Guilherme Ferreira Monteiro

Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio

Porto Alegre - RS, Brasil

14 de dezembro de 2010

Guilherme Ferreira Monteiro

Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Orientador:
Luisa Rodriguez Doering

Departamento de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre - RS, Brasil

14 de dezembro de 2010

Trabalho de Conclusão de Graduação sob o título *"Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio"*, defendida por Guilherme Ferreira Monteiro e aprovada em 14 de dezembro de 2010 , em Porto Alegre, Estado do Rio Grande do Sul, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dra. Luisa Rodriguez Doering
Orientador

Prof. Dra. Elisabete Zardo Búrigo
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo

Nosso trabalho tem o intuito de analisar a exequibilidade do estudo de equações diofantinas lineares com alunos do ensino médio. Tendo em vista esse objetivo, realizamos uma oficina, composta de cinco encontros, no Colégio Tiradentes da Brigada Militar.

As equações diofantinas lineares se encontram na fronteira entre a álgebra e aritmética. Sendo assim, fazemos algumas reflexões acerca da situação do ensino de álgebra e da aritmética nesse começo de século. Analisamos as relações do processo de ensino-aprendizagem entre ambas, de maneira a propor alterações no atual quadro da educação matemática escolar. Também descrevemos mais dois importantes aspectos da educação matemática que são o contrato didático e a engenharia didática, sendo este segundo o referencial de pesquisa que baseou a oficina desenvolvida.

Palavras chaves: equações diofantinas lineares, viabilidade de ensino, aritmética e álgebra.

Abstract

This work considers the idea of introducing Linear Diophantine Equations to high school students. With this in mind, we offered a five workshop at High School Tiradentes. Linear Diophantine Equations lie between arithmetic and algebra, therefore, we discuss the teaching of arithmetic and algebra in this century. We analize the relationship between its learning and teaching and propose some changes in the present High School math-teaching.

We also describe two other important aspects in Math Education, Pedagogic Contract and Educational Engineering, where the second one is the theoretical reference of this work.

Agradecimentos

A Deus por me dar saúde física e mental.

A meus pais por sempre me apoiarem nas minhas decisões.

A UFRGS por oferecer uma execelente formação acadêmica.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática e em especial a minha orientadora Luisa R. Doering com quem pude ter o prazer de conviver nos últimos dois anos e que me proporcionou uma grande evolução pessoal, a Professora Elisabete Z. Búrigo e ao Professor Francisco Egger.

Aos meus colegas que me acompanharam nessa caminhada e em especial a Mariana, Julio, Everson, Fernando, Leonardo, Alessandro e Grasiela.

Aos meus alunos do Colégio Tiradentes da Brigada Militar.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

Sumário

1 Introdução p. 9

2 Reflexões sobre Aritmética e Álgebra p. 11

2.1 Introdução . . . . p. 11

2.2 O lugar da álgebra e da aritmética na escola e fora dela . . . . p. 11

2.3 Sobre a Aritmética . . . . p. 13

2.3.1 Tradição e novo século aritmético . . . . p. 13

2.3.2 Na direção de um sentido numérico . . . . p. 14

2.3.3 Um novo currículo operativo . . . . p. 15

2.3.4 Avaliando o aritmético . . . . p. 15

2.4 Sobre a Álgebra . . . . p. 16

2.4.1 Educação algébrica . . . . p. 16

2.4.2 Tematizando a proposta . . . . p. 17

3 Contrato Didático p. 19

3.1 Introdução . . . . p. 19

3.2 Ruptura e Renegociação . . . . p. 19

3.3 Efeitos do Contrato Didático . . . . p. 20

4 Engenharia Didática p. 24

4.1 Introdução . . . . p. 24

4.2 A Engenharia Didática, Metodologia de Investigação . . . . p. 25

4.2.1 Características gerais . . . . p. 25

4.2.2 As diferentes fases da metodologia de engenharia . . . . p. 26

5 Sobre as Equações Diofantinas Lineares p. 32

5.1 Introdução . . . . p. 32

5.2 Notas Matemáticas . . . . p. 32

6 A Prática p. 39

6.1 Apresentação . . . . p. 39

6.2 O Procedimento Adotado nas Aulas . . . . p. 39

6.3 Relatório das Aulas . . . . p. 41

6.4 Análise dos Questionários e das Atividades . . . . p. 44

7 Conclusão p. 48

Referências p. 52

Anexo A – Notas de Aula p. 53

A.1 Múltiplos e Divisores . . . . p. 53

A.1.1 Aula 1 - Definições Iniciais . . . . p. 53

A.1.2 Aula 2 - Máximo Divisor Comum . . . . p. 55

A.1.3 Aula 3 - Máximo Divisor Comum (Continuação) . . . . p. 61

A.2 Equações Diofantinas Lineares . . . . p. 62

A.2.1 Aula 4 - Equações Diofantinas Lineares . . . . p. 62

A.2.2 Aula 5 - Equações Diofantinas Lineares (Continuação) . . . . . p. 66

Anexo B – Questionários Iniciais p. 68

B.1 Questionário 1 . . . . p. 69

B.2 Questionário 2 . . . . p. 70

B.3 Questionário 3 . . . . p. 71

B.4 Questionário 4 . . . . p. 72

B.5 Questionário Final . . . . p. 73

Anexo C – Atividades p. 74

C.1 Lista de Exercícios 1 . . . . p. 75

C.2 Lista de Exercícios 2 . . . . p. 76

C.3 Lista de Exercícios 3 . . . . p. 77

C.4 Lista de Exercícios 4 . . . . p. 78

C.5 Teste . . . . p. 79

Anexo D – Respostas dos Alunos p. 80

D.1 Questionários . . . . p. 81

D.2 . . . . p. 82

D.3 . . . . p. 83

D.4 . . . . p. 84

D.5 . . . . p. 85

D.6 Lista de Exercícios . . . . p. 86

D.7 . . . . p. 87

D.8 . . . . p. 88

D.9 . . . . p. 89

D.10 . . . . p. 90

1 Introdução

Este trabalho, além de outras coisas, analisa o ensino-aprendizagem de equações diofantinas lineares com alunos de ensino médio e tem como objetivo:

i) examinar a viabilidade do estudo deste conteúdo;

ii) avaliar se uma aula de matemática que adote a prática de demonstrar os teoremas utilizados, é bem aceita no ensino médio.

Uma das principais justificativas da escolha deste tema encontra-se em Brollezi (1996) e está relacionada com o seguinte fato: grande parte do atual ensino de matemática dá-se através de uma ênfase na abordagem através da continuidade. Sendo assim, será feita uma abordagem que concretize uma ligação entre o discreto e o contínuo, pois a riqueza de uma filosofia de aula que adote esses dois aspectos fortalece o desenvolvimento de conceitos matemáticos, já que muitos deles provêm dessa interação.

A fim de avaliarmos se o objetivo citado acima pode ou não ser atingido, foi realizado uma oficina com cinco encontros no Colégio Tiradentes da Brigada Militar com alunos pertencentes aos três anos do ensino médio.

Iniciamos o trabalho com uma reflexão teórica sobre a situação da aritmética e da álgebra neste início de século feita por Lins (1997) em seu livro "Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI". Tradicionalmente, a álgebra aprendida na escola é concebida como uma generalização da aritmética. Mais ainda, a aritmética é tida como concreta (e, portanto, mais fácil), e a álgebra como abstrata (e, portanto, mais difícil). Dessa forma, em nossa discussão mostraremos que essa interpretação é inadequada em alguns aspectos, e equivocada em outros. Levando em conta a álgebra e a aritmética como duas faces de uma mesma atividade, examinaremos a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra, de modo que isso promova mudanças na educação matemática escolar. Essas reflexões propõem o "desenvolvimento de um senso numérico" em vez de "aprendizagem aritmética" e "produção de significados para a álgebra" em vez de "aprendizagem de álgebra".

Seguimos com uma revisão sobre contrato didático, explicitando as aproximações e distanciamentos existentes com a prática feita. O local onde foi realizado a oficina que baseou este trabalho foi o principal motivo que me levou a estudar este conceito, já que muitas características do contrato didático vigente nessa escola são explicítas e influem diretamente nas atividades escolares diárias dos alunos.

Em seguida analisamos a metodologia de pesquisa da engenharia didática, metodologia esta que busca unir a pesquisa e a prática. E foi este o referencial de pesquisa que baseou nossas aulas. Assim como feito no contrato didático, apontaremos os aspectos que se mostrarem presentes durante a elaboração/realização da oficina realizada. Em linhas gerais, podemos separar a engenharia didática em quatro etapas: Análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação da prática feita.

Apresentamos também a descrição matemática do conteúdo que foi abordado na oficina realizada. Nesta parte trazemos a exposição e demonstração dos dois principais teoremas vinculados a este conteúdo, bem como a aplicação desses resultados obtidos, por meio da resolução de um exemplo completo. Ressaltamos que durante a realização das oficinas, não foram somente esses dois tópicos matemáticos estudados. Houve uma revisão de conceitos e o ensino de novos conteúdos necessários para o aprendizado de equações diofantinas lineares.

Por fim, trazemos uma detalhada descrição da oficina. Nesta parte temos: i) a descrição do procedimento adotado nas aulas; ii) os relatórios dos encontros feitos; iii) as análises dos questionários e atividades realizadas pelos alunos.

2 *Reflexões sobre Aritmética e Álgebra*

2.1 Introdução

Como havia mencionado, agora tecerei alguns comentários a respeito do livro "Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI" de Lins (1997), já que este livro trata de um assunto que se relaciona com meu trabalho. Em Matemática existem poucas noções tão enraizadas como a de que devemos aprender antes aritmética do que álgebra e somente este fato já seria motivo para se discutir este assunto. O autor argumenta que essa idéia não possui fundamento algum e que na realidade é prejudicial.

Para fazer esta discussão, Lins analisa alguns aspectos do processo de produção de significados para a álgebra e a aritmética. Essa análise permitirá que seja identificadas a maneira com que a aritmética e a álgebra se relacionam, diferentemente das leituras usuais, do tipo "álgebra é aritmética generalizada" ou "álgebra é a estrutura da aritmética".

A leitura da produção de significado para a álgebra e a aritmética que o autor faz é baseada na seguinte idéia: é preciso iniciar mais cedo o manuseio da álgebra, e de modo que esta e a aritmética se desenvolvam juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.

2.2 O lugar da álgebra e da aritmética na escola e fora dela

A aritmética e a álgebra, juntamente com a geometria, formam a base da Matemática escolar, pois esta é de fato a realidade encontrada nos livros didáticos e nas propostas curriculares.

Mas o que seria a álgebra? E a aritmética?

Coisas de álgebra são equações, funções etc., e as da aritmética são números, as quatro operações etc. Mas o que é que vem depois do *et cetera*? Começaremos com a caracterização da álgebra e aritmética e discutiremos o *et cetera* para depois.

Números, tabuada, quatro operações; eis a aritmética.

No nosso dia-a-dia esses conceitos nos ajudam a calcular preços, tamanhos, volumes entre outras coisas. Certamente que na rua não usamos os números "puros", eles sempre representam algo e por esta razão, raramente calcularemos o produto de dois números grandes ou trabalharemos com números muito pequenos. Na rua, nos deparamos, sim, com os números negativos - temperaturas negativas e saldo bancário negativo -, porém estes não são os mesmos números negativos que encontramos na escola. Temperaturas, por exemplo, não são jamais somadas. E para terminar, nenhuma pessoa espera encontrar uma casa com o número 1+2i.

E na escola? Bem, lá podemos ter números com infinitas casas decimais, podemos sempre multiplicar números negativos, positivos, racionais e irracionais. Na rua sempre podemos ter uma noção com base no que estamos fazendo de números, mas na escola o que se busca é o resultado exato, o que se consegue aplicando o algoritmo adequado. Para terminar, na escola, os números não representam nada, a não ser nos "problemas com histórias", e no final termina-se pedindo que os alunos esqueçam a história e pensem somente na Matemática.

Tudo isto justifica o que sempre ouvimos, de pessoas comuns, que boa parte da Matemática aprendida na escola é inútil ou irrelevante, e talvez mesmo até toda ela: é possível aprender na rua a maior parte da aritmética da rua. Não é que não exista aritmética na rua: é que ela é outra. Aritmética escolar embora plenamente justificada matematicamente falando, muitas vezes não leva em conta muitas das necessidades da rua. É preciso insistir que, embora os significados matemáticos sejam importantes para a formação das pessoas comuns, o que se constata é que até mesmo matemáticos usam em seu cotidiano da rua métodos que não são os da Matemática escolar. Essa flexibilidade do especialista é o que queremos que nossos alunos possuam, mas aí há um problema: o especialista é aquele que sobreviveu, independente do método que foi usado em sua formação. Essa é uma questão importantíssima: há pessoas que alcançaram aquela flexibilidade por meio de uma educação tradicional, outros pela Matemática moderna e outros por qualquer outra abordagem. Mas não são muitos esses sobreviventes. O outro lado da verdade é que para muitas pessoas as escolas de todos os tipos continuam fracassando.

A breve análise feita para as diferenças entre a aritmética da rua e a escolar sugere que cada uma delas possui seus próprios significados e suas próprias maneiras de proceder. Avaliar o produto desses procedimentos, sugere que essas diferenças acabam constituindo legitimidades, pois do mesmo modo que a escola proíbe os métodos da rua, alegando que estes possuem um aplicação muito limitada, a rua proíbe os métodos da escola, chamando-os de complexos e sem sentido algum, e dizendo que não são necessários na rua. A Educação Matemática precisa reconhecer que ambas as posições estão certas. Isso significa que nossos alunos vivem em dois mundos distintos, cada um contendo sua organização e seus modos legítimos de produzir significados.

2.3 Sobre a Aritmética

2.3.1 Tradição e novo século aritmético

Há muito tempo encontramos a aritmética no ensino obrigatório de muitos países. As "Aritméticas" são os primeiros livros que possuíam o objetivo de ensinar essa "arte", que contém regras e técnicas. No passado eram dadas duas visões para esse conceito: a extremamente formal ou a simplesmente manipulativa, esquecendo que a aritmética também inclui: a) representações e significações diversas; b) análise dos porquês dos algoritmos e divisibilidade; c) o uso correto e racional das regras; e d) descobertas ou "teoremas"(LINS E GIMENEZ,1997, p.33).

A aritmética do século XX oferece respostas a problemas recentes e importantes como a chamada matemática discreta, com a criptografia, a análise numérica etc. Sendo assim, por que reduzir a aritmética a regras escolares? O desenvolvimento habitual do ensino-aprendizagem da aritmética nas escolas não aborda muitos pontos importantes e enfatiza pontos não tão relevantes assim. Assim aponto algumas alterações nas salas de aulas. A saber: 1) diminuição na ênfase no sistema de numeração decimal; 2) ressaltar o valor intercultural do fato aritmético e suas relações com o meio.

As aritméticas das escolas militares trabalham com a inclusão de técnicas e processos cansativos que esquecem o próprio avanço tecnológico da ciência. O professor deve estudar a produção de conhecimento na história da matemática, e assim talvez incorporemos no futuro novas formas e ideias. Além da história da matemática e da sua intervenção na formação de idéias cientificas, deve-se destacar o papel fundamental das relações entre aritmética e o "mundo". Não podemos situar a aritmética escolar sem dizer sua origem e a sua função no mundo real.

2.3.2 Na direção de um sentido numérico

Em que direção vai o ensino-aprendizagem da aritmética? Por muito tempo tem-se valorizado o sistema de numeração como fundamento para o reconhecimento numérico. Se a isso era adicionado um trabalho sobre a estrutura algébrica das operações, supunha-se que já se apresentava totalmente em forma o conhecimento quantitativo. Pesquisas sobre os parâmetros curriculares de diversos países revelam a necessidade de desenvolver intuições sobre o aspecto quantitativo das situações, entendendo os números em seus muitos significados, possuindo referentes para as quantidades e as operações. Com base nos projetos curriculares dos anos 90, encontraremos os cinco elementos seguintes: i) devemos relacionar os números com a realidade; ii) desenvolvimento de um sentido numérico; iii) consideração da aritmética desde suas diferentes linguagens, promovendo sentido e justificações diversas relacionadas a núcleos de experiências distintos; iv) reconhecimento e uso do cálculo; e v) estímulo à análise da estrutura numérica (LINS E GIMENEZ,1997, p.59).

Mas afinal de contas, o que é sentido numérico? Os estudantes devem dispor de técnicas necessárias para reconhecer o valor de quantidade, ordem, situação e operação, que se expressam por meio de números e correspondem a inúmeras situações reais. Muitos resultados vêm mostrando que os alunos não valorizam, nem a estrutura escolar curricular desenvolve, um saber intuitivo sobre os números. Atualmente, está-se desenvolvendo a concepção de sentido numérico como o conjunto de características e de rede de relações que permitem a relação de números e operações, cujo objetivo é resolver problemas flexivelmente e mediante formas criativas, uma noção proposta por Judith Sowder, pesquisadora norte-americana. A entrada num "sentido numérico" implica diversas ações cognitivas, como: a) embora reconhecer uma *operatividade* de técnicas, não se trata de executar um pensamento algorítmico; b) não há sentido numérico sem um *processo de auto-regulação* do pensamento, incerteza nos dados e resultados que se tem; c) dá-se numa multiplicidade de caminhos e diversidade de soluções, de maneira que a produção de juízos correspondentes não pode afirmar que tal raciocínio seja melhor que o outro; d) inclui a complexidade, necessita atribuir *significado* e requer um *esforço*(LINS E GIMENEZ,1997, p.60).

As características mais importantes para um bom sentido numérico são: identificar significados para os números, descobrir relações e padrões, imaginar e descrever uma quantidade em função de outras e intuir e estabelecer raciocínios na resolução de problemas. Há também fatores de atitude e valor como o saber situa-se no "mundo dos números", e reconhecer o valor e limites do uso do cálculo mental, escrito e com calculadora.

2.3.3 Um novo currículo operativo

Prossigo indicando algumas considerações que devem fazer parte do novo currículo operativo, segundo Lins e Gimenez:

a) Deve-se superar preocupações tecnicistas. Os fracos desempenhos em provas de cálculo mostram-se ainda como algo desanimador e que deixa os professores em má situação.

b) Eliminar a independência de campos numéricos, que ocupam normalmente lições separadas, e também promover trabalhos inter-relacionados entre o entre o aritmético e outros aspectos da matemática.

c) Deve-se dedicar menos tempo ao esforço repetitivo e mecânico de processos já abordados.

d) Utilizar mais o trabalho interdisciplinar que não deve ser reduzido a motivações e uso de procedimentos comuns. O cálculo e a aritmética não devem esquecer as relações com a música, as vinculações das representações e das tabelas numéricas com a descoberta de propriedades que surgem da geografia, os fenômenos físicos etc.

As palavras que usamos para expressar conteúdos, raciocínios e conversações aritméticas possuem ambíguos significados. Os símbolos também possuem diversos significados e usos distintos. As palavras são em muitas ocasiões usadas de maneiras diferentes da que o professor esperava... Mas pertencem à linguagem que expressa o aritmético e deve-se considerar que, às vezes, elas criam dificuldades. Assim, para promovermos o uso da linguagem devemos introduzir situações motivadoras que fujam das perguntas clássicas e convidem à produção: a) de histórias com questões abertas; b) de situações em que nos colocamos "no lugar do outro"; c) de encaminhamento de um diálogo com alguém que não está presente

2.3.4 Avaliando o aritmético

A fim de resumir todas as idéias expostas faço comentários sobre elas considerando uma perspectiva de avaliação. Isso faz com que reconheçamos objetivos que correspondam aos princípios da chamada "nova aritmética" para iniciar o século XXI e a forma de conduzir sua implantação. Significa também indicar uma maneira de acompanhar continuamente o desenvolvimento dessa implantação na sala de aula, e de analisar o que ocorre com o conhecimento dos estudantes e as crenças do professor, o que se relaciona com o que há de formativo na avaliação.

Segundo Lins e Gimenez, os principais objetivos que o ensino da aritmética propõe são os seguintes:

1) Desenvolver uma capacidade mínima interpretar o que existe de aritmético em situações reais.

2) Ter domínio sobre alguns processos gerais aritméticos que possibilitem a resolução de problema por meio de métodos diversos.

3) Dominar algumas bases conceituais importantes, reconhecendo sua aplicabilidade em situações concretas.

4) Ser capaz de formular hipóteses frente à problemas, vinculando as justificativas necessárias a diversos raciocínios.

2.4 Sobre a Álgebra

Há certo consenso sobre o que a álgebra trata: equações, cálculo literal, funções, por exemplo, mas mesmo aí há diferenças - gráficos são ou não da álgebra? O problema de um consenso construído dessa maneira, baseado em conteúdos, é que é possível saber que isto ou aquilo "é" álgebra, e trabalhar esses conteúdos, mas não podemos saber duas coisas fundamentais: a) se existem outros tópicos que também deveriam estar ali; e, b) fica difícil saber de que forma organizar um currículo para a educação algébrica, e até mesmo se os tópicos tradicionais são tão importantes quanto sua inclusão tradicional em currículos parece indicar. Os distanciamentos existentes nas concepções algébricas possuem raízes diferentes em diferentes conceitualizações da ação algébrica (LINS,1997, p.89).

2.4.1 Educação algébrica

Lins discute aqui o fato de que propostas para a sala de aula resultam sempre de visões do que seja aquilo que queremos promover através do ensino. Uma maneira de falar isso é dizer que as propostas para a sala de aula nunca são "neutras" em relação a pressupostos de toda ordem: relativos à natureza dos objetos que ali são apresentados ou relativos a concepções do saber. O que faremos a seguir será uma discussão sobre uma abordagem para o ensino-aprendizagem da álgebra.

O autor inicia a discussão pelas tendências "letristas". Alguém que acredite que a atividade algébrica se resume a um "cálculo" com letras, pode propor o que para a sala de aula? Talvez adote, seguindo algumas péssimas idéias sobre educação matemática, a prática de usar a "seqüência" técnica/prática. Isso é o que mais encontramos nos livros didáticos e essa é uma situação desagradável. Assim, surge a pergunta porque essa prática é tão popular? Há a resposta usual, de que muitos professores, não estando "preparados", simplesmente seguem o que os livros propõem.

Por um lado, é verdade que precisamos que as editoras e universidades produzam melhores materiais didáticos, mas por outro, é provável que a repetição dessa prática por tanto tempo, aliada ao fato de que o livro assume um papel de autoridade, termine por constituir a noção de que a atividade algébrica é "cálculo literal".

Seria ingenuidade achar que a enorme aceitação dessas práticas "letristas" ocorre só por resignação dos professores: é preciso entender que elas correspondem bem a uma certa visão da atividade algébrica, caso contrário, não sobreviveriam. E é necessário ter consciência de qualquer proposta de mudança vai ter de passar por convencer muita gente de que a atividade algébrica não é "cálculo literal".

Há uma corrente em educação matemática que também toma como ponto de partida o "concreto", mas num sentido diferente. Para eles o "concreto"é visto como real, e as atividades são investigações de situações reais. Aqui situam-se baseadas em modelagem matemática e as propostas baseadas em investigações. Através dessas perspectivas, a educação algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de organizar uma situação, como um acessório e não como um objeto primário de estudo. Em relação á caracterização da atividade algébrica, não há uma visão comum a todas essas abordagens, o que mostra que é possível que o fator que primeiro identifica uma linha na educação algébrica, não seja aquela caracterização: necessitamos ir além da primeira impressão para identificar diferenças entre propostas similares.

2.4.2 Tematizando a proposta

Faço agora uma breve análise sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNs) no que tange à questão da atividade algébrica. Os PCNs afirmam que os alunos do Ensino Médio devem aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, relacionando-se com outros conceitos e não se separando dos problemas e da noção sócio-histórico que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão ligados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à familiaridade com a linguagem simbólica e à capacidade de usar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

Acerca das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no ensino de Matemática do Ensino Médio estão a leitura e interpretação de textos matemáticos, passagem de mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica. A atividade algébrica exercita os aspectos citados a pouco e investiga os significados sendo produzidos no inteiro de uma atividade. Isso significa que o recorte do que seja "álgebra" nos serve apenas para identificar atividades que podem envolver pensamento algébrico, o que é importante do ponto de vista da educação matemática, embora, visto do ponto de vista puramente epistemológico, seja irrelevante dizer se isto ou aquilo é ou não álgebra.

Dessa maneira, penso que um estudo de álgebra ou que envolva o pensamento algébrico deve ser capaz de desenvolver no aluno a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e na intervenção no real. Deve-se também garantir que o discente adquira habilidade para lidar com as simbologias, terminologias e os conceitos algébricos, de maneira que seja capaz de ajustar seus conhecimentos sobre Álgebra para a construir um modelo que sirva para a interpretação e investigação em Matemática.

3 Contrato Didático

3.1 Introdução

As noções de contrato didático que apresento estão baseadas na definição dada por Guy Brousseau (SILVA, 1999) e nas contribuições fornecidas por Régine Douady. A relação professor-aluno muitas vezes funciona como cláusulas de um contrato. Essas regras, entretanto, quase nunca são explícitas, mas se revelam quando as mesmas são transgredidas. O conjunto das cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e alunos mantém com o saber, constitui o chamado contrato didático. Esta noção de contrato didático supõe a compreensão da escola como um local responsável pelo fornecimento do saber escolar, sendo assim, dá a idéia de ser uma tradição cultural. É importante notar que o contrato didático está diretamente relacionado com a estratégia de ensino que será adotada, adaptando-se a diversos contextos.

A oficina que baseou meu trabalho foi realizada no Colégio Tiradentes da Brigada Militar e este foi o principal fator que me motivou a estudar esse importante conceito, pois este é um local onde os preceitos do contrato didático revelam-se em muitos momentos da rotina escolar.

3.2 Ruptura e Renegociação

O contrato didático evidencia-se quando é transgredido por um dos componentes da relação didática. Quando isso ocorre, é preciso que haja a ruptura e renegociação do mesmo para o avanço do aprendizado. O contrato didático existe em função do aprendizado dos alunos. A cada nova etapa da construção do conhecimento o contrato é renovado e renegociado. Muitas vezes essa renegociação pode passar despercebida pelos parceiros da relação didática. Os discentes, em geral, encontram dificuldades em se adaptar a uma mudança de contrato. É certo que a renovação e a renegociação dependem não só do tipo de trabalho, como também do meio onde se dão as práticas pedagógicas.

3.3 Efeitos do Contrato Didático

A maioria das dificuldades dos discentes em obter um bom desempenho escolar deve-se aos efeitos de um contrato didático mal-colocado ou mal-entendido. Este traz no seu bojo a marca da expectativa do docente em relação à classe de alunos ou até mesmo um aluno em particular. Isso pode estabelecer um acordo tácito entre ele e o aluno; o professor limita sua exigência à imagem que faz da capacidade do aluno e este, por sua vez, limita sua ação à imagem de si próprio que o professor lhe refletiu.

Querendo que seus alunos tenham bons desempenhos, o professor tende a facilitar-lhes a tarefa de variadas maneiras como, por exemplo, ensinamento de pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicando-lhes pequenos passos nos problemas. Muitas vezes o resultado obtido pode ser o contrário daquele que esperávamos. Tudo isso pode impedir que o aluno compreenda o que está se passando. Tais práticas, movidas pela sensação de que o esforço exigido dos alunos esteja sendo grande demais, podem propiciar uma revisão dos objetivos da aprendizagem, ocasionando um rebaixamento dos mesmos.

Por causa do que se costuma ter como máxima da relação didática: "o docente deve ser amigo do aluno", sacrificam-se muitas vezes os objetivos principais do ensino. O professor passa a ensinar apenas aquelas partes do assunto em que os discentes aparentemente possuem mais facilidade de "aprender"e colocar como objetos de estudo suas próprias explicações e seus meios heurísticos, em vez de ter como objeto o verdadeiro conhecimento matemático. Como o aluno obtém um bom desempenho nas provas e testes, ele acha que esse é o bom professor, pois sabe explicar bem e é amigo dos alunos. A vontade de inserir conhecimento em atividades familiares pode conduzir o professor a trocar a problemática real e específica por outra, talvez metafórica, mas que não confere sentido correto à situação. Entretanto, em instituições de ensino como o Colégio Tiradentes, o docente não faz questão de possuir um vínculo "amigável"com seu aluno, pois agindo desta maneira, ele pode pensar que sua autoridade possa vir a ser enfraquecida.

Em nossa prática, adotamos a filosofia de demonstrar todos os teoremas e proposições que seriam utilizados, com o intuito mostrar a origem dos resultados obtidos. Os alunos não estavam acostumados com essa dinâmica de aula e no começo sentiram um pouco de dificuldades para acompanhar os raciocínios feitos nas demonstrações, entretanto em nenhum momento a matéria foi "facilitada", pois do contrário, estaríamos rebaixando a riqueza intelectual do conteúdo. Deve-se ressaltar que os alunos se mostraram receptivos a esse sistema de aula e estavam cientes de que o curso traria novidades que requerem estudo e persistência. Toda a turma apresentou grande constância e empenho na superação de suas dificuldades.

Outro efeito do contrato didático é o de se tomar como objeto de estudo uma técnica que seja útil para a resolução de um problema, perdendo-se de vista o verdadeiro saber a ser desenvolvido. Mas para que possamos buscar o conhecimento, antes de tudo precisamos fazer uma coisa muito mais primordial que é pensar. Mas o que faz com que pensemos? A resposta é o problema. Em duas obras publicadas no final da década de 1960 (*Lógica do sentido e Diferença e repetição*), Gilles Deleuze diz que o problema desempenha um papel central, como aquilo que mobiliza o pensamento e o move, como aquilo que faz pensar. Uma característica essencial do problema é que ele é sempre singular e quase nunca apresenta uma fórmula predeterminada. E está exatamente aqui o motivo que faz com o problema nos coloque a pensar, justamente porque não somos capazes de compreendê-lo de antemão; ele não nos fornece uma resposta pronta, mas apresenta-se para nós como um desafio a ser enfrentado, para o qual uma resposta deve ser construída. (GALLO, 2008, p.117)

Falemos agora do efeito do uso abusivo da analogia. As metáforas são quase sempre úteis para ajudar a compreensão, mas seu uso excessivo pode limitar o conceito em questão. Resolver um problema procurando as respostas num contexto análogo é uma boa prática heurística, mas limitar a conclusão à famosa frase: "caímos novamente no problema anterior"pode fazer com que o aluno evite abordar o problema colocado diretamente.

Encarar o ensino como a transferência ao aluno da responsabilidade do uso e da construção do saber pode dar origem a uma situação paradoxal. O professor deve ser capaz de fazer com que o aluno resolva problemas que ele lhe propõe a fim de fazer com que o mesmo caminhe com suas próprias pernas. Mas se o aluno produz sua resposta sem ter feito ele mesmo as escolhas que caracterizam o saber conveniente e que diferenciam esse saber dos conhecimentos insuficientes, sua produção não é aquela indicada para o objetivo da construção do conhecimento, uma vez que devemos nos focar naquilo que é mais importante e essencial. Isso ocorre quando o professor é levado a dizer ao aluno como resolver o problema proposto. O aluno, não tendo feito nem escolhas, nem tentativas de métodos, não dá a prova esperada da apropriação desejada. Ele apenas tem a ilusão de que cumpriu a tarefa proposta e que apreendeu o objeto que o docente pretendia lhe ensinar.

O professor tem o dever de ensinar os aspectos fundamentais sobre o saber. O aluno, sobretudo aquele que está com dificuldades em resolver a questão, solicita sua interferência. Quanto mais o professor cede às solicitações do aluno, mais arrisca perder as suas chances de obter e constatar objetivamente a aprendizagem que ele realmente deve visar. O contrato didático coloca o docente de frente a uma verdadeira injunção paradoxal: tudo aquilo que ele empreende para fazer produzir no aluno os comportamentos que ele espera tende a privar este último das condições necessárias para a aprendizagem da noção desejada. O aluno, por sua vez, também se vê diante de uma injunção paradoxal: se ele aceita que, de acordo com o contrato, o professor lhe ensine os resultados, ele próprio não os produz e daí ele não aprende. Se, ao contrário, ele recusa toda a informação do mestre, a relação didática se rompe, mas dificilmente isso acontece, já que o discente, na maioria das vezes, procura agradar seu professor para que o mesmo obtenha bons resultados.

Isto não constitui uma contradição, porém o saber e o projeto de ensino não devem avançar sob esse "faz de conta", sob uma máscara, pois do contrário, a construção do conhecimento pode ser feita de maneira equivocada. Aprender implica, por si mesmo, que o aluno aceite a relação didática, mas que ele a considere provisória e se esforce para "caminhar com suas próprias pernas". Para isso, muito ajudará o desempenho do professor não só durante a execução das atividades, como também na elaboração e reelaboração de situações/problemas que possam estimular e instigar seus alunos. Dessa forma, em nossas oficinas foi criado um ambiente que possibilitou deixar os alunos pensar, opinar, discutir e resolver os exercícios/demonstrações.

Grande parte das regras do contrato didático está implícita, mas nem por isso deixa de ser coercitiva e seguida. A renegociação contínua do contrato propicia uma revisão dos objetivos do ensino-aprendizagem, podendo contribuir para um rebaixamento de tais objetivos. Ao mesmo tempo em que o professor quer que seus alunos tenham bons resultados, ele pode pensar que o esforço deles exigido é grande demais. Dessa forma, ele tende a facilitar-lhes a tarefa de diferentes modos, como: explicações abundantes e ensinamento de certos algoritmos. Contratos didáticos mal-adaptados podem gerar inúmeros mal-entendidos e sentimento, por parte dos alunos, de terem sido enganados. Por um lado, os alunos desejam se adaptar às regras e, por outro, a versatilidade de um professor pode gerar a idéia de que nunca se sabe o que esse professor quer. É preciso tomar muito cuidado com esses descontentamentos, pois eles podem desembocar em recusas ou, até mesmo, em fracassos escolares.

Apresentada a noção de contrato didático, trago agora uma rápida análise sobre o questionário que foi respondido pela professora de matemática dos alunos que participaram da oficina.

A primeira pergunta era sobre o cumprimento das atividades atribuídas aos alunos. A resposta foi que a maioria dos alunos é responsável, o que demonstra o grande comprometimento dos discentes com as suas obrigatoriedades.

O segundo questionamento versava sobre as interações entre professor e aluno durante as explicações. A professora disse que é preciso considerar que o nível de integração possui algumas variáveis: 1ª) ligada a matéria em exposição. Sendo ela algo totalmente estranha a turma, a interação é praticamente nula, apenas para dirimir dúvidas; 2º) ligada a maturidade da turma. Alguns alunos são inseguros para fazer questionamentos e discussões.

O terceiro questionamento pedia que fossem citadas as principais características do conteúdo didático e da dinâmica de aula vigente no Colégio Tiradentes. A professora afirmou que o conteúdo didático é misto e se dá pela exposição tradicional da matéria seguida por uma segunda fase apoiada pelo material didático direcionado a esse trabalho de aprendizado. Dessa maneira o aluno produz conhecimento através da resolução de problemas voltados para sua realidade futura (concursos vestibulares e militares) sendo esse conteúdo discutido e avaliado posteriormente pelo professor. Neste ponto fica evidente a preocupação da escola em preparar bem o seu corpo discente para futuros concursos, sendo que a filosofia de ensino adotada nas aulas é totalmente voltada para esse objetivo.

A última interrogação, falava a respeito das renegociações do contrato didático. A resposta dada foi que normalmente não ocorrem essas renegociações, já que os alunos sempre cumprem as tarefas que lhes são conferidas.

4 *Engenharia Didática*

4.1 Introdução

A idéia de engenharia didática surgiu no início da década de 80, com o intuito de designar uma forma de prática didática. Comparando-se com o trabalho de um engenheiro que se baseia nos seus conhecimentos específicos, submete-se a um controle de cunho cientifico, mas que também age sobre conceitos mais complexos do que os conceitos já analisados pela ciência. Essa designação buscava abordar duas questões importantes da ação didática da matemática na época. São elas:

- as relações entre a investigação e ação do sistema de ensino;

- o papel que convém levar - realizações didáticas - a exercer na sala de aula, no seio das metodologias da investigação didática.

Chevallard em seu texto para a Segunda Escola de Verão de Didática da Matemática, que ocorreu em Orleãs em 1982, manifesta essas preocupações (CHEVELLARD apud ARTIGUE, 1988,p.194). Aí escreve ele, nomeadamente, a respeito do primeiro aspecto:*Colocar o problema da engenharia didática é colocar, relacionando-o com o desenvolvimento atual e futuro da didática da matemática, o problema da ação e dos meios da ação sobre o sistema de ensino. (p.28)*

No que tange à segunda questão, Chevallard argumenta sobre dois pontos:

1°) As metodologias denominadas externas - exercícios, provas -, nas quais se fundamentam grande parte das investigações publicadas na época, por serem de fácil reconhecimento, são insuficientes para captar a complexidade do sistema estudado e dar ênfase à essa abordagem seria um risco para a didática, devido sua juventude teórica.

2°) A prática didática na sala de aula possui outra importante função que é a de pôr à prova construções teóricas elaboradas nas investigações, pelo envolvimento dessas construções num mecanismo de produção.

Assim trata-se finalmente:

- por um lado, de nos distanciarmos das relações entre investigação e ações pensadas, seja em termos de inovação, seja por intermédio da noção de investigação, para afirmar a possibilidade de uma ação racional sobre o sistema, baseando-se em conhecimentos didáticos pré-estabelecidos;

- por outro lado, de marcar a importância da - realização didática - na sala de aula como prática, por razões ligadas à situação de juventude da investigação didática e também para responder a necessidades permanentes de colocação à prova das construções teóricas feitas.

4.2 A Engenharia Didática, Metodologia de Investigação

4.2.1 Características gerais

A engenharia didática tem por característica ser um esquema experimental baseado, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. Dessa maneira, distinguem dois níveis, o da micro-engenharia e o da macro-engenharia, de acordo com a importância da prática didática na realização didática. As investigações de micro-engenharia são as mais fáceis de começar, mas a complexidade da sala de aula, não permite compor essa complexidade com a complexidade essencial dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem. Já as investigações de macro-engenharia são, pois, apesar de todos os empecilhos metodológicos e institucionais que se apresentam incontornáveis.

Outra característica é o registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe são associados. Com efeito, as análises que recorrem à experimentação na sala de aula estão situadas numa comparação com validação externa dos desempenhos de grupos experimentais. Este não se constitui ser o paradigma da engenharia didática, o qual se situa no lado oposto, e cuja validação é basicamente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Os objetivos de uma investigação de engenharia didática podem ser muitos. Em seu comunicado ao congresso PME11, intitulada - A engenharia didática, um instrumento privilegiado para uma descoberta da complexidade na sala de aula - (DOUADY apud ARTIGUE, 1988,p.197), distingue R. Douady as análises que visam estudar os processos de aprendizagem de um dado conceito e, portanto a formação de gêneses artificiais para um dado conceito, daquela que são transversais aos conteúdos, ainda que o seu suporte seja o ensino de um domínio preciso.

4.2.2 As diferentes fases da metodologia de engenharia

Existem, neste processo, quatro fases: a fase das análise prévias, a fase da concepção e da análise *a priori* das situações didáticas da engenharia, a fase da experimentação e, por fim, a fase da análise *a posteriori* e da validação.

As Análises Prévias

Numa investigação que se adota a engenharia didática como metodologia, a fase de concepção apoia-se num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado, mas também baseia-se num certo número de análises preliminares que são, na sua maioria:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino.

- a análise do ensino habitual e os seus defeitos.

- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que travam sua evolução.

- a análise dos objetivos específicos da investigação.

Geralmente os trabalhos realizados pelo investigador com o objetivo de servirem de base à concepção de engenharia são retomados e aprofundados ao cabo da diferentes fases do trabalho, devido às necessidades, não sendo por isso prévio senão a um primeiro nível de elaboração. Evidentemente que as exigências de análise prévia não serão as mesmas para uma investigação cujo objetivo é a formação de uma gênese artificial do conhecimento num campo conceitual determinado. Na maioria dos trabalhos, nem todas as diferentes componentes de análise mencionadas atrás intervêm de maneira explícita. Poderá ser um bom exercício de didática identificar as dimensões privilegiadas e tentar procurar, *a posteriori*, o seu sentido didático.

Como exemplo, traremos um caso relativo à investigação que o autor levara a cabo desde há três anos sobre o ensino de equações diferenciais em DEUG primeiro ano (ARTIGUE apud ARTIGUE, 1988,p.199). A primeira fase está estruturada à volta da análise do funcionamento do atual ensino. A análise constata que o funcionamento deste sistema didático está insatisfatório. Investiga-se esse aspecto do funcionamento e os constrangimentos que tendem a fazer dele um ponto de equilíbrio e posteriormente buscam-se condições de existência de um ponto de funcionamento mais satisfatório. Esta análise dos constrangimentos apoia-se na identificação, na respectiva área matemática, de três quadros de desenvolvimento, desempenhando a noção de quadro (DOUADY apud ARTIGUE, 1988,p.200), neste caso, o papel de apoio teórico didático geral. Os três quadros são o quadro algébrico das respostas por fórmulas, o quadro numérico da resolução numérica abordada e o quadro geométrico do estudo global qualitativo da equação. Apresentado os quadros, a análise dos constrangimentos será feita distinguindo-se três dimensões:

- a dimensão epistemológica associada às características do saber em jogo;

- a dimensão cognitiva associada às características cognitivas do público ao qual se dirige o ensino;

- a dimensão didática associada às características do funcionamento do sistema de ensino.

É no funcionamento do quadro algébrico que habitualmente centra-se o ensino. Assim, as investigações que buscaram estudar a viabilidade de uma abordagem epistemologicamente mais satisfatória, os constrangimentos que se opõem à extensão ao quadro geométrico, identificaram que:

- no plano epistemológico: o longo domínio do algébrico no desenvolvimento histórico da teoria, a dificuldade dos problemas relacionados com o desenvolvimento da teoria geométrica.

- no plano cognitivo: a exigência de permanente mobilidade entre os quadros e o nível de domínio das ferramentas elementares de análise exigidas pelas justificações.

- no plano didático: o poder do refugio algorítmico (refúgio que está bloqueado aqui, uma vez que uma análise qualitativa pode ceder lugar ao desenvolvimento de métodos, mas não pode ser algoritmizado), o mito da resolução completa (o estudo qualitativo colocará quase sempre o mestre na posição de ter de parar no meio do exercício, de admitir que não pode responder todas as questões que surgem).

Essas análises colocam igualmente em evidência o domínio das entradas epistemológicas e didáticas, relativamente à dimensão cognitiva: não existem estudos das concepções dos alunos e os constrangimentos identificados a este nível são inferidos a resultados mais genéricos relativos à didática da análise no seu conjunto. Por outro lado, insistese na dificuldade de identificar os constrangimentos que relevam, sem ambiguidades, do registo cognitivo, parecendo os candidatos a este título sempre imbricados. Dar pouca importância ao cognitivo não é típica das análises prévias de engenharias. Pelo contrário, frequentemente um dos pontos de apoio da concepção encontra-se na análise prévias das concepções dos alunos, das dificuldades e a engenharia é concebida para provocar a evolução dessas concepções. Lembramos aqui que tal análise prévia não pôde ser feita em nosso trabalho já que o conteúdo de equações diofantinas lineares não consta no currículo atual do ensino médio.

Concepção e Análise A Priori

Nesta segunda fase, o investigador seleciona um número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: variáveis de comando, que são consideradas pelo investigador como as variáveis pertinentes para o problema em questão. Para facilitar as análises de engenharia, distinguiremos duas modalidades de variáveis de comando:

- as variáveis *macro-didáticas ou globais*, que dizem respeito à organização global de engenharia;

- e as variáveis *micro-didáticas ou locais*: que dizem respeito à organização local da engenharia.

Novamente faremos uso da investigação feita acerca das equações diferenciais. As alternativas apresentadas, após a análise dos constrangimentos, são variáveis globais: uso de recursos computacionais, transferência para trabalho autônomo da parte algoritmizada desta resolução e, para o estudo qualitativo, ensino explícito dos métodos. Estas alternativas precedem a descrição fase a fase da engenharia, onde as alternativas locais agem.

Este tipo de dispositivo, na maioria das vezes, encontra-se nos textos de macro-engenharia, mas por trás de uma terminologia variável. Em seu artigo sobre o ensino dos decimais, G. Brousseau apresenta alternativas macro-didáticas, que são denominadas por ele de *opções principais*, cuja maior parte está ligada ao conteúdo (BROUSSEAU apud ARTIGUE, 1988,p.203): *a) A aquisição dos decimais-medida segue um processo distinto daquele que visa os decimais-aplicação. Eles sucedem-se por esta ordem b) Esta abordagem topológica não é reproduzida no estudo das aplicações lineares racionais [...] c) As somas e as diferenças de aplicações racionais, ainda que existentes, não são teorizadas nem institucionalizadas. d) Explicitaremos as outras opções no decurso da exposição das situações.* Brousseau em seguida descreve o plano do processo de ensino, onde agirão as alternativas locais apresentadas na linguagem canônica da teoria das situações didáticas.

Uma das novidades do método da engenharia didática consiste no seu modo de validação. Desde a fase de concepção, através da análise a priori das situações didáticas da engenharia, que este processo de validação se estabelece. Esta análise *a priori* deve ser interpretada como uma análise do controle do sentido; esquematicamente, se a teoria construtivista põe o princípio do compromisso do aluno na formação de seus saberes por meio de interações com certo ambiente, a teoria das situações didáticas, que serve de referência à metodologia da engenharia, teve a ambição de se constituir como uma teoria do controle das relações entre sentido e situações.

O objetivo da análise *a priori* é determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, são fundadas hipóteses; e é a validação dessas hipóteses que estará, indiretamente em jogo na disputa, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.* Normalmente, esta análise, que comporta uma parte descritiva e outra preditiva, centra-se nas características de uma situação a-didática que se pretendeu constituir e que se vai procurar devolver aos discentes:

- descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local e as características da situação a-didática que delas decorrem,

- analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode significar para o discente, particularmente devido às possibilidades de ação, de controle e validação de que ele dispõe uma vez operada a devolução, num funcionamento cuja ação do mestre é ínfima.

- prevêem-se os campos comportamentais possíveis, buscando mostrar de que maneira a análise feita permite controlar o sentido desses campos e assumir que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do saber visado pela aprendizagem.

Citemos o exemplo da teoria dos jogos que mesmo quando surge explicitamente é muitas vezes tida em conta pelo investigador a um nível estritamente metafórico: fala-se de estratégia de jogo, mas não se avalia precisamente o custo desta ou daquela estratégia. Tem-se a impressão de que uma utilização que não metafórica será considerada pelo investigador demasiadamente dispendiosa, relativamente ao benefício esperado.

Tradicionalmente não há grande interferência do professor na análise a priori e é considerado essencialmente do ponto de vista das suas relações com a devolução e a institucionalização. Mas isso possui razões históricas para ocorrer. A didática matemática teve início na França e baseou-se nas teorias construtivistas do conhecimento sendo influenciada pelos trabalhos de psicologia genética da escola de Genebra (a freqüência das referências a Piaget, em particular (PIAGET apud ARTIGUE, 1988,p.206), nestas publicações é a marca desse fato). Nesta visão, a primeira urgência era restituir ao aluno o seu lugar. O desenvolvimento nascente da didática impunha à complexidade uma limitação relativamente estrita, susceptível de ser tratada cientificamente, pelo que foi o professor que, de alguma forma, pagou o preço da tomada em conta do aluno, ao nível da modelização e da teorização.

Dessa maneira, não foi por acaso, que enquanto as situações e ação, de formulação e de validação estão presentes desde o começo da teoria das situações, as situações de institucionalização só foram introduzidas mais tarde, já que não prestavam à modelização habitual das situações, quando se tornaram fases da institucionalização; são situações em que a análise em termos de jogo do professor tem necessariamente que se sobrepor à análise em termos de jogo do aluno. Na análise a priori, não há espaço para o jogo do professor; se o aluno é tido em conta a um duplo nível, descritivo preditivo, já o professor intervém apenas a um nível descritivo, como se a situação o determinasse por completo enquanto ator do sistema.

Certamente que a noção de contrato didático nos permite recuperar, em parte, este professor, ator do sistema, mas não podemos negar que na teorização didática, o professor continua ocupando um lugar marginal e que, a não ser que ele seja convenientemente tido em conta, os fenômenos didáticos que o implicam terão a tendência de serem percebidos como ruídos relativamente ao funcionamento cujo estudo é privilegiado: o das relações aluno/meio a propósito do saber.

Durante as aulas da oficina, podemos identificar que os questionários entregues aos alunos no início de cada encontro, pertencem à fase das análises *a priori* da engenharia didática descrita a pouco. Nesses questionários, tínhamos a possibilidade de analisar os conhecimentos prévios dos discentes, obtendo respostas "puras"acerca dos conteúdos que seriam trabalhados adiante.

Experimentação, Análise A Posteriori e Validação

Não há muito a se dizer sobre a fase da experimentação, que é clássica. Esta fase é seguida por uma fase de análise *a posteriori*, que se baseia no conjunto dos dados recolhidos durante a experimentação: observações feitas nas aulas, mas também produções dos alunos feitas dentro e fora de aula. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através do uso de metodologias externas: questionários, testes, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. E é quando confrontamos a análise *a priori* e análise *a posteriori*, que baseamos a validação das hipóteses envolvidas na investigação.

O processo de validação interna que está sendo usado aqui não cai na armadilha habitual das validações estatísticas associadas a experimentações na sala de aula, que se fundamenta implicitamente no princípio de que as diferenças mensuráveis constatadas estão ligadas às variáveis de comando com as quais se jogou para se diferenciar as salas de aulas experimentais e as salas de aulas testemunhas.

Para finalizar, serão apontadas algumas dificuldades existentes a este nível de validação:

- Uma análise *a priori* é, devido sua extensão, *a fortiori* quando se trata de um trabalho de macro-engenharia, praticamente incomunicável in extenso. Aquilo que é feito e é visto do exterior, não é, um produto conforme à descrição teórica que dele se fez aqui, mas uma mescla desse produto. São feitas decisões e o possível controle exterior da comunidade sobre o procedimento de validação é necessariamente afetado por elas.

- Na maioria das vezes, os trabalhos que são publicados relativos as engenharias, o confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, exibe distorções. Elas quase nunca são analisadas em termos de validação. Frequentemente, os autores limitam-se a propor modificações da engenharia, procurando reduzi-la, sem se envolverem num verdadeiro processo de validação.

- As próprias hipóteses explicitamente envolvidas nos trabalhos de engenharia são hipóteses relativamente globais, que colocam em jogo processos de aprendizagem a longo prazo, que a amplitude da engenharia não permite fazer entrar, de fato, no procedimento de validação.

Por último, descreveremos de que maneira a fase da análise *a posteriori* e de validação aparecem em nossa oficina. Como havíamos mencionado, no começo de cada encontro eram entregues questionários com questões relativas ao conteúdo que seria estudado nesse encontro. Após as explicações e discussões, os alunos faziam uma série de tarefas que tinham por objetivo exercitar o que foi aprendido. Dessa maneira, após estar de posse desse material, pude analisar o "antes e o depois" das respostas dos alunos e fazer uma avaliação qualitativa sobre a oficina realizada.

5 Sobre as Equações Diofantinas Lineares

5.1 Introdução

Pouco se sabe sobre Diofantos, salvo que ele viveu em Alexandria por volta de 250 D.C. A única evidência para essa data é que o Bispo de Laodicea, que começou seu episcopado em 270 D.C, dedicou um livro à seu amigo Diofantos. Devido a uns versos encontrados no seu túmulo, em forma de um enigmático problema, deduz-se que viveu 84 anos.

Sua principal obra Aritmética é constituída por treze volumes, dos quais se conhecem apenas seis, e foi traduzida pelos árabes que chamaram ao sistema de equações que compunha a obra: álgebra. É Diofanto que introduz pela primeira vez um símbolo para representar uma quantidade desconhecida.

As equações diofantinas são equações algébricas com uma ou mais variáveis, a serem resolvidas nos inteiros. As equações diofantinas lineares são as de grau 1. O conteúdo a seguir é baseado nas notas do Professor Eduardo H. de Mattos Brietzke e da Professora Luisa R. Doering.

5.2 Notas Matemáticas

Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos, vamos estudar a equação $ax + by = c$.

Teorema 1: *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos e seja $D = \mathrm{MDC}(a, b)$. Então, a equação $ax + by = c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se e somente se $D \mid c$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$ t.q. $ax + by = c$. Como $D \mid a$ e $D \mid b$, temos que D divide qualquer combinação linear e, portanto, $D \mid ax + by$, ou seja, $D \mid c$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $D \mid c$. Então $\exists\, e \in \mathbb{Z}$ t.q. $De = c$. Mas $D =$MDC(a, b). Logo, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ t.q. $a\alpha + b\beta = D$. Multiplicando por e, obtemos

$$a\alpha e + b\beta e = De = c\,.$$

Sejam $x := \alpha e$ e $y := \beta e$. Então,

$$ax + by = c,$$

ou seja, a equação diofantina tem solução em $\mathbb{Z}$. □

Note que se $a = 0$ temos $by = c$ e $b = \text{MDC}(0, b) = \text{MDC}(a, b)$. Logo, se $b \mid c$ então $y = \dfrac{c}{b}$ e $x \in \mathbb{Z}$ qualquer nos dá infinitas soluções de $ax + by = c$. Análogo para $b = 0$. Assim, podemos supor, de agora em diante, que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Observação. Na Geometria Analítica, a equação $ax + by = c$ representa uma reta r. Ao procurarmos soluções em $\mathbb{Z}$ da equação $ax+by = c$, na verdade estamos perguntando se a reta r, por ela representada, contém pontos que tenham ambas as coordenadas inteiras. O Teorema 1 nos diz que existem equações dessa forma sem soluções inteiras, por exemplo, a equação $12x + 8y = 7$ não tem soluções inteiras, já que $\text{MDC}(12, 8) = 4$ não divide 7. Fica, então, provado o fato surpreendente que a reta r de equação $12x + 8y = 7$ consegue evitar todos os pontos do reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 1: Resolver nos inteiros e nos naturais a equação $28x - 12y = 80$.

Solução: Dividindo por 4, essa equação é equivalente a

$$7x - 3y = 20\,. \tag{5.1}$$

Como $\text{MDC}(7, 3) = 1$, divide 20, pelo Teorema 1, a equação (5.1) tem soluções em $\mathbb{Z}$. Para encontrar uma solução, começamos escrevendo o MDC como combinação linear, $1 = 7 - 2 \cdot 3$. Multiplicando por 20, obtemos

$$7 \cdot 20 - 3 \cdot 40 = 20. \tag{5.2}$$

Portanto, uma solução nos inteiros é $x_1 = 20$, $y_1 = 40$. Podemos encontrar uma infinidade de outras soluções somando e subtraindo uma mesma quantidade,

$$7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 \cdot t - 7 \cdot 3 \cdot t - 3 \cdot 40 = 20,$$

ou seja,

$$7 \cdot (20 + 3t) - 3 \cdot (40 + 7t) = 20, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}.$$

Assim, obtemos uma família infinita de soluções em $\mathbb{Z}$ da equação (5.1)

$$\begin{cases} x = 20 + 3t \\ y = 40 + 7t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.3}$$

Neste ponto, ainda não é nada óbvio que a família (5.3) inclui todas as soluções inteiras de nossa equação. Vamos provar que isso de fato acontece. Para isso, consideremos (x, y) uma solução qualquer da equação (5.1). Comparando com (5.2), obtemos

$$7x - 3y = 7 \cdot 20 - 3 \cdot 40$$

e, portanto,

$$7 \cdot (x - 20) = 3 \cdot (y - 40). \tag{5.4}$$

Mas $7 \mid 7 \cdot (x - 20)$, logo $7 \mid 3 \cdot (y - 40)$. Como 7 é primo, se divide um produto então divide pelo menos um dos fatores. Como $7 \nmid 3$, então $7 \mid y - 40$, isto é,

$$\exists\, t \in \mathbb{Z} \quad \text{t.q.} \quad y - 40 = 7t.$$

Substituindo $y - 40$ por $7t$ em (5.4), segue que $7 \cdot (x - 20) = 3 \cdot 7t$, ou seja,

$$x - 20 = 3t.$$

Fica, então, provado que uma solução inteira qualquer faz parte da família (5.1).

Vamos agora encontrar as soluções nos naturais. Precisamos determinar para quais $t \in \mathbb{Z}$ vale que

$$\begin{cases} x = 20 + 3t \geq 0 \\ y = 40 + 7t \geq 0 \end{cases}$$

Qualquer uma dessas duas condições é satisfeita para $t \geq -5$ $(t \in \mathbb{Z})$. Portanto, existe uma infinidade de soluções da equação (5.1) em $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x = 20 + 3t \\ y = 40 + 7t \\ t \geq -5 \quad (t \in \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{5.5}$$

Por exemplo, para $t = -5$, obtemos a solução $x_0 = 5$, $y_0 = 5$.

A seguir, vamos estudar o teorema que generaliza a resolução da equação considerada no Exemplo 1. Note, primeiramente, que se $\mathrm{MDC}(a,b)=1$, então a equação $ax+by=c$ tem solução em $\mathbb{Z}$, $\forall\, c\in\mathbb{Z}$. Além disso podemos reduzir o caso geral (com solução) ao caso em que $\mathrm{MDC}(a,b)=1$, conforme segue. Sendo $D=\mathrm{MDC}(a,b)$, no teorema abaixo, consideramos o problema de resolver a equação do tipo

$$ax+by=c\,,\qquad \text{com}\ \ D\mid c\,.$$

Pelo Teorema 1, este é o caso em que a equação tem solução em $\mathbb{Z}$. Dividindo por D, temos a equação equivalente (com as mesmas soluções)

$$\frac{a}{D}\,x+\frac{b}{D}\,y=\frac{c}{D}\,,$$

em que $\mathrm{MDC}\Big(\dfrac{a}{D},\dfrac{b}{D}\Big)=1$. Logo, para os propósitos práticos, inclusive, é suficiente considerarmos o caso de uma equação $ax+by=c$ em que $\mathrm{MDC}(a,b)=1$.

Teorema 2: *Sejam $a,b,c\in\mathbb{Z}$, com $a\neq 0$ e $b\neq 0$, e tais que* $\mathrm{MDC}(a,b)=1$. *Escrevendo $a\alpha+b\beta=1$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$, temos que $x_0=\alpha\cdot c$, $y_0=\beta\cdot c$ é uma solução da equação*

$$ax+by=c\,. \tag{5.6}$$

As demais soluções inteiras são dadas por

$$\begin{cases} x=x_0+bt\\ y=y_0-at\\ t\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{5.7}$$

Demonstração. Começamos escrevendo $a\alpha+b\beta=1$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. Multiplicando por c, obtemos $a\alpha c+b\beta c=c$, ou seja, x_0 e y_0 definidos por

$$x_0=\alpha\cdot c\,,\qquad y_0=\beta\cdot c$$

são uma solução da equação (5.6). A seguir, sejam x e y definidos por (5.7). É imediato ver que x e y também são uma solução da equação (5.6). Falta provar que não existem outras soluções, isto é, que qualquer que seja o par x_1 e y_1 solução da equação (5.6), $\exists\, t\in\mathbb{Z}$ tal que $x_1=x_0+bt$ e $y_1=y_0-at$. Assim ficará provado que a família (5.7) inclui todas as soluções inteiras da equação (5.6). Se x_1 e y_1 é uma solução da equação (5.6), então

$$ax_1+by_1=c=ax_0+by_0$$

e segue que

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1). \tag{5.8}$$

Mas $a \mid a(x_1 - x_0)$ implica que $a \mid b(y_0 - y_1)$. Como $\mathrm{MDC}(a, b) = 1$, concluímos que $a \mid y_0 - y_1$ e, portanto, $\exists\, t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$at = y_0 - y_1. \tag{5.9}$$

Substituindo (5.9) em (5.8), temos que $a(x_1 - x_0) = bat$, ou ainda,

$$x_1 - x_0 = bt\,, \tag{5.10}$$

De (5.9) e (5.10), segue que a solução (x_1, y_1) está incluída na família (5.7). $\square$

Note que em $ax_1 + by_1 = c = ax_0 + by_0$ também podemos ter $b(y_1 - y_0) = a(x_0 - x_1)$, o que nos leva as soluções

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.11}$$

que geram as mesmas soluções que (5.7) (basta trocar t por $-t$).

Exemplo 2: Encontrar todos os números naturais N menores do que 10.000 tais que

– O resto da divisão de N por 37 é 9;

– O resto da divisão de N por 52 é 15.

Solução: Dividindo N por 37, obtemos um quociente x e resto 9, ou seja,

$$N = 37x + 9\,. \tag{5.12}$$

Analogamente, temos

$$N = 52y + 15\,. \tag{5.13}$$

De (5.12) e (5.13), segue que $37x + 9 = 52y + 15$, ou seja vale a equação

$$37x - 52y = 6\,. \tag{5.14}$$

Vamos primeiro resolver a equação (5.14) em $\mathbb{Z}$. Como 37 é primo e não divide 52, temos que $\mathrm{MDC}(37, 52) = 1$. Como $1 \mid 6$, segue que a equação (5.14) tem solução em $\mathbb{Z}$.

Escrevemos 1 como combinação linear de 37 e 52:

$$52 = 37 + 15 \Longrightarrow 15 = 52 - 37$$

$$37 = 2 \cdot 15 + 7 \Longrightarrow 7 = 37 - 2 \cdot 15$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1 \Longrightarrow 1 = 15 - 2 \cdot 7$$

Então,

$$\begin{aligned} 1 &= 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2 \cdot (37 - 2 \cdot 15) = 5 \cdot 15 - 2 \cdot 37 \\ &= 5 \cdot (52 - 37) - 2 \cdot 37 = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37\,. \end{aligned}$$

Multiplicando por 6, segue que

$$37 \cdot (-42) - 52 \cdot (-30) = 6 \tag{5.15}$$

e $x_0 = -42\,,\ y_0 = -30$ é uma solução da equação (5.14). De acordo com o Teorema 2, podemos encontrar toda uma família de soluções

$$37 \cdot (52t - 42) - 52 \cdot (37t - 30) = 6\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}\,.$$

nos dá todo o conjunto de soluções. A equação (5.14) tem uma infinidade de de soluções inteiras, dadas por

$$\begin{cases} x = 52t - 42 \\ y = 37t - 30 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{5.16}$$

Vamos agora procurar a soluções da equação (5.14) em $\mathbb{N}$. Basta determinarmos quais são os $t \in \mathbb{Z}$ para os quais

$$\begin{cases} x = 52t - 42 \geq 0 \\ y = 37t - 30 \geq 0 \end{cases}$$

Temos assim as condições

(i) $52t \geq 42$, que se cumpre se e somente se $t \geq 1$

(ii) $37t \geq 30$, que se cumpre também se e somente se $t \geq 1$.

Conclusão: As soluções em $\mathbb{N}$ da equação (5.14) são

$$\begin{cases} x = 52t - 42 \\ y = 37t - 30 \\ t \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{5.17}$$

Retormando à pergunta original, os números N que estamos procurando são dados, por exemplo, por

$$N = 37x + 9 = 37 \cdot (52t - 42) + 9\,.$$

Para que $N < 10.000$, devemos ter

$$37 \cdot (52t - 42) < 9.991\,. \tag{5.18}$$

Dividindo 9.991 por 37, obtemos $9.991 = 37 \cdot 270 + 1$. Portanto, (5.18) é equivalente a $52t - 42 \leq 270$. Essa última desigualdade se verifica se e somente se

$$t \leq 6.$$

Logo, existem seis diferentes valores para N, que são

$$N = 37x + 9 = 37(52t - 42) + 9\,, \qquad t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

Os seis possíveis valores para N são 379, 2303, 4227, 6151, 8075 e 9999.

6 A Prática

6.1 Apresentação

Com o objetivo de abordar o tópico equações diofantinas lineares foi realizada uma oficina com cinco encontros de duas horas cada, no Colégio Tiradentes da Brigada Militar com alunos advindos dos três anos do ensino médio. Nesses encontros foram estudadas todas as ferramentas necessárias para se resolver uma equação diofantina linear. Um dos motivos de estudar este conceito em particular é que sua resolução envolve conteúdos que foram estudados, normalmente, na 5ª série. Assim, esta é uma oportunidade de resgatar o que foi estudado, além de proporcionar aos alunos a oportunidade de eles enxergarem as conexões existentes na Matemática, já que esta é, por excelência, uma ciência que opera por acúmulo e não por substituição.

Outra importante razão de se explorar as equações diofantinas lineares consiste no próprio fato de se tratar de um conteúdo novo que não é abordado no currículo escolar tradicional. Com o estudo desse novo conteúdo, ampliamos a gama de conhecimentos dos alunos.

6.2 O Procedimento Adotado nas Aulas

Os pré-requisitos necessários para se resolver uma equação diofantina linear, como havíamos mencionado, são usualmente ensinados na 5ª série. Nesse momento da vida escolar, os alunos, por serem muito jovens, não possuem grande maturidade e devido a isso, não há grande formalidade nos assuntos estudados. Entretanto, durante o curso tive o cuidado de resgatar os conteúdos com maior precisão Matemática e demonstrar todas as propriedades que foram utilizadas durante o curso. Também fazia parte do planejamento de aula, contar com a participação dos alunos, de maneira que eles também fossem ao quadro fazer demonstrações e exercícios. Somente duas demonstrações não foram feitas durante as aulas (generalização da escrita do MDC como combinação linear dos inteiros dados e das soluções de uma equação diofantina linear), pois eram, de fato, mais complexas, mas as mesmas constavam formalmente nas notas de aula. Tomei essa atitude, pois a compreensão ou não dessas provas não interfeririam na continuidade dos conteúdos.

O estudo dos conteúdos sempre visava a sua generalização. Mas para que isso pudesse ocorrer, exemplos concretos eram apresentados para que os alunos observassem os padrões existentes e, posteriormente, pudessem conjecturar sobre o que foi analisado. E foi adotando essa filosofia que novos procedimentos, como a obtenção do MDC via algoritmo da divisão de Euclides, foram ensinados. O contínuo diálogo existente entre professor e aluno foi outra importante característica presente nas aulas. Toda e qualquer dúvida era discutida e examinada em grupo, fazendo com que a participação dos discentes fosse uma parte importante da dinâmica dos encontros.

A maneira com que as demonstrações seriam exibidas também foi cuidadosamente pensada. Inicialmente, como os alunos não possuíam familiaridade com os argumentos matemáticos, as provas eram feitas de forma tradicional com o meu auxílio. Num segundo momento, os alunos recebiam as notas de aula e tinham a tarefa de ler e compreender o que estava escrito na demonstração. Depois de feitas estas primeiras análises, eram discutidas as dúvidas e demonstrações que não haviam ficado claras. Há uma grande diferença nessas duas maneiras de apresentar as demonstrações. Evidentemente que esta segunda forma de apresentar uma demonstração possibilita que o aluno exercite mais seu poder de interpretação e raciocínio. Evitamos também fazer o uso do raciocínio por absurdo, já que este pensamento requer maior maturidade do aluno.

A dinâmica praticada nas aulas possibilitou que os alunos fossem ao quadro expor seus raciocínios e argumentos nas demonstrações. Com o amparo do professor, os discentes foram aperfeiçoando sua capacidade de expressão matemática, gerando mais confiança, facilitando, assim, todo o processo de aprendizagem.

No início de cada encontro era entregue uma folha contendo uma série de perguntas matemáticas que tinham o objetivo de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos e instigá-los sobre os conteúdos que seriam trabalhados no dia. Terminada esta parte, os alunos recebiam notas de aula com os conteúdos que seriam abordados na aula. Todos os teoremas, corolários e proposições das notas eram demonstrados. Como os alunos não estavam habituados com os argumentos e técnicas utilizadas nas provas matemáticas, cada passagem das demonstrações era explicada e discutida entre alunos e professor.

Ao final de cada aula, os alunos tinham que resolver alguns exercícios relativos aos conteúdos tratados naquele encontro. Essas tarefas eram recolhidas para se pudesse fazer uma análise das respostas obtidas.

6.3 Relatório das Aulas

1°Aula: 28/10/2010

Pude constatar que grande parte dos alunos que haviam colocado o nome na lista para a oficina compareceu. Assim, iniciei a aula tendo uma conversando com os alunos sobre qual seria a dinâmica de aula que seria aplicada durante a oficina. Comentei acerca da filosofia Matemática, a qual visa encontrar padrões de maneira que possam ser formadas generalizações. Expliquei que não demonstramos proposições matemáticas através de exemplos, mas que é preciso utilizar argumentos genéricos.

Em seguida, entreguei um questionário inicial (ver anexos B.1 e D.1) o qual possui o objetivo de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conteúdos que seriam estudados naquele encontro. As perguntas contidas no questionário versavam sobre o conceito de múltiplos e divisores. Após alguns minutos recolhi a folha de perguntas e comecei expondo alguns conceitos sobre múltiplos e divisores que no começo se mostraram de fácil compreensão, mas que foram se tornando mais complexos na medida em que avançávamos na matéria. Acredito que essa dificuldade se deu devido ao fato de demonstrarmos todas as propriedades usadas, já que essa filosofia de ensino, como era de se esperar, não era habitual para eles.

Enquanto discutíamos sobre assuntos referentes à matéria, um aluno fez uma pergunta extremamente relevante, matematicamente falando, o que mostrou compreensão e interesse sobre o que estava sendo estudado. A questão era a seguinte: "O conjunto dos números primos é infinito?". Devido à relevância dessa pergunta, prometemos trazer a prova deste teorema. No final da aula foram praticados exercícios sobre o Algoritmo da Divisão de Euclides no conjunto dos números inteiros. Desde o primeiro dia, os alunos se mostraram participativos, reagindo às perguntas que surgiam no transcorrer da aula.

2° Aula: 04/11/2010

Neste segundo encontro verificou-se a desistência de alguns alunos. O objetivo desse dia era trabalhar com o conceito de Máximo Divisor Comum (MDC). Sendo assim, inicialmente foi solicitado aos alunos que, com suas palavras, definissem o mais rigorosamente possível esse conceito.

Terminada essa parte da aula, começamos estudando as principais propriedades do MDC e suas respectivas demonstrações. Paulatinamente os alunos foram se acostumando com as argumentações que são utilizadas nas demonstrações matemáticas. Nesse mesmo dia estudamos um conceito fundamental para a continuação do conteúdo, que foi a escrita do MDC como combinação linear de dois números inteiros. As atividades práticas desse dia exercitavam esse algoritmo.

3° Aula: 05/11/2010

Como de praxe, a aula iniciou com a aplicação do questionário que continha perguntas sobre divisores entre dois números e as relações entre esses divisores e o MDC (ver anexos B.3 e D.3). Em uma das questões foi pedido aos alunos que fizessem conjecturas sobre o MDC. As questões que instigavam essas conjecturas estavam diretamente relacionadas a tópicos do conteúdo que seriam estudados na seqüência da aula.

O encontro deste dia estava reservado para o estudo de mais algumas propriedades sobre o MDC. Evidenciava-se que cada uma das demonstrações feitas durante o estudo dessas propriedades, fazia com que os alunos se familiarizassem cada vez mais com o linguajar matemático e aperfeiçoassem sua habilidade de expressão matemática.

No primeiro encontro surgiu uma questão muito importante e que, felizmente, possuía uma prova fácil e que poderia ser compreendida pelos alunos, mesmo eles ainda estando no ensino médio. Dessa maneira, foi incluso em nossas notas de aula um corolário que, originalmente, não constava no planejamento de aula, mas que se relacionava com o conteúdo que estava sendo estudado (MDC) e que seria usado na demonstração desse importante lema. Sendo assim, demonstramos esse lema, tendo o cuidado de não utilizarmos o raciocínio por absurdo. Os alunos demonstraram ter compreendido a prova e os argumentos usados.

Poucos alunos compareceram em relação ao primeiro encontro. Entretanto, os discentes que permaneciam frequentando as aulas mostravam estar compreendendo tudo aquilo que estávamos tratando, pois respondiam a todas as perguntas que surgiam durante as aulas. Como de costume os discentes participavam ativamente das atividades, sendo que neste dia um dos alunos foi ao quadro fazer uma demonstração (ver Lema A.1.3.3) , o que representa grande confiança matemática por parte do aluno. O restante da aula foi reservado para a prática de exercícios.

4° Aula: 11/11/2010

A primeira atividade deste dia foi a apresentação de um resumo com os conteúdos que foram estudados nos dois últimos encontros e que seriam essenciais para o decorrer da matéria. Retomei o processo de obtenção do MDC entre dois números inteiros e como escrevemos esse MDC como combinação linear desses dois números dados inicialmente. Isso foi feito porque nessa aula entraríamos no conteúdo mais importante do curso, as equações diofantinas lineares, sendo que é necessário saber escrever o MDC como combinação linear para se encontrar as soluções.

A seguir, houve a aplicação do questionário inicial contendo somente um exercício, o qual solicitava aos alunos que explicassem, com suas palavras, se certas equações podiam ter solução ou não nos inteiros, sendo esse o estímulo para o objetivo da aula. Após recolher o questionário, foi entregue o material do dia que continha o teorema das equações diofantinas lineares que garante a existência ou não de soluções inteiras. Solicitei aos alunos que entendessem a demonstração deste teorema e este foi parcialmente aceito. Em seguida, contando com a ajuda dos próprios alunos, esclareci alguns pontos que não ficaram claros na prova, já que esta utilizava algumas técnicas matemáticas que, como era de se esperar, não eram familiares aos discentes. Salientei que este teorema apenas nos garantia a existência ou não de soluções inteiras e que ainda não possuíamos um método para a obtenção das soluções.

Por meio de dois exemplos, estudamos o algoritmo para se calcular as soluções inteiras de uma equação diofantina linear. Neste primeiro momento, nos preocupamos somente em encontrar as soluções inteiras. Como atividade final da aula foi atribuída aos alunos à tarefa de calcular as soluções inteiras das equações, que agora eles sabiam que levavam o nome de diofantinas, dadas no questionário inicial.

5° Aula: 12/11/2010

Exclusivamente neste último encontro, não foi entregue aos alunos nenhum questionário inicial. O objetivo desta aula era analisar as soluções positivas de uma equação diofantina linear. Assim, iniciei a aula contando com o auxílio dos alunos, apresentei um exemplo que solicitava o cálculo das soluções inteiras e naturais. Em seguida, os alunos resolveram um exercício que praticava o que tinha sido estudado há pouco. Como em todas as aulas, a participação dos discentes era intensa. Os alunos sentiam-se confortáveis para perguntar sobre eventuais dúvidas que surgiam durante as aulas e para expor no quadro suas respostas, o que foi feito por uma das alunas. Por fim, apliquei um teste que tinha o objetivo de avaliar se os alunos realmente aprenderam os conteúdos mais importantes do curso. No verso deste teste havia um questionário final contendo perguntas acerca do desenvolvimento do curso.

6.4 Análise dos Questionários e das Atividades

Questionário 1 - Assunto: Múltiplos e Divisores de Inteiros

Uma das questões contidas no questionário solicitava aos alunos que escrevessem com suas palavras a definição de divisor de um número qualquer. Nessa pergunta busquei avaliar a formalidade matemática que os alunos possuíam. Sobre essa questão a maioria dos alunos não encontrou dificuldades para responder, porém em todas as respostas se constatou uma grande falta de rigorosidade na escrita matemática (ver questão 1 dos anexos B.1 e D.1).

As outras questões pediam aos alunos que fizessem alguns cálculos (ver anexo B.1), como, por exemplo, calcular os todos os divisores de 36. Três alunos resolveram a questão, enquanto que o restante da turma apenas apresentou a resposta. Entretanto, em nenhuma das respostas coletadas apareceram os divisores negativos, o que revela a falta de familiaridade com este conceito ver primeiro questionário do anexo D.1).

Atividades 1 - Assunto: Algoritmo da Divisão de Euclides

Todos os alunos resolveram os exercícios propostos sem maiores dificuldades (Para saber quais eram os exercícios, ver anexo C.1 e primeira lista de exercícios dos anexos D.6).

Questionário 2 - Assunto: Máximo Divisor Comum (MDC)

Novamente, foi solicitado aos alunos que expressassem com suas palavras a definição de um conceito matemático, que desta vez foi o MDC (ver questão 1 dos anexos B.2 e D.2). Como esta já era a segunda oficina, os alunos estavam um pouco mais acostumados com a formalidade Matemática e responderam de maneira satisfatória esta questão.

Outras duas questões pediam o cálculo do MDC entre dois números como, por exemplo, calcule o MDC de 35 e 22 (ver questões 3 e 4 dos anexos B.2 e D.2). O objetivo desta questão era fazer com que os alunos aplicassem o algoritmo que haviam aprendido em séries anteriores. Dez dos quatorze alunos presentes na aula conseguiram calcular o MDC entre os números inteiros dados, da forma esperada, enquanto que o restante não soube fazê-lo.

A última questão também requeria o cálculo do MDC entre dois números inteiros previamente fornecidos (ver questão 4 dos anexos B.2 e D.2). Entretanto, desta vez os números inteiros dados foram escolhidos de maneira que o algoritmo que eles vinham usando não fosse eficiente para calcular o MDC. Assim, apenas três alunos conseguiram resolver essa questão. Inserimos esse exercício para que os alunos notassem a necessidade de ter, de fato, um método eficaz que calcule o MDC entre dois inteiros quaisquer.

Atividades 2 - Assunto: MDC e Combinação Linear

Após estudarmos o Algoritmo de Euclides e o Lema de Euclides, as atividades desse dia consistiam em calcular o MDC entre dois inteiros dados e escrevê-lo como combinação linear desses dois números (ver anexos C.2 e D.7). Por tratar-se de um conteúdo novo e razoavelmente complexo, foi detectada grande dificuldade dos alunos para realizar essa tarefa, pois estes não conseguiam pôr em prática a teoria que a pouco haviam estudados.

Questionário 3 - Assunto: MDC (Continuação)

Nesse questionário foram feitas questões aos alunos que pediam que eles conjecturassem sobre propriedades do MDC(ver anexos B.3 e D.3). Antes dos alunos formarem suas conjecturas, eram dados exercícios numéricos que tinham o objetivo de instigar e direcionar os alunos às conjecturas como, por exemplo, identificarem que todos os elementos do conjunto dos divisores entre dois números divide o MDC. Apesar dos discentes não estarem acostumados com questionamentos desta natureza, todos conseguiram responder corretamente as perguntas feitas.

Atividades 3 - Assunto: MDC e Combinação Linear (Continuação)

Devido ao baixo desempenho dos alunos na execução das atividades do último encontro, foram selecionados mais exercícios que praticavam a escrita do MDC como combinação linear dos inteiros dados(ver questão 1 dos anexos C.3 e D.8). Este conteúdo foi retomado, pois é fundamental para o seguimento do conteúdo.

Os demais exercícios seguiam a mesma filosofia das questões do questionário inicial desse encontro (ver anexo B.3 para o questionário e ver anexo C.3 para os exercícios). Entretanto os resultados não foram os mesmos. Apesar dos alunos serem instigados com exemplos numéricos antes de fazerem suas conjecturas, somente três dos sete alunos conseguiram elaborar suposições gerais.

Questionário 4 - Assunto: Soluções Inteiras

Os exercícios propostos solicitavam aos alunos que explicassem com suas palavras se as equações dadas possuíam ou não solução no conjunto dos números inteiros (ver anexos B.4 e D.4). Os argumentos que foram usados utilizavam, basicamente, paridade e propriedades dos múltiplos. Os alunos não tiveram dificuldades para solucionar estas questões, porém sentiram a necessidade de um teorema que valide os resultados encontrados.

Atividades 4 - Assunto: Equações Diofantinas Lineares

De posse do Teorema que garante a existência ou não de soluções inteiras de uma equação diofantina linear, a tarefa desse encontro consistia em calcular as soluções inteiras das questões dadas no questionário inicial dessa aula (ver anexos B.4 e D.9). Estes exercícios constituíam-se nos mais importantes de todo o curso, pois este era o objetivo principal. Todos os alunos conseguiram obter as soluções pedidas apresentando clareza e destreza algébrica nos cálculos apresentados. Considero que um dos motivos para esse excelente desempenho foi o fato de termos enfatizados a escrita do MDC como combinação linear dos inteiros dados, já que esta é um das etapas mais importantes na obtenção das soluções desejadas. Não podemos esquecer que os alunos tiveram grande mérito, pois superaram suas dificuldades, demonstrando grande persistência e empenho.

Teste - Assunto: Escrita do MDC como combinação Linear e Equação Diofantina Linear

O teste (ver anexos C.5 e D.10) foi feito com o intuito de avaliar se os alunos realmente compreenderam os dois conceitos mais importantes de todo o curso. Como havíamos mencionado antes, após o grande esforço dos alunos em superarem suas dificuldades, as duas únicas questões que continham no teste foram solucionadas por todos os alunos. Assim como em todas as turmas, houve aqueles alunos que demonstraram maior entendimento sobre o conteúdo, pois a clareza e organização das respostas foram maiores do que a média da turma. Entretanto, pode-se dizer que o desempenho geral da turma foi muito bom, já que todos conseguiram obter os resultados corretos das questões solicitadas.

Questionário Final - Assunto: Análise sobre o Curso

Depois de finalizadas todas as atividades matemáticas, foi entregue aos alunos um questionário com perguntas relativas à aspectos gerais da oficina, de forma que eu pudesse analisar a opinião dos alunos sobre a oficina desenvolvida.

A primeira pergunta pedia a opinião dos alunos sobre a filosofia adotada nas aulas(ver questão 1 dos anexos B.5 e D.5). As respostas mais notáveis citaram o fato de que nos encontros o aluno era posto a pensar sobre problemas aparentemente triviais. Em outra resposta foi mencionado o fato da velocidade com que se apresentaram os conteúdos. Essa velocidade fez com que todos os alunos pudessem acompanhar o ritmo das aulas.

As duas seguintes perguntas versavam sobre as principais diferenças sentidas pelos alunos acerca da visão deles em relação à Matemática após a conclusão do curso (ver questões 2 e 3 dos anexos B.5 e D.5). Dentre as respostas que surgiram, o que mais me chamou atenção foi o fato dos alunos terem notado o rigorismo inerente à Matemática e que é pouco requerida na escola. Acredito que os argumentos utilizados nas demonstrações feitas durante o curso corroboraram para essa nova visão sobre a Matemática. Outra característica percebida pelos alunos diz respeito à interligação entre os conteúdos matemáticos, já que conceitos que foram aprendidos nas séries iniciais serviram para estudar assuntos mais avançados.

O quarto questionamento solicitava um parecer dos alunos sobre o método aprendido durante o curso para a obtenção do MDC (ver questão 4 dos anexos B.5 D.5). Todos os alunos reconheceram que esta nova técnica ensinada era mais eficiente que a anterior, principalmente quando os números envolvidos nos cálculos são de grande magnitude.

A última questão tratava especificamente sobre as equações diofantinas lineares (ver questão 5 dos anexos B.5 e D.5). Os alunos destacaram a importância e necessidade de resgatar conteúdos "esquecidos"para que possamos encontrar as soluções inteiras dessa equação. Por fim, foi mencionado que esse conceito não requer conhecimentos específicos, mas a atenção nos cálculos é fator determinante na obtenção da resposta correta.

7 Conclusão

Separaremos a conclusão em duas partes. Primeiramente, faremos uma conclusão acerca das reflexões feitas na primeira parte do trabalho, pois considero que este é assunto de grande importância em educação matemática e merece um comentário final. Num segundo momento, analisaremos o resultado obtido na prática realizada, já que este é foco principal do trabalho.

A abordagem tradicional da aritmética escolar prioriza as técnicas de cálculo, deixando de fora tanto o desenvolvimento de um sentido numérico quanto uma discussão das lógicas das operações subjacentes ao uso do cálculo aritmético como acessório. Além disso, perdemos em termos de uma aprendizagem sólida, que possibilita um uso mais flexível e competente daqueles acessórios, perde-se também a chance de os alunos desenvolverem a capacidade de refletir sobre o que existe de genérico sobre as situações envolvidas, refletir sobre a lógica das operações. Ressaltamos que em nossa oficina, não cometemos esse erro, já que todas as proposições que eram apresentadas eram inicialmente incitadas por meio de questões concretas para que no final fossem generalizadas e demonstradas.

A educação aritmética tem sido insuficiente em termos de alcance, na medida em que a educação algébrica tem sido insuficiente em termos de objetivos. Enquanto a educação aritmética precisa aumentar o conjunto de atividades e habilidades que considera, a educação algébrica precisa considerar o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver se o aluno confere legitimidade. Em ambos os casos, a mudança de perspectiva mais importante refere-se a começarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior das atividades, e não pensarmos em termos de técnicas ou conteúdos.

A educação aritmética e algébrica para o século XXI deve integrar-se com a rua e tornar-se mais efetiva no papel de ajudar os alunos a expandir seu repertório de modos de produzir significado. Há tempos atrás a matemática para os alunos era estritamente coisa de papel e lápis, quando muito de máquinas registradoras. Já hoje, é fácil o acesso a calculadoras e a tendência a aumentar o acesso a computadores é real. No caso da educação algébrica básica, devemos entender sua contribuição à formação das pessoas de maneira ampla. Primeiro, em sua participação na educação aritmética na formação de um sentido numérico. Segundo em seu papel no desenvolvimento de acessórios para resolver problemas e para processos investigativos. Por fim, e este é um papel geralmente ignorado, evitar que muitos de nossos alunos continuem impedidos de compreender um aspecto-chave de nossa cultura: pensar o mundo em números.

Mas se queremos que as pessoas produzam significados mais ricos para as expressões que transformam o mundo em números, é preciso que elas, antes de tudo, as vejam como legítimas. Para "falar bem em números", necessita-se "falar em números", e assim como um sentido numérico adequado exige mais do que unidades e dezenas e as quatro operações, "falar bem em números" exige conceder legitimidade a relações quantitativas a seu tratamento como tal. Na hora em que o "falar bem em números" dirigir seu olhar para a rua, a álgebra vai deixar de ser coisa do domínio exclusivo da escola. É preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são mais um modo de produzir significado, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são diferentes. Só assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. A educação algébrica e aritmética precisa se preocupar em mostrar aos alunos que os significados matemáticos podem servir para organizar atividades que, de todo modo e de outras maneiras, poderiam ser organizados sem os significados matemáticos. Com isso, estes passam a ser vistos como legítimos; se eles vão ou não prevalecer para esse ou aquele sujeito é outra questão, que não cabe ser analisada aqui.

O grande objetivo da educação aritmética e algébrica, atualmente, deve ser o de encontrar um equilíbrio em três aspectos: a) o desenvolvimento da capacidade de praticar nossas habilidades de resolver problemas e de examinar situações; b) o desenvolvimento de modos alternativos de produção de significados; c) o aperfeiçoamento de habilidades técnicas.

Por fim, é necessário analisar criticamente todos os modelos que nos permitam apenas a leitura dos outros pela falta. Esse é um dos mais poderosos instrumentos a serviço de excluir tudo que não é como somos, de minimizar o valor da produção de outros como forma de maximizar o valor da minha produção. A escola tem sido útil nesse processo, mas não precisa ser assim. A escola sempre assume um papel de mantenedora de uma identidade cultural, mas é necessário perguntar, em nosso caso, qual é a identidade cultural que ela tem preservado. Embora termos como "civilização ocidental" sugiram que somos todos iguais, a verdade é que estamos bem longe disso. Parece-nos que "crianças urbanas, filhas de pais operários" é uma categoria tão original quanto "índios xavantes", e da mesma forma que respeitamos a organicidade da cultura destes, precisamos respeitar a daqueles. Existe e expectativa de que essa crianças urbanas possuam certa cultura, mas não os índios xavantes, mas isso não muda o fato de que a nossa atual educação escolar favoreça que eles se sintam um grupo em extinção: a extinção da rua e da juventude deles, talvez. Ao pensar a educação matemática em termos de significados, é possível um tratamento mais correto desse processo.

Agora, como havíamos dito, inferiremos alguns comentários finais sobre a oficina realizada. Infelizmente, devido a diversos fatores, a época em que a oficina foi realizada não foi a melhor possível. Como o colégio oferece aos seus alunos muitas atividades extracurriculares no turno inverso ao das aulas e também por já estarmos no final, do período das atividades escolares, grande parte dos alunos que iniciaram o curso não permaneceram até o final, já que não possuíam horários disponíveis para o estudo e necessitavam se preparar para as avaliações finais. É importante citar o fato de que os alunos vieram até mim, e explicaram os motivos pelos quais eles não iriam frequentar mais as aulas. Alguns desses motivos eram a preparação para as provas finais e ensaios com a banda.

Considero também que a divulgação da oficina não foi a mais adequada. Muitos alunos não se deram conta de que precisavam vir a todos os encontros a fim de conseguirem acompanhar o conteúdo. Assim, nos demais dias da oficina, alguns discentes não puderam comparecer, pois tinham outros compromissos.

Por tratar-se de uma oficina que pouco se assemelhava com as aulas de Matemática que os alunos estavam acostumados e que possuía uma nova filosofia de ensino, detectou-se que os alunos não obtiveram domínio completo sobre as demonstrações, tanto no seu âmbito interpretativo quanto construtivo. Mas este resultado é totalmente compreensível e esperado, pois sabemos que existem muitos alunos graduandos em Matemática que ainda não possuem destreza ao realizar provas matemáticas. Entretanto, acredito que com prática e empenho é possível fazer com que os alunos adquiram razoável habilidade em fazer demonstrações, já que foi notável a evolução do poder argumentativo dos alunos.

Um dos aspectos mais valiosos que o curso apresentou foi a retomada de conceitos que foram vistos pelos alunos nas séries iniciais. Muitos alunos não se lembravam dos conteúdos que foram abordados naquele momento, já que não mais os utilizavam. Entretanto, houve, também, aqueles que se recordavam dos algoritmos e procedimentos utilizados nessas matérias. Todas essas informações foram obtidas através dos questionários que eram aplicados no início de cada encontro.

Dentre os conteúdos revisados, o conceito de MDC era o que merecia mais atenção.

Isso porque ele seria fundamental para se encontrar as soluções inteiras de uma equação diofantina linear. Em um dos questionários iniciais, uma das perguntas solicitava aos alunos o cálculo do MDC de dois números inteiros. Aqueles que conseguiram fazer essa questão fizeram uso do algoritmo que aprenderam na 5ª série. Porém, esse algoritmo não é eficiente quando estamos trabalhando com números de uma maior grandeza. Sendo assim, foi apresentado aos discentes um novo, de fato, método para o cálculo do MDC, o qual utiliza o Algoritmo da Divisão de Euclides e o Lema de Euclides.

Sobre as equações diofantinas lineares propriamente falando, os resultados dos testes revelaram que a grande maioria dos alunos compreendeu o método utilizado para se encontrar todas as soluções inteiras dessa equação. Outro importante fato que deve ser mencionado é que apesar da diferença entre as séries dos alunos, não houve discrepância entre o desempenho deles. Sendo assim concluímos que, depois de finalizada oficina, o ensino deste conteúdo, em aulas que adotem a mesma filosofia, é totalmente viável para alunos do Ensino Médio, podendo ser, por exemplo, apresentado após o estudo sobre equações de retas, pois como uma equação diofantina linear equivale a uma reta, a partir de suas soluções obtemos uma nova interpretação geométrica e algébrica deste conceito. E é exatamente neste ponto que vemos exequibilidade de se fazer uma interação entre a abordagem discreta e contínua. Por fim, acredito que esta oficina ajudou os alunos a desenvolver a capacidade de refletir sobre a generalização de questões matemáticas que surgem diariamente, além de aprimorar/expandir o seu poder argumentativo.

Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Org.). *Didáticas das Matemáticas*. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1988. cap. 4, p.193-217. (Coleção Horizontes Pedagógicos)

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRIETZKE, Eduardo H. de Mattos; DOERING, Luisa R. Notas de Aula de Aritmética

BROLEZZI, A.C. *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. Tese de doutorado. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 1996. Disponível em <www.ime.usp.br/ brolezzi/publicacoes/teses/brolezzidr.pdf>

DELEUZE, Gilles. (1968). *Diferença e Repetição*. Rio de Janeiro: Ed. Graal, 1988.

GALLO, Sílvio. O problema e a experiência do pensamento: implicações para o ensino da filosofia. In: KOHAN, W; BORBA, S. (orgs). *Filosofia, aprendizagem e experiência*. Belo Horizonte: Auntêntica. 2008.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: MACHADO, Sílvia D. A [ET al]. *Educação Matemática; uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999, PP.43-64.

ANEXO A – Notas de Aula

Segue em anexo material que era entregue aos alunos em cada encontro e era utilizado durante as aulas. Note que os teoremas e proposições são, em sua grande maioria, demonstrados.

A.1 Múltiplos e Divisores

A.1.1 Aula 1 - Definições Iniciais

Definição A.1.1.1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ dizemos que b *divide* a, ou que *a é um múltiplo de b*, ou ainda que *b é um divisor de a* se e somente se existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot c$.

Note que o c da definição é uma solução da equação $bx = a$. Esta equação pode não ter solução em $\mathbb{N}$, por exemplo, $3x = 8$ não tem solução em $\mathbb{Z}$, mas sempre tem solução em $\mathbb{Q}$. Logo a definição de divisibilidade não faria sentido em $\mathbb{Q}$. Por esse motivo, só estudamos divisibilidade em $\mathbb{Z}$.

Destacamos três consequências imediatas dessa relação.

(i) para todo $a \in \mathbb{Z}$, 1 *divide* a; já que $a = a \cdot 1$.

(ii) para toto $a \in \mathbb{Z}$, a *divide* a; já que $a = a \cdot 1$.

(iii) para todo $a \in \mathbb{Z}$, a *divide* 0; já que $0 = a \cdot 0$.

(iv) para todo $a, d \in \mathbb{Z}$, d *divide* a implica que $|d| \leq |a|$.

A seguir coletamos várias propriedades de divisibilidade em uma mesma proposição.

Proposição A.1.1.2. *As seguintes propriedades são válidas.*

D_1 : *para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a divide b e b divide $a \Longrightarrow a = b$ *ou* $a = -b$ *(anti-simétrica);*

D_2 : *para todo* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ a divide b e b divide $c \Longrightarrow a$ divide c *(transitiva);*

D_3 : *para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0, a$, a divide $b \Longrightarrow a$ divide $b \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$*;*

D_4 : *para todo* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, a divide b e a divide $c \Longrightarrow a$ divide $(b \cdot x + c \cdot y)$, para todo $x, y \in \mathbb{Z}$*;*

D_5 : $\forall\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, a divide b e c divide $d \Longrightarrow a \cdot c$ divide $b \cdot d$.

Demonstração.D_1 : Suponhamos que a divide b e b divide a, logo, pela definição de divisibilidade, existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $b = a \cdot u$ e $a = b \cdot v$. Substituindo a segunda igualdade na primeira, obtemos $b = a \cdot u = b \cdot v \cdot u$. Como $b \neq 0$, cancelamos b e obtemos $1 = v \cdot u$, logo $u = v = 1$; o que implica que $a = b$.

D_2 : Usando a definição de divisibilidade temos que existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $b = u \cdot a$ e $c = v \cdot b$. Substituindo b na segunda igualdade decorre que $c = v \cdot u \cdot a$, ou seja, a divide c.

D_3 : Se a divide b, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $b = u \cdot a$. Multiplicando por x nos dois lados da igualdade, temos que $b \cdot x = a \cdot u \cdot x$. Logo a divide $b \cdot x$

D_4 : Suponhamos que $a \neq 0$, a divide b e a divide c, logo, pela definição de divisibilidade, existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $b = a \cdot u$ e $c = a \cdot v$. Assim $b \cdot x + c \cdot y = a \cdot u \cdot x + a \cdot v \cdot y = a \cdot (u \cdot x + v \cdot y)$ para todo, $x, y \in \mathbb{N}$. Logo, a divide $(b \cdot x + c \cdot y)$, para todo, $x, y \in \mathbb{N}$.

D_5 : Através da definição de divisibilidade temos que existem $u, v \in \mathbb{Z}$ tais que $b = u \cdot a$ e $d = v \cdot c$. Multiplicando por d nos dois lados da primeira igualdade temos que $b \cdot d = u \cdot a \cdot d = u \cdot a \cdot v \cdot c = u \cdot v \cdot a \cdot c$, ou seja $a \cdot c$ divide $b \cdot d$.

Teorema A.1.1.3. *(Algoritmo da Divisão de Euclides) Sejam* $n, d \in \mathbb{N}$ *com* $d \neq 0$*. Então existem e são únicos* $q, r \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$n = q \cdot d + r, \ \textit{com}\ r < d$$

Teorema A.1.1.4. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então existem e são únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$.*

Note que a exigência de termos $0 \leq r < |b|$ é fundamental, pois caso contrário, teríamos o seguinte problema:

Exemplo:

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

$5 = 3 \cdot 2 + (-1)$

$5 = 3 \cdot 3 + (-4)$

$5 = 3 \cdot 5 + (-10)$

.

.

.

A.1.2 Aula 2 - Máximo Divisor Comum

Sejam $a, b, d \in \mathbb{N}^*$. Se d *divide* a então $a = db$, i.e, $d \leqslant a$, logo o conjunto de divisores de a é um conjunto finito e tal que a é o maior elemento do conjunto dos divisores de a. Dizemos que d é um divisor comum de a e b se d *divide* a e d *divide* b. Note que para obtermos o conjunto dos divisores inteiros de a e b, basta multiplicarmos por -1 cada um dos elementos do conjunto citado acima.

Definição A.1.2.1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos. O maior elemento do conjunto dos divisores de a e b é chamado de Máximo Divisor Comum de a e b e é denotado por $MDC(a, b)$.

As propriedades mais básicas do MDC são as seguintes.

Proposição A.1.2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$. Então,*

(i) $MDC(a, 0) = |a|$,

(ii) $MDC(a, 1) = 1$,

(*iii*) *MDC*$(a, a) = |a|$,

(*iv*) *MDC*$(a, b) =$ *MDC*(b, a),

(*v*) a divide $b \iff$ *MDC*$(a, b) = |a|$.

Demonstração. Mostramos apenas (*ii*) e (*v*).

(*ii*) O conjunto dos divisores de a e 1 é só o elemento 1 pois o conjunto de divisores do 1 é só o 1 que pertence ao conjunto dos divisores de a já que 1 divide a. Logo MDC$(a, 1) = 1$.

(*v*) ($\Longrightarrow$) Se a divide b então o conjunto dos divisores de a está contido no conjunto de divisores de b pela transitividade da divisibilidade, assim ao interseccionamos esses conjuntos temos como resultado o conjunto dos divisores de a. Como o maior elemento no conjunto dos divisores de a é o próprio a temos que $MDC(a, b) = a$.

($\Longleftarrow$) Exercício. □

Outro resultado básico e interessante é com os divisores do MDC.

Proposição A.1.2.3. *Sejam a, b inteiros não simultaneamente nulos e $d \in \mathbb{Z}$. Se d* divide *MDC(a, b), então d* divide *a e d* divide *b.*

Demonstração. Seja $D =$ MDC(a, b),. Por definição, D divide a e D divide b, logo existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $a = kD$ e $b = lD$. Se d divide D então existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $D = td$. Substituindo em a e b obtemos, $a = kD = ktd$, ou seja, d divide a e $b = lD = ltd$, ou seja d divide b. □

Exemplo A.1.2.4. O $MDC(252, 140) = 28$. Notemos que 7 divide 28. Usando a proposição acima, concluímos que 7 divide 252 e 7 divide 140. De fato,

$$252 = 7 \cdot 36 \text{ e } 140 = 7 \cdot 20$$

Lema A.1.2.5. *(Lema de Euclides) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$MDC(a, b + na) = MDC(a, b - na) = MDC(a, b).$$

Demonstração. Basta provar que o conjunto de divisores de a e $b+na$ é igual ao conjunto de divisores de a e b.

($\subseteq$) Seja d pertencente ao conjunto de divisores de a e $b+na$. Então d divide a e d divide $(b+na)$, logo, d divide $(b+na)-na=b$, e assim d pertence ao conjunto de divisores de a e b.

($\supseteq$) Seja t pertence ao conjunto de divisores de a e b. Então t divide a e t divide b. De t divide a temos, por D_3, que t divide na, para todo $n \in \mathbb{Z}$, logo por D_6, temos t divide $(b+na)$. Assim t pertence ao conjunto de divisores de a e $b+na$.

Exemplo A.1.2.6. Calcule o MDC entre 90 e 42.

Note que $90 = 2 \cdot 42 + 6$

e $42 = 6 \cdot 7 + 0$.

Assim, $MDC(90, 42) = MDC(42, 6) = 6$, já que $6|42$.

Exemplo A.1.2.7. Calcule o MDC entre 80 e 35.

$80 = 2 \cdot 35 + 10$

$35 = 3 \cdot 10 + 5$

$10 = 2 \cdot 5 + 0$

Temos que, $MDC(80, 35) = MDC(35, 10) = MDC(10, 5) = MDC(5, 0) = 5$

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos, o Lema de Euclides permite que troquemos MDC(a, b) pelo MDC entre a e b menos um múltiplo de a (que seja um número menor do que b). Organizando esse processo temos um algoritmo para calcular o MDC entre dois números naturais quaisquer não simultaneamente nulos.

Leitura Complementar

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos. Suponhamos, que $a \leq b$. Pelo Algoritmo da Divisão (Teorema 1.2.4) existem e são únicos $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot q_1 + r_1$ com $r_1 < a$. Pelo Lema de Euclides,

$$\text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(a, b - a \cdot q_1) = \text{MDC}(a, r_1).$$

Se $r_1 = 0$, já temos o máximo divisor comum, pois $\text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(a, 0) = a$. Se

$r_1 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo a por r_1. Pelo Algoritmo da Divisão (Teorema 1.2.4) existem e são únicos $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = r_1 \cdot q_2 + r_2$ com $r_2 < r_1$. Pelo Lema de Euclides e pela Proposição A.1.2.2 (v),

$$\text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(a, r_1) = \text{MDC}(r_1, a) = \text{MDC}(r_1, a - r_1 \cdot q_2) = \text{MDC}(r_1, r_2).$$

Se $r_2 = 0$, já temos o máximo divisor comum, pois $\text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(r_1, r_2) = \text{MDC}(r_1, 0) = r_1$. Se $r_2 \neq 0$, continuamos o processo de divisão, dividindo r_1 por r_2. Vamos obter um quociente q_3 e um resto $r_3 < r_2$.

Afirmamos que esse processo é finito, ou seja, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $r_{n+1} = 0$. De fato, como $a > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, e todos esses 'restos' são positivos. Como este processo deve parar em algum momento, não podemos obter um resto menor do que r_{n+1}. Então $r_{n+1} = 0$ e, então,

$$\text{MDC}(a, b) = \text{MDC}(r_n, r_{n+1}) = \text{MDC}(r_n, 0) = r_n.$$

Portanto, $\text{MDC}(a, b)$ é igual ao último resto antes de obtermos resto 0, ou seja, o primeiro resto que é obtido e tem a propriedade de que divide o resto anterior.

Observe que dessa demonstração decorre que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\text{MDC}(a, b) = \alpha \cdot a - \beta \cdot b \quad \text{ou} \quad \text{MDC}(a, b) = \beta \cdot b - \alpha \cdot a$$

Ou seja, podemos escrever o MDC entre a e b como uma combinação linear de a e b.

Vamos comprovar esse fato no caso em que r_3 divide r_2.

Neste caso,

$$\begin{aligned} b = a \cdot q_1 + r_1 &\quad \text{logo} \quad r_1 = b - a \cdot q_1 \\ a = r_1 \cdot q_2 + r_2 &\quad \text{logo} \quad r_2 = a - r_1 \cdot q_2 \\ r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3 &\quad \text{logo} \quad r_3 = r_1 - r_2 \cdot q_3 \end{aligned}$$

Como r_3 divide r_2 temos $\text{MDC}(a,b) = r_3$ substituindo os valores de r_2 e r_1 obtemos,

$$\begin{aligned}
\text{MDC}(a,b) = r_3 = &\ r_1 - r_2 \cdot q_3 \\
&= r_1 - (a - r_1 q_2) \cdot q_3 \\
&= (1 + q_2 q_3) r_1 - a q_3 \\
&= (1 + q_2 q_3)(b - a q_1) - a q_3 \\
&= (1 + q_2 q_3) \cdot b - (1 + q_2 q_3) \cdot a q_1 - a q_3 \\
&= (1 + q_2 q_3) \cdot b - (q_1 + q_1 q_2 q_3 + q_3) \cdot a.
\end{aligned}$$

Agora basta tomar $\beta = (1 + q_2 q_3)$ e $\alpha = (q_1 + q_1 q_2 q_3 + q_3)$.

Conclusão: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, sempre podemos escrever o $MDC(a,b)$ como uma combinação linear de a e b, ou seja, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$MDC(a,b) = ax + by$$

Exemplo A.1.2.8. $a = 252$ e $b = 111$

$$252 = 2 \cdot 111 + 30$$

$$111 = 3 \cdot 30 + 21$$

$$30 = 1 \cdot 21 + 9$$

$$21 = 2 \cdot 9 + 3$$

Como 3 divide 9 temos que $3 = \text{MDC}(252, 111)$. Se quisermos escrever o MDC como combinação linear de 252 e 111, basta voltar os passos nas equações acima, da seguinte maneira

$3 = 21 - 2 \cdot 9$, mas $9 = 30 - 1 \cdot 21$, logo

$3 = 21 - 2 \cdot 9 = 21 - 2 \cdot (30 - 1 \cdot 21) = 3 \cdot 21 - 2 \cdot 30$. Mas $21 = 111 - 3 \cdot 30$, logo

$$3 = 3 \cdot 21 - 2 \cdot 30 = 3 \cdot (111 - 3 \cdot 30) - 2 \cdot 30 = 3 \cdot 111 - 11 \cdot 30.$$

$$3 = 3 \cdot 111 - 11 \cdot 30 = 3 \cdot 111 - 11 \cdot (252 - 2 \cdot 111).$$

Da última igualdade acima segue, finalmente, que

$$3 = 25 \cdot 111 - 11 \cdot 252.$$

Cuidado para não fazer a conta no meio do caminho!! O Objetivo é escrever como combinação linear!

Exemplo A.1.2.9. $a = 165$ e $b = 105$

$$165 = 1 \cdot 105 + 60$$

$$105 = 1 \cdot 60 + 45$$

$$60 = 1 \cdot 45 + 15$$

Como 15 divide 45 temos que $MDC(165, 105) = 15$.

Agora vamos escrever o MDC entre 165 e 105 como uma combinação linear entre esses dois números. Antes de fazermos isso, note que

$$(i)\ 60 = 165 - 1 \cdot 105$$

e que

$$(ii)\ 45 = 105 - 1 \cdot 60$$

De fato,

$$15 = 60 - 1 \cdot 45 = 60 - 1 \cdot (105 - 1 \cdot 60)\ (por(ii))$$

$$15 = 2 \cdot 60 - 105 = 2 \cdot (165 - 1 \cdot 105) - 105\ (por(i))$$

$$15 = 2 \cdot 165 - 3 \cdot 105$$

Exemplo A.1.2.10. $a = 47$ e $b = 97$

$$97 = 2 \cdot 47 + 3$$

$$47 = 15 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Como 1 divide 3, temos que $1 = \mathrm{MDC}(47, 97)$. Vamos, agora, escrever o MDC como combinação linear dos dois númeors dados. Temos que

$$1 = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - 1 \cdot (47 - 15 \cdot 3) = 16 \cdot 3 - 1 \cdot 47 = 16 \cdot (97 - 2 \cdot 47) - 1 \cdot 47.$$

Portanto,

$$1 = 16 \cdot 97 - 33 \cdot 47.$$

A.1.3 Aula 3 - Máximo Divisor Comum (Continuação)

A escrita do MDC como combinação linear nos permite caracterizar o MDC de outro modo.

Proposição A.1.3.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos.*

Então, $D = MDC(a, b)$ se, e somente se,

$(D$ divide a *e* D divide $b)$ *e*

para todo $d \in \mathbb{Z}, (d$ divide a e d divide $b) \Longrightarrow d$ divide D

Demonstração.($\Longrightarrow$) Se $D =$ MDC(a, b) então, por definição, D é o maior elemento do conjunto dos divisores de a e b, logo, D divide a e D divide b. Também sabemos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $D = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$. Se d divide a e d divide b, então existem $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $a = kd$ e $b = ld$. Substituindo a e b na igualdade acima temos

$$D = \alpha \cdot a + \beta \cdot b = \alpha \cdot k \cdot d + \beta \cdot l \cdot d = (\alpha \cdot k + \beta \cdot l) \cdot d.$$

Então d divide D.

($\Longleftarrow$) Se D divide a e D divide b, então, por definição, D pertence ao conjunto dos elementos que dividem a e b. Se para cada $d \in \mathbb{Z}$ tal que d divide a e d divide b, ou seja, d pertence ao conjunto dos divisores de a e b, assim, d divide D então, $|d| \leq |D|$. Assim, D é o maior elemento do conjunto dos divisores de a e b, isto é, $D = MDC(a, b)$.

Definição A.1.3.2. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não nulos. Dizemos que a e b são primos entre si se, e só se, $MDC(a, b) = 1$, ou seja, o único divisor comum de a e b é 1.

Lema A.1.3.3. $MDC(n, n + 1) = 1$.

Demonstração. Sabemos que $MDC(n, n+1) = MDC(n, n+1-n)$ pelo Lema de Euclides. Mas $MDC(n, n + 1 - n) = MDC(n, 1) = 1$. □

Corolário A.1.3.4. *Dois números naturais a e b são primos entre si se e somente se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$.*

Demonstração.($\Longrightarrow$) Decorre do Algoritmo de Euclides.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ e que $D =$ MDC(a, b). Como $D \mid a$ e $D \mid b$, por D_5, $D \mid (\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = 1$. Assim $D = 1$. □

Proposição A.1.3.5. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Se* a divide $b \cdot c$ *e* $MDC(a, b) = 1$, *então* a divide c.

Demonstração. De a dividir $b \cdot c$ temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. De $\text{MDC}(a, b) = 1$, temos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $1 = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$. Multiplicando esta última igualdade por c e substituindo bc temos

$$c = \alpha ac + \beta bc = \alpha ac + \beta ak = (\alpha c + \beta k)a.$$

Logo, a divide c. □

Proposição A.1.3.6. *O conjunto dos números primos é infinito.*

Demonstração. Vamos mostrar que dada uma quantidade finita de números primos podemos obter mais um número primo diferente de todos os dados inicialmente.

De fato, sejam $p_1, p_2, ..., p_r$ r primos distintos.

Considere o número $n = p_1 \cdot_2 \cdots p_r$ e $n + 1$. Sabemos pelo Lema 1.6.3 que os números n e $n + 1$ não possuem fatores em comum. Logo, nenhum dos $p_1, p_2, ..., p_r$ divide $n + 1$. Assim ou $n + 1$ é primo (diferente de $p_1, p_2, ..., p_r$) ou $n + 1$ tem algum divisor primo diferente de $p_1, p_2, ..., p_r$.

Com essa construção, produzimos um novo número primo.Como este processo pode ser repetido indefinidamente, concluímos que para qualquer r existem mais do que r números primos distintos. Assim o conjunto dos números primos é infinito. □

A.2 Equações Diofantinas Lineares

A.2.1 Aula 4 - Equações Diofantinas Lineares

São equações algébricas com uma ou mais variáveis, a serem resolvidas nos inteiros. O nome deriva de Diofanto de Alexandria, que viveu em torno do ano de 300 D.C. As equações diofantinas lineares são as de grau 1.

Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos, vamos estudar a equação

$$ax + by = c$$

Teorema A.2.1.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos e seja $d = MDC(a, b)$. Então a equação $ax + by = c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se, e só se, $d|c$.*

Demonstração.($\Rightarrow$) Suponhamos que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = c$. Como $d|a$ e $d|b$, temos que d divide qualquer combinação linear e, portanto, $d|c$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $d|c$. Então existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que $de = c$. Mas $d = MDC(a, b)$. Logo existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tal que $a\alpha + b\beta = d$. Multiplicando por e, obtemos

$$a\alpha e + b\beta e = de = c$$

Sejam $x := \alpha e$ e $y := \beta e$ soluções para a nossa equação. Então,

$$ax + by = c.$$

Na Geometria Analítica, a equação $ax+by = c$ representa uma reta r. Ao procurarmos soluções em $\mathbb{Z}$ da equação $ax + by = c$, na verdade estamos perguntando se a reta r, por ela representada, contém pontos que tenham ambas as coordenadas inteiras. O Teorema acima nos diz que existem equações dessa forma sem soluções inteiras, por exemplo, a equação $12 + 8y = 7$ não tem soluções inteiras, já que $MDC(12, 8) = 4$ e 4 não divide 7. Fica, então, provado o fato que a reta $12 + 8y = 7$ consegue evitar todos os pontos do reticulado $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo A.2.1.2. Resolver nos inteiros a equação $28x - 12y = 80$. Dividindo por 4, essa equação é equivalente a

$$7x - 3y = 20$$

$MDC(7, 3) = 1$, que divide 20. Logo essa equação tem soluções em $\mathbb{Z}$. Para encontrar uma solução, começamos escrevendo o MDC como combinação linear, $1 = 7 - 2 \cdot 3$. Multiplicando por 20, obtemos

$$7 \cdot 20 - 3 \cdot 40 = 20 \ (*)$$

Portanto, uma solução nos inteiros é $x_1 = 20$, $y_1 = 40$. Podemos encontrar uma infinidade de outras soluções somando e subtraindo uma mesma quantidade,

$$7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 \cdot t - 7 \cdot 3 \cdot t - 3 \cdot 40 = 20$$

ou seja,

$$7 \cdot (20 + 3t) - 3 \cdot (40 + 7t) = 20 \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}.$$

Assim, obtemos infinitas soluções em $\mathbb{Z}$ para a equação $28x - 12y = 80$

$$x = 20 + 3t, \ y = 40 + 7t \,\text{com } t \in \mathbb{Z}.$$

Neste ponto, ainda não é óbvio que as soluções encontradas incluem todas as soluções de nossa equação. Vamos provar que de fato isso ocorre. Para isso, consideremos (x, y) uma solução qualquer para nossa equação. Comparando com (*), obtemos

$$7x - 3y = 7 \cdot 20 - 3 \cdot 40$$

e, portanto,

$$7 \cdot (x - 20) = 3 \cdot (y - 40) \ (**)$$

Mas $7|7(x - 20)$, logo $7|3 \cdot (y - 40)$. Como 7 é primo, se dvide um produto então divide pelo menos um dos fatores. Como $7 \nmid 3$, então $7|y - 40$, isto é, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $y - 40 = 7t$.

Substituindo $y - 40$ por $7t$ em (**), segue que $7 \cdot (x - 20) = 3 \cdot 7t$, ou seja,

$$x - 20 = 3t \text{ (e) } y - 40 = 7t.$$

Fica, então, provado que uma solução inteira qualquer faz parte de nossa solução.

A seguir, vamos estudar o teorema que generaliza a resolução da equação considerada nos primeiros exemplos. Sendo $d = MDC(a, b)$, no teorema abaixo, consideramos o problema de resolver a equação do tipo

$$ax + by = c \text{ com } d|c$$

Pelo Teorema anterior, este é o caso em que a equação tem solução em $\mathbb{Z}$. Dividindo por d, temos a equação equivalente (com as mesmas soluções)

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d}$$

em que $MDC(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Logo para propósitos práticos, inclusive, é suficiente considerarmos o caso de uma equação $ax + by = c$ em que $MDC(a, b) = 1$.

Teorema A.2.1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a, b não nulos e tais que $MDC(a, b) = 1$. Escrevendo $a\alpha + b\beta = 1$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, temos que $x_0 = \alpha.c,\ y_0 = \beta.c$ é uma solução da equação*

$$ax + by = c.$$

As demais soluções inteiras são dadas por: $x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at$ com $t \in \mathbb{Z}$

Demonstração. Começamos escrevendo $a\alpha + b\beta = 1$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Multiplicando por c, obtemos $a\alpha c + b\beta c = c$, ou seja, x_0 e y_0 definidos por

$$x_0 = \alpha.c,\ y_0 = \beta.c$$

formam uma solução da equação $ax + by = c$. A seguir, sejam x e y definidos por $x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at$ com $t \in \mathbb{Z}$. É imediato ver que x e y são uma solução da equação $ax + by = c$. Falta mostrar que não existem outras soluções, isto é, que qualquer que seja o par x_1 e y_1 de soluções, existe$t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 = x_0 + bt$ e $y_1 = y_0 - at$. Assim ficará provado que a família $x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at$ com $t \in \mathbb{Z}$ inclui todas as soluções da nossa equação. Se x_1 e y_1 é uma solução, então

$$ax_1 + by_1 = c = ax_0 + by_0$$

e segue que

$$a \cdot (x_1 - x_0) = b \cdot (y_0 - y_1).$$

Mas $a|a \cdot (x_1 - x_0)$ implica que $a|b \cdot (y_0 - y_1)$. Como $MDC(a, b) = 1$, concluímos que $a|(y_0 - y_1)$ e, portanto, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$at = y_0 - y_1, \text{ ou seja, } y_1 = y_0 - at.$$

Substituindo esse valor em $a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$, temos que $a(x_1 - x_0) = bat$, ou ainda,

$$x_1 - x_0 = bt \text{ , i.e, } x_1 = x_0 + bt.$$

Assim, concluimos que a solução (x_1, y_1) está incluida na família $x = x_0 + bt,\ y = y_0 - at$ com $t \in \mathbb{Z}$.

A.2.2 Aula 5 - Equações Diofantinas Lineares (Continuação)

Exemplo A.2.2.1. Encontrar todos os números inteiros N tais que:

- O resto da divisão por N por 37 é 9;

- O resto da divisão por N por 52 é 15.

Dividindo N por 37, obtemos um quociente x e resto 9, ou seja,

$$N = 37x + 9 \ (*)$$

Analogamente, temos

$$N = 52y + 15 \ (**)$$

De (*) e (**), segue que $37x + 9 = 52y + 15$, ou seja, vale a equação

$$37x - 52y = 6.$$

Como 37 é primo e não divide 52, então $MDC(37, 52) = 1$. Então como 1 divide 6 temos que a equação $37x - 52y = 6$ tem solução em $\mathbb{Z}$. Escrevendo 1 (que é o MDC entre 37 e 52) temos que:

$$52 = 37 + 15 \Rightarrow 15 = 52 - 37$$

$$37 = 2 \cdot 15 + 7 \Rightarrow 7 = 37 - 2 \cdot 15$$

$$15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 1 = 15 - 2 \cdot 7$$

Então,

$$1 = 15 - 2 \cdot 7 = 15 - 2 \cdot (37 - 2 \cdot 15) = 5 \cdot 15 - 2 \cdot 37$$

$$= 5 \cdot (52 - 37) - 2 \cdot 37 = 5 \cdot 52 - 7 \cdot 37$$

Multiplicando por 6, segue que

$$37 \cdot (-42) - 52 \cdot (-30) = 6$$

e $x_0 = -42$, $y_0 = -30$ é uma solução da equação $37x - 52y = 6$. De acordo com o último teorema visto, podemos encontrar toda uma família de soluções

$$37 \cdot (52t - 42) - 52 \cdot (37t - 30) = 6, \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}$$

A equação $37x - 52y = 6$ tem uma infinidade de soluções inteiras, dadas por $x = 52t - 42$; $y = 37t - 30$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Vamos agora procurar as soluções naturais de nossa equação. Basta determinarmos quais são os $t \in \mathbb{Z}$ para os quais $x = 52t - 42 \geq 0$ e $y = 37t - 30 \geq 0$.

Temos assim as condições

(i) $52t \geq 42$, que se cumpre se, e só se, $t \geq 1$

(ii) $37t \geq 30$, que se cumpre se, e só se, $t \geq 1$

Conclusão: Para todo $t \in \mathbb{N}$ satisfazemos as condições dadas.

ANEXO B – Questionários Iniciais

A seguir os questionários que eram entregues aos alunos no início de cada encontro e o questionário final.

B.1 Questionário 1

Colégio Tiradentes

Oficina sobre Equações Diofantinas

Nome: ____ **Turma:** ____

Testando os conhecimentos iniciais.

1. Defina com suas palavras divisor de um número inteiro qualquer.

2. Você conhece alguma propriedade sobre divisores?

3. Determine todos os divisores de 20.

4. Determine todos os divisores de 36.

5. Como são chamados os números que possuem apenas dois divisores?

6. Dê 2 exemplos de números que possuem apenas 3 divisores.

B.2 Questionário 2

Colégio Tiradentes

Oficina sobre Equações Diofantinas

Nome: ____ **Turma:** ____

Testando os conhecimentos iniciais.

1) Usando suas palavras, defina MDC.

2) Calcule o MDC dos números abaixo:

a) 35 e 22. b) 36 e 14. c) 231 e 273.

3) Laura tem $30m$ de fita verde e $24m$ de fita amarela. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que sejam o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

4) Calcule o MDC de:

a) 323 e 646. b) 667 e 2001.

B.3 Questionário 3

Colégio Tiradentes

Oficina sobre Equações Diofantinas

Nome: ____ **Turma:** ____

Testando os conhecimentos iniciais.

1) Qual é o MDC de dois números consecutivos?

2) Determine todos os divisores de 30 e 45. Determine quais são os divisores comuns entre esses dois números e o seu MDC.

3) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ por definição, sabemos que o $MDC(a, b)$ é o maior elemento do conjunto dos divisores de a e b. Você consegue ver outra relação entre esses elementos?

4) Se um número inteiro qualquer divide o produto de outros dois inteiros quaisquer, ele necessariamente divide um dos fatores? Conjecture a respeito.

B.4 Questionário 4

Colégio Tiradentes

Oficina sobre Equações Diofantinas

Nome: ____ **Turma:** ____

Testando os conhecimentos iniciais.

1) Explique com suas palavras se as seguintes equações podem ou não ter solução em $\mathbb{Z}$:

a) $3x + 4y = 20$

b) $3k + 6l = 7$

c) $24x + 138y = 18$

d) $5m + 10n = 3$

e) $10x + 6y = 30$

e) $8x + 7y = 3$

B.5 Questionário Final

Questionário Final

1) Você gostou do método de ensino que foi praticado nas oficinas?

2) Você sentiu alguma diferença entre a matemática ensinada dentro da sala de aula e a da oficina? Caso sim, cite as principais diferenças.

3) Depois das oficinas, sua visão sobre a Matemática mudou? Cite algumas dessas mudanças.

4) Sobre os conteúdos revisados:

- Você pensa que foi importante retomar esses conteúdos?

- O novo método para a obtenção do MDC é melhor que o que você já sabia? Porquê?

5) Sobre o novo conteúdo Equações Diofantinas:

- É importante?

- Cite alguns fatores que torna esse conteúdo fácil e/ou difícil.

ANEXO C – Atividades

Agora apresentamos as listas de exercícios que eram dadas aos alunos e também o teste que foi feito com eles.

C.1 Lista de Exercícios 1

Exercício 1: Determine o quociente e o resto da divisão de:

a) 7 por 2.

b) 25 por 7.

c) 77 por 8.

d) 233 por 11.

e) 12 por -7.

f) -15 por 9.

g) -21 por -4.

Exercício 2: Desafie seu colega a montar casos similares aos exemplos dados acima.

C.2 Lista de Exercícios 2

Exercícios

1) Calcule o MDC dos números abaixo e escreva-o como combinação linear dos números dados.

a) 98 e 14

b) 140 e 315

c) 225 e 300

C.3 Lista de Exercícios 3

Exercícios

1) Calcule o MDC dos números dados e escreva-o como combinação linear desses números.

a) 338 e 91

b) 235 e 141

2) Sabe-se que o $MDC(147, 63) = 21$. Podemos escrever 21 como:

$$21 = 1 \cdot 147 - 2 \cdot 63$$

i) Escreva 84 como uma combinação linear de 147 e 63.

Dica: Note que $84 = 4 \cdot 21$

ii) Será que todo múltiplo de 84 pode ser escrito como combinação linear de 147 e 63?

3) Tente generalizar o resultado acima.

4) Será que toda combinação linear de a e b é múltiplo do $MDC(a, b)$? Conjecture a respeito.

C.4 Lista de Exercícios 4

Exercício: Usando os teoremas que foram apresentados em aula, em cada uma das equações dadas anteiormente, determine as soluções inteiras, caso existirem.

Observação: As equações mencionadas no exercício acima encontram-se no anexo B.4.

C.5 Teste

Teste

1) Calcule o MDC entre 976 e 352 e reescreva-o como combinação linear desses dois números.

2) Resolva nos inteiros e naturais, a seguinte Equação Diofantina:

a) $12x - 27y = 33$

ANEXO D – Respostas dos Alunos

A seguir algumas das respostas dos alunos feitas na nossa oficina. Note que a ordem das respostas dos exercícios é a mesma que apresentamos os questionários e listas de exercícios.

D.1 Questionários

1. Defina com suas palavras divisor de um número inteiro qualquer.

O divisor de um número inteiro qualquer é qualquer número que por ele pode ser dividido, resultando em um número natural.

2. Você conhece alguma propriedade sobre divisores?

Sim. Os divisores equidistantes de um número multiplicados resultam sempre no mesmo número.

Ex.: $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ $1 \times 36 = 2 \times 18 = 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6 = 36$

3. Determine todos os divisores de 20.

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

$$\begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 20 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \quad 10 \quad 20 \\ 1 & & \end{array}$$

4. Determine todos os divisores de 36.

$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

$$\begin{array}{r|l|l} & & 1 \\ 36 & 2 & 2 \\ 18 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 3 \quad 6 \quad 12 \\ 3 & 3 & 9 \quad 18 \quad 36 \\ 1 & & \end{array}$$

5. Como são chamados os números que possuem apenas dois divisores?

Números primos (1 e ele mesmo).

6. Dê 2 exemplos de números que possuem apenas 3 divisores.

$D(4) = \{1, 2, 4\}$ 4 e 9.

$D(9) = \{1, 3, 9\}$

D.2

1) Usando suas palavras, defina MDC.

O máximo divisor comum é o maior número inteiro por que podemos dividir dois outros números inteiros, resultando em outros números inteiros e com restos iguais a zero.

2) Calcule o MDC dos números abaixo:
a) 35 e 22. b) 36 e 14. c) 231 e 273.

a)

35, 22	2
35, 11	5
7, 11	7
1, 11	11
1, 1	1

b)

36, 14	2
18, 7	2
9, 7	3
3, 7	3
1, 7	7
1, 1	2

c)

231, 273	3
77, 91	7
11, 13	11
1, 13	13
1, 1	3 . 7 = 21

3) Laura tem $30m$ de fita verde e $24m$ de fita amarela. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que sejam o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

30, 24	2
15, 12	3
5, 4	2
5, 2	2
5, 1	5
1, 1	

2 . 3 = 6 metros

(~~2 . 6 = 12 metros~~)

4) Calcule o MDC de:
a) 323 e 646. b) 667 e 2001.

a)

323, 646	2
323, 323	323

b)

667, 2001	3
667, 667	667

D.3

1) Qual é o MDC entre dois números consecutivos?

1, pois

$x = 1.(x-1)+1$

$x-1 = 1.(x-1)+0$

logo 1 é o MDC

2) Determine todos os divisores de 30 e 45. Determine quais são os divisores comuns entre esses dois números e o seu MDC.

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

1, 3, 5, 9, 15, 45

Divisores comuns - 3, 5, 15

MDC - 15

3) Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ por definição, sabemos que o $MDC(a, b)$ é o maior elemento do conjunto dos divisores de a e b. Você consegue ver outra relação entre esses elementos?

O MDC(a e b) é divisível por todos os números que dividem a e b

4) Se um número inteiro qualquer divide o produto de outros dois inteiros quaisquer, ele necessariamente divide um dos fatores? Conjecture a respeito.

Não, pois, por exemplo, se a>b>c, a pode dividir o c, mas não divide b nem c

$25 | 10.5$

$25 \nmid 10$ e $25 \nmid 5$

D.4

1) Explique com suas palavras se as seguintes equações podem ou não ter solução em $\mathbb{Z}$:

a) $3x + 4y = 20$ Tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(3,4) = 1 e 1 divide 20.

b) $3k + 6l = 7$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(3,6) = 3 e 3 não divide 7.

c) $24x + 138y = 18$ Tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(138,24) = 6 e 6 divide 18.

$138 = 5.24 + 18$
$24 = 18 + 6$
$18 = 3.6 + 0$

d) $5m + 10n = 3$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(5,10) = 5 e 5 não divide 3.

$10 = 5.2 + 0$
MDC = 5

e) $10x + 6y = 30$ Tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(10,6) = 2 e 2 divide 30.

$10 = 6 + 4$
$6 = 4 + 2$
$4 = 2.2 + 0$

f) $8x + 7y = 3$ Tem solução em $\mathbb{Z}$, porque MDC(7,8) = 1 e 1 divide 3.

$8 = 7 + 1$

D.5

1) Você gostou do método de ensino que foi praticado nas oficinas?

Sim, pois foi um método que me instigou a pensar em cima de problemas aparentemente triviais.

2) Você sentiu alguma diferença entre a matemática ensinada dentro da sala de aula e a da oficina? Caso sim, cite as principais diferenças.

Sim, pois na sala de aula nós trabalhamos muito mais com fórmulas prontas. Durante o curso nós paramos bastante tempo conjecturando até a respeito de simples propriedades da divisibilidade.

3) Depois das oficinas, sua visão sobre a Matemática mudou? Cite algumas dessas mudanças. Eu já tinha alguma noção de que a Matemática do colégio era pouco voltada para a dedução, e pude confirmar isso durante as oficinas.

4) Sobre os conteúdos revisados:

- Você pensa que foi importante retomar esses conteúdos?
- O novo método aprendido para o cálculo do MDc é melhor que o que você já sabia? Porquê?

– Eu penso que na maioria dos vestibulares esses conteúdos não são ~~são~~ fundamentais, mas gostei de aprendê-los por curiosidade.

– Sim pois permite calcular o MDC de uma maneira mais eficiente para números grandes. Pelo outro método seria difícil descobrir se alguns números são primos ou não.

5) Sobre o novo conteúdo Equações Diofantinas:

- É importante?
- Cite alguns fatores que torna esse contéudo fácil e/ou difícil.

– Todo o conhecimento já acumulado na Matemática é importante, mas a questão de importância pessoal é bastante relativa, pois depende da aplicação no dia-a-dia. Para mim, foi importante como cultura e conhecimento.

– Ele é facil por utilizar, de maneira geral, apenas ferramentas já estudadas por um aluno de Ensino Médio, o que não se supõe para um conteúdo de Ensino Superior. Para mim, não há nenhuma dificuldade que o impeça de ser trabalhado no Ensino Médio, se o método de estudo e de aprofundamento na matéria for o mesmo de outros conteúdos que já estão no programa

D.6 Lista de Exercícios

Exercício: Determine o quociente e o resto da divisão de:

a) 7 por 2. $7 = 2 . 3 + 1$

b) 25 por 7.

$25 \,|\underline{\,7\,}$
$-\underline{21} \quad 3$
4

$25 = 7 . 3 + 4$

c) 77 por 8.

$77 \,|\underline{\,8\,}$
$-\underline{72} \quad 9$
5

$77 = 8 . 9 + 5$

d) 233 por 11.

$233 \,|\underline{\,11\,}$
$-\underline{231} \quad 21$
2

$233 = 11 . 21 + 2$

e) 12 por −7.

$12 \,|\underline{\,-7\,}$
$-\underline{7} \quad -1$
5

$12 = -7 . (-1) + 5$

f) −15 por 9.

$-15 \,|\underline{\,9\,}$
$+\underline{18} \quad -2$
3

$-15 = 9 . (-2) + 3$

g) −21 por −4.

$-21 \,|\underline{\,-4\,}$
$+\underline{24} \quad 6$
3

$-21 = (-4) . 6 + 3$

Exercício: Desafie seu colega a montar casos similares aos exemplos dados acima.

49 por −5

$49 \,|\underline{\,-5\,}$
$-\underline{45} \quad -9$
4

$49 = (-5) . (-9) + 4$

D.7

Exercícios

1) Calcule o MDC entre os números abaixo e escreva-o como combinação linear dos números dados.

a) 98 e 14

$98 = 7 \cdot 14 + 0$ $\quad 98 = 6 \cdot 14 + 14 \Rightarrow \boxed{14 = 98 - 6 \cdot 14}$

$Mdc(14,0) = 14$

$14 = 98x + 14y$

$\boxed{x = 1 \text{ e } y = -6}$

b) 140 e 315

$315 = 2 \cdot 140 + 35$ $\quad \boxed{35 = 315 - 2 \cdot 140}$

$140 = 4 \cdot 35 + 0$

$Mdc = 35$

$35 = 140x + 315y$

c) 225 e 300

$300 = 1 \cdot 225 + 75$

$225 = 3 \cdot 75 + 0$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{75} \\ \times\ 3 \\ \hline 225 \end{array}$$

$Mdc = 75$

$75 = 1 \cdot 300 - 1 \cdot 225$

D.8

Exercícios

1) Calcule o MDC dos números dados e escreva-o como combinação linear desses números.

a) 338 e 91.

$338 = 3.91 + 65$
$91 = 65 + 26$
$65 = 2.26 + 13$
$26 = 2.13 + 0$

$13 = 65 - 2.26$
$13 = 338 - 3.91 - 2(91 - 65)$ $\boxed{MDC = 13}$
$13 = 338 - 3.91 - 2.91 + 2(338 - 3.91)$
$13 = 338 - 5.91 + 2.338 - 6.91$
$13 = 3.338 - 11.91$

b)235 e 141.

$235 = 141 + 94$
$141 = 94 + \boxed{47}$
$94 = 2.47 + 0$

$47 = 141 - (235 - 141)$
$47 = 2.141 - 235$

2) Sabe-se que o $MDC(147, 63) = 21$. Podemos escrever 21 como:

$$21 = 1.147 - 2.63$$

$4.21 = 4(147 - 2.63) = (4.147 - 8.63) = 84$

i) Escreva 84 como uma combinação linear de 147 e 63.

Dica: Note que $84 = 4.21$ $\quad 84 = 147 - 63$ $\quad 84 = 4.147 - 8.63$

ii) Será que todo múltiplo de 84 pode ser escrito como uma combinação linear de 147 e 63?

Sim, pois

$4.21 = 4(1.147 - 2.63)$

$84 = 4.147 - 8.63$

3)Tente generalizar o resultado obtido acima.

$7.84 = 7(147 - 63)$

ou

$7.84 = 7.4.21 - \ldots$

4) Será que toda combinação linear de a e b é múltiplo do $MDC(a, b)$? Conjecture a respeito.

Sim. pois

$D = Mdc(a, b)$
$a = qD$
$b = rD$ $\Rightarrow \alpha = D(xq + yr)$

$xa + yb = \alpha$
$xqD + yrD = \alpha$

D.9

Exercícios: Usando os teoremas que foram apresentados em aula, em cada uma das equações dadas anteriormente, determine as soluções inteiras, caso existam.

a) $3x+4y=20$

$MDC(3,4)=1$

$1=4-1\cdot 3$

$20=20\cdot 4-20\cdot 3=20\cdot 4+3\cdot 4\cdot t-3\cdot 4\cdot t-20\cdot 3=$

$=\boxed{4(20+3t)+3(-4t-20)=20}$

c) $24x+138y=18$

$12x+69y=9$

$4x+23y=3$

$MDC(4,23)=1$

$1=6\cdot 4-23$

$3=4\cdot 18+23(-3)=$

$=4\cdot 18+4\cdot 23t-4\cdot 23\cdot t+23(-3)=$

$=\boxed{4(18+23t)+23(-4t-3)=3}$

e) $10x+6y=30$

$5x+3y=15$

$MDC(5,3)=1$

$1=3\cdot 2-5\cdot 1$

$15=3\cdot 30+5(-15)=3\cdot 30+3\cdot 5t-3\cdot 5t+5(-15)$

$=\boxed{3(30+5t)+5(-3t-15)=15}$

D.10

Teste

1) Calcule o MDC entre 976 e 352 e reescreva-o como combinação linear desses dois números.

$976 = 2\cdot 352 + 272$

$352 = 1\cdot 272 + 80$

$272 = 3\cdot 80 + 32$

$80 = 2\cdot 32 + 16$

$32 = 2\cdot 16 + 0$

$\boxed{MDC = 16}$

$16 = 80 - 2\cdot 32 = 352 - 272 - 2(272 - 3\cdot 80) =$

$= 352 - (976 - 2\cdot 352) - 2\cdot 272 + 6\cdot 80 =$

$= 352 - 976 + 2\cdot 352 - 2(976 - 2\cdot 352) + 6(352 - 272) =$

$= 3\cdot 352 - 976 - 2\cdot 976 + 4\cdot 352 + 6\cdot 352 - 6\cdot 272 =$

$= 13\cdot 352 - 3\cdot 976 - 6(976 - 2\cdot 352) =$

$= 13\cdot 352 - 3\cdot 976 - 6\cdot 976 + 12\cdot 352 =$

$\boxed{16 = 25\cdot 352 - 9\cdot 976}$

2) Resolva nos inteiros e naturais, a seguinte Equação Diofantina:

a) $12x - 27y = 33$

$4x - 9y = 11$

$9 = 2\cdot 4 + 1$

$\boxed{MDC = 1}$

$1 = 9 - 2\cdot 4 =$

$1 = 4(-2) - 9(-1) =$

$11 = 4(-22) - 9(-11) =$

$11 = 4(-22) + 4\cdot 9t - 4\cdot 9t - 9(-11)$

$11 = 4(-22 + 9t) - 9(4t - 11)$

$-22 + 9t \geq 0$

$9t \geq 22$

$\boxed{t \geq \frac{22}{9}}$

$\boxed{t \geq 3}$

$4t - 11 \geq 0$

$4t \geq 11$

$\boxed{t \geq \frac{11}{4}}$

$\boxed{t \geq 3}$

$\boxed{t \geq 3}$