

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM COMPUTAÇÃO

CARLOS AUGUSTO DIETRICH

**Grupos de Arestas: Uma Nova Abordagem
para Entender a Qualidade da Malha
Gerada pelo Marching Cubes e suas
Variantes**

Tese apresentada como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Doutor em Ciência da Computação

Prof. Dr. João Luiz Dihl Comba
Orientador

Profa. Dra. Luciana Porcher Nedel
Co-orientador

Porto Alegre, agosto de 2008

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Dietrich, Carlos Augusto

Grupos de Arestas: Uma Nova Abordagem para Entender a Qualidade da Malha Gerada pelo Marching Cubes e suas Variantes / Carlos Augusto Dietrich. – Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 2008.

120 p.: il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Computação, Porto Alegre, BR–RS, 2008. Orientador: João Luiz Dihl Comba; Coorientador: Luciana Porcher Nedel.

1. Isosuperfícies. 2. Marching cubes. I. Comba, João Luiz Dihl. II. Nedel, Luciana Porcher. III. Title.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

Reitor: Prof. José Carlos Ferraz Hennemann

Vice-Reitor: Prof. Pedro Cezar Dutra Fonseca

Pró-Reitora de Pós-Graduação: Prof^a. Valquíria Linck Bassani

Diretor do Instituto de Informática: Prof. Flávio Rech Wagner

Coordenadora do PPGC: Prof^a. Luciana Porcher Nedel

Bibliotecária-Chefe do Instituto de Informática: Beatriz Regina Bastos Haro

*"All truth passes through three stages:
First, it is ridiculed;
Second, it is violently opposed;
and Third, it is accepted as self-evident."
— ARTHUR SCHOPENHAUER*

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	7
LISTA DE SÍMBOLOS	9
LISTA DE FIGURAS	11
LISTA DE TABELAS	21
RESUMO	25
ABSTRACT	27
1 INTRODUÇÃO	29
1.1 Sumário	29
1.2 A Poligonização de Isosuperfícies	29
1.3 Objetivo deste Trabalho	36
1.4 Principais Contribuições	37
1.5 Sumário dos Capítulos	37
1.5.1 Capítulo “Trabalhos Relacionados”	37
1.5.2 Capítulo “A Qualidade da Malha Gerada pelo Algoritmo <i>Marching Cubes</i> ”	37
1.5.3 Capítulo “A Modificação do Algoritmo <i>Marching Cubes</i> ”	38
1.5.4 Capítulo “Resultados”	38
1.5.5 Capítulo “Discussão”	38
1.5.6 Capítulo “Conclusão”	38
2 TRABALHOS RELACIONADOS	39
2.1 Introdução	39
2.2 A Poligonização de Isosuperfícies	39
2.3 O Algoritmo <i>Marching Cubes</i>	41
2.4 A Geração de Malhas de Boa Qualidade	43
3 A QUALIDADE DA MALHA GERADA PELO ALGORITMO MARCHING CUBES	47
3.1 Introdução	47
3.2 A Qualidade da Malha	47
3.2.1 Ângulos Internos Mínimo e Máximo	50
3.2.2 Razão entre os Raios do Triângulo	50
3.3 A Qualidade da Malha Gerada pelo <i>Marching Cubes</i>	50
3.3.1 Análise da Qualidade da Malha Gerada pela Célula	51

3.3.2	Análise da Qualidade de Cada Triângulo Gerado pela Célula	55
3.4	Discussão	61
3.4.1	O Percentual de Triângulos de Baixa Qualidade	63
3.4.2	O Posicionamento das Arestas em Relação a Isosuperfície	63
4	A MODIFICAÇÃO DO ALGORITMO <i>MARCHING CUBES</i>	65
4.1	Introdução	65
4.2	A Mudança da Tabela de Conexões do <i>Marching Cubes</i>	66
4.3	As Transformações de Arestas	70
4.3.1	A Transformação do Gradiente	73
4.3.2	A Transformação Tangencial	73
4.3.3	A Combinação das Transformações	76
4.4	O Deslocamento dos Vértices de Interseção ao Longo das Arestas Ativas	77
4.5	Discussão	80
4.5.1	Os Grupos de Arestas Transformadas	81
4.5.2	A Implementação das Transformações de Arestas	82
5	RESULTADOS	85
5.1	Introdução	85
5.2	A Mudança da Tabela de Conexões do <i>Marching Cubes</i>	86
5.3	As Transformações de Arestas	87
5.4	O Deslocamento dos Vértices de Interseção ao Longo das Arestas Ativas	91
5.5	O Macet	92
6	DISCUSSÃO	97
6.1	Introdução	97
6.1.1	A Consistência das Malhas Geradas pelo Macet	98
6.1.2	A Adequação da Malha Gerada pelo Macet à Aplicações de Mecânica Computacional	98
6.1.3	A Medida da Qualidade da Malha	99
6.1.4	A Nova Grade Formada pelas Arestas Transformadas	101
6.1.5	A Combinação entre os Métodos para a Melhoria da Qualidade da Malha .	102
6.1.6	A Aplicação das Propostas à Poligonizadores Baseados em Tetraedros . .	102
6.1.7	As Características dos Conjuntos de Dados	104
7	CONCLUSÃO	107
7.1	Contribuições	107
7.2	Trabalhos Futuros	110
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A SIMETRIAS DOS GRUPOS DE ARESTAS	119

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional.
BCC	<i>Body Centered Cubic</i>
LS	<i>Laplacian smoothing.</i>
Macet	<i>Marching Cubes using Edge Transformations.</i>
MC	Marching Cubes.
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MT	Marching Tetrahedra.
QEM	<i>Quadric Error Metric.</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ	Área do triângulo.
θ_0	Menor ângulo interno do triângulo.
θ_∞	Maior ângulo interno do triângulo.
A,B,C	Vértices de um triângulo qualquer.
a,b,c	Arestas de um triângulo qualquer.
e_i	<i>i-ésima</i> aresta da célula de amostragem.
∇f	Gradiente da função f .
f	Função qualquer.
F	Função $F(p) = f(p) - \lambda$.
H	Plano.
ι	Razão entre a maior aresta e o raio do círculo inscrito do triângulo (medida de qualidade do triângulo).
λ	Isovalor.
l_0	Menor aresta do triângulo.
l_∞	Maior aresta do triângulo.
M	<i>Manifold</i> diferenciável.
R	Raio do círculo circunscrito no triângulo.
r	Raio do círculo inscrito no triângulo.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	Conjunto dos números reais de dimensão n .
s	Semi-perímetro do triângulo.
p	Ponto qualquer em \mathbb{R}^3 .
(p_i, p_j)	Aresta definida entre os pontos p_i e p_j .

q	Função que mapeia a posição dos pontos de intersecção à um valor de qualidade.
Q	Campo escalar gerado a partir da associação de um valor escalar (qualidade da malha gerada no interior de da célula ativa) a cada ponto que representa a intersecção entre uma isosuperfície (definida pela posição do ponto) e a célula ativa.
ρ	Razão entre os raios do triângulo (medida de qualidade do triângulo).
t_i	Parâmetro que representa o deslocamento de um vértice v_i ao longo da aresta ativa (orientada) onde o vértice é gerado.
T	Conjunto de triângulos gerados no interior de uma célula ativa.
τ	Razão entre a maior e a menor aresta do triângulo (medida de qualidade do triângulo).
v_i	i -ésimo vértice de intersecção em \mathbb{R}^3 (representa a intersecção entre a isosuperfície e uma aresta ativa).
v	Razão entre o raio do círculo circunscrito e o semiperímetro do triângulo (medida de qualidade do triângulo).

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1: Exemplo da visualização de imagens volumétricas com auxílio de isosuperfícies. A figura ilustra *screenshots* da visualização de seis isosuperfícies de uma imagem tomográfica (tomografia de raios-x), revelando a relação espacial entre o tecido e os ossos dentro do volume tomográfico. 30
- Figura 1.2: Poligonização de isosuperfícies com o MC. O MC e suas variantes geram triângulos de baixa qualidade que, embora não tenham impacto significativo na visualização da isosuperfície, influenciam no resultado de aplicações que operam sobre a malha resultante. 32
- Figura 1.3: Comparação entre os resultados da poligonização do conjunto de dados *Engine* através do MC, três métodos de pós-processamento (simplificação em 90%, suavização Laplaciana e reconstrução pelo método *afront* e do método Dual Contouring. A primeira linha ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade do pior triângulo incidente ao vértice, e o mapeamento entre o valor de qualidade e a cor final é realizado segundo o mapa de cores ilustrado abaixo das malhas. (A qualidade se refere à razão entre os raios do círculo inscrito e do círculo circunscrito ao triângulo, onde o valor de qualidade 0 indica um triângulo degenerado e o valor de qualidade 1 indica um triângulo equilátero). A segunda linha ilustra os histogramas de qualidade das malhas, onde o histograma em detalhe (ilustrado na cor vermelha) mostra a qualidade dos piores triângulos da malha. A terceira linha ilustra o histograma de distâncias medidas entre a malha ilustrada e a malha gerada pelo MC (medida através do *Metro*. 33
- Figura 1.4: A decomposição de um caso do MC em grupos de arestas. Os vértices de cada triângulo são gerados ao longo de três arestas ativas, e o estudo das posições destas arestas (e das possíveis combinações entre arestas ativas) pode auxiliar na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo MC. 35
- Figura 1.5: Os 8 grupos de arestas que podem ser observados na tabela de triangulações do MC. Os triângulos construídos pelo MC são gerados a partir destes grupos, e o estudo destas configurações pode auxiliar na compreensão da malha gerada pelo MC. 35

Figura 1.6:	Comparação entre os resultados da poligonização do conjunto de dados Engine através do MC (a) e do Macet (b). O Macet melhora a qualidade da malha, indicada pela barra vermelha sobre o detalhe do histograma de qualidade, e não aumenta significativamente o erro de aproximação, como ilustrado pelo histograma de distâncias resultante do Metro. Estas duas características posicionam o Macet como o método de melhor razão entre o custo (erro de aproximação) e o benefício (melhora na qualidade da malha) nesta comparação.	36
Figura 2.1:	<i>Marcha</i> (varredura) do MC. A subdivisão do domínio de f em uma grade uniforme resulta em um conjunto de células <i>cúbicas</i> , criadas a partir de oito vértices da grade. O algoritmo então percorre a grade (a, b), determina como a isosuperfície intersecciona cada célula, e gera uma representação local da isosuperfície baseada em triângulos.	42
Figura 2.2:	Triangulação dos 15 casos representativos do MC.	42
Figura 2.3:	Falha do ângulo diedral em garantir triângulos de boa qualidade nas faces do tetraedro. Ainda que em algumas situações o ângulo diedral, ilustrado como θ em (a), evidencie a ocorrência de triângulos de baixa qualidade, como o triângulo formado pelas arestas a , b e c em (a), alguns tetraedros podem ser formados por triângulos de baixa qualidade e apresentar apenas bons ângulos diedrais. O tetraedro ilustrado em (b) tem as arestas a , b e c com comprimento próximo a 0, e as arestas c , d e f com comprimento muito maior que 0, o que resulta em ângulos diedrais de aproximadamente 60° e 90° ; ainda assim, a face formada pelas arestas c , d e f , por exemplo, tem um ângulo interno próximo a 0.	45
Figura 3.1:	Propriedades geométricas do triângulo que são usadas na formulação das métricas de qualidade adotadas neste trabalho. O triângulo é definido entre os vértices A , B e C , com arestas de comprimento $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, e ângulos internos α , β e γ , onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo e R é o raio do círculo circunscrito no triângulo.	49
Figura 3.2:	Comparação entre a razão entre os raios do triângulo e os ângulos internos mínimo e máximo. Ainda que o ângulo interno mínimo (ilustrado por β) seja o mesmo em ambos os triângulos, assim como o raio R , a razão entre os raios (ρ) é diferente devido a mudança no raio r	51
Figura 3.3:	Exemplos de malhas resultantes da poligonização de isosuperfícies planas. A isosuperfície é definida como o plano que passa pela origem da seta (ilustrada em vermelho) e perpendicular a direção do segmento de reta formado entre a origem da seta e o centro da célula. A cor de cada triângulo é determinada pela sua qualidade, medida com a razão entre os raios (ρ) e mapeada segundo o mapa de cores mostrado à esquerda. Ainda que o comportamento da isosuperfície seja simples (planar), pequenas variações na sua orientação em relação a célula podem resultar em grandes variações na qualidade da malha gerada.	52

Figura 3.4:	Qualidade dos triângulos gerados pelo MC a partir dos conjuntos de dados <i>Engine</i> , <i>Bonsai</i> , <i>Lobster</i> e <i>Silicium</i> . A primeira linha da figura ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade do pior triângulo incidente ao vértice, medida com a razão entre os raios (ρ) e mapeada segundo o mapa de cores mostrado abaixo das malhas. A segunda linha ilustra os histogramas de qualidade dos triângulos das malhas. Os histogramas mostram que o número de triângulos de baixa qualidade é pequeno em relação ao número total de triângulos.	53
Figura 3.5:	Mapeamento entre um ponto em \mathbb{R}^3 e um valor de qualidade. Dada uma célula centrada na origem e um ponto p , define-se o plano H que passa por p e é ortogonal a $p/\ p\ $. O plano H representa uma isosuperfície, que é poligonizada e gera a malha de triângulos $T(p)$. A qualidade da malha de triângulos $T(p)$ é então associada a p . Este procedimento permite a construção de um campo escalar Q que codifica a qualidade de todas as possíveis intersecções entre uma isosuperfície planar e a célula.	54
Figura 3.6:	Exemplos da construção (a) e visualização (b, c) do campo de qualidade Q . A figura (a) mostra a construção de Q , onde o ponto na base da seta vermelha dá origem ao triângulo ilustrado na célula. A qualidade (razão entre os raios) do triângulo é calculada, mapeada para uma cor segundo a tabela de cores ilustrada à esquerda e atribuída ao ponto. As figuras (b) e (c) ilustram duas fatias de Q . As fatias mostram que malhas de baixa qualidade são geradas por pontos próximos ao ponto médio das arestas, que representam isosuperfícies próximas e aproximadamente paralelas à uma das arestas da célula.	54
Figura 3.7:	Visualização de fatias e histogramas do campo de qualidade q de uma célula cúbica (a), de um tetraedro regular (b) e de um tetraedro resultante da triangulação de Kuhn. A qualidade (razão entre os raios) dos triângulos gerados por cada ponto, visualizada através do mapeamento de cores segundo o mapa mostrado à esquerda, mostra que as malhas de baixa qualidade são geradas em posições onde uma aresta da célula é próxima e aproximadamente paralela à isosuperfície, ou seja, em pontos próximos ao ponto médio das arestas da célula.	55
Figura 3.8:	Visualização volumétrica direta do campo de qualidade Q . A cor de cada ponto é determinada pela qualidade (razão entre os raios) da malha de triângulos associada ao ponto, mapeada para um vetor de cor segundo a tabela ilustrada à esquerda. A estrutura dos pontos responsáveis pela geração de malhas de baixa qualidade pode ser reconhecida em todas as imagens, assim como a sua relação com o ponto médio das arestas das células.	56
Figura 3.9:	Decomposição de um caso representativo do MC em grupos de arestas. O tipo de cada triângulo é dado pelas características das três arestas que geram os vértices do triângulo, e o estudo destas características pode auxiliar na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo MC.	56

Figura 3.10:	Visualização do espaço de parâmetros gerado pelos pontos de intersecção $t_0\dots t_3$ (a) em coordenadas paralelas. A qualidade da malha (razão entre os raios) gerada por cada combinação de parâmetros é mapeada para a cor da linha, de acordo com o mapa de cores ilustrado à esquerda. Ainda que alguns padrões possam ser identificados na análise de (b), pode ser difícil compreender a relação entre a posição de cada vértice de intersecção e a qualidade da malha gerada. . . .	57
Figura 3.11:	Os 8 grupos de arestas que podem ser observados na tabela de triangulações da implementação de Bourke, que abrangem todos os possíveis grupos de arestas ativas capazes de gerar triângulos no interior da célula cúbica.	58
Figura 3.12:	Grupos de arestas encontrados na análise da tabela de triangulações do MC. A representação dos grupos foi alterada em relação à representação usada neste trabalho para facilitar a comparação com a tabela de triangulações ilustrada no artigo de Lorensen e Cline.	59
Figura 3.13:	Ilustração dos grupos de arestas do MC sobre a tabela de triangulações dos casos representativos. A cor de cada triângulo é dada pelo grupo de arestas que dá origem ao mesmo, de acordo com o mapa de cores usado na Figura 3.12.	59
Figura 3.14:	Análise da qualidade (medida com a razão entre os raios dos grupos de arestas da célula cúbica. Os histogramas de qualidade são gerados através da amostragem uniforme do espaço q , o que também permite calcular os limites máximo e mínimo de qualidade de cada grupo de arestas. A figura mostra que, ainda que o menor valor de qualidade dos grupos 0, 1, 2, 3 e 6 indique que o grupo pode produzir triângulos degenerados, a maior parte dos triângulos gerados têm boa qualidade.	60
Figura 3.15:	Representação dos vértices de intersecção c_0 , c_1 e c_2 através dos parâmetros t_0 , t_1 e t_2 , respectivamente.	60
Figura 3.16:	Análise dos grupos de arestas do tetraedro resultante da triangulação de Delaunay de uma grade BCC. A alta qualidade destes tetraedros na geração de malhas, como observado por Labelle e Shewchuk, é realçada pelo aspecto dos histogramas de qualidade.	61
Figura 3.17:	Análise dos grupos de arestas do tetraedro resultante da triangulação de Kuhn de células cúbicas. O aspecto alongado destes tetraedros, resultante do método de subdivisão do cubo, leva ao aumento da probabilidade de geração de triângulos de baixa qualidade, como pode ser observado nos histogramas de qualidade.	61
Figura 3.18:	Triângulos responsáveis pelo limite superior de qualidade do grupo 2 (a) e pelos limites inferiores de qualidade do grupo 4 (b), 5 (c) e 7 (d). Os tamanhos das arestas (considerando um cubo unitário) são indicados ao redor dos triângulos.	62

Figura 3.19:	Grupo de arestas 2 e os tipos de triângulos degenerados que resultam das conexões entre as suas arestas. O triângulo do tipo <i>agulha</i> (triângulo que possui um ângulo interno próximo a 0°), ilustrado em (a), surge quando uma das conexões está próxima à isosuperfície. O triângulo do tipo <i>achatado</i> (triângulo que possui um ângulo interno próximo a 180°), ilustrado em (b), surge quando as duas conexões estão próximas à isosuperfície, ou seja, quando uma aresta ativa é aproximadamente paralela à isosuperfície.	62
Figura 4.1:	Exemplos de diferentes triangulações para um mesmo caso representativo da célula cúbica. O grupo de arestas responsável pela geração de cada triângulo é ilustrado através da tabela de cores (direita). A figura mostra que cada triangulação pode resultar em um conjunto diferente de grupos de arestas, e conseqüentemente em uma probabilidade diferente de gerar triângulos de boa qualidade. A mudança da triangulação não afeta, no entanto, a topologia do caso representativo, o que permite o uso desta abordagem em tabelas de desambiguação. .	67
Figura 4.2:	Grupos de arestas responsáveis pela geração dos triângulos de baixa qualidade em malhas extraídas a partir dos conjuntos de dados <i>Engine</i> e <i>Bonsai</i> . Cada gráfico é construído com 245 malhas, geradas com isovalores que variam no intervalo $[1.5, 254.5]$ em incrementos de 1, onde os grupos de arestas responsáveis pela geração dos 100 triângulos de menor qualidade são anotados a cada isovalor. O eixo horizontal identifica o número de ocorrências (normalizado em relação a 100) de cada grupo de arestas. Os gráficos mostram o grande número de ocorrências do grupo de arestas 2, indicando que o grupo 2 gera a maior parte dos triângulos de baixa qualidade em cada malha.	68
Figura 4.3:	Os casos representativos do MC (primeira linha) onde é possível alterar a triangulação e remover o grupo de arestas 2 (segunda linha). O grupo de arestas responsável pela geração de cada triângulo é ilustrado através da tabela de cores (direita). O caso ilustrado na coluna (b) é um caso representativo da tabela de triangulações de Bourke, e representa uma variante topológica do caso 6 do MC. Os casos ilustrados nas colunas (a) e (b) correspondem aos casos 5 e 11 do MC, respectivamente.	69
Figura 4.4:	Casos representativos do MC onde não é possível remover o grupo de arestas 2. Ainda que estes casos admitam outras triangulações, as demais alternativas também apresentam o grupo 2 entre os seus grupos de arestas. (O caso ilustrado à direita corresponde a uma variação topológica do caso 3 do MC, encontrado na tabela de triangulações de Bourke).	69
Figura 4.5:	Posicionamento “ótimo” das arestas ativas em relação à isosuperfície. As células da grade do MC, ilustradas em (a), poderiam ser adaptadas ao comportamento da isosuperfície, como ilustrado em (b). A adaptação da grade pode evitar situações onde as conexões entre as arestas ativas estão próximas à isosuperfície, e evitar a geração de triângulos de baixa qualidade.	71

Figura 4.6:	As transformações das arestas ativas do MC. Neste trabalho são propostos dois procedimentos que alteram a posição das arestas ativas, a <i>Transformação do Gradiente</i> (b) e a <i>Transformação Tangencial</i> (c). A transformação do gradiente afasta os extremos das arestas da isosuperfície, enquanto a transformação tangencial movimenta os extremos das arestas tangencialmente à isosuperfície. Os dois procedimentos resultam, como mostram as figuras, no aumento da distância entre os vértices de intersecção.	72
Figura 4.7:	Transformação do gradiente aplicada ao conjunto de dados <i>Sphere</i> . Os vértices das arestas ativas (ilustradas em linhas azuis) são movidos ao longo do gradiente de f (ilustrado em linhas vermelhas pontilhadas), modificando, iterativamente, a triangulação original (a) na triangulação transformada (b, c). O efeito da transformação é mostrado pela melhora do aspecto dos triângulos gerados.	74
Figura 4.8:	Trilho da transformação tangencial. O movimento dos pontos p'_i e p'_j é realizado sobre as isosuperfícies $f(p'_i)$ e $f(p'_j)$, respectivamente. O objetivo é tomar a aresta ativa (a) e transformá-la em uma aresta localmente perpendicular à isosuperfície (b).	74
Figura 4.9:	Cálculo do trilho da transformação tangencial. O movimento de cada vértice p é realizado iterativamente, onde a cada iteração p move-se sobre um trilho que é resultado do produto vetorial entre a normal de p ($\nabla f(p)$) e o resultado do produto vetorial entre a normal de p e a própria aresta, como ilustrado em (b). O trilho é construído de forma que ele seja <i>localmente</i> tangente à isosuperfície $f(p)$. Assim, ao mover-se em vários passos sobre vetores que são localmente tangentes a isosuperfície $f(p)$, como ilustrado em (c), o vértice caminha na projeção da aresta sobre a isosuperfície $f(p)$	75
Figura 4.10:	Transformação tangencial aplicada ao conjunto de dados <i>Sphere</i> . As arestas ativas (ilustradas em linhas azuis) são transformadas ao longo do trilho da transformação (ilustrado em linhas vermelhas pontilhadas), modificando iterativamente a malha original (a) na malha transformada (b, c). O efeito da transformação é observado pela melhora do aspecto dos triângulos gerados, ilustrados em cinza.	75
Figura 4.11:	Exemplos de malhas geradas com as transformações de arestas (esquerda) e de vértices de intersecção gerados por arestas que não foram transformadas corretamente (direita). As imagens à esquerda ilustram as malhas geradas a partir dos conjuntos de dados <i>Frog</i> (cima) e <i>Chest CT</i> (baixo). As duas malhas possuem regiões de curvatura elevada, onde não é possível aplicar as transformações corretamente e ainda manter o bom desempenho do algoritmo. As imagens à direita mostram os vértices de intersecção (em vermelho) gerados por arestas que não foram transformadas corretamente, sendo 2256 vértices no conjunto de dados <i>Frog</i> (de um total de 194422) e 19370 vértices no conjunto de dados <i>Chest CT</i> (de um total de 60578).	77

Figura 4.12:	Resultado da combinação entre os vértices gerados pelas transformações do gradiente e tangencial. A figura ilustra três passos do procedimento de combinação (a, b, c), onde a cor de cada vértice é dada pela razão entre os raios do pior triângulo incidente ao vértice, segundo o mapa de cores mostrado à esquerda. Nestas iterações, os valores de qualidade do ângulo mínimo, ângulo máximo e razão entre os raios variam de 1.0655, 174.19 e 0.003 (primeira iteração) a 10.053, 143.04 e 0.1898, respectivamente.	78
Figura 4.13:	Exemplos do deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. Ainda que o sentido de deslocamento seja bem definido quando a análise é focada nos grupos de arestas (a), o compartilhamento de uma aresta por vários grupos pode resultar em sentidos de movimentação contrários (b).	79
Figura 4.14:	O comportamento da função <i>Gain</i> no deslocamento do vértice de intersecção. Cada vértice é deslocado em função da sua posição ao longo da aresta ativa (t) e do parâmetro de <i>Gain</i> (g). A figura ilustra o comportamento de <i>Gain</i> nos limites do intervalo de g ($[0, 0.5]$), onde o deslocamento varia entre o resultado do <i>Discretized Marching Cubes</i> e do próprio MC, e o valor usado nos experimentos discutidos no Capítulo 5.	79
Figura 4.15:	Posicionamento dos procedimentos propostos neste capítulo em relação ao MC. O fluxograma é baseado na implementação de Bourke, e mostra os passos envolvidos no processamento de cada célula do volume. Os procedimentos sugeridos são posicionados <i>entre</i> estes passos, e mantêm assim a implementação original intacta. Além disso, a independência entre as modificações permite usá-las separadamente, ainda que o melhor resultado seja obtido quando são usadas em conjunto.	83
Figura 5.1:	Os casos representativos do MC onde é possível alterar a triangulação e remover o grupo de arestas 2. O caso ilustrado em (b) é um caso representativo da tabela de triangulações de Bourke, e representa uma variante topológica do caso 6 do MC.	87
Figura 5.2:	Comparação entre o resultado das transformações do gradiente e tangencial nos conjuntos de dados <i>Engine</i> (primeira linha) e <i>Marschner-Lobb</i> (segunda linha). Cada <i>screenshot</i> ilustra o resultado do MC (abaixo da linha diagonal da imagem) e o resultado da aplicação da transformação de arestas (acima da linha diagonal). Os resultados ressaltam o caráter <i>complementar</i> das transformações; enquanto a transformação do gradiente obtém melhores resultados em regiões de curvatura elevada, como pode ser observado nas <i>sharp features</i> do conjunto de dados <i>Marschner-Lobb</i> , a transformação tangencial obtém melhores resultados em regiões planares, como pode ser observado no conjunto de dados <i>Engine</i>	91

Figura 5.3:	Comparação entre os resultados da simplificação da malha gerada pelo MC (90% da malha original, usando a distância à malha original como critério de simplificação), da suavização da malha gerada pelo MC (<i>Laplacian smoothing</i>), do Dual Contouring, do afront e do Macet na poligonização do conjuntos de dados <i>Bonsai</i> . A primeira linha ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade (razão entre os raios) do pior triângulo incidente ao vértice, e o mapeamento entre o valor de qualidade e a cor final é realizado segundo o mapa de cores ilustrado à esquerda. Ainda que a visualização da malha mostre que os métodos são capazes de gerar triângulos de boa qualidade, os histogramas de qualidade mostram que apenas o Macet é capaz de gerar <i>malhas</i> de boa qualidade, como é indicado pelas barras vermelhas sobre os histogramas. Cada barra vermelha indica, no histograma e no detalhe do histograma (ilustrado em vermelho), a posição do pior triângulo da malha.	95
Figura 6.1:	Manutenção da consistência da malha nas transformações de arestas. Na implementação de Bourke, cada aresta ativa é processada uma única vez (a), e o resultado do processamento é indexado e usado na construção da triangulação das células adjacentes (b), o que garante que o resultado da transformação seja visível a todas as células adjacentes. No caso de uma implementação que processe cada célula independentemente (c), o resultado da transformação de duas arestas com extremos nas mesmas posições será <i>idêntico</i> , o que garante a consistência da malha resultante (d).	99
Figura 6.2:	Comparação entre a amostragem realizada pelo MC, Macet e afront no conjunto de dados <i>Engine</i> . O MC mantém a densidade de amostras homogênea em regiões planas da isosuperfície (o que não é modificado pelo Macet), enquanto algoritmos com o afront distribuem as amostras de acordo com a curvatura da isosuperfície.	100
Figura 6.3:	Uso das transformações de arestas na construção de uma nova subdivisão do domínio de f . A transformação das células uniformes (a) resulta em um novo conjunto de células adaptado a curvatura da isosuperfície (b). As células transformadas <i>envolvem</i> a isosuperfície e podem ser usadas, por exemplo, como ponto de partida para um método de poligonização adaptativo.	101
Figura 6.4:	Comparação entre a suavização das malhas geradas pelo MC e pelo Macet a partir do conjunto de dados <i>Engine</i> . O procedimento de suavização implementado neste experimento transforma a malha em um sistema dinâmico onde os vértices atuam como pontos de massa e as arestas como molas. O gráfico relaciona a energia acumulada no sistema (soma da energia potencial acumulada nas molas) ao número de iterações realizadas. O resultado da suavização é mostrado pela queda da energia potencial do sistema, resultante da homogeneização dos tamanhos das arestas, e da conseqüente melhora da qualidade da malha. O Macet, como ilustra o gráfico, injeta menos energia no sistema devido a boa qualidade da malha gerada, o que possibilita alcançar malhas de alta qualidade em menos iterações.	103

Figura 6.5: Tetraedros resultantes da triangulação de Delaunay de uma grade BCC (*Body Centered Cubic*), ilustrados na primeira linha, e da triangulação de Kuhn, ilustrados na segunda linha. As triangulações, ilustradas na coluna (b), geram grupos de tetraedros idênticos, como os exemplos ilustrados na coluna (c). A grade BCC posiciona um vértice no centróide de cada célula cúbica, o que resulta em uma tetraedralização com três grupos de tetraedros como os ilustrados na primeira linha da coluna (b), onde cada grupo é orientado na direção de um dos eixos (o grupo ilustrado é orientado na direção do eixo X). 104

Figura 7.1: Representação gráfica das transformações de arestas. A transformação das arestas do MC (a) é realizada através do movimento dos extremos das arestas ativas na direção do gradiente (b) e na direção tangente a isosuperfície (c). Este movimento resulta, como ilustra a figura, no aumento da distância entre os vértices de intersecção. . . . 108

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1:	Ordem obtida entre os grupos de aresta em relação à probabilidade de cada grupo gerar triângulos com qualidade inferior a 50% da qualidade do triângulo equilátero, medida com a razão entre os raios do triângulo (ρ). (Os grupos 4, 5 e 7 não geram nenhum triângulo com qualidade inferior a 50%). A figura mostra a medida e a representação sobre o histograma de qualidade do percentual de triângulos de baixa qualidade de cada grupo, ilustrados na segunda e terceira linhas da tabela, respectivamente.	68
Tabela 4.2:	Análise da qualidade (medida através da razão entre os raios) dos grupos de arestas transformados da célula cúbica. Nesta análise, a transformação das arestas é aplicada sem restrições no movimento dos extremos das arestas, o que garante a resposta <i>ótima</i> das transformações. O resultado mostra que a transformação das arestas melhora a qualidade das malhas geradas pelo MC, onde a qualidade mínima observada é de 0.272 medida no grupo de arestas 2.	82
Tabela 5.1:	Principais características dos conjuntos de dados usados nos experimentos demonstrados neste capítulo. Os campos <i>número de vértices</i> e <i>número de triângulos</i> se referem à malha criada com o MC no isovalor ilustrado no campo λ	86
Tabela 5.2:	Comparação entre a qualidade das malhas obtidas com a tabela de triangulações original do MC e a tabela gerada com as triangulações ilustradas na Figura 5.1. As medidas da razão entre os raios do triângulo (ρ) e dos ângulos internos mínimo (θ_0) e máximo (θ_∞) mostram que é possível obter um ganho de qualidade de até 23 vezes, observado no conjunto de dados <i>Pig</i>	88
Tabela 5.3:	Comparação entre o resultado do MC e a aplicação das transformações de arestas. A aplicação das transformações de arestas resulta em ganho em <i>todos</i> os conjuntos de dados, que variam entre 1.3 vezes na razão entre os raios (ρ) no conjunto de dados <i>Cross</i> até 147083 vezes na razão entre os raios no conjunto de dados <i>Laçador</i> . Os ângulos interno mínimo e máximo melhoram (em média) 1682 e 23 vezes, respectivamente, ilustrando a efetividade das transformações.	89

Tabela 5.4:	Resultado dos testes realizados para avaliar o impacto do número de passos usados no cálculo da trajetória dos vértices nas transformações de arestas. Cada linha da tabela mostra o número de passos usados no cálculo da trajetória dos vértices da grade (n), o tempo necessário para o cálculo e combinação das transformações (<i>tempo</i>) e as qualidades das malhas geradas medidas através do ângulo interno mínimo (θ_0) e da razão entre os raios (ρ). Os experimentos mostram que, enquanto o custo das transformações é linear em relação ao número de passos usados, a qualidade das malhas é aproximadamente estável após 6 ou 9 passos.	90
Tabela 5.5:	Comparação entre os resultados da aplicação das transformações de arestas sobre a tabela de triangulações original (BOURKE, 2008) e a tabela de triangulações apresentada na Seção 5.2. A aplicação das transformações sobre a nova tabela de triangulações melhora em até 2.12 vezes a qualidade da malha, ainda que as transformações não operem sobre a conectividade entre os vértices de intersecção.	92
Tabela 5.6:	Comparação entre o resultado do MC e o resultado do deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. O deslocamento dos vértices de intersecção resulta em ganho em <i>todos</i> os conjuntos de dados, onde o ganho é determinado pelo parâmetro da função (<i>Gain</i>) que implementa o deslocamento. Os resultados obtidos com <i>Gain</i> parametrizada em 0.3 mostram ganhos de 1.07 no ângulo interno máximo do triângulo (θ_∞), observado no conjunto de dados <i>Cross</i> , até 416 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados <i>Laçador</i>	93
Tabela 5.7:	Comparação entre os resultados do MC e do Macet. A combinação dos estágios de transformação de arestas e deslocamento dos vértices com a nova tabela de triangulações discutida na Seção 5.2 resulta na melhoria de qualidade de <i>todas</i> as malhas geradas. O ganho de qualidade varia entre 1.5 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados <i>Cross</i> , até 604792 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados <i>Laçador</i> . Ainda que a razão entre a qualidade das malhas obtidas com o Macet e o MC seja pequena em algumas situações, o ganho de qualidade é significativo em todos os experimentos demonstrados.	94
Tabela 5.8:	Comparação entre os desempenhos do MC e do Macet. O custo computacional do Macet é dominado pelo procedimento de transformação de arestas, que realiza acessos adicionais ao campo escalar no deslocamento dos vértices da grade. Estes acessos ainda exigem a continuidade de ∇f , e assim aumentam a complexidade da reconstrução de f e ∇f . O desempenho do Macet em alguns conjuntos de dados, como o <i>Chest CT</i> e o <i>SPX</i> , por exemplo, também é afetado pela implementação das transformações de arestas. Estes conjuntos de dados são formados por regiões de alta curvatura, que causam a interrupção das transformações de arestas, e resultam em desempenhos superiores aos demais conjuntos de dados, ainda que em detrimento da qualidade da malha.	96

Tabela 6.1: Características dos principais conjuntos de dados usados no desenvolvimento do Macet. Os conjuntos de dados usam a maior parte (245) da tabela de triangulações do MC e possuem um número significativo de casos ambíguos, servindo aos testes de modificação da tabela de triangulação e aos testes do desempenho das transformações frente a casos ambíguos, respectivamente.	105
---	-----

RESUMO

Este trabalho descreve uma nova visão sobre um dos algoritmos mais importantes da Computação Gráfica, o algoritmo para a poligonização de isosuperfícies *Marching Cubes* (MC). Esta visão permite o estudo das situações onde são gerados triângulos de baixa qualidade, uma das grandes deficiências do MC, e serve como suporte à proposta de modificações no algoritmo. Neste trabalho também são propostas três modificações ao MC, com objetivo de gerar triângulos de boa qualidade e manter as características mais atraentes do MC, ou seja, a sua simplicidade, eficiência e robustez.

O funcionamento do MC é analisado a partir da decomposição das células de amostragem em *Grupos de Arestas*. Os Grupos de Arestas permitem o estudo do modo como os triângulos são construídos no interior de cada célula de amostragem, e possibilitam identificar *onde e como* são gerados triângulos de baixa qualidade.

As situações onde triângulos de baixa qualidade são gerados são resolvidas através da proposta de três modificações no algoritmo MC, sendo elas: (1) um critério para conduzir a construção da tabela de triangulações, (2) o reposicionamento das arestas ativas e (3) o deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas.

A primeira modificação é a proposta de um novo critério para conduzir a construção da tabela de triangulações do MC. O critério tem como objetivo o aumento da qualidade da malha gerada, através do uso de triangulações que não resultem nos grupos de arestas que têm maior probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade.

A segunda modificação propõe o reposicionamento das arestas ativas. Os grupos de arestas mostram que a posição das arestas ativas influencia a qualidade dos triângulos, o que motiva a criação de um procedimento que reposicione as arestas ativas em relação ao comportamento da isosuperfície. Este procedimento resulta na maximização da distância entre os vértices de intersecção e na melhora na qualidade da malha gerada.

A terceira modificação propõe o deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. O movimento dos vértices é controlado por um parâmetro que oferece a oportunidade de comprometer a qualidade de aproximação (distância entre a malha gerada e a isosuperfície) em razão da qualidade da malha.

O conjunto de modificações propostas resulta no algoritmo Macet (*Marching Cubes with Edge Transformations*). O Macet é simples e eficiente, gera malhas com qualidade de aproximação igual ou superior à do MC e onde os triângulos de baixa qualidade ainda têm qualidade comparável ou superior aos métodos disponíveis atualmente.

Palavras-chave: Isosuperfícies, marching cubes.

Edge Groups: A New Approach to Understanding the Mesh Quality of Marching Cubes and its Variants

ABSTRACT

This work sheds a new light on one of the most important algorithms of Computer Graphics, the isosurface polygonization algorithm *Marching Cubes* (MC). The analysis described here allows the study of situations where low quality triangles are generated, one of the well-know MC drawbacks, and also supports the proposal of extensions for the algorithm. In this work three extensions for MC are also proposed, all with purpose of increase the quality of the resulting triangulations and keep the simplicity, efficiency and robustness of MC.

The MC is studied with the breaking of its sampling cells in *Edge Groups*. The Edge Groups allow the study of how triangles are generated inside each sampling cell, and make possible to identify *where* and *how* low quality triangles are generated.

The low quality triangle generation is tackled through the proposal of three modifications to the MC algorithm, namely: (1) a new rule to create the look-up table, (2) the warping of active edges and (3) the displacement of cut vertices along active edges.

The first modification is the proposal of a new rule to create the triangulations of the MC look-up table. This rule aims the mesh quality improvement through the creation of triangulations that are based on edge groups with fewer chances of generate low quality triangles.

The second modification is the proposal of the active edge warping. The edge groups analysis shows that active edges position have a high impact on the triangle quality, which motivates the proposal of a procedure that warps the active edges in response to the isosurface behavior. This procedure results in the maximization of the distance between cut edges, and, consequently, in the overall mesh quality improvement.

The third modification is the proposal of the cut vertex displacement along active edges. The vertex displacement is controlled by a user-defined parameter which results in a trade-off between approximation quality (the distance between the mesh and the “real” isosurface) and the mesh quality.

The set of modifications results in the proposal of the Macet (*Marching Cubes with Edge Transformations*) algorithm. Macet is simple and efficient, and results in high quality meshes with the same (or higher) MC approximation quality.

Keywords: isosurfaces, marching cubes.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Sumário

Este capítulo descreve o planejamento e o desenvolvimento de um poligonizador de isosuperfícies baseado no algoritmo Marching Cubes (LORENSEN; CLINE, 1987) (MC). O objetivo deste poligonizador é gerar malhas de triângulos com qualidade superior aos poligonizadores existentes atualmente e manter as características mais atraentes do MC (simplicidade, eficiência e robustez). A descrição das etapas do desenvolvimento é organizada em três seções principais: (1) o estudo do MC, (2) a proposta do novo algoritmo e (3) a discussão dos resultados. A apresentação inicia com a definição de isosuperfície e a discussão da sua importância dentro do contexto de Computação Gráfica e Mecânica Computacional. A seguir, são apresentados e discutidos os conceitos de qualidade de triângulo e qualidade de malha dentro do escopo deste trabalho. Finalmente, são resumidos os objetivos, contribuições e organização do trabalho.

1.2 A Poligonização de Isosuperfícies

O uso de isosuperfícies (também chamadas de superfícies implícitas) na visualização de imagens tridimensionais (3D) é bastante comum nos ambientes de pesquisa (PAYNE; TOGA, 1990) (GIBSON, 1998) (MEYER et al., 2007) e profissionais (GEOSOFT INC., 2008) (NUMECA INTERNATIONAL, 2008) (ANSYS, 2008), onde isosuperfícies são frequentemente um dos principais componentes dos fluxos (*pipelines*) de visualização. Formalmente, para uma dada função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma superfície implícita é uma variedade $M = f^{-1}(\lambda)$ de $n - 1$ dimensões (a imagem inversa de λ), onde λ é um valor regular comumente chamado de isovalor (FIGUEIREDO et al., 1992). Em outras palavras, em sua aplicação mais comum (\mathbb{R}^3), uma isosuperfície é uma superfície formada por todos os pontos $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ onde $f(p_i) = \lambda$ (NING; BLOOMENTHAL, 1993).

Isosuperfícies são usadas na visualização para auxiliar a compreensão do comportamento de uma dada função f em um determinado domínio, como ilustra o exemplo da Figura 1.1. Basicamente, uma isosuperfície é uma simplificação da informação contida em f , que pode ter um comportamento arbitrariamente complexo e imprevisível. O uso de isosuperfícies auxilia na compreensão da topologia de f , da mesma forma que isocurvas (ou *curvas de nível*) auxiliam na compreensão da topologia em mapas de elevação (\mathbb{R}^2).

A visualização de isosuperfícies é comumente realizada através do *rendering* indireto,

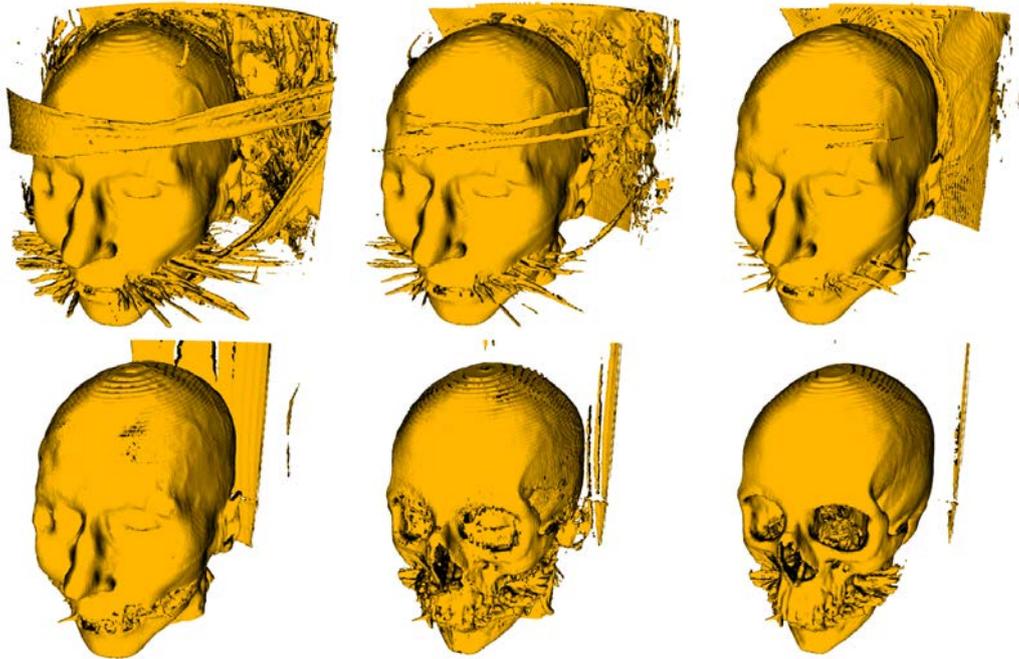


Figura 1.1: Exemplo da visualização de imagens volumétricas com auxílio de isosuperfícies. A figura ilustra *screenshots* da visualização de seis isosuperfícies de uma imagem tomográfica (tomografia de raios-x), revelando a relação espacial entre o tecido e os ossos dentro do volume tomográfico.

onde uma malha de polígonos é utilizada para representar a forma da isosuperfície no domínio de f . A malha de polígonos é comumente um complexo simplicial, como um conjunto de triângulos em \mathbb{R}^3 , por exemplo, que forma uma aproximação linear por partes da isosuperfície M . Esta abordagem é popular devido a adaptação do *hardware* gráfico atual à visualização de malhas de triângulos, ainda que existam outras abordagens baseadas na visualização direta de isosuperfícies (LEVOY, 1988) (ENGEL; KRAUS; ERTL, 2001).

Os métodos que constroem malhas de triângulos a partir de isosuperfícies são conhecidos como *poligonizadores* ou também *implicit surface tilers* (NING; BLOOMENTHAL, 1993). A pesquisa e o desenvolvimento de poligonizadores são temas tão antigos quanto a necessidade de visualizar e compreender imagens 3D (HERMAN; LIU, 1979), e, desde a sua proposta, vem sendo uma das linhas de pesquisa mais ativas da Computação Gráfica.

Os poligonizadores mais utilizados na prática são o algoritmo Marching Cubes (MC) (LORENSEN; CLINE, 1987) e algumas de suas variações, como o Marching Tetrahedra (MT) (BLOOMENTHAL, 1988) (PAYNE; TOGA, 1990) e outros (GIBSON, 1998) (KOBBELT et al., 2001) (JU et al., 2002). Estes algoritmos são comumente categorizados como métodos de subdivisão (NEWMAN; YI, 2006) ou decomposição (SCHROEDER; GEVECI; MALATERRE, 2004) espacial, devido à abordagem utilizada para a busca da isosuperfície no domínio de f . Esta abordagem inclui a subdivisão do domínio de f em um conjunto de células poliédricas (geralmente cubos ou tetraedros) que são examinadas independentemente. Cada célula constrói uma malha de triângulos que representa o comportamento da isosuperfície em seu interior. A construção é realizada de forma que, quando visualizadas simultaneamente, as malhas de triângulos geradas em todas as células

las resultem em uma malha visualmente contínua (C^0) (NIELSON; HAMANN, 1991).

A subdivisão do domínio de f para o tratamento do problema possibilitou a criação de algoritmos simples, eficientes e robustos. Estas ainda são as principais razões que justificam o uso do MC e das suas variantes na prática até os dias de hoje. Estas características também motivam a pesquisa por melhorias no algoritmo original, que vão desde a compreensão do seu funcionamento básico (MONTANI; SCATENI; SCOPIGNO, 1994) (LEWINER et al., 2003) (LOPES; BRODLIE, 2003) até a melhoria do seu desempenho (LIVNAT; SHEN; JOHNSON, 1996) (DYKEN et al., 2007).

Existe também um conjunto de aplicações cujo interesse vai além da visualização de isosuperfícies (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Aplicações como a simulação computacional de problemas de mecânica pelo método dos elementos finitos (MEF) ou geração de malhas de tetraedros, por exemplo, operam sobre malhas que representam uma discretização do domínio onde o problema deve ser resolvido.

Ao contrário da visualização, no entanto, estas aplicações exigem que as malhas atendam a certos critérios de qualidade (SANTOS; SCHEER, 2003). Estes critérios vão desde restrições quanto ao formato dos triângulos que compõem a malha (a qualidade dos triângulos) até limitações no erro imposto pela aproximação linear da isosuperfície (a qualidade da aproximação). A qualidade dos triângulos, em especial, é um critério determinante para o sucesso destas aplicações. Neste contexto (e no contexto deste trabalho) a qualidade da malha de triângulos é determinada pela qualidade do pior triângulo da malha (BABUSKA; AZIZ, 1976) (RIPPA, 1992) (SHEWCHUK, 2002), a despeito da qualidade dos demais triângulos. A qualidade de um triângulo, por sua vez, é determinada pela forma do triângulo, embora este conceito ainda seja controverso (RIPPA, 1992) (SHEWCHUK, 2002). Em geral, em uma definição que não favorece as exigências de nenhuma aplicação específica, um triângulo de boa qualidade é um triângulo cujos ângulos internos têm valores que não se aproximam de nem de 0° , nem de 180° (SANTOS; SCHEER, 2003).

As exigências de qualidade, principalmente as relacionadas à qualidade dos triângulos, são restrições potenciais ao uso de poligonizadores como o MC. Estes poligonizadores geram triângulos de baixa qualidade, como ilustra a Figura 1.2, e frequentemente dependem de procedimentos adicionais (pós-processamento) para melhorar a qualidade da malha gerada. Ainda assim, a eficiência e a simplicidade destes métodos motivam o seu uso na geração das malhas que se destinam a estas aplicações. Estas características sugerem que é mais simples (e vantajoso) alterar estes métodos para que eles atinjam a qualidade necessária do que investir em técnicas alternativas (CROSSNO; ANGEL, 1997) (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) (MEYER et al., 2007).

As pesquisas originadas por esta observação, em geral, são focadas no pós-processamento e na reconstrução (*remeshing*) das malhas geradas pelos poligonizadores mais comuns (TZENG, 2004) (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006). Nos últimos anos, no entanto, surgiu o interesse em modificar o funcionamento dos próprios poligonizadores. Esta nova linha de pesquisa resultou em alterações que vão desde a mudança no modo como os vértices dos triângulos são dispostos sobre a isosuperfície (GIBSON, 1998) (NIELSON, 2004) até a deformação das células resultantes da subdivisão (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007), principalmente no MC e nas suas variantes.

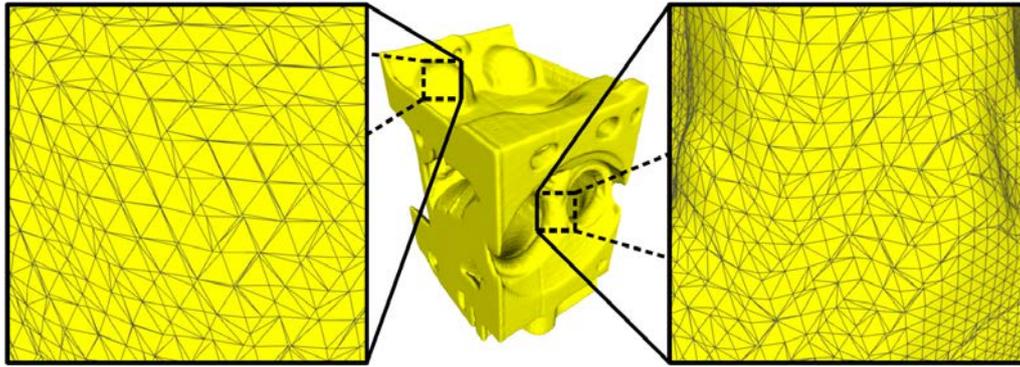


Figura 1.2: Poligonização de isosuperfícies com o MC. O MC e suas variantes geram triângulos de baixa qualidade que, embora não tenham impacto significativo na visualização da isosuperfície, influenciam no resultado de aplicações que operam sobre a malha resultante.

A Figura 1.3 ilustra uma comparação entre o MC e algumas das principais abordagens resultantes desta nova linha de pesquisa. A figura mostra os resultados de três métodos de pós-processamento (simplificação, suavização e reconstrução) e o resultado de um método baseado no MC, o Dual Contouring (JU et al., 2002). A comparação entre os poligonizadores é realizada através de dois critérios de qualidade, sendo eles: (1) a qualidade da malha e (2) a qualidade da aproximação (medida através do *Metro* (CIGNONI; ROCCHINI; SCOPIGNO, 1996)). Ainda que o resultado do MC não possa ser considerado uma aproximação adequada da isosuperfície, devido aos problemas resultantes da ambigüidade topológica na classificação das células (NING; BLOOMENTHAL, 1993), ele é usado como base na comparação devido a sua grande difusão e aceitabilidade na prática. A qualidade de cada malha é realçada pela barra sobreposta aos histogramas de qualidade.

A comparação ilustrada na Figura 1.3 permite algumas observações:

- A simplificação da malha (*Quadric Error Metric (QEM) decimation*) é capaz de remover alguns triângulos de baixa qualidade, embora não possa garantir a melhoria da qualidade da malha. Os triângulos de baixa qualidade gerados pelo MC são removidos devido ao seu formato alongado e área reduzida, o que os torna candidatos potenciais a remoção em muitos dos critérios usados nos métodos de simplificação (KAICK; PEDRINI, 2006). Em algumas situações, no entanto, os triângulos de baixa qualidade podem estar dispostos sobre regiões de alta curvatura e/ou alinhados à direção de curvatura principal. A remoção destes triângulos resulta na queda da qualidade de aproximação, que normalmente deve ser minimizada em métodos de simplificação.
- Os métodos de suavização (*Laplacian smoothing*) melhoram a qualidade de alguns triângulos da malha, ainda que esta melhoria seja acompanhada pela queda na qualidade de aproximação. Os métodos de suavização também não são capazes de oferecer garantias sobre a melhoria da qualidade da malha (até a conclusão deste trabalho), e, frequentemente, não são capazes de melhorar significativamente a qualidade do pior triângulo.
- Os métodos de reconstrução de malhas (*remeshing*) melhoram significativamente a qualidade dos triângulos, ainda que, da mesma forma que os métodos anteriores,

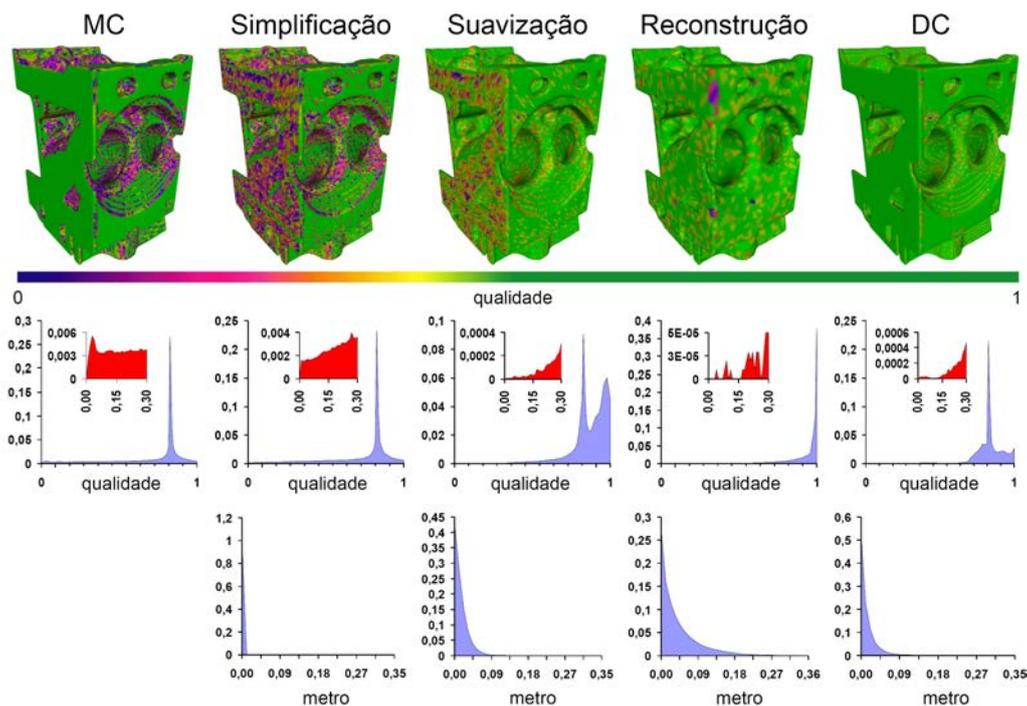


Figura 1.3: Comparação entre os resultados da poligonização do conjunto de dados *Engine* através do MC, três métodos de pós-processamento (simplificação em 90%, suavização Laplaciana e reconstrução pelo método *afront* e do método Dual Contouring). A primeira linha ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade do pior triângulo incidente ao vértice, e o mapeamento entre o valor de qualidade e a cor final é realizado segundo o mapa de cores ilustrado abaixo das malhas. (A qualidade se refere à razão entre os raios do círculo inscrito e do círculo circunscrito ao triângulo, onde o valor de qualidade 0 indica um triângulo degenerado e o valor de qualidade 1 indica um triângulo equilátero). A segunda linha ilustra os histogramas de qualidade das malhas, onde o histograma em detalhe (ilustrado na cor vermelha) mostra a qualidade dos piores triângulos da malha. A terceira linha ilustra o histograma de distâncias medidas entre a malha ilustrada e a malha gerada pelo MC (medida através do *Metro*).

não ofereçam garantias sobre a melhoria da qualidade da malha. Na verdade, estes métodos são *teoricamente* capazes de aumentar a qualidade da malha durante a sua reconstrução, mas o custo associado a sua aplicação (a complexidade da implementação e o custo computacional) ainda desmotivam o seu uso na prática (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006).

- O algoritmo Dual Contouring extrai uma malha dual à malha do MC, assim como o algoritmo Surface Nets (GIBSON, 1998), no qual é baseado. Ainda que a malha dual apresente menos triângulos de baixa qualidade (JU et al., 2002) (NIELSON, 2004), não é possível garantir a qualidade da malha, ou seja, não é possível determinar *a priori* a qualidade do pior triângulo da malha. Além disso, a redução do número de amostras (vértices) geradas sobre a isosuperfície (apenas uma amostra é gerada em cada célula) resulta na diminuição da qualidade de aproximação.

As observações realizadas sobre os métodos ilustrados na Figura 1.3 permitem a conjectura de que a melhora da qualidade da malha está relacionada a piora da qualidade da

aproximação nas abordagens analisadas. Além disto, nenhum dos métodos é capaz de dar garantias sobre a qualidade mínima da malha ou mesmo sobre a melhora da qualidade.

Dentro deste contexto, a proposta deste trabalho é modificar o MC para melhorar a qualidade da malha resultante, sem que a modificação resulte em queda de desempenho ou da qualidade de aproximação do MC. A opção por modificar o MC ao invés de pós-processar a malha extraída é motivada por uma observação simples, baseada no funcionamento do próprio algoritmo. O MC é capaz de extrair triângulos de baixa e alta qualidade, e a diferença entre as duas situações está relacionada ao modo como a célula intersecciona a isosuperfície (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Desta forma, ao analisar a relação entre a célula e a isosuperfície, é possível identificar e evitar as situações onde triângulos de baixa qualidade são gerados. Esta observação já motivou a proposta de alguns trabalhos (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) e ainda é atraente dentro desta linha de pesquisa.

O princípio delimitador deste trabalho é manter a simplicidade do MC, e, por consequência, a eficiência e a robustez do algoritmo. Estas características são importantes para posicionar o trabalho em relação aos principais poligonizadores existentes, que demandam um grande poder computacional (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) ou que fazem restrições em relação à forma da isosuperfície (LABELLE; SHEWCHUK, 2007).

A proposta da modificação do MC para melhorar a qualidade da malha extraída requer o estudo do modo como os triângulos são gerados durante a execução do algoritmo. Neste ponto é importante ressaltar que não existem trabalhos que analisem como e em quais situações o MC gera triângulos de baixa qualidade. Em geral, as propostas apresentadas até o momento são voltadas ao pós-processamento (colapso de arestas e de triângulos) de algumas partes da malha, detectadas através da análise empírica da relação entre a célula e a isosuperfície (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Embora sejam interessantes, estas abordagens violam algumas das características mais interessantes do MC, como a independência entre as células, por exemplo, permitindo a execução paralela do algoritmo.

O estudo do funcionamento do MC neste trabalho resulta na proposta do conceito de *Grupos de Arestas*. O objetivo deste conceito é auxiliar na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo MC e também por outros métodos de poligonização baseados em subdivisão espacial. A proposta dos grupos de arestas também surge a partir de uma observação simples, baseada no funcionamento do algoritmo. O MC aproxima o campo escalar dentro de cada célula com uma coleção de triângulos, onde cada triângulo é formado por vértices que são localizados sobre as arestas da célula. O formato de cada triângulo, desta forma, é influenciado tanto pela posição das três arestas sobre as quais os seus vértices estão posicionados quanto pelo comportamento da isosuperfície. Descartando-se o comportamento da isosuperfície, que pode ser complexo e imprevisível, pode-se dizer que o formato de cada triângulo é influenciado apenas pela posição das três arestas (Figura 1.4). A análise da posição destas arestas permite a estimativa da qualidade dos triângulos por todas as intersecções possíveis entre as arestas e a isosuperfície. Assim, cada grupo de três arestas (e todas as propriedades que resultam do seu formato) pode ser estudado separadamente. Neste trabalho estes grupos são chamados de Grupo de Arestas.

O conceito de grupos de arestas pode ser aplicado na análise do MC e de suas variantes, onde os grupos existentes são identificados pelo modo como os vértices gerados são conectados. O MC, por exemplo, possui 8 grupos de arestas (ilustrados na Figura

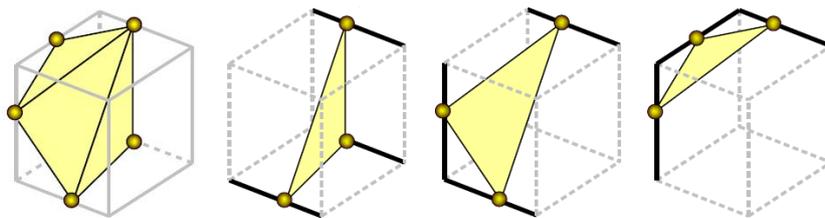


Figura 1.4: A decomposição de um caso do MC em grupos de arestas. Os vértices de cada triângulo são gerados ao longo de três arestas ativas, e o estudo das posições destas arestas (e das possíveis combinações entre arestas ativas) pode auxiliar na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo MC.

1.5), identificados na análise da tabela de triangulações disponível na implementação de Bourke (2008).

A proposta dos grupos de arestas oferece uma nova visão sobre um dos algoritmos mais populares da Computação Gráfica. Além disto, neste trabalho, as características que emergem do estudo dos grupos de arestas também são usadas na proposta das modificações que melhoram a qualidade da malha gerada pelo MC. A utilidade dos grupos de arestas nesta tarefa pode ser exemplificada por uma análise simples dos grupos de arestas encontrados no MC. Experimentos com conjuntos de dados bem conhecidos demonstram que um dos grupos de arestas, em particular, é responsável pela maior parte dos triângulos de baixa qualidade gerados pelo MC. A partir desta observação, é proposta neste trabalho a mudança da tabela de triangulações do MC, de modo que o número de ocorrências deste grupo de arestas seja reduzido. Esta modificação simples resulta em uma melhoria significativa das malhas extraídas pelo MC em diversos testes.

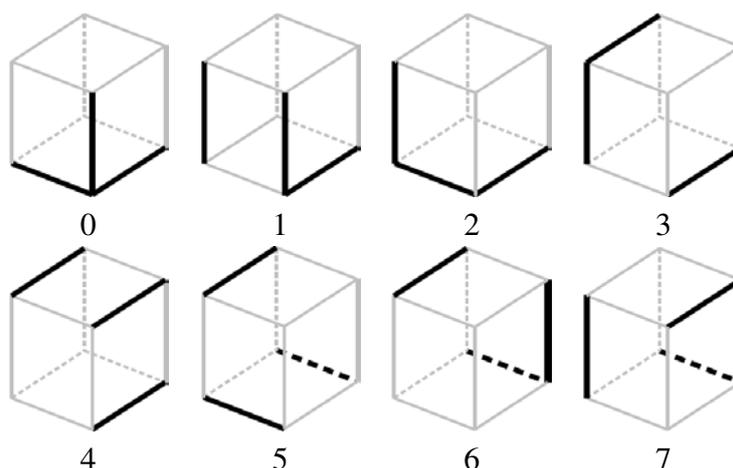


Figura 1.5: Os 8 grupos de arestas que podem ser observados na tabela de triangulações do MC. Os triângulos construídos pelo MC são gerados a partir destes grupos, e o estudo destas configurações pode auxiliar na compreensão da malha gerada pelo MC.

O estudo dos grupos de arestas também torna possível identificar como e em quais situações o MC gera triângulos de baixa qualidade. Baseado neste estudo, é proposto neste trabalho um método que altera as células do MC para evitar estas situações, de forma simples e eficiente, e que resulta em uma melhoria significativa da qualidade da malha

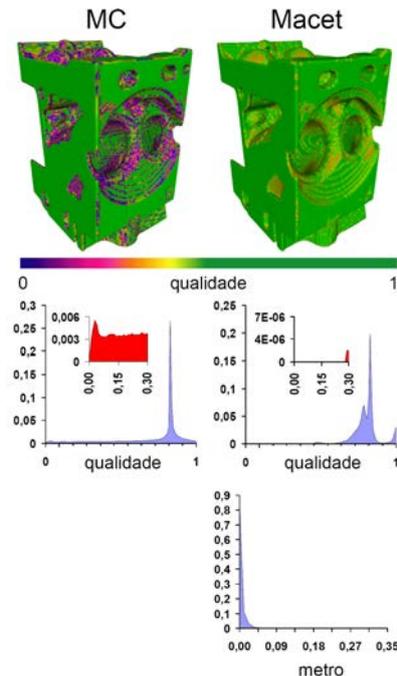


Figura 1.6: Comparação entre os resultados da poligonização do conjunto de dados Engine através do MC (a) e do Macet (b). O Macet melhora a qualidade da malha, indicada pela barra vermelha sobre o detalhe do histograma de qualidade, e não aumenta significativamente o erro de aproximação, como ilustrado pelo histograma de distâncias resultante do Metro. Estas duas características posicionam o Macet como o método de melhor razão entre o custo (erro de aproximação) e o benefício (melhora na qualidade da malha) nesta comparação.

gerada. O conjunto de procedimentos discutidos neste trabalho resulta na proposta do algoritmo Macet (*Marching Cubes with Edge Transformations*) (DIETRICH et al., 2008). A Figura 1.6 ilustra a comparação entre o resultado dos algoritmos Macet e MC.

O Macet é simples e eficiente, gera malhas com a mesma qualidade de aproximação do MC, e, o mais importante, gera malhas onde os triângulos de baixa qualidade ainda têm qualidade superior aos métodos disponíveis atualmente. A implementação do Macet também não altera a estrutura do MC. Os estágios do Macet são *adicionados* ao MC, entre os passos do algoritmo original. Desta forma, grande parte das otimizações propostas para o MC (como otimizações na busca pelas arestas e/ou células ativas (SHEN et al., 1996) (DYKEN et al., 2007)) também podem ser aplicadas.

1.3 Objetivo deste Trabalho

O objetivo deste trabalho é modificar o MC visando a geração de malhas de boa qualidade. A realização deste objetivo tem dois passos, sendo eles: (1) identificar as situações onde triângulos de baixa qualidade são gerados e (2) modificar o algoritmo para resolver estas situações. Esta divisão conceitual também é utilizada neste texto. O Capítulo 3 apresenta o estudo sobre o funcionamento do MC, e o Capítulo 4 apresenta as modificações propostas para o algoritmo original. O resultado deste trabalho é tanto teórico quanto prático. O resultado teórico é um novo conceito que auxilia na compreensão do funcionamento

do MC e de suas variantes, o conceito de *Grupos de Arestas*. O resultado prático é um novo método de poligonização baseado no MC, chamado Macet. O novo método mantém a simplicidade, eficiência e robustez do MC e resulta em malhas com qualidade superior aos principais métodos de poligonização disponíveis atualmente.

1.4 Principais Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são listadas a seguir:

- Uma nova abordagem para o estudo do funcionamento do MC (e de suas variantes) chamada Grupos de Arestas, que auxilia na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo método.
- Um novo critério para conduzir a construção da tabela de triangulações do MC baseada na qualidade da malha gerada. A tabela construída segundo o critério sugerido, ainda que não resulte na mudança da topologia das malhas geradas, diminui a probabilidade de cada célula gerar triângulos de baixa qualidade. O critério usado na construção da nova tabela, baseado nas propriedades dos grupos de arestas, também pode ser aplicado a tabelas de outros métodos de poligonização baseados no MC.
- Uma nova variante do MC chamada Macet que resulta em malhas com qualidade superior aos métodos disponíveis atualmente e que também mantém as características mais atraentes do método (simplicidade, eficiência e robustez).
- Um estudo experimental detalhado sobre a qualidade das malhas geradas pelo MC.

1.5 Sumário dos Capítulos

1.5.1 Capítulo “Trabalhos Relacionados”

A possibilidade do uso de isosuperfícies em áreas diversas como a visualização e a modelagem computacional resultou (e ainda resulta) em um grande número de publicações que abordam este tema. Neste capítulo é discutida a relação de algumas destas publicações com este trabalho, com atenção especial ao MC e aos poligonizadores que objetivam a geração de malhas de boa qualidade. A discussão inicia com um breve histórico da poligonização de isosuperfícies, com atenção especial à proposta do MC, e prossegue com a revisão dos principais poligonizadores projetados para a geração de malhas de boa qualidade.

1.5.2 Capítulo “A Qualidade da Malha Gerada pelo Algoritmo Marching Cubes”

Este capítulo apresenta a análise da qualidade da malha gerada pelo MC. O objetivo desta análise é compreender o funcionamento do MC e fornecer o ferramental necessário para a proposta de modificações que melhorem a qualidade da malha gerada. A apresentação inicia com a discussão do conjunto de métricas usado para a análise da qualidade da malha gerada pelo MC. Estas métricas são usadas para avaliar o resultado de duas novas abordagens que avaliam a qualidade dos triângulos gerados no interior da célula de amostragem.

A primeira abordagem permite identificar como a orientação da isosuperfície influencia na qualidade da malha gerada. A segunda abordagem permite identificar *onde e como* os triângulos de baixa qualidade são gerados, e resulta na proposta dos *Grupos de Arestas*.

1.5.3 Capítulo “A Modificação do Algoritmo *Marching Cubes*”

Este capítulo apresenta as três modificações propostas no MC. O objetivo das modificações é melhorar a qualidade da malha gerada e ainda manter a simplicidade, eficiência e robustez do algoritmo original. Este objetivo é alcançado através da análise das observações realizadas durante o estudo da qualidade da malha gerada pelo MC. A análise resulta na proposta de três modificações, sendo elas: (1) a modificação da tabela de triangulações do MC, (2) a deformação da grade do MC e (3) o deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. A adição das modificações propostas neste Capítulo ao MC resulta no algoritmo Macet.

1.5.4 Capítulo “Resultados”

Este capítulo apresenta os resultados dos experimentos realizados durante a pesquisa e o desenvolvimento do Macet. Os resultados de cada estágio são apresentados separadamente, o que permite a comparação do ganho obtido em cada procedimento. Os experimentos foram aplicados à 22 conjuntos de dados escalares provenientes de tomografias computadorizadas, ressonâncias magnéticas, resultados de simulações e microscopia a *laser*, além de conjuntos de dados provenientes de reconstrução de nuvens de pontos e dados artificiais desenhados para testes.

1.5.5 Capítulo “Discussão”

Este capítulo discute os principais questionamentos que surgiram durante o desenvolvimento deste trabalho. As questões abordadas incluem desde a motivação de algumas escolhas realizadas durante o trabalho, como as métricas usadas na avaliação da qualidade da malha e a determinação dos conjuntos de dados, até questões conceituais, como a adequação da malha gerada pelo Macet à aplicações de Mecânica Computacional.

1.5.6 Capítulo “Conclusão”

Este capítulo sumariza e discute as principais propostas realizadas neste trabalho. O capítulo encerra com a discussão das principais contribuições do trabalho e com a sugestão de extensões aos procedimentos propostos.

2 TRABALHOS RELACIONADOS

2.1 Introdução

A poligonização de isosuperfícies é um dos temas de pesquisa mais ativos e atraentes da Computação Gráfica nos últimos trinta anos (HERMAN; LIU, 1979). As razões que motivam este comportamento vão desde o desafio de extrair informações a partir de dados volumétricos até a aplicabilidade de isosuperfícies em campos como a visualização volumétrica e a modelagem computacional.

Isosuperfícies exercem um papel fundamental na visualização ao oferecer uma alternativa para representar as informações contidas em conjuntos de dados (*datasets*) volumétricos. Neste contexto, isosuperfícies têm a mesma função de suas equivalentes bidimensionais, as isocurvas (ou curvas de nível), usadas em plantas topográficas para auxiliar na compreensão da topologia do conjunto de dados.

A poligonização de isosuperfícies também pode ser interessante em áreas como a modelagem computacional. Em alguns conjuntos de dados, por exemplo, isosuperfícies podem ser usadas para representar a forma de um determinado domínio geométrico, como estruturas ósseas em uma tomografia computadorizada (BAJAJ et al., 1996) (ERIKSSON; FLEMMER; WIKANDER, 2005). A poligonização de isosuperfícies nestas aplicações pode permitir a construção de modelos computacionais detalhados das estruturas contidas no conjunto de dados.

A soma destas motivações ao desafio de lidar com a crescente complexidade dos conjuntos de dados disponíveis resultou em um grande número de publicações nesta área (apenas o MC possui 4844 citações no GoogleTM Scholar). Neste capítulo é discutida a relação de algumas destas publicações com este trabalho, com atenção especial ao MC e aos poligonizadores especializados na geração de malhas de boa qualidade. A discussão inicia com um breve histórico da poligonização de isosuperfícies apresentado na Seção 2.2. A Seção 2.3 discute a proposta do MC e, finalmente, a Seção 2.4 discute os poligonizadores projetados para a geração de malhas de boa qualidade.

2.2 A Poligonização de Isosuperfícies

A extração de isosuperfícies envolve duas tarefas, sendo elas: (a) *encontrar a isosuperfície* dentro do domínio da função f e (b) *calcular uma representação adequada* para o comportamento da isosuperfície (LIVNAT; SHEN; JOHNSON, 1996). A função f pode ser

analítica ou dada através da reconstrução de uma função contínua a partir de um conjunto discreto de amostras (ou pontos); neste trabalho, f é uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sem que o modo como o mapeamento é calculado seja levado em consideração.

Os métodos de extração de isosuperfícies são normalmente categorizados pelo modo como implementam a busca pela isosuperfície no domínio de f , e podem ser subdivididos em (a) métodos baseados em *subdivisão espacial* e (b) métodos de *rastreio de isosuperfície*.

Os métodos de subdivisão (ou decomposição) espacial subdividem o domínio de f em partes menores, geralmente chamadas de *células*, e calculam representações locais para a isosuperfície no interior de cada célula (HERMAN; LIU, 1979) (ARTZY; FRIEDER; HERMAN, 1980) (WYVILL et al., 1986) (LORENSEN; CLINE, 1987) (SHU et al., 1995) (SHEKHAR et al., 1996) (GIBSON, 1998) (KOBBELT et al., 2001) (JU et al., 2002) (NIELSON, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007).

A divisão do domínio de f tem um papel fundamental na busca da isosuperfície, pois limita a área de busca a porções onde a isosuperfície tem comportamento (possivelmente) mais simples. A adoção desta abordagem permitiu o desenvolvimento de algoritmos simples e eficientes, e colocou (historicamente) os métodos de subdivisão espacial como a primeira abordagem usada na extração de isosuperfícies. Esta abordagem também foi usada no desenvolvimento do poligonizador mais conhecido atualmente, o MC, que é discutido na Seção 2.3.

Os métodos baseados em subdivisão sofrem com um problema inerente à própria subdivisão, no entanto, que é a determinação de *onde e como* o domínio de f deve ser subdividido para encontrar e representar adequadamente a isosuperfície. A qualidade da representação está intimamente ligada ao esquema e ao nível de subdivisão, o que motivou a proposta de diversos métodos e critérios nos últimos anos (BLOOMENTHAL, 1988) (SHU et al., 1995) (WESTERMANN; KOBBELT; ERTL, 1999) (JU et al., 2002) (FANG et al., 2004) (SCHROEDER; GEVECI; MALATERRE, 2004) (HO et al., 2005) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Neste trabalho, no entanto, o objetivo é lidar com as características da subdivisão uniforme (a subdivisão adotada no MC), e assim assume-se que a subdivisão uniforme e o nível de subdivisão adotado nos experimentos é suficiente para a busca e representação adequada da isosuperfície.

Os métodos de rastreio de isosuperfície também se caracterizam pela redução no domínio de busca, ainda que, neste caso, o domínio seja reduzido à própria isosuperfície (IWANO, 2005). A redução é implementada através do posicionamento de um conjunto de vértices (ou células) sobre a isosuperfície, que atuam como *sementes* da busca. A posição dos demais pontos (ou células) sobre a isosuperfície é calculada a partir das sementes, iterativamente, através de procedimentos que rastreiam a isosuperfície no domínio de f .

Os primeiros métodos de rastreio de isosuperfícies usaram subdivisões espaciais para o posicionamento de *células semente*, a partir das quais novas células são geradas para varrer a isosuperfície (WYVILL et al., 1986) (ITOH; KOYAMADA, 1994). O objetivo destes métodos foi aumentar o desempenho do algoritmo ao restringir a varredura do domínio de f apenas ao conjunto de células que contém parte da isosuperfície em seu interior, as *células ativas*. Os primeiros métodos baseados em subdivisões foram seguidos por métodos que posicionam *vértices semente* sobre a isosuperfície, a partir dos quais novos vértices são posicionados iterativamente para construir uma triangulação (HARTMANN, 1998)

(KARKANIS; STEWART, 2001) (ARAUJO; JORGE, 2004). Os métodos *pseudo-físicos*, por sua vez, representam os vértices semente como partículas que se movem livremente dentro do domínio e f , interagindo entre si e com a isosuperfície simultaneamente (FIGUEIREDO et al., 1992) (TURK, 1992) (CROSSNO; ANGEL, 1997) (MEYER et al., 2007) (MEYER; KIRBY; WHITAKER, 2007). A busca da isosuperfície é então transformada em um problema de minimização da força que impulsiona cada vértice dentro do domínio, sendo que a força é proporcional à distância entre o vértice e a isosuperfície e à distância entre o vértice e os seus vizinhos. Recentemente, Schreiner, Scheidegger e Silva propuseram (2006) um novo método de rastreamento de isosuperfícies que, embora também baseado em vértices, usa uma representação implícita da isosuperfície (o *guidance field*) para auxiliar no posicionamento de novos vértices. A construção do *guidance field* é baseada em uma poligonização inicial da isosuperfície, razão pela qual este método também é chamado de *remeshing* (reconstrução de malhas).

Os métodos de rastreamento de isosuperfície compartilham, no entanto, problemas relacionados à determinação das sementes da busca e ao próprio rastreamento da isosuperfície a partir das sementes. O posicionamento das sementes deve garantir que exista (pelo menos) uma semente em cada isosuperfície dentro do domínio, sendo que um mesmo isovalor pode resultar em isosuperfícies desconectadas. O rastreamento da isosuperfície, por sua vez, deve garantir que toda a sua extensão seja representada, ainda que o comportamento da isosuperfície possa ser complexo dentro do domínio de f . Estes dois problemas freqüentemente levam à construção de métodos computacionalmente intensivos e, conseqüentemente, com menor desempenho que os métodos baseados em subdivisão espacial (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) (MEYER; KIRBY; WHITAKER, 2007).

2.3 O Algoritmo Marching Cubes

O MC foi proposto em 1987 (LORENSEN; CLINE, 1987), e é hoje uma das publicações mais citadas na pesquisa em Computação Gráfica. Os autores Lorensen e Cline usaram, na busca de novas aplicações para a *engine Graphicon (General Electric)*, a subdivisão espacial para reduzir a complexidade do algoritmo de conexão de contornos (já presente na engine) e propuseram um dos algoritmos de maior sucesso na Computação Gráfica (LORENSEN, 2008).

O MC subdivide o domínio de f em uma grade uniforme (cartesiana) que resulta em um conjunto de células *cúbicas*. Cada célula é um cubo criado a partir de oito vértices da grade, como ilustra a Figura 2.1. O algoritmo *marcha* (conceitualmente) entre as células da grade, determinando como a isosuperfície intersecciona cada célula, e gerando uma representação local baseada em triângulos. (O MC original gerava um polígono por célula (LORENSEN, 2008)).

A busca da isosuperfície em cada célula é baseada na polaridade (sinal) da função $F(p) = f(p) - \lambda$ em cada vértice da célula. O MC assume a suposição de que a célula intersecciona a isosuperfície se os vértices da célula apresentam polaridades diferentes. As células que interseccionam a isosuperfície são chamadas *células ativas*.

Após a identificação das células ativas, o último passo do algoritmo é a construção da triangulação que representa o comportamento da isosuperfície no interior da célula. A

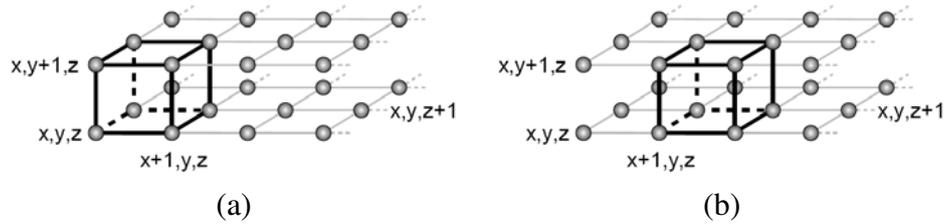


Figura 2.1: *Marcha* (varredura) do MC. A subdivisão do domínio de f em uma grade uniforme resulta em um conjunto de células *cúbicas*, criadas a partir de oito vértices da grade. O algoritmo então percorre a grade (a, b), determina como a isosuperfície intersecciona cada célula, e gera uma representação local da isosuperfície baseada em triângulos.

construção da triangulação é dividida em dois passos, sendo eles: (a) a geração dos *vértices de intersecção* e a definição da triangulação (conectividade) entre os vértices de intersecção. A geração dos vértices de intersecção assume a suposição de que a isosuperfície intersecciona uma célula ativa nas arestas definidas entre vértices de polaridades diferentes, ou *arestas ativas*. Cada aresta ativa gera um vértice de intersecção para representar a sua intersecção com a isosuperfície, assumindo que o comportamento de F é linear ao longo da aresta.

A definição da triangulação entre os vértices de intersecção é o passo mais importante do MC, e o passo que realmente o diferenciou das demais propostas existentes na época (LORENSEN, 2008). Lorensen e Cline observaram que existem apenas 256 combinações de polaridades entre os vértices da célula cúbica (8 vértices com 2 sinais) e rotação, o que permitiu um mapeamento direto entre o grupo de polaridades e a triangulação entre os vértices gerados. O mapeamento é realizado através de uma *tabela de triangulações*, que codifica uma triangulação para cada grupo de polaridades da célula cúbica.

Os autores também observaram que alguns dos grupos de polaridades eram *simétricos* entre si, quer dizer, eram relacionados através de operações de complemento (troca de sinais nos vértices). Estas operações mantêm a topologia invariante entre os grupos simétricos, e permitem a redução das 256 entradas da tabela para 15 *casos representativos*. Os casos representativos do MC são ilustrados na Figura 2.2.

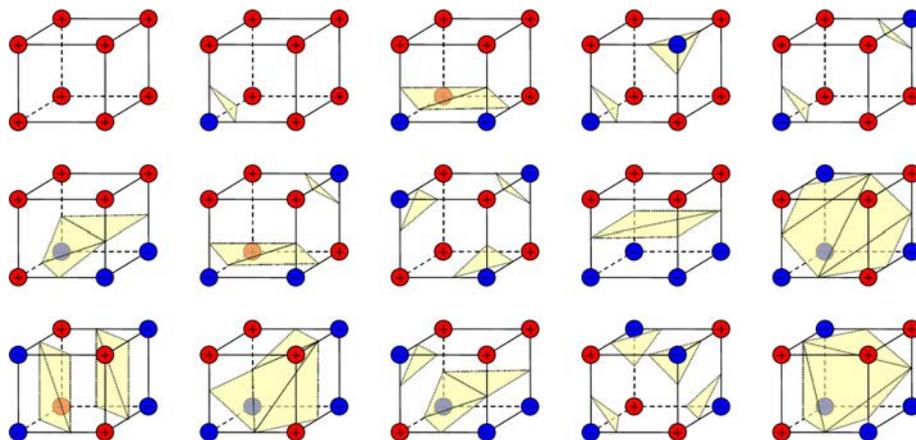


Figura 2.2: Triangulação dos 15 casos representativos do MC.

O processamento de cada célula é independente das demais células e inclui apenas três passos computacionalmente simples. Estas características motivaram o uso e a melhoria do MC nos últimos 20 anos, e fizeram da proposta do algoritmo um dos artigos mais referenciados da história da computação. Ainda assim, o algoritmo original também possui características indesejáveis, como os problemas de ambigüidades topológicas (diferentes topologias associadas ao mesmo caso representativo) (NIELSON; HAMANN, 1991) (GELDER; WILHELMS, 1994), a baixa qualidade dos triângulos gerados (GIBSON, 1998) (BRUIN et al., 2000) e a baixa qualidade de aproximação nas regiões de curvatura elevada da isosuperfície (KOBBELT et al., 2001) (apenas citando os problemas mais notáveis).

O objetivo deste trabalho é modificar o MC para gerar malhas de boa qualidade, seguindo a linha de pesquisa de propostas recentes (NIELSON, 2004) (TZENG, 2004). Além do próprio MC, outros poligonizadores foram modificados (e criados) para a geração de malhas de boa qualidade. A Seção 2.4 sumariza as principais propostas, e posiciona a proposta deste trabalho em relação ao estado da arte.

2.4 A Geração de Malhas de Boa Qualidade

Os métodos de subdivisão espacial são baseados em um paradigma de divisão e conquista, que frequentemente leva ao projeto de algoritmos mais eficientes e robustos. Os métodos de rastreamento de isosuperfícies, por outro lado, calculam intensivamente o posicionamento *ótimo* de cada vértice sobre a isosuperfície, o que leva à construção de malhas de boa qualidade.

O contraste entre as abordagens de poligonização é reforçado pela observação de que *eficiência e qualidade de malha* foram tratados como conceitos ortogonais nos últimos anos. Os métodos baseados em subdivisão espacial são frequentemente associados a aplicações onde a eficiência é importante, como a visualização de isosuperfícies (ITOH; KOYAMADA, 1994) (LIVNAT; SHEN; JOHNSON, 1996) (BAJAJ; PASCUCCHI; SCHIKORE, 1996) (WESTERMANN; KOBBELT; ERTL, 1999) (WATERS; CO; JOY, 2005) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007), enquanto os métodos baseados no rastreamento de isosuperfícies são associados a aplicações onde a qualidade da malha é essencial, como simulações de Mecânica Computacional (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) (MEYER; KIRBY; WHITAKER, 2007).

A eficiência dos métodos baseados em subdivisão espacial motivou, naturalmente, a proposta de modificações nos algoritmos originais com o objetivo de melhorar a qualidade da malha gerada. Gibson (1998) propôs um método onde um vértice é posicionado no interior de cada célula ativa e conectado aos vértices de células ativas vizinhas. (Ainda que este método de conexão possa ser usado no algoritmo *Cuberille* (HERMAN; LIU, 1979) e provavelmente tenha sido implementado por Herman e Liu, Herman, Liu ou mesmo Gibson não reclamam a sua autoria). A malha gerada por este método de conexão é *dual* à malha do MC (*se e somente se* a malha gerada pelo método de Gibson não contém auto-intersecções) e exibe o incremento de qualidade associado aos métodos duais, como observado por Nielson (2004). Gibson também propôs um passo de pós-processamento da malha gerada por um método de suavização (*Laplacian smoothing*), com o objetivo de resolver iterativamente os triângulos de baixa qualidade ainda presentes. Durante as iterações, a movimentação de cada vértice é restrita ao interior da célula na qual o vértice

foi gerado, o que limita a melhora na qualidade da malha mas também impede o colapso da malha resultante do método de suavização iterativo.

Bruin et al. (2000) propuseram uma extensão ao método de Gibson com o objetivo de melhorar a qualidade da aproximação da malha, que é comprometida pelo *Laplacian Smoothing*. Os autores modificaram o passo de pós-processamento com a inclusão de um procedimento de *gradient descent* a cada iteração, que aproxima o vértice da isosuperfície, compensando o deslocamento provocado pela suavização. O método de Bruin et al. (2000) mantém o procedimento dependente de um certo número de iterações para a obtenção de uma malha de boa qualidade. O número de iterações necessárias (ou mesmo a garantia de que um certo número de iterações irá resultar em uma malha de boa qualidade) não é conhecido, no entanto, e os autores não provêm uma demonstração experimental ou teórica de que o método atinge os resultados pretendidos.

Ainda seguindo a abordagem dos métodos duais, Ju et al. (2002) propuseram o método *Dual Contouring*, baseados no método de Gibson (1998) e no *Extended Marching Cubes*, proposto por Kobbelt et al. (2001). A motivação dos autores foi a construção de um jogo de computador que permitisse a destruição interativa do cenário (*destructible meshes*), representado por um campo escalar que deveria ser poligonizado a cada modificação realizada pelo usuário. Esta motivação resultou em um dos poligonizadores mais completos disponíveis atualmente, que combina eficiência, baixo erro de aproximação de regiões de curvatura elevada (característica herdada do *Extended Marching Cubes*), adaptatividade (o *Dual Contouring* opera sobre uma subdivisão *octree*) e a qualidade de malha comum aos métodos duais. Ainda assim, ao combinar a adaptatividade e o baixo erro de aproximação, a qualidade da malha foi significativamente comprometida. O *Dual Contouring* tende a gerar alguns triângulos quase degenerados, ainda que o número de triângulos degenerados seja baixo em comparação com o número de triângulos da malha.

O *Dual Contouring* foi modificado por Schaefer, Ju e Warren (2007), com o objetivo de construir superfícies *2-manifold*. Ainda que este tipo de malha seja adequada aos procedimentos de suavização, como o *Laplacian smoothing*, a modificação de Schaefer, Ju e Warren produz malhas com qualidade semelhante ao método *Dual Contouring*.

Os métodos de Gibson (1998) e Bruin et al. (2000) têm em comum o tratamento da qualidade da malha após a sua geração, ou seja, a malha de triângulos é suavizada em um passo de pós-processamento. Neste trabalho é proposto o tratamento da qualidade da malha antes da sua geração (*pré-processamento*), através de operações que modificam o formato da grade do MC. A modificação do próprio poligonizador, ao manter a simplicidade e o paralelismo inerentes ao algoritmo, pode permitir a criação de um novo procedimento com a simplicidade, eficiência e robustez do MC. Esta possibilidade também motivou Tzeng (2004) e Labelle e Shewchuk (2007) na proposta de procedimentos que alteram o formato original da grade para melhorar a qualidade da malha gerada.

Tzeng (TZENG, 2004) propôs um método em que os triângulos com um ângulo interno próximo de 180° (*achatado*) ou de 0° (*agulha*) são transformados em linhas, através do colapso de uma de suas arestas, e posteriormente eliminados. A operação é semelhante à deformação da grade (*warping*), onde os vértices da grade próximos à isosuperfície são posicionados sobre a isosuperfície. A busca da aresta que deve ser eliminada, no entanto, envolve a pesquisa dos vértices de intersecção gerados em células vizinhas, e quebra a independência entre as células inerente ao algoritmo. Entretanto, Tzeng não demonstra a efetividade do método através de experimentos ou demonstrações do seu funcionamento

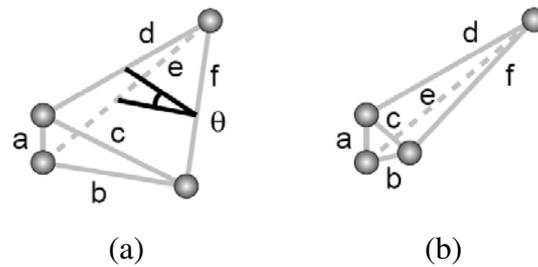


Figura 2.3: Falha do ângulo diedral em garantir triângulos de boa qualidade nas faces do tetraedro. Ainda que em algumas situações o ângulo diedral, ilustrado como θ em (a), evidencie a ocorrência de triângulos de baixa qualidade, como o triângulo formado pelas arestas a , b e c em (a), alguns tetraedros podem ser formados por triângulos de baixa qualidade e apresentar apenas bons ângulos diedrais. O tetraedro ilustrado em (b) tem as arestas a , b e c com comprimento próximo a 0, e as arestas c , d e f com comprimento muito maior que 0, o que resulta em ângulos diedrais de aproximadamente 60° e 90° ; ainda assim, a face formada pelas arestas c , d e f , por exemplo, tem um ângulo interno próximo a 0.

na prática.

Labelle e Shewchuk (2007) propuseram um método de tetraedralização (preenchimento da isosuperfície com tetraedros) baseado em subdivisão espacial capaz de *limitar o intervalo de ângulos* diedrais da malha de tetraedros. Os autores demonstraram, através de uma prova computacional, que os ângulos diedrais da malha de tetraedros resultante são limitados entre 10.87° e 164.74° . A geração de uma malha de tetraedros de boa qualidade é possível devido à duas características do método proposto: (a) o método não preserva regiões de curvatura elevada (*sharp features*), ou seja, é limitado à aplicação em isosuperfícies de curvatura *suave*, e (b) o método implementa uma modificação do *warping* da grade proposto por Bern, Eppstein, e Gilbert (1994), que permite a eliminação de tetraedros de baixa qualidade. O *warping* da grade move os vértices próximos a isosuperfície para a isosuperfície, e põe em colapso os tetraedros de baixa qualidade (frequentemente) gerados ao redor da isosuperfície.

Neste trabalho, o interesse na proposta de Labelle e Shewchuk (2007) reside no fato de que a fronteira da malha de tetraedros define uma poligonização da isosuperfície. A malha de polígonos, sendo formada pelas faces dos tetraedros, herda então os limites de qualidade garantidos pelo método. Ainda assim, a medida de qualidade usada para avaliar a malha de tetraedros (o ângulo diedral) não é capaz de garantir a qualidade da malha poligonal, como ilustra a Figura 2.3.

O método de Labelle e Shewchuk (2007) também cria uma dependência entre as células durante o *warping*, isto é, o procedimento é *seqüencial*. Raman e Wenger (2008) propuseram um método que mantém a independência entre as células e melhora a qualidade da malha em dois estágios, sendo eles: (a) o uso de uma classificação *ternária* para os vértices da grade, que resulta em uma *tabela de triangulações estendida* que não gera triângulos degenerados, e (b) um procedimento de deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas baseado no *warping* de Labelle e Shewchuk (2007).

A adoção de uma classificação *ternária* para os vértices da grade tem o objetivo de também detectar os vértices onde o valor de f é igual a λ , ou seja, os vértices da grade que

estão *sobre* a isosuperfície. No MC, vértices onde o valor de f é igual à λ resultam em triângulos degenerados a *pontos* ou *linhas* na tabela de triangulações. A classificação ternária foi originalmente proposta para permitir a representação da interface (*separating surfaces*) entre materiais de uma imagem volumétrica (SEEBASS et al., 1997). A interface entre três materiais não é, no entanto, um *2-manifold*, e esta característica está presente no método de Raman e Wenger (2008).

O deslocamento dos vértices de intersecção proposto por Raman e Wenger (2008) tem o objetivo de eliminar os triângulos de baixa qualidade que são gerados próximos aos vértices da grade. Os autores propõem um procedimento que põe em colapso os triângulos de baixa qualidade ao permitir que os vértices de intersecção se movimentem ao longo das arestas ativas, onde a quantidade de movimento é limitada por um parâmetro informado pelo usuário. O movimento dos vértices pode alterar, no entanto, a topologia da malha, e pode resultar em auto-intersecções entre duas regiões da malha geradas em células vizinhas. Ainda que o método efetivamente melhore a qualidade da malha, os autores reportam que o método uniu diferentes regiões da malha em todos os experimentos.

Baseado neste estado da arte, o objetivo deste trabalho é desenvolver um método de *pré-processamento* a partir de um estudo que determine em quais situações triângulos de baixa qualidade são gerados. O método proposto, discutido no Capítulo 4, baseia-se na modificação da tabela de triangulação do MC (RAMAN; WENGER, 2008), no *warping* da grade do MC (BERN; EPPSTEIN; GILBERT, 1994) (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (RAMAN; WENGER, 2008) e no deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas (RAMAN; WENGER, 2008). O novo método não resulta, no entanto, na modificação da topologia da malha gerada pelo MC ou na perda de *sharp features* da isosuperfície, dois dos principais problemas dos métodos discutidos.

3 A QUALIDADE DA MALHA GERADA PELO ALGORITMO MARCHING CUBES

3.1 Introdução

Este capítulo apresenta a análise da qualidade da malha gerada pelo MC. O objetivo desta análise é compreender o funcionamento do MC e fornecer o ferramental necessário para a proposta de modificações que melhorem a qualidade da malha gerada. A apresentação inicia com a discussão dos conceitos de *qualidade do triângulo* e *qualidade da malha* dentro do escopo deste trabalho. O resultado desta discussão é o conjunto de métricas que é usado para a análise da qualidade da malha gerada pelo MC.

A análise da qualidade da malha gerada pelo MC é realizada através de duas abordagens. A primeira abordagem estuda o modo como a isosuperfície intersecciona a célula, e permite identificar como a orientação da isosuperfície influencia na qualidade da malha gerada (Seção 3.3.1). A segunda abordagem estuda o modo como cada triângulo é construído pelo MC. Esta abordagem permite identificar *onde* e *como* os triângulos de baixa qualidade são gerados, e resulta na proposta dos *Grupos de Arestas*, discutidos na Seção 3.3.2. A discussão é focada no MC, ainda que possa ser estendida para algumas das suas variantes, como o Marching Tetrahedra (MT) (PAYNE; TOGA, 1990) e o Marching Octahedra (CARR; THEUSSL; MÖLLER, 2003).

3.2 A Qualidade da Malha

Malhas podem ser definidas como o resultado da partição de um determinado domínio geométrico em um conjunto de elementos menores (SANTOS; SCHEER, 2003). Em Computação Gráfica, malhas são comumente usadas para permitir a visualização da geometria do domínio, onde cada elemento resultante da partição é um polígono que aproxima o comportamento local do domínio geométrico. (Neste trabalho, o tratamento de malhas geradas por poligonizadores restringe a discussão à *malhas de triângulos*).

A partição do domínio geométrico também pode ser realizada para atender às exigências de outras tarefas. Em Mecânica Computacional, por exemplo, a partição pode auxiliar no cálculo e na compreensão de um certo fenômeno que atua sobre o domínio geométrico. Assumindo que o comportamento do fenômeno pode ser complexo, a discretização do domínio permite tratar o problema *por partes*, onde o seu comportamento pode ser aproximado de forma satisfatória.

A construção da malha é realizada pelo *mesmo* motivo nas duas tarefas, ainda que seja mostrada sobre pontos de vista diferentes. O domínio (ou um fenômeno qualquer que ocorre sobre ele) tem uma forma (ou comportamento) demasiadamente complexo para ser tratado diretamente, e assim é subdividido para facilitar a sua representação (ou compreensão). O tipo de particionamento realizado para cada tarefa varia, no entanto, desde a decisão sobre como proceder em diferentes regiões do domínio até o aspecto dos triângulos que formam a malha.

A dificuldade em determinar a qualidade de uma malha está na diferença entre as tarefas. A estimativa da qualidade de uma malha deve considerar aspectos relacionados ao seu propósito ou à sua aplicação (SANTOS; SCHEER, 2003), o que resulta em um conjunto de métricas desenhado para cada tipo de tarefa. Além disso, mesmo quando limitadas ao escopo de uma tarefa, cada métrica pode levar em conta diferentes atributos da malha. Os atributos podem ser locais ou globais, subjetivos ou quantitativos, e assim resultar em estimativas de qualidade significativamente diferentes.

O objetivo deste trabalho é gerar malhas adequadas para simulações de Mecânica Computacional, o que restringe as métricas de qualidade que podem ser usadas para avaliar a qualidade das malhas geradas. Não há um consenso, no entanto, sobre as métricas de qualidade que podem determinar o nível de adequação de uma malha a aplicações de Mecânica Computacional. Segundo Shewchuk (2002), ainda não foi possível identificar um conjunto de preposições matemáticas capaz de escolher o melhor triângulo entre dois triângulos de qualidade intermediária. Mesmo algumas conjecturas bem aceitas dentro da comunidade acadêmica, como a baixa adequação de triângulos com ângulos internos pequenos (próximos a 0°), ainda estão em discussão (RIPPA, 1992).

Um exemplo desta dificuldade pode ser encontrado no trabalho de Rippla (1992). O autor descreve que, para o cálculo de uma aproximação linear de uma determinada função definida sobre o domínio geométrico, por exemplo, os triângulos podem ser *longos* nas direções onde a magnitude da segunda derivada direcional da função é pequena e *finos* nas direções onde a magnitude da segunda derivada direcional da função é grande. Neste contexto, uma malha de boa qualidade *pode* incluir triângulos longos e finos, embora eles sejam reconhecidamente prejudiciais em outras aplicações (SANTOS; SCHEER, 2003). Nesta situação, o comportamento da função deve ser conhecido no momento em que a qualidade da malha é avaliada, o que nem sempre é possível em aplicações de Mecânica Computacional.

Levando em conta estas considerações, nesta seção são definidas e descritas as métricas usadas para avaliar a qualidade da malha gerada pelo MC. As métricas de qualidade escolhidas têm duas características principais, sendo elas: (1) nenhuma métrica leva em consideração a área do triângulo, e (2) todas as métricas consideram o triângulo equilátero como o triângulo *ótimo*. Ainda que a área do triângulo seja um atributo importante em algumas aplicações de Mecânica Computacional, o MC não é um poligonizador que adapta a área do triângulo ao comportamento da isosuperfície, e incluir esta característica no poligonizador não faz parte do escopo deste trabalho. A geração de malhas adaptativas, em geral, vai de encontro à geração de malhas de boa qualidade, como é discutido no Capítulo 6. A escolha do triângulo equilátero como triângulo de referência segue a compreensão geral sobre triângulos de boa qualidade, ou seja, triângulos com ângulos internos que não se aproximam de 0° ou 180° (SANTOS; SCHEER, 2003) e que não têm alinhamento preferencial às direções da variação de qualquer função definida sobre o

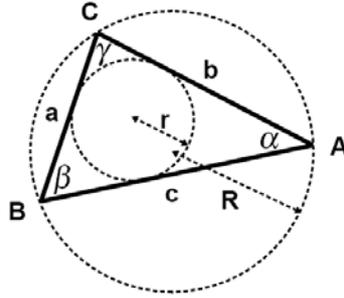


Figura 3.1: Propriedades geométricas do triângulo que são usadas na formulação das métricas de qualidade adotadas neste trabalho. O triângulo é definido entre os vértices A , B e C , com arestas de comprimento $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, e ângulos internos α , β e γ , onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo e R é o raio do círculo circunscrito no triângulo.

domínio geométrico (RIPPA, 1992).

A Figura 3.1 ilustra as propriedades geométricas do triângulo que são usadas na formulação das métricas de qualidade adotadas neste trabalho. A figura mostra um triângulo definido pelos vértices A , B e C , com arestas de comprimento $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, e ângulos internos α , β e γ . A partir destas propriedades são definidas as seguintes relações:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

onde s é o semi-perímetro do triângulo,

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Δ é a área do triângulo,

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

r é o raio do círculo inscrito no triângulo, ou seja, o único círculo que é simultaneamente tangente às arestas a , b e c , e

$$R = \frac{abc}{4rs}$$

onde R é o raio do círculo circunscrito no triângulo, ou seja, o único círculo que passa pelos dos vértices A , B e C .

As métricas de qualidade utilizadas neste trabalho são descritas nas Seções 3.2.1 e 3.2.2. A escolha das métricas adequadas para a avaliação das malhas geradas pelo MC foi realizada com base no trabalho de Pebay e Baker (PEBAY; BAKER, 2001), que apresentam uma extensa discussão sobre as principais métricas disponíveis. As métricas avaliam a *qualidade do triângulo* e são baseadas na geometria do triângulo (SANTOS; SCHEER, 2003), ao invés do impacto que a forma do triângulo pode ter sobre a tarefa ao qual a

malha é destinada. A *qualidade da malha* é determinada pela qualidade do pior triângulo da malha, a despeito da qualidade dos demais triângulos, seguindo a abordagem proposta em trabalhos recentes (BABUSKA; AZIZ, 1976) (RIPPA, 1992) (SHEWCHUK, 2002).

3.2.1 Ângulos Internos Mínimo e Máximo

A métrica mais comum para medir a qualidade de um triângulo é o cálculo do maior e do menor ângulo interno do triângulo (BABUSKA; AZIZ, 1976),

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \min(\alpha, \beta, \gamma) \\ \theta_\infty &= \max(\alpha, \beta, \gamma).\end{aligned}$$

Ainda que não exista um consenso sobre a escolha entre triângulos de qualidade intermediária, os ângulos internos mínimo e máximo dos triângulos de uma malha são apontados como fatores determinantes para o sucesso de aplicações de Mecânica Computacional (BABUSKA; AZIZ, 1976) (RIPPA, 1992) (SHEWCHUK, 2002). A restrição geométrica ao ângulo mínimo de uma malha é conhecida como condição de ângulo mínimo (*minimal angle condition*), e, embora tenha sido considerada como uma condição *não-essencial* e tenha sido substituída pela condição de ângulo máximo (*maximal angle condition*) (BABUSKA; AZIZ, 1976), ainda é usada para estimar a qualidade de malhas de triângulos. Neste trabalho, as duas condições são usadas na avaliação da qualidade das malhas geradas, com o objetivo de atender às exigências de um grupo maior de aplicações.

3.2.2 Razão entre os Raios do Triângulo

A razão entre os raios do círculo circunscrito (R) e inscrito (r) no triângulo,

$$\rho = \frac{R}{r},$$

é uma das métricas adimensionais mais utilizadas para o cálculo da qualidade de malhas (SCHREINER et al., 2006) (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006). As principais características de ρ são: (a) a capacidade de penalizar igualmente triângulos com um ângulo interno próximo de 180° (*achatados*) e de 0° (*agulhas*), conhecida como *simetria*; (b) o favorecimento do triângulo equilátero (o mínimo de ρ é 2 e equivale ao triângulo equilátero); (c) a não-correlação com a área do triângulo; e (d) a não-correlação com os ângulos internos mínimo e máximo, como ilustra a Figura 3.2. Neste trabalho, ρ é normalizada no intervalo fechado $[0, 1]$, onde $\rho = 2r/R$ e o triângulo equilátero tem qualidade 1.

3.3 A Qualidade da Malha Gerada pelo Marching Cubes

Nesta seção são propostas duas abordagens para o estudo da qualidade das malhas geradas pelo MC. O objetivo destas abordagens é compreender *onde* e *como* os triângulos de baixa qualidade são gerados, e fornecer a base para a proposta de modificações no algoritmo.

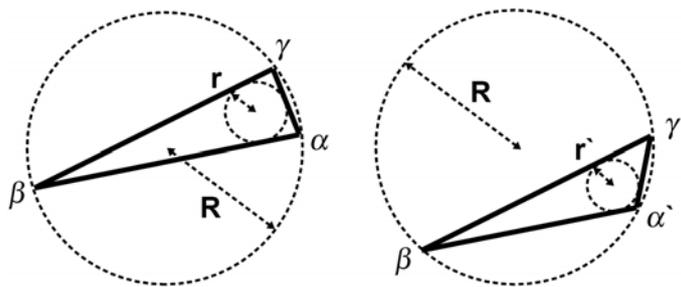


Figura 3.2: Comparação entre a razão entre os raios do triângulo e os ângulos internos mínimo e máximo. Ainda que o ângulo interno mínimo (ilustrado por β) seja o mesmo em ambos os triângulos, assim como o raio R , a razão entre os raios (ρ) é diferente devido a mudança no raio r .

A primeira abordagem estuda o modo como a isosuperfície intersecciona a célula. Esta abordagem auxilia na compreensão de como a orientação da isosuperfície em relação a célula influi na qualidade final dos triângulos, e é discutida na Seção 3.3.1.

A segunda abordagem estuda o modo como cada triângulo é construído dentro de cada célula, e é discutida na Seção 3.3.2. Esta abordagem é baseada na observação de que o MC gera diferentes *tipos* de triângulos, e que cada tipo de triângulo tem diferentes características. O resultado deste estudo é a proposta dos *Grupos de Arestas*, que permitem identificar *onde* e *como* a célula gera triângulos de baixa qualidade. Ainda que a discussão seja focada no MC, as duas abordagens também podem ser estendidas para alguns métodos de poligonização baseados em subdivisão espacial, como as variantes do MC (PAYNE; TOGA, 1990) (CARR; THEUSSL; MÖLLER, 2003).

3.3.1 Análise da Qualidade da Malha Gerada pela Célula

A forma dos triângulos gerados pelo MC varia de acordo com a intersecção entre a isosuperfície e a célula. Pequenas variações na orientação da isosuperfície em relação a célula podem resultar em grandes variações na qualidade da malha, como ilustra a Figura 3.3.

A Figura 3.3 assume uma simplificação do comportamento local da isosuperfície, que é representada por um plano, e que ainda assim deixa infinitas orientações a serem estudadas. Ainda que o estudo de todas as orientações possíveis (e todos os possíveis comportamentos locais da isosuperfície) seja inviável, a intuição sobre esta relação mostra que apenas um pequeno subconjunto destas combinações é responsável pela geração de triângulos de baixa qualidade.

Esta intuição emerge da análise das malhas geradas pelo MC. Os histogramas de qualidade dessas malhas, como ilustrado na Figura 3.4, mostram que o número de triângulos de baixa qualidade é pequeno em relação ao número total de triângulos. Esta característica motivou (e tem motivado) a proposta de métodos que buscam entender como os triângulos de baixa qualidade são gerados (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007).

Seguindo esta motivação, nesta seção é proposta uma abordagem que permite estudar a relação entre a isosuperfície e a célula. Esta abordagem permite visualizar as situações onde a malha gerada tem baixa qualidade, e auxilia no estudo e na compreensão de como

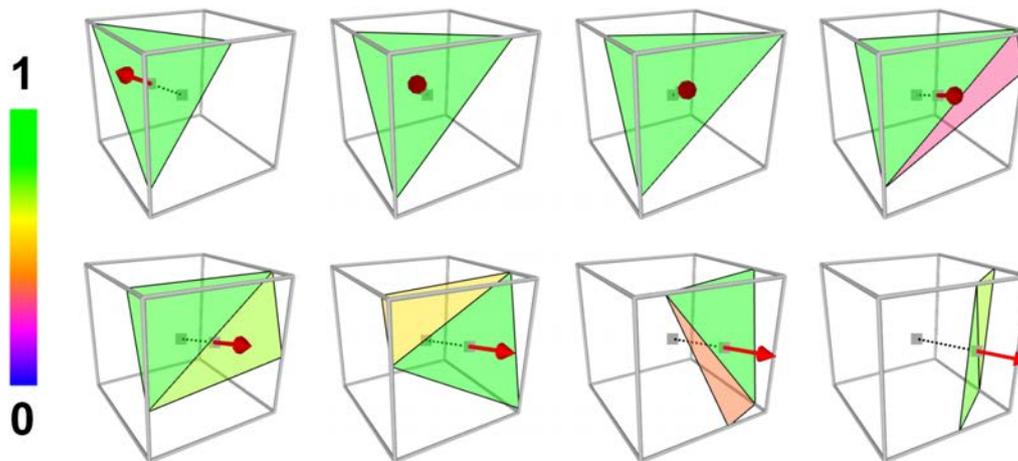


Figura 3.3: Exemplos de malhas resultantes da poligonização de isosuperfícies planas. A isosuperfície é definida como o plano que passa pela origem da seta (ilustrada em vermelho) e perpendicular a direção do segmento de reta formado entre a origem da seta e o centro da célula. A cor de cada triângulo é determinada pela sua qualidade, medida com a razão entre os raios (ρ) e mapeada segundo o mapa de cores mostrado à esquerda. Ainda que o comportamento da isosuperfície seja simples (planar), pequenas variações na sua orientação em relação a célula podem resultar em grandes variações na qualidade da malha gerada.

a forma da célula e a orientação da isosuperfície influenciam na qualidade dos triângulos.

O objetivo do método proposto nesta seção é calcular e apresentar de forma compreensível o resultado de todas as possíveis intersecções entre uma isosuperfície *planar* e a célula. A simplificação do comportamento local da isosuperfície, embora limite o alcance da análise a um conjunto particular de situações, não foge às condições que são assumidas no uso do MC. Na prática, o MC é usado em situações onde o tamanho da célula é suficientemente pequeno para assumir que o comportamento da isosuperfície é suave no interior da célula.

O cálculo do resultado de todas as possíveis intersecções entre uma isosuperfície planar e a célula inicia com a associação de um ponto no espaço ao redor da célula à cada isosuperfície planar. Cada ponto p no espaço é associado a um plano H . H é definido como o plano que passa por p e é perpendicular a direção do vetor formado entre p e o centro da célula, como ilustra a Figura 3.5. Neste contexto, H representa uma isosuperfície, e a associação entre o plano e o ponto é denotada por $H(p)$.

A partir de $H(p)$, os valores da função f nos vértices da célula são modulados de forma que a malha resultante da poligonização da célula seja coplanar a $H(p)$. (Neste trabalho, o valor de f nos vértices da célula é definido como a distância do vértice a $H(p)$). Após a definição do valor de f nos vértices da célula, o MC é executado para gerar o conjunto de triângulos $T(p)$ que representa a intersecção entre a isosuperfície com orientação $H(p)$ e a célula, como é ilustrado na Figura 3.5.

A qualidade de $T(p)$ é então calculada e associada ao ponto p . O mapeamento de cada ponto p para um valor de qualidade (passando pelo plano $H(p)$ e pelo conjunto de triângulos $T(p)$) é usado para definir um campo escalar Q em \mathbb{R}^3 . A visualização do campo Q mostra, como ilustra a Figura 3.6, a distribuição dos pontos que geram malhas de baixa qualidade dentro e ao redor da célula.

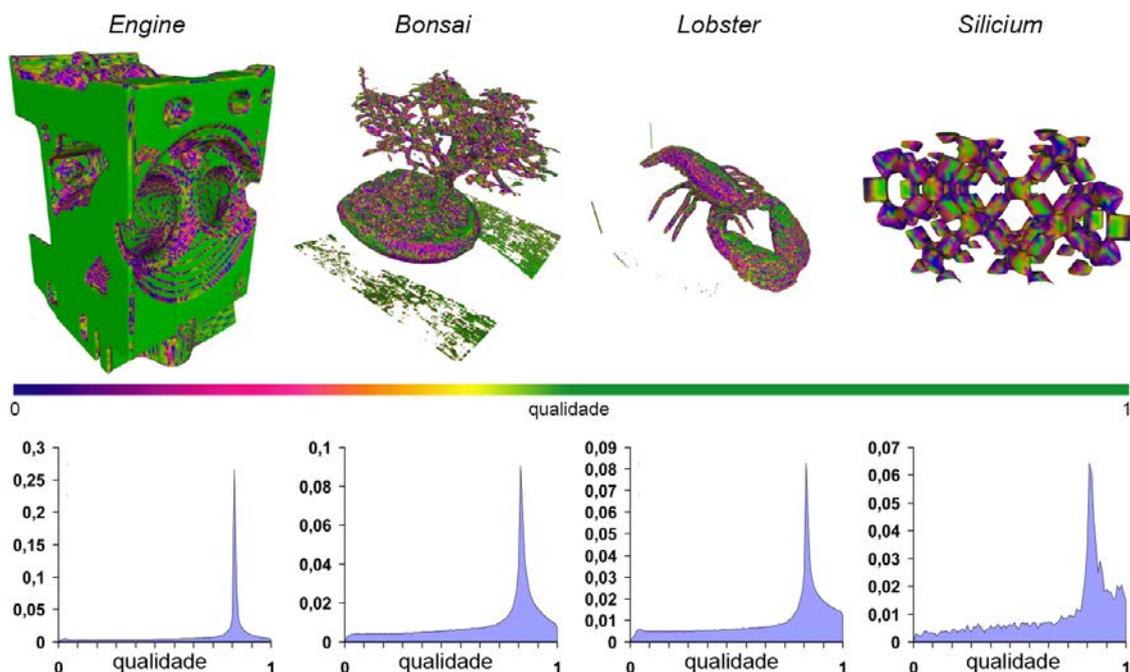


Figura 3.4: Qualidade dos triângulos gerados pelo MC a partir dos conjuntos de dados *Engine*, *Bonsai*, *Lobster* e *Silicium*. A primeira linha da figura ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade do pior triângulo incidente ao vértice, medida com a razão entre os raios (ρ) e mapeada segundo o mapa de cores mostrado abaixo das malhas. A segunda linha ilustra os histogramas de qualidade dos triângulos das malhas. Os histogramas mostram que o número de triângulos de baixa qualidade é pequeno em relação ao número total de triângulos.

No caso de células tetraédricas (PAYNE; TOGA, 1990) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) o teste contra isosuperfícies planares captura todos os casos representativos do método. Esta situação não se repete no MC e no Marching Octahedra, que têm células com formatos mais complexos. Ainda assim, para efeitos de análise, planos podem ser considerados boas aproximações do comportamento da isosuperfície no interior da célula no MC. Esta simplificação também possibilita a definição de Q a partir de três parâmetros (posição do ponto p em \mathbb{R}^3), e torna a análise independente da curvatura da isosuperfície.

A visualização do campo Q mostra uma estrutura clara na posição dos pontos que geram malhas de baixa qualidade. As malhas de boa qualidade são criadas a partir de pontos próximos aos vértices da célula, onde o recorte da isosuperfície resulta em um triângulo aproximadamente equilátero. A maior parte dos pontos gerados dá origem a malhas de boa qualidade, como pode ser observado na Figura 3.7. Esta observação também motiva a conjectura de que o MC gera poucos triângulos de baixa qualidade em relação ao número total de triângulos da malha.

Os pontos que correspondem a malhas de baixa qualidade são gerados a partir do centro da célula, em direção ao ponto médio das arestas. Ainda que a visualização de Q não evidencie o modo como estes triângulos são gerados, ou seja, o modo como os vértices são conectados no interior da célula, a visualização permite a conjectura de que malhas de baixa qualidade são geradas em situações onde a isosuperfície é *paralela* e *próxima* a uma das arestas da célula.

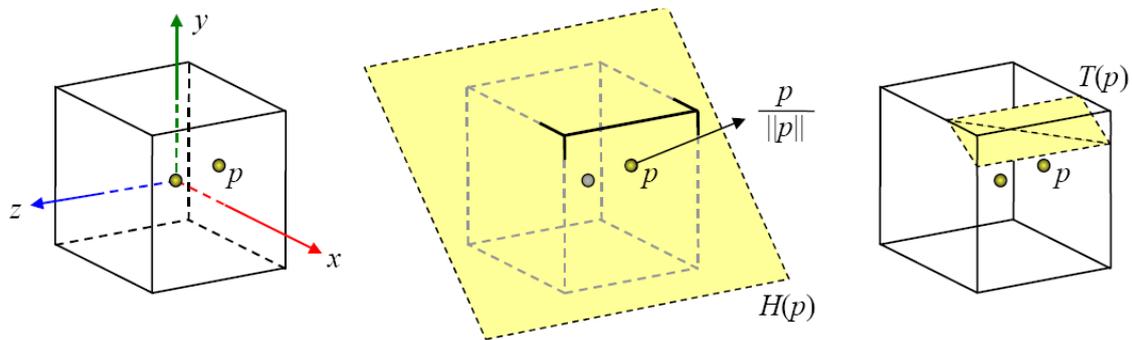


Figura 3.5: Mapeamento entre um ponto em \mathbb{R}^3 e um valor de qualidade. Dada uma célula centrada na origem e um ponto p , define-se o plano H que passa por p e é ortogonal a $p/\|p\|$. O plano H representa uma isosuperfície, que é poligonizada e gera a malha de triângulos $T(p)$. A qualidade da malha de triângulos $T(p)$ é então associada a p . Este procedimento permite a construção de um campo escalar Q que codifica a qualidade de todas as possíveis intersecções entre uma isosuperfície planar e a célula.

A Figura 3.7 mostra que os padrões observados são consistentes nos tetraedros, onde os pontos responsáveis pela geração de triângulos de baixa qualidade também emergem do centro da célula em direção ao ponto médio de suas arestas. A compreensão da estrutura formada pelos pontos correspondentes a malhas de baixa qualidade pode ser complementada através da visualização direta de Q , como ilustra a Figura 3.8. A Figura 3.8 mostra a distribuição dos valores de qualidade (medida através da razão entre os raios) na célula cúbica e no tetraedro resultante da triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (ou simplesmente Kuhn) (MOORE, 1992), onde o mapeamento de cores foi modificado para permitir a visualização dos pontos responsáveis pela geração de triângulos de baixa qualidade.

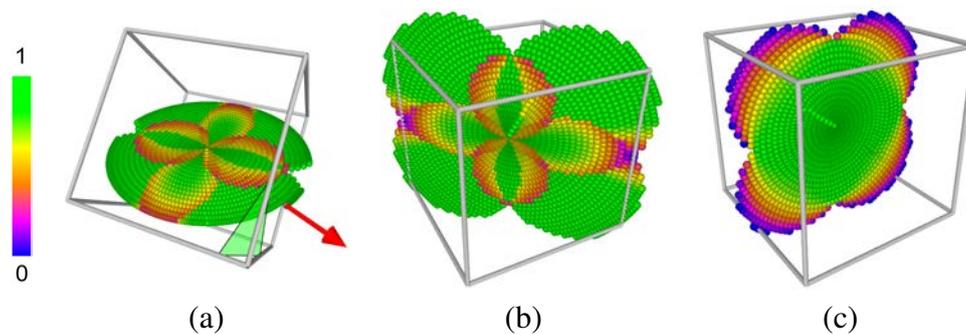


Figura 3.6: Exemplos da construção (a) e visualização (b, c) do campo de qualidade Q . A figura (a) mostra a construção de Q , onde o ponto na base da seta vermelha dá origem ao triângulo ilustrado na célula. A qualidade (razão entre os raios) do triângulo é calculada, mapeada para uma cor segundo a tabela de cores ilustrada à esquerda e atribuída ao ponto. As figuras (b) e (c) ilustram duas fatias de Q . As fatias mostram que malhas de baixa qualidade são geradas por pontos próximos ao ponto médio das arestas, que representam isosuperfícies próximas e aproximadamente paralelas à uma das arestas da célula.

Ainda que a estrutura de Q na Figura 3.8 seja resultante da formulação do mapeamento que associa uma isosuperfície a cada ponto no espaço, ela permite reforçar a observação de que os triângulos de baixa qualidade são gerados por pontos que estão próximos

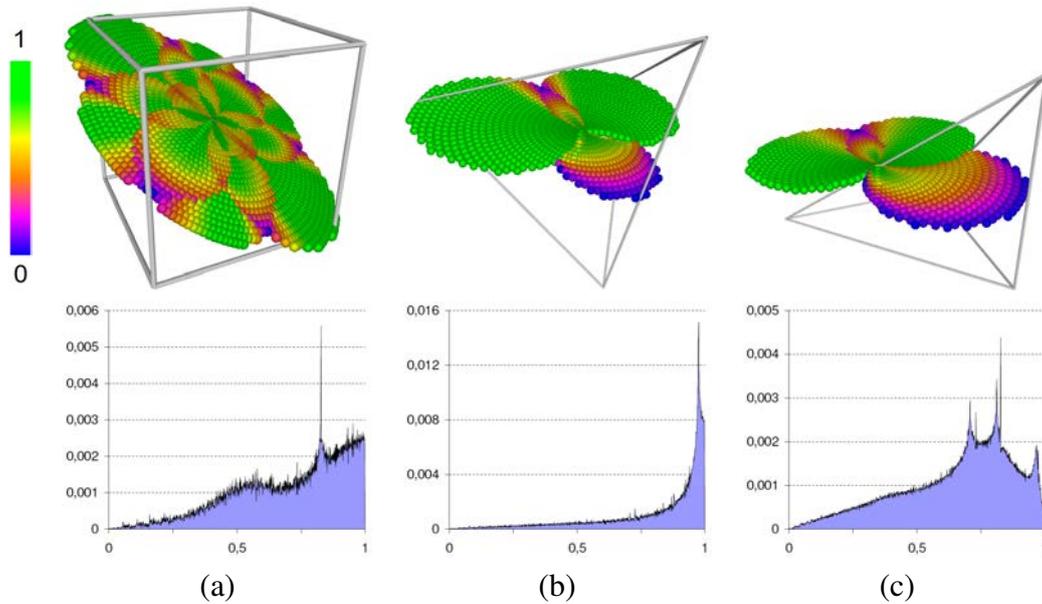


Figura 3.7: Visualização de fatias e histogramas do campo de qualidade q de uma célula cúbica (a), de um tetraedro regular (b) e de um tetraedro resultante da triangulação de Kuhn. A qualidade (razão entre os raios) dos triângulos gerados por cada ponto, visualizada através do mapeamento de cores segundo o mapa mostrado à esquerda, mostra que as malhas de baixa qualidade são geradas em posições onde uma aresta da célula é próxima e aproximadamente paralela à isosuperfície, ou seja, em pontos próximos ao ponto médio das arestas da célula.

ao ponto médio das arestas das células. A transparência usada no mapeamento de cores também permite observar que a maior parte das malhas geradas têm boa qualidade, principalmente quando os pontos estão entre o centro e os vértices da célula, onde a malha resultante é formada por um único triângulo (aproximadamente) equilátero. O padrão no posicionamento dos pontos que resultam em malhas de baixa qualidade, em especial, é um ponto chave neste trabalho, pois permite a conjectura de que *arestas próximas e paralelas à isosuperfície estão correlacionadas a malhas de baixa qualidade*. Esta observação motiva e conduz às modificações do MC, e as suas conseqüências são discutidas no Capítulo 4.

3.3.2 Análise da Qualidade de Cada Triângulo Gerado pela Célula

A análise discutida na seção anterior é voltada ao *formato* da célula. Basicamente, é proposto o teste de várias isosuperfícies planares contra a célula, e o estudo é focado em situações onde as malhas de baixa qualidade são geradas. O uso de planos para representar o comportamento local da isosuperfície não é suficiente para testar todos os tipos de intersecção entre a célula e a isosuperfície, no entanto, e outros fatores (como a curvatura da isosuperfície no interior da célula) também podem interferir na qualidade da malha gerada. Baseado nestas considerações, nesta seção é proposta uma análise do modo como cada triângulo é gerado.

A abordagem descrita nesta seção é baseada na suposição de que o MC gera *tipos* diferentes de triângulos. O tipo de um triângulo é dado pelas características das três arestas que geram os vértices do triângulo, como é ilustrado na Figura 3.9. Cada grupo de três arestas

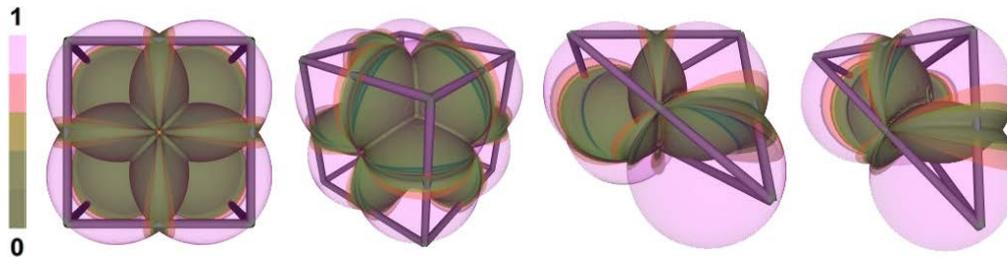


Figura 3.8: Visualização volumétrica direta do campo de qualidade Q . A cor de cada ponto é determinada pela qualidade (razão entre os raios) da malha de triângulos associada ao ponto, mapeada para um vetor de cor segundo a tabela ilustrada à esquerda. A estrutura dos pontos responsáveis pela geração de malhas de baixa qualidade pode ser reconhecida em todas as imagens, assim como a sua relação com o ponto médio das arestas das células.

responsável pela geração de um triângulo é chamado de *Grupo de Arestas*. A apresentação dos grupos de arestas inicia com a discussão sobre as dificuldades em relacionar os parâmetros envolvidos na geração da malha à qualidade da malha resultante.

A proposta do MC foi revolucionária por evidenciar a simplicidade da célula resultante da grade uniforme (cúbica). A uniformidade da célula, aliada a restrição de gerar vértices apenas ao longo das arestas, tornou possível a codificação de todas as conexões entre os vértices de intersecção em uma tabela de triangulações. Ainda que o método original possuía casos topologicamente ambíguos (NING; BLOOMENTHAL, 1993), a elegância desta observação foi essencial para o sucesso do MC.

A célula cúbica não é simples, no entanto, quando o objetivo é compreender a qualidade dos triângulos gerados no seu interior. Ainda que a análise descrita na Seção 3.3.1 mostre efetivamente alguns casos onde malhas de baixa qualidade são geradas, o mapeamento entre pontos e qualidades não traz informações sobre a forma dos triângulos ou sobre quantos triângulos de baixa qualidade são gerados.

A dificuldade em entender a qualidade da malha gerada na célula está no número de parâmetros envolvidos na criação da malha. Cada célula pode gerar até cinco triângulos (segundo a tabela original do MC), onde a qualidade de cada triângulo é determinada pela posição dos vértices de intersecção ao longo das arestas da célula. Pode-se dizer, assim, que a qualidade da malha é dependente das coordenadas dos vértices de intersecção.

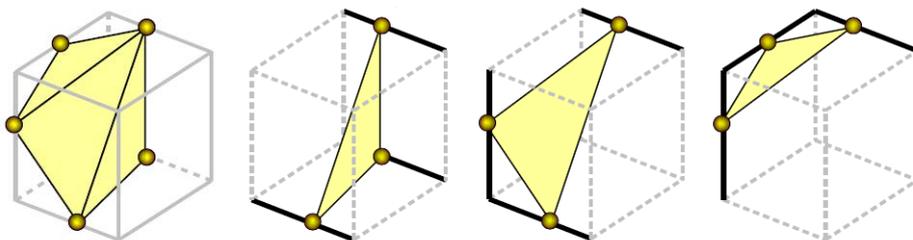


Figura 3.9: Decomposição de um caso representativo do MC em grupos de arestas. O tipo de cada triângulo é dado pelas características das três arestas que geram os vértices do triângulo, e o estudo destas características pode auxiliar na compreensão da qualidade dos triângulos gerados pelo MC.

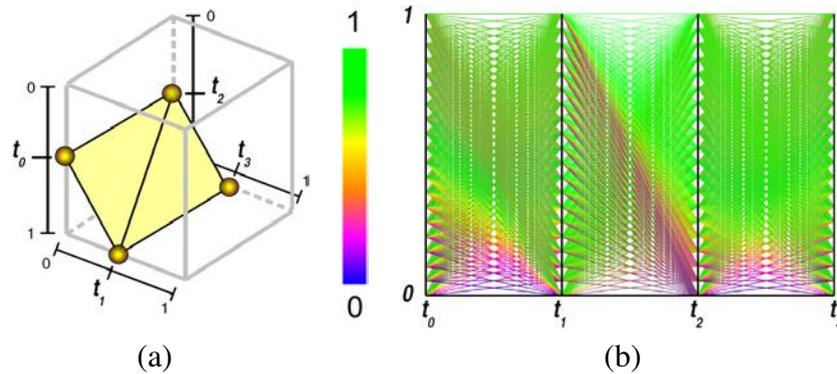


Figura 3.10: Visualização do espaço de parâmetros gerado pelos pontos de intersecção $t_0...t_3$ (a) em coordenadas paralelas. A qualidade da malha (razão entre os raios) gerada por cada combinação de parâmetros é mapeada para a cor da linha, de acordo com o mapa de cores ilustrado à esquerda. Ainda que alguns padrões possam ser identificados na análise de (b), pode ser difícil compreender a relação entre a posição de cada vértice de intersecção e a qualidade da malha gerada.

Os vértices de intersecção são comumente representados em \mathbb{R}^3 . Assumindo que cada vértice é gerado ao longo de uma aresta, também é possível representar o vértice por um parâmetro que indica a sua posição ao longo da aresta onde é gerado (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Cada vértice de intersecção v_i é especificado por um parâmetro t_i , que indica a sua posição ao longo da aresta orientada. O parâmetro t_i varia dentro do intervalo $[0, 1]$, onde a orientação da aresta é definida arbitrariamente, sem perda de generalidade. Em uma célula cúbica, a qualidade da malha gerada pode ser definida como uma função $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que mapeia a posição de n pontos de intersecção, onde n varia de três a doze (o número de arestas ativas de uma célula cúbica) na qualidade da triangulação dos vértices de intersecção. A visualização do comportamento de q pode recorrer a técnicas especializadas na visualização de informações multidimensionais, como a técnica de Coordenadas Paralelas (INSELBERG; DIMSDALE, 1990), por exemplo, ilustrada na Figura 3.10. A análise de um espaço de parâmetros com um grande número de dimensões (até doze dimensões para o MC), no entanto, pode ser complexa (LABELLE; SHEWCHUK, 2007).

A Figura 3.10 mostra que mesmo para um caso simples, com quatro pontos de intersecção e dois triângulos, pode ser difícil compreender como a mudança de um único parâmetro afeta a qualidade da malha de triângulos. Esta dificuldade pode ser contornada se a dimensionalidade do espaço de análise for reduzida, quer dizer, se o esforço da análise for concentrado no modo como *cada triângulo* é gerado no interior da célula.

A análise focada no triângulo ao invés da malha mostra que o MC gera diferentes *tipos* de triângulos. O tipo de cada triângulo é determinado pela *posição das arestas* que geram os vértices do triângulo.

A Figura 3.9 ilustra a decomposição da malha gerada no interior da célula em três tipos de triângulos. Cada tipo de triângulo possui propriedades únicas, determinadas pela posição das arestas que geram seus vértices. Esta observação motiva o estudo das propriedades relacionadas a cada grupo de arestas responsável pela geração dos triângulos do MC. Neste trabalho, estes grupos são chamados de *Grupos de Arestas*, definidos como tuplas de arestas do tipo (e_0, e_1, e_2) .

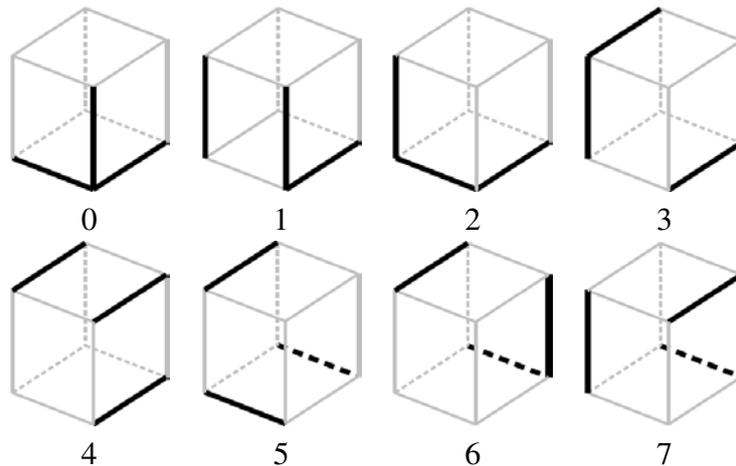


Figura 3.11: Os 8 grupos de arestas que podem ser observados na tabela de triangulações da implementação de Bourke, que abrangem todos os possíveis grupos de arestas ativas capazes de gerar triângulos no interior da célula cúbica.

Os triângulos gerados pelo MC podem ser categorizados em oito grupos de arestas, como ilustra a Figura 3.11. Os grupos de arestas encontrados na tabela de triangulações dependem do modo como é realizada a triangulação de cada caso representativo do MC. A tabela de triangulações define os grupos de arestas que são encontrados no método, já que as conexões entre os vértices de intersecção definem as arestas que são responsáveis pela geração de cada triângulo. Os grupos ilustrados na Figura 3.11 são encontrados na tabela de triangulações da implementação de Bourke (2008). Esta tabela contém uma variante topológica do caso 6 do MC, onde ocorrem os grupos de arestas 5 e 6 ilustrados na Figura 3.11. Os grupos de arestas encontrados na tabela de triangulações de Lorensen e Cline (1987) são ilustrados na Figura 3.12, e exemplificados sobre os casos representativos na Figura 3.13.

A determinação dos grupos de arestas leva em conta as simetrias da célula cúbica, assim como a determinação dos casos representativos do MC. As simetrias permitem a redução de todos os grupos que geram triângulos em qualquer tabela de triangulações do MC aos oito grupos ilustrados na Figura 3.11. Estas simetrias são facilmente consideradas no cubo, onde todas as arestas têm o mesmo tamanho e ângulos retos entre si. Os grupos de arestas são simétricos (ou equivalentes) se um pode ser transformado no outro através de rotações ou reflexões. O Apêndice A discute as simetrias da célula cúbica e as operações que reduzem os grupos de arestas da célula cúbica para apenas oito ocorrências distintas.

O efeito imediato da análise dos grupos de arestas em relação à análise da célula é a redução da dimensionalidade do espaço de parâmetros. Considerando apenas três arestas em cada análise, o grupo de arestas gera um espaço tridimensional $q(t_0, t_1, t_2)$, que pode ser analisado (e visualizado) diretamente. A Figura 3.14 mostra a visualização do espaço de parâmetros q dos grupos de arestas ilustrados na Figura 3.11, assim como os limites mínimo e máximo de qualidade medidos experimentalmente.

A qualidade de um grupo de arestas é definida como a qualidade do pior triângulo gerado pelo grupo de arestas. O cálculo da qualidade pode ser realizado através de uma busca na imagem da função $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, que toma como entrada os três pontos de intersecção gerados pelo grupo de arestas. Para o grupo de arestas ilustrado na Figura 3.15, por exemplo, as três arestas geram os vértices de intersecção

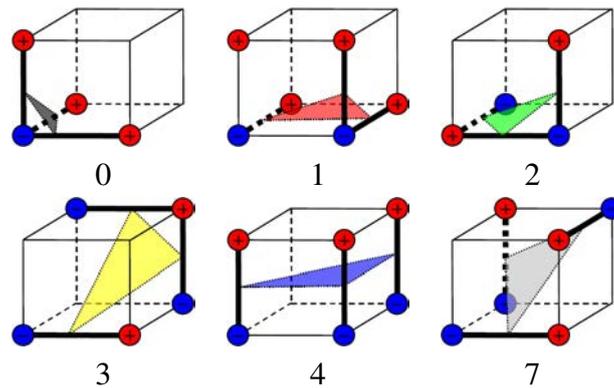


Figura 3.12: Grupos de arestas encontrados na análise da tabela de triangulações do MC. A representação dos grupos foi alterada em relação à representação usada neste trabalho para facilitar a comparação com a tabela de triangulações ilustrada no artigo de Lorensen e Cline.

$$\begin{aligned}
 c_0 &= p_0 + t_0(p_3 - p_0) \\
 c_1 &= p_0 + t_1(p_1 - p_0) \\
 c_2 &= p_4 + t_2(p_5 - p_4).
 \end{aligned}$$

Cada vetor (i, j, k) no espaço de parâmetros de q gerado por t_0 , t_1 e t_2 , respectivamente, corresponde a um triângulo definido entre os vértices c_0 , c_1 e c_2 , respectivamente. O valor de qualidade de (i, j, k) é calculado através da geração explícita dos pontos de intersecção c_0 , c_1 e c_2 , e do cálculo da qualidade do triângulo resultante. Desta forma, cada ponto do espaço de parâmetros de q pode ser mapeado para um valor de qualidade, o que permite a construção de um espaço escalar que pode ser visualizado e analisado para a busca dos limites mínimo e máximo de qualidade.

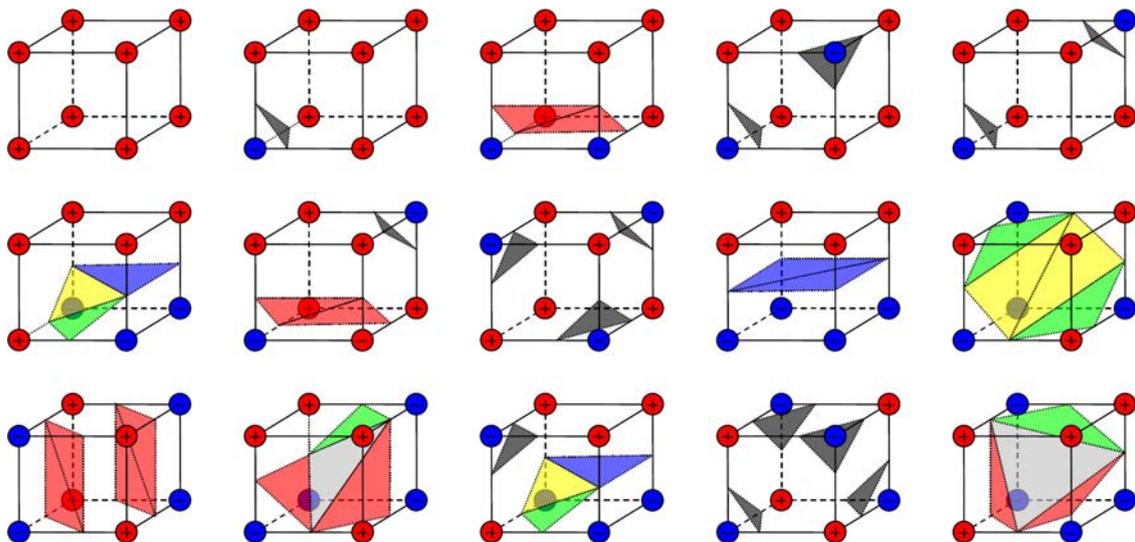


Figura 3.13: Ilustração dos grupos de arestas do MC sobre a tabela de triangulações dos casos representativos. A cor de cada triângulo é dada pelo grupo de arestas que dá origem ao mesmo, de acordo com o mapa de cores usado na Figura 3.12.

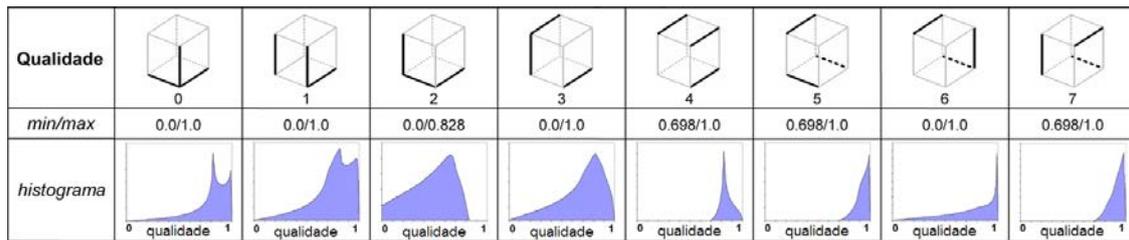


Figura 3.14: Análise da qualidade (medida com a razão entre os raios dos grupos de arestas da célula cúbica). Os histogramas de qualidade são gerados através da amostragem uniforme do espaço q , o que também permite calcular os limites máximo e mínimo de qualidade de cada grupo de arestas. A figura mostra que, ainda que o menor valor de qualidade dos grupos 0, 1, 2, 3 e 6 indique que o grupo pode produzir triângulos degenerados, a maior parte dos triângulos gerados têm boa qualidade.

A análise dos grupos de arestas também pode ser estendida para qualquer método de poligonização que gere vértices de intersecção (somente) sobre as arestas da célula. Esta restrição delimita a análise aos métodos derivados do MC, como o Marching Tetrahedra (BLOOMENTHAL, 1988) (PAYNE; TOGA, 1990) e o Marching Octahedra (CARR; THEUSS; MÖLLER, 2003). No Marching Tetrahedra, em especial, a análise é restrita a poligonizadores que são baseados em subdivisões regulares, como as grades resultantes da triangulação de Delaunay de uma grade BCC (*Body Centered Cubic*) e da triangulação de Kuhn (MOORE, 1992) de células cúbicas.

As Figuras 3.16 e 3.17 ilustram a análise dos grupos de arestas dos tetraedros BCC e Kuhn. A busca pelos grupos de arestas representativos dos tetraedros foi realizada através da análise de todas as combinações possíveis entre arestas ativas e das simetrias entre as combinações. Em relação à análise da célula cúbica, no entanto, é necessário observar os diferentes tamanhos de arestas e ângulos entre arestas encontrados nos tetraedros.

A análise dos tetraedros mostra que o aspecto alongado do tetraedro de Kuhn em relação ao tetraedro BCC resulta em uma alta probabilidade de geração de triângulos de baixa qualidade. Ainda que esta observação seja intuitiva, ela vai ao encontro das conclusões de Labelle e Shewchuk (2007) sobre o bom desempenho do tetraedro BCC na geração de malhas de boa qualidade.

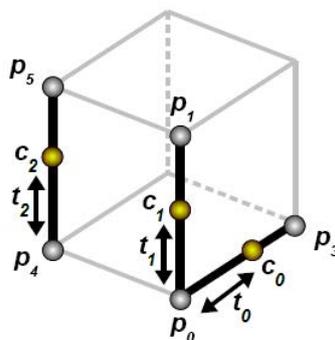


Figura 3.15: Representação dos vértices de intersecção c_0 , c_1 e c_2 através dos parâmetros t_0 , t_1 e t_2 , respectivamente.

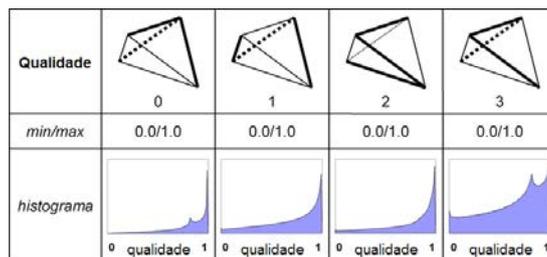


Figura 3.16: Análise dos grupos de arestas do tetraedro resultante da triangulação de Delaunay de uma grade BCC. A alta qualidade destes tetraedros na geração de malhas, como observado por Labelle e Shewchuk, é realçada pelo aspecto dos histogramas de qualidade.

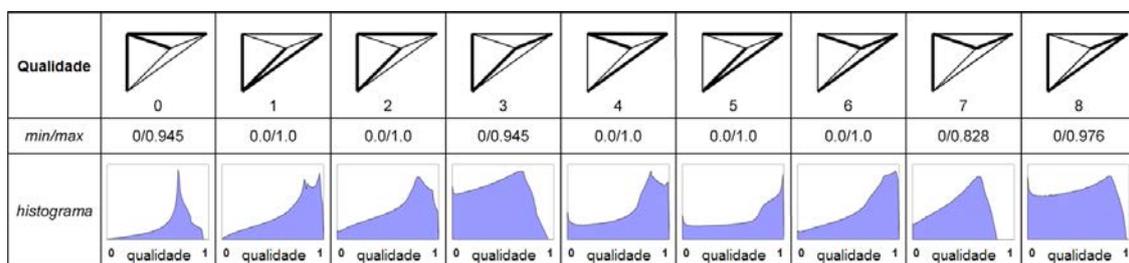


Figura 3.17: Análise dos grupos de arestas do tetraedro resultante da triangulação de Kuhn de células cúbicas. O aspecto alongado destes tetraedros, resultante do método de subdivisão do cubo, leva ao aumento da probabilidade de geração de triângulos de baixa qualidade, como pode ser observado nos histogramas de qualidade.

3.4 Discussão

As duas abordagens propostas neste capítulo para o estudo da qualidade da malha do MC foram projetadas com o mesmo objetivo, ou seja, compreender *onde* e *como* os triângulos de baixa qualidade são gerados. A primeira abordagem é intuitiva, ao observar como o posicionamento da isosuperfície em relação à célula interfere na qualidade dos triângulos. Ainda que a isosuperfície seja simplificada para um comportamento localmente planar, e que esta suposição seja suportada apenas por um subconjunto das situações encontradas na prática, esta abordagem resulta em algumas observações válidas sobre o modo como os triângulos de baixa qualidade são gerados. A primeira observação é relacionada ao fato de que o MC gera um número pequeno de triângulos de baixa qualidade em relação ao número total de triângulos da malha. Esta observação é discutida na Seção 3.4.1. A segunda observação é relacionada ao posicionamento da aresta em relação à isosuperfície, e nas implicações deste posicionamento sobre a qualidade dos triângulos gerados. Esta observação é discutida na Seção 3.4.2.

O principal resultado deste Capítulo é, no entanto, a proposta dos *Grupos de Arestas*. Os grupos de arestas oferecem uma nova visão sobre o funcionamento do MC, e revelam o sucesso do algoritmo na geração de malhas de boa qualidade.

Os grupos de arestas permitem o estudo do modo como cada triângulo é gerado. A Figura 3.14 mostra alguns dados extraídos de cada grupo, que revelam o comportamento dos grupos na geração de triângulos de boa qualidade. Os grupos de arestas 4, 5 e 7 não produzem nenhum triângulo de baixa qualidade, por exemplo, e compartilham os mesmos

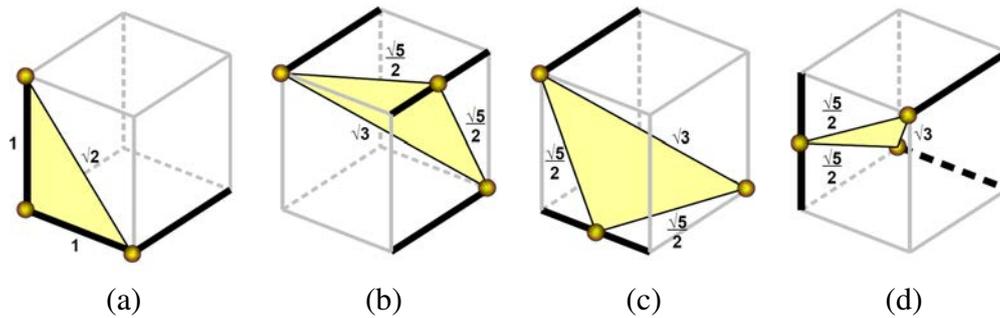


Figura 3.18: Triângulos responsáveis pelo limite superior de qualidade do grupo 2 (a) e pelos limites inferiores de qualidade do grupo 4 (b), 5 (c) e 7 (d). Os tamanhos das arestas (considerando um cubo unitário) são indicados ao redor dos triângulos.

valores mínimo e máximo de qualidade. Estes valores são gerados pelo *mesmo* triângulo, como é ilustrado na Figura 3.18

O grupo de arestas 2, em particular, não gera triângulos ótimos (equiláteros). Além disto, o grupo 2 tem uma chance maior de gerar triângulos degenerados, como ilustra a Figura 3.19. A característica que diferencia este grupo dos demais é o *número de conexões* entre as suas arestas. Cada conexão entre duas arestas permite a geração de dois vértices de intersecção próximos, o que resulta em um triângulo com pelo menos um ângulo interno próximo a 0° (Figura 3.19 (a)). No caso do grupo de arestas 2, as duas conexões permitem a geração de dois vértices próximos à aresta definida entre as conexões, o que resulta em um triângulo com pelo menos um ângulo interno próximo a 180° ou 0° (Figura 3.19 (b)). Esta característica motiva a proposta de um método que resolva as conexões entre as arestas. A conexão pode ser resolvida através do deslocamento das extremidades das arestas, por exemplo, ou ainda pela remoção do grupo de arestas 2 da tabela de conexões do MC, através da modificação das conexões que definem os triângulos em cada caso da tabela. As duas propostas são exploradas neste trabalho e discutidas no Capítulo 4.

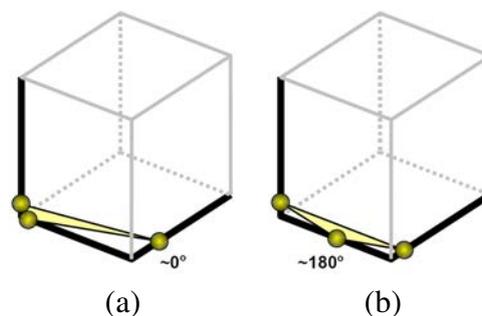


Figura 3.19: Grupo de arestas 2 e os tipos de triângulos degenerados que resultam das conexões entre as suas arestas. O triângulo do tipo *agulha* (triângulo que possui um ângulo interno próximo a 0°), ilustrado em (a), surge quando uma das conexões está próxima à isosuperfície. O triângulo do tipo *achatado* (triângulo que possui um ângulo interno próximo a 180°), ilustrado em (b), surge quando as duas conexões estão próximas à isosuperfície, ou seja, quando uma aresta ativa é aproximadamente paralela à isosuperfície.

3.4.1 O Percentual de Triângulos de Baixa Qualidade

As duas análises discutidas neste capítulo mostram que o MC gera um percentual pequeno de triângulos de baixa qualidade. Ainda que esta característica esteja ligada ao modo como a isosuperfície intersecciona a célula, a análise experimental (ilustrada na Figura 3.4) e as análises de qualidade (principalmente os histogramas dos grupos de arestas) mostram que esta característica é realmente acentuada nas malhas geradas pelo MC. Ainda que simples e intuitiva, esta observação revela como a modificação do MC para a melhora da qualidade da malha gerada pode ser uma possibilidade interessante: o conjunto de situações que devem ser resolvidas é potencialmente pequeno e emerge de algumas relações específicas entre a isosuperfície e a célula.

3.4.2 O Posicionamento das Arestas em Relação a Isosuperfície

As duas abordagens propostas neste capítulo mostram, ainda que sobre pontos de vista diferentes, que o posicionamento das arestas da célula em relação à isosuperfície é determinante na qualidade da malha. A primeira abordagem mostra que malhas de baixa qualidade são geradas quando a isosuperfície é *próxima e aproximadamente paralela* a uma das arestas da célula. A segunda abordagem mostra que malhas de baixa qualidade são geradas quando a intersecção entre a isosuperfície e as arestas ativas é próxima ao vértice comum entre duas arestas. As duas conclusões, na verdade, têm uma ligação bastante intuitiva. Quando a isosuperfície é próxima e paralela a uma aresta da célula, seja esta aresta ativa ou não, as intersecções geradas nas arestas vizinhas são próximas aos vértices compartilhados entre estas arestas. Esta característica é ilustrada na Figura 3.3.

A análise do posicionamento das arestas ativas em relação à isosuperfície também mostra que malhas de boa qualidade são geradas em situações onde as arestas estão *perpendiculares* à isosuperfície. Novamente, esta observação está ligada com a observação de que triângulos de baixa qualidade são gerados quando os vértices de intersecção estão próximos ao vértice comum a duas arestas ativas. Arestas perpendiculares a isosuperfície *maximizam a distância entre os seus extremos*, isto é, resolvem o problema encontrado nas conexões entre as arestas ativas. Esta característica é discutida no Capítulo 4, e serve como base para a proposta das modificações que melhoram a qualidade da malha extraída pelo MC.

4 A MODIFICAÇÃO DO ALGORITMO *MARCHING CUBES*

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta as modificações propostas no MC. O objetivo das modificações é melhorar a qualidade da malha gerada e ainda manter a simplicidade, eficiência e robustez do algoritmo original. Este objetivo é alcançado através da análise das observações realizadas no estudo da qualidade da malha gerada pelo MC. A análise resulta na proposta de três modificações, sendo elas: (1) a modificação da tabela de triangulações do MC, (2) a deformação da grade do MC e (3) o deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas.

A mudança na tabela de triangulações do MC é baseada no estudo das propriedades dos grupos de arestas. O estudo resulta na proposta de um critério que auxilia na escolha da triangulação com maior probabilidade de gerar triângulos de boa qualidade em cada caso do MC. O critério é simples e intuitivo, e aumenta a probabilidade do algoritmo gerar malhas de boa qualidade. A proposta e a implementação do critério são discutidas na Seção 4.2.

A deformação da grade do MC é baseada nas propostas de Bern, Eppstein e Gilbert (1994), Tzeng (2004), Labelle e Shewchuk (2007) e Raman e Wenger (2008). Neste trabalho, esta abordagem é motivada por duas observações simples, sendo elas: (1) o MC produz tanto triângulos de *boa* quanto *baixa* qualidade e (2) o número de triângulos de baixa qualidade é pequeno em relação ao total de triângulos gerados. Estas observações permitem supor que parte da grade do MC tem alguma propriedade que a torna capaz de gerar triângulos de boa qualidade, e que talvez esta propriedade possa ser estendida ao restante da grade. Além disso, o pequeno número de triângulos de baixa qualidade também permite supor que existem algumas situações específicas que levam à construção destes triângulos, e a sua baixa ocorrência pode permitir identificar quais são estas situações. Este raciocínio, aliado às observações realizadas no Capítulo 3, resulta na proposta das *Transformações de Arestas*, que são apresentadas na Seção 4.3.

O deslocamento dos vértices de intersecção é baseado na proposta de Raman e Wenger (2008). O movimento dos vértices ao longo das arestas ativas permite a melhora da qualidade da malha em regiões onde as outras modificações falham, como regiões de curvatura elevada, por exemplo, ainda que resulte no aumento do erro de aproximação (distância entre a malha gerada e a isosuperfície “real”). Além disto, o erro resultante do desloca-

mento dos vértices de intersecção pode ser limitado pelo usuário, ou seja, o usuário pode ter a oportunidade de controlar uma *troca* entre a qualidade de aproximação e a qualidade da malha. O deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas é discutido na Seção 4.4.

A adição das modificações propostas neste Capítulo ao MC resulta no algoritmo *Macet* (*MARching Cubes with Edge Transformations*)¹. A adição destes estágios não altera a implementação original do MC, não altera a topologia da malha, não tem impacto significativo sobre o custo computacional do algoritmo e também é ortogonal às otimizações propostas para o MC (ITOH; KOYAMADA, 1994) (LIVNAT; SHEN; JOHNSON, 1996) (DYKEN et al., 2007). Além disso, o ganho de qualidade obtido com o *Macet* é igual ou maior ao ganho obtido com os poligonizadores disponíveis atualmente (TZENG, 2004) (SCHREINER; SCHEIDEGGER; SILVA, 2006) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (RAMAN; WENGER, 2008).

4.2 A Mudança da Tabela de Conexões do Marching Cubes

A decomposição da célula cúbica em Grupos de Arestas permite a análise das condições em que cada triângulo é gerado no interior da célula. A análise, além de qualitativa, também pode quantificar a probabilidade de cada grupo gerar triângulos de baixa qualidade.

A análise quantitativa permite *ordenar* os grupos de arestas em relação a sua qualidade. A ordem entre os grupos de arestas permite estimar, por sua vez, quais grupos são potencialmente responsáveis pela geração dos triângulos de baixa qualidade. Esta possibilidade é interessante quando é associada ao fato de que os grupos de arestas observados em cada célula *são alterados de acordo com as mudanças nas conexões* entre os vértices de intersecção. No caso do MC, por exemplo, nove dos quinze casos representativos admitem triangulações alternativas, sem que a topologia da malha seja alterada, como ilustra a Figura 4.1. A ordem entre os grupos de arestas e a possibilidade de modificar os grupos de arestas de alguns casos do MC cria um ambiente onde é possível reduzir a probabilidade de uma determinada célula gerar triângulos de baixa qualidade, no qual a probabilidade é reduzida ao modificar a triangulação dos vértices de intersecção.

A Figura 4.1 mostra que existem alternativas às triangulações armazenadas na tabela do MC. Cada caso do MC que gera mais de três vértices de intersecção (conectados em um único retalho da isosuperfície) admite outras triangulações. O número de triangulações alternativas é dado em função do número de vértices de intersecção, que varia entre 4, 5 e 6, resultando em 2, 5 e 14 (respectivamente) triangulações possíveis. Esta característica é explorada neste trabalho para a construção de uma tabela de triangulações que reduza a probabilidade do MC gerar malhas de baixa qualidade.

A Figura 4.1 também mostra que a mudança na triangulação entre os vértices de intersecção pode alterar os grupos de arestas observados no interior da célula. Em algumas situações é possível escolher uma triangulação que resulte em grupos de aresta com menor chance de gerar triângulos de baixa qualidade, e aumentar a probabilidade da célula

¹ A primeira parte do algoritmo *Macet* foi originalmente proposta em Dietrich et al. (DIETRICH et al., 2008) e inclui apenas o procedimento de transformação de arestas, que motivou o nome do algoritmo; o papel das transformações de arestas no algoritmo atual ainda é decisivo, no entanto, e o nome original do algoritmo foi mantido neste trabalho

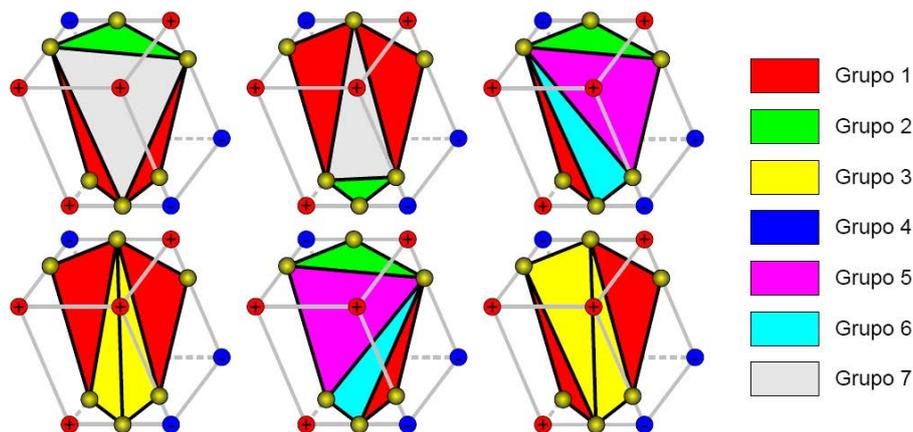


Figura 4.1: Exemplos de diferentes triangulações para um mesmo caso representativo da célula cúbica. O grupo de arestas responsável pela geração de cada triângulo é ilustrado através da tabela de cores (direita). A figura mostra que cada triangulação pode resultar em um conjunto diferente de grupos de arestas, e conseqüentemente em uma probabilidade diferente de gerar triângulos de boa qualidade. A mudança da triangulação não afeta, no entanto, a topologia do caso representativo, o que permite o uso desta abordagem em tabelas de desambiguação.

gerar malhas de boa qualidade. A escolha dos grupos de arestas adequados depende, no entanto, da análise da qualidade de cada grupo e da análise da dependência entre os grupos no interior da célula, ou simplesmente, das arestas compartilhadas entre os grupos definidos no interior da célula.

A dependência entre as arestas de diferentes grupos, por sua vez, exige que a análise da qualidade dos triângulos seja novamente realizada em um espaço de parâmetros com mais de três dimensões. Esta dificuldade motiva a análise de cada grupo isoladamente, com o objetivo de observar apenas as características do próprio grupo para determinar quais grupos devem ser evitados na escolha das triangulações. A Tabela 4.1 mostra uma ordenação possível entre os grupos de arestas, que considera a probabilidade de cada grupo gerar triângulos com razão entre os raios (ρ) inferior a 0.5.

O valor 0.5 em ρ para triângulos de baixa qualidade tem duas interpretações, sendo elas:

1. Em triângulos com um ângulo interno próximo de 0° (agulhas), o valor 0.5 corresponde a um ângulo interno mínimo de aproximadamente 16° ;
2. Em triângulos com um ângulo interno próximo a 180° (achatados), o valor 0.5 corresponde a um ângulo interno máximo de aproximadamente 117° .

Os ângulos 16° e 117° são as raízes da equação

$$\frac{x^2}{2} - 2x + 1 = 0,$$

obtida pela manipulação algébrica da equação

$$\rho = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{abc},$$

sob as condições $a = b = x$ e $\rho = 0.5$, onde γ (o ângulo no vértice C) é o ângulo de interesse e a , b e c são as arestas do triângulo, como ilustrado na Figura 3.1. O intervalo

Qualidade								
probabilidade	50.4%	19.5%	17.7%	12.6%	7.9%	—	—	—
histograma								

Tabela 4.1: Ordem obtida entre os grupos de aresta em relação à probabilidade de cada grupo gerar triângulos com qualidade inferior a 50% da qualidade do triângulo equilátero, medida com a razão entre os raios do triângulo (ρ). (Os grupos 4, 5 e 7 não geram nenhum triângulo com qualidade inferior a 50%). A figura mostra a medida e a representação sobre o histograma de qualidade do percentual de triângulos de baixa qualidade de cada grupo, ilustrados na segunda e terceira linhas da tabela, respectivamente.

definido por estas interpretações é semelhante ao intervalo de qualidade “ótimo” proposto por Labelle e Shewchuk (2007) para ângulos diedrais de tetraedros.

A Tabela 4.1 mostra que o grupo de arestas 2 tem a maior probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade. Esta característica é confirmada experimentalmente, como mostram os gráficos ilustrados na Figura 4.2.

A Figura 4.2 mostra que o grupo de arestas 2 gera a maior parte dos triângulos de baixa qualidade, e, em muitos casos, define a qualidade da malha. A importância do grupo de arestas 2 nesta análise é ainda maior quando a interferência do grupo 0 é ignorada. O número de ocorrências do grupo 0 é realçado por isovalores que ativam vértices isolados, correspondentes a ruído do tipo *salt and pepper* ou a pontos de mínimo de f , que resultam em 8 ocorrências do grupo de arestas 0 ao redor de um único vértice.

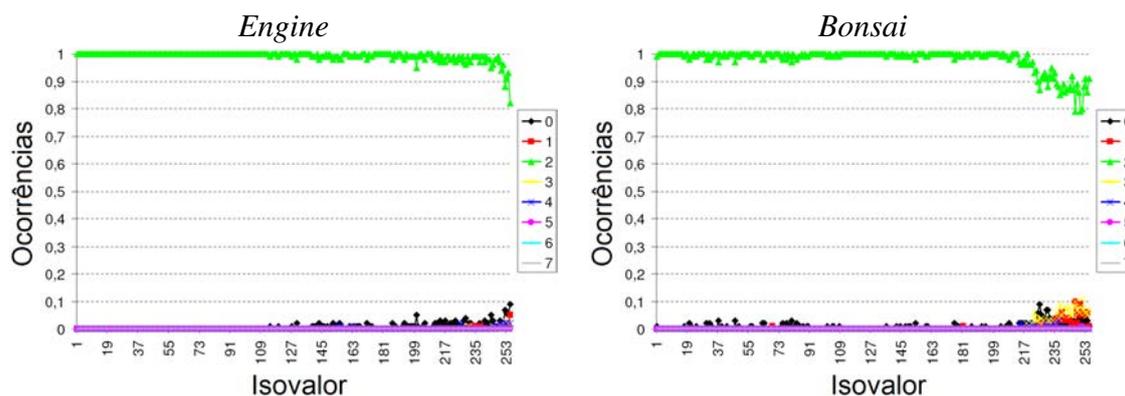


Figura 4.2: Grupos de arestas responsáveis pela geração dos triângulos de baixa qualidade em malhas extraídas a partir dos conjuntos de dados *Engine* e *Bonsai*. Cada gráfico é construído com 245 malhas, geradas com isovalores que variam no intervalo $[1.5, 254.5]$ em incrementos de 1, onde os grupos de arestas responsáveis pela geração dos 100 triângulos de menor qualidade são anotados a cada isovalor. O eixo horizontal identifica o número de ocorrências (normalizado em relação a 100) de cada grupo de arestas. Os gráficos mostram o grande número de ocorrências do grupo de arestas 2, indicando que o grupo 2 gera a maior parte dos triângulos de baixa qualidade em cada malha.

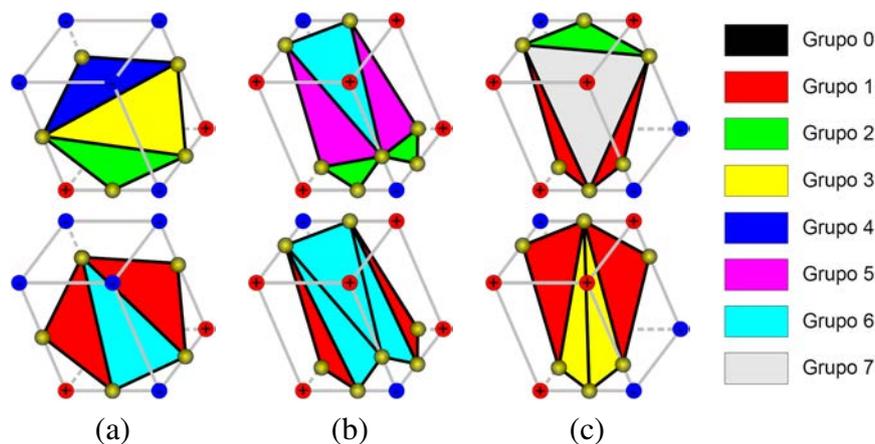


Figura 4.3: Os casos representativos do MC (primeira linha) onde é possível alterar a triangulação e remover o grupo de arestas 2 (segunda linha). O grupo de arestas responsável pela geração de cada triângulo é ilustrado através da tabela de cores (direita). O caso ilustrado na coluna (b) é um caso representativo da tabela de triangulações de Bourke, e representa uma variante topológica do caso 6 do MC. Os casos ilustrados nas colunas (a) e (b) correspondem aos casos 5 e 11 do MC, respectivamente.

Os resultados ilustrados na Figura 4.2 motivam a remoção do grupo de arestas 2 dos casos representativos do MC. A remoção é possível em três casos que admitem triangulações alternativas, ilustrados na Figura 4.3. A modificação destes 3 casos representativos resulta na atualização de 120 dos 256 casos da tabela de triangulações do MC.

A operação que remove o grupo de arestas 2 também altera os demais grupos de arestas da célula, como ilustra a Figura 4.3. Ainda que os grupos adjacentes sejam substituídos por grupos com maior probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade, a remoção do grupo 2 tem maior impacto sobre a qualidade da malha resultante. Esta modificação tem um impacto significativo no resultado do MC, como é mostrado no Capítulo 5.

A remoção do grupo de arestas 2 não é possível, no entanto, em 2 casos representativos do MC. Ainda que estes casos admitam triangulações alternativas, nenhuma destas triangulações altera o conjunto de grupos de arestas resultantes, como ilustra a Figura 4.4. Esta característica limita as mudanças admissíveis na tabela do MC, e também limita a qualidade máxima que pode ser alcançada através desta proposta.

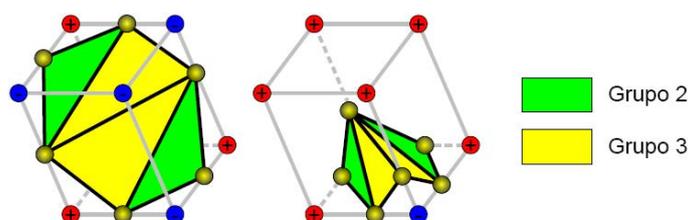


Figura 4.4: Casos representativos do MC onde não é possível remover o grupo de arestas 2. Ainda que estes casos admitam outras triangulações, as demais alternativas também apresentam o grupo 2 entre os seus grupos de arestas. (O caso ilustrado à direita corresponde a uma variação topológica do caso 3 do MC, encontrado na tabela de triangulações de Bourke).

A escolha da triangulação de cada caso representativo do MC através da análise dos grupos de arestas resultantes forma um critério para a construção da tabela de triangulações. Esta abordagem aumenta a probabilidade de gerar malhas de boa qualidade, como é demonstrado no Capítulo 5. O uso deste critério, exemplificado na Figura 4.3 através da remoção do grupo de arestas 2, pode ser estendido a outros casos representativos, mesmo os observados em tabelas de desambiguação (LEWINER et al., 2003). Esta abordagem pode ser explorada pois a mudança da triangulação não altera a topologia da aproximação, o que mantém a construção da tabela intacta.

4.3 As Transformações de Arestas

O estudo da qualidade dos grupos de arestas ilustrado na Tabela 4.1 também motiva a conjectura de que a qualidade de um grupo está ligada ao número de conexões existentes entre as suas arestas. O grupo de arestas 2, por exemplo, possui duas conexões entre as suas arestas, enquanto o grupo de arestas 7 não possui nenhuma. A relação entre o número de conexões e a qualidade do grupo de arestas também é citada no Capítulo 3, durante a análise do grupo de arestas 2. O grupo 2, ao possuir duas conexões entre as suas arestas, tem maior chance de que uma destas conexões esteja próxima a isosuperfície. A proximidade entre a isosuperfície e a conexão entre duas arestas pode resultar em dois vértices de intersecção próximos, e, possivelmente, em um triângulo de baixa qualidade.

A única situação em que dois vértices de intersecção próximos não resulta em um triângulo de baixa qualidade é onde o terceiro vértice de intersecção também está próximo da conexão, o que resulta em um triângulo aproximadamente equilátero. O único grupo de arestas em que esta situação é possível, no entanto, é o grupo de arestas 0, onde as três arestas são incidentes a um único vértice.

A influência das conexões entre as arestas sobre a qualidade dos triângulos gerados diminui, no entanto, se as conexões são *afastadas* da isosuperfície ou se as conexões são simplesmente *eliminadas*. O aumento da distância entre as conexões e a isosuperfície é proposto no trabalho de Figueiredo et al. (1992), enquanto que a eliminação das conexões é proposta nos trabalhos de Bern, Eppstein e Gilbert (1994), Tzeng (2004), Labelle e Shewchuk (2007) e Raman e Wenger (2008).

Em Figueiredo et al. (1992), os autores propõem a deformação iterativa da grade, onde cada iteração maximiza a distância entre os vértices da grade e a isosuperfície. O procedimento representa a grade como uma estrutura explícita, no entanto, onde o formato de cada célula influi no formato das células vizinhas, e assim quebra o paralelismo inerente ao MC. A eliminação das conexões próximas à isosuperfície é realizada através da deformação da célula, onde o vértice da grade próximo à isosuperfície é colocado *sobre* a isosuperfície, o que resulta no colapso do triângulo de baixa qualidade (BERN; EPPSTEIN; GILBERT, 1994) (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (RAMAN; WENGER, 2008). O deslocamento do vértice no sentido da isosuperfície, no entanto, pode resultar novamente na quebra do paralelismo inerente ao MC (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) ou na modificação da topologia da malha gerada (RAMAN; WENGER, 2008).

O aumento da distância entre as conexões e a isosuperfície ou a eliminação das conexões podem ser realizados, no entanto, por procedimentos que operem sobre as *arestas ativas*.

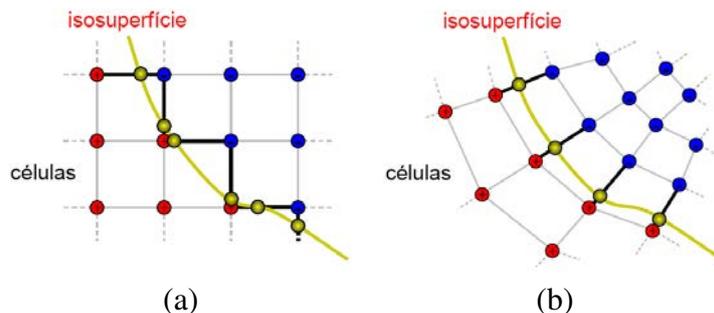


Figura 4.5: Posicionamento “ótimo” das arestas ativas em relação à isosuperfície. As células da grade do MC, ilustradas em (a), poderiam ser adaptadas ao comportamento da isosuperfície, como ilustrado em (b). A adaptação da grade pode evitar situações onde as conexões entre as arestas ativas estão próximas à isosuperfície, e evitar a geração de triângulos de baixa qualidade.

Neste trabalho são propostos dois procedimentos que transformam as arestas ativas para realizar estas operações, chamados (genericamente) de *Transformações de Arestas*. A intuição que motiva as transformações de arestas é ilustrada na Figura 4.5.

A Figura 4.5 ilustra (no plano) um dos principais problemas do MC. O formato da célula, resultante da subdivisão uniforme do domínio de f , distribui irregularmente as amostras sobre a isosuperfície. Esta condição pode ser modificada se os extremos das arestas ativas são afastados da isosuperfície, na direção do gradiente de f , como ilustrado na Figura 4.6 (b). O limite deste movimento (vértices no infinito) coloca as intersecções entre a isosuperfície e a célula exatamente no *meio* das arestas ativas. Ainda que o deslocamento dos vértices ao infinito não seja possível na prática, pequenos movimentos dos extremos das arestas ativas têm um impacto significativo na distribuição das amostras (Figura 4.6 (b)). Neste trabalho é proposto um procedimento iterativo que aumenta a distância entre os extremos das arestas ativas e a isosuperfície, chamado de *Transformação do Gradiente*, discutido na Seção 4.3.1.

A Figura 4.6 (b) ilustra uma situação onde a curvatura da isosuperfície é baixa. Nestas condições, o aumento da distância entre os extremos das arestas ativas e a isosuperfície resulta em arestas *aproximadamente perpendiculares* a isosuperfície. Esta configuração de arestas pode ser aproximada com o movimento tangencial dos extremos das arestas ativas, como é ilustrado na Figura 4.6 (c). O movimento tangencial realizado sobre as isosuperfícies que passam nos extremos das arestas ativas pode resultar em uma aresta perpendicular a isosuperfície em poucos passos. Neste trabalho é proposto um procedimento iterativo que movimenta os extremos das arestas ativas tangencialmente à isosuperfície, chamado de *Transformação Tangencial*, discutido na Seção 4.3.2.

As transformações de arestas propostas nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 têm o *mesmo* objetivo, isto é, movimentar as arestas ativas para minimizar os efeitos das conexões entre as arestas na qualidade dos triângulos. O objetivo comum faz com que o resultado das transformações (em condições ideais) seja *idêntico*; na prática, no entanto, nem sempre é possível movimentar livremente as arestas ativas dentro do domínio de f . Assim, as transformações atuam de forma significativamente diferente, o que aumenta a chance de obter sucesso em (ao menos) uma das transformações. O uso de duas transformações exige um passo adicional, no entanto, onde o resultado das transformações é combinado para gerar a malha final. A implementação deste passo é discutida na Seção 4.3.3.

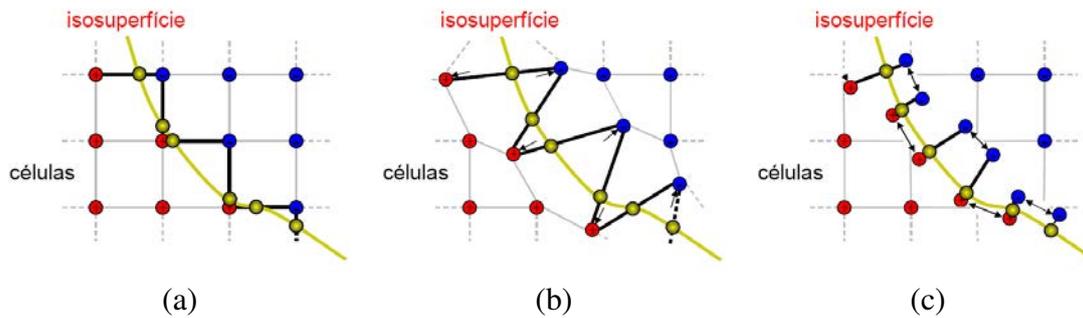


Figura 4.6: As transformações das arestas ativas do MC. Neste trabalho são propostos dois procedimentos que alteram a posição das arestas ativas, a *Transformação do Gradiente* (b) e a *Transformação Tangencial* (c). A transformação do gradiente afasta os extremos das arestas da isosuperfície, enquanto a transformação tangencial movimenta os extremos das arestas tangencialmente à isosuperfície. Os dois procedimentos resultam, como mostram as figuras, no aumento da distância entre os vértices de intersecção.

As transformações de arestas operam *independentemente* sobre cada aresta ativa. Além disso, a transformação de cada aresta depende apenas de parâmetros locais, o que pode motivar o raciocínio de que o movimento independente dos vértices de intersecção resulta em malhas inconsistentes, i.e., com descontinuidades entre as células. A aplicação das transformações atende a um conjunto de condições, no entanto, que garantem a manutenção da consistência da malha gerada pelo MC.

A independência entre a conectividade e a geometria da malha extraída é uma característica importante na manutenção da consistência da malha durante as transformações. A conectividade é determinada pela polaridade dos vértices da célula, e se mantém inalterada na aplicação das transformações. A geometria é determinada pela intersecção entre a aresta ativa e a isosuperfície, e, assumindo que a intersecção continua existindo ao longo da transformação, apenas a posição do vértice de intersecção é alterada. Além disso, a consistência da malha ao longo das transformações é garantida a partir das seguintes condições:

- Cada aresta ativa mantém apenas uma intersecção com a isosuperfície ao longo da transformação. Esta condição estabelece que as polaridades das extremidades da aresta não devam ser modificadas ao longo da transformação, quer dizer, que as extremidades da aresta não devam cruzar a isosuperfície durante o movimento dos vértices.
- A movimentação dos vértices de intersecção durante as transformações não deve resultar em mudanças na orientação dos triângulos da malha extraída.

A manutenção destas condições durante as transformações de arestas garante que a consistência da malha gerada será conservada. Esta garantia significa que a malha mantém a sua orientação, não apresenta auto-intersecções e não apresenta descontinuidades entre as células. Partindo destas condições, as próximas seções discutem a implementação das transformações de arestas.

4.3.1 A Transformação do Gradiente

A *Transformação do Gradiente* sugere o movimento dos extremos das arestas ativas na direção do gradiente de f . O objetivo do procedimento é aumentar a distância entre os extremos das arestas e a isosuperfície, como ilustrado na Figura 4.6 (b).

O movimento na direção do gradiente é baseado na observação de que a diminuição da distância entre os extremos das arestas e a isosuperfície pode resultar em triângulos de baixa qualidade, como discutido no Capítulo 3 e em alguns trabalhos recentes (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (RAMAN; WENGER, 2008). O gradiente de f é usado para conduzir o extremo da aresta ativa devido a sua direção aproximadamente perpendicular à isosuperfície nas proximidades da isosuperfície. Esta característica resulta em um movimento aproximadamente perpendicular dos extremos das arestas em relação a isosuperfície, sem um desvio tangencial significativo em regiões de baixa curvatura de f .

A transformação do gradiente é realizada após a detecção das arestas ativas. Cada aresta é transformada independentemente, e a transformação usa apenas informações da própria função f , ou seja, a transformação é independente das arestas vizinhas. Para uma dada aresta ativa e definida entre os vértices p_i e p_j , a transformação inicia com a construção de uma nova aresta (p'_i, p'_j) , onde $p'_i = p_i$ e $p'_j = p_j$. Os vértices p'_i e p'_j são deslocados (independentemente) na direção do gradiente de f , no sentido que afasta o vértice da isosuperfície, até onde as condições de manutenção da consistência da isosuperfície possam ser mantidas.

O movimento de cada vértice é iterativo e limitado à vizinhança do vértice, ou seja, o subdomínio definido entre $(p - \|e\|/2)$ e $(p + \|e\|/2)$. (A limitação do movimento de p evita, algoritmicamente, a ocorrência de auto-intersecções na malha extraída). Dentro deste subdomínio, o objetivo é encontrar um vértice p' que maximize α em

$$p' = p + \alpha \tilde{\nabla} f(p),$$

onde $\tilde{\nabla} f$ é o gradiente de f no sentido que afasta p' da isosuperfície. O movimento do vértice exige a avaliação de $f(p)$ e $\nabla f(p)$ a cada iteração, para cada vértice, o que transfere o custo de aplicação da transformação para o custo de reconstrução e diferenciação da função f . A Figura 4.7 ilustra algumas iterações da transformação do gradiente aplicada na extração de uma isosuperfície aproximadamente plana, onde pode ser visualizado o efeito de cada iteração sobre a malha extraída.

4.3.2 A Transformação Tangencial

O resultado da transformação do gradiente é um conjunto de arestas aproximadamente perpendiculares à isosuperfície em regiões onde a curvatura de f é baixa. Esta configuração de arestas corrobora as observações realizadas no Capítulo 3 sobre o posicionamento das arestas ativas, pois elimina as arestas próximas e aproximadamente paralelas à isosuperfície.

As arestas perpendiculares à isosuperfície também podem ser obtidas através de outro tipo de movimento, ortogonal a ∇f , como ilustrado na Figura 4.6 (c). Esta transformação, a *Transformação Tangencial*, permite gerar arestas aproximadamente perpendiculares a

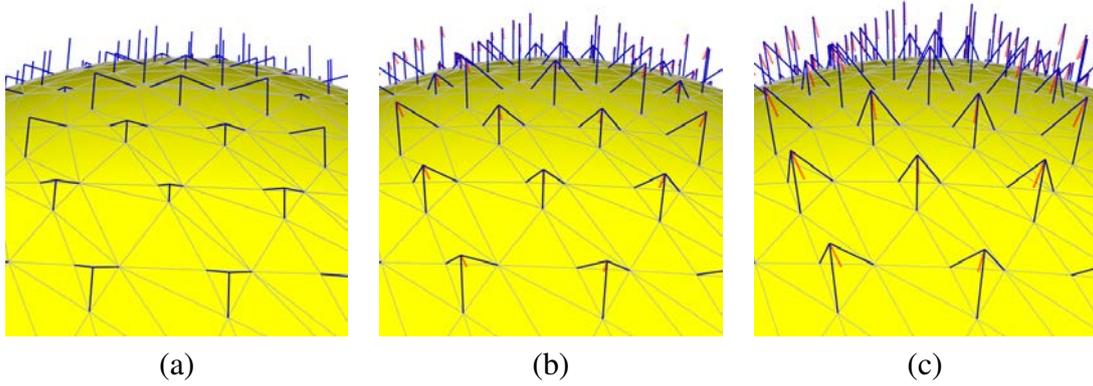


Figura 4.7: Transformação do gradiente aplicada ao conjunto de dados *Sphere*. Os vértices das arestas ativas (ilustradas em linhas azuis) são movidos ao longo do gradiente de f (ilustrado em linhas vermelhas pontilhadas), modificando, iterativamente, a triangulação original (a) na triangulação transformada (b, c). O efeito da transformação é mostrado pela melhora do aspecto dos triângulos gerados.

isosuperfície em poucas iterações. Cada iteração move os extremos das arestas ativas em uma trajetória aproximadamente paralela à isosuperfície e perpendicular a ∇f .

O maior desafio da transformação tangencial é o cálculo do caminho, ou *trilho*, que o extremo da aresta deve percorrer durante a transformação. É possível obter um vértice de intersecção equivalente ao obtido na transformação do gradiente se, para cada extremo de aresta localizado em um ponto p , o trilho de p corresponder a projeção da aresta sobre a isosuperfície $f(p)$. Este conceito é ilustrado na Figura 4.8.

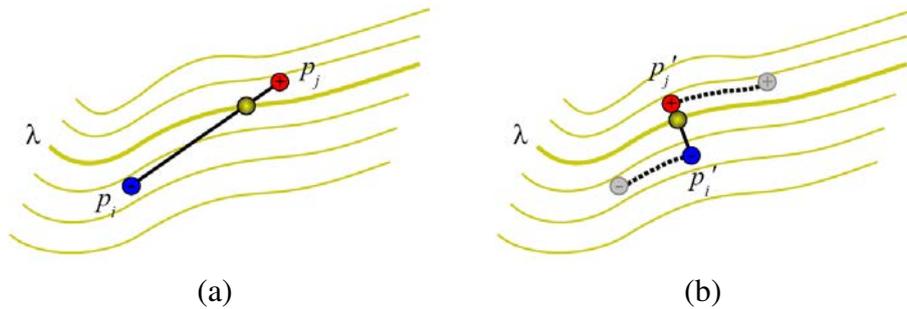


Figura 4.8: Trilho da transformação tangencial. O movimento dos pontos p'_i e p'_j é realizado sobre as isosuperfícies $f(p'_i)$ e $f(p'_j)$, respectivamente. O objetivo é tomar a aresta ativa (a) e transformá-la em uma aresta localmente perpendicular à isosuperfície (b).

Assim como na transformação do gradiente, para uma dada aresta ativa definida entre os vértices p_i e p_j , a transformação inicia com a construção de uma nova aresta (p'_i, p'_j) , onde $p'_i = p_i$ e $p'_j = p_j$. O movimento de p'_i e p'_j em cada iteração é então dado por

$$\begin{aligned} p'_{i+} &= \beta \left\langle \left\langle \nabla f(\hat{p}'_i), p_j - p_i \right\rangle, \nabla f(\hat{p}'_i) \right\rangle, \\ p'_{j+} &= \beta \left\langle \left\langle \nabla f(\hat{p}'_j), p_i - p_j \right\rangle, \nabla f(\hat{p}'_j) \right\rangle. \end{aligned}$$

O trilho de cada vértice é construído iterativamente, sendo que β controla o tamanho do passo de cada vértice sobre o vetor a cada iteração. Basicamente, β diz a qualidade da

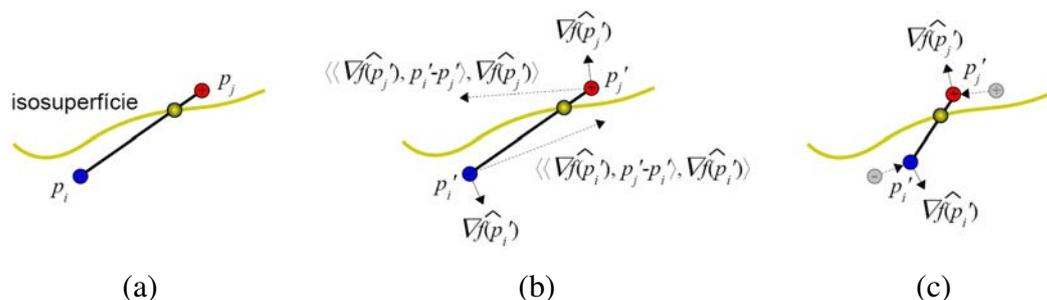


Figura 4.9: Cálculo do trilho da transformação tangencial. O movimento de cada vértice p é realizado iterativamente, onde a cada iteração p move-se sobre um trilho que é resultado do produto vetorial entre a normal de p ($\nabla f(p'_i)$) e o resultado do produto vetorial entre a normal de p e a própria aresta, como ilustrado em (b). O trilho é construído de forma que ele seja *localmente* tangente à isosuperfície $f(p)$. Assim, ao mover-se em vários passos sobre vetores que são localmente tangentes a isosuperfície $f(p)$, como ilustrado em (c), o vértice caminha na projeção da aresta sobre a isosuperfície $f(p)$.

aproximação linear do trilho da transformação. O trilho pode ser uma reta, em regiões onde a isosuperfície é localmente plana, ou uma curva, em regiões onde a isosuperfície tem curvatura elevada. Estas duas situações exigem, respectivamente, valores grandes e pequenos de β ; na prática, um único valor é usado para cobrir a maior parte das situações encontradas. A interpretação geométrica da Equação 4.3.2 é ilustrada na Figura 4.9.

A Figura 4.9 mostra que um trilho *reto* é construído a cada iteração, e, combinado a β , este segmento de trilho é usado para construir a aproximação linear da projeção da aresta sobre a isosuperfície $f(p)$. A figura também ilustra que cada vértice deve se mover para o *ponto médio* da projeção da aresta para a obtenção de uma aresta perpendicular a isosuperfície.

A Figura 4.10 ilustra algumas iterações da transformação do gradiente aplicada na extração de uma isosuperfície aproximadamente plana (o mesmo exemplo usado na Figura 4.7), onde pode ser visualizado o efeito de cada iteração sobre a malha extraída.

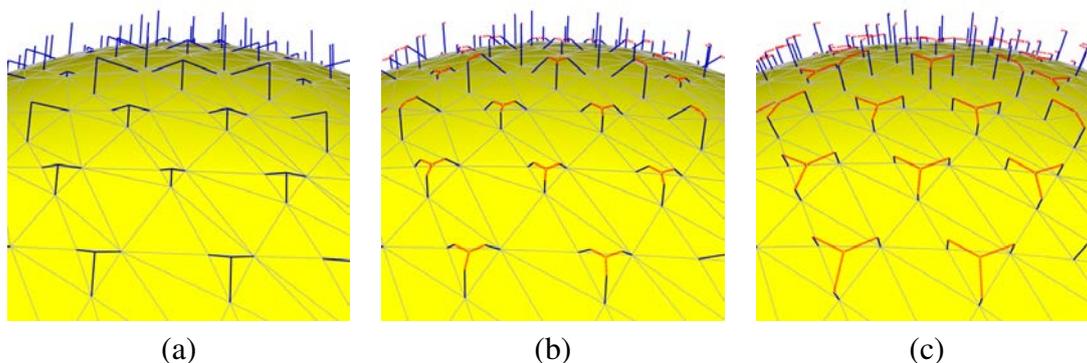


Figura 4.10: Transformação tangencial aplicada ao conjunto de dados *Sphere*. As arestas ativas (ilustradas em linhas azuis) são transformadas ao longo do trilho da transformação (ilustrado em linhas vermelhas pontilhadas), modificando iterativamente a malha original (a) na malha transformada (b, c). O efeito da transformação é observado pela melhora do aspecto dos triângulos gerados, ilustrados em cinza.

4.3.3 A Combinação das Transformações

As transformações de arestas apresentadas nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 têm como objetivo obter arestas aproximadamente *perpendiculares* a isosuperfície. O advento das arestas perpendiculares a isosuperfície nasce da necessidade de afastar os extremos das arestas ativas (observação da análise dos grupos de arestas do Capítulo 3); nesta posição, elas *maximizam a distância entre os seus extremos em ambos os lados da isosuperfície*.

A aplicação das transformações é influenciada, no entanto, por algumas condições encontradas na prática. A proximidade entre duas regiões da isosuperfície pode limitar o movimento de uma aresta na transformação do gradiente. Da mesma forma, extremos de arestas próximos (ou sobre) a isosuperfície podem impedir a aplicação da transformação tangencial.

Assumindo que o objetivo das transformações é obter a melhor qualidade (de malha) possível, e que a conjectura atual diz que essa malha é gerada por um conjunto de arestas perpendiculares a isosuperfície, é possível *escolher* as arestas mais adequadas geradas por cada transformação. Neste contexto, as duas transformações são aplicadas paralelamente, e o resultado de ambas é combinado para a geração da malha final. Esta combinação não seria necessária se houvesse uma transformação que fosse aplicada com sucesso em qualquer situação, e resultasse na aresta alvo; as dificuldades em mover pontos dentro do domínio de f , no entanto, ainda dificultam a proposta desta transformação.

A combinação dos resultados das transformações também não seria necessária se fosse possível identificar as situações onde cada transformação pudesse ser aplicada com sucesso. Alguns experimentos práticos mostram, no entanto, que não parece haver um padrão entre estas situações. A Figura 4.11 ilustra dois resultados da aplicação das transformações, onde são realçados os vértices de intersecção gerados por arestas que não foram transformadas corretamente.

O resultado das transformações é combinado através de um procedimento iterativo. A escolha entre os pares de arestas gerados pela transformação do gradiente e pela transformação tangencial não requer, necessariamente, a análise do posicionamento das arestas em relação a isosuperfície. Assumindo a conjectura de que a malha de maior qualidade é gerada por um conjunto de arestas perpendiculares a isosuperfície, a escolha das arestas perpendiculares pode ser substituída pela escolha das arestas que geram a melhor triangulação local (triângulos incidentes ao vértice de intersecção). Assim, para cada par de arestas, em cada iteração, toma-se os vértices de intersecção gerados por cada aresta e testa-se a qualidade da malha de triângulos incidentes. A escolha de um vértice de intersecção pode interferir na qualidade dos triângulos vizinhos, no entanto, o que exige várias iterações sobre todos os pares de arestas da malha para a obtenção do resultado final. O número de iterações foi pequeno em todos os testes práticos (no máximo 4 iterações), no entanto, e o custo deste procedimento é insignificante quando comparado com o custo do próprio MC. A Figura 4.12 ilustra uma comparação entre o resultado das transformações (isoladamente) e o resultado da combinação das transformações, onde é possível observar a melhora na qualidade da malha a cada iteração do procedimento de combinação.

A implementação das transformações de arestas e a combinação dos seus resultados deu origem ao algoritmo *Macet* (*Marching Cubes with Edge Transformations*), como é descrito em Dietrich et al. (DIETRICH et al., 2008). No escopo deste trabalho, no entanto, o Macet possui um estágio adicional, cuja atuação complementa o resultado das transfor-

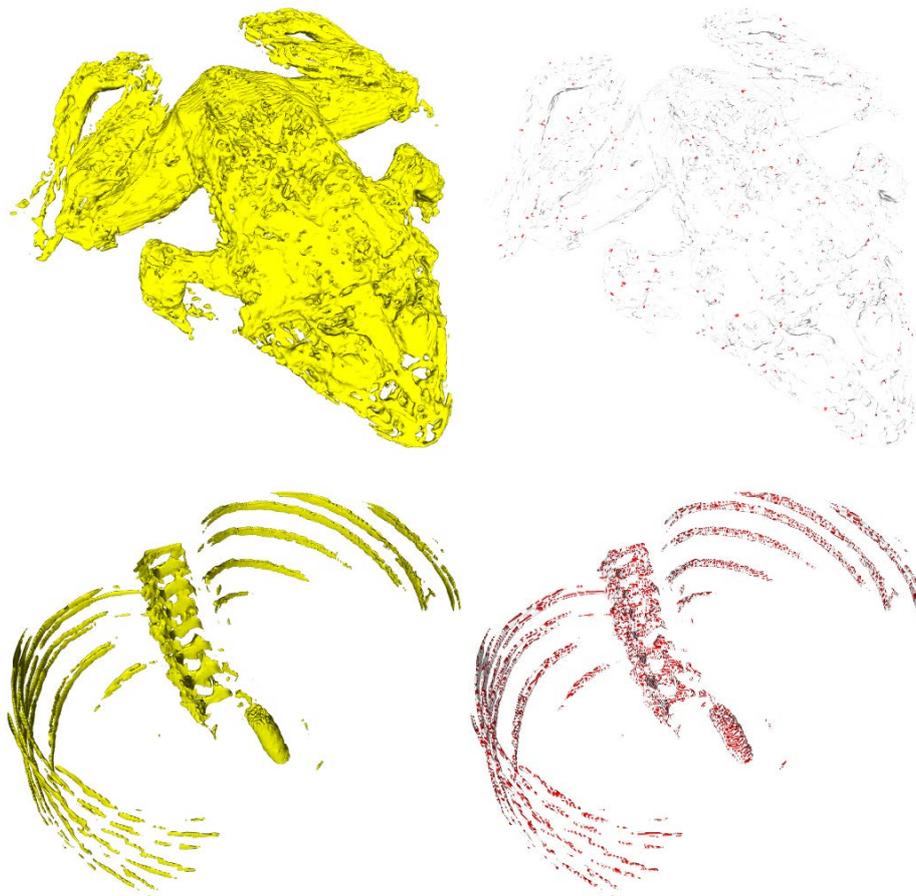


Figura 4.11: Exemplos de malhas geradas com as transformações de arestas (esquerda) e de vértices de intersecção gerados por arestas que não foram transformadas corretamente (direita). As imagens à esquerda ilustram as malhas geradas a partir dos conjuntos de dados *Frog* (cima) e *Chest CT* (baixo). As duas malhas possuem regiões de curvatura elevada, onde não é possível aplicar as transformações corretamente e ainda manter o bom desempenho do algoritmo. As imagens à direita mostram os vértices de intersecção (em vermelho) gerados por arestas que não foram transformadas corretamente, sendo 2256 vértices no conjunto de dados *Frog* (de um total de 194422) e 19370 vértices no conjunto de dados *Chest CT* (de um total de 60578).

mações de arestas. Este estágio é discutido na Seção 4.4.

4.4 O Deslocamento dos Vértices de Intersecção ao Longo das Arestas Ativas

O Capítulo 3 estabelece uma série de observações sobre a relação entre o posicionamento das arestas ativas e a qualidade da malha gerada. Uma das principais observações é a de que triângulos de baixa qualidade podem ser gerados quando as intersecções entre a isosuperfície e as arestas ativas estiverem próximas às conexões entre as arestas. Intuitivamente, esta observação motiva o *deslocamento* dos vértices de intersecção ao longo das arestas, onde os vértices de intersecção são afastados das conexões entre as arestas ativas. As transformações das arestas ativas implementam - indiretamente - este deslocamento,

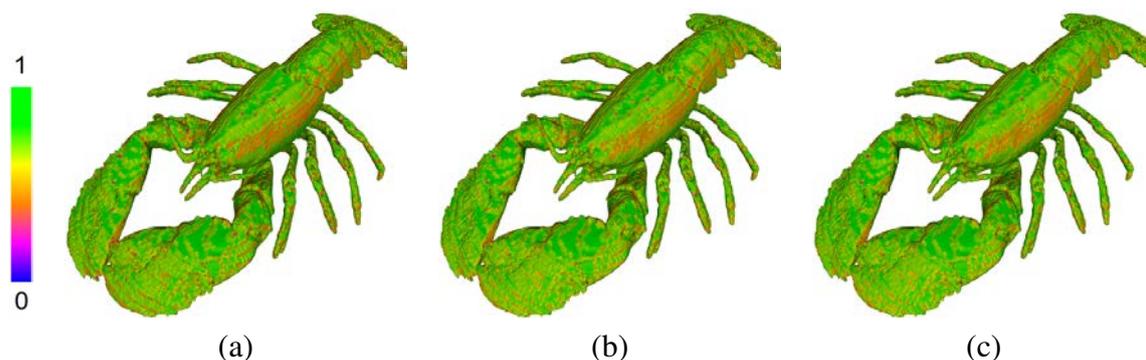


Figura 4.12: Resultado da combinação entre os vértices gerados pelas transformações do gradiente e tangencial. A figura ilustra três passos do procedimento de combinação (a, b, c), onde a cor de cada vértice é dada pela razão entre os raios do pior triângulo incidente ao vértice, segundo o mapa de cores mostrado à esquerda. Nestas iterações, os valores de qualidade do ângulo mínimo, ângulo máximo e razão entre os raios variam de 1.0655, 174.19 e 0.003 (primeira iteração) a 10.053, 143.04 e 0.1898, respectivamente.

que pode ser implementado explicitamente (RAMAN; WENGER, 2008), o que resulta na proposta do último estágio do Macet.

A Figura 4.13 ilustra exemplos onde os vértices de intersecção são afastados das conexões entre as arestas dos grupos de arestas. Ainda que esta abordagem seja simples e intuitiva, o exemplo ilustrado com o grupo de arestas 2 mostra que, embora o deslocamento seja possível, ele pode ser exigido em sentidos *contrários* sobre a mesma aresta. Esta contradição pode ser encontrada na prática, onde uma mesma aresta é compartilhada por vários grupos de arestas, como também é ilustrado na Figura 4.13.

A necessidade de deslocamentos contraditórios em casos práticos sugere que o equilíbrio pode ser encontrado se o vértice de intersecção for deslocado para o *ponto médio* da aresta. Esta abordagem também é motivada por duas observações simples. Primeiro, o ponto médio de uma aresta ativa está relacionado ao vértice de intersecção obtido com a transformação da aresta. A relação entre o ponto médio e o vértice de intersecção é observada em isosuperfícies aproximadamente planas, onde o vértice de intersecção pode ser obtido pela movimentação do ponto médio da aresta na mesma direção e no sentido inverso do gradiente (descida do gradiente) até a isosuperfície. Segundo, a qualidade da malha gerada por vértices de intersecção posicionados no ponto médio das arestas ativas também pode ser observada no trabalho de Montani, Scateni e Scopigno (MONTANI; SCATENI; SCOPIGNO, 1994). Ainda que sua proposta não tenha o intuito de gerar malhas com qualidade superior ao MC, a sua extensão do MC (*Discretized Marching Cubes*) gera apenas seis tipos diferentes de triângulos, e todos têm qualidade superior a encontrada nas malhas geradas pelo MC.

A aplicação abrupta do deslocamento dos vértices de intersecção pode não ser interessante, no entanto, em alguns casos. Nos casos onde o vértice de intersecção está posicionado nas imediações do ponto médio da aresta, por exemplo, o deslocamento do vértice pode não resultar em um ganho significativo na qualidade dos triângulos incidentes, e aumentar o erro de aproximação. Nos vértices próximos às conexões entre as arestas, por sua vez, o deslocamento deve ser maior, ainda que o impacto sobre a qualidade de aproximação seja significativo. Estas características sugerem que o deslocamento do vértice

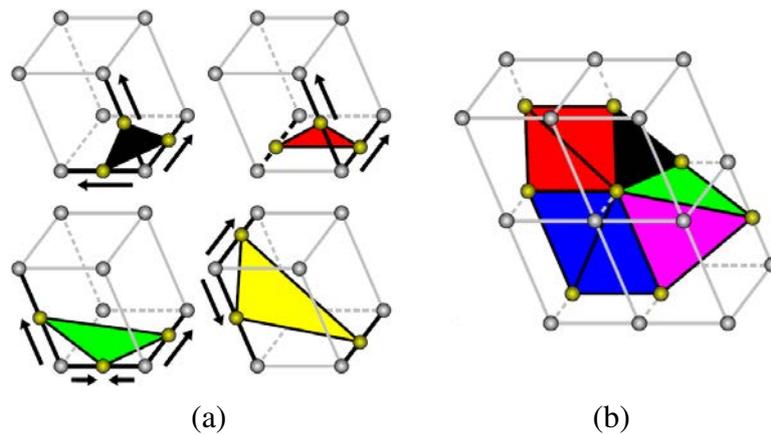


Figura 4.13: Exemplos do deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. Ainda que o sentido de deslocamento seja bem definido quando a análise é focada nos grupos de arestas (a), o compartilhamento de uma aresta por vários grupos pode resultar em sentidos de movimentação contrários (b).

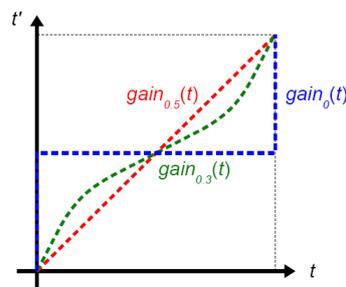


Figura 4.14: O comportamento da função *Gain* no deslocamento do vértice de intersecção. Cada vértice é deslocado em função da sua posição ao longo da aresta ativa (t) e do parâmetro de *Gain* (g). A figura ilustra o comportamento de *Gain* nos limites do intervalo de g ($[0, 0.5]$), onde o deslocamento varia entre o resultado do *Discretized Marching Cubes* e do próprio MC, e o valor usado nos experimentos discutidos no Capítulo 5.

deve ser não-linear, e aplicado de acordo com a posição do vértice de intersecção sobre a aresta ativa.

A função adotada para a implementação do deslocamento neste trabalho é baseada em uma das funções usadas por Perlin e Hoffert para a modulação da densidade de amostras em texturas procedurais, a função *Gain* (PERLIN; HOFFERT, 1989), definida por

$$Gain_g(t) = (2t^{\frac{\ln(1-g)}{\ln(0.5)}})/2,$$

onde t é a posição original do vértice de intersecção sobre a aresta ativa (normalizada entre 0 e 1) e g é o parâmetro de *Gain*. A Figura 4.14 ilustra o comportamento de *Gain* dentro do intervalo de parâmetros que interessa ao deslocamento de vértices, definido entre $[0.0, 0.5]$. Com $g = 0.0$, o resultado é semelhante ao resultado do *Discretized Marching Cubes* (MONTANI; SCATENI; SCOPIGNO, 1994), onde todas as intersecções são posicionadas no ponto médio das arestas ativas. Com $g = 0.5$, o resultado é o próprio t , quer dizer, não há modificação na posição de entrada.

O deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas oferece ao usuário a escolha entre a qualidade da malha e a qualidade da aproximação. O deslocamento do vértice de sua posição original em direção ao ponto médio da aresta aumenta a qualidade da malha e reduz a qualidade de aproximação, e vice-versa. A escolha, por sua vez, pode ser exercida através da determinação do parâmetro g .

A implementação deste novo estágio é posicionada, naturalmente, após o cálculo da intersecção entre cada aresta ativa e a isosuperfície. O resultado do cálculo de intersecção permite o cálculo de t , e, conseqüentemente, o deslocamento do vértice de intersecção.

4.5 Discussão

Neste capítulo foi apresentado um conjunto de procedimentos cujo objetivo é melhorar a qualidade da malha gerada pelo MC. Os procedimentos, basicamente, alteram a *conectividade* e a *geometria* da malha resultante.

A conectividade da malha é alterada através de uma análise que guia a construção da tabela do MC. A análise da qualidade dos grupos de arestas resultantes da triangulação dos casos representativos do MC permite construir uma tabela com *maior probabilidade* de gerar triângulos com boa qualidade. A análise é independente do modo como a ambigüidade é resolvida em cada caso representativo; uma vez que seja definido quais vértices serão conectados para formar os retalhos da isosuperfície no interior da célula, a análise dos grupos de arestas permite testar qual a melhor forma de conectar os vértices de cada retalho.

A geometria da malha gerada é alterada através da deformação da grade do MC (transformações de arestas) e do deslocamento dos vértices de intersecção sobre cada aresta. A deformação da grade do MC, embora proposta em trabalhos recentes (BERN; EPPSTEIN; GILBERT, 1994) (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (RAMAN; WENGER, 2008), é apresentada neste trabalho em duas abordagens inéditas. A transformação do gradiente, em especial, é citada no trabalho de Tzeng (2004) como uma modificação que *resultaria em malhas inconsistentes*, devido a sobreposição entre as arestas ativas e as demais arestas da grade durante a transformação. Neste capítulo foi mostrado que as arestas ativas podem ser transformadas independentemente, sem considerar a sua relação com as células, devido a separabilidade entre os conceitos de conectividade e geometria da malha. Uma vez que a célula definiu a conectividade entre as arestas ativas, após o cálculo das polaridades dos vértices, a própria célula pode ser descartada, e as arestas ativas podem ser tratadas independentemente.

A transformação do gradiente, por sua vez, abriu espaço para a proposta da transformação tangencial. A transformação tangencial levou a independência das arestas ativas ao máximo, no momento em que propôs a quebra da grade do MC. Ainda que a quebra da grade efetivamente elimine a estrutura da célula cúbica, as condições impostas para a manutenção da consistência da malha garantem que a malha gerada não apresenta descontinuidades.

A adição dos procedimentos apresentados neste capítulo ao MC resulta no Macet. O Macet traz três estágios ao MC, sendo eles: (1) a mudança nas conexões entre os vértices de intersecção (implementada na tabela de conexões do MC), (2) a transformação das arestas ativas e (3) o deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas.

Os estágios do Macet, embora sejam apresentados em conjunto, podem ser aplicados separadamente ao MC. A inclusão dos estágios do Macet também não altera o próprio MC, quer dizer, não modifica os trechos da implementação original, o que também garante a sua combinação com outras abordagens (SHEN et al., 1996) (DYKEN et al., 2007). Estas duas características conferem uma independência entre os estágios do Macet, importante para o seu uso em aplicações práticas.

A proposta das transformações de arestas levanta dois pontos importantes, sendo eles (1) a análise do resultado das transformações sobre os grupos de arestas e (2) a implementação das transformações. As transformações de arestas, ao modificarem o posicionamento de cada aresta em relação à isosuperfície, podem ser estudadas isoladamente sobre os grupos de arestas. Esta possibilidade permite a análise do campo de qualidade do *grupo de arestas transformadas*, e, desta forma, a demonstração do ganho de qualidade obtido com a transformação. A análise da qualidade das transformações de arestas é discutida na Seção 4.5.1.

A implementação das transformações de arestas envolve alguns pontos importantes, como, por exemplo, a escolha dos parâmetros que controlam as iterações realizadas por cada transformação. Além disso, a própria tarefa de movimentar pontos dentro do domínio de f é desafiadora. As questões envolvidas na implementação das transformações de arestas são discutidas na Seção 4.5.2.

4.5.1 Os Grupos de Arestas Transformadas

A proposta das transformações de arestas é baseada em argumentos intuitivos (como ilustra a Figura 4.6) e em observações realizadas sobre os grupos de arestas. Ainda que os resultados experimentais suportem a eficácia desta abordagem, como é apresentado no Capítulo 5, não foi demonstrado que a aplicação das transformações de arestas *realmente* resulta na melhora da malha gerada.

A análise da qualidade dos grupos de arestas discutida no Capítulo 3 (Seção 3.3.2), no entanto, também pode ser usada para demonstrar a eficácia das transformações. As transformações podem ser aplicadas diretamente sobre as arestas dos grupos de arestas durante a construção do campo q (campo de qualidade) de cada grupo. Esta abordagem permite o estudo da qualidade resultante da aplicação das transformações sobre cada tipo de triângulo gerado pelo MC.

A qualidade de um grupo de arestas é analisada através do estudo de todas as possíveis combinações entre os três vértices de intersecção gerados pelo grupo. O estudo é realizado em um espaço de parâmetros q gerado por parâmetros t_0 , t_1 e t_2 , que correspondem às posições dos vértices de intersecção c_0 , c_1 e c_2 sobre as arestas do grupo, respectivamente. O estudo do resultado das transformações na geração de q modifica apenas o modo como a qualidade é calculada para cada vetor (i, j, k) em q .

O mapeamento de (i, j, k) para um valor de qualidade assume que o triângulo $c_0c_1c_2$ é a aproximação local da isosuperfície (dentro do grupo de arestas). (Este conceito não é útil na análise descrita no Capítulo 3, mas é necessário para a aplicação das transformações). A isosuperfície descrita por $c_0c_1c_2$ é *plana*, o que facilita a aplicação das transformações. Nestas condições, as duas transformações resultam em arestas perpendiculares a isosuperfície, pois não existem impedimentos à movimentação dos extremos das arestas.

Qualidade								
<i>min/max</i>	0.828/1.0	0.395/0.865	0.272/0.598	0.417/0.791	0.464/0.93	0.788/0.989	0.756/0.881	0.978/1.0
histograma								

Tabela 4.2: Análise da qualidade (medida através da razão entre os raios) dos grupos de arestas transformados da célula cúbica. Nesta análise, a transformação das arestas é aplicada sem restrições no movimento dos extremos das arestas, o que garante a resposta *ótima* das transformações. O resultado mostra que a transformação das arestas melhora a qualidade das malhas geradas pelo MC, onde a qualidade mínima observada é de 0.272 medida no grupo de arestas 2.

O cálculo do valor de qualidade associado ao vetor (i, j, k) inicia com a geração explícita dos vértices de intersecção c_0, c_1 e c_2 . Os vértices de intersecção são usados para calcular o plano H que irá representar o comportamento local da isosuperfície. H serve como base para a transformação das arestas e_0, e_1 e e_2 , que resulta no grupo de arestas transformadas (e'_0, e'_1, e'_2) . A partir de e'_0, e'_1 e e'_2 são calculados os vértices de intersecção transformados c'_0, c'_1 e c'_2 , respectivamente, e a qualidade do triângulo $c'_0c'_1c'_2$ é associada ao vetor (i, j, k) .

A Tabela 4.2 mostra as informações extraídas do espaço de parâmetros q dos grupos de arestas transformados. A tabela mostra os valores mínimo e máximo de qualidade calculados experimentalmente para cada grupo. Os valores demonstram a melhora de qualidade resultante da aplicação das transformações de arestas sobre o MC, analisada diretamente sobre os grupos de arestas, o que estende a análise a qualquer triângulo gerado pelo MC. A análise da qualidade dos grupos de arestas, no entanto, ainda assume que a isosuperfície é localmente plana.

4.5.2 A Implementação das Transformações de Arestas

A implementação do Macet requer a adição de três estágios ao MC. Cada estágio do Macet é inserido entre os passos tradicionais do MC, o que permite manter a implementação do MC intacta, e apenas adicionar as chamadas aos estágios do Macet quando necessário. O ponto de inserção de cada estágio do Macet ao MC é ilustrado na Figura 4.15.

A implementação dos estágios do Macet envolve algumas questões importantes, no entanto, relacionadas aos parâmetros dos procedimentos iterativos e ao interpolador usado na reconstrução e na diferenciação dos valores de f .

A primeira questão envolve a suposição de que f varia *linearmente* ao longo das arestas ativas (LORENSEN; CLINE, 1987). Esta suposição não é válida, no entanto, quando os extremos das arestas são movimentados livremente dentro do domínio de f . O movimento dos extremos das arestas resulta em variações não-lineares de f ao longo das arestas transformadas, ainda que (em alguns casos) a variação seja monotônica. Esta consequência exige a mudança do procedimento que calcula as intersecções entre as arestas transformadas e a isosuperfície. O procedimento original do MC é uma interpolação linear inversa sobre a aresta ativa (LOPES; BRODLIE, 2003). A implementação usada para

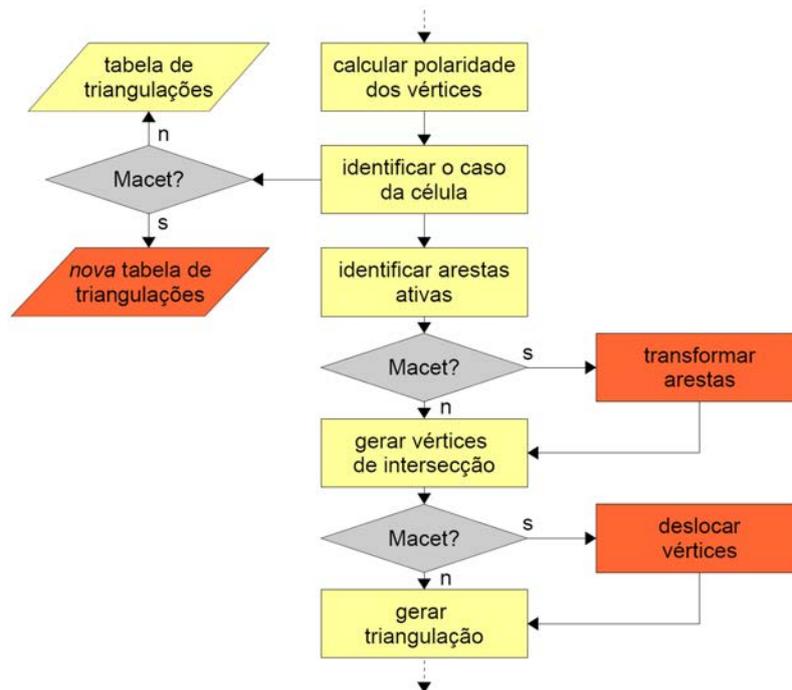


Figura 4.15: Posicionamento dos procedimentos propostos neste capítulo em relação ao MC. O fluxograma é baseado na implementação de Bourke, e mostra os passos envolvidos no processamento de cada célula do volume. Os procedimentos sugeridos são posicionados *entre* estes passos, e mantêm assim a implementação original intacta. Além disso, a independência entre as modificações permite usá-las separadamente, ainda que o melhor resultado seja obtido quando são usadas em conjunto.

gerar os resultados ilustrados no Capítulo 5 é baseada em um procedimento de biseção simples, de 8 passos, que mantêm o erro máximo em relação à isosuperfície em 0.4% do tamanho da aresta transformada, ou seja,

$$\frac{1}{28} \|e'\|,$$

onde $\|e'\|$ é o tamanho da aresta transformada. Assumindo que $\|e'\|$ é limitado a $\|e\|(\sqrt{2} + 1)$, devido à limitação usada na movimentação dos extremos das arestas na transformação do gradiente, o erro máximo imposto pelo procedimento de biseção é de 0.9% do tamanho da aresta do MC.

A implementação das transformações de arestas baseada em procedimentos iterativos tem um parâmetro crítico que influencia tanto a eficiência quanto a precisão do resultado das transformações. O parâmetro é o passo do movimento dos extremos das arestas, ou seja, o passo de incremento de α na transformação do gradiente e β na transformação tangencial. O movimento iterativo dos vértices é, basicamente, uma aproximação linear por partes do gradiente de f (transformação do gradiente) e da projeção da aresta sobre a isosuperfície (trilho da transformação do gradiente). O passo de movimento deve ser ajustado para minimizar o erro da aproximação e para maximizar a eficiência do procedimento, o que leva a escolha de um passo adaptativo, que considera a curvatura local de f a cada passo da transformação. A escolha de um passo adaptativo pode ter um impacto significativo no desempenho do procedimento, no entanto, devido ao custo computacional do cálculo

dos parâmetros necessários para a determinação do passo (curvatura de f e avaliação do sucesso do passo).

A implementação usada neste trabalho mantém os valores de α e β constantes, onde os valores efetivos foram determinados experimentalmente. (O resultado dos experimentos é ilustrado no Capítulo 5, Tabela 5.4). Ainda que a adoção de valores fixos possa comprometer a qualidade da aproximação, as condições que são assumidas pelo próprio MC na prática (células suficientemente pequenas para assumir isosuperfícies com curvatura suave) permitem a adoção de passos de movimentação suficientemente grandes para a melhora do desempenho do procedimento.

5 RESULTADOS

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados dos experimentos realizados durante a pesquisa e o desenvolvimento do Macet. Os resultados são apresentados na ordem em que os estágios do Macet foram discutidos, sendo ela: (a) a modificação da tabela de triangulações, (b) as transformações de arestas, (c) o deslocamento dos vértices sobre as arestas ativas e, finalmente, (d) os resultados obtidos com a reunião de todos os estágios do método.

Os experimentos foram aplicados à 22 conjuntos de dados escalares provenientes de tomografias computadorizadas (*Chest CT*, *Carp*, *Baby*, *Bonsai*, *Engine*, *Lobster*, *Monkey CT*, *Pig* e *Vis-Male*), ressonâncias magnéticas (*Frog* e *Monkey MRI*), resultados de simulações (*Hydrogen*, *Neghip*, *Fuel*, *Shockwave*, *Silicium* e *SPX*) e microscopia a laser (*Daisy*), todos disponíveis em <http://www9.informatik.uni-erlangen.de/External/volllib/>, além de conjuntos de dados provenientes de reconstrução de nuvens de pontos (*Laçador*¹) e dados artificiais desenhados para testes (*Cross*, *Sphere* e *Marschner-Lobb*). A Tabela 5.1 ilustra as principais características dos conjuntos de dados usados nos experimentos. O número de vértices e triângulos ilustrado na tabela indica o resultado da poligonização realizada com o MC no isovalor discriminado (λ) e grade com a mesma resolução da imagem, e não se altera nos resultados do Macet.

A implementação do MC utilizada nos experimentos foi baseada no código de Paul Bourke (2008). A implementação não contém otimizações, como o uso de múltiplas *threads* ou a remoção automática dos triângulos degenerados gerados pelo MC, com o objetivo de não beneficiar qualquer das abordagens testadas. O acesso aos conjuntos de dados foi realizado através da biblioteca *Gage*, de Gordon Kindlmann, disponível em <http://teem.sourceforge.net/gage/>. A *Gage* foi configurada em todos os experimentos para reconstruir o campo escalar através de interpolação trilinear e medir a derivada do campo escalar através dos filtros descritos por Mitchell e Netravali (1988), onde os parâmetros da filtragem foram fixados em $B = 0.0$ e $C = 0.5$, correspondentes a *spline* de Catmull-Rom.

Os experimentos foram realizados em uma CPU AMD AthlonTM 64 X2 Dual 4600+ (2.41GHz) com 1 GB de RAM. A implementação em *thread* única, no entanto, reduz o poder computacional da CPU para um único *core* de 2.41Ghz. Esta configuração foi

¹O conjunto de dados *Laçador* foi gentilmente cedido pelo Laboratório de Design e Seleção de Materiais (LdSM), do Departamento de Materiais da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Tabela 5.1: Principais características dos conjuntos de dados usados nos experimentos demonstrados neste capítulo. Os campos *número de vértices* e *número de triângulos* se referem à malha criada com o MC no isovalor ilustrado no campo λ .

Nome	Dimensões	λ	Número de vértices	Número de triângulos
Chest CT	512× 512× 43	500.5	60578	119430
Carp	256× 256× 512	1000.5	546828	1088164
Cross	64× 64× 64	100.5	4574	9240
Baby	256× 256× 98	150.5	167475	334070
Bonsai	256× 256× 256	49.5	332653	660866
Daisy	192× 180× 168	49.5	103638	201756
Engine	256× 256× 128	49.5	291220	581108
Hydrogen	128× 128× 128	12.5	32658	65304
Laçador	300× 300× 300	0	67816	135644
Marschner-Lobb	128× 128× 128	100.5	124147	246594
Neghip	64× 64× 64	12.5	24546	48820
Frog	256× 256× 44	100.5	194422	391008
Fuel	64× 64× 64	100.5	1534	3022
Lobster	301× 324× 56	30.5	160355	320140
Monkey CT	256× 256× 62	100.5	171351	342090
Monkey MRI	256× 256× 62	100.5	342344	680202
Pig	512× 512× 134	1000.5	1000402	2000786
Shockwave	64× 64× 512	100.5	11358	22100
Silicium	98× 34× 34	140.5	15574	30982
Sphere	32× 32× 32	12.5	2934	5864
SPX	128× 128× 128	0.1	58914	116668
Vis-Male	128× 256× 256	100.5	324700	649372

mantida para permitir a observação precisa (através de um procedimento sequencial) do custo de cada novo estágio adicionado ao MC.

5.2 A Mudança da Tabela de Conexões do Marching Cubes

A construção da tabela de triangulações do MC baseada no estudo da qualidade dos grupos de arestas foi discutida no Capítulo 4 (Seção 4.2). O uso deste procedimento foi exemplificado através da adoção de triangulações que não contêm triângulos gerados pelo grupo de arestas 2, como ilustrado na Figura 5.1.

A Tabela 5.2 ilustra a comparação do resultado obtido com o uso da tabela original (BOURKE, 2008) e a tabela gerada com as triangulações ilustradas na Figura 5.1. A comparação da razão entre os raios (ρ) mostra que é possível obter um ganho de qualidade de até 23 vezes em relação à tabela original, observado no conjunto de dados *Pig*. A qualidade das malhas geradas a partir dos conjuntos de dados *Cross*, *Fuel* e *Monkey MRI*, no entanto, não sofreu alteração. As malhas que não apresentaram ganho de qualidade com a nova tabela de triangulações nestes experimentos têm a qualidade determinada por triângulos que não são gerados pelos casos modificados (embora ainda sejam determi-

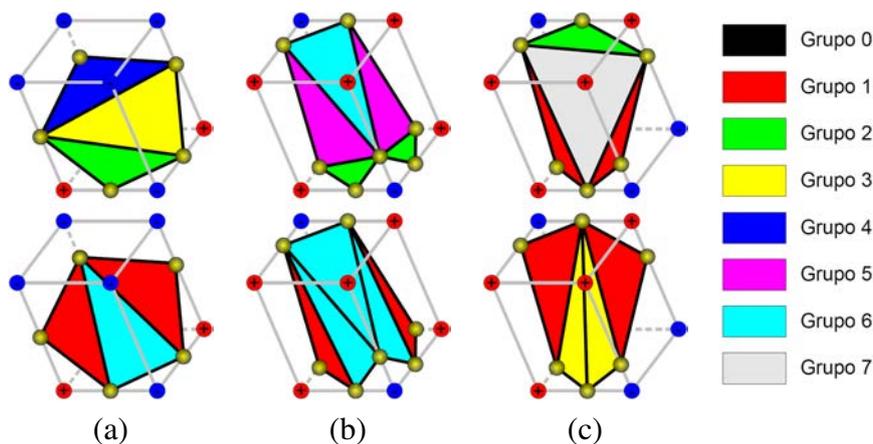


Figura 5.1: Os casos representativos do MC onde é possível alterar a triangulação e remover o grupo de arestas 2. O caso ilustrado em (b) é um caso representativo da tabela de triangulações de Bourke, e representa uma variante topológica do caso 6 do MC.

nadas por triângulos gerados pelo grupo de arestas 2), e assim não são afetadas por este estágio.

A comparação entre os ângulos interno mínimo (θ_0) e máximo (θ_∞) mostra que a qualidade da malha *caiu* em 3 malhas. Este resultado ilustra a não-correlação entre ρ e os ângulos internos, além do pequeno impacto desta modificação sobre o valor dos ângulos internos dos triângulos.

O ganho de qualidade obtido com o uso da nova tabela, ainda que seja pequeno na maior parte das malhas, é significativo ao considerar-se que a tabela de triangulações foi alterada para *aumentar a probabilidade* da geração de triângulos de boa qualidade, e que apenas três casos representativos foram modificados neste experimento. Além disso, os experimentos ilustrados na Tabela 5.5 demonstram que a nova tabela de triangulações também tem impacto sobre o resultado das transformações de arestas, com ganho de até 200% (observado no conjunto de dados *Lobster*) em relação à tabela de triangulações original.

5.3 As Transformações de Arestas

As transformações do gradiente e tangencial propostas no Capítulo 4 (Seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente) são procedimentos projetados com o objetivo de aumentar a distância entre os vértices de intersecção na célula cúbica. O aumento da distância entre os vértices de intersecção resulta no aumento da qualidade da malha, como mostram os resultados dos experimentos ilustrados na Tabela 5.3. Os resultados ilustrados na Tabela 5.3 são referentes apenas à inclusão das transformações de arestas sobre a implementação original de Bourke (2008), sem o uso da nova tabela de triangulação.

A Tabela 5.3 mostra que o menor ângulo interno mínimo (θ_0) resultante foi de 2.0752° no conjunto de dados *SPX*, e que o ângulo interno mínimo aumentou em média 1682 vezes após a aplicação das transformações. O maior aumento medido em θ_0 foi de 34576 vezes, observado na malha gerada a partir do conjunto de dados *Laçador*.

O maior ângulo interno máximo (θ_∞) resultante da aplicação das transformações foi de 169.937° , observado no conjunto de dados *SPX*. O ângulo θ_∞ diminuiu em média 23

Tabela 5.2: Comparação entre a qualidade das malhas obtidas com a tabela de triangulações original do MC e a tabela gerada com as triangulações ilustradas na Figura 5.1. As medidas da razão entre os raios do triângulo (ρ) e dos ângulos internos mínimo (θ_0) e máximo (θ_∞) mostram que é possível obter um ganho de qualidade de até 23 vezes, observado no conjunto de dados *Pig*.

Nome	Tabela Original			Tabela Modificada		
	θ_0	θ_∞	ρ	θ_0	θ_∞	ρ
Chest CT	0.0825	179	0.0001	0.0841	176.965	0.001
Carp	0.0443	179.61	1.7e-5	0.0476	178.286	0.0004
Cross	8.8076	130.253	0.2263	8.8076	130.253	0.2263
Baby	0.322	178.545	0.0003	0.3184	176.634	0.0017
Bonsai	0.3828	178.743	0.0002	0.3836	177.516	0.0009
Daisy	0.6765	177.728	0.0007	0.6863	176.693	0.0016
Engine	0.3539	178.722	0.0002	0.4033	177.835	0.0007
Hydrogen	4.4982	158.476	0.069	4.6742	143.13	0.0872
Laçador	0.0001	179.66	4.8e-7	0.0002	177.144	7.4e-6
Marschner-Lobb	0.0113	177.433	0.0001	0.0113	167.526	0.0003
Neghip	0.31	175.455	0.0031	0.2881	172.956	0.0075
Frog	0.2143	178.41	0.0003	0.2462	175.643	0.0022
Fuel	0.5917	176.025	0.0018	0.5917	176.025	0.0018
Lobster	0.5171	177.283	0.0011	0.5171	176.378	0.0019
Monkey CT	0.2344	178.027	0.0004	0.2469	174.768	0.0026
Monkey MRI	0.4432	177.47	0.0007	0.4621	177.378	0.0007
Pig	0.0274	179.721	8.8e-6	0.0383	177.917	0.0001
Shockwave	1.135	175.74	0.0027	1.1713	162.319	0.0251
Silicium	0.4249	177.465	0.0009	0.5327	168.835	0.0067
Sphere	4.2566	156.544	0.0626	4.2566	148.772	0.1205
SPX	0.0027	179.768	6.9e-6	0.0027	178.58	8.7e-5
Vis-Male	0.3891	177.465	0.0009	0.3891	176.753	0.0016

vezes, sendo que o maior ganho observado foi de 120 vezes, medido na malha gerada a partir do conjunto de dados *Pig*. A melhora no ângulo interno máximo foi medida em relação a 180° , quer dizer, em quantas vezes a diferença do ângulo em relação a 180° foi aumentada.

A menor razão entre os raios (ρ) resultante das transformações foi de 0.0153 no conjunto de dados *SPX*. A razão ρ aumentou em média 7809 vezes após a aplicação das transformações, sendo que o maior ganho observado foi de 147083 vezes, medido na malha gerada a partir do conjunto de dados *Laçador*.

Os resultados obtidos nos experimentos com as transformações mostram que a implementação atual das transformações de arestas é adequada à aplicação em isosuperfícies de baixa curvatura, da mesma forma que o método proposto por Labelle e Shewchuk (2007). Os conjuntos de dados *Laçador* e *Pig*, em especial, mostram as características da malha que favorecem à aplicação das transformações com os parâmetros usados nos experimentos.

A malha gerada na poligonização do conjunto de dados *Laçador* é suave, isto é, não apre-

Tabela 5.3: Comparação entre o resultado do MC e a aplicação das transformações de arestas. A aplicação das transformações de arestas resulta em ganho em *todos* os conjuntos de dados, que variam entre 1.3 vezes na razão entre os raios (ρ) no conjunto de dados *Cross* até 147083 vezes na razão entre os raios no conjunto de dados *Laçador*. Os ângulos interno mínimo e máximo melhoram (em média) 1682 e 23 vezes, respectivamente, ilustrando a efetividade das transformações.

Nome	MC			Transformações de Arestas		
	θ_0	θ_∞	ρ	θ_0	θ_∞	ρ
Chest CT	0.0825	179	0.0001	2.8245	164.812	0.03
Carp	0.0443	179.61	1.7e-5	3.48	157.297	0.0653
Cross	8.8076	130.253	0.2263	17.195	132.504	0.3073
Baby	0.322	178.545	0.0003	7.1877	153.069	0.1004
Bonsai	0.3828	178.743	0.0002	5.3496	152.72	0.1029
Daisy	0.6765	177.728	0.0007	4.6027	159.53	0.0564
Engine	0.3539	178.722	0.0002	9.47	138.908	0.2356
Hydrogen	4.4982	158.476	0.069	20.542	130.001	0.3386
Laçador	0.0001	179.66	4.8e-7	3.4576	156.819	0.0706
Marschner-Lobb	0.0113	177.433	0.0001	11.774	145.462	0.156
Neghip	0.31	175.455	0.0031	10.42	147.295	0.1512
Frog	0.2143	178.41	0.0003	3.1861	157.696	0.0717
Fuel	0.5917	176.025	0.0018	14.227	133.987	0.2823
Lobster	0.5171	177.283	0.0011	6.8104	151.832	0.1165
Monkey CT	0.2344	178.027	0.0004	8.4699	145.646	0.1495
Monkey MRI	0.4432	177.47	0.0007	9.3517	148.695	0.1362
Pig	0.0274	179.721	8.8e-6	6.5487	146.344	0.1153
Shockwave	1.135	175.74	0.0027	14.369	133.783	0.2875
Silicium	0.4249	177.465	0.0009	10.67	142.075	0.1991
Sphere	4.2566	156.544	0.0626	20.316	127.103	0.3726
SPX	0.0027	179.768	6.9e-6	2.0752	169.937	0.0153
Vis-Male	0.3891	177.465	0.0009	4.2187	148.545	0.1203

senta regiões de curvatura elevada (*sharp features*). Nestas condições, o uso de 8 passos na construção do trilho da transformação tangencial e no deslocamento do vértice na direção do vetor gradiente é suficiente para aproximar o comportamento da isosuperfície e de ∇f , respectivamente, e favorece a aplicação das transformações. A malha gerada na poligonização do conjunto de dados *SPX*, no entanto, é formada por regiões de curvatura elevada, o que dificulta a aproximação das trajetórias dos vértices da grade. Ainda que o número de passos possa ser aumentado para melhorar a qualidade da aproximação, o aumento do número de passos também compromete o desempenho do método, como é observado nos resultados ilustrados na Tabela 5.4.

A Tabela 5.4 mostra que o custo computacional das transformações de arestas aumenta *linearmente* em relação ao número de passos usados no cálculo da trajetória dos vértices. O número de passos *ótimo*, no entanto, está relacionado à curvatura da isosuperfície, e a sua determinação depende do comportamento do campo escalar. Ainda assim, os experimentos que envolvem as transformações de arestas ilustrados neste capítulo usam 8 passos no cálculo da trajetória dos vértices, com objetivo de demonstrar a influência

Tabela 5.4: Resultado dos testes realizados para avaliar o impacto do número de passos usados no cálculo da trajetória dos vértices nas transformações de arestas. Cada linha da tabela mostra o número de passos usados no cálculo da trajetória dos vértices da grade (n), o tempo necessário para o cálculo e combinação das transformações (*tempo*) e as qualidades das malhas geradas medidas através do ângulo interno mínimo (θ_0) e da razão entre os raios (ρ). Os experimentos mostram que, enquanto o custo das transformações é linear em relação ao número de passos usados, a qualidade das malhas é aproximadamente estável após 6 ou 9 passos.

n	<i>Bonsai</i>			<i>Engine</i>			<i>Silicium</i>		
	<i>tempo</i>	θ_0	ρ	<i>tempo</i>	θ_0	ρ	<i>tempo</i>	θ_0	ρ
1	89.9	5.16	0.09	52.5	9.73	0.29	1.2	11.71	0.23
2	90.4	5.38	0.17	51.6	11.86	0.29	1.3	15.27	0.32
3	91.4	9.32	0.18	53.5	12.66	0.29	1.4	13.01	0.37
4	91.9	10.04	0.16	55.2	13.81	0.29	1.4	14.2	0.37
5	93	8.1	0.16	56.5	13.81	0.29	1.5	14.3	0.35
6	94.9	8.76	0.16	60.9	13.81	0.29	1.6	15.57	0.34
7	99.5	10.04	0.19	60.7	13.82	0.29	1.7	15.61	0.34
8	99.6	10.03	0.19	62.4	13.82	0.29	1.8	15.6	0.34
9	100.8	10.03	0.19	64.3	13.82	0.29	1.9	15.6	0.34
10	104.3	10.04	0.21	69.1	13.82	0.29	2.0	15.61	0.34
11	104.8	10.04	0.21	69.7	13.82	0.29	2.1	15.6	0.34
12	106.8	10.04	0.21	71.8	13.82	0.29	2.2	15.6	0.34
13	110.5	10.04	0.21	72.2	13.82	0.29	2.3	15.61	0.34
14	110.7	10.03	0.21	74.3	13.82	0.29	2.4	15.61	0.34
15	113.1	10.03	0.21	76.3	13.82	0.29	2.5	15.6	0.34
16	114.7	10.03	0.21	77.5	13.82	0.29	2.6	15.6	0.34
17	116.8	10.03	0.21	78.1	13.82	0.29	2.7	15.6	0.34
18	118.9	10.03	0.21	80.1	13.82	0.29	2.8	15.61	0.34
19	120.6	10.03	0.21	84.3	13.82	0.29	2.9	15.61	0.34
20	122.9	10.03	0.21	83.2	13.82	0.29	3.0	15.61	0.34

deste parâmetro e a qualidade dos resultados obtidos sem que seja considerado qualquer conhecimento prévio sobre os conjuntos de dados.

A Figura 5.2 ilustra a comparação dos resultados das transformações aplicadas separadamente aos conjuntos de dados *Engine* e *Marschner-Lobb*. A figura mostra que os resultados das transformações, embora semelhantes na maior parte da malha, são diferentes em regiões onde a isosuperfície é *plana* ou possui alta curvatura. Em regiões planas, a transformação tangencial obtém melhores resultados, devido à restrição na movimentação dos vértices da grade usada na transformação do gradiente. A restrição no movimento dos vértices, ainda que necessária na manutenção da consistência da malha, limita também o ganho obtido com a transformação do gradiente. Em regiões de alta curvatura, no entanto, a transformação do gradiente obtém melhores resultados, devido à dificuldade em calcular o trilho da transformação tangencial. Estes resultados ilustram o caráter complementar destas transformações, e a necessidade de combinar os resultados de ambas para garantir a melhora na qualidade da malha.

O resultado da aplicação das transformações de arestas também é influenciado pela cons-

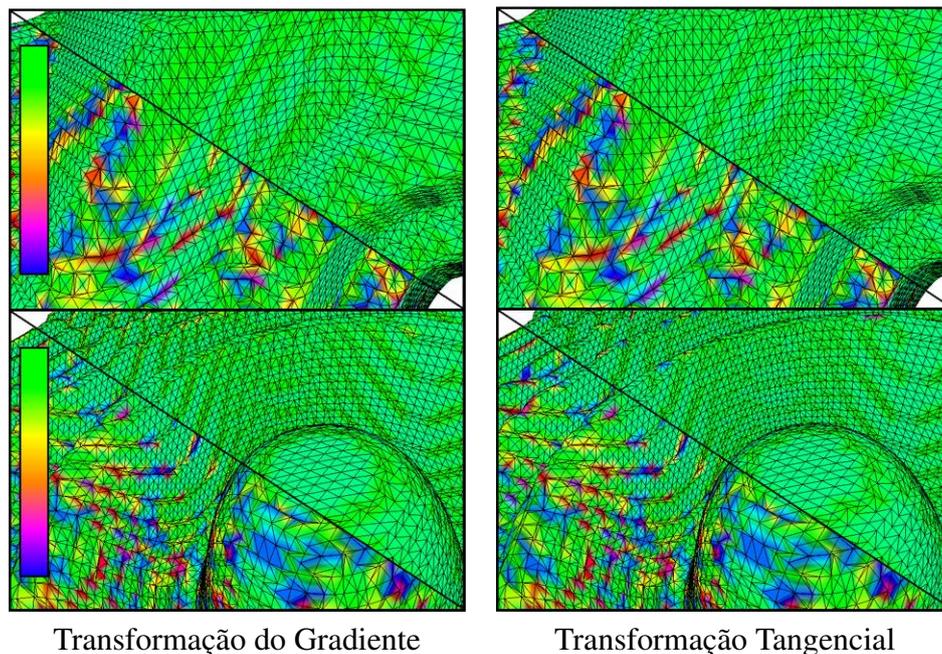


Figura 5.2: Comparação entre o resultado das transformações do gradiente e tangencial nos conjuntos de dados *Engine* (primeira linha) e *Marschner-Lobb* (segunda linha). Cada *screenshot* ilustra o resultado do MC (abaixo da linha diagonal da imagem) e o resultado da aplicação da transformação de arestas (acima da linha diagonal). Os resultados ressaltam o caráter *complementar* das transformações; enquanto a transformação do gradiente obtém melhores resultados em regiões de curvatura elevada, como pode ser observado nas *sharp features* do conjunto de dados *Marschner-Lobb*, a transformação tangencial obtém melhores resultados em regiões planares, como pode ser observado no conjunto de dados *Engine*.

trução da tabela de triangulações, como é observado na Tabela 5.5. A Tabela 5.5 mostra que a aplicação das transformações sobre a tabela de triangulações discutida na Seção 5.2 resulta em malhas de qualidade até 2.12 vezes superiores em relação à tabela de triangulações original (BOURKE, 2008), observada no conjunto de dados *Lobster*.

Os resultados ilustrados na Tabela 5.5 estabelecem uma relação entre as transformações de arestas e a conectividade da malha, no entanto, ainda que as transformações operem apenas sobre a *geometria* da malha. Este resultado se deve, em parte, à eliminação do grupo de arestas 2 da nova tabela de triangulação; o grupo 2 tem uma grande probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade *mesmo após a transformação de arestas*, como pode ser observado na Tabela 4.2 (Capítulo 4), e a sua eliminação também contribui para a melhora dos resultados alcançados com as transformações de arestas.

5.4 O Deslocamento dos Vértices de Intersecção ao Longo das Arestas Ativas

O deslocamento dos vértices de intersecção foi proposto com o objetivo de afastar os vértices de intersecção dos extremos das arestas ativas *sem considerar o comportamento da isosuperfície*. Ao desconsiderar o comportamento da isosuperfície, o deslocamento

Tabela 5.5: Comparação entre os resultados da aplicação das transformações de arestas sobre a tabela de triangulações original (BOURKE, 2008) e a tabela de triangulações apresentada na Seção 5.2. A aplicação das transformações sobre a nova tabela de triangulações melhora em até 2.12 vezes a qualidade da malha, ainda que as transformações não operem sobre a conectividade entre os vértices de intersecção.

Nome	Tabela Original		Nova Tabela	
	MC	Macet	MC	Macet
Silicium	0.0015	0.2603	0.0179	0.3445
Engine	0.0004	0.2927	0.0008	0.2927
Bonsai	0.0001	0.1686	0.0015	0.1949
Lobster	0.0008	0.1165	0.0015	0.2471

dos vértices de intersecção atua mesmo em regiões de curvatura elevada, e complementa o resultado das transformações de arestas. Ainda assim, o deslocamento dos vértices de intersecção também pode ser usado isoladamente, como mostram os resultados ilustrados na Tabela 5.6.

O ganho obtido com a aplicação do deslocamento dos vértices, ao contrário das transformações de arestas, não está ligado às características da isosuperfície. O parâmetro g controla o deslocamento do vértice sobre a aresta e determina o ganho obtido, ainda que seja inversamente proporcional ao erro de aproximação introduzido pelo deslocamento. Os resultados ilustrados na Tabela 5.6, por exemplo, foram obtidos com $g = 0.3$, e poderiam ser significativamente maiores à medida em que g se aproximasse de 0. O erro de aproximação introduzido pela diminuição de g , no entanto, seria proporcional à melhora na qualidade da malha.

5.5 O Macet

O Macet é formado pela inclusão dos estágios de transformações de arestas e deslocamento de vértices no MC. Além disso, o Macet também prevê que a tabela de triangulações deve diminuir a probabilidade de geração de triângulos de baixa qualidade, ou seja, a tabela deve ser construída com o objetivo de minimizar a ocorrência de grupos de arestas de baixa qualidade.

Os estágios do Macet podem ser usados separadamente, como demonstrado nos experimentos das seções anteriores. Ainda assim, o maior ganho de qualidade é observado quando as três modificações são usadas em conjunto. A partir da modificação da tabela de triangulações do MC, cada modificação é projetada para complementar o resultado obtido pela modificação anterior. O resultado da combinação dos estágios é ilustrado na Tabela 5.7.

A Tabela 5.7 mostra que os ganhos de qualidade obtidos com o Macet podem ser de até 127840 vezes no ângulo interno mínimo (θ_0), observado no conjunto de dados *Laçador*. As menores qualidades obtidas, de 5.9312° em θ_0 , 150.652° em θ_∞ e 0.1113 em ρ , são 71.8, 18.4 e 371 vezes maiores, respectivamente, do que as qualidades obtidas com o MC. Além disso, os conjuntos de dados onde os menores ganhos de qualidade foram observados são os que apresentam as isosuperfícies com curvatura mais elevada (*Chest*

Tabela 5.6: Comparação entre o resultado do MC e o resultado do deslocamento dos vértices de intersecção ao longo das arestas ativas. O deslocamento dos vértices de intersecção resulta em ganho em *todos* os conjuntos de dados, onde o ganho é determinado pelo parâmetro da função (*Gain*) que implementa o deslocamento. Os resultados obtidos com *Gain* parametrizada em 0.3 mostram ganhos de 1.07 no ângulo interno máximo do triângulo (θ_∞), observado no conjunto de dados *Cross*, até 416 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados *Laçador*.

Nome	MC			Deslocamento de Vértices		
	θ_0	θ_∞	ρ	θ_0	θ_∞	ρ
Chest CT	0.0825	179	0.0001	1.2894	172.392	0.0087
Carp	0.0443	179.61	1.7e-5	1.0034	175.066	0.0033
Cross	8.8076	130.253	0.2263	15.868	126.545	0.3501
Baby	0.322	178.545	0.0003	2.7859	169.972	0.0152
Bonsai	0.3828	178.743	0.0002	2.9875	170.868	0.0126
Daisy	0.6765	177.728	0.0007	4.074	167.615	0.0232
Engine	0.3539	178.722	0.0002	2.7784	170.728	0.013
Hydrogen	4.4982	158.476	0.069	10.876	142.821	0.1976
Laçador	0.0001	179.66	4.8e-7	0.0345	175.393	0.0002
Marschner-Lobb	0.0113	177.433	0.0001	0.5677	168.361	0.0091
Neghip	0.31	175.455	0.0031	2.7265	163.257	0.0421
Frog	0.2143	178.41	0.0003	2.2032	169.395	0.017
Fuel	0.5917	176.025	0.0018	3.8101	163.693	0.0363
Lobster	0.5171	177.283	0.0011	3.4598	166.342	0.0281
Monkey CT	0.2344	178.027	0.0004	2.3102	168.456	0.0183
Monkey MRI	0.4432	177.47	0.0007	3.2872	167.096	0.0228
Pig	0.0274	179.721	8.8e-6	0.7368	175.738	0.0025
Shockwave	1.135	175.74	0.0027	4.7954	162.539	0.0458
Silicium	0.4249	177.465	0.0009	2.9038	166.532	0.0274
Sphere	4.2566	156.544	0.0626	10.392	143.659	0.1649
SPX	0.0027	179.768	6.9e-6	0.2648	176.084	0.0022
Vis-Male	0.3891	177.465	0.0009	3.1407	166.592	0.0271

CT e *Frog*), o que ressalta a adequação das transformações a malhas de curvatura suave. Entre as malhas de curvatura suave, como a malha extraída a partir do conjunto de dados *Laçador*, por exemplo, os ganhos de qualidade chegam a 127840 vezes em θ_0 e 604792 vezes em ρ . A Figura 5.3 ilustra a comparação entre o Macet e alguns dos métodos mais comuns para a geração de malhas de boa qualidade, onde é ressaltada a boa qualidade da malha gerada pelo Macet.

Os resultados alcançados pelo Macet na poligonização de isosuperfícies de curvatura suave sugerem que o método tem uma limitação semelhante ao *isosurface stuffing* de Labelle e Shewchuk (2007). A limitação da qualidade alcançada, no entanto, se resume ao estágio de transformações de arestas, como mostra a Tabela 5.3. A restrição à aplicação em malhas suaves pode então ser removida caso seja proposta uma transformação que tenha sucesso em qualquer situação, ou seja, uma transformação que combine os procedimentos das transformações do gradiente e tangencial.

Os resultados do Macet (e também dos seus estágios em separado) mostram que a melhora

Tabela 5.7: Comparação entre os resultados do MC e do Macet. A combinação dos estágios de transformação de arestas e deslocamento dos vértices com a nova tabela de triangulações discutida na Seção 5.2 resulta na melhoria de qualidade de *todas* as malhas geradas. O ganho de qualidade varia entre 1.5 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados *Cross*, até 604792 vezes na razão entre os raios (ρ), observado no conjunto de dados *Laçador*. Ainda que a razão entre a qualidade das malhas obtidas com o Macet e o MC seja pequena em algumas situações, o ganho de qualidade é significativo em todos os experimentos demonstrados.

Nome	MC			Macet		
	θ_0	θ_∞	ρ	θ_0	θ_∞	ρ
Chest CT	0.0825	179	0.0001	5.9312	150.646	0.1262
Carp	0.0443	179.61	1.7e-5	9.846	142.276	0.2016
Cross	8.8076	130.253	0.2263	19.768	129.129	0.3499
Baby	0.322	178.545	0.0003	8.977	137.19	0.2392
Bonsai	0.3828	178.743	0.0002	10.037	142.005	0.1949
Daisy	0.6765	177.728	0.0007	9.9937	145.388	0.1723
Engine	0.3539	178.722	0.0002	13.822	133.828	0.2927
Hydrogen	4.4982	158.476	0.069	22.872	127.278	0.3723
Laçador	0.0001	179.66	4.8e-7	12.784	134.139	0.2903
Marschner-Lobb	0.0113	177.433	0.0001	14.906	141.167	0.2078
Neghip	0.31	175.455	0.0031	14.597	137.305	0.2549
Frog	0.2143	178.41	0.0003	6.6186	150.652	0.1113
Fuel	0.5917	176.025	0.0018	17.199	123.076	0.4243
Lobster	0.5171	177.283	0.0011	12.289	135.491	0.2471
Monkey CT	0.2344	178.027	0.0004	12.127	135.962	0.2613
Monkey MRI	0.4432	177.47	0.0007	11.139	134.745	0.2791
Pig	0.0274	179.721	8.8e-6	8.4971	133.228	0.2536
Shockwave	1.135	175.74	0.0027	19.923	124.839	0.4022
Silicium	0.4249	177.465	0.0009	15.609	128.977	0.3445
Sphere	4.2566	156.544	0.0626	26.484	120.169	0.4618
SPX	0.0027	179.768	6.9e-6	7.8038	147.975	0.1375
Vis-Male	0.3891	177.465	0.0009	10.600	142.94	0.1966

do ângulo interno mínimo é pequena em relação à melhora do ângulo interno máximo e da razão entre os raios. O ângulo interno mínimo é influenciado, no entanto, pela valência (número de vizinhos) de cada vértice de intersecção. O maior ângulo interno mínimo possível *diminui* à medida em que a valência dos vértices do triângulo *aumenta*, o que mostra que a conectividade entre os vértices de intersecção pode limitar o ganho obtido com o método. O Macet não altera a conectividade entre os vértices de intersecção, no entanto, e pode ter desempenho inferior aos métodos baseados no colapso de triângulos de baixa qualidade na melhora do ângulo interno mínimo dos triângulos.

O erro de aproximação introduzido pelo Macet é determinado pelo erro introduzido pelo deslocamento dos vértices de intersecção. O erro introduzido pelo deslocamento dos vértices é maior do que o erro introduzido pelas transformações, já que as transformações mantêm os vértices de intersecção sobre a isosuperfície, o que também mantêm o seu erro comparável ao erro de aproximação do MC.

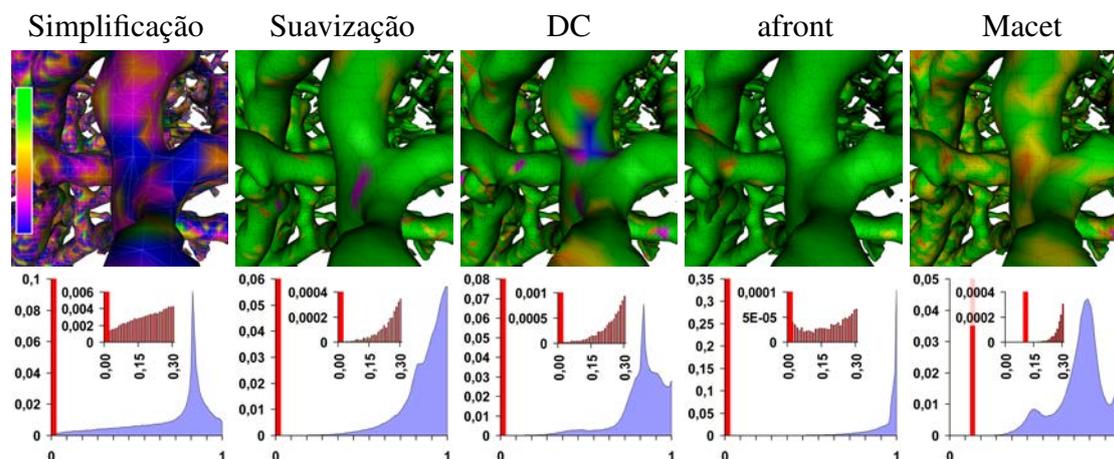


Figura 5.3: Comparação entre os resultados da simplificação da malha gerada pelo MC (90% da malha original, usando a distância à malha original como critério de simplificação), da suavização da malha gerada pelo MC (*Laplacian smoothing*), do Dual Contouring, do afront e do Macet na poligonização do conjuntos de dados *Bonsai*. A primeira linha ilustra as malhas resultantes, onde a cor de cada vértice é determinada pela qualidade (razão entre os raios) do pior triângulo incidente ao vértice, e o mapeamento entre o valor de qualidade e a cor final é realizado segundo o mapa de cores ilustrado à esquerda. Ainda que a visualização da malha mostre que os métodos são capazes de gerar triângulos de boa qualidade, os histogramas de qualidade mostram que apenas o Macet é capaz de gerar *malhas* de boa qualidade, como é indicado pelas barras vermelhas sobre os histogramas. Cada barra vermelha indica, no histograma e no detalhe do histograma (ilustrado em vermelho), a posição do pior triângulo da malha.

O custo computacional do Macet é um dos aspectos mais importantes da sua proposta, e é apresentado na Tabela 5.8. O custo da geração da malha no Macet é proporcional ao número de arestas ativas, ou seja, ao número de vértices da malha gerada. Cada aresta ativa deve ser transformada e o vértice de intersecção (após o cálculo da posição do vértice ao longo da aresta) deve ser deslocado, onde o custo computacional é dominado pela transformação da aresta.

A transformação de uma aresta requer $2n$ consultas ao campo escalar, onde n é o número de passos usados nas transformações. Cada consulta reconstrói o valor escalar de f e calcula o vetor ∇f , o que, por sua vez, transfere o custo computacional das transformações ao custo de consulta do campo escalar. Esta característica é exemplificada nos resultados observados nos conjuntos de dados *Hydrogen* e *Marschner-Lobb*, que possuem o mesmo número de células ($128 \times 128 \times 128$). O MC gera a malha a partir dos conjuntos de dados em aproximadamente 8 segundos, onde aproximadamente 5.4 segundos são consumidos no acesso ao campo escalar (tomando como base o desempenho da biblioteca *Gage* na CPU onde os experimentos foram realizados) e o restante do tempo é consumido na construção da triangulação. O Macet, no entanto, gera as mesmas malhas em 11.3 (*Hydrogen*) e 20.17 (*Marschner-Lobb*) segundos. A diferença no desempenho do Macet para conjuntos de dados com o mesmo número de células está no número de arestas ativas; a malha gerada a partir do conjunto de dados *Marschner-Lobb* tem 4 vezes mais vértices do que a malha gerada a partir do conjunto de dados *Hydrogen*, e o custo das transformações das arestas adicionais domina o custo da poligonização.

O custo computacional das transformações de arestas, no entanto, é amortizado pela própria biblioteca *Gage*. Os acessos ao campo escalar realizados durante a transformação de uma aresta são próximos, isto é, na vizinhança da aresta, o que permite a manutenção do *cache* de dados da biblioteca. O *cache*, por sua vez, amortiza o custo da reconstrução do valor de f durante o cálculo das transformações, e diminui o custo computacional do *Macet*.

Tabela 5.8: Comparação entre os desempenhos do MC e do *Macet*. O custo computacional do *Macet* é dominado pelo procedimento de transformação de arestas, que realiza acessos adicionais ao campo escalar no deslocamento dos vértices da grade. Estes acessos ainda exigem a continuidade de ∇f , e assim aumentam a complexidade da reconstrução de f e ∇f . O desempenho do *Macet* em alguns conjuntos de dados, como o *Chest CT* e o *SPX*, por exemplo, também é afetado pela implementação das transformações de arestas. Estes conjuntos de dados são formados por regiões de alta curvatura, que causam a interrupção das transformações de arestas, e resultam em desempenhos superiores aos demais conjuntos de dados, ainda que em detrimento da qualidade da malha.

Nome	MC (seg)	<i>Macet</i> (seg)
Chest CT	40.68	46.96
Carp	124.6	176.7
Cross	0.9	1.29
Baby	25.64	41.89
Bonsai	66.97	97.88
Daisy	22.21	31.71
Engine	34.1	60.9
Hydrogen	8.21	11.03
Laçador	99.74	105.9
Marschner-Lobb	8.75	20.17
Neghip	1.09	3.28
Frog	11.28	28.94
Fuel	0.87	1.02
Lobster	19.38	34.01
Monkey CT	15.25	30.86
Monkey MRI	18.32	49.85
Pig	134.7	228.3
Shockwave	7.07	8.18
Silicium	0.45	1.83
Sphere	0.12	0.37
SPX	8.32	12.4
Vis-Male	31.88	61.82

6 DISCUSSÃO

6.1 Introdução

A proposta dos *Grupos de Arestas* e dos procedimentos que compõem o algoritmo *Macet* são significativamente diferentes das propostas encontradas em trabalhos relacionados (HALL; WARREN, 1990) (GIBSON, 1998) (NIELSON, 2004) (TZENG, 2004) (WOOD et al., 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). As principais diferenças podem ser resumizadas nos seguintes itens:

- Uma nova visão sobre o funcionamento do MC: Os grupos de arestas permitem avaliar a construção de cada triângulo *antes* da geração da malha, ou seja, o estudo da eficácia da própria célula do ponto de vista da qualidade dos triângulos gerados. O estudo da qualidade dos métodos de poligonização vem sendo feito, em geral, com base na observação de situações específicas que ocorrem nas malhas geradas (TZENG, 2004) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Os grupos de aresta, por outro lado, permitem o estudo de *todas* as situações possíveis sem a necessidade da observação de resultados experimentais.
- A manutenção da topologia gerada pelo MC: A correção da topologia da malha gerada pelo MC tem sido tema de diversos trabalhos nos últimos anos (GELDER; WILHELMS, 1994) (CHERNYAEV, 1995) (TREECE; PRAGER; GEE, 1999) (LEWINER et al., 2003) (LOPES; BRODLIE, 2003) (NIELSON, 2003a). A qualidade e a topologia da malha, no entanto, são conceitos *independentes*. A independência entre estes conceitos foi explorada neste trabalho, onde foram propostos métodos que alteram a posição e a conectividade entre os vértices de intersecção e mantém a topologia da malha gerada intacta.
- A *quebra* da célula: A transformação tangencial é significativamente diferente de outras abordagens que propõem a deformação da grade do MC. Enquanto a transformação do gradiente pode ser vista como um *warping*, semelhante ao proposto por Tzeng (TZENG, 2004) e Labelle e Shewchuk (LABELLE; SHEWCHUK, 2007) (ainda que no sentido contrário), a transformação tangencial *desconecta* as arestas ativas. A quebra da grade, à primeira vista, comprometeria a consistência da malha resultante. A transformação tangencial mostra, no entanto, que a conectividade e a geometria dos vértices de intersecção são determinadas independentemente na geração da malha. Enquanto a célula atua na determinação da conectividade entre os vértices de intersecção, a *aresta ativa* é o elemento que atua no cálculo da geometria do vértice de intersecção, e pode ser tratada independentemente.

Estas e outras características podem gerar questionamentos sobre a eficiência e/ou eficácia do Macet. As seções a seguir tem como objetivo esclarecer algumas destas dúvidas, sendo focadas nos principais pontos de discussão que surgiram entre os desenvolvedores e os revisores dos artigos produzidos ao longo deste trabalho.

6.1.1 A Consistência das Malhas Geradas pelo Macet

As transformações de arestas alteram significativamente a grade do MC. A grade é tanto deformada (transformação do gradiente) quanto desconectada (transformação tangencial), o que poderia comprometer a consistência e a orientação da malha gerada. Estas propriedades são garantidas, no entanto, por duas características do método:

- O compartilhamento das arestas entre as células adjacentes: As transformações de arestas operam *independentemente* sobre cada aresta ativa e o seu cálculo leva em conta apenas parâmetros *locais*, sobre a própria aresta ou sobre o campo escalar ao seu redor. Estas condições garantem que o resultado da transformação seja *idêntico para todas as células que compartilham a aresta*, seja este calculado quatro vezes (uma vez para cada célula) ou uma única vez, e indexado para o uso na etapa de construção das conexões da triangulação (Figura 6.1). Em geral, as implementações do MC calculam a intersecção entre cada aresta ativa e a isosuperfície uma única vez. O resultado do cálculo é armazenado sob um índice conhecido por todas as células adjacentes e reutilizado na construção da triangulação de cada célula. Neste contexto, a transformação da aresta também ocorre uma única vez, garantindo a consistência da triangulação gerada nas células adjacentes.
- O conjunto de condições observado durante a aplicação das transformações: As transformações das arestas são procedimentos iterativos, que avaliam a manutenção das condições de manutenção da consistência da malha descritas no Capítulo 4 (Seção 4.3) a cada iteração. As condições garantem, basicamente, que os vértices de intersecção continuam a existir (a aresta permanece ativa) e que a orientação dos triângulos não é alterada. A manutenção das condições é realizada na implementação do algoritmo, através de testes realizados a cada iteração e através da limitação do movimento dos extremos das arestas.

As duas características garantem a consistência da malha gerada pelo Macet. Ainda que ambas objetivem o desempenho do algoritmo e sejam guiadas por decisões de implementação, elas garantem os resultados apresentados no Capítulo 5.

6.1.2 A Adequação da Malha Gerada pelo Macet à Aplicações de Mecânica Computacional

O particionamento do domínio geométrico realizado pelo MC pode não ser adequado para a geração de malhas usadas em aplicações de Mecânica Computacional. O MC não leva em conta características que podem ser importantes na solução do problema, como regiões onde a malha deve ser refinada (ou simplificada) para a representação de regiões de curvatura elevada (ou regiões planas) do domínio geométrico, como ilustra a Figura 6.2. O objetivo deste trabalho é, no entanto, lidar com a qualidade das malhas geradas pelo MC. Ainda que sejam necessários outros procedimentos para adaptar a malha gerada pelo Macet às exigências destas aplicações, o passo dado aqui é o primeiro e fundamental,

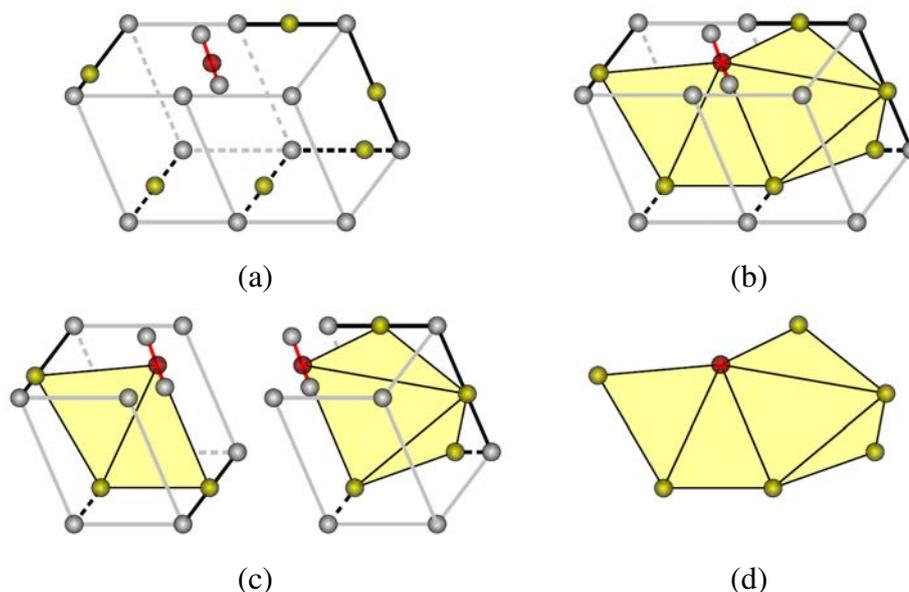


Figura 6.1: Manutenção da consistência da malha nas transformações de arestas. Na implementação de Bourke, cada aresta ativa é processada uma única vez (a), e o resultado do processamento é indexado e usado na construção da triangulação das células adjacentes (b), o que garante que o resultado da transformação seja visível a todas as células adjacentes. No caso de uma implementação que processe cada célula independentemente (c), o resultado da transformação de duas arestas com extremos nas mesmas posições será *idêntico*, o que garante a consistência da malha resultante (d).

e pode motivar a realização de trabalhos adicionais.

A adaptação dos elementos às características geométricas do domínio, por outro lado, também pode levar a problemas de condicionamento da matriz de rigidez (estrutura que caracteriza a resistência dos membros frente a deformações), como discutem dos Santos, Scheer e Siqueira (SANTOS; SCHEER, 2003). Embora fora do escopo deste trabalho, este argumento é importante para o suporte do MC como candidato a polgonizador de isosuperfícies em aplicações de Mecânica Computacional.

6.1.3 A Medida da Qualidade da Malha

A qualidade dos triângulos foi avaliada neste trabalho com três métricas, sendo elas: (1) o menor ângulo interno do triângulo (θ_0), (2) o maior ângulo interno do triângulo (θ_∞) e (3) a razão entre os raios dos círculos inscrito e circunscrito no triângulo (ρ). O trabalho de Pebay e Baker (2001), no entanto, discute *seis* métricas para a avaliação da qualidade de triângulos. As métricas são agrupadas de acordo com características associadas ao seu comportamento, como a existência de um ponto de mínimo (relacionado à qualidade do triângulo ótimo) e a resposta da medida aos triângulos com formato de *agulha* (triângulo com um ângulo interno próximo de 0°) e *achatado* (triângulo com um ângulo interno próximo de 180°). A determinação das métricas de qualidade usadas neste trabalho foi baseada na resposta das métricas a cada uma destas características, segundo a avaliação de Pebay e Baker (2001). Os parágrafos a seguir discutem outras métricas de qualidade de triângulos, com ênfase na sua relação com as métricas usadas neste trabalho.

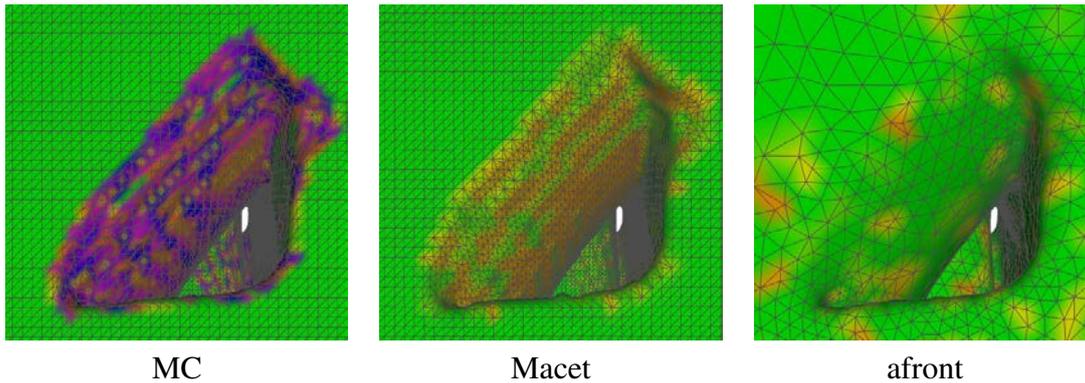


Figura 6.2: Comparação entre a amostragem realizada pelo MC, Macet e afront no conjunto de dados *Engine*. O MC mantém a densidade de amostras homogênea em regiões planas da isosuperfície (o que não é modificado pelo Macet), enquanto algoritmos com o afront distribuem as amostras de acordo com a curvatura da isosuperfície.

A razão entre a maior e a menor aresta (τ), por exemplo,

$$\tau = \frac{l_{\infty}}{l_0}$$

não penaliza os triângulos com ângulos internos próximos de 0° e 180° igualmente, ou seja, não é *simétrica*. As razões entre arestas e o raio do círculo circunscrito

$$\frac{R}{l_0}, \frac{R}{l_{\infty}}, \nu = \frac{R}{p}$$

têm comportamento similar ou inferior a ρ (razão entre os raios) no que se refere a distância do triângulo ao triângulo equilátero. Ainda que razão entre o raio do círculo circunscrito e o semiperímetro (ν) tenha um resultado semelhante a ρ , ρ é mais sensível à variação dos ângulos internos (PEBAY; BAKER, 2001). A razão entre as arestas e o raio do círculo inscrito

$$\frac{p}{r}, \iota = \frac{l_{\infty}}{r}$$

também tem um comportamento semelhante a ρ . A razão ι (comumente chamada de razão de aspecto (PEBAY; BAKER, 2001)), embora seja usada como medida de qualidade em aplicações de elementos finitos, também é assimétrica. As métricas de qualidade derivadas da *matriz de arestas* propostas por Baker (BAKER, 2000) e discutidas por Pebay e Baker (PEBAY; BAKER, 2001) também têm, na prática, comportamento semelhante a ρ na avaliação das características da malha, importantes no contexto deste trabalho.

As métricas de qualidade de triângulos também podem quantificar o impacto da qualidade do triângulo sobre a aplicação, ou seja, avaliar o impacto do aspecto do triângulo sobre o sucesso do processamento subsequente da malha. Estas métricas foram (e são) desenvolvidas principalmente na área de Mecânica Computacional, onde é analisado como a forma do triângulo influencia na convergência da solução do problema, nos erros de interpolação, no condicionamento dos sistemas que representam o comportamento do objeto

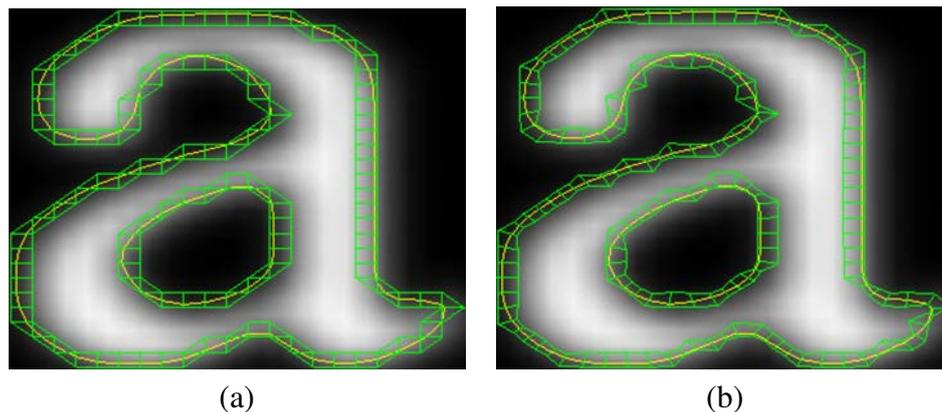


Figura 6.3: Uso das transformações de arestas na construção de uma nova subdivisão do domínio de f . A transformação das células uniformes (a) resulta em um novo conjunto de células adaptado a curvatura da isosuperfície (b). As células transformadas *envolvem* a isosuperfície e podem ser usadas, por exemplo, como ponto de partida para um método de poligonização adaptativo.

discretizado, etc. (SANTOS; SCHEER, 2003). Não existe um consenso, no entanto, sobre uma medida capaz de estimar a adequação de um triângulo de forma unificada e completa, devido às várias aplicações possíveis dentro da Mecânica Computacional. Esta observação tem motivado o uso de medidas mais simples e abrangentes, como a delimitação dos ângulos internos máximo e mínimo ou a razão entre os raios, por exemplo, que são computacionalmente simples e de fácil avaliação.

6.1.4 A Nova Grade Formada pelas Arestas Transformadas

A transformação das arestas ativas resulta em um conjunto de arestas aproximadamente perpendiculares à isosuperfície. Tomando-se o conjunto de arestas transformadas e a conectividade definida entre os vértices de intersecção, é possível definir uma nova grade que envolve a isosuperfície, como é ilustrado na Figura 6.3.

A nova grade é formada por um conjunto de poliedros que envolve a isosuperfície. Os poliedros são definidos pela varredura dos triângulos (geratrizes) sobre as arestas ativas (diretrizes). No caso da isosuperfície plana, por exemplo, a grade é formada por um conjunto de prismas de base triangular. Cada célula (poliedro) desta grade contém um retalho da isosuperfície e parte do espaço ao seu redor, o que pode ser uma propriedade interessante para algumas aplicações. A nova grade pode ser usada como ponto de partida para algoritmos de subdivisão adaptativa, por exemplo, onde cada célula é um subdomínio de f que pode ser submetido a um novo procedimento de poligonização.

A grade ilustrada na Figura 6.3 também motiva a extrapolação das transformações de arestas para o conjunto de arestas *não-ativas*. A transformação tangencial pode, por exemplo, reposicionar as arestas em relação ao comportamento de f , sem a necessidade de um isovalor previamente especificado. O resultado deste procedimento é a adaptação de todas as arestas da grade ao comportamento de f , que também pode motivar a proposta de novas aplicações ou abordagens de poligonização.

6.1.5 A Combinação entre os Métodos para a Melhoria da Qualidade da Malha

Os resultados ilustrados no Capítulo 5 mostram que a qualidade das malhas geradas pelo Macet pode ser até 1000 vezes superior à qualidade das malhas geradas pelo MC. O ganho de qualidade é observado mesmo em isosuperfícies com regiões de curvatura elevada, como a isosuperfície 500.5 do conjunto de dados *Chest CT*, por exemplo. A qualidade que o Macet pode alcançar, no entanto, é restringida pela simplicidade e eficiência que o algoritmo deve manter em sua implementação. Esta limitação sugere que a qualidade da malha gerada pelo Macet pode ser melhorada com a aplicação de métodos de pós-processamento, como a suavização (*smoothing*). O ganho obtido com o Macet também pode contribuir na operação de métodos de pós-processamento, reduzindo o esforço necessário para a obtenção de uma malha de alta qualidade, o que torna o Macet uma opção interessante na construção de um *pipeline* de poligonização.

A Figura 6.4 mostra o resultado de um experimento que combina o Macet a um suavizador de malhas baseado em um sistema massa-mola. O suavizador, basicamente, transforma a malha em um sistema dinâmico onde os vértices atuam como pontos de massa e as arestas como molas. O sistema foi parametrizado com valores de massa e tamanhos de molas em repouso unitários, com o objetivo de homogeneizar a distribuição dos vértices sobre a isosuperfície ao longo das iterações. Ao fim de cada iteração, os vértices são reposicionados sobre a isosuperfície por um procedimento de descida do gradiente, o que mantém a qualidade da aproximação da malha.

O objetivo do experimento foi determinar se a aplicação do Macet realmente influencia a operação do método de pós-processamento. A Figura 6.4 ilustra como a malha resultante do Macet injeta menos energia no sistema, devido a distribuição *quase*-homogênea dos vértices sobre a isosuperfície. Esta característica possibilita alcançar malhas de alta qualidade em menos iterações do sistema dinâmico, o que pode ser uma característica interessante, devido ao custo computacional associado ao cálculo de cada iteração.

6.1.6 A Aplicação das Propostas à Poligonizadores Baseados em Tetraedros

A análise dos grupos de arestas discutida no Capítulo 3 pode ser estendida para outros poligonizadores baseados no MC, como o Marching Tetrahedra (BLOOMENTHAL, 1988) (PAYNE; TOGA, 1990) e o Marching Octahedra (CARR; THEUSSL; MÖLLER, 2003), que também geram vértices sobre (e somente sobre) as arestas da célula. A análise dos grupos de arestas de células tetraédricas envolve, no entanto, mais atributos das arestas do que a análise das células cúbicas. As células tetraédricas podem ser formadas por arestas de comprimentos diferentes, com ângulos internos que variam entre as conexões das arestas, cujas características contrastam com a uniformidade da célula cúbica. A busca pelos grupos de aresta representativos da célula tetraédrica também deve considerar estes dois parâmetros.

A qualidade dos grupos de arestas é ilustrada no Capítulo 3 (Figuras 3.16 e 3.17). A análise de qualidade é realizada sobre os tetraedros resultantes da triangulação de Delaunay de uma grade BCC (*Body Centered Cubic*) e da triangulação de Kuhn (MOORE, 1992), como ilustrado na Figura 6.5. O resultado da análise, considerando operações de rotação e reflexão na determinação dos casos representativos, é a determinação de quatro grupos de arestas para o tetraedro BCC e nove grupos de arestas para o tetraedro de Kuhn.

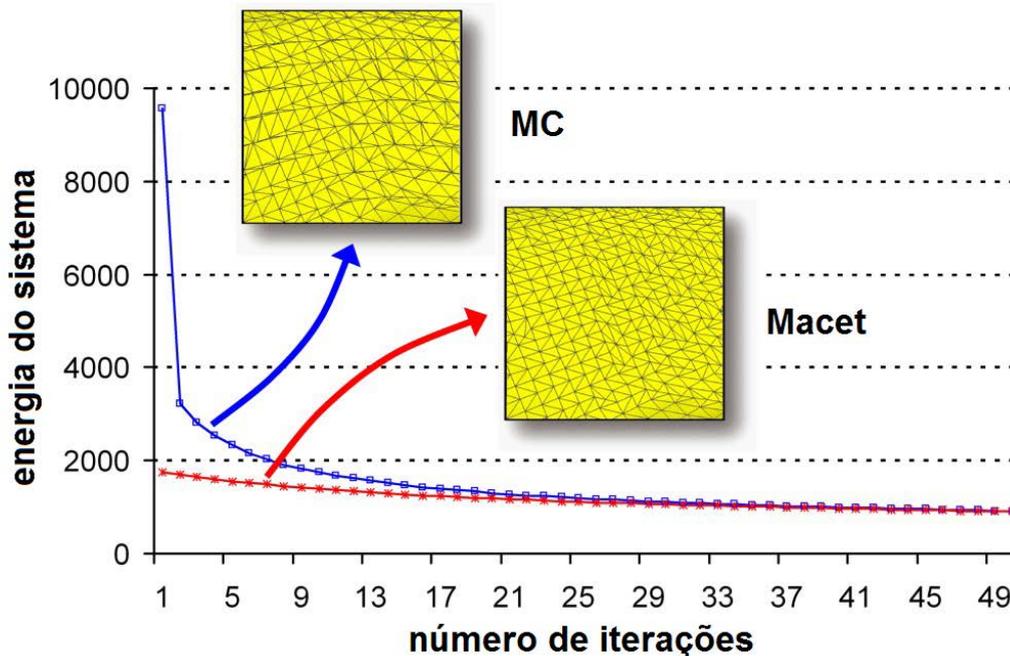


Figura 6.4: Comparação entre a suavização das malhas geradas pelo MC e pelo Macet a partir do conjunto de dados *Engine*. O procedimento de suavização implementado neste experimento transforma a malha em um sistema dinâmico onde os vértices atuam como pontos de massa e as arestas como molas. O gráfico relaciona a energia acumulada no sistema (soma da energia potencial acumulada nas molas) ao número de iterações realizadas. O resultado da suavização é mostrado pela queda da energia potencial do sistema, resultante da homogeneização dos tamanhos das arestas, e da conseqüente melhora da qualidade da malha. O Macet, como ilustra o gráfico, injeta menos energia no sistema devido a boa qualidade da malha gerada, o que possibilita alcançar malhas de alta qualidade em menos iterações.

As figuras ilustram que a qualidade de cada grupo de arestas é, basicamente, dependente da forma do tetraedro. Ainda que esta seja uma conclusão intuitiva, ela corrobora a intuição de que o tetraedro resultante da triangulação de Delaunay da grade BCC tem maior chance de gerar triângulos de boa qualidade em comparação ao tetraedro de Kuhn (LABELLE; SHEWCHUK, 2007).

A forma alongada do tetraedro de Kuhn, além de prejudicar a qualidade dos triângulos gerados, também prejudica o resultado das transformações de arestas. A transformação tangencial, em especial, pode resultar em mudanças na orientação dos triângulos em algumas situações. A mudança de orientação é resultante da diferença entre os tamanhos das arestas do tetraedro de Kuhn, que variam entre 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ na célula unitária. A aplicação da transformação tangencial sobre arestas de tamanhos diferentes resulta em quantidades de movimento *diferentes* para cada vértice de intersecção, e conseqüentemente na mudança de orientação dos triângulos definidos entre estes vértices. Ainda que seja possível determinar algoritmicamente um limite para o movimento tangencial no tetraedro de Kuhn, esta observação revela que a característica alongada desta célula pode exigir outro tipo de transformação para a melhora da qualidade dos triângulos gerados. Esta característica será estudada em trabalhos futuros, e pode levar a uma generalização da proposta das transformações de arestas.

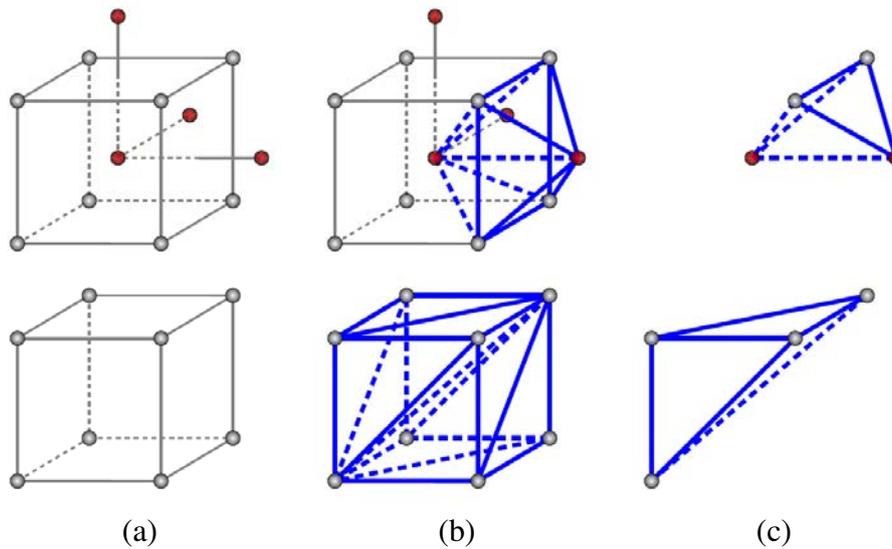


Figura 6.5: Tetraedros resultantes da triangulação de Delaunay de uma grade BCC (*Body Centered Cubic*), ilustrados na primeira linha, e da triangulação de Kuhn, ilustrados na segunda linha. As triangulações, ilustradas na coluna (b), geram grupos de tetraedros idênticos, como os exemplos ilustrados na coluna (c). A grade BCC posiciona um vértice no centróide de cada célula cúbica, o que resulta em uma tetraedralização com três grupos de tetraedros como os ilustrados na primeira linha da coluna (b), onde cada grupo é orientado na direção de um dos eixos (o grupo ilustrado é orientado na direção do eixo X).

6.1.7 As Características dos Conjuntos de Dados

Os conjuntos de dados usados no desenvolvimento e na avaliação deste trabalho foram escolhidos a partir dos seguintes critérios:

- A visibilidade do conjunto de dados na comunidade acadêmica. O objetivo deste critério é facilitar a reprodutibilidade dos experimentos demonstrados neste trabalho, ao usar conjuntos de dados conhecidos e disponíveis aos demais grupos de pesquisa. Os conjuntos de dados usados neste trabalho estão disponíveis em <http://www9.informatik.uni-erlangen.de/External/vollib/>.
- A geração de malhas com o maior número possível de casos distintos do MC. Este critério tem o objetivo de permitir a avaliação dos procedimentos propostos neste trabalho no maior número de situações possíveis, ainda que esta característica esteja ligada à escolha do isovalor.
- A geração de malhas com casos topologicamente ambíguos. O objetivo deste critério é avaliar o impacto de triangulações possivelmente incorretas nas transformações de arestas.
- A geração de malhas com números significativamente diferentes de elementos, o que permite avaliar o impacto dos procedimentos sugeridos neste trabalho sobre o desempenho do MC.
- A geração de malhas com regiões de baixa e alta curvatura. Esta característica permite tanto testar a eficácia da implementação da transformação de arestas em re-

Tabela 6.1: Características dos principais conjuntos de dados usados no desenvolvimento do Macet. Os conjuntos de dados usam a maior parte (245) da tabela de triangulações do MC e possuem um número significativo de casos ambíguos, servindo aos testes de modificação da tabela de triangulação e aos testes do desempenho das transformações frente a casos ambíguos, respectivamente.

Nome	Dimensões	λ	vértices/ triângulos	Células ativas	Casos usados	Casos ambíguos
Silicium	98×34×34	140.5	15574/30982	15133	165	129
Lobster	301×324×56	30.5	160355/320140	158566	249	2971
Engine	256×256×128	49.5	291220/581108	290425	142	94
Bonsai	256×256×256	49.5	332653/660866	327989	245	6937

giões de alta curvatura quanto avaliar o erro inserido pelo deslocamento de vértices de intersecção em regiões de baixa curvatura.

A partir destes critérios foram escolhidos quatro conjuntos de dados provenientes de tomografias computadorizadas (*Bonsai*, *Engine* e *Lobster*) e simulações (*Silicium*) para o desenvolvimento deste trabalho, que foi posteriormente aplicado aos demais conjuntos de dados listados no Capítulo 5. As principais características destes conjuntos de dados são sumarizadas na Tabela 6.1.

O uso de conjuntos de dados que resultam em células topologicamente ambíguas foi uma decisão determinante na condução dos experimentos. A importância desta característica é motivada pela conjectura de que triangulações incorretas prejudicam o resultado das transformações de arestas. Os experimentos demonstraram, no entanto, que *nenhuma* das malhas teve a qualidade prejudicada por esta característica. Ainda que experimentos subseqüentes tenham determinado que as células topologicamente ambíguas não eram responsáveis pela geração de triângulos de baixa qualidade, os dados experimentais ainda não são suficientes para refutar esta afirmação.

7 CONCLUSÃO

7.1 Contribuições

A necessidade de melhorar os resultados gerados pelo MC foi identificada logo após a sua proposta, e gerou um grande número de trabalhos nestas últimas duas décadas (aproximadamente 4844 trabalhos baseados no MC segundo o GoogleTM Scholar). As razões que motivam estas propostas são identificadas ao primeiro contato com o algoritmo, quando ficam claras a sua simplicidade, eficiência e robustez. Seguindo esta linha de pesquisa, o objetivo deste trabalho foi atacar um dos pontos fracos do MC, ou seja, a baixa qualidade das malhas geradas. A melhora da qualidade da malha gerada possibilita o uso do MC em aplicações de modelagem, seja a modelagem artística usada em jogos eletrônicos ou a modelagem com cálculos precisos usada em simulações de Mecânica Computacional. Esta última aplicação tem um apelo cada vez maior atualmente, e o uso do MC para a geração das malhas onde são realizadas as simulações é uma abordagem muito interessante. Para possibilitar esta abordagem, foram propostos neste trabalho um estudo sobre o funcionamento do MC e uma série de modificações no algoritmo original, que resultaram na proposta do Macet (**M**arching **C**ubes using **E**dge **T**ransformations).

O estudo do funcionamento do MC deu origem aos *Grupos de Arestas*, que ajudam a explicar a qualidade dos triângulos gerados pelo MC e outros métodos de poligonização baseados em subdivisão espacial. Os grupos de arestas foram propostos para o estudo do modo como cada triângulo é gerado no MC, permitindo a visualização e a quantificação de *onde* e *como* os triângulos de baixa qualidade são gerados. A formulação dos grupos de arestas seguiu o mesmo tipo de análise usado na construção dos casos do MC, ao observar o modo como as arestas podem ser combinadas para gerar triângulos no interior da célula. Ainda que tenham sido identificados e discutidos sobre o MC, os grupos de arestas podem ser identificados em qualquer poligonizador que gera os pontos de intersecção ao longo das arestas das suas células, como o Marching Tetrahedra (BLOOMENTHAL, 1988) (PAYNE; TOGA, 1990) e o Marching Octahedra (CARR; THEUSSL; MÖLLER, 2003).

A proposta dos grupos de arestas permitiu identificar e resolver algumas situações onde triângulos de baixa qualidade são gerados. Estas situações foram resolvidas através da proposta de três modificações no MC, sendo elas: (1) um critério para conduzir a construção da tabela de triangulações, (2) a transformação das arestas ativas e (3) o deslocamento dos vértices de intersecção sobre as arestas ativas.

A primeira modificação é a proposta de um novo critério para conduzir a construção da tabela de triangulações do MC. O critério tem como objetivo o aumento da qualidade da

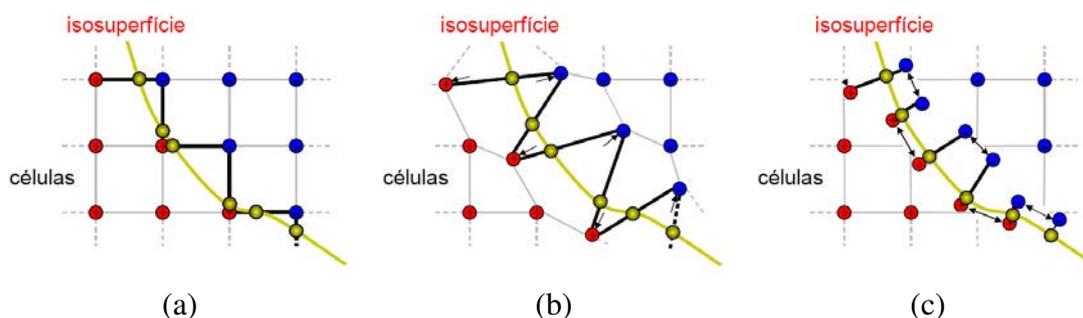


Figura 7.1: Representação gráfica das transformações de arestas. A transformação das arestas do MC (a) é realizada através do movimento dos extremos das arestas ativas na direção do gradiente (b) e na direção tangente a isosuperfície (c). Este movimento resulta, como ilustra a figura, no aumento da distância entre os vértices de intersecção.

malha gerada, através do uso de triangulações que não resultem nos grupos de arestas que têm maior probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade. A eficácia desta abordagem foi demonstrada em um experimento onde os grupos de arestas foram ordenados em relação à qualidade dos triângulos gerados e as triangulações foram modificadas para eliminar os grupos de aresta de menor qualidade. O experimento foi direcionado à eliminação do grupo de arestas 2, que apresenta a maior probabilidade de gerar triângulos de baixa qualidade. A eliminação do grupo de arestas 2 de três casos representativos do MC resultou em uma melhora significativa da qualidade da malha gerada, sem qualquer outra alteração no algoritmo original.

A construção da tabela de triangulações conduzida por um critério de qualidade é (até a conclusão deste trabalho) uma abordagem inovadora. Nielson (NIELSON, 2003b), por exemplo, propõe um critério que resulta em triangulações onde a estrela de cada vértice pode ser representada por um mapa de alturas em relação à qualquer dos planos cartesianos. Outros autores também propõem modificações na tabela original para a solução de ambigüidades topológicas (NIELSON; HAMANN, 1991) (CHERNYAEV, 1995) (NIELSON, 2003a) (LEWINER et al., 2003). O uso da qualidade da malha como critério na definição da triangulação, no entanto, ainda não foi explorado, e também pode ser aplicado em conjunto com alguns destes métodos.

A segunda modificação no MC implementa a deformação da grade através das *Transformações de Arestas*. O objetivo desta modificação é reposicionar as arestas ativas para maximizar a distância entre os vértices de intersecção. Esta abordagem foi proposta com base nas observações realizadas sobre o modo como os grupos de arestas geram triângulos de baixa qualidade. O estudo dos grupos de arestas permite observar que alguns dos triângulos de baixa qualidade são gerados quando a isosuperfície está próxima ao encontro entre duas arestas de um mesmo grupo, o que motivou a criação de um procedimento que maximiza a distância entre os extremos das arestas ativas. O resultado da transformação é um conjunto de arestas aproximadamente perpendiculares à isosuperfície. Basicamente, a motivação e o resultado da aplicação das transformações de arestas podem ser visualizados na Figura 7.1 (reprodução do Capítulo 4).

A proposta das transformações de arestas é baseada na conjectura que arestas (localmente) perpendiculares a isosuperfície maximizam a distância entre os vértices de intersecção. Esta conjectura é controversa, no entanto, pois existem infinitos conjuntos de arestas perpendiculares à isosuperfície que não são capazes de atender a este requisito. Ainda assim,

neste trabalho foi apresentada uma linha de raciocínio que leva naturalmente a esta conclusão e a um único conjunto válido de arestas transformadas.

As arestas perpendiculares são, na verdade, uma consequência do movimento que afasta os extremos das arestas da isosuperfície. Este movimento, por sua vez, é uma consequência da observação de que a proximidade entre os extremos das arestas ativas e a isosuperfície resulta em triângulos de baixa qualidade. Assim, a eficiência do conjunto de arestas perpendiculares à isosuperfície é uma consequência da observação dos grupos de arestas, e não um pré-requisito aplicado ao posicionamento das arestas da grade do MC.

A terceira modificação no MC implementa o deslocamento dos vértices ao longo das arestas ativas. Este estágio foi desenhado para resolver os casos onde as transformações de arestas não podem ser aplicadas com sucesso, pois nem sempre é possível maximizar a distância entre os vértices de intersecção. O deslocamento dos vértices de intersecção, sendo parametrizável e controlado pelo usuário, oferece a oportunidade de comprometer parte da qualidade de aproximação (distância entre a malha gerada e a isosuperfície definida pelo interpolante) em razão da qualidade da malha. Esta característica pode ser importante em aplicações práticas, onde o usuário, especialista no domínio da aplicação, é capaz de avaliar as consequências envolvidas nesta troca. A aplicação do deslocamento dos vértices de intersecção sobre o resultado das transformações de arestas resultou em malhas com qualidade até 1500 vezes maior do que as geradas pelo MC (observado no conjunto de dados *Bonsai* com parâmetro g fixado em 0.3).

O conjunto de modificações propostas resulta no Macet. O Macet é simples e eficiente, gera malhas com qualidade de aproximação igual ou superior à do MC (devido à redistribuição de amostras sobre a isosuperfície), e, o mais importante, gera malhas onde os triângulos de baixa qualidade ainda têm qualidade comparável ou superior aos métodos disponíveis atualmente. As principais propostas nesta área (até a realização deste trabalho) são o método de *remeshing* de Schreiner, Scheidegger e Silva (2006), o método de refinamento de malhas de Dey e Levine (2007) e o sistema de partículas de Meyer, Kirby e Whitaker (2007). Em comum, estes trabalhos têm a busca por uma nova abordagem de poligonização (rastreamento de isosuperfícies, refinamento de malhas base e métodos pseudo-físicos, respectivamente), o custo associado à geração da malha e a falta de uma das características mais apreciadas no MC, ou seja, a *robustez*. Ainda que resultem em malhas adaptadas às características da isosuperfície e que sejam construídos sobre uma forte base matemática, nenhum destes algoritmos pode garantir a melhora da qualidade da malha em relação ao MC. De fato, a qualidade de malha alcançada até o momento por estes algoritmos é igual ou inferior a reportada neste trabalho.

O Macet também mantém intacta a estrutura do MC, quer dizer, não altera os principais passos do algoritmo original. Esta característica permite que algumas das principais otimizações propostas para o MC ainda sejam válidas no Macet, como as estruturas de aceleração de Livnat, Shen e Johnson (1996) e de Dyken et al. (2007). A proposta do Macet foi publicada em dois artigos, que demonstram seus resultados experimentais (DIETRICH et al., 2008) e a análise da qualidade da malha gerada pelo MC (DIETRICH et al., 2008).

7.2 Trabalhos Futuros

Os procedimentos propostos neste trabalho são significativamente diferentes das propostas encontradas em trabalhos dedicados à melhora da qualidade da malha gerada pelo MC (BERN; EPPSTEIN; GILBERT, 1994) (TZENG, 2004) (RAMAN; WENGER, 2008) (LABELLE; SHEWCHUK, 2007). Em face a uma nova forma de observar um algoritmo bem estabelecido e a procedimentos que alteram o seu funcionamento básico, é possível enumerar uma série de alternativas e novas possibilidades de pesquisa. Os itens a seguir mostram algumas alternativas e possibilidades identificadas no desenvolvimento deste trabalho:

- O estudo das informações contidas nos grupos de arestas: Os grupos de arestas permitem uma nova visão sobre o funcionamento do MC. Este trabalho foi baseado em uma observação parcial das informações contidas nesta visão, no entanto, e o estudo das características associadas a cada grupo é uma possibilidade interessante para a melhoria ou para o desenvolvimento de novos métodos de poligonização.
- A proposta da transformação de arestas “ótima”: As transformações do gradiente e tangencial foram propostas para atuar em regiões da isosuperfície de curvatura elevada e suave, respectivamente, devido a dificuldade em definir uma transformação que atuasse em qualquer situação. A proposta de duas transformações ainda exigiu a construção de um procedimento para a combinação dos seus resultados. A construção de uma transformação que atuasse em qualquer situação eliminaria tanto a necessidade deste procedimento quanto da aplicação de duas transformações, contribuindo assim com o desempenho do Macet.
- A determinação das regiões da isosuperfície onde a grade deve ser transformada e os vértices de intersecção devem ser deslocados: Os grupos de arestas 4, 5 e 7 não geram triângulos de baixa qualidade, o que sugere que as arestas e os vértices de intersecção destes grupos não devem ser modificados. Além disso, um procedimento que permitisse identificar onde cada procedimento deveria ser aplicado poderia contribuir com o desempenho e a qualidade da malha gerada. A independência entre os estágios do Macet permite a aplicação desta abordagem, e a sua realização pode enriquecer a proposta do Macet.
- O estudo das propriedades da grade gerada pelas transformações de arestas: A grade gerada pela transformação das arestas ativas envolve a isosuperfície, e é adaptada à geração de triângulos de boa qualidade. A extensão desta abordagem para as demais arestas da grade, através da transformação tangencial, resulta na criação de uma grade adaptada ao comportamento da função f . O uso desta nova grade para a construção de um poligonizador adaptativo, por exemplo, pode ser uma abordagem interessante.
- O estudo dos grupos de arestas das tabelas de desambiguação: Alguns autores propõem o uso de tabelas de triangulação estendidas para a solução da ambiguidade topológica dos casos representativos do MC (NIELSON; HAMANN, 1991) (CHERNYAEV, 1995) (LEWINER et al., 2003) (NIELSON, 2003a). Além de triangulações com topologias distintas, algumas destas tabelas incluem casos onde vértices de intersecção são adicionados no interior da célula. Estes vértices têm posições pré-determinadas e criam uma nova situação na análise dos grupos de arestas. Os grupos de arestas, nestes casos, podem incluir dois vértices que têm posições de-

finidas sobre arestas e um vértice estacionário. A análise da qualidade, ainda assim, permanece idêntica, ainda que o espaço q tenha apenas dois parâmetros. Esta possibilidade permite que a análise dos grupos de arestas seja aplicada na construção da tabela de triangulações nestes métodos, e assim resulte na melhora da qualidade da malha gerada.

- A aplicação das transformações de arestas nos métodos duais: Os métodos duais, como o Dual Contouring de Ju et al. (2002), geram malhas onde os elementos não apresentam o aspecto ruim dos triângulos gerados pelo MC. O Dual Contouring, em especial, surgiu como um dos poligonizadores de maior sucesso nos últimos anos, devido a combinação da simplicidade e qualidade do Surface Nets (GIBSON, 1998) à precisão do Extended Marching Cubes (KOBBELT et al., 2001). A qualidade dos triângulos gerados¹, no entanto, ainda é baixa, devido à orientação do método à eficiência. Este cenário motiva a aplicação dos procedimentos de deformação das células em métodos como o Dual Contouring, onde o objetivo é obter células que maximizem a distância entre os vértices gerados.

¹ Ainda que o Dual Contouring resulte em malhas de quadriláteros, a implementação usada neste trabalho converte as malhas de quadriláteros em malhas de triângulos, para efeitos de comparação com os demais métodos.

REFERÊNCIAS

- ANSYS. **ICEM CFD CAD & STL repair**. [S. l.], 2008. 1 DVD-ROM.
- ARAÚJO, B. R. de; JORGE, J. A. P. Curvature Dependent Polygonization of Implicit Surfaces. In: SIBGRAPI '04: PROCEEDINGS OF THE XVII BRAZILIAN SYMPOSIUM ON COMPUTER GRAPHICS AND IMAGE PROCESSING, Washington, DC, USA. **Anais...** IEEE Computer Society, 2004. p.266–273.
- ARTZY, E.; FRIEDER, G.; HERMAN, G. T. The Theory, Design, Implementation and Evaluation of a Three-dimensional Surface Detection Algorithm. **ACM SIGGRAPH Computer Graphics**, New York, NY, USA, v.14, n.3, p.2–9, 1980.
- BABUSKA, I.; AZIZ, A. K. On the Angle Condition in the Finite Element Method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, [S.l.], v.13, n.2, p.214–226, April 1976.
- BAJAJ, C. et al. **Physical Simulation of the Visible Human Joints**. Washington D.C., 1996.
- BAJAJ, C. L.; PASCUCCI, V.; SCHIKORE, D. R. Fast Isocontouring for Improved Interactivity. In: VVS '96: PROCEEDINGS OF THE 1996 SYMPOSIUM ON VOLUME VISUALIZATION, Piscataway, NJ, USA. **Anais...** IEEE Press, 1996. p.39–ff.
- BAKER, T. Deformation and Quality Measures for Tetrahedral Meshes. In: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING (ECCOMAS 2000), Barcelona, Spain. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2000.
- BERN, M.; EPPSTEIN, D.; GILBERT, J. Provably Good Mesh Generation. **Journal of Computer and System Sciences**, Orlando, FL, USA, v.48, n.3, p.384–409, 1994.
- BLOOMENTHAL, J. Polygonization of Implicit Surfaces. **Computer Aided Geometrical Design**, Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, v.5, n.4, p.341–355, 1988.
- BOURKE, P. **Polygonising a Scalar Field**. Disponível em <<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/polygonise/index.html>>. Acesso em: jun. 2008.
- BRUIN, P. W. de et al. Improving Triangle Mesh Quality with SurfaceNets. In: MICCAI '00: PROCEEDINGS OF THE THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON MEDICAL IMAGE COMPUTING AND COMPUTER-ASSISTED INTERVENTION, London, UK. **Anais...** Springer-Verlag, 2000. p.804–813.

CARR, H.; THEUSSL, T.; MÖLLER, T. Isosurfaces on Optimal Regular Samples. In: VISSYM '03: PROCEEDINGS OF THE SYMPOSIUM ON DATA VISUALISATION 2003, Aire-la-Ville, Switzerland, Switzerland. **Anais...** Eurographics Association, 2003. p.39–48.

CHERNYAEV, E. **Marching Cubes 33**: construction of topologically correct isosurfaces. [S.l.]: European Organization for Nuclear Research (CERN), 1995. (CN 95-17).

CIGNONI, P.; ROCCHINI, C.; SCOPIGNO, R. **Metro**: measuring error on simplified surfaces. Paris, France: Centre National de la Recherche Scientifique, 1996. (1996-B4-01-01).

CROSSNO, P.; ANGEL, E. Isosurface Extraction Using Particle Systems. In: IEEE VIS '97: PROCEEDINGS OF THE 8TH CONFERENCE ON VISUALIZATION '97, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1997. p.495–498.

DIETRICH, C. A. et al. Edge Groups: an approach to understanding the mesh quality of marching methods. In: IEEE VIS '08: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '08, Columbus, Ohio, USA. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. p.(to appear).

DIETRICH, C. et al. Edge Transformations for Improving Mesh Quality of Marching Cubes. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], p.(to appear), April 2008.

DYKEN, C. et al. **HistoPyramids in Iso-Surface Extraction**. [S.l.]: Max-Planck-Institut für Informatik, 2007. (MPI-I-2007-4-006).

ENGEL, K.; KRAUS, M.; ERTL, T. High-quality pre-integrated volume rendering using hardware-accelerated pixel shading. In: HWWS '01: PROCEEDINGS OF THE ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS WORKSHOP ON GRAPHICS HARDWARE, New York, NY, USA. **Anais...** ACM, 2001. p.9–16.

ERIKSSON, M.; FLEMMER, H.; WIKANDER, J. **A Haptic and Virtual Reality Skull Bone Surgery Simulator**. Pisa, Italy, 2005.

FANG, D. et al. Extracting Geometrically Continuous Isosurfaces from Adaptive Mesh Refinement Data. In: HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCES, 2004. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2004. p.216–224.

FIGUEIREDO, L. H. de et al. Physically-Based Methods for Polygonization of Implicit Surfaces. In: CONFERENCE ON GRAPHICS INTERFACE '92, San Francisco, CA, USA. **Proceedings...** Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1992. p.250–257.

GELDER, A. van; WILHELMS, J. Topological Considerations in Isosurface Generation. **ACM Transactions on Graphics**, New York, NY, USA, v.13, n.4, p.337–375, 1994.

GEOSOFT INC. **Target for ArcGIS**. [S. l.], 2008. 1 DVD-ROM.

GIBSON, S. F. F. Constrained Elastic Surface Nets: generating smooth surfaces from binary segmented data. In: MICCAI '98: PROCEEDINGS OF THE FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON MEDICAL IMAGE COMPUTING AND COMPUTER-ASSISTED INTERVENTION, London, UK. **Anais...** Springer-Verlag, 1998. p.888–898.

HALL, M.; WARREN, J. Adaptive Polygonalization of Implicitly Defined Surfaces. **IEEE Computer Graphics and Applications**, Los Alamitos, CA, USA, v.10, n.6, p.33–42, 1990.

HARTMANN, E. A Marching Method for the Triangulation of Surfaces. **The Visual Computer**, [S.l.], v.14, n.3, p.95 – 108, July 1998.

HERMAN, G. T.; LIU, H. K. Three-dimensional Display of Human Organs from Computed Tomograms. **Computer Graphics and Images Processing**, [S.l.], v.9, n.1, p.1–21, 1979.

HO, C.-C. et al. Cubical Marching Squares: adaptive feature preserving surface extraction from volume data. **Computer Graphics Forum**, [S.l.], v.24, n.3, p.537–545, 2005.

INSELBERG, A.; DIMSDALE, B. Parallel Coordinates: a tool for visualizing multi-dimensional geometry. In: VIS '90: PROCEEDINGS OF THE 1ST CONFERENCE ON VISUALIZATION '90, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1990. p.361–378.

ITOH, T.; KOYAMADA, K. Isosurface Generation by Using Extrema Graphs. In: IEEE VIS '94: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '94, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1994. p.77–83.

IWANO, T. M. **Uso da Aplicação Normal de Gauss na Poligonização de Superfícies Implícitas**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Campina Grande.

JU, T. et al. Dual Contouring of Hermite Data. **ACM Transactions on Graphics**, New York, NY, USA, v.21, n.3, p.339–346, 2002.

KAICK, O. M. van; PEDRINI, H. A Comparative Evaluation of Metrics for Fast Mesh Simplification. **Computer Graphics Forum**, [S.l.], v.25, n.2, p.197–210, June 2006.

KARKANIS, T.; STEWART, A. J. High Quality, Curvature-Dependent Triangulation of Implicit Surfaces. **IEEE Computer Graphics and Applications**, Los Alamitos, CA, USA, v.21, n.2, p.60–69, 2001.

KOBBELT, L. P. et al. Feature Sensitive Surface Extraction from Volume Data. In: ACM SIGGRAPH '01: PROCEEDINGS OF THE 28TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, New York, NY, USA. **Anais...** ACM Press, 2001. p.57–66.

LABELLE, F.; SHEWCHUK, J. R. Isosurface Stuffing: fast tetrahedral meshes with good dihedral angles. **ACM Transactions on Graphics**, New York, NY, USA, v.26, n.3, p.57, 2007.

LEVOY, M. Display of Surfaces from Volume Data. **IEEE Computer Graphics and Applications**, Los Alamitos, CA, USA, v.8, n.3, p.29–37, 1988.

LEWINER, T. et al. Efficient Implementation of Marching Cubes' Cases with Topological Guarantees. **Journal of Graphics Tools**, [S.l.], v.8, n.2, p.1–15, 2003.

LIVNAT, Y.; SHEN, H.-W.; JOHNSON, C. R. A Near Optimal Isosurface Extraction Algorithm Using the Span Space. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.2, n.1, p.73–84, 1996.

LOPES, A.; BRODLIE, K. Improving the Robustness and Accuracy of the Marching Cubes Algorithm for Isosurfacing. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, Piscataway, NJ, USA, v.9, n.1, p.16–29, 2003.

LORENSEN, B. **It Started in July 1984 with a Seminar by Carl Crawford**. Disponível em <http://www.marchingcubes.org/index.php/Marching_Cubes>. Acesso em: jun. 2008.

LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching Cubes: a high resolution 3d surface construction algorithm. In: ACM SIGGRAPH '87: PROCEEDINGS OF THE 14TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, New York, NY, USA. **Anais...** ACM, 1987. p.163–169.

MEYER, M. et al. Particle Systems for Efficient and Accurate High-Order Finite Element Visualization. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.13, n.5, p.1015–1026, 2007.

MEYER, M.; KIRBY, R. M.; WHITAKER, R. Topology, Accuracy, and Quality of Isosurface Meshes Using Dynamic Particles. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.13, n.6, p.1704–1711, November/December 2007.

MITCHELL, D. P.; NETRAVALI, A. N. Reconstruction Filters in Computer Graphics. **SIGGRAPH Computer and Graphics**, New York, NY, USA, v.22, n.4, p.221–228, 1988.

MONTANI, C.; SCATENI, R.; SCOPIGNO, R. Discretized Marching Cubes. In: IEEE VIS '94: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '94, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1994. p.281–287.

MOORE, D. W. **Simplicial Mesh Generation with Applications**. [S.l.]: Cornell University, Dept. of Computer Science, 1992. (TR92-1322).

NEWMAN, T. S.; YI, H. A Survey of the Marching Cubes Algorithm. **Computers & Graphics**, [S.l.], v.30, n.5, p.854–879, October 2006.

NIELSON, G. M. On Marching Cubes. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.9, n.3, p.283–297, 2003.

NIELSON, G. M. MC*: star functions for marching cubes. In: VIS '03: PROCEEDINGS OF THE 14TH IEEE VISUALIZATION 2003 (VIS'03), Washington, DC, USA. **Anais...** IEEE Computer Society, 2003. p.9.

NIELSON, G. M. Dual Marching Cubes. In: IEEE VIS '04: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '04, Washington, DC, USA. **Anais...** IEEE Computer Society, 2004. p.489–496.

NIELSON, G. M.; HAMANN, B. The Asymptotic Decider: resolving the ambiguity in marching cubes. In: VIS '91: PROCEEDINGS OF THE 2ND CONFERENCE ON VISUALIZATION '91, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1991. p.83–91.

NING, P.; BLOOMENTHAL, J. An Evaluation of Implicit Surface Tilers. **IEEE Computer Graphics and Applications**, Los Alamitos, CA, USA, v.13, n.6, p.33–41, 1993.

NUMECA INTERNATIONAL. **CFView**. [S. l.], 2008. 1 DVD-ROM.

PAYNE, B. A.; TOGA, A. W. Surface mapping brain function on 3D models. **Computer Graphics and Applications, IEEE**, [S.l.], v.10, n.5, p.33–41, September 1990.

PEBAY, P. P.; BAKER, T. J. A Comparison of Triangle Quality Measures. In: INTERNATIONAL MESHING ROUNDTABLE, 10. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2001. p.327–340.

PERLIN, K.; HOFFERT, E. M. Hypertexture. **SIGGRAPH Computer and Graphics**, New York, NY, USA, v.23, n.3, p.253–262, 1989.

RAMAN, S.; WENGER, R. Quality Isosurface Mesh Generation Using an Extended Marching Cubes Lookup Table. In: EUROGRAPHICS/IEEE SYMPOSIUM ON VISUALIZATION. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2008. n.(accepted for publication).

RIPPA, S. Long and Thin Triangles can be Good for Linear Interpolation. **Siam Journal on Numerical Analysis**, [S.l.], v.29, n.1, p.257–270, 1992.

SIQUEIRA, E. (Ed.). **Relação Perimetral - Desenvolvimento e Implementação de uma Métrica de Qualidade de Malhas 2D Triangulares**. União da Vitória: Editora Kaygan-gue, 2003. 250p.

SCHAEFER, S.; JU, T.; WARREN, J. Manifold Dual Contouring. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, Piscataway, NJ, USA, v.13, n.3, p.610–619, 2007.

SCHREINER, J. et al. **Direct (Re)Meshing for Efficient Surface Processing**. [S.l.]: University of Utah, 2006. SCI Institute Technical Report. (UUSCI-2006-013).

SCHREINER, J.; SCHEIDEGGER, C. E.; SILVA, C. T. High-Quality Extraction of Isosurfaces from Regular and Irregular Grids. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, [S.l.], v.12, n.5, p.1205–1212, September 2006.

SCHROEDER, W. J.; GEVECI, B.; MALATERRE, M. Compatible Triangulations of Spatial Decompositions. In: IEEE VIS '04: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON VISUALIZATION '04, Washington, DC, USA. **Anais...** IEEE Computer Society, 2004. p.211–218.

SEEBASS, M. et al. **A Generalized Marching Cubes Algorithm Based on Non-Binary Classifications**. Berlin: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1997. (SC 97-05).

SHEKHAR, R. et al. Octree-Based Decimation of Marching Cubes Surfaces. In: IEEE VIS '96: PROCEEDINGS OF THE 7TH CONFERENCE ON VISUALIZATION '96, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1996. p.335–ff.

SHEN, H.-W. et al. Isosurfacing in span space with utmost efficiency (ISSUE). In: VIS '96: PROCEEDINGS OF THE 7TH CONFERENCE ON VISUALIZATION '96, Los Alamitos, CA, USA. **Anais...** IEEE Computer Society Press, 1996. p.287–ff.

SHEWCHUK, J. R. What is a Good Linear Element? - Interpolation, Conditioning, and Quality Measures. In: INTERNATIONAL MESHING ROUNDTABLE, 11. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2002. p.115–126.

SHU, R. et al. Adaptive Marching Cubes. **The Visual Computer**, [S.l.], v.11, n.4, p.202–217, April 1995.

TREECE, G. M.; PRAGER, R. W.; GEE, A. H. Regularised Marching Tetrahedra: improved iso-surface extraction. **Computers & Graphics**, [S.l.], v.23, p.583–598, 1999.

TURK, G. Re-tiling polygonal surfaces. In: SIGGRAPH '92: PROCEEDINGS OF THE 19TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, New York, NY, USA. **Anais...** ACM Press, 1992. p.55–64.

TZENG, L. Warping Cubes: better triangles from marching cubes. In: EUROPEAN WORKSHOP ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, 20., Seville, Spain. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2004.

WATERS, K. W.; CO, C. S.; JOY, K. I. Isosurface Extraction Using Fixed-Sized Buckets. In: EUROVIS 2005. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2005.

WESTERMANN, R.; KOBELT, L.; ERTL, T. Real-time Exploration of Regular Volume Data by Adaptive Reconstruction of Isosurfaces. **The Visual Computer**, [S.l.], v.15, n.2, p.100–111, 1999.

WOOD, Z. et al. Removing Excess Topology from Isosurfaces. **ACM Transactions on Graphics**, New York, NY, USA, v.23, n.2, p.190–208, 2004.

WYVILL, B. et al. Data Structures for Soft Objects. **The Visual Computer**, [S.l.], v.2, n.4, p.227–234, 1986.

APÊNDICE A SIMETRIAS DOS GRUPOS DE ARESTAS

Este capítulo apresenta a demonstração do número de grupos de arestas que podem definir um triângulo em uma célula cúbica. A demonstração é baseada na observação de todas as combinações possíveis e válidas entre arestas ativas na célula cúbica, o que a torna independente da tabela de triangulações do método. Ainda assim, coincidentemente, a tabela de triangulações da implementação de Bourke (2008) apresenta todos os grupos identificados.

Lema 1: Existem exatamente 8 grupos de arestas em uma célula cúbica.

Prova: A existência de 8 grupos de arestas é baseada na enumeração das combinações válidas entre arestas na célula cúbica. As combinações válidas são combinações entre arestas *não-coplanares* que definem um triângulo no interior da célula cúbica.

Ao invés de observar todas as combinações possíveis entre arestas, a prova é baseada no número de vértices compartilhados entre as arestas. O número de vértices compartilhados entre arestas pode ser 0, 1 ou 2, onde 0 define um grupo de três arestas independentes, 1 define um grupo com duas arestas conectadas e 2 define um grupo onde todas as arestas são conectadas.

Os grupos de arestas são invariantes sob rotações ou reflexões da célula cúbica, o que permite impor algumas restrições sobre os grupos observados para reduzir o número de casos que devem ser inspecionados nesta análise. A invariância dos grupos de arestas sob estas operações é verificada em um raciocínio simples. As operações de rotação e reflexão em relação a um plano são transformações lineares, que não alteram as relações de distância entre pontos no espaço, e assim não alteram o tamanho das arestas dos triângulos definidos no grupo; assumindo que os tamanhos de arestas são os mesmos, os triângulos gerados são idênticos.

Assumindo a representação planar da célula cúbica ilustrada na Figura A.1, a primeira restrição aos casos observados assume que as arestas do grupo (e_0, e_1, e_2) são identificadas de forma que $e_0 < e_1 < e_2$, sem perda de generalidade. A partir desta restrição, são analisados os três casos:

- **caso 0 (0 intersecções entre arestas):** assumindo $e_0 = 0$, sem perda de generalidade, a primeira configuração a ser analisada é $(0, e_1, e_2)$. As arestas e_1 e e_2 não devem ser conectadas, e assim não devem assumir os valores 1, 2, 3 e 4. Os valores restantes são 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11. Sendo $e_1 = 5$, a configuração resultante é $(0, 5, e_2)$. Similarmente, e_2 não deve assumir os valores 6 e 7, que resultariam em uma conexão com e_1 . As configurações restantes $(0, 5, 8)$, $(0, 5, 9)$, $(0, 5, 10)$ e

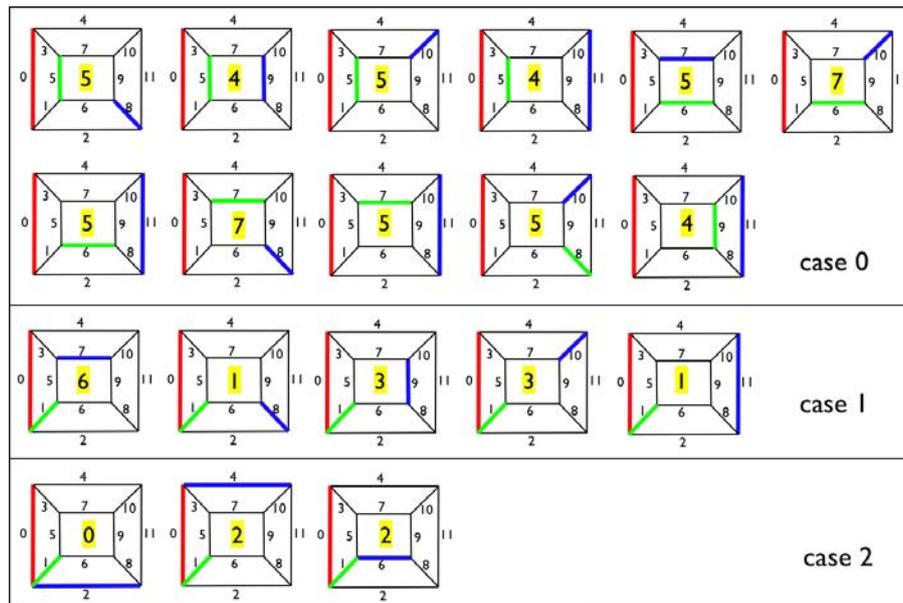


Figura A.1: Os casos usados para enumerar os grupos de arestas da célula cúbica. Cada caixa da figura ilustra as configurações em relação ao número de vértices compartilhados entre as arestas, onde 0 (cima) define um grupo de três arestas independentes, 1 (meio) define um grupo com duas arestas conectadas e 2 (baixo) define um grupo onde todas as arestas são conectadas.

$(0, 5, 11)$ são válidas, e são ilustradas na primeira linha da Figura A.1. O mesmo argumento é usado para analisar as configurações de arestas restantes. Cada configuração é associada a um grupo de arestas, identificado na Figura A.1 no centro de cada célula. A análise resulta na identificação de onze configurações de arestas, que são reduzidas a apenas três devido as simetrias entre os grupos de arestas.

- **caso 1 (1 intersecção entre arestas):** assumindo que $e_0 = 0$ e $e_1 = 1$, sem perda de generalidade, a primeira configuração a ser analisada é $(0, 1, e_2)$. A aresta e_2 não deve ser conectada à e_0 e e_1 , e assim não pode assumir os valores 2, 3, 4, 5 e 6. As configurações restantes $(0, 1, 7)$, $(0, 1, 8)$, $(0, 1, 9)$, $(0, 1, 10)$ e $(0, 1, 11)$ são válidas, e são ilustradas na segunda caixa da Figura A.1. A análise resulta na identificação de cinco configurações de arestas, que são reduzidas a apenas três devido as simetrias entre os grupos de arestas.
- **caso 2 (2 intersecções entre arestas):** assumindo que $e_0 = 0$ e $e_1 = 1$, sem perda de generalidade, a primeira configuração a ser analisada é $(0, 1, e_2)$. A aresta e_2 deve ser conectada à e_1 ou e_2 , e assim não pode assumir os valores 7, 8, 9, 10 e 11. Os valores 3 e 5 são descartados pois criam configurações inválidas. As configurações restantes $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 4)$ e $(0, 1, 6)$ são válidas, e são ilustradas na terceira caixa da Figura A.1. A análise resulta na identificação de três configurações de arestas, que são reduzidas a apenas duas devido as simetrias entre os grupos de arestas.

A análise resulta na identificação de 8 grupos de arestas, sendo 3 no caso 0, 3 no caso 1 e 2 no caso.