulados *externamente*. Este se apresenta como um bom modelo para a descrição da dinâmica de partículas de *alta* energia inicial quando estas representam uma pequena parte de uma distribuição de partículas que encontra-se majoritariamente a baixas energias e que interage auto-consistentemente com a onda eletromagnética. Nos focamos

no estudo das bifurcações de órbitas que possuem a mesma periodicidade da modulação, dado que estas são usualmente as órbitas mais estáveis do sistema e, conseqüentemente, sua desestabilização está diretamente conectada a globalização do caos no espaço de fases. Dois grupos de órbitas com estas características estão presentes no sistema, estando cada um destes grupos localizado próximo a cada um dos pontos fixos elípticos do sistema não perturbado. Uma órbita de cada um dos grupos é o próprio ponto fixo que ao ligarmos a modulação adquire a periodicidade desta. As demais, são órbitas periódicas *legítimas* relacionadas a ressonâncias do sistema. Classificando o comportamento destas órbitas frente à variação da amplitude da modulação através da dessintonia entre as frequências do ponto fixo de um dado grupo e da modulação, vemos que para valores pequenos da dessintonia, este grupo apresenta apenas duas órbitas que acabam ou deixando de existir via bifurcação tangente inversa ou tornando-se instáveis via dobramento de período. Desta forma, para grandes valores da amplitude de modulação uma forte atividade caótica ao longo de todo espaço de fases é esperada neste caso. Por outro lado, se a dessintonia é grande, o grupo contém um número maior de órbitas periódicas, sendo que algumas destas órbitas deixam de instabilizar-se, inibindo a globalização total do caos.

Apêndice A

Modos TE numa Guia de Ondas Cilíndrica

Para acharmos quais são os possíveis modos de propagação de uma onda eletromagnética no interior de uma guia cilíndrica, utilizamos as equações de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_w = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B}_w = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_w = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_w}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B}_w = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_w}{\partial t},$$

juntamente com as condições de contorno que devem ser satisfeitas na superfície da guia devido a sua condutividade infinita e a necessidade dos campos serem contínuos

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_w = 0 \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_w = 0, \qquad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{n} é um vetor normal a superfície da guia de ondas.

Como a guia é suposta infinita e homogênea toda dependência dos campos nas variáveis z e t deve estar na parte oscilante. Sendo assim, podemos escrever a forma geral dos campos de um modo transversal elétrico (TE) em coordenadas cilíndricas como sendo:

$$\mathbf{E}_w = \frac{1}{2} [E_r(r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r + E_\varphi(r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi] e^{-i(kz - \omega t)} + \text{c. c.} \qquad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{1}{2} [B_r(r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r + B_\varphi(r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + B_z(r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_z] e^{-i(kz - \omega t)} + \text{c. c.}, \qquad (\text{A.3})$$

com ω e k a frequência e a componente longitudinal (com relação à direção de propagação) do vetor de onda, respectivamente.

Colocando A.2 e A.3 nas equações de Maxwell, obtemos oito equações escalares

$$r \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$r \frac{\partial B_r}{\partial r} + B_r + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} - ikB_z = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$kcE_\varphi = -\omega B_r \quad (\text{A.6})$$

$$kcE_r = \omega B_\varphi \quad (\text{A.7})$$

$$E_\varphi + r \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\frac{i\omega r}{c} B_z \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} + irkB_\varphi = \frac{i\omega r}{c} E_r \quad (\text{A.9})$$

$$ikB_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{i\omega}{c} E_\varphi \quad (\text{A.10})$$

$$B_\varphi + r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Utilizando-se a equação A.7 para isolarmos ora E_r , ora B_φ em função de B_z na equação A.9, obtemos

$$E_r = -\frac{i\omega}{k_\perp^2 cr} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \quad (\text{A.12})$$

$$B_\varphi = -\frac{ik}{k_\perp^2 r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.13})$$

onde $k_\perp \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$ é a componente transversal do vetor de onda. Da mesma forma, utilizando-se A.6 em A.10 obtemos para E_φ e B_r

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{k_\perp^2 c} \frac{\partial B_z}{\partial r} \quad (\text{A.14})$$

$$B_r = -\frac{ik}{k_\perp^2} \frac{\partial B_z}{\partial r}. \quad (\text{A.15})$$

Assim vemos que basta encontrarmos B_z para a partir daí calcular todas as demais componentes dos campos.

Para encontrarmos a equação para B_z utilizamos os resultados A.13 e A.15 em A.5, obtendo

$$r^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2 r^2 B_z = 0. \quad (\text{A.16})$$

As soluções via método de separáveis da equação acima podem ser escritas na forma conveniente

$$B_z = d J_n(k_\perp r) e^{-i(n\varphi + \hat{\sigma})}, \quad (\text{A.17})$$

com $n \in N^*$ e onde d e $\hat{\sigma}$ são constantes reais e J_n as funções de Bessel de primeiro tipo de ordem n .

Tendo-se a forma de B_z utilizamos as equações A.12 à A.15 para obtermos o resto das componentes. Colocando-se estes resultados em A.2 e A.3, temos para o campo eletromagnético da onda[59]:

$$\mathbf{E}_w = E \left[-\frac{n}{k_\perp r} J_n \cos(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_r + J'_n \sin(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \right] \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{kc}{\omega} E \left[-J'_n \sin(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{n}{k_\perp r} J_n \cos(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{k_\perp}{k} J_n \cos(\alpha) \hat{\mathbf{e}}_z \right], \quad (\text{A.19})$$

onde $E \equiv \omega d / k_\perp c$ é a amplitude do campo elétrico, $\alpha \equiv kz - \omega t + n\varphi + \hat{\sigma}$, J'_n representa a derivada de J_n e suprimimos o argumento $k_\perp r$ das funções de Bessel. Além disso, para que as condições de contorno A.1 sejam satisfeitas devemos ter

$$E_\varphi(r = R, \varphi) = B_r(r = R, \varphi) = 0,$$

da onde tiramos

$$k_\perp = \frac{j_{n\nu}}{R}, \quad (\text{A.20})$$

com $j_{n\nu}$ a ν -ésima raiz de J'_n .

Apêndice B

Variáveis de Centro-guia e Dinâmica em um Campo Magnético

Tratemos o caso de uma partícula de carga $-e$ e massa m sujeita a um campo magnético constante de magnitude B_o na direção z . Tomando-se a mesma escolha de calibre utilizada em II.4 escrevemos os potenciais \mathbf{A} e ϕ como

$$\mathbf{A} = B_o x \hat{\mathbf{e}}_y \quad \text{e} \quad \phi = 0,$$

sendo o Hamiltoniano (dimensional) da partícula dado por

$$H = \sqrt{(cP_x)^2 + (cP_y + eB_o x)^2 + (cP_z)^2 + (mc^2)^2}. \quad (\text{B.1})$$

Diretamente percebemos que tanto o Hamiltoniano H quanto os momenta canônicos P_y e P_z são constantes de movimento. Resta-nos, então, encontrar uma transformação que elimine a coordenada x , de tal forma que o novo momento conjugado a esta coordenada seja também uma constante. Para tanto, procuremos pelas variáveis de ângulo-ação [56].

Começemos pela variável de ação, que é calculada a partir de

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint P_x(H, x) dx. \quad (\text{B.2})$$

Para efetuarmos a integral acima, primeiramente reescrevemos B.1 da seguinte forma:

$$\left[\frac{cP_x}{\sqrt{H^2 - (cP_z)^2 - (mc^2)^2}} \right]^2 + \left[\frac{cP_y + eB_o x}{\sqrt{H^2 - (cP_z)^2 - (mc^2)^2}} \right]^2 = 1, \quad (\text{B.3})$$

o que sugere a existência de uma variável ψ tal que:

$$\cos \psi = \frac{P_x}{\beta} \quad (\text{B.4})$$

Apêndice B. Variáveis de Centro-guia e Dinâmica em um Campo Magnético 94

$$\text{sen}\psi = \frac{P_y + m\Omega_{co}x}{\beta} \quad (\text{B.5})$$

tendo-se definido

$$\beta^2 \equiv \left(\frac{H}{c}\right)^2 - P_z^2 - (mc)^2 \quad \text{e} \quad \Omega_{co} \equiv \frac{eB_0}{mc},$$

Desta forma, podemos utilizar B.5 e B.4 para escrever dx e P_x como função de ψ

$$dx = \frac{\beta}{m\Omega_{co}} \cos\psi \, d\psi \quad (\text{B.6})$$

$$P_x = \beta \cos\psi. \quad (\text{B.7})$$

Colocando-se estas expressões em B.2, obtemos

$$I = \frac{\beta^2}{2\pi m\Omega_{co}} \int_0^{2\pi} \cos^2\psi \, d\psi = \frac{\beta^2}{2m\Omega_{co}}, \quad (\text{B.8})$$

da onde, usando a definição de β , podemos escrever o novo Hamiltoniano em função de I

$$H(I) = mc^2 \sqrt{\frac{2\Omega_{co}}{mc^2} I + \left(\frac{P_z}{mc}\right)^2 + 1} = \gamma mc^2, \quad (\text{B.9})$$

onde γ é o fator relativístico, que neste caso é uma constante de movimento como H . Além disso, da expressão integral em B.8 podemos ao menos suspeitar que o ângulo canonicamente conjugado à I é justamente ψ , pois é a partir de um ciclo desta variável que a ação é definida.

Tendo-se achado a forma de I , passemos para a determinação da função geratriz da transformação $S(I, x)$ que leva do par (x, P_x) para as variáveis ângulo-ação. Para tanto, usamos

$$S(I, x) = \int P_x(H, x) \, dx.$$

Novamente com o auxílio de B.6 e B.7, podemos efetuar a integração em ψ . Sendo que ao final devemos usar B.5 para converter o resultado para uma função de x . Encontramos

$$S(I, x) = I \left(\arcsen \frac{P_y + m\Omega_{co}x}{\sqrt{2m\Omega_{co}I}} + \frac{P_y + m\Omega_{co}x}{2m\Omega_{co}I} \sqrt{2m\Omega_{co}I - (P_y + m\Omega_{co}x)^2} \right). \quad (\text{B.10})$$

Apêndice B. Variáveis de Centro-guia e Dinâmica em um Campo Magnético 95

Aqui já podemos verificar se nossa suposição a respeito do ângulo canonicamente conjugado à I era correta ou não. Ele é dado por

$$\frac{\partial S}{\partial I} = \arcsen \frac{P_y + m\Omega_{co}x}{\sqrt{2m\Omega_{co}I}}.$$

Por comparação com B.5 vemos que se trata justamente de ψ como suspeitávamos, i.e., as variáveis canonicamente conjugadas ângulo-ação para este problema são (ψ, I) .

A partir da expressão de $S(I, x)$, obtemos a expressão para $\mathcal{F}_3(P_x, \psi)$ fazendo-se as devidas transformações de variáveis. Utilizando-se as transformações de Legendre, temos

$$\mathcal{F}_3(P_x, \psi) = S - I \psi - P_x x,$$

da onde tiramos

$$\mathcal{F}_3 = \frac{P_x P_y}{m\Omega_{co}} - \frac{P_x^2 \tan \psi}{2m\Omega_{co}}. \quad (\text{B.11})$$

Utilizando variáveis adimensionalizadas segundo as receitas apresentadas em II.4 e somado à B.11 as funções geratrizes identidade para as coordenadas (y, P_y) e (z, P_z) , chegamos a função desejada

$$\mathcal{F}_3(P_x, P_y, P_z, \psi, y', z') = P_x P_y - \frac{P_x^2 \tan \psi}{2} + P_y y' + P_z z', \quad (\text{B.12})$$

onde y' e z' representam as coordenadas y e z transformadas. As transformações canônicas que B.12 gera são apresentadas na seção II.4 (eq. II.18).

Integrando-se as equações de movimento obtidas a partir do Hamiltoniano B.9, que é escrito na forma adimensional como

$$H = \sqrt{1 + 2I + P_z^2} = \gamma,$$

e utilizando as transformações de B.12 obtemos a expressão para a órbita descrita pela partícula sujeita ao campo magnético constante

$$\begin{aligned} x &= P_y' - \sqrt{2I} \text{sen}(\Omega_c t + \psi_0), \\ y &= y' - \sqrt{2I} \text{cos}(\Omega_c t + \psi_0), \\ z &= z_0 + v_{z0} t, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Apêndice B. Variáveis de Centro-guia e Dinâmica em um Campo Magnético 96

onde

$$\Omega_c = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \frac{\Omega_{co}}{\gamma}$$

é a frequência de ciclotron relativística, $P'_y = p_{y0} - x_0$, $y' = p_{x0} + y_0$, $\psi_0 = \arctan(p_{y0}/p_{x0})$, $v_z = p_z/\gamma$ e o subscrito "0" indica valor inicial, com \mathbf{p} o momento linear cinético da partícula (adimensionalizado por mc). Das expressões acima vemos que o movimento da partícula é circular uniforme no plano perpendicular ao campo magnético com uma circunferência de raio (de Larmor) igual a $\sqrt{2I}$ centrada em $(x, y) = (p_{y0} - x_0, p_{x0} + y_0)$ e frequência igual a Ω_c e um movimento retilíneo uniforme na direção paralela ao campo.

Apêndice C

Diagonalização do Hamiltoniano não Auto-consistente

O Hamiltoniano de uma partícula sujeita a um laser circularmente polarizado não dispersivo escrito nas variáveis I e $\phi \equiv \psi - (kz - \omega t) - \hat{\sigma}$, onde I e ψ são as coordenadas centro-guia e $ck = \omega$, é dado por (veja capítulo II, equação II.20 para o caso $f = 1$)

$$H = \sqrt{1 + 2I + \hat{\rho} + 2\sqrt{2I\hat{\rho}} \cos \phi + w^2 I^2} - wI, \quad (\text{C.1})$$

onde todas as grandezas foram adimensionalizadas da mesma forma apresentada no capítulo I e tomou-se $P'_z = 0$. A partir do Hamiltoniano acima vemos que este sistema é completamente integrável, visto que é de um grau de liberdade e possui uma constante de movimento, que é o próprio H . Desta forma, sabe-se possível a construção de variáveis ângulo-ação θ, J tal que o Hamiltoniano passe a ser escrito como $H = H(J)$ e que a frequência das órbitas seja dada por $\omega_{orb} \equiv \dot{\theta} = \partial H / \partial J$.

Devido a complexidade envolvida e ao fato de serem as frequências naturais de movimento as quantidades que realmente nos interessam, não efetuaremos aqui o cálculo explícito da variável ângulo θ , nos atendo à obtenção da função $H = H(J)$. A ação é definida por

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint I(H, \phi) d\phi \quad (\text{C.2})$$

que é justamente a área inscrita à órbita da partícula no espaço de fases. A partir do Hamiltoniano C.1 obtemos uma equação de segundo grau para I como função de H e ϕ

$$\beta^2 I^2 + 2(\alpha\beta - \cos^2 \phi)I + \alpha^2 = 0, \quad (\text{C.3})$$

onde $\alpha \equiv (H^2 - 1 - \hat{\rho})/(2\sqrt{\hat{\rho}})$ e $\beta \equiv (Hw - 1)/\sqrt{\hat{\rho}}$. A existência de duas raízes para $I(H, \phi)$ é esperada tendo em vista que no espaço de fases a órbita possui um ramo abaixo do ponto fixo I_- e um ramo acima I_+ , como pode ser visualizado na figura III.1(a). As soluções de C.3 são

$$I_{\pm} = \frac{\cos^2 \phi}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{\sqrt{\cos^4 \phi - 2\alpha\beta \cos^2 \phi}}{\beta^2}. \quad (\text{C.4})$$

Tomando-se a condição de que a expressão dentro da raiz quadrada em C.4 deve ser positiva, o intervalo em ϕ de existência de uma dada órbita é dado por $\cos^2 \phi \geq 2\alpha\beta$. Definindo-se, então um valor crítico $\phi_c \equiv \arccos \sqrt{2\alpha\beta}$ vemos que as orbitas existem para $-\phi_c \leq (\phi - \phi_f) \leq \phi_c$, onde $\phi_f = 0, \pi$ é o valor de ϕ no ponto fixo. Sendo J a área inscrita aos ramos I_+ e I_- reescrevemos C.2 como

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_f - \phi_c}^{\phi_f + \phi_c} (I_+ - I_-) d\phi = \frac{2s}{\pi\beta^2} \int_{\phi_f}^{\phi_f + \phi_c} \cos \phi \sqrt{\cos^2 \phi - 2\alpha\beta} d\phi, \quad (\text{C.5})$$

onde $s = \cos \phi_f = \pm 1$ representa o sinal de $\cos \phi$ no intervalo $\phi_f \leq \phi \leq \phi_f + \phi_c$ e foi utilizado o fato de que o integrando é par em relação a ϕ_f . Para levarmos o cálculo da integral adiante é conveniente definirmos uma nova variável: $U = \sin(\phi - \phi_f) = s \sin \phi$, de forma que

$$J = \frac{2}{\pi\beta^2} \int_0^{\sqrt{1-2\alpha\beta}} \sqrt{1-2\alpha\beta-U^2} dU = \frac{1-2\alpha\beta}{2\beta^2}. \quad (\text{C.6})$$

Devido ao fato de a expressão acima não depender de s , vemos que a função $J(H)$ é a mesma tanto para órbitas que evoluem em torno do ponto fixo $\phi_f = 0$ quanto de $\phi_f = \pi$. Entretanto, utilizando C.6 juntamente com as definições de α e β é possível obter uma equação cúbica para $H = H(J)$

$$H^3 + \frac{2Jw^2 - 1}{w} H^2 - (4J + 1 + \hat{\rho})H + \frac{1 + 2J}{w} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Analisando o discriminante da equação acima constata-se que este é sempre negativo para os casos de interesse físico ($J \geq 0$), indicando que as três soluções são sempre reais e podem ser escritas na forma simplificada

$$H(J) = a \cos \left(\frac{b}{3} + c \right) - \frac{d}{3}, \quad (\text{C.8})$$

onde

$$a = \frac{2\sqrt{3 + 3\hat{\rho}^2 + 8J + w^{-2} + 4J^2w^2}}{3},$$

$$b = \arccos\left(\frac{K}{D}\right) \quad c = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

e

$$d = 2Jw - \frac{1}{w},$$

com

$$K = \frac{2}{w^3} - \frac{18}{w} + \frac{9\hat{\rho}}{w} - \frac{30J}{w} - 18(1 + \hat{\rho})Jw - 48J^2w - 16J^3w^3,$$

$$D = 2(3 + 3\hat{\rho} + 8J + w^{-2} + 4J^2w^2)^{\frac{3}{2}}.$$

A variável c assume três valores distintos referentes as três raízes da equação C.8, porém apenas o primeiro e o terceiro valores possuem sentido físico. O segundo gera valores negativos para $H(J)$, o que não corresponde a nenhuma situação física dado que o Hamiltoniano é sempre positivo como pode ser visto se escrevemos a equação C.1 (para o caso mais perigoso $\cos \phi = -1$) na forma

$$H_{min} = -wI + \sqrt{(wI)^2 + 1 + I + 2\sqrt{2\hat{\rho}I} + \left(2\sqrt{2\hat{\rho}} - \sqrt{I}\right)^2} > 0. \quad (C.9)$$

Ou seja, o Hamiltoniano como função de J apresenta dois ramos de soluções físicas, as quais são analisadas no Capítulo V. Uma delas ($c = 0$) apresenta $\omega_{orb} \leq 0$ representando as órbitas que evoluem no sentido anti-horário em torno de $\phi_f = 0$ e a outra ($c = 4\pi/3$), com $\omega_{orb} \geq 0$, as que evoluem no sentido horário em torno de $\phi_f = \pi$.

Apêndice D

O Algoritmo de Newton-Raphson para Órbitas Periódicas

Neste apêndice discutiremos o algoritmo de Newton-Raphson que nos permite localizar precisamente a posição de órbitas periódicas no espaço de fases a partir de uma condição inicial próxima à órbita procurada[58]. O método se baseia no algoritmo de Newton-Raphson para solução de equações algébricas não lineares. Aqui nos ateremos ao caso de trajetórias de período T conhecido.

Dado um sistema de n graus de liberdade representado pelo vetor $2 \times n$ dimensional de posição no espaço de fases $\mathbf{x}(t)$, definimos a aplicação Φ_T tal que

$$\mathbf{x}(t_o + T) = \Phi_T[\mathbf{x}(t_o)]. \quad (\text{D.1})$$

Órbitas periódicas de período T (que equivalem a pontos fixos no Mapa de Poincaré) satisfizem

$$\mathbf{x}_f(t_o + T) = \Phi_T[\mathbf{x}_f(t_o)] = \mathbf{x}_f(t_o) \quad (\text{D.2})$$

onde $\mathbf{x}_f(t_o)$ é a posição da órbita periódica no instante t_o . Suponhamos, então, que nos é acessível um valor aproximado para $\mathbf{x}_f(t_o)$, $\mathbf{x}_i(t_o) = \mathbf{x}_f(t_o) + \delta\mathbf{x}(t_o)$, de forma que

$$\mathbf{x}_f(t_o) = \mathbf{x}_i(t_o) - \delta\mathbf{x}(t_o), \quad (\text{D.3})$$

onde $|\delta\mathbf{x}(t_o)|$ é pequeno. No intuito de encontrar $\delta\mathbf{x}(t_o)$ e baseando-se no algoritmo de Newton-Raphson, utilizamos D.3 em D.2 e expandimos em série de Taylor para $\delta\mathbf{x}(t_o)$ pequeno, encontrando a seguinte expressão válida até primeira ordem

$$\mathbf{x}_i(t_o) - \delta\mathbf{x}(t_o) = \Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)] - d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)] \delta\mathbf{x}(t_o), \quad (\text{D.4})$$

onde $d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)]$ representa a derivada da aplicação Φ_T em relação ao seu argumento calculada no ponto $\mathbf{x}_i(t_o)$. Da expressão acima obtemos diretamente uma equação para $\delta\mathbf{x}(t_o)$:

$$\{d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)] - \mathbf{I}\} \delta\mathbf{x}(t_o) = \mathbf{x}_i(t_o + T) - \mathbf{x}_i(t_o), \quad (\text{D.5})$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Tendo-se encontrado a solução para $\delta\mathbf{x}(t_o)$, a utilizamos na Eq. D.3 da onde extraímos um novo valor aproximado para o ponto fixo. Iterando o algoritmo algumas vezes, obtemos então a localização do ponto fixo.

Mais do que isto, uma vez que o método tenha convergido nos é igualmente possível determinar a estabilidade do ponto fixo encontrado. Após a convergência, $\mathbf{x}_i(t_o) = \mathbf{x}_f(t_o)$ e $\delta\mathbf{x}(t_o)$ passa a ser o deslocamento da condição inicial em relação ao ponto fixo. Aplicando-se Φ_T a esta condição inicial e novamente expandindo para $\delta\mathbf{x}(t_o)$ pequeno temos que após o período T o deslocamento transforma-se segundo

$$\delta\mathbf{x}(t_o) \xrightarrow{T} d\Phi_T[\mathbf{x}_f] \delta\mathbf{x}(t_o), \quad (\text{D.6})$$

da onde vemos que a matriz $d\Phi_T[\mathbf{x}_f]$ é a responsável pela dinâmica do deslocamento. Ou seja, ela é a matriz de Floquet[57] associada ao ponto fixo. Sendo assim, basta-nos analisar os autovalores de $d\Phi_T[\mathbf{x}_f(t_o)]$ após a convergência para determinarmos a estabilidade de \mathbf{x}_f . Para o caso de espaço de fases bidimensional, se os autovalores forem reais o ponto é hiperbólico, se forem imaginários é elíptico. Definindo a variável $\alpha \equiv \frac{1}{2}\text{Traço}\{d\Phi_T[\mathbf{x}_f]\}$ é possível reescrever a condição sobre a estabilidade do ponto fixo como:

$$\begin{aligned} |\alpha| > 0 & \longrightarrow \text{hiperbólico} \\ |\alpha| < 0 & \longrightarrow \text{elíptico.} \end{aligned}$$

Além disso, se uma bifurcação ocorre para $\alpha = +1$ isto significa que a ela é do tipo tangente inversa com a *colisão* de um ponto fixo elíptico com um hiperbólico, enquanto que se a bifurcação ocorre para $\alpha = -1$, ela é do tipo dobramento direto (elíptico \rightarrow hiperbólico) ou inverso (hiperbólico \rightarrow elíptico) de período.

Tudo que foi feito até o momento neste apêndice baseou-se na aplicação Φ_T , ou seja, supunha como conhecida a aplicação que levava pontos no espaço de fases em pontos

no espaço de fases para um tempo T posterior. Porém, em nosso trabalho não nos é acessível analiticamente esta aplicação, mas sim, a função de fluxo $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$, a partir da qual trajetórias no espaço de fases são dadas por

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \quad (\text{D.7})$$

e por uma condição inicial $\mathbf{x}(t = t_o)$. Certamente, integrando-se numericamente D.7 por um tempo T a partir de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$ obtemos $\Phi_T[\mathbf{x}_o]$ do qual vemos claramente a relação entre fluxo e mapeamento. No entanto, no que diz respeito a *função* $d\Phi_T[\mathbf{x}]$ a relação fluxo-mapeamento deixa de ser óbvia, necessitando um estudo um pouco mais aprofundado.

Para tanto, tomemos uma trajetória qualquer solução de D.7, dêmo-la uma pequena perturbação inicial e analisemos como esta perturbação evolui no tempo. Ou seja, tomamos como condição inicial $\mathbf{x}(t = t_o) = \mathbf{x}'(t_o) + \delta\mathbf{x}(t_o)$ (onde \mathbf{x}' representa um ponto qualquer do espaço de fases) e analisamos a dinâmica de $\delta\mathbf{x}$. A partir de D.7 obtemos

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}'(t), t)}{d\mathbf{x}} \delta\mathbf{x}(t),$$

onde $\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}'(t), t)}{d\mathbf{x}}$ é a matriz Jacobiana do fluxo calculada no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. A equação acima pode ser integrada diretamente, levando a

$$\delta\mathbf{x}(t_o + t) = e^{\int_{t_o}^{t_o+t} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}'(t), t)}{d\mathbf{x}} dt} \delta\mathbf{x}(t_o).$$

Comparando-se este resultado ao que se obtem no caso da aplicação discreta (eq. D.6 para $\mathbf{x}(t_o)$ qualquer) vemos que

$$d\Phi_T[\mathbf{x}(t_o)] = e^{\int_{t_o}^{t_o+T} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{d\mathbf{x}} dt},$$

que é a relação fluxo-aplicação que procuravamos. Do ponto de vista computacional, tudo é facilitado se percebemos que a exponencial acima é a solução da equação diferencial matricial

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)}{d\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad \text{com} \quad \mathbf{A}(t_o) = \mathbf{I}, \quad (\text{D.8})$$

e por conseguinte vale a relação $d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)] = \mathbf{A}(t_o + T)$. A matriz quadrada $2 \times n$ dimensional \mathbf{A} é chamada *matriz monodrômica*.

Resumindo, o método consiste em intergrar simultaneamente um conjunto de $\{2 \times n + (2 \times n)^2\}$ equações dadas por D.7 e D.8 por um tempo T a partir de uma condição inicial $\mathbf{x}_i(t_o)$ próxima a uma órbita periódica de período T . Da integração obtemos $\mathbf{x}_i(t_o + T)$ e $d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)] = \mathbf{A}(t_o + T)$ a partir dos quais calculamos $\delta\mathbf{x}(t_o)$ em D.5 e, finalmente, uma melhor aproximação para \mathbf{x}_f em D.3. Tendo o método convergido, integra-se uma vez mais para que a partir dos autovalores da matriz $d\Phi_T[\mathbf{x}_i(t_o)]$ determinemos a estabilidade do ponto fixo \mathbf{x}_f .

Referências Bibliográficas

- [1] AMALDI, A., “Introduction to the Next Generation of Linear Coliders”, CERN-EP/87-28, CERN, Genebra, Suíça (agosto 1987)
- [2] DAWSON, J. M., *Phys. Scripta*, **T52**, 7, 1994.
- [3] WURTELE, J. S., *Physics Today*, 33, julho 1994.
- [4] TAJIMA, T. e DAWSON, J. M., *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 267, 1979.
- [5] TANG, C. M., SPRANGLE, P. e SUDAN, R. N., *Phys. Fluids*, **28**, 1974, 1985.
- [6] JOSHI, C., CLAYTON, C. E., MORI, W. B., DAWSON, J. M. e KATSOULEAS, T., *Comments Plasma Phys. Controlled Fusion*, **16**, 65, 1994.
- [7] RIZZATO, F. B., *Phys. Rev. A*, **44**, R2255, 1991.
- [8] TEYCHENNÉ, D., BONNAUD, G. e BOBIN, J.-L., *Physica*, **D 82**, 205, 1995.
- [9] BILIKMEN, S. e NAZIH, R. M., *Phys. Scripta*, **47**, 204, 1993.
- [10] EROKHIN, N. S. e ZOL'NIKOVA, N. N., *Plasma Phys. Report*, **20**, 380, 1994.
- [11] ESAREY, E. e PILLOFF, M., *Phys. Plasmas*, **2**, 1432, 1995.
- [12] MATTHIEUSSENT, G., *Phys. Scripta*, **T50**, 51, 1994.
- [13] PAKTER, R. e CORSO, G., *Phys. Plasmas*, **2**, 4312, 1995.
- [14] HÄUSER, T. e SCHEID, W., *Phys. Lett.*, **A 186**, 189, 1994.

- [15] FENG, L. e HO, Y.-K., *Phys. Rev. E*, **49**, 740, 1994.
- [16] CHERNIKOV, A. A., SCHMIDT, G. e NEISHTADT, A. I., *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1507, 1992.
- [17] GALVÃO, R. M. O., HUSSEIN, M. S., PATO, M. P. e SERBETO, A., *Phys. Rev. E*, **49**, R4807, 1994.
- [18] ROSENZWEIG, J., MUROKH, A. e PELLEGRINI, C., *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2467, 1995.
- [19] PAKTER, R., CORSO, G. e RIZZATO, F. B., *J. Plasma Phys.*, *submetido* 1995.
- [20] DAVYDOVSKIĬ, V. YA., *Soviet Phys. JETP*, **16**, 629, 1963.
- [21] ROBERTS, C. S. e BUCHSBAUM, S. J., *Phys. Rev.*, **135**, 381, 1964.
- [22] SPRANGLE, P., VLAHOS, L. e TANG, C. M., *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, **NS-30**, 3177, 1983.
- [23] KUO, S. P. e SCHMIDT, G., *J. Appl. Phys.*, **58**, 3646, 1985.
- [24] SPRANGLE, P., ESAREY, E. e TING, A., *Phys. Rev. Lett*, **64**, 2011, 1990.
- [25] CHEN, C., *Phys. Fluids*, **B3**, 2933, 1991.
- [26] PAKTER, R., SCHNEIDER, R. S. e RIZZATO, F. B., *Phys. Rev. E*, **47**, 3787, 1993.
- [27] SCHRAN, D. C. e BEUKEMA, G. P., *Physica (Utrecht)*, **42**, 277, 1969.
- [28] MILANT'EV, V. P., *Tech. Phys.*, **39**, 608, 1994.
- [29] MILANT'EV, V. P., *Sov. Phys. Tech. Phys.*, **22**, 1179, 1977.
- [30] FRIEDLAND, L., *Phys. Plasma*, **1**, 421, 1994.
- [31] LOEB, A. e FRIEDLAND, L., *Phys. Rev. A*, **33**, 1828, 1986.

- [32] SHPITALNIK, R., COHEN, C. DOTHAN, F. e FRIEDLAND, L., *J. Appl. Phys.*, **70**, 1101, 1991.
- [33] CHEN, C., *Phys. Rev. E*, **46**, 6654, 1992.
- [34] HAFIZI, B., SPRANGLE, P. e HIRSHFIELD, J. L., *Phys. Rev. E*, **50**, 3077, 1994.
- [35] WANG, C. e HIRSHFIELD, J. L., *Phys. Rev. E*, **51**, 2456, 1995.
- [36] TSUI, K. H., *Phys. Rev. E*, **51**, 649, 1995.
- [37] MELROSE, D. B., *Particle Acceleration and Nonthermal Radiation in Space Plasmas*, “Escola Avançada de Plasmas Astrofísicos e Espaciais”, junho 1995.
- [38] LI, H. e ANTONSEN JR., T. M., *Phys. Plasmas*, **1**, 714, 1994.
- [39] LICHTENBERG, A. J. e LIEBERMAN, M. A., “*Regular and Stochastic Motion*”, Springer, NY, 1983.
- [40] BOOZER, A. H., *Phys. Lett.*, **A185**, 423, 1994.
- [41] CHIRIKOV, B. V., *Phys. Rep.*, **52**, 263, 1979.
- [42] CHIAN, A. C.-L. e KENNEL, C. F., *Astrophys. Space Sci.*, **97**, 9, 1983.
- [43] PAKTER, R., SCHNEIDER, R. S. e RIZZATO, F. B., *Phys. Rev. E*, **49**, 1594, 1994.
- [44] JACKSON, J. D., “*Classical Electrodynamics*”, John Wiley & Sons, 1962.
- [45] DAVIDSON, R. C., “*Methods in Nonlinear Plasma Theory*”, Academic Press, 1972.
- [46] PAKTER, R. e RIZZATO, F. B., *Phys. Scripta*, **48**, 598, 1993.
- [47] BONIFACIO, R., CASAGRANDE, F. e DE SALVO SOUZA, L., *Phys. Rev. A*, **33**, 2836, 1986.
- [48] TENNYSON, J. L., MEISS, J. D. e MORRISON, P. J., *Physica*, **D71**, 1, 1994.

- [49] PAKTER, R., COUTO, F. O. e RIZZATO, F. B., *Phys. Rev. E*, **52**, 4793, 1995.
- [50] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. e VASTANO, J., *Physica*, **D16**, 285, 1985.
- [51] BLÜMEL, R., *Phys. Rev. E*, **51**, 5520, 1995.
- [52] CORSO, G. e RIZZATO, F. B., *Physica*, **D80**, 296, 1995.
- [53] CAETANO, T. S., COUTO, F. O., CORSO, G., PAKTER, R., BRUNET, L. G., RIZZATO, F. B., *Chaos, Solitons and Fractals*, em impressão, 1995
- [54] ROZMUS, W. e GOLDSTEIN, P. P., *Phys. Rev. A*, **38**, 5745, 1988.
- [55] PAKTER, R., CORSO, G., CAETANO, T. S., DILLENBURG, D. e RIZZATO, F. B., *Phys. Plasmas*, **1**, 4099, 1994.
- [56] GOLDSTEIN, H., "*Classical Mechanics*", Addison-Wesley Publishing Company, 1962.
- [57] IOOSS, G. e JOSEPH, D. D., "*Elementary Stability and Bifurcation Theory*", Springer-Verlag, 1980.
- [58] POLYMILIS, G. e HYZANIDIS, K., *Phys. Rev. E*, **47**, 4381, 1993.
- [59] SOMMERFELD, A., "*Electrodynamics*", Academic Press, 1952.