UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Camilla da Silva Poleto

ALGEPLAN, ÁLGEBRA E GEOMETRIA: ENTENDENDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS COMO JOGOS DE LINGUAGEM

Porto Alegre
2010

Camilla da Silva Poleto

ALGEPLAN, ÁLGEBRA E GEOMETRIA: ENTENDENDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS COMO JOGOS DE LINGUAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello

Porto Alegre
2010

Camilla da Silva Poleto

ALGEPLAN, ÁLGEBRA E GEOMETRIA: ENTENDENDO PRÁTICAS MATEMÁTICAS COMO JOGOS DE LINGUAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello
UFRGS – Faculdade de Educação

Aprovado em 16/12/2010.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Drª. Helena Dória Lucas de Oliveira – UFRGS – Faculdade de Educação

---

Prof. Me. Luiz Davi Mazzei – UFRGS – Colégio de Aplicação

Eu gostaria de, com o meu trabalho,

Não poupar a outrem o esforço de pensar,

Mas antes, na medida do possível,

Incitá-lo a pensar por si.

Wittgenstein

AGRADECIMENTOS

A Deus, por nunca ter me abandonado nos momentos mais difíceis.

À minha família, especialmente à minha mãe, com imensurável saudade, e ao meu pai, com carinho, pela total dedicação.

Aos amigos e aos colegas de curso, pelo companheirismo e pela preocupação quanto ao meu desempenho nas disciplinas e neste trabalho.

Aos professores do Instituto de Matemática e da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela dedicação e altruísmo.

Ao Prof. Dr. Samuel Edmundo Lopez Bello, pela quase sempre paciência e pela persistência na orientação deste trabalho, mesmo diante dos percalços.

À Prof. Drª. Helena Dória Lucas de Oliveira e ao Prof. Me. Luiz Davi Mazzei, por aceitarem, gentilmente, compor a banca examinadora deste trabalho.

RESUMO

A problemática da iniciação à Álgebra no Ensino Fundamental tem chamado a atenção de professores e pesquisadores da Educação Matemática. O material manipulativo Algeplan foi criado com o objetivo de possibilitar uma melhora no ensino da Álgebra, através de relações com a Geometria. Sob a lente teórica do filósofo Ludwig Wittgenstein e suas considerações sobre a linguagem e a constituição dos sentidos, é possível pensar que as práticas matemáticas constituem jogos de linguagem, cada um com uma série de regras a serem seguidas. Dessa forma, consideramos também o Algeplan como um jogo de linguagem, no qual podemos identificar apenas semelhanças de família com a Álgebra e a Geometria.

Palavras-chave: Algeplan; Jogos de Linguagem; Wittgenstein; Ensino de Álgebra; Seguir uma regra.

ABSTRACT

The issue of initiation to Algebra in elementary school has attracted the attention of teachers and researchers in Mathematics education. The manipulative game Algeplan was created with the goal of enabling an improvement in the Algebra's teaching through Geometry relations. Under the theoretical lens of the philosopher Ludwig Wittgenstein and his remarks on language and the sense's constitution, one might think that mathematical practices are language games, each with a series of rules to follow. Thus, we consider also the Algeplan as a language game in which we can identify only family similarities with Algebra and Geometry.

Keywords: Algeplan; Language Games; Wittgenstein; Algebra's teaching; Follow a rule.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A partir de experiências na disciplina de Estágio em Educação Matemática II (EDU02X14), ao trabalhar com uma turma de 7ª série (8º ano) e perceber a dificuldade dos alunos quando inseridos na atividade algébrica, senti-me motivada a investigar sobre essa a problemática na escola.

Pesquisando sobre o tema, encontrei referências sobre o uso de um material estruturado para o ensino da Álgebra, chamado “Algeplan”. Este material, segundo Pasquetti (2008), é encontrado no trabalho desenvolvido por alunas do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto. O referido material consiste em figuras – quadrados e retângulos – com lados x, y e/ou 1, que representam monômios de acordo com suas áreas, utilizando-se dessa forma a Geometria para a exploração das noções e relações na Álgebra.

Ainda nessa disciplina, tomei contato com a filosofia pragmática de Ludwig Wittgenstein e as noções de jogos de linguagem, uso, regras, semelhanças de família e formas de vida, com as quais comecei a pensar na possibilidade de entender tanto a Álgebra como a Geometria como jogos de linguagem da atividade matemática.

Com esse entendimento, foi possível analisar as regras que constituem o jogo de linguagem algébrico como objeto matemático e perceber semelhanças de família entre essas regras e as da Geometria e também da Aritmética.

Com a revisão bibliográfica, analisei o material Algeplan e as quais relações nele presentes. Conhecendo suas regras, identifiquei quais suas semelhanças com a Álgebra e a Geometria.

Sob esse aspecto, procurei perceber também regras criadas para o uso do Algeplan que não fazem sentido nos jogos de linguagem da Álgebra e da Geometria, apesar de manterem semelhanças de família. Além disso, foi possível perceber que as peças do material podem ser manipuladas de outras formas, ou seja, sob outras regras que não a do jogo Algeplan – e mesmo assim podemos determinar os mesmos resultados.

Vale salientar que a proposta aqui não é julgar o Algeplan como método de ensino e tecer conclusões a respeito. Assim sendo, o presente trabalho consiste em uma análise do "Algeplan" sob a lente da perspectiva Wittgensteiniana, com especial atenção às regras e aos jogos de linguagem que constituem o material.

O presente estudo foi baseado na obra *Investigações Filosóficas*, a qual pertence à segunda fase do filósofo, também referida como o segundo Wittgenstein.

2 SOBRE A FILOSOFIA DA LINGUAGEM DE WITTGENSTEIN

Sob a perspectiva do Estruturalismo, fazia sentido a busca por um modelo ou lei explicativa universal que pudesse definir um fenômeno em função de uma narrativa, atribuindo à linguagem somente a função de expressar esse modelo. É como dizer que existe certo objeto e eu posso defini-lo através de uma lei geral, estabelecendo assim uma relação sujeito-objeto na qual a linguagem serviria como um elo de mediação.

> O cientista estrutural devia a partir da análise de objetos (enunciados lingüísticos, comportamentos étnicos), num gesto progressivamente indutivo, construir modelos cada vez mais abstratos que dessem conta da elaboração de uma "estrutura geral da narrativa". (NASCIMENTO, *apud* BELLO, 2010, pág. 3)

Relacionado ao que chamamos de virada lingüística, surge um movimento que visa desconstruir essa universalidade dos fundamentos do conhecimento, onde interessa explorar as propriedades, características, utilidade do fenômeno.

Segundo Bello (2010), a perspectiva da virada lingüística afirma que não existe nada além da linguagem – essa linguagem não se refere apenas ao ato de fala e escrita, mas envolve modos de pensar a agir. Uma expressão que normalmente ocorre quando se fala da virada lingüística é a de que "a realidade é linguisticamente construída", que tem por objetivo explicitar que "o significado dos objetos (sejam estes materiais ou sociais) não estaria neles (nos objetos) em si, mas na construção lingüística que os define" (*Idem*, *ibidem*, pág. 5). Nesse sentido, Bello (*Ibidem*, pág. 5) pergunta: "o que seria de útil um objeto se não nos provoca nenhum tipo de pensamento?"

Essa nova perspectiva da linguagem encontra sua sustentação em muitas das idéias do austríaco Ludwig Wittgenstein e na sua filosofia pragmática, para quem as noções de jogos de linguagem, uso, semelhanças de família, formas de vida e regras são fundamentais para se compreender de que forma a linguagem constitui a produção de sentidos.

De início, no primeiro parágrafo das Investigações Filosóficas (IF, 2002), Wittgenstein traz uma citação de Santo Agostinho que introduz toda a sua discussão sobre linguagem no percorrer do livro:

> Quando eles (os meus pais) diziam o nome de um objeto e, em seguida, se moviam na sua direção, eu observava-os e compreendia que o objeto era designado pelo som que eles faziam, quando o queriam mostrar ostensivamente. A sua intenção era revelada pelos movimentos do corpo, como se estes fossem a linguagem corporal de todos os povos: a expressão facial, o olhar, os movimentos das outras partes do corpo e o tom de voz, que exprime o estado de espírito ao desejar, ter, rejeitar ou evitar uma coisa qualquer. Assim, ao ouvir palavras repetidamente empregues em seus devidos lugares em diversas frases, acabei por compreender que os objetos é que estas palavras designavam. E depois de ter habituado a minha boca a articular estes sons, usava-os para exprimir os meus desejos. (ST. AGOSTINHO, *apud* WITTGENSTEIN, IF, §1)

Analisando essa passagem, Wittgenstein afirma que Santo Agostinho descreve um sistema de comunicação, mas esse sistema não constitui tudo aquilo que se denomina linguagem. Então, Wittgenstein coloca uma situação na qual alguém afirma que “um jogo consiste em deslocar certas coisas ao longo de uma superfície de acordo com certas regras...” (*Ibidem*, §3). Pela descrição, convém pensar, por exemplo, em jogos de tabuleiro. Mas há muitos outros jogos, então seria necessário corrigir a afirmação restringindo-a ao jogo que se refere.

Wittgenstein afirma que a narração de Santo Agostinho é tal como uma forma primitiva de linguagem, essa que é usada pela criança quando aprende a falar. “Ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas antes adestrar” (WITTGENSTEIN, IF, §5). É importante destacar que, para Wittgenstein, esse adestramento consiste na inserção da criança no ambiente em que se faz o uso dessa linguagem. Não é uma questão de tomar um objeto, como um violão, e dizer para a criança: esse é violão, repete “violão”. Mas sim, inseri-la num jogo no qual essa palavra aparece em expressões como “pega o violão”, “vamos tocar violão”, “coloca o violão no lugar”.

Nesse sentido, Condé (1998, pág. 86) afirma que Wittgenstein propõe nos questionarmos acerca *de que modo a linguagem funciona*; e não *o que é a linguagem*, como se buscássemos nela uma essência. Retomando o exemplo anterior, não devemos nos perguntar “o que é um violão?”, mas sim “de que modo um violão funciona? Para que fim serve?”. “Enfim, devemos evitar uma atitude essencialista com relação à linguagem e adotar uma atitude pragmática” (CONDÉ, *Ibidem*, pág. 86)

> A nossa linguagem pode ser vista como uma cidade antiga: um labirinto de travessas e largos, casas antigas e modernas e casas com reconstruções de diversas épocas; tudo isso rodeado de uma multiplicidade de novos bairros periféricos com ruas regulares e as casas todas uniformizadas. (WITTGENSTEIN, IF, §18)

Com o aforismo acima, Wittgenstein, além de negar uma essência da linguagem, também propõe uma enorme variedade de usos dentro dela, variedade essa que não esta esgotada; ou seja, novas palavras e novas aplicações para palavras já existentes surgem a todo o momento. Por isso, para Wittgenstein, não existe a linguagem, mas sim linguagens: uma grande variedade de usos, em diferentes situações.

Para expressar essa pluralidade de funções na linguagem, Wittgenstein traz o conceito de *jogos de linguagem*, referindo-se ao "todo formado pela linguagem com as atividades com as quais ela está entrelaçada" (IF, §7). A partir dessa idéia, ele exemplifica alguns jogos de linguagem:

> Dar ordens e agir de acordo com elas –
> Descrever um objeto a partir do seu aspecto ou das suas medidas –
> Construir um objeto a partir de sua descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento –
> Fazer conjecturas sobre o acontecimento –
> Formar e examinar uma hipótese –
> Representação dos resultados de uma experiência através de tabelas e diagramas –
> Inventar uma história; lê-la –
> Representação teatral –
> Cantar uma roda –
> Resolver adivinhas –
> Fazer uma piada; contá-la –
> Resolver um problema de aritmética aplicada –
> Traduzir de uma língua para outra –
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar. (WITTGENSTEIN, IF, §23)

Com esse aforismo, Wittgenstein procura mostrar a multiplicidade dos jogos de linguagem. Nesse sentido, em termos da atividade matemática, é possível pensar como jogos de linguagem as atividades de substituir valores numa equação, resolver um exercício algorítmico, ler e interpretar problemas de aplicação, desenhar um ponto no plano cartesiano dadas as suas coordenadas. Assim, novamente, não se procura uma essência que defina o jogo de linguagem, pois mesmo que o termo seja aplicado em diversos casos, não há uma propriedade comum que o defina. Além disso, diante desses diversos exemplos de jogos de linguagem, enfatiza-se a variedade de usos das palavras para cada uma dessas atividades.

Quando Wittgenstein fala de uso, ele se refere a uma noção central da sua filosofia, pois afirma que é através desse uso das palavras em diferentes contextos e situações que damos significação, ou seja, sentido a essas palavras. Aqui, critica-se a idéia de que o significado de uma palavra seja o próprio objeto que ela substitui. “Para uma *grande* classe de casos – embora não para *todos* – do emprego da palavra “sentido” pode dar-se a seguinte explicação: o sentido de uma palavra é o seu uso na linguagem.” (WITTGENSTEIN, IF, §43)

E de fato, uma mesma palavra, usada em diferentes contextos, pode admitir diferentes sentidos. Tome como um exemplo a palavra “caixa”: ela pode significar um prisma oco de papelão para se guardar ou transportar objetos, um controle de entrada e saída de dinheiro de uma empresa ou um objeto eletrônico que transmite som, entre outros.

Segundo Condé (1998, pág. 90), “uma vez que a significação é construída pelo uso, modificando-se a cada uso que dela fazemos, ela não traz em si uma essência invariável.” Nesse sentido, não há uma significação determinada, última, passível de variação. Por isso, Bello (2010) traz a questão de não perguntar-se “o que significa?”, mas sim “para que serve? Como funciona? Para que é usado?”.

> Um signo não adquire significado por estar associado a um objeto, mas sim por ter um uso(...). Se é ou não dotado de significado é algo que depende da existência de um uso estabelecido, da possibilidade de ele ser empregado na realidade, em atos lingüísticos dotados de significados; e o significado que possui depende de como ele pode ser empregado (GLOCK,1998, pág. 359).

Portanto, para conceber significação a uma palavra, é preciso observar o seu uso nos diferentes jogos de linguagem, pois são nos seus usos que aprendemos seus significados. Aprendemos o que é a mesa de nossa casa, por exemplo, pelos usos que fizemos dela, como fazer as refeições ou escrever sobre ela e pela associação quando alguém nos dizia “faz a lição de casa na mesa” ou “pegue o prato que está sobre a mesa”. Mas podemos considerar também diferentes significados para a palavra mesa nos usos que fizermos dela ao falarmos: mesa de sinuca, mesa cirúrgica, mesa de escritório. Não existe uma definição, uma essência presente em todas as suas manifestações. Porém, se observarmos com cuidado, é possível perceber semelhanças entre elas.

Essas semelhanças são as que Wittgenstein denominou de semelhanças de família, fazendo analogia aos próprios membros de uma família: eles possuem semelhanças que se sobrepõem e se entrecruzam, como cor dos olhos e dos cabelos, estatura, temperamento, etc. Na tentativa de esclarecer melhor, Wittgenstein ainda toma como exemplo os jogos – de cartas, tabuleiro, bola. Não há algo comum a **todos** eles, o que possibilitaria a "definição" precisa de jogo, mas sim semelhanças, o que ele também chama de parentescos.

> O que é comum a todos eles? Não respondas: "Tem de haver algo em comum, senão não chamariam *jogos*" – mas *olha,* (...) Porque, quando olhares para eles não verás de fato o que *todos* têm em comum, mas verás parentenças.
> São todos eles *divertidos*? Compara o de xadrez com o jogo da cabra cega. Nos jogos de bola há perder e ganhar; mas quando uma criança atira a bola à parede e depois a apanha, desaparece este aspecto. (WITTGENSTEIN, IF, § 66)

Porém, falando-se de usos em diferentes jogos de linguagem para a atribuição de significado, surge uma questão. Por exemplo, faz sentido dizer "a cor do seu sapato é raiva"? Não, pois sabemos de antemão, dentro de nossas formas de vida, que raiva refere-se a um sentimento, e não a uma cor. Wittgenstein utiliza o termo formas de vida para denominar hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades, determinando formações culturais e sociais. Então, Wittgenstein traz também a noção de regra, pois, de acordo com o exemplo, a própria linguagem é uma atividade guiada por regras e, além disso, o caráter apriorístico da lógica, da Matemática e da Filosofia proveria dessas regras. Segundo Glock (1998, pág. 312), as regras não relatam como as pessoas falam, mas definem o que é falar com sentido ou corretamente, servindo, portanto, como padrões de correção.

Glock (1998) ainda afirma que "seguir uma regra" é uma expressão verbal que indica uma realização e que há uma diferença entre crer que se segue uma regra e de fato segui-la. "Se um agente segue uma regra ao realizar um ato, a regra deve ser parte de sua razão para realizar esse ato, e não somente uma CAUSA. É preciso que ele pretenda seguir a regra." (*Idem, ibidem,* pág. 313).

Seguir uma regra não implica que seja preciso pensar em sua formulação ou consultá-la enquanto realiza o ato. Basta que seja possível apresentá-la para justificar ou explicar esse ato. "Compreender a regra é saber como aplicá-la, saber o que pode ser considerado como agir em conformidade com ela ou transgredi-la" (GLOCK, 1998, pág. 315). Retomando o exemplo anterior, quando dizemos que "a cor do sapato é raiva" e verificamos que não faz sentido, é porque seguimos uma regra na qual raiva não é uma cor. Essa é uma regra dentro da organização do jogo de linguagem da língua portuguesa no qual estamos inseridos. E não pensamos mais na regra, simplesmente a seguimos.

Em sua obra Observações Filosóficas (OB, 2005), Wittgenstein constatou que as proposições matemáticas, mais do que guiadas por regras, são utilizadas propriamente como regras de como proceder, ou seja, *normas*. Quando dizemos que 2 + 2 são 4, é porque anteriormente alguém nos disse que 2 + 2 *deve* ser 4. Essa proposição nos permite afirmar que as proposições matemáticas independem de qualquer constatação empírica. Por isso, Wittgenstein afirma que utilizamos as proposições matemáticas "sem correr perigo de entrar em conflito com a experiência", pois elas têm uma função normativa. Não se referem a algo, apenas organizam nossa experiência empírica.

Tomemos como exemplo uma criança que possui seis balas e quer dividi-las com um amigo. Ela pode pensar que, por algum motivo, merece mais balas. Então ela oferece ao amigo apenas duas balas e fica com quatro para si. De qualquer forma, a proposição de que 6:2 é igual a 3 não será invalidada, pois é uma regra que seguimos no jogo de linguagem matemático. Porém, em situações empíricas, como no exemplo, podemos atribuir novos sentidos que modifiquem esse resultado, mas que não invalidam a proposição matemática em si.

> As regras não têm, elas próprias, algum significado, são apenas *condições de significado*. Têm a função de *paradigmas*, modelos que seguimos para dar sentido à nossa experiência empírica. (GOTTSCHALK, 2008, pág. 81)

Nesse aspecto, Miguel e Vilela (2008) chamam a atenção para a concepção normativa das atividades matemáticas. Segundo os autores, Glock teria afirmado que o papel da matemática é normativo, pois nada que seja contrário às regras pode ser considerado uma descrição inteligível da realidade.

Dizer, por exemplo, que para servir chá para dois casais precisarei de três xícaras não faz sentido, pois há uma regra que associa a palavra "casal" o número dois e uma proposição que afirma que "2.2 é 4", a qual é uma regra que seguimos, independentemente do que ocorra de fato.

Aqui podemos pensar: então por que a regra de que 6:2 é 3 não foi seguida no exemplo das balas? Olhemos com cuidado, pois são duas situações diferentes. No exemplo das xícaras, existe uma regra de sentido que nos faz associar à palavra "casal" o número dois. Portanto, se temos dois casais, associamos a regra de que temos 2.2, ou seja, quatro pessoas. Não há como proceder de outra forma, pois apenas seguimos regras.

Já no exemplo das balas, há primeiramente uma situação de divisão de seis balas entre duas pessoas. Perceba que não há indício que nos leve a pensar numa divisão exata. Portanto, se a criança pretende seguir a regra de que ela merece receber mais balas, não há problema algum.

É nesse sentido que Gottschalk (2008) afirma que a atividade matemática difere dos procedimentos empíricos. O cálculo não é uma suposição, e nem a demonstração matemática é feita sob evidências experimentais – no máximo é impulsionada por elas. Dizer, por exemplo, que -3 e 3 são as soluções da equação $x^2 = 9$ não prova essa equação. A prova só é dada por algum método de resolução da equação, como a fórmula de Bháskara. Segundo Gottschalk (*Idem*), só podemos utilizar a palavra *resulta* se conhecemos algum método de resolução, portanto não se trata de descobrir as soluções.

> Não se trata de descobrir algo que já existia de alguma maneira; não há nada a ser descoberto antes que disponhamos de um *método* que nos permita procurar. As proposições da matemática não se referem a *algo* a ser descoberto, não têm uma função descritiva, mas sim paradigmática, ou seja, são vistas por Wittgenstein como *regras* de como proceder. Regras que estão intrinsecamente envolvidas com determinadas atividades (um modo de agrupar, de fazer correspondência, de comparar, etc.). (GOTTSCHALK, 2008, pág. 81)

Até mesmo a obtenção do produto 11.11 = 121 só terá sentido se formos capazes de aplicar as regras de multiplicação que relacionam os números entre si. Dessa forma, “a matemática forma uma rede de normas” (WITTGENSTEIN, *apud* GOTTSCHALK, 2008, pág. 82).

Gottschalk (2008, p. 85) utiliza o exemplo dos números racionais para mostrar a noção de semelhança de família na Matemática, onde a cada nova aplicação sugerida para um significado, “algo em comum” se verifica com relação às aplicações anteriores. Para que o aluno utilize o significado de número racional, ele precisa aprender a transitar nesse espaço, estabelecendo conexões internas com os demais usos de número que ele tem (naturais e inteiros), através de aplicações deste novo significado (número racional).

> Daí não ter sentido esperar que o aluno aprenda por si só significados essenciais como, por exemplo, o que é número, ou o que é multiplicação, triângulo etc. A compreensão do conceito de número racional não se dá por aproximações sucessivas, como se fossemos alcançando uma essência que se revela comum a todas as aplicações desse conceito. Não há algo em comum a todas essas aplicações a ser apreendido pelo aluno, mas apenas semelhanças de família as mais variadas possíveis. (GOTTSCHALK, 2008, pág. 87)

O conceito ao qual Gottschalk se refere é a própria palavra “número” no jogo de linguagem da Matemática. Por isso, esses conceitos de número – natural, racional, etc. – só passarão a ter sentido no seu uso, momento em que se conectam os conceitos à sua gramática – que, segundo Gottschalk (2004 pg. 314), para Wittgenstein, refere-se à regra de uso.

> O que vai nos dar a essência [o significado dentro do jogo de linguagem no qual está inserido] de um conceito matemático é a sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda a sua gramática. Só adquire sentido para o aluno, portanto, ao aplicá-lo, o que envolve técnicas que são *aprendidas* e não de alguma forma intuídas ou descobertas. (GOTTSCHALK, 2008, p.88) [grifos meus]

Note que Gottschalk refere-se à essência de um conceito matemático, o que Wittgenstein nega, como já vimos. Por isso o grifo que cita o significado no jogo de linguagem em que esse conceito está inserido, pois na Matemática também não existe essência. Por exemplo, um paralelepípedo, no jogo de linguagem da Matemática, é um prisma regular de seis faces, e no jogo de linguagem da construção civil, é uma pedra que serve para alicerçar casas e edifícios.

Finalizando, encontramos no exemplo trazido por Bello (2010, pág. 11) elementos para relacionar as noções vistas até aqui e entende-las melhor. A situação ilustra como uma atividade pode ter diferentes regras em diferentes formas de vida. Para isso, considera-se a medição e o cálculo de volumes. O modo como esse cálculo se dá no jogo de linguagem de quem tem no corte da madeira o seu meio de subsistência é diferente do modo como um funcionário do IBAMA o assume e ainda é diferente de quem utiliza a fórmula $V = \pi r^2 h$, considerando o tronco como uma forma cilíndrica.

> Nos três casos podemos perceber semelhanças de família em torno do que podemos denominar de cálculos ou procedimentos matemáticos, porém os usos e os sentidos são dados pelas práticas regradas em que esses acontecem. (...) [o] que nos impede em vê-la [a maneira de se calcular o volume de um tronco de árvore] como uma “coisa essencializada”, plausível de estar presente em todas as práticas e todas as culturas (BELLO, 2010, pág. 11) [grifos meus]

E, considerando-se tais práticas como jogos de linguagem, não há como dizer – e nem se deve – que uma está mais correta do que a outra. Apenas estamos transitando entre esses jogos, cada um regido sob certas regras, reconhecendo entre eles semelhanças de família.

Porém, cabe aqui uma questão: saberia o funcionário do IBAMA calcular o volume de um tronco de árvore da mesma forma que o lenhador, sem conhecer as regras que este utiliza? O fato do IBAMA ter as suas regras para efetuar o cálculo e fazer o uso delas garante que ele saberá seguir as regras do lenhador? Direcionando o foco à Matemática, Bello (2010, pág. 14) afirma que "As regras matemáticas existentes e constituintes de uma prática social qualquer (considerando nesse âmbito, inclusive a prática científica [...]) não são plausíveis de transposição para outras mesmo aquelas que consideremos pautadas por jogos lingüísticos semelhantes". Ora, então temos um ponto crucial desta discussão: diferentes jogos de linguagem, apesar de manterem semelhanças, possuem regras particulares, e entender os significados em um jogo de linguagem não garante que conseguiremos transportar esses significados para outro jogo de linguagem.

Utilizando as noções teóricas abordadas nesse capítulo, passo a analisar como a Álgebra e a Geometria podem ser consideradas jogos de linguagem sob a lente filosófica de Wittgenstein. Posteriormente, analisa-se também o material didático "Algeplan" e procura-se estabelecer semelhanças de família entre ele e os jogos de linguagem algébrico e geométrico.

3 DO JOGO DE LINGUAGEM ALGÉBRICO ESCOLAR: AS REGRAS ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Se, para Wittgenstein, jogo de linguagem é toda atividade guiada por regras, podemos pensar que a Álgebra também o é. Isso porque temos na Álgebra – e aqui vamos nos referir apenas à atividade algébrica escolar – um conjunto de regras de uso para manipular signos em diferentes operações, dentre as quais a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

O que se tem percebido é que esse conjunto de regras não produz sentido para os alunos, e não os mobiliza para o ato de pensar. Então, na tentativa de atribuir significado na Álgebra, têm sido usadas recorrentemente na escola pelo menos uma das seguintes estratégias: fazer relação com a atividade algorítmica aritmética ou com a geométrica.

Podemos começar a discussão sobre a Aritmética tratando da idéia de número. Para Lins e Gimenez (2005), os números são mais simples, na medida em que representam quantidades nas práticas cotidianas. Ou seja, nessas práticas, o número nunca está sozinho, ele sempre representa alguma coisa: dinheiro, distância, comprimento, temperatura, etc. Além disso, costumamos simplificá-los: em vez de dizer que uma bala custa 0,1 de 1 real, dizemos que custa 10 centavos. Em vez de 0, 005 metros, usamos 5 milímetros. Ou, em vez de 2500 metros, dizemos 2,5 km.

Dessa forma, podemos dizer que a Aritmética está inserida nas nossas práticas sociais, nas relações quantitativas. Um vendedor trabalha com números, um cobrador trabalha com números, uma cozinheira trabalha com números, um motorista trabalha com números.

Ainda nessa discussão, podemos pensar a respeito dos números negativos. Conseguimos falar e pensar em números negativos no nosso cotidiano ao nos referir a temperaturas abaixo de zero ou em débitos no banco. Porém, não sendo na escola, o que quer dizer -2.(-3)? Dois abaixo de zero multiplicado por 3 abaixo de zero? Dívida vezes dívida? Faz sentido?

Com esse exemplo, podemos entender que -2.(-3) faz sentido na aritmética escolar, enquanto manipulação algorítmica, pois na contextualização do cotidiano não. Por isso que autores, como Lave, afirmam que:

> Não é possível transformar estes tipos de atividades [cotidianas] em um currículo de aprendizagem de matemática na escola, porque a transformação e as relações de quantidade,

> expressas nas atividades, sequer se parecem às formas como se resolvem problemas no sentido atribuído na escola. (LAVE, *apud* BELLO, 2010, pág. 13)

Muitas vezes encontramos problemas que envolvem uma história, mas, na resolução, acaba-se sempre deixando a história de lado e solicitando aos alunos que pensem na matemática ali presente. Além disso, os problemas aparecem sem considerar muitos fatos da realidade. “A situação pode chegar ao cômico: em um livro didático brasileiro havia um problema envolvendo um porco que só tinha carne e toucinho, nada de ossos, couro, cérebro: o porco dos sonhos do produtor!” (LINS e GIMENEZ, 2005, pág. 16).

Mas, enfim, por que essa discussão? Porque os usos das regras da Aritmética que aprendemos na escola são diferentes dos usos das regras aritméticas que utilizamos em outras práticas sociais, constituindo a meu ver jogos de linguagem diferentes. Para Wittgenstein (OF, pág. 108), “a aritmética é a gramática dos números.” Ou seja, ele não pressupõe de alguma forma que os significados da Matemática devem ser procurados nas práticas sociais, mas nela mesma. De acordo com essa idéia, nesse trabalho vamos nos deter à aritmética, às suas manipulações algorítmicas em torno das relações numéricas, sem qualquer tipo de contextualização cotidiana. Portanto, quando falarmos em jogo de linguagem aritmético, estaremos nos referindo à essa atividade aritmética, a qual é abordada recorrentemente na escola.

Conforme dito anteriormente, tem se usado a Aritmética na tentativa de atribuir significado à Álgebra na escola. Porém, de acordo com Lins e Gimenez (2005), devemos ter cuidado para não cair no erro de dizer que a Álgebra é a generalização da Aritmética, como muito se ouve falar entre os educadores matemáticos.

Perceba que não estamos falando em um contexto histórico sobre, entre a Álgebra e a Aritmética, qual teria surgido primeiro. Estamos nos referindo às regras aritméticas e algébricas que devem ser trabalhadas na escola. O que queremos explicitar aqui é a tentativa que vem sendo recorrente na escola, a qual, a partir de operações com números, espera-se que os alunos consigam abstrair as regras da Álgebra, como se fosse uma “descoberta”.

Atribuímos esse entendimento errôneo ao fato de que, na escola, a Aritmética antecede a Álgebra, além do que nos causa a impressão de que a maioria das regras que seguimos na atividade aritmética também são seguidas na atividade algébrica, com uma manipulando números e a outra, letras. Porém, seguindo Wittgenstein, podemos afirmar que tais regras são apenas semelhanças de família que podemos perceber entre a Aritmética e a Álgebra e que ambas são jogos de linguagem distintos.

Por esse entendimento e pela suspensão da condição de transposição das regras de um jogo de linguagem para outro, podemos afirmar que nada impediria que a Álgebra antecedesse o ensino da Aritmética na escola.

Para sustentar essa afirmação, recorremos a Wittgenstein, quando ele afirma que apenas seguimos regras. Portanto, podemos "aprender" a operar com as letras, na Álgebra, independentemente de "aprendermos" a operar com os números.

Um signo multiplicado por um signo resulta nesse signo elevado ao quadrado, por exemplo, é uma regra que pode ser seguida em um contexto algébrico sem a necessidade de que a mesma tenha sido seguida no contexto aritmético.

Wittgenstein (OB, §167) afirma que "uma proposição algébrica é uma equação tanto quanto $2.2 = 4$, embora seja aplicada [usada] de outra maneira" [grifo meu]. O que podemos perceber é que existem semelhanças entre as regras aritméticas e algébricas, mas elas são usadas de modos diferentes.

Por exemplo, se aprendemos a seguir a regra de que $2.2 = 2^2$, também podemos seguir a regra de que $x.x = x^2$, e podemos perceber aqui semelhanças entre as regras. Mas, por outro lado, a regra de que $x+x = 2x$ difere do uso da regra $3+3 = 2.3$, na Aritmética. Uma criança dirá que $3+3 = 6$.

Pensamos agora na forma de ensino que se tem utilizado e sua organização, ou seja, depois da Aritmética. Lins e Gimenez (2005, pág. 96) trazem um exemplo que ilustra uma questão importante:

Se $e + f = 8$, então $e + f + g = ?$

Segundo os autores, os alunos recusam-se a aceitar a expressão "8 + g" como resposta válida, e então produzem respostas numéricas como "12" (assumindo valores para as letras). Para os alunos, “8 + g” não é uma resposta “fechada”, pois não corresponde a um único resultado, ou seja, ainda há o que fazer.

Essa confusão pode ser gerada pela excessiva evidência da regra do jogo de linguagem aritmético, que associa ao sinal de “=” um número, e o jogo de linguagem algébrico não compartilha dessa regra.

Ainda nessa discussão, convém trazer o seguinte questionamento de Lins e Gimenez (2005, pág. 98), quando sugerem que consideremos a “conta”:

$$\frac{5+5+5}{3}$$

A questão é se, diante da resposta 5 a essa expressão, estaríamos também diante de uma atividade algébrica? Por não existir notação literal, somos levados a responder que não. Mas será que uma pessoa resolveria a expressão pensando que são três cincos e que depois devemos dividir por 3, de modo a compensar um três com o outro? Se várias expressões do mesmo tipo, ou seja,

$$\frac{\overbrace{a+a+\cdots+a}^{\text{n vezes}}}{n}$$

fossem propostas para essa pessoa, ela provavelmente responderia com base na mesma idéia, mesmo que não tivesse idéia de que poderia explicitá-la pela expressão – ou notação – algébrica acima. Mas, enfim, a atividade algébrica estaria também naquela expressão numérica, quando a pessoa “fazia a conta”?

Segundo Wittgenstein (OB, §167), “uma equação algébrica como uma equação entre números reais é, *com certeza*, uma equação aritmética, já que alguma coisa aritmética está atrás dela. Mas algo está atrás da equação *algébrica* de uma maneira diferente da que está atrás de 1 + 1 = 2.” De certa maneira, Wittgenstein pretende dizer que não existe uma conexão direta entre Aritmética e Álgebra, apenas semelhanças de família.

Sob esse aspecto, Lins e Gimenez (2005, pág. 10) propõem que “é preciso começar mais cedo [na escola] o trabalho com a álgebra, e de modo que esta e a aritmética se desenvolvam juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra” [grifo meus]. É nesse sentido que falamos de semelhanças entre a atividade aritmética e a algébrica. Por isso não se pode dizer que a Álgebra é a generalização da Aritmética. São dois jogos de linguagem que, apesar de manterem semelhanças de família, possuem regras particulares.

Já para o ensino de Geometria, no ambiente escolar, costuma-se introduzir o conceito de triângulo, por exemplo, a partir da apresentação de algumas formas triangulares no intuito de que o aluno abstraia o significado do que seria um triângulo. Para Wittgenstein, essas figuras não são o significado de um triângulo na Matemática, e até mesmo não mostram o que é um triângulo, uma vez que triângulo é uma figura bidimensional e poligonal de três lados fechados. Agora, em que situações utilizamos a palavra triângulo e que têm sentido dentro da atividade matemática?

Assim, posteriormente ao sentido matemático, outros sentidos deverão ser dados. Se estiver num contexto musical, podemos perceber que é possível chamar um instrumento de triângulo, assim como o instrumento de sinalização de trânsito. Podemos perceber entre esses triângulos semelhanças de família, mas ambos são diferentes do triângulo num contexto matemático.

Assim como a Álgebra e a Aritmética são jogos de linguagem distintos, o mesmo podemos pensar da Geometria. Quanto ao estudo dos polígonos: um triângulo tem três lados, um quadrilátero tem quatro, um pentágono tem cinco. Dentre os quadriláteros, por exemplo, para ser um quadrado, o polígono deve ter os quatro lados com a mesma medida e cada um dos quatro ângulos internos deve medir 90º.

A partir das regras de uso dos polígonos podemos entender as regras para os poliedros. Dizer que um cubo é um poliedro composto por seis faces quadradas só fará sentido a alguém que saiba a regra de uso do quadrado. Porém, dizer que um cubo é um poliedro de seis faces iguais faz sentido para alguém que não saiba a regra de uso do quadrado – essa regra pode ser dada após a regra de uso do cubo.

Agora, vamos partir para a segunda estratégia que se tem utilizado no ensino da Álgebra: a Geometria. Na procura para se dar sentido à atividade algébrica, tem se utilizado relações tais como associar o monômio x^2 à área de um quadrado de lado x:

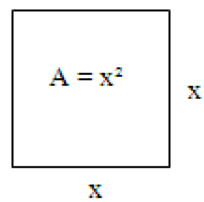

Figura 1 Monômio x^2 como um quadrado de lado x

No estudo dos produtos notáveis, também tem se utilizado uma abordagem geométrica. Vamos tomar como exemplo a visualização geométrica da expressão do quadrado da soma $(a + b)^2$. Interpreta-se a expressão como o cálculo da área de um quadrado de lado a + b:

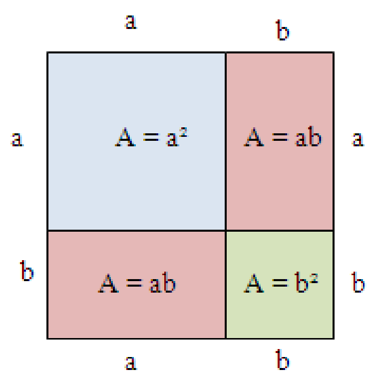

Figura 2 Expressão $(a + b)^2$ como soma das áreas

Então, a área desse quadrado pode ser indicada pela soma das áreas dos quadrados de lado a e de lado b; e das áreas dos dois retângulos de lado a e b. Portanto, podemos perceber que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, de acordo com a manipulação algébrica da expressão – ou seja, efetuando-se (a + b).(a + b).

Também tem se utilizado relações com a área e perímetro de retângulos e quadrados. Por exemplo, podemos solicitar ao aluno para que determine o perímetro do seguinte retângulo:

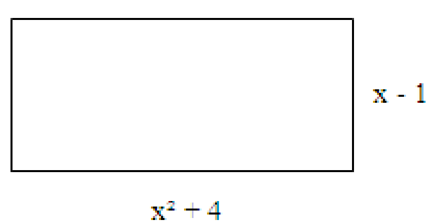

Figura 3 Exercício algébrico utilizando perímetro

Com esse exemplo, o que podemos perceber é que se pretende atribuir aos polinômios $x^2 + 4$ e $x - 1$ o sentido de números que não conhecemos, mas que são plausíveis de serem conhecidos.

Porém, uma coisa que devemos prestar atenção e que muitas vezes passa despercebida quando se utiliza a estratégia geométrica para se atribuir significado à Álgebra é que não existe medida de comprimento negativa. Essa é uma regra muito importante da Geometria. No nosso exemplo, então, x deve ser maior do que 1. Nesse caso, não pode ser igual, já que afirmamos que a figura é um retângulo, logo nenhum dos lados pode ser zero.

O que parece ser recorrente nas propostas de ensino é o fato de se utilizar a Geometria apenas para ilustrar a Álgebra – a resolução dos problemas visa somente as manipulações algébricas, sem se preocupar com as regras da Geometria. Por isso, não há preocupação com as restrições das medidas das formas geométricas, pois na Álgebra é permitido manipular-se expressões negativas.

Quando buscamos na Geometria um sentido para a atividade algébrica, mobilizamos regras para as palavras "área" e "perímetro". No exemplo anterior, o aluno só poderá seguir a regra para a resolução se área e perímetro fizerem sentido para ele. Assim, para determinar o perímetro, ele operará com a soma de todos os lados do polígono. Para determinar a área, multiplicará, no caso do retângulo, a sua base pela altura.

Outro exemplo de exercício utilizado para se operar com polinômios é o seguinte:

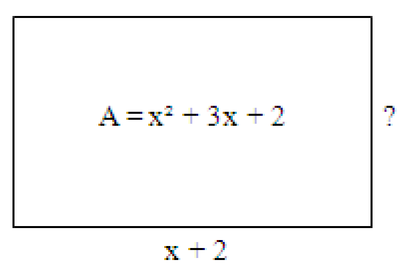

Figura 4 Exercício de divisão de polinômios utilizando área

Nesse caso, o que se pretende saber é qual o valor do lado do retângulo indicado pelo ponto de interrogação, ou seja, a altura, sabendo-se o valor da base e da área deste retângulo. De acordo com a regra para se determinar a área de um retângulo, devemos multiplicar a base pela altura. Portanto, através de manipulações com a fórmula da área, o que se deve proceder para encontrar a altura do retângulo nesse exemplo é dividir-se a área pela base.

Aqui, devemos destacar um aspecto importante: a utilização da palavra “calcule” nos enunciados de problemas semelhantes aos que apresentamos anteriormente. “Calcule o perímetro (...)”, “calcule a área (...)”. Aqui, remetemos ao caso de um aluno que já tenha aprendido a seguir as regras da aritmética. O problema aqui é tal como o uso do símbolo “=”, ou seja, o aluno associará a palavra “calcule” a regra de encontrar um numeral como resposta. Como, nesse tipo de problema, estamos trabalhando com expressões algébricas, é melhor utilizar palavras como “determine” ou “encontre”, pois não indicam a ação de calcular.

Então, o que podemos perceber nessas estratégias que se tem utilizado para mobilizar o ensino da Álgebra, ou seja, a Aritmética e a Geometria, é que elas mantêm semelhanças com a própria Álgebra. Porém, chamamos a atenção para o fato de que, por manterem diferentes regras, mesmo com algumas semelhanças de família que pontuamos, Aritmética, Geometria e Álgebra são jogos de linguagem distintos.

Nesse sentido, passo a apresentar o material manipulativo Algeplan e analisá-lo tal como um jogo de linguagem e as suas semelhanças com a Álgebra e a Geometria.

4 DO ALGEPLAN E SUAS OPERAÇÕES: APRESENTAÇÃO DO MATERIAL MANIPULATIVO

O Algeplan, encontrado no trabalho de Rosemeire Aparecida Rosa, Fernanda Mansur Dias e Letícia Thais Medeiros, alunas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (*apud* Pasquetti, 2008) é um jogo formado por peças na forma de quadrados e retângulos, e as unidades de medida supostas são 1, x e y, todas diferentes entre si.

Além disso, peças com as mesmas medidas têm a mesma cor e são associadas a uma área. As cores aqui foram escolhidas arbitrariamente. Além disso, todas as peças são de cor preta no seu verso, para representar a área com valor negativo. Dessa forma, temos:

- quadrados de lado x – área x^2 – perímetro 4x – cor amarela;
- quadrados de lado y – área y^2 – perímetro 4y – cor azul;
- quadrados de 1 – área 1 – perímetro 4 – cor vermelha;
- retângulos de lados x e y – área xy – perímetro 2(x + y) – cor rosa;
- retângulos de lado x e 1 – área x – perímetro 2(x + 1) – cor roxa;
- retângulos de lado y e 1 – área y – perímetro 2(y + 1) – cor verde.

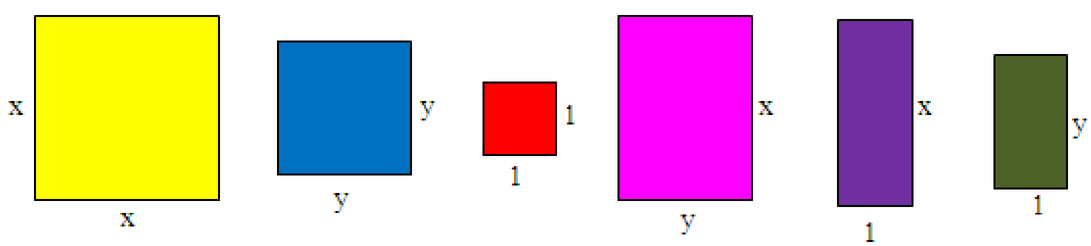

Figura 5 Peças componentes do Algeplan

Utilizando essas peças, são propostas diversas situações de operações que podem ser efetuadas. Os exemplos que aqui serão apresentados são baseados nos exemplos e regras encontrados no trabalho de Pasquetti (2008).

4.1 Adição, subtração e simplificação

Exemplo 4.1.1: Tome 1 quadrado de lado y; 3 retângulos de lados y e 1; e 2 quadrados de lado 1. Efetue a soma das áreas e escreva o resultado em forma de expressão algébrica.

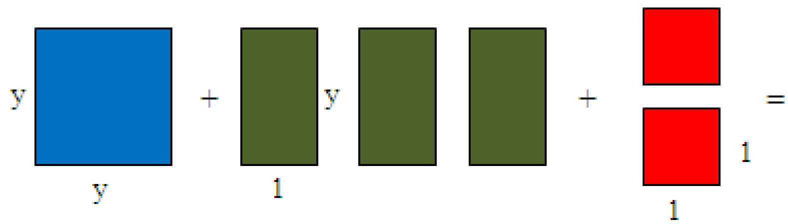

Figura 6 Expressão $y^2 + 3y + 2$

Após escolher as figuras de acordo com o enunciado, é possível realizar a soma das áreas e determinar a expressão que a representa:

$$(y.y) + [(y.1) + (y.1) + (y.1)] + [(1.1) + (1.1)] =$$
$$= y^2 + (y + y + y) + (1 + 1) =$$
$$= y^2 + 3y + 2$$

Exemplo 4.1.2: Monte e resolva a expressão $(x^2 + x – 2) + (- 2x + 1)$.

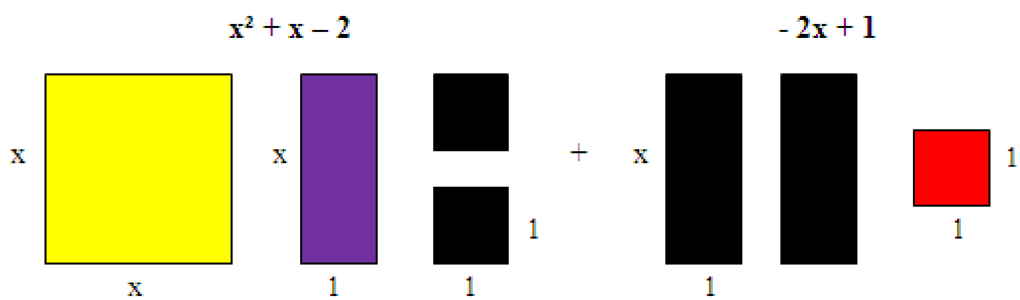

Figura 7 Expressão $(x^2 + x - 2) + (- 2x + 1)$

Modelando-se as expressões e efetuando-se os cancelamentos, que representam quantidades opostas das peças de mesmo modelo coloridas, obtemos o resultado $x^2 -x – 1$

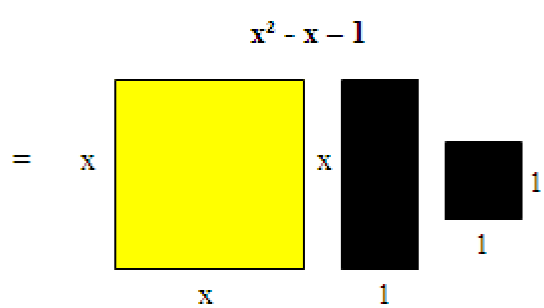

Figura 8 Expressão $x^2 - x – 1$

Exemplo 4.1.3: Monte e resolva a expressão $(2x^2 - x + 3) - (x^2 + 2x + 1)$

O primeiro passo é modelar as expressões entre parênteses.

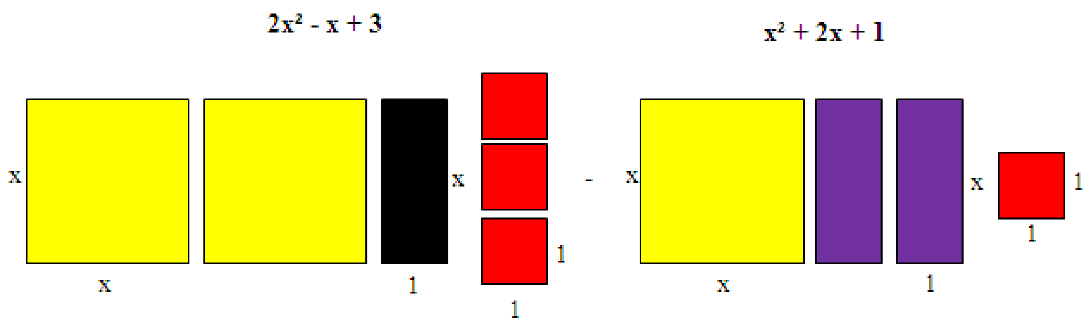

Figura 9 Expressões $(2x^2 - x + 3)$ e $(x^2 + 2x + 1)$

O sinal de menos na frente da segunda expressão significa que as peças devem ser viradas de lado, e então substituímos o sinal de subtração pelo sinal de adição.

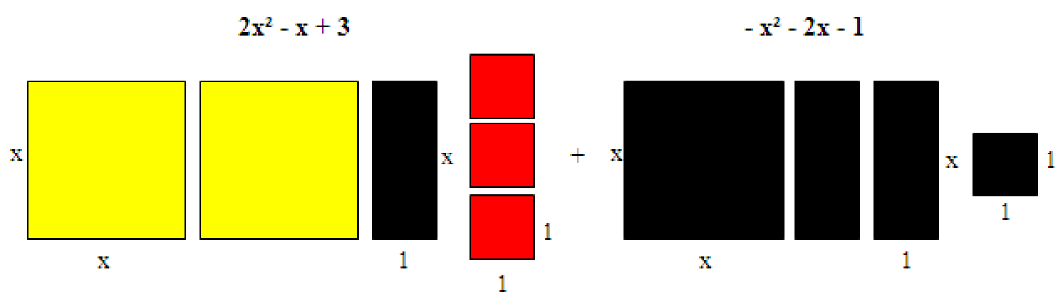

Figura 10 Expressão $(2x^2 - x + 3) - (x^2 + 2x + 1)$

Em seguida, efetuando-se as simplificações, chegamos ao resultado $x^2 - 3x + 2$

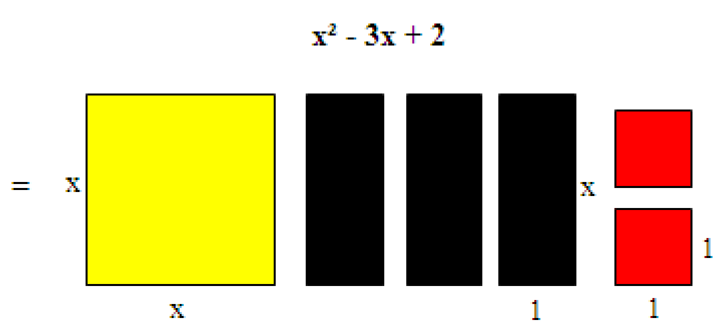

Figura 11 Expressão $x^2 - 3x + 2$

Exemplo 4.1.4: Encontre a expressão ou polinômio que representa a soma da área das figuras.

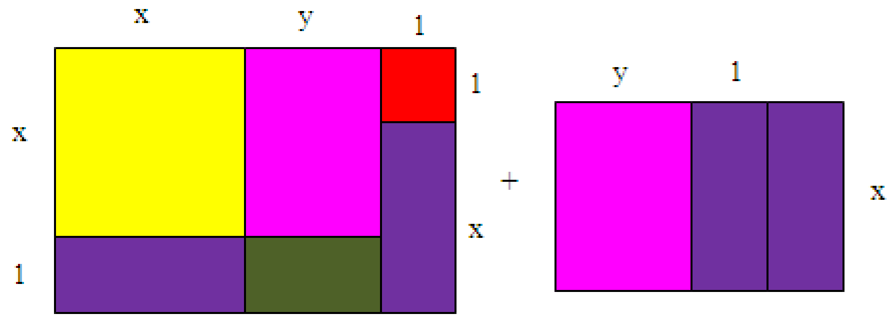

Figura 12 Uso do Algeplan para a soma de áreas

Para obter a expressão solicitada, precisamos calcular a área de cada uma das figuras e, para isso, é necessário determinar as figuras que compõem cada uma delas.

Na primeira figura temos um quadrado amarelo de área x^2; dois retângulos roxos, cada um com área x; um retângulo verde com área y; um retângulo rosa de área xy; e um quadrado vermelho de área 1. Assim, temos:

$x^2 + x + x + y + xy + 1 = x^2 + 2x + y + xy + 1.$

Na segunda figura tempo um retângulo rosa de área xy e dois retângulos roxos, cada um com área x. Logo, temos:

$xy + x + x = xy + 2x.$

Portanto, a expressão que estamos procurando é

$(x^2 + 2x + y + xy + 1) + (xy + 2x) = x^2 + 4x + y + 2xy + 1.$

Outra forma de obtermos a expressão que representa a área das duas figuras é calculando o número de peças de cada cor, paralelamente nas duas figuras:

- Um quadrado amarelo = x^2
- Dois retângulos rosas = $2xy$
- Quatro retângulos roxos = $4x$

- Um retângulo verde = y
- Um quadrado vermelho = 1

Posteriormente, basta somar cada uma das parcelas e teremos o mesmo resultado que na forma anterior:

$x^2 + 2xy + 4x + y + 1$

4.2 Multiplicação e Fatoração

Primeiramente, devem-se estabelecer modelagens de multiplicação:

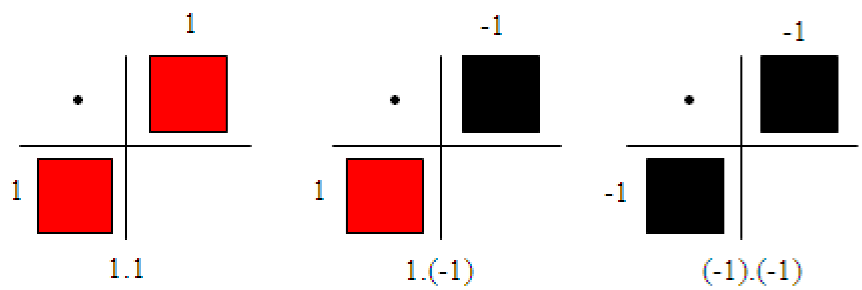

Figura 13 Multiplicação com o Algeplan

As regras aqui serão relacionadas à cor. Por exemplo, na "multiplicação" de uma peça preta por uma peça colorida, atribuímos uma peça preta – perceba uma semelhança de família com a regra de sinais da multiplicação aritmética e algébrica de que multiplicação de fatores de sinais diferentes resulta num fator negativo. Dessa forma, temos:

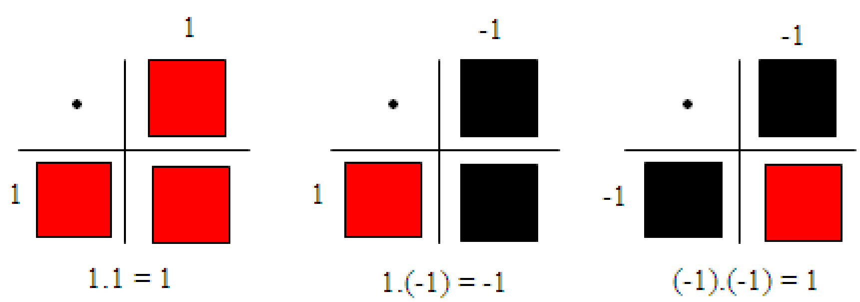

Figura 14 Uso das regras de sinais

Exemplo 4.2.1: Monte e determine o resultado de x.(-1).

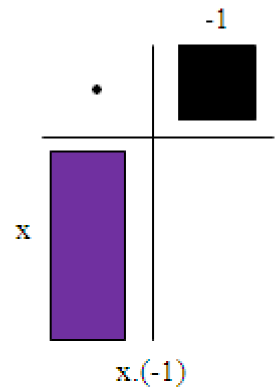

Figura 15 Produto x.(-1)

Feita a modelagem conforme a figura acima, deve-se encontrar uma peça que corresponda aos lados x e -1 :

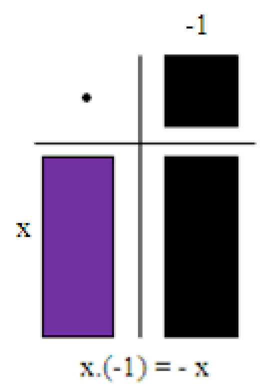

Figura 16 Resultado do produto x.(-1)

Exemplo 4.2.2: Monte a expressão x.y e determine seu resultado.

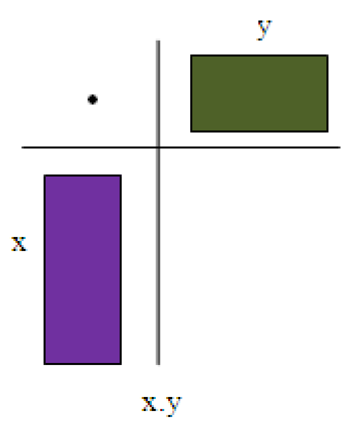

Figura 17 Produto x.y

A partir do esquema anterior, toma-se a peça que tenha os lados correspondentes x e y – portanto, com área xy.

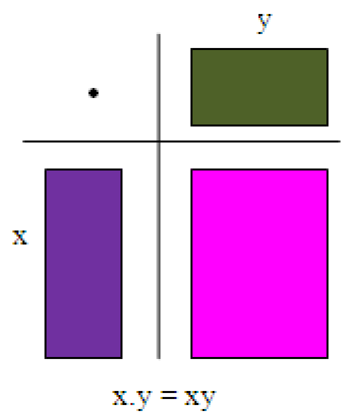

Figura 18 Resultado do produto x.y

Exemplo 4.2.3: Calcule o produto 2x.(y + 3)

Primeiramente modela-se o produto conforme o esquema abaixo:

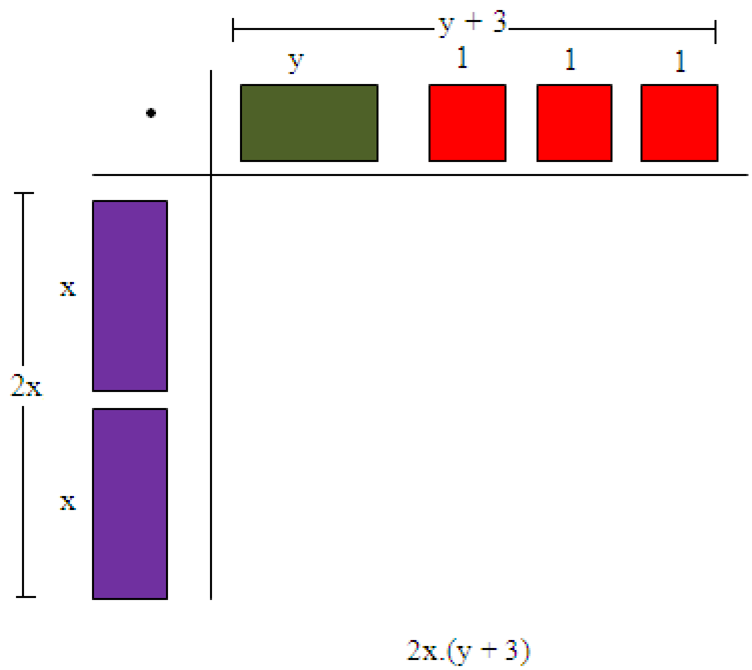

Figura 19 Produto 2x.(y + 3)

Então tomamos as peças que correspondem aos lados colocados no esquema:

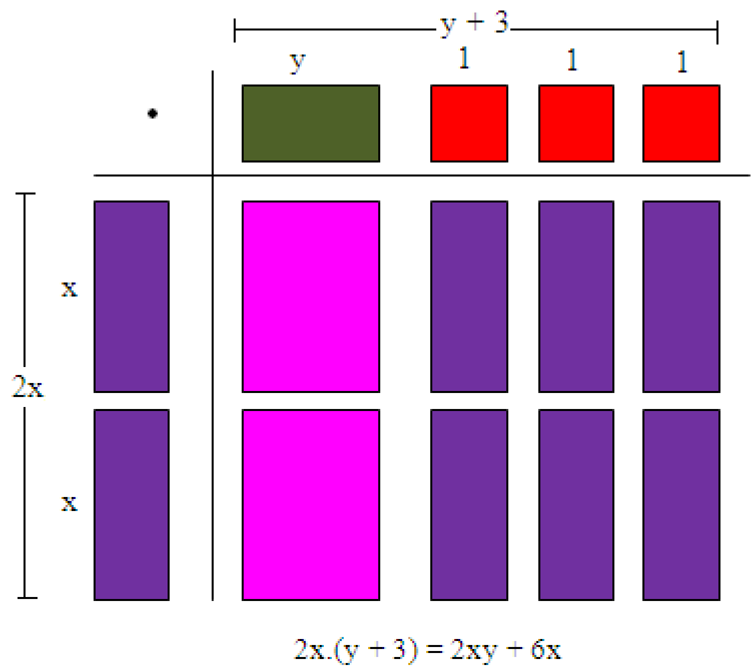

Figura 20 Resultado do produto 2x.(y + 3)

Por último, somamos as peças iguais, encontrando a expressão 2xy + 6x.

Exemplo 4.2.4: Fatore o polinômio 2xy + 6x.

Podemos fazer o processo inverso. Escolhemos duas peças xy e seis peças x e as organizamos de maneira que formem um retângulo, tomando o cuidado de colocar medidas coincidentes lado a lado.

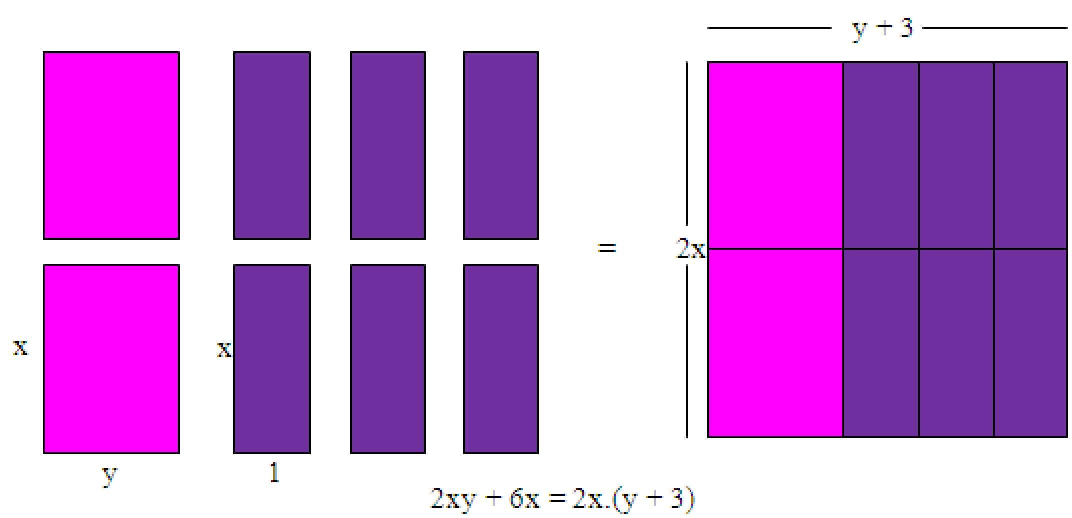

Figura 21 Expressão 2xy + 6x

Exemplo 4.2.5: Monte e efetue (x + 2).(x – 1)

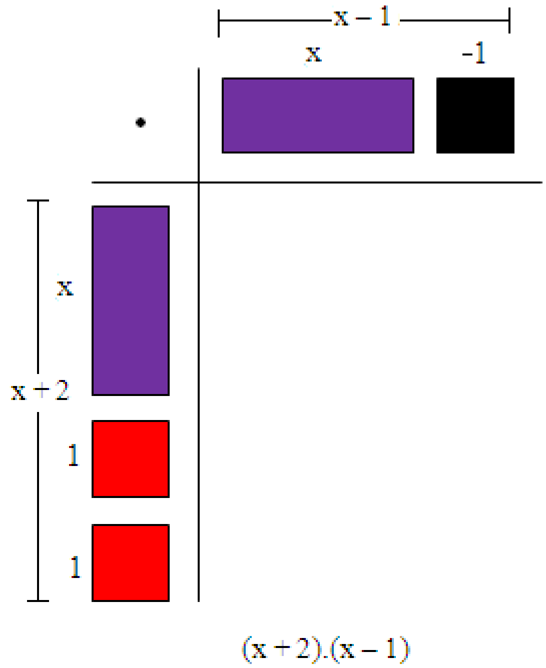

Figura 22 Produto (x + 2).(x - 1)

Tomando as peças que correspondem aos lados das peças da figura 22, temos:

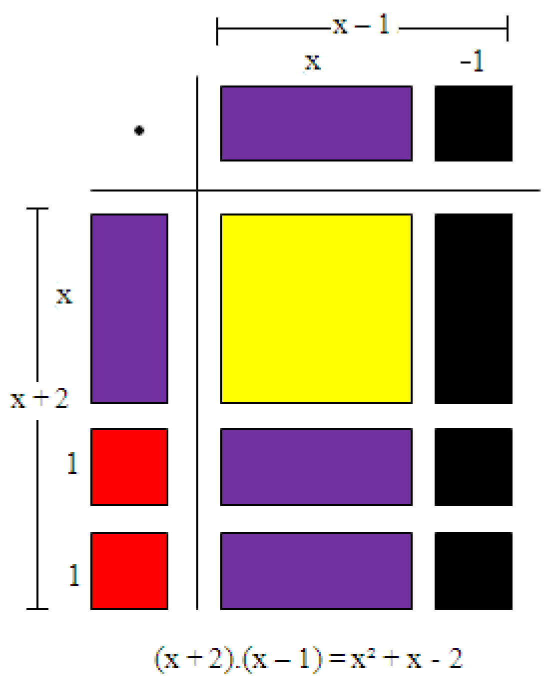

Figura 23 Resultado do produto (x + 2).(x - 1)

Note que tivemos que simplificar as peças equivalentes a x (duas roxas e uma preta, que equivale a –x)

Exemplo 4.2.6: Fatore o polinômio $x^2 + x - 2$.

Primeiramente, escolhemos as peças que formam esse polinômio.

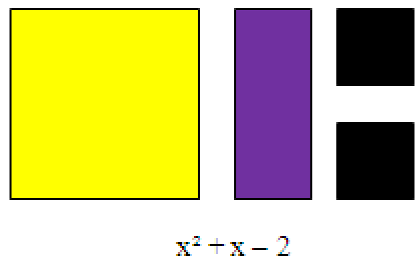

Figura 24 Expressão $x^2 + x - 2$

Note que não conseguimos formar um retângulo com essas peças, então teremos que utilizar alguns recursos. Primeiro, justapomos lados dos polígonos que sabemos que têm o mesmo valor.

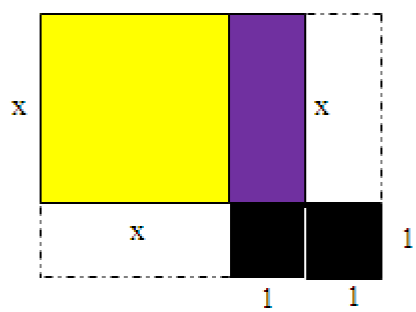

Figura 25 Processo para a fatoração da expressão $x^2 + x - 2$

Agora precisamos completar os espaços para que a figura forme um retângulo. É possível perceber que ambos os espaços em branco têm tamanho x e 1, cada um. Por isso, sabemos que vamos usar as peças que tenham área x. Porém, elas devem ser plausíveis de cancelamento, para que o resultado não se altere. Então usaremos uma valendo x (roxa) e outra valendo –x (preta), tomando o cuidado de deixar as peças pretas alinhadas.

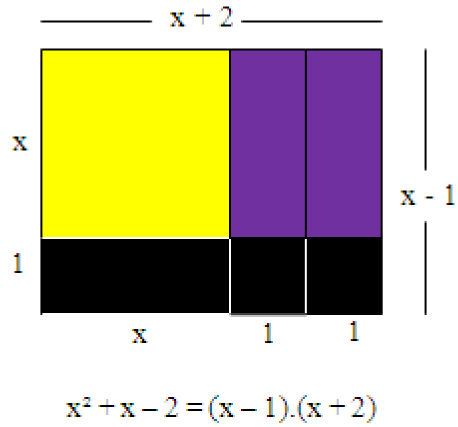

Figura 26 Completando espaços para a fatoração da expressão $x^2 + x – 2$

4.3 Divisão

4.3.1 Divisão exata

Quando temos uma divisão exata, o produto do quociente pelo divisor será o próprio dividendo. Nesse caso, utilizamos as peças que equivalem ao dividendo para construir um retângulo cujo um dos lados seja o divisor. O outro lado, conseqüentemente, será o quociente que estamos procurando.

Exemplo 4.3.1.1: Modele e efetue a divisão $(x^2 + 4x + 3):(x + 1)$

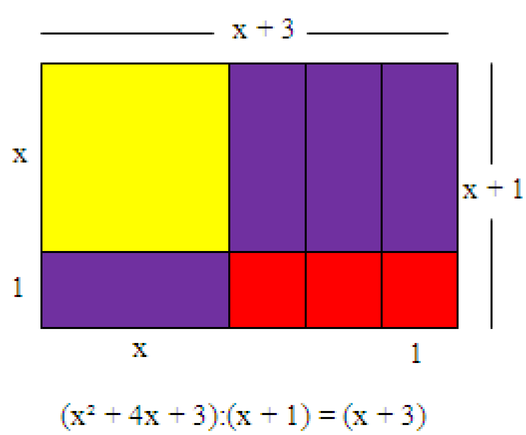

Figura 27 Divisão entre as expressões $(x^2 + 4x + 3)$ e $(x + 1)$

Montamos um retângulo com as peças que representam o dividendo, de modo que um dos lados equivalesse a (x + 1), que é o divisor. Logo, o outro lado, equivalente a (x + 3), é o quociente da divisão.

Efetuando se o cálculo da divisão pelo Algoritmo de Euclides, para termos de formalidade, temos:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 4x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{- x^2 \ - x} \quad & x + 3 \\
0 + 3x + 3 & \\
\underline{- 3x - 3} & \\
0 \quad &
\end{array}
$$

Exemplo 4.3.1.2: Monte e efetue a divisão $(x^2 + 2x - 3):(x - 1)$

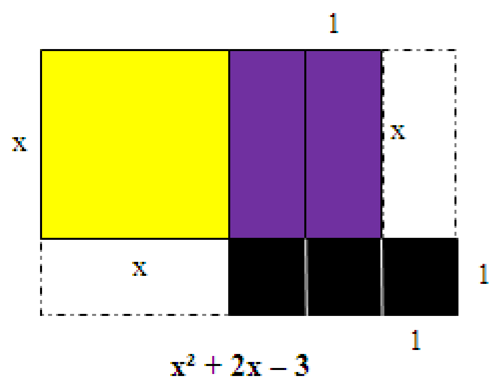

Figura 28 Divisão de $(x^2 + 2x - 3)$ por $(x - 1)$

Note que não conseguimos montar um retângulo completo, portanto temos que preencher os espaços em branco.

As peças que cabem nos espaços são as peças equivalentes a área x e elas devem se cancelar (uma deve ser roxa e a outra preta).

Além disso, sabemos que um dos lados deste retângulo deve ser equivalente ao divisor, ou seja, a $(x - 1)$. Portanto, temos apenas uma possibilidade para colocar as duas peças:

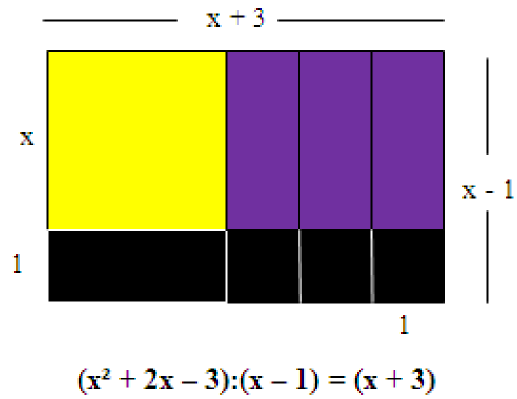

Figura 29 Completando o retângulo para determinar o quociente da divisão de ($x^2 + 2x - 3$) por ($x - 1$)

Assim, obtemos o quociente da divisão, que é o outro lado do retângulo, ou seja, ($x + 3$).

Efetuando o cálculo:

$$\begin{array}{rl} x^2 + 2x - 3 & \big|\underline{\,x - 1\,} \\ \underline{-x^2 + x\quad} & \;\; x + 3 \\ 0 + 3x - 3 & \\ \underline{-3x + 3} & \\ 0 & \end{array}$$

4.3.2 Divisão não-exata

Uma divisão não exata é aquela que não tem resto zero. Para efetuar esse tipo de divisão com o material, seguimos os mesmos passos para efetuar uma divisão exata. Porém, sobrarão peças do material, as quais determinarão o resto da divisão.

Exemplo 4.3.2.1 Modele e determine o quociente da divisão $(2x^2 + 3x + 2):(x + 1)$

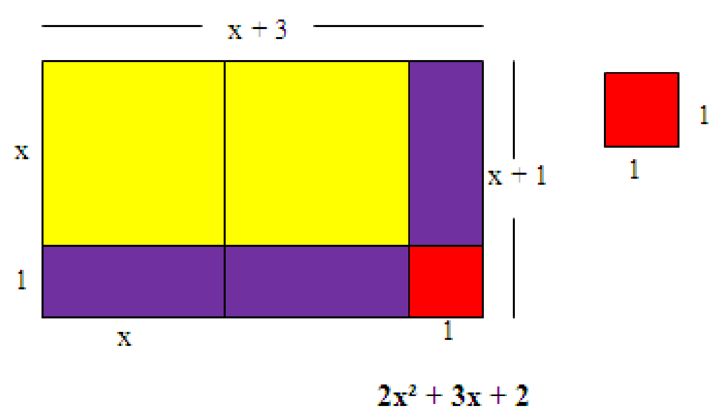

Figura 30 Divisão entre ($2x^2 + 3x + 2$) e ($x + 1$)

Note que conseguimos montar um retângulo com lado equivalente ao divisor, ou seja, (x + 1), e outro lado equivalente a (2x + 1). Porém, sobrou uma peça equivalente a 1.

Assim, temos que $(2x^2 + 3x + 2) = (x + 1).(2x + 1) + 1$

$= 2x^2 + x + 2x + 1 + 1 = \mathbf{2x^2 + 3x + 2}$

Exemplo 4.3.2.2: Efetue a divisão $(x^2 - 3):(x - 2)$

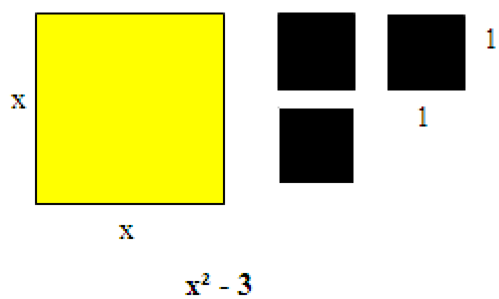

Figura 31 Expressão x^2 - 3

Temos que construir um retângulo cujo lado seja (x – 2).

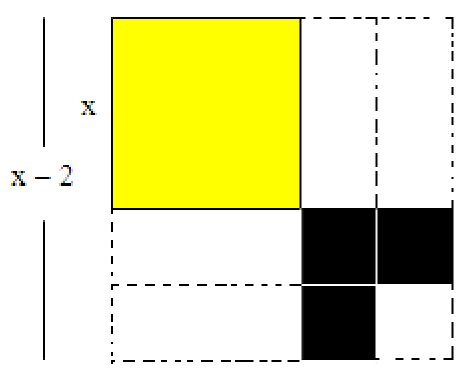

Figura 32 Processo para a divisão de (x^2 - 3) por (x - 2)

Para formar um retângulo completo, teremos que acrescentar peças, mas devemos ter o cuidado de acrescentar peças que se cancelem (uma colorida e uma equivalente preta).

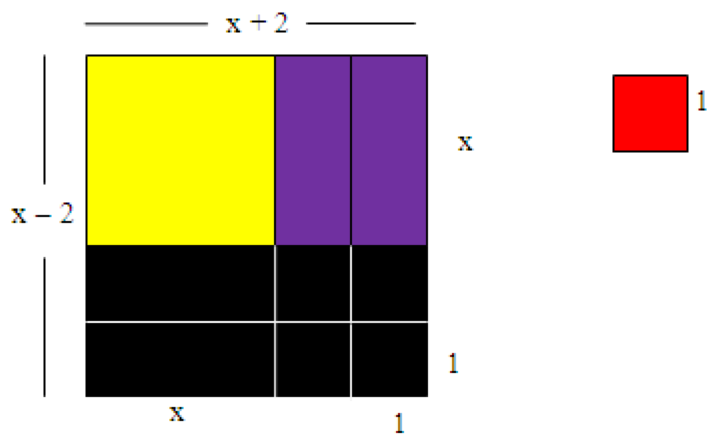

Figura 33 Completando o quadrado para encontrar o quociente da divisão de (x^2 - 3) por (x - 2)

Note que para formar um quadrado completo, acrescentamos duas peças roxas e duas equivalentes pretas. Também acrescentamos uma peça vermelha e uma equivalente preta. Importante perceber que colocamos a peça preta equivalente a -1 no próprio retângulo para que o lado na vertical ficasse (x – 2), como precisávamos, para ser o divisor da divisão.

Dessa forma, encontramos o quociente (x + 2) e o resto 1.

Efetuando os cálculos, temos

$(x^2 - 3) = (x + 2).(x - 2) + 1 =$

$= x^2 + 2x - 2x - 4 + 1 = \mathbf{x^2 - 3}$

4 DA ANÁLISE DO ALGEPLAN

Retomando a idéia de Wittgenstein de jogos de linguagem como atividades regradas que constituem nossas formas de vida, podemos entender que o Algeplan, enquanto um recurso didático, também pode ser visto como um jogo de linguagem. Isso porque o material se compõe a partir de regras que devem ser seguidas para entendê-lo e poder trabalhar com ele e traz consigo diferentes modos de usar, manusear e entender os monômios e polinômios e suas operações: adição, subtração, multiplicação e divisão.

No entanto, o que aconteceria se entregássemos as peças do Algeplan para uma criança, sem nada dizer? Wittgenstein, segundo Miguel e Vilela (2008, pág. 111), faz uma analogia com a idéia de jogo que cabe analisarmos aqui. A situação refere-se a uma pessoa que atira uma bola para a outra, e a outra não sabe se a atira de volta ou para uma terceira pessoa, se a deixa no chão ou a coloca no bolso.

Assim, retomamos a idéia de que as regras para os usos **não** são fixas. Tal como no exemplo, onde precisamos saber qual o jogo em questão para agir conforme a regra, uma criança também precisa conhecer o jogo de linguagem e as regras definidas para desenvolver qualquer atividade.

Da mesma forma, as regras de como usar o Algeplan e trabalhar pedagogicamente com ele não estão no jogo. A criança poderá manuseá-lo, porém seguiria as suas próprias regras, de acordo com o que o material permite, como empilhar as peças, dispô-las em ordem de tamanho ou organizá-las por cor e tamanho, por exemplo.

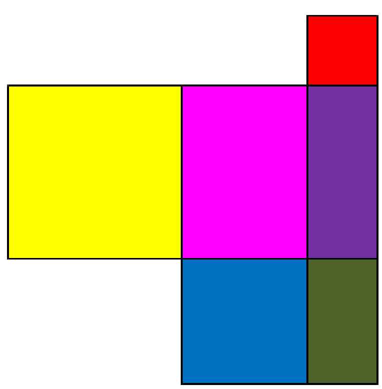

Figura 34 Exemplo de organização das peças do Algeplan por tamanho

É nesse sentido que Wittgenstein afirma que não faz sentido esperar que a criança descubra algo. Assim como na linguagem, na qual aprendemos com o uso – retomemos o exemplo da palavra “mesa” no capítulo 2, uma criança só aprenderá a manipular o Algeplan da maneira que Rosemeire Aparecida Rosa, Fernanda Mansur Dias e Letícia Thais Medeiros (*apud* Pasquetti, 2008) propuseram se as regras de uso forem explicitadas e também na medida em que essa criança faça uso do material.

Além disso, o Algeplan possui diferentes abordagens para as operações. As regras a serem seguidas para se efetuar as operações como soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios são todas diferentes entre si. Mesmo uma criança que saiba manipular o jogo para simplificar polinômios, a mesma não poderá descobrir "sozinha" como manipulá-lo para a multiplicação. Portanto, as regras, todas e cada uma, deverão ser colocadas em cada operação. Vamos tomar como exemplo uma criança que consiga manipular a seguinte operação, de acordo com a regra:

Tome 1 quadrado de lado y, 3 retângulos de lados y e 1 e 2 quadrados de lado 1. Efetue a soma das áreas e escreva o resultado em forma de expressão algébrica.

Nesse acaso, a criança deve, primeiramente, modelar as expressões.

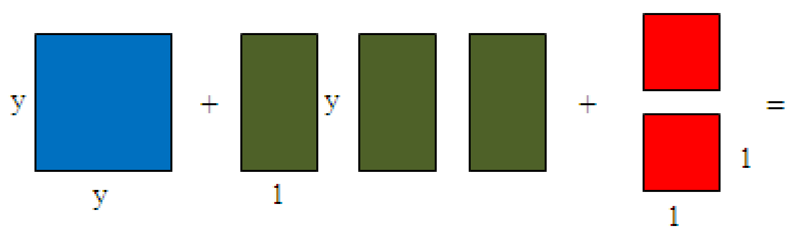

Figura 35 Soma com o Algeplan

Feito isso, deve somar as áreas das figuras e determinar a expressão solicitada, ou seja, $y^2 + 3y + 2$

Apesar de saber as regras a se seguir para resolver o exemplo acima, a criança não poderá “descobrir” como se resolve esta outra situação, a qual a regra é diferente:

Calcule o produto $2x.(y + 3)$

Nesse caso, primeiro deve se modelar o produto de acordo com as regras dadas no capítulo anterior, escolher as peças correspondentes e, por fim, contar as peças com os mesmo valor de área.

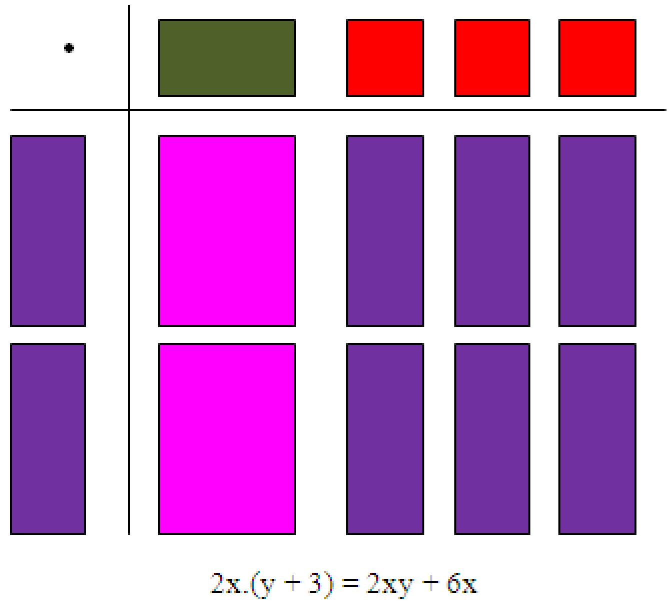

Figura 36 Multiplicação com o Algeplan

Podemos perceber que os jogos de linguagem do Algeplan e da Álgebra têm o intuito de manipular expressões algébricas e suas operações e que, através de ambos, tanto na manipulação do material quanto na manipulação algébrica, encontramos resultados que possuem semelhanças de família. No entanto, as formas como essas regras são mobilizadas são diferentes. Enquanto no jogo de linguagem de álgebra, como prática escolar, as operações com polinômios constituem um conjunto de regras voltadas para a manipulação algorítmica, no Algeplan mobiliza-se as regras para o uso de manipulações com um material pelas suas formas e cores.

Por ter essa mobilização de acordo com as formas das peças, podemos dizer que o Algeplan possui também semelhanças de família com a Geometria. Nas manipulações que foram apresentadas anteriormente, foram utilizadas as medidas dos lados e as áreas das figuras, que representam os seguintes monômios: x, y, x^2, y^2, xy, 1; e que de acordo com a regra para cada operação com as expressões podem formar um retângulo com a área que a soma desses monômios, como no seguinte exemplo:

Encontre a expressão ou polinômio que representa a soma da área das figuras.

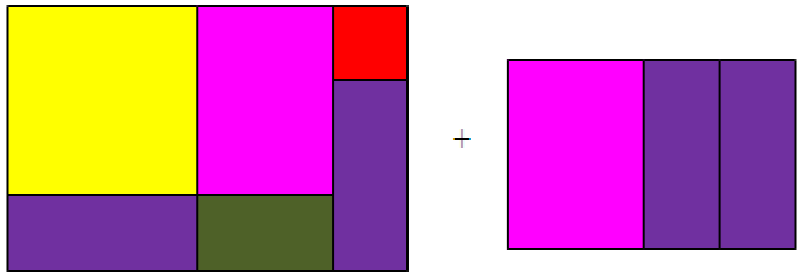

Figura 37 Soma de áreas com o Algeplan

Apesar das semelhanças de família com a Geometria, o Algeplan possui uma regra particular: a possibilidade de se atribuir um valor negativo a uma superfície, o que no jogo de linguagem da Geometria não faz sentido. Para tal representação, utiliza-se a associação com a cor preta – lembremos que as peças possuem duas faces: uma colorida e uma de cor preta. Toda peça colocada com a face preta para cima representa um monômio negativo. Como cada peça está associada a uma área, essa manipulação permite dizer que se representa uma área negativa.

Porém, ainda sobre a discussão de como o Algeplan aborda expressões negativas, vamos analisar o seguinte exemplo:

Monte e resolva a expressão $(2x^2 - x + 3) – (x^2 + 2x + 1)$

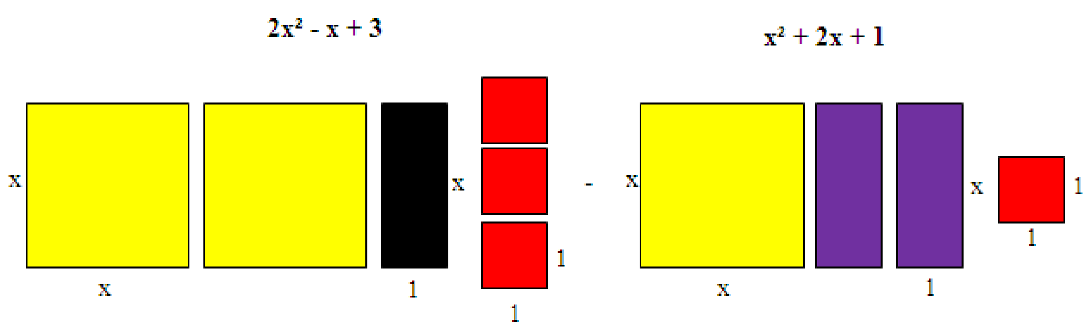

Figura 38 Expressões $(2x^2 - x + 3)$ **e** $(x^2 + 2x + 1)$

O primeiro passo é modelar as expressões entre os parênteses. O sinal de menos na frente da segunda expressão impõe a regra de que as peças devem ser viradas.

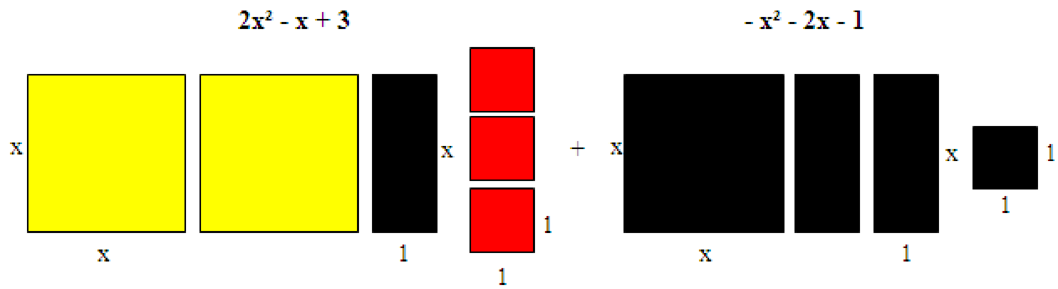

Figura 39 Semelhanças de família entre as regras do Algeplan e as regras da Aritmética e da Álgebra

É possível perceber aqui que essa associação feita no Algeplan com o valor negativo tem uma semelhança de família com os jogos de linguagem da Aritmética e da Álgebra, que permitem que se trabalhe com o sinal de menos e, conseqüentemente, números/expressões negativos (as).

No exemplo acima, em especial, percebemos uma semelhança com a regra aritmética e algébrica de, quando um sinal de menos preceder uma expressão entre parênteses, devemos trocar o sinal de todos os números ou monômios ali dentro. A associação dessa regra no Algeplan é virar as peças que simbolizam a expressão antecedida pelo sinal de menos.

De acordo com essas explanações, podemos reafirmar que o Algeplan, apesar de manter semelhanças com a Álgebra e com a Geometria, possui suas regras de significação constituindo-se em um jogo de linguagem que deverá ser aprendido, tanto quanto a Álgebra ou a própria Geometria.

Diante disso perguntamo-nos: uma criança que domine as técnicas algorítmicas de operações com expressões algébricas também dominará as regras do Algeplan? E aquela que entender as regras de uso do material, conseguirá transpô-las para o manuseio algorítmico das expressões? E quanto à Geometria, é necessário que a criança saiba as relações de área para conseguir compreender as regras do Algeplan?

Vamos primeiramente retomar o exemplo trazido por Bello (2010) sobre como a atividade de calcular o tronco de uma árvore pode constituir diferentes jogos de linguagem por seguir diferentes regras, apesar de manterem semelhanças de família. Dessa forma, para o autor, entender os significados em um jogo de linguagem não é condição para transportarmos esses significados para outro jogo de linguagem. Podemos pensar da mesma forma para responder aos questionamentos anteriores.

Se olharmos para os exemplos sobre jogos trazidos por Wittgenstein, podemos aqui fazer uma analogia entre dois jogos de tabuleiro: de dama e de xadrez. É possível que alguém saiba jogar dama e, no entanto, não saiba jogar xadrez, por mais que haja semelhanças entre eles. Ora, no jogo de xadrez cada peça possui uma regra diferente para o jogador seguir.

Portanto, mesmo que uma criança consiga manipular o Algeplan, seguindo suas regras, isso não significa que ela conseguirá transpor as regras para o jogo de linguagem da álgebra, no contexto de operações algébricas. Apesar de o material possuir semelhanças de família com a atividade algorítmica, como a forma como são apresentadas as expressões algébricas, as regras são colocadas de forma diferente: enquanto no Algeplan manipula-se as expressões de acordo com as medidas dos lados e as áreas das peças, no exercício algébrico manipula-se símbolos através de regras algorítmicas.

Da mesma forma, um aluno que já domine as regras algorítmicas algébricas pode não conseguir manipular o Algeplan, pois as regras de uso também são diferentes.

Quanto à questão sobre a necessidade de saber o conceito de área para compreender as regras do Algeplan, a resposta parece não ser afirmativa. A discussão que fizemos até aqui sobre como o domínio de um jogo de linguagem não garante o domínio do outro já sustenta essa afirmação que é, de fato, uma negação. Porém, vamos exemplificar uma situação.

Pensemos o Algeplan como o material composto pelas suas peças, porém sem atribuir a elas uma área. Vamos considerar a seguinte situação, na qual serão colocadas para a criança as seguintes peças:

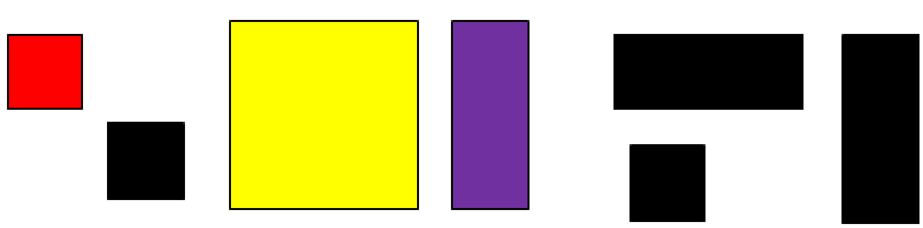

Figura 40 Distribuição de peças do Algeplan

Porém, aqui não vamos falar em expressões algébricas. Para termos de organização de raciocínio, vamos chamar esse jogo de CF (Cores e Formas). Notemos que esse jogo também constitui um jogo de linguagem, por ser uma atividade guiada por regras. As regras, no caso do exemplo acima, serão:

- devem-se juntar as peças por cor e tamanho.

- quando tiver uma peça de cor preta, deve-se verificar, por comparação, se ela tem o mesmo tamanho de outra peça colorida:

  - se tiver, retira se ambas do jogo.

  - se não tiver, deixa-se a peça com a face preta voltada para cima, como inicialmente.

Então, de acordo com essas regras, retira-se uma peça roxa e a peça preta que possui a cor roxa na outra face; repetirá o processo com a peça vermelha; organizará as peças que restaram por cor e tamanho, e teremos a seguinte situação:

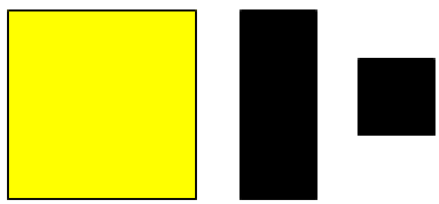

Figura 41 Resultado das manipulações sob as regras do CF

Agora, comparemos o exemplo do jogo CF com o seguinte, proposto no jogo de linguagem do Algeplan – note que as peças iniciais são as mesmas:

Monte e resolva a expressão ($x^2 + x – 2$) + (- $2x + 1$).

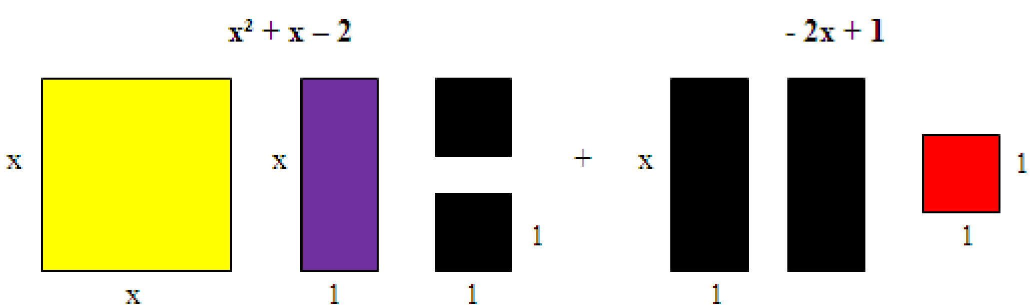

Figura 42 Expressão ($x^2 + x - 2$) + (- $2x + 1$)

Seguindo as regras propostas no Algeplan, o resultado será:

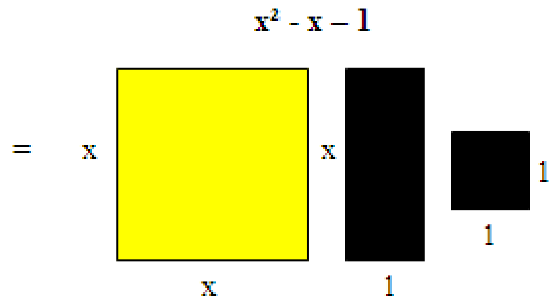

Figura 43 Expressão x^2 - x - 1

Perceba que restaram as mesmas peças no CF e no Algeplan, mesmo sendo diferentes as regras em cada um dos jogos. E, no entanto, no CF não falamos nem em expressões algébricas, nem em áreas.

Portanto, mesmo uma criança que ainda não tenha sido inserida nos jogos de linguagem algébrico e geométrico, ou, num contexto geral, na atividade escolar, poderá aprender a seguir regras no CF e, em algumas situações, alcançar os mesmos resultados que se obtém quando se manipula o material sob as regras do Algeplan.

No entanto, devemos prestar atenção em um detalhe: ao colocarmos no material regras que não prevêem manipulações algébricas, uma situação como a proposta a seguir, aplicada no Algeplan, não contará com o mesmo resultado no CF, já que o sinal de menos na frente do segundo polinômio representa uma regra de manipulação aritmética/algébrica que não existe no CF:

Monte e resolva a expressão $(x^2 - x) - (x^2 - 2x + 2)$

De acordo com as regras do Algeplan, associamos as expressões algébricas entre parênteses às peças abaixo:

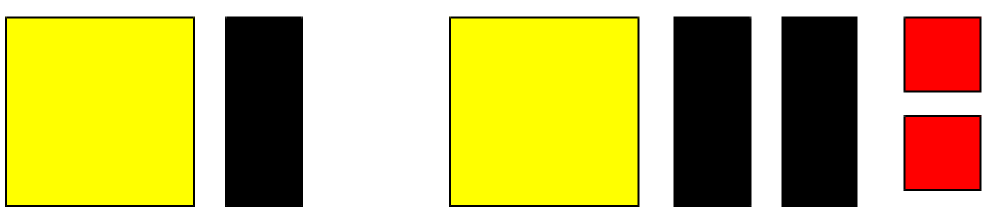

Figura 44 Expressões $(x^2 - x)$ e $(x^2 - 2x + 2)$

Depois, por conseqüência do sinal de menos na frente da segunda expressão algébrica, viram-se as peças que a representam:

Figura 45 Uso da regra de "virar as peças" na presença de um sinal de menos

E, fazendo as manipulações no sentido de simplificar e encontrar o resultado da expressão, retiram-se as peças que se cancelam, restando:

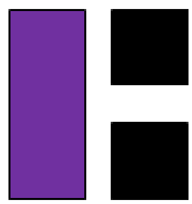

Figura 46 Expressão x - 2

Levando em consideração as regras do CF, no qual as regras não estão associadas a expressões algébricas, a manipulação com as peças da situação inicial, ou seja, da figura 44, ficará da seguinte forma:

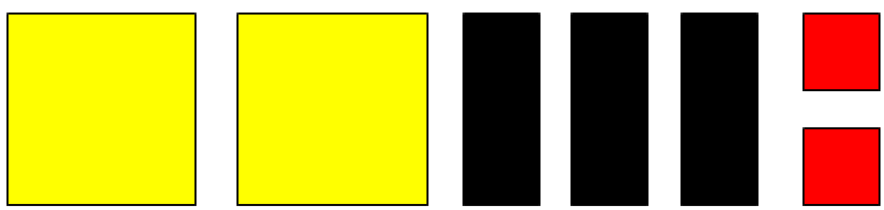

Figura 47 Manipulação sob as regras do CF

Porém, o que se pretende destacar é que é possível manipular o material de acordo com outras regras que não as impostas no Algeplan.

Assim, podemos considerar que, para manipular o material Algeplan, não é necessário conhecer o jogo de linguagem algébrico nem geométrico. Da mesma forma, conhecê-los não é condição para o entendimento e para o seguimento das regras do Algeplan.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o que discutimos nesse trabalho, é possível perceber que o uso do Algeplan não garante uma melhora no ensino da Álgebra. Wittgenstein, em momento algum, quis criticar o uso de materiais manipulativos no ensino de Matemática e esse também não é o meu objetivo.

A intenção aqui foi mostrar que estar inserido no jogo de linguagem do Algeplan não pressupõe que se possa manipular expressões algébricas no jogo de linguagem da Álgebra, pois vimos que as regras impostas por cada um desses jogos constituem suas singularidades.

Nesse sentido, gostaria de chamar a atenção para o ensino usual da Álgebra na escola. Muito tem se utilizado a Aritmética para tentar dar sentido à Álgebra, mas, sob a lente de Wittgenstein, podemos entender que não se trata de uma anteceder a outra num nível de entendimento. Por mais que mantenham muitas semelhanças em suas regras, cada uma constitui um jogo de linguagem e, por isso, não se exclui a possibilidade de inserir uma criança no jogo de linguagem algébrico antes de inseri-la no jogo de linguagem aritmético. Ou seja, o desempenho do indivíduo na atividade algébrica independe do seu desempenho na atividade aritmética.

Refletindo sobre a experiência que me motivou a esse estudo, posso dizer que a Álgebra constitui um jogo de linguagem no qual suas regras devem estar claras. De acordo com Wittgenstein, os alunos aprenderão a segui-las na medida em que usá-las. E aqui não me refiro a inúmeras listas de exercícios. Mas sim, em pontuar as regras e dar a oportunidade para os alunos usá-las. Explorar essas regras. Pontuá-las novamente, se necessário.

Não devemos, por exemplo, buscar na Aritmética uma relação para que os alunos entendam as regras da Álgebra. Tal como numa situação de multiplicação $x.x$, perguntar aos alunos qual o resultado de 3.3, esperando que eles respondam 3^2 (eles provavelmente responderão 9) e, portanto, que $x.x = x^2$.

Com base na filosofia de Wittgenstein, vimos que essas relações não são plausíveis de transposição e, portanto, não se trata de construir um conhecimento. As regras da Aritmética devem ser aprendidas, o que implica em segui-las. As regras da Álgebra, idem. Não devemos tentar “criar” pontes entre esses jogos. Eles apenas possuem semelhanças.

Utilizar um jogo manipulativo como o Algeplan e, de fato, aprender suas regras, vai acrescentar ao aluno, pois ele estará participando de um novo jogo de linguagem. Mas, devemos perceber que as regras, mesmo semelhantes, não são plausíveis de uma transposição espontânea para a Álgebra. O aluno deverá aprender as regras do Algeplan e também as regras da Álgebra.

Ou seja, aprender a seguir as regras impostas no Algeplan não vai tornar desnecessária a aprendizagem das regras da Álgebra para poder participar deste jogo de linguagem. Ou, saber as regras da Álgebra não vai tornar a criança autodidata no Algeplan. Aliás, o que entendemos da filosofia de Wittgenstein é que nada é descoberto. Para aprender, precisamos conhecer as regras, segui-las e assim participar dos jogos de linguagem nas nossas formas de vida.

Com essa idéia bem organizada, podemos dizer que o trabalho em sala de aula deve se dar basicamente na diversificação dos jogos pelos quais os alunos transitam. Por isso que, como professores, temos que propiciar o trânsito por jogos de linguagem, os mais diversos possíveis. E aqui falamos dos jogos de linguagem da Aritmética, da Geometria, do Algeplan, da Álgebra e de outros jogos, nas práticas matemáticas. E vale salientar aqui a variedade que esses jogos compõem. Na aritmética, por exemplo, somar, subtrair, fatorar e citar os divisores de um número são jogos de linguagem. Na Geometria, calcular uma área, uma altura, desenhar um círculo dado um raio também são.

Quando Wittgenstein afirma que aprendemos a seguir regras e usá-las, e que os significados estão ligados à sua gramática, podemos destacar e salientar mais uma vez que as regras devem ser colocadas para o aluno. Por exemplo, o aluno só vai conectar a palavra “ganhar” o sentido de soma, de algo a mais, no uso dessa palavra em um jogo de linguagem no qual tenha esse sentido. Por exemplo, se alguém falar para ele que irá ganhar mais um lápis e posteriormente dar a ele um lápis.

Assim como na prática escolar, participamos de vários jogos de linguagem nas nossas formas de vida, e cada um possui suas regras. Falar português é um jogo de linguagem, assim como jogar vôlei ou fazer cálculos de adição. Para participarmos desses jogos, precisamos seguir suas regras.

Posso dizer que hoje tenho novos pensamentos sobre constituição de significado e métodos de ensino, diferentes dos que eu tinha antes de me interessar pela filosofia de Wittgenstein.

Ainda com base nesse trabalho, pretendo aprofundar meu estudo sobre a filosofia de Wittgenstein, principalmente com a sua obra Observações Filosóficas, na qual é dada ênfase na Matemática, com uma série de discussões sobre os mais diferentes jogos, passando pelas induções matemáticas e conjecturas como a de Goldbach. Com isso, poderei entender não só as manipulações aritméticas e algébricas e algumas relações de Geometria, mas também várias outras práticas matemáticas como jogos de linguagem e buscar novas significações sobre normatividade da Matemática e o seu ensino.

6 REFERÊNCIAS

BELLO, Samuel Edmundo Lopez. **Jogos de Linguagem, Práticas Discursivas e Produção de Verdade: contribuições para a Educação (Matemática) Contemporânea** (Texto digitado). No prelo, 2010.

CONDÉ, Mauro Lucio Leitão. **Wittgenstein Linguagem e Mundo**. 1ª. Ed. São Paulo: Annablume, 1998.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário de Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 1, p.1-32, 2004.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva Wittgensteiniana. **Caderno Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, jan/abr 2008.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4ª Ed. São Paulo: Papirus, 2005.

MIGUEL, A. e VILELA, D. Práticas escolares de mobilização de cultura matemática. **Caderno Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 97-120, jan/abr 2008.

PASQUETTI, Camila. **Proposta de Aprendizagem de Polinômios através de Materiais Concretos**. Erechim: URI, 2008. 48 f. Trabalho de conclusão do curso de Matemática, Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Erechim, 2008.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tratado Lógico Filosófico e Investigações filosóficas**. Tradução de M. S. Lourenço. 3ª Ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações Filosóficas.** Tradução de Adair Sobral e Maria Stela Gonçalves. São Paulo: Loyola. 2005.