**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

# UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO

**Rogério Deggeroni**

**PORTO ALEGRE**

**2010/2**

**UMA INTRODUÇÃO À**
**TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

**Rogério Deggeroni**

**PORTO ALEGRE**
**2010/2**

**UMA INTRODUÇÃO À**

**TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão apresentado junto ao Curso de Matemática da UFRGS como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Comissão Examinadora:

Profª. Dra. Cydara Cavedon Ripoll
UFRGS

Profª MSc. Gláucia Helena Sarmento Malta
FAPA

Porto Alegre, 08 de dezembro de 2010.

**SUMÁRIO**

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

Galileu Galilei

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Catarina Alici e Maria Eugênia pelo apoio recebido durante a realização do curso, principalmente, quando a atividade profissional exigia maiores atenções, subtraindo as horas de convívio.

Agradeço ao professor Carlos Hoppen por acreditar na realização deste trabalho e pela paciência e competência que marcam o seu trabalho.

Agradeço aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática pela preocupação com a nossa formação nas disciplinas de Matemática.

Agradeço aos professores Elisabete Búrigo e Vilmar Trevisan pela atenção dispensada na atuação da COMGRAD Matemática.

Agradeço aos professores Fernando Cezar Ripe, Lisete Bampi, Luisa Rodriguez Doering, Marcus Vinicius Basso e Marilaine de Fraga Sant'Ana pelo aprendizado das práticas no ensino da Matemática

Agradeço aos professores que constituíram a banca pelas contribuições que deram para a complementação deste trabalho.

E, finalmente, agradeço a Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade de formação gratuita e de qualidade.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo avaliar a possibilidade da introdução da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Procuramos, assim, fundamentar um embasamento teórico que possibilitasse a compreensão de um aluno desse nível de ensino. A Teoria dos Grafos modela diversos problemas do cotidiano, aplicáveis às mais variadas áreas do conhecimento, propiciando ao aluno a oportunidade de resolução de problemas atuais e do seu dia-a-dia. Tais problemas podem envolver situações de simples compreensão, cuja exploração revela diversas propriedades matemáticas interessantes. Isso possibilita ao aluno desenvolver uma série de habilidades importantes, tais como analisar, explorar, modelar, dentre outras. A partir dessa constatação, apresentamos neste trabalho uma proposta de introdução de aspectos da Teoria dos Grafos no Ensino Médio que possibilite a construção do conhecimento matemático através da investigação matemática. A prática foi realizada com alunos do Ensino Médio em uma escola da rede estadual do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre, no ano de 2010, e as atividades realizadas envolveram assuntos diretamente relacionados a problemas de percurso.

**Palavras-chave:** Grafos – Educação Básica – Interdisciplinaridade – Inserção Curricular – Educação Matemática – Ensino da Matemática

## ABSTRACT

This study aims to evaluate the possibility of introducing graph theory in high school. To this end, we devise a theoretical framework adapted to students in this level. Graph theory models many real-world problems from different fields of knowledge, providing students with the opportunity to solve natural problems in their environment. Such problems may involve situations that can be easily understood, whose exploration reveals interesting mathematical properties. This allows the student to develop a series of important skills such as analyzing, exploring, modeling, among others. From this observation, we present a proposal to introduce aspects of graph theory in high school that allows the construction of mathematical knowledge through research in Mathematics. The practice was done with high school students in a public school in the state of Rio Grande do Sul in Porto Alegre in 2010, and the activities are concentrated around routing problems.



**Keywords**: Graphs - Basic Education - Interdisciplinarity – Teaching Mathematic

## LISTA DE FIGURAS

# 1. INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico e o surgimento de uma sociedade virtual, juntamente com a rapidez da transmissão da informação e da comunicação, têm um imenso potencial de contribuição ao ensino da Matemática. A Matemática Discreta assume um papel importante dentro dessa nova perspectiva, uma vez que o computador, peça importante dessa revolução informática, apresenta estruturas finitas.

Dentre tópicos da Matemática Discreta, escolhemos os grafos, pelo fato de serem estruturas que vem sendo utilizadas intensivamente em pesquisas operacionais, podendo também ser exploradas na Matemática da Escola Básica.

O tema grafo nada tem a ver com gráficos. É um tema muito pouco utilizado na Educação Básica, pois, por não constar nas diretrizes curriculares, é pouco conhecido pela maioria dos professores de todos os níveis. Porém, dado que problemas nessa área podem ser abordados via modelagem de problemas do cotidiano, eles têm um grande potencial de motivação para os alunos. Consideramos que esse tópico exerce forte atração sobre quem vem a conhecê-lo e a sua exploração vem de encontro aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pois alia interdisciplinaridade, transversalidade e contextualização.

Considerada uma espécie de “bicho-papão” da vida escolar, a Matemática sempre foi uma disciplina temida, que reprovava muito e tinha poucos fãs. Mas as novas formas de ensino, que procuram explorar exemplos práticos, trouxeram a disciplina mais para perto do mundo real e vêm atraindo os alunos, para surpresa de muitos pais, que nunca gostaram dela.

As mudanças no ensino da Matemática começaram nos anos 80. Foi quando a Matemática procurou incorporar aspectos do cotidiano, reduzindo a ênfase dada à construção abstrata de conceitos matemáticos, como no ensino tradicional da teoria dos conjuntos, por exemplo.

O ensino da Matemática tem hoje algumas características principais. A primeira é a relação da Matemática com situações concretas do mundo real como forma de fixação de conceitos distintos. Outra é a introdução de atividades para facilitar o processo de aprendizagem, além de jogos que podem ser manipulados pelos alunos. Há ainda, a possibilidade de uso do computador, com programas auxiliares cada vez melhores. Tudo com o objetivo de fazer o aluno compreender os problemas e selecionar a melhor forma de solucioná-los, sem o artifício da "decoreba".

A Educação Matemática nos leva a observar que os "conteúdos" matemáticos apresentados pelas situações do cotidiano não são lineares e, se queremos que os alunos usem os conteúdos e as habilidades que desenvolvem na escola em seu dia a dia, a escola precisa prepará-los para esse tanto. Em outras palavras, para que o aluno estabeleça relações entre a Matemática escolar e a Matemática do cotidiano, é fundamental que o professor faça aluno refletir e reconhecer que a Matemática é só uma maneira encontrada de por no papel aquilo que ele vive constantemente e resolve com muita naturalidade.

O desafio deste trabalho de conclusão de curso é levar para o currículo da escola, em especial ao Ensino Médio, uma Matemática recente e que esteja sendo foco de pesquisas atuais.

Pretendemos atingir os seguintes objetivos:

a) Apresentar a Teoria dos Grafos a alunos do Ensino Médio, em especial via problemas de percurso:
   - a.1) estudando a resolução de problemas concretos;
   - a.2) generalizando para a estrutura abstrata de grafos conexos.

b) Aplicar essa inserção em sala de aula:
   - b.1) trabalhando com situações reais;
   - b.2) incentivando os alunos a procurarem no seu cotidiano situações que podem ser analisadas;
   - b.3) utilizando a modelagem matemática na resolução do problema;
   - b.4) introduzindo aos alunos idéias formais utilizadas na solução do problema.

Visto que o nosso objetivo é introduzir o tópico matemático a partir de problemas do dia-a-dia, optamos por discutir atividades que envolvam serviços, tais como, coleta de resíduos sólidos, entrega de gás, manutenção de redes de distribuição de energia elétrica e de redes de telefonia, entrega dos correios, dentre outros, todos relacionados com problemas de percurso.

## 2. EMBASAMENTO TEÓRICO

Um grafo é um par ordenado (V,A), onde V é um conjunto qualquer e $A \subseteq \{\{u,v\} \subseteq V\}$. Em problemas de modelagem, tal conceito é útil para representar uma coleção V de objetos, denominados vértices, que são ligados aos pares por outra coleção A de objetos, denominados arestas. Na representação de grafos, os vértices são geralmente representados por pontos e as arestas por linhas unindo os vértices. As posições dos vértices e a forma das linhas são irrelevantes. O grafo representa apenas a topologia dos vértices e arestas, ou seja, quem está ligado a quem. Um exemplo de grafo é mostrado na figura 1.

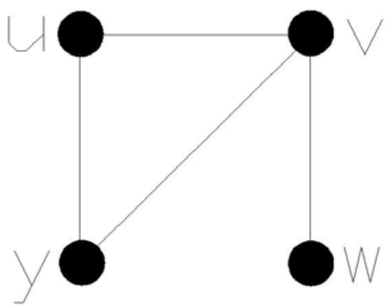



Figura 1 – Grafo com conjunto de vértices V = {u,v,w,y} e arestas A = {uv,uy,vy,vw}

Os grafos são utilizados para modelar problemas do cotidiano. Podem ser utilizados para representar as malhas rodoviárias e ferroviárias de transporte, redes elétricas, redes de telecomunicações, redes de água e esgoto, dentre outras. No caso da malha rodoviária de uma cidade, o arruamento pode ser representado por um grafo em que as esquinas são os vértices e as quadras são as arestas.

A introdução do conceito de grafo e o estudo matemático de suas propriedades foi uma das muitas contribuições do matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783). Um quebra-cabeças famoso na época era encontrar um passeio que visitasse todas as pontes da cidade de Königsberg (veja a figura 2), passando uma única vez em cada ponte.


(a) (b)

Figura 2 – Imagem das pontes de Königsberg (a) na época de Euler e (b) atual Kaliningrado

Euler resumiu as propriedades essenciais do mapa por um diagrama de pontos ligados por linhas, onde A, B, C, D são pontos (vértices) associados à terra, que é representada pelas duas margens, e as duas ilhas e 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são segmentos (arestas) associados às sete pontes, conforme mostrado na figura 3.

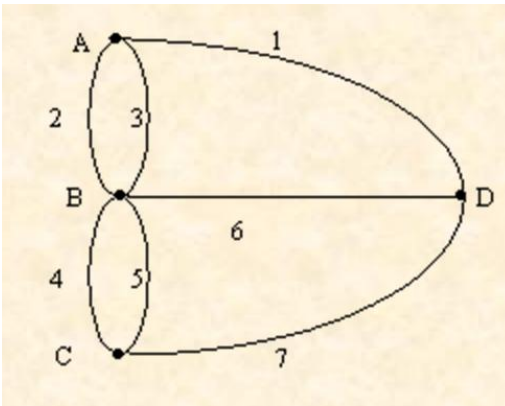



Figura 3 – Grafo representativo das pontes de Königsberg

Ao analisar esse grafo, ele provou que o tal passeio era impossível. Este trabalho, publicado em 1736, é considerado o primeiro artigo da Teoria dos Grafos.

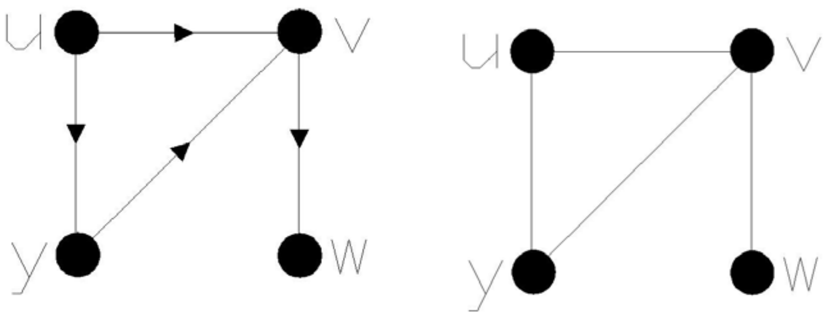
A teoria matemática dos grafos foi desenvolvida gradualmente no século XIX, quando surgiram importantes aplicações em engenharia e em química. Sua importância cresceu muito no século XX, com o surgimento das redes de energia elétrica e de telecomunicações, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores.

## 2.1 Conceitos fundamentais

Existem diferentes maneiras de conceituar um grafo em Matemática, porém, inicialmente, apresentaremos algumas definições básicas. Conforme mencionado anteriormente, um grafo G consiste em um conjunto de vértices e um conjunto de arestas, que denotaremos por V e A, respectivamente. O conjunto de vértices é arbitrário e a natureza das arestas depende da definição, mas cada aresta tem sempre dois extremos que são vértices de G, não necessariamente distintos. Caso seja necessário, outras informações além dos conjuntos V e A podem ser incorporadas ao grafo, tais como: distância, orientação, dentre outras.

### 2.1.1 Grafos orientados e não orientados

Um detalhe que varia na definição de G é a existência de uma orientação específica em cada aresta. Os grafos que incluem essa informação são ditos grafos orientados (figura 4a) e aqueles que não a apresentam são ditos não orientados (figura 4b). Em um grafo orientado, as arestas são pares ordenados, ou seja, um vértice é considerado a "origem" da aresta e o outro seu "destino". Nas ilustrações de grafos orientados, o sentido de cada aresta é geralmente indicado por uma seta da origem para o destino.




(a) (b)

Figura 4 – Grafos (a) orientado e (b) não orientado

Visto que na parte prática deste trabalho utilizaremos somente grafos não orientados, adotaremos o termo grafo para grafo não orientado. No entanto, salientamos que todos os conceitos que definiremos posteriormente aplicam-se, também, a grafos orientados.

2.1.2 Arestas paralelas

As informações que necessitamos saber sobre as arestas é se dois vértices u e v estão ligados entre si ou não. Nessa condição, o conjunto A pode ser definido como um conjunto de pares de vértices u e v que estão ligados se, e somente se, o par {u, v} está em A. Em um grafo, duas arestas com os mesmos extremos são denominadas paralelas.

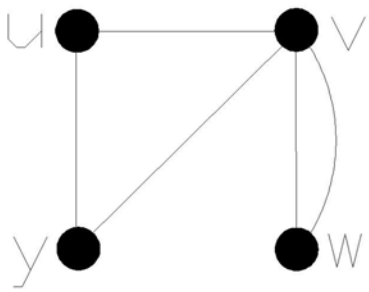



Figura 5 – Arestas paralelas

2.1.3 Laços

Se uma aresta liga um vértice a ele mesmo, é chamada de laço, conforme mostrado na figura 6.

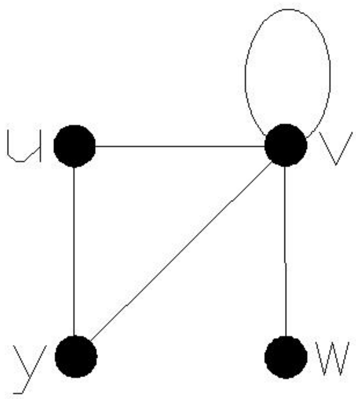



Figura 6 - Laço

2.1.4 Grafo vazio e sem arestas

O conjunto de vértices V de um grafo G pode ser vazio. Nesse caso o conjunto de arestas A é obrigatoriamente vazio. Portanto, existe um único grafo sem vértices, que chamamos de grafo vazio. Por outro lado, se o conjunto de vértices V não é vazio, o conjunto de arestas de G pode ser vazio ou não, conforme mostrado na figura 7.

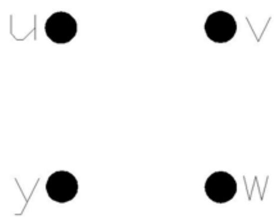
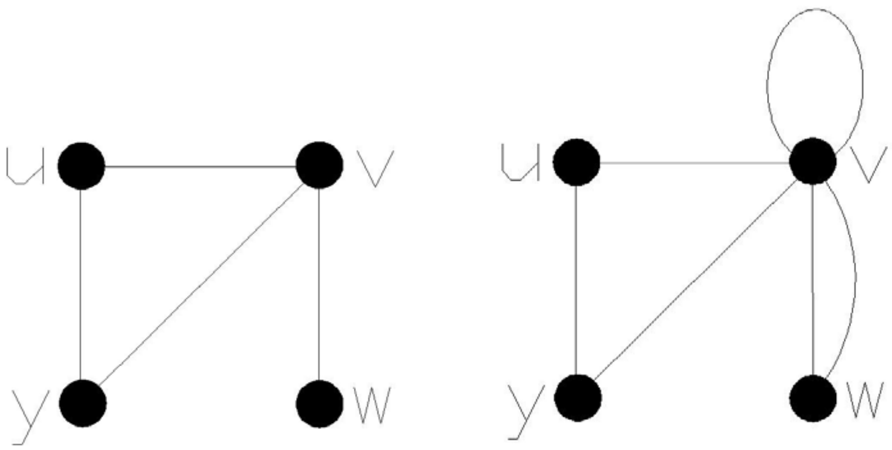



Figura 7 – Grafo com vértices e sem arestas

2.1.5 Grafos simples e multigrafos

Grafos simples são grafos sem laços e sem arestas paralelas, conforme mostrado na figura 8a. Na figura 8b, a ocorrência de arestas paralelas faz com que tenhamos o que chamamos de multigrafo.




(a) (b)

Figura 8 – (a) Grafo simples e (b) multigrafo

2.1.5 Exemplo de grafos

Os estados do Brasil podem ser representados por um grafo, conforme mostrado nas figuras 9a e 9b, em que cada vértice é um dos estados e dois estados são adjacentes no grafo se têm uma fronteira comum. Quantos vértices têm o grafo? E quantas arestas?

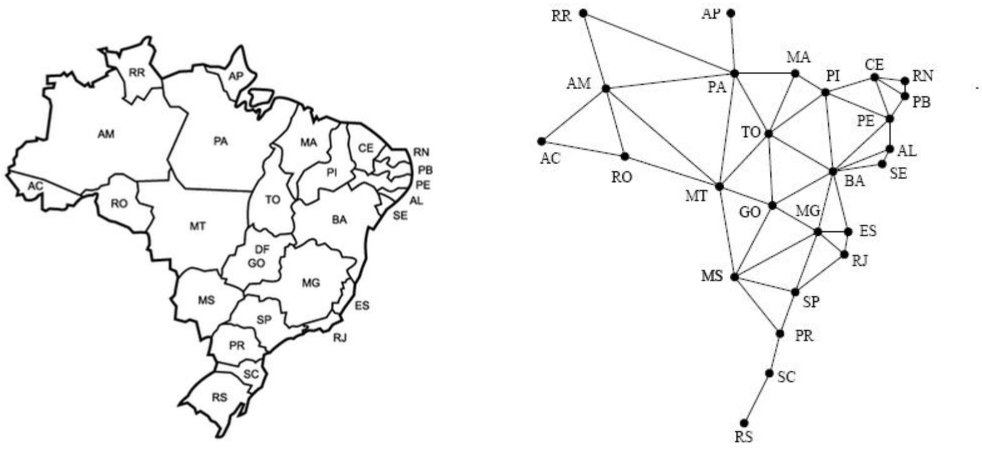



Figura 9 – (a) Divisão política do Brasil e (b) representação na forma de grafo

Portanto, analisando a figura 9b observamos a existência de 26 vértices e 45 arestas.

2.1.6 Adjacência

Dois vértices u e v são ditos vizinhos em um grafo G = (V,A) se, e somente se, existe uma aresta de G cujos extremos são u e v. Esta relação entre os vértices é a relação de vizinhança.

2.1.7 Incidência

Se um vértice v de um grafo G = (V,A) é um dos extremos de uma aresta a de G, podemos dizer que a aresta a incide em v. Esta propriedade pode ser vista como uma relação entre o conjunto de arestas e o conjunto de vértices e que é denominada relação de incidência do grafo.

2.1.8 Grau do vértice

Definimos o grau de um vértice v em um grafo G = (V,A), como sendo o número de arestas de G incidentes em A que contém v. Nesta definição, cada laço deve ser contado duas vezes. Denotaremos o grau por g(v).

Considere a figura 10, cujo número de vértices é 8 e o número de arestas é 11.

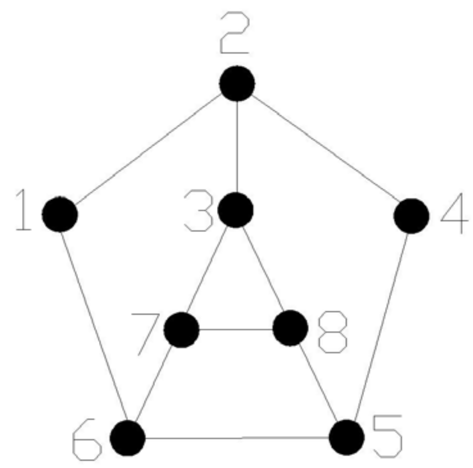



Figura 10 – Grafo com 8 vértices e 11 arestas

Analisando a figura 10, podemos verificar que os vértices 1 e 4 têm grau 2 e que os vértices 2, 3, 5, 6, 7 e 8 têm grau 3.

A sequência de graus de um grafo G com vértices $v_1$, $v_2$, $v_3$, ..., $v_n$ é a n–upla $((gv_1), (gv_2), (gv_3), ..., (gv_n))$, onde $(gv_n)$ é o grau de $v_n$.

No caso da figura 12, a sequência de graus será dada por (2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 3).

**Proposição 1**: Em qualquer grafo G = (V, A), a soma dos graus de todos os vértices é par, ou seja, $\sum_{v \in V} g(v)$ é par.

Prova:

Como o grau de cada vértice conta as arestas incidentes a esse vértice, temos que cada aresta é contada duas vezes (uma para cada vértice). Logo: $\sum_{v \in V} g(v) = 2.A$

Uma consequência da Proposição 1 é:

**Corolário 1**: O número de vértices com grau ímpar em todo grafo G = (V, A) é par.

Prova:
Sejam “p” o conjunto dos vértices de grau par e “i” o conjunto dos vértices de grau ímpar. Assim:

$$\sum_{v \in V} \mathrm{g(v)} = \sum_{v \in p} \mathrm{g(v)} + \sum_{v \in i} \mathrm{g(v)} = 2.A$$

Ou ainda que:

$$\sum_{v \in i} \mathrm{g(v)} = 2.A - \sum_{v \in p} \mathrm{g(v)}$$

O lado direito da equação acima é par. Como a soma de parcelas ímpares é par somente se o número de parcelas for par, concluímos que o “i” é par.

2.1.9 Grafos regulares

Um grafo G é dito regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau. Em particular, se o grau dos vértices é “r”, então, G é chamado r-regular, lido como sendo regular de grau “r”. A figura 11 mostra a representação de um grafo regular.

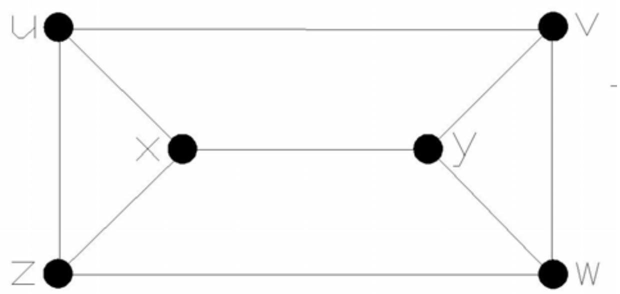



Figura 11 – Grafo 3-regular

2.1.10 Grafos completos

Um grafo G é denominado completo se não possui laços e existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices. Observe que um grafo completo é sempre um grafo simples. Denotamos por Kn um grafo completo com n vértices e é (n − 1)-regular.

Neste caso, o grau de cada vértice é igual a n − 1. A figura 12 ilustra um grafo regular completo cujos vértices têm grau 4 e, portanto, é denominado K5.

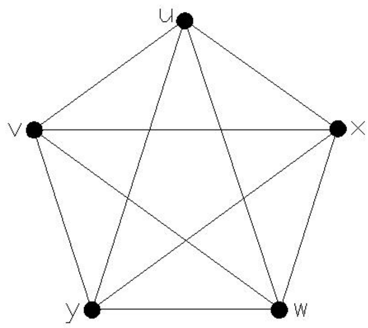



Figura 12 – Grafo K5

2.1.11 Passeios, trilhas e caminhos

Um passeio P em um grafo G = (V,A) é uma sequência $v_1a_1v_2a_2v_3a_3 \ldots v_{i-1}a_{i-1} v_i$, onde $v_1,v_2,v_3, \ldots ,v_i$ são vértices do grafo e $a_j = \{v_j,v_{j+1}\}$ são arestas do grafo.

Quando o grafo é simples, podemos dizer que o passeio P atravessa cada uma das arestas $\{a_1a_2a_3 \ldots a_{i-1}\}$, quando começa no vértice $v_1$ e termina no vértice $v_i$ , passando por cada um dos vértices $v_1v_2v_3 \ldots v_{i-1}$, que são os vértices internos do passeio.

O comprimento do passeio é um número de arestas desse passeio. Quando o grafo é simples podemos definir o passeio apenas pela sequência de seus vértices. Em particular, um passeio pode ter apenas um vértice e nenhuma aresta. Esse passeio é denominado trivial e seu comprimento é zero.

Podemos observar que uma mesma aresta e, também, o mesmo vértice podem ocorrer mais de uma vez. Um mesmo vértice pode ser início, término ou ainda intermediário do passeio. Assim, um passeio de comprimento k visita no máximo k + 1 vértices distintos e tem no máximo k − 1 vértices intermediários.

Chamamos de trilha ao passeio em que todas as arestas $a_1a_2a_3 \ldots a_{i-1}$ são distintas, porém pode repetir os vértices.

Um caminho em um grafo é um passeio que não há repetição de vértices. Assim, todo caminho também é uma trilha. Podemos observar que um caminho de comprimento k visita "exatamente" k +1 vértices distintos e tem "exatamente" k − 1 vértices intermediários.

Chamamos de distância entre dois vértices u e v em um grafo ao comprimento do menor caminho entre u e v.

A figura 13 nos mostra um grafo com 6 vértices e 7 arestas. O caminho entre os vértices u e z tem comprimento igual a 5, ou seja, u→y→w→v→x→z. A distância entre u e z é 3, pois u→v→w→z é um caminho de comprimento 3 e não há outro mais curto.

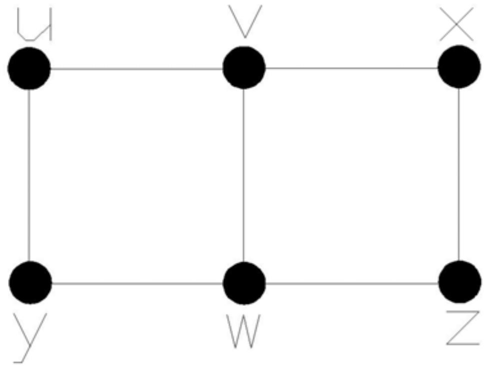



Figura 13 – Grafo com 6 vértices e 7 arestas

**Proposição 2**: Em um grafo G(V,A) se existe um passeio entre dois vértices u e v, então, existe um caminho entre esses dois vértices.

Prova: Como existe um passeio entre u e v, logo podemos escolher um passeio P com o menor número de vértices repetidos. Se P não tiver vértices repetidos, P é um caminho entre u e v. Agora, suponha que w é um vértice em P que aparece pelo menos duas vezes. Podemos dividir o passeio P em três "partes", ou seja:

P1: começa em u e segue P até a primeira ocorrência de w;

P2: começa em w e termina em w, seguindo P desde a primeira ocorrência de w até a última;

P3: começa em w e termina em v, seguindo P a partir da última ocorrência de w.

Note que P': uP1wP3v é um passeio entre u e v. Como P' $\subseteq$P, os vértices repetidos de P' também se repetem em P. Por outro lado, w se repete em P, mas não se repete em P'. Isso contradiz a escolha de P e, portanto, não pode haver vértices repetidos em P.

2.1.12 Circuitos e ciclos

Podemos dizer que um passeio P = ($v_1a_1v_2a_2 \ldots v_{i-1}a_{i-1}\ v_i$) é *fechado* se $v_1 = v_i$, ou seja, se ele começa e termina no mesmo vértice.

Um circuito em um grafo G = (V,A) é um passeio fechado. Por sua vez, um ciclo em um grafo G = (V,A) é um circuito em que não há repetição de arestas ou vértices (a menos do último vértice). Um ciclo de comprimento k é chamado um k-ciclo. Um grafo sem circuitos é chamado grafo acíclico.

2.1.13 Conexidade

Um grafo é dito conexo se for possível visitar qualquer vértice, partindo de um outro, passando pelas arestas.

Dizemos que um vértice $u \in V$ está conectado em G a um vértice $v \in V$ se, e somente se, existe um passeio em G com início u e término v. Isto equivale a dizer que existe um caminho em G de u para v, ou seja, dizemos que um grafo é conexo se ele não é vazio e quaisquer dois de seus vértices são conectados, conforme mostrado na figura 14a. Na figura 14b é mostrado um grafo desconexo. Um grafo sem arestas é dito totalmente desconexo.

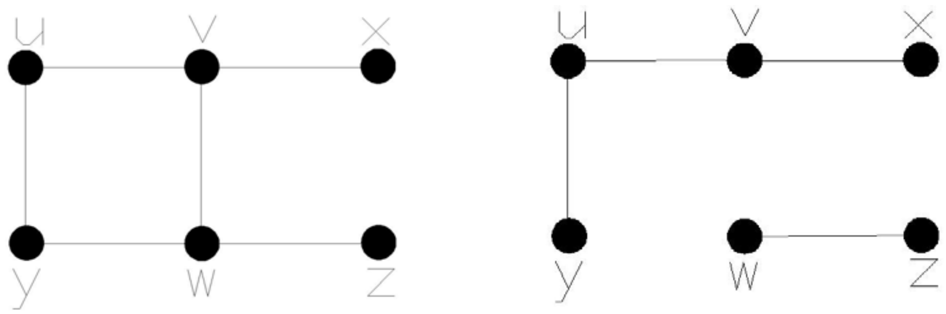



Figura 14 – Grafos (a) conexo e (b) desconexo

## 2.2 Problemas de percurso

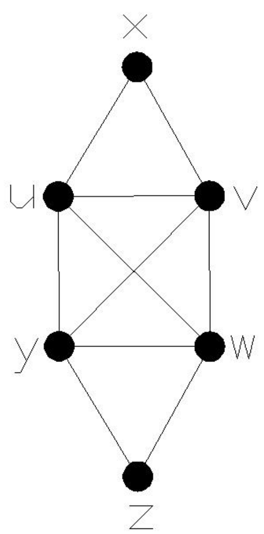
As aplicações dos caminhos eulerianos se relacionam, basicamente, com problemas de atendimento sequencial, sobre um conjunto de usuários de um serviço oferecido no interior de uma rede de tráfego, tais como, entrega de correio, coleta de lixo, manutenção de redes elétricas e de telecomunicações, dentre outros.

### 2.2.1 Grafos eulerianos

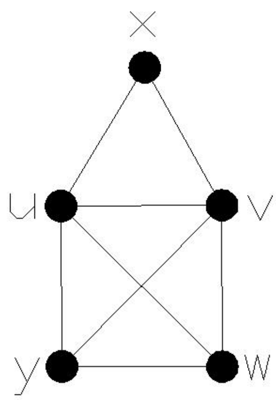
Para mostrar que o problema das pontes de Königsberg não tem solução, Euler primeiro modelou o mapa da figura 2(a) por um grafo G não orientado, conforme mostrado na figura 3, onde cada vértice representava uma região de terra firme (uma margem do rio ou uma ilha), e cada aresta representava uma ponte entre as duas regiões representadas pelos seus extremos. Neste modelo, o problema pede um passeio fechado no grafo G que passa exatamente uma vez em cada aresta de A, ou seja, uma trilha fechada que passa por todas as arestas.

Uma trilha simples ou um circuito simples é dito euleriano se ele contém todas as arestas de um grafo. Um grafo que contém um circuito euleriano é um grafo euleriano. Um grafo que não contém um circuito euleriano, mas contém um caminho euleriano é chamado grafo semi-euleriano. As figuras 15(a) e 15(b) ilustram grafos euleriano e semi-euleriano, respectivamente. Um circuito euleriano pode ser obtido a partir da figura 15(a), ou seja:

$$x \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow w \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow x$$




(a)




(b)

Figura 15 – Grafos (a) euleriano e (b) semi-eureliano

Por definição, um caminho é sempre conexo. Como um circuito euleriano contém todas as arestas de um grafo, um grafo euleriano é sempre conexo, com a exceção de possíveis vértices isolados.

No seu artigo de 1736, Euler fez mais do que resolver o problema da cidade de Königsberg. Ele encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo qualquer G tenha um circuito euleriano.

**Lema 1**: Dado um grafo conexo com todos os vértices de grau par, qualquer par de vértices faz parte de um circuito simples e fechado.

Prova: (Por contradição). Suponha que exista um par de vértices u e v que não admitem um circuito simples em comum. Como o grafo é conexo, então existe um caminho que liga u e v. Portanto, existe uma aresta (x,y), conforme mostrado na figura 16, cuja remoção desconecta o grafo, caso contrário haveria um segundo caminho entre u e v cujas arestas são distintas do caminho original e, portanto, u e v estariam em um circuito comum.

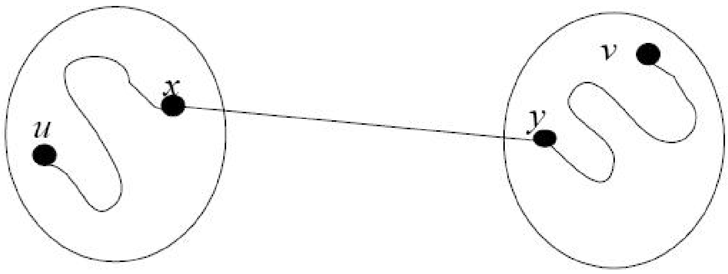



Figura 16 – Conexidade entre grafos

Portanto, a remoção da aresta (x,y) desconecta o grafo gerando duas componentes conexas, sendo o vértice x e y pertencentes a componentes diferentes. Com isso, ambos os vértices passarão a ser os únicos vértices de grau ímpar em suas respectivas componentes. Isso contradiz o fato que o número de vértices de grau ímpar de um subgrafo deve ser par.

**Teorema 1:** Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G possui grau par.

Prova:

($\Rightarrow$) Seja G um grafo euleriano. Logo ele contém um circuito euleriano. Por cada ocorrência de vértice desse passeio, existe uma aresta que chega nesse vértice e outra que sai desse vértice. Como toda aresta faz parte do passeio e não há repetição de arestas no passeio, necessariamente, o número de arestas incidentes em cada vértice v é igual a 2k, onde k é o número de vezes em que o passeio atravessa v.

($\Leftarrow$) Como todo vértice possui grau par, então na construção de um caminho sempre é possível chegar e sair de um vértice por arestas diferentes ainda não utilizadas. Assim, é possível sair de vértice v e retornar a ele sem repetição de arestas, conforme enunciado no Lema 1. Seja $C_1$ um circuito contendo v construído de maneira arbitrária. Logo, se $C_1$ contém todas as arestas de G, temos um circuito euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de C1. No grafo resultante G', todos os vértices também possuem grau par e, necessariamente, um deles faz parte de $C_1$, senão o grafo não seria conexo. Recomecemos o mesmo processo com o grafo G', partindo de um vértice comum com $C_1$, obtendo assim um novo circuito $C_2$.

A figura 17 mostra que dois circuitos que têm um vértice em comum podem formar um circuito único, ou seja, chegando no vértice comum em um dos dois circuitos, continuamos o percurso no outro circuito. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de G. Logo o grafo é euleriano.

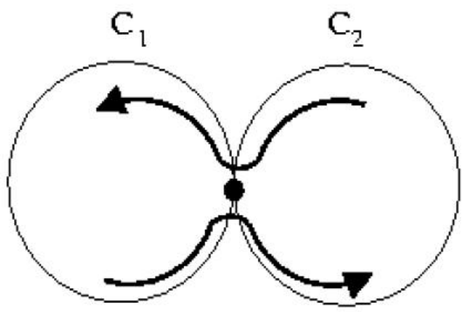



Figura 17 – Dois circuitos com vértice em comum

### 2.2.2 Problema do caminho mínimo

Um problema interessante que está ligado ao conceito de grafo euleriano é o caminho mínimo em grafos não orientados.

Suponhamos que um carteiro quer descobrir um percurso para a entrega da correspondência diária em um condomínio residencial, conforme mostrado na figura 18, em que, a partir do portão principal, passe por todas as ruas, nunca passe por trecho de rua pelo qual já tenha passado e, quando da entrega pela última rua, já esteja voltando ao portão inicial.

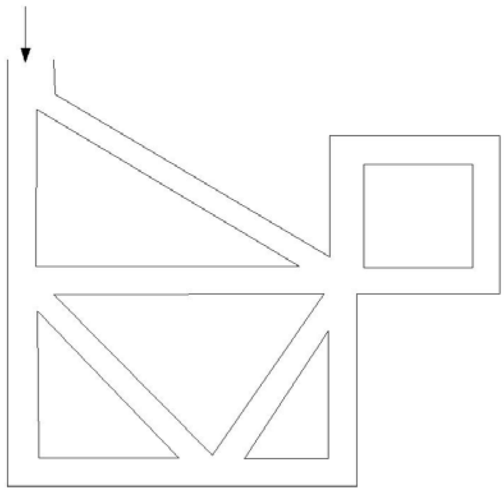


Figura 18 – Arruamento do condomínio residencial A

Essa situação pode ser representada por um grafo conexo onde as arestas correspondem às quadras das ruas e os vértices correspondem às esquinas. Como o grafo é também euleriano, pois todos vértices são pares, conforme mostrado na figura 19, a solução consiste em achar um circuito euleriano.

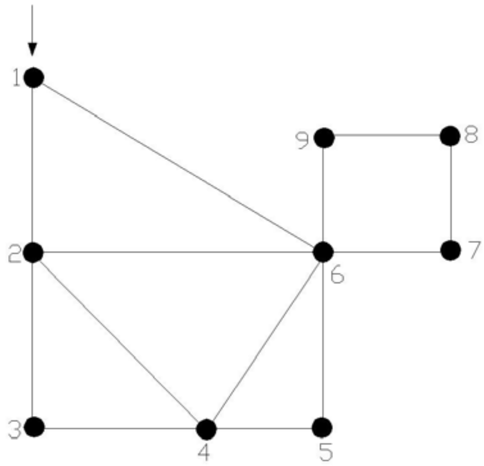



Figura 19 – Grafo do arruamento do condomínio residencial A

Mais interessante é o caso de um grafo não euleriano. Consideremos o mesmo carteiro entregando a correspondência em outro condomínio residencial, conforme mostrado na figura 20.

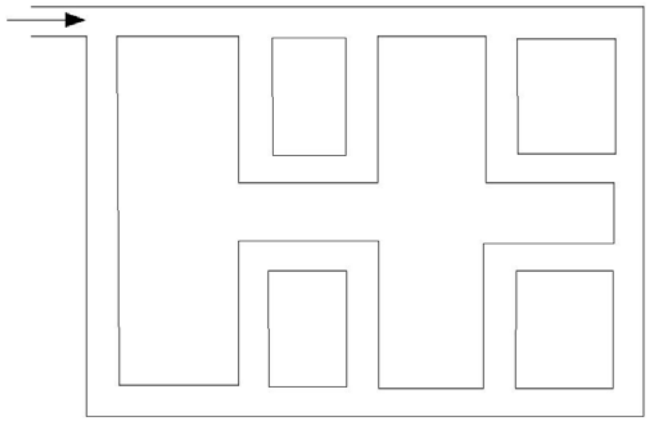


Figura 20 – Arruamento do condomínio residencial B

Essa situação pode ser representada por um grafo, utilizando a mesma representação anterior, conforme mostrado na figura 21.

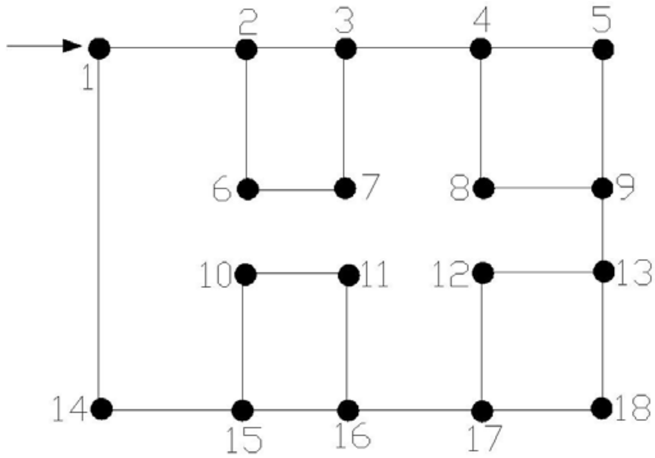



Figura 21 – Grafo do arruamento do condomínio residencial B

Analisando o grafo mostrado na figura 21, concluímos que os vértices 1, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14 e 18 são pares, enquanto que 2, 3, 4, 9, 13, 15, 16 e 17 são ímpares, logo o grafo não é euleriano e, então, algumas arestas terão que ser repetidas sempre que houver um passeio passando por todas as arestas. Frente ao fato, modificamos o problema. Desejamos encontrar um passeio em que possa haver repetições de arestas, mas de modo que o número de repetições seja mínimo. Resolvemos o problema, então, acrescentando arestas artificiais ao grafo original de forma a obter um novo grafo. Isto deve ser feito de maneira que as arestas artificiais acrescentadas transformem todos os vértices de grau ímpar de G em vértices de grau par. As arestas artificiais correspondem aos eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau ímpar. Um circuito euleriano pode ser encontrado na figura 22, onde foram introduzidas 4 novas arestas: 2 – 3, 4 – 9, 15 – 16 e 13 – 17.

O circuito euleriano no grafo auxiliar corresponde a um circuito que utiliza todas as arestas do grafo original com a repetição das arestas {2,3}, {15,16}e dos caminhos 4, 5, 9 ou, equivalentemente, 4, 8, 9, e também 17, 12, 13 ou, equivalentemente, 17, 18,13, pois, em ambas as situações, todos os caminhos têm o mesmo comprimento.

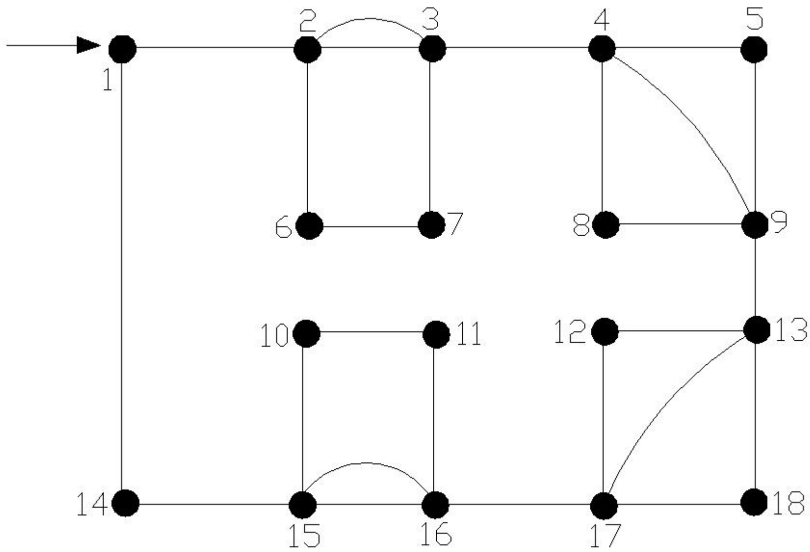



Figura 22 – Grafo “eulerizado” do arruamento do condomínio residencial B

## 2.3 Tópicos adicionais

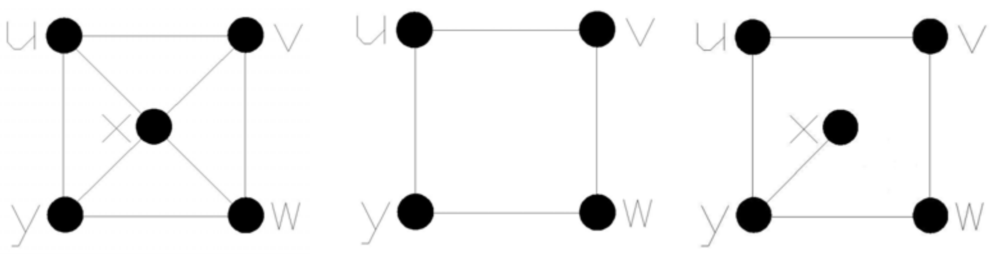
Nessa seção, apresentaremos alguns tópicos adicionais em Teoria dos Grafos, que, embora não sejam utilizados nas atividades deste trabalho, envolvem conceitos naturais. Por exemplo, identificam subestruturas de um grafo e lidam com o problema de armazenamento de um grafo como estrutura de dados.

Consideramos, portanto, que pudessem ser explorados em uma atividade envolvendo grafos no Ensino Médio, tal como em uma oficina mais extensa tratando desse assunto.

2.3.1 Subgrafo

Um subgrafo de um grafo G é o grafo H tal que V(H) $\subseteq$ V(G) e A(H) $\subseteq$A(G). Podemos representar na forma H $\subseteq$ G e dizer que G contém H. Os grafos da figura 23 (b) e (c) são subgrafos do grafo mostrado na figura 23 (a). Se G é orientado, H também precisa ser orientado e as arestas precisam ter também a mesma orientação.

G H1 H2

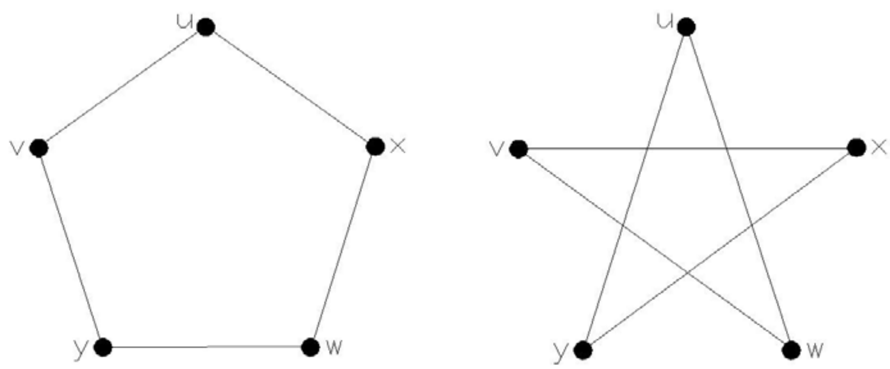



(a) (b) (c)

Figura 23 - (a) Um grafo G (b) subgrafo H1 (c) subgrafo H2.

2.3.2 Grafos complementares

Podemos dizer que dois grafos simples não orientados G e H (também denominado $\overline{G}$ ) são ditos complementares se eles tem o mesmo conjunto de vértices V, e para qualquer par de vértices distintos u, v $\in$ V, a aresta {u, v} está em G se, e somente se, ela não está em H. A figura 24a e 24b mostram um grafo G e o seu respectivo complementar $\overline{G}$ .




(a) (b)

Figura 24 – (a) Grafo G e (b) complementar $\overline{G}$

Para o caso de grafos simples orientados, vale a mesma definição, porém teremos o par ordenado (u, v) em vez de {u, v}.

### 2.3.3 Representação matricial de grafos

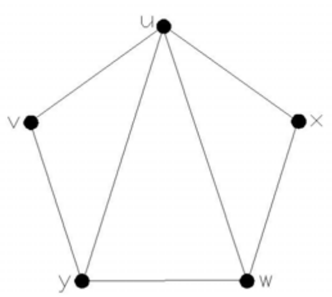
As matrizes oferecem uma boa representação dos grafos e possibilitam a introdução dos computadores para auxiliar problemas de Teoria dos Grafos. Duas maneiras de representar grafos através de matrizes são a matriz de adjacência e a matriz de incidência.

#### 2.3.3.1 Matriz de adjacência

A matriz de adjacência é uma das formas mais utilizadas para representar grafos. Seja $M = [a_{ij}]$ uma matriz n x n, onde n é o número de vértices de um grafo G = (V,A) qualquer. A matriz de adjacência M é construída da seguinte forma:

$$M_{(i,j)} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \text{ liga-se a } j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A figura 25 ilustra o conceito de matriz de adjacência para um grafo simples.




$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

Figura 25 – (a) Grafo G e (b) sua matriz de adjacência

Podemos observar que a matriz será simétrica ($M_{ij} = M_{ji}$, para quaisquer i e j).

Se as arestas de um grafo são definidas como pares de vértices, então o grafo G é completamente determinado pela lista ordenada de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i$ e pela correspondente matriz de adjacência. Assim, dada uma lista ordenada de n vértices, qualquer matriz simétrica n × n de 0’s e 1’s, com diagonal principal nula, determina um grafo não orientado com esses vértices.

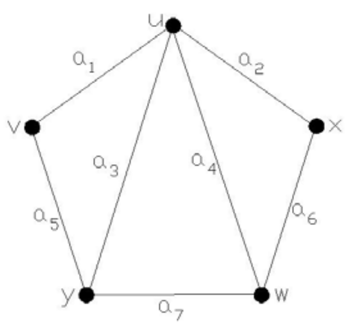
Se a definição permite arestas múltiplas, a matriz de adjacências não é mais suficiente para representar completamente o grafo. Para tal fim, podemos, entretanto usar uma matriz M onde cada elemento $M_{ij}$ é um número natural, especificamente o número de arestas com extremos $(v_i,\ v_j)$ ou $\{v_i,\ v_j\}$, conforme o caso. Porém, esta representação ainda não permite saber quais arestas ligam esses dois vértices.

2.3.3.2 Matriz de incidência

A matriz de incidência $M = [m_{ij}]$ de um grafo $G = (V,A)$, com $V = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ e $A = (a_1 a_2 \ldots a_j)$, é definida da seguinte forma:

$$M_{(i,j)} = \begin{cases} 1, \text{ se } a_i \text{ incide em } v_j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A matriz de incidência do grafo da figura 25 é dada pela figura 26.




$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

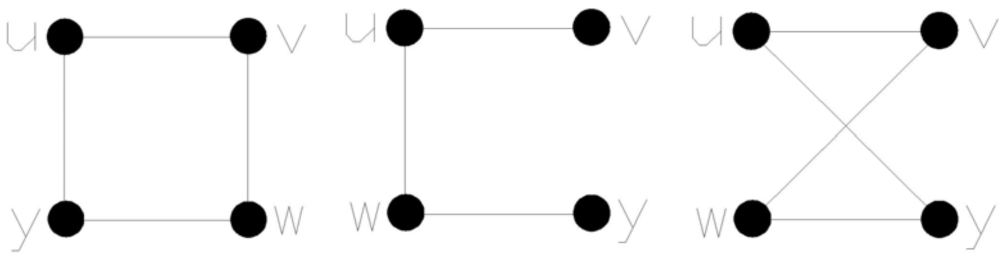
Figura 26 - (a) Grafo G e (b) sua matriz de incidência

Dadas as listas de vértices e arestas, a matriz de incidência determina completamente o grafo, mesmo quando este possui laços ou arestas paralelas, desde que seja pré-estabelecida a ordem para os vértices.

### 2.3.4 Isomorfismos de grafos

Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G e H, ou seja, $f : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que dois vértices u e v são adjacentes em G se, e somente se, f(u) e f (v) são adjacentes em H.

Dois grafos G e H são isomorfos se existir um isomorfismo entre eles, ou seja, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais. Intuitivamente, isso significa que G e H são isomorfos se são idênticos a menos dos nomes dados aos vértices. A figura 27 representa o isomorfismo entre grafos. O grafo representado na figura 27a é isomorfo ao da figura 27c, porém o grafo da figura 27b não é isomorfo a nenhum dos outros dois.

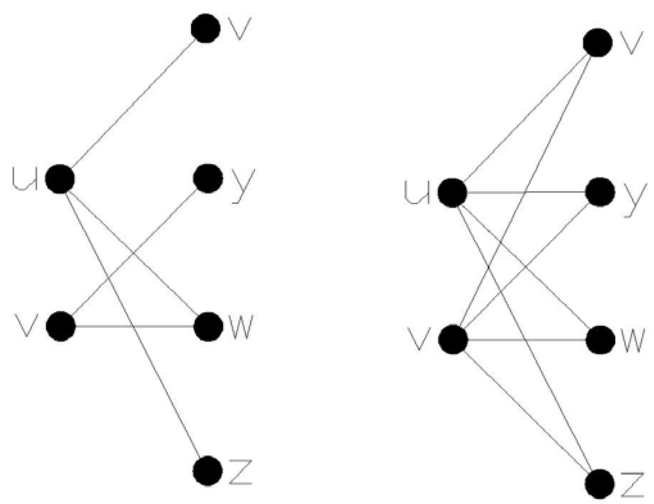



(a) (b) (c)

Figura 27 – Isomorfismo (ou não) entre grafos

### 2.3.5 Grafos bipartidos

Um grafo bipartido é aquele em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos $V_1$ e $V_2$ tais que todas as arestas têm uma terminação em $V_1$ e uma em $V_2$. A figura 28a mostra um grafo bipartido. Se todos os vértices de $V_1$ são ligados a todos os vértices de $V_2$ teremos um grafo bipartido completo, conforme mostrado na figura 28b.




(a) (b)

Figura 28 – Grafos (a) bipartido e (b) grafo bipartido completo

O grafo bipartido completo, com partições de tamanho m e n, é denominado $K_{m,n}$. O grafo da figura 28b é conhecido como $K_{2,4}$.

Nos grafos verifica-se que uma condição necessária e suficiente para que um grafo G = (V,A) tenha uma bipartição é que ele não possua ciclos de comprimento ímpar.

**Teorema 2:** Um grafo G é bipartido se e somente se não contém ciclos de comprimento ímpar.

($\Rightarrow$) Suponha G bipartido. Se G não contém ciclos então não há nada o que provar. Suponha que G tem um ciclo e que este alterna vértices de $V_1$ e $V_2$, dois subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de $V_1$ para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

($\Leftarrow$) Podemos considerar apenas grafos conexos. Seja *G* um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos $V_1$ e $V_2$, independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer *v*. O subconjunto $V_1$ será formado por todos os vértices *w* tais que exista um caminho de comprimento par entre *v* e *w*. O subconjunto $V_2$ será formado por todos os vértices *w* tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre *v* e *w*. Os conjuntos $V_1$ e $V_2$ são disjuntos, pois se *w* estivesse em $V_1$ e em $V_2$ ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando *v* a *w*. Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em *w*, produzindo alguns ciclos, conforme mostrado na figura 29. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar (é a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em *G*, contrariando a hipótese.

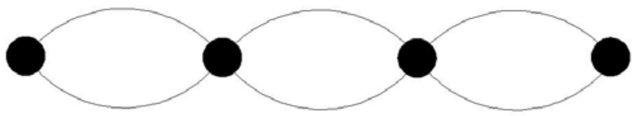


Figura 29 – Cruzamento de dois caminhos

## 3. PRÁTICA DOCENTE

O presente capítulo apresenta as atividades aplicadas aos alunos do Ensino Médio no intuito de incorporar tópicos de Teoria dos Grafos a sua aprendizagem.

### 3.1 Atividades Propostas

As atividades foram organizadas de maneira a acompanhar a origem história do problema da seguinte maneira:

Atividade 1: Introdução da Teoria dos Grafos a partir de uma perspectiva histórica, ou seja: modelagem, conceito de grafo e apresentação do problema das Pontes de Königsberg;

Atividade 2: Atividade prática em arruamento com circuito euleriano;

Atividade 3: Atividade prática em arruamento sem circuito euleriano.

1.1.1 Atividade 1

Inicialmente, começamos fazendo uma retomada histórica do surgimento da Teoria dos Grafos na Matemática.

A cidade de Königsberg (Prússia - atual Kaliningrado/Rússia) é banhada pelo rio Pregel, conforme mostrado na figura 30, que ao atravessar a cidade se ramifica formando duas ilhas que estão ligadas ao restante da cidade por sete pontes. Diz-se que os habitantes da cidade, nos dias de descanso, tentavam efetuar um percurso que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como as suas tentativas foram sempre falhas, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso.


Figura 30 - Imagem das pontes de Königsberg (a) da época dos estudos de Euler e (b) atual Kaliningrado

Propusemos aos alunos que descrevessem o problema a partir de um diagrama e que tentassem resolvê-lo.

Passado determinado período de tempo, mostramos para eles um modelo de diagrama que contemplasse essa situação, conforme mostrado na figura 31.

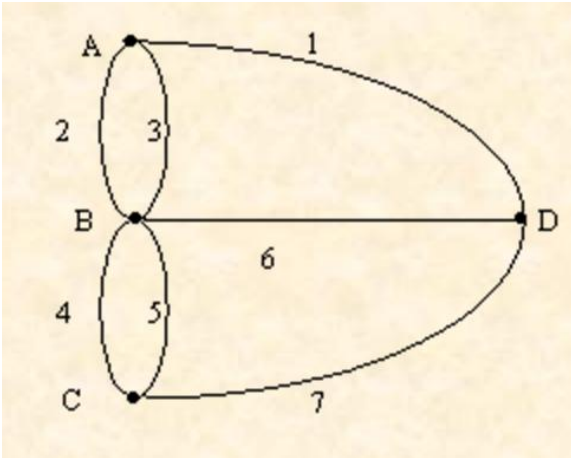



Figura 31 - Diagrama das Pontes de Königsberg

Mostramos para os alunos que A, B, C, D são pontos associados à terra, que é representada pelas duas margens e as duas ilhas. Mostramos, também, que 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são segmentos associados às sete pontes.

Desta forma, podemos enunciar o conceito de grafo como sendo um conjunto de pontos ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Os pontos são chamados de vértices e os segmentos são chamados de arestas. Comentamos, também, que o grau de um vértice é o número de arestas com extremidade neste vértice.

Mostramos para os alunos como Euler "atacou" o problema. Ele observou que cada vértice tinha um número ímpar de arestas chegando nele (3 ou 5 arestas). Assim, a primeira vez que ele chegasse a qualquer um dos vértices ímpares, somente poderia sair por um dos outros dois restantes. Porém, quando chegasse novamente nesse vértice pela terceira aresta, não haveria possibilidades de saída, a menos que uma aresta fosse retraçada.

Portanto, um vértice com um número ímpar de arestas tem de ser o primeiro ou o último do caminho, ou seja, podem haver, no máximo, dois vértices com um número ímpar de arestas.

No caso das pontes de Königsberg, existem quatro vértices com um número ímpar de arestas. Logo, esse caso não tem solução.

1.1.2 Atividade 2

Esta atividade visava observar a assimilação pelos alunos aos conceitos fundamentais de Teoria dos Grafos, ou seja, identificar as esquinas como vértices, em especial o seu respectivo grau (paridade), e nas quadras (segmentos entre dois vértices) as arestas. As dificuldades enfrentadas pelos mesmos para resolver o problema das Pontes de Königsberg e os comentários efetuados durante a realização da atividade anterior deveriam servir de embasamento para solução dessa tarefa.

Os alunos deveriam encolher um ponto de partida, percorrer todos quarteirões assinalados e voltar para o início.


Figura 32 - Aplicação da atividade 2

1.1.3 Atividade 3

Esta atividade proposta era similar a atividade anterior, porém com o acréscimo de dificuldade, pois ao analisar a figura podemos ver que ocorrem vértices com graus pares e ímpares.

Portanto, foi proposto aos alunos que eles deveriam partir na esquina “0” e percorressem todas as esquinas de “1” a “22”, de maneira que passassem somente uma vez pelas quadras entre duas esquinas e retornassem a esquina “0”.

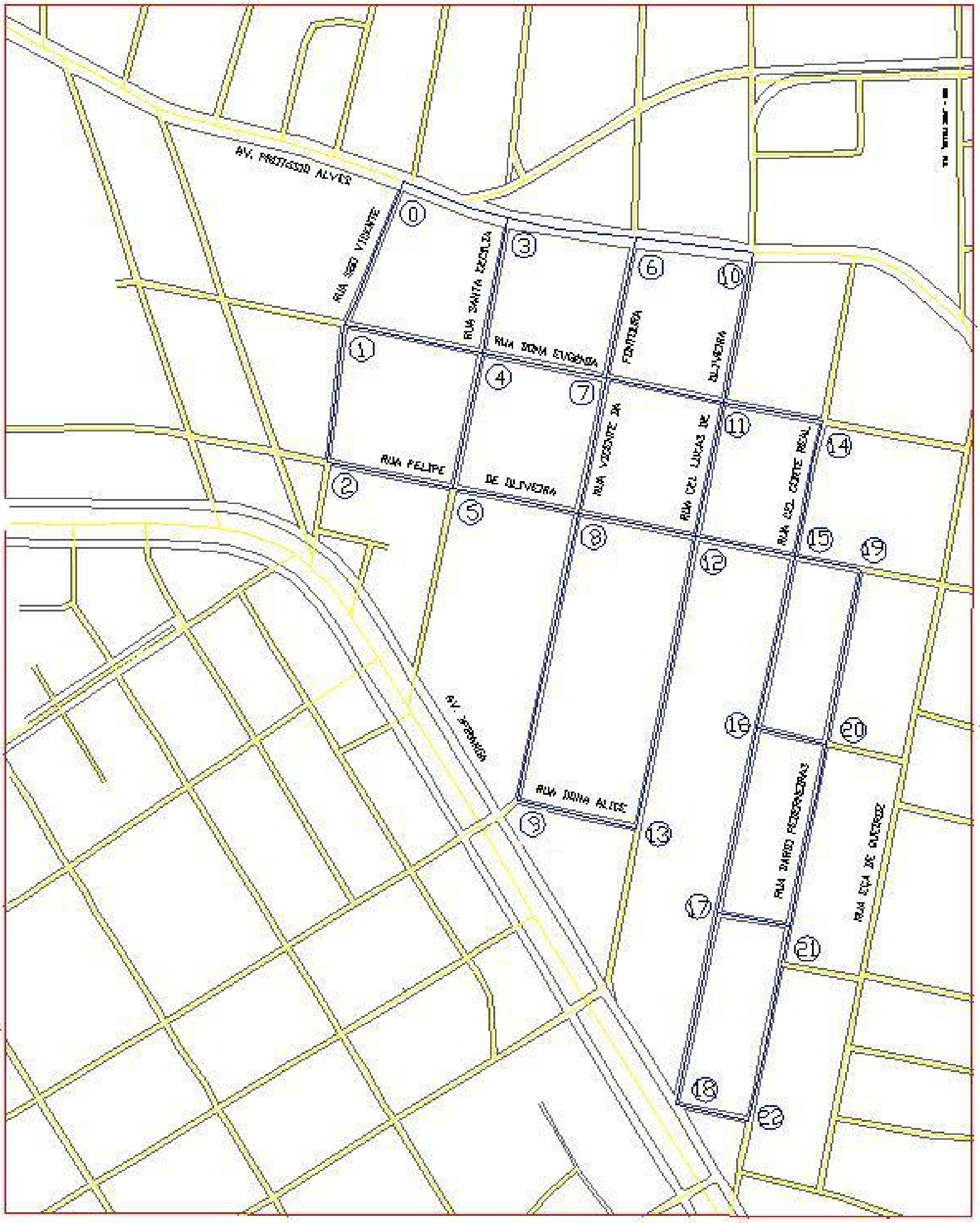



Figura 33 - Aplicação da atividade 3

## 3.2 Análise dos resultados

Apresentamos aqui os resultados obtidos na aplicação das atividades descritas na seção anterior, que foi apresentada em sete sessões para grupos diferentes de alunos da 1ª a 3ª série do Ensino Médio, turnos diurno e noturno, de uma escola da rede estadual do Rio Grande do Sul, totalizando 78 alunos.

### 3.2.1 Atividade 1

Nenhum aluno, ao ser questionado sobre alguma vez ter ouvido falar sobre a Teoria dos Grafos, respondeu positivamente. Disseram que não faziam a menor ideia sobre o que poderia ser. Alguns sugeriram que o assunto estaria relacionado a gráficos.

Após a explanação sobre o histórico das pontes de Königsberg, entreguei para eles a figura representativa das pontes e informei que eles teriam dez minutos para procurar um caminho que passasse pelas sete pontes apenas uma vez.

Decorrido o tempo, nenhum aluno conseguiu tal proeza. Questionei-os do por quê de não conseguirem e eles responderam que haviam pontes demais. Perguntei, então se poderiam representar aquela figura de uma outra maneira. Novamente, informei que teriam dez minutos para obter esta nova representação. Nenhum aluno, em todas as sete sessões de realização da atividade, conseguiu representar a figura de outra maneira.

Utilizei, então, a figura 34 para representar as sete pontes de Königsberg.

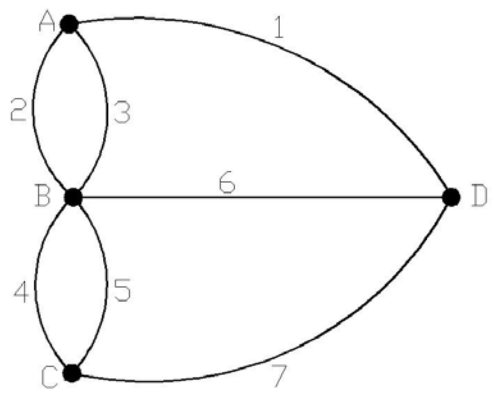



Figura 34 – Representação das pontes de Königsberg através de vértices e arestas

Conforme demonstrava a construção da figura, questionava os alunos sobre o que representava cada elemento, ou seja:

ponto A – conjunto de terras

ponto B – ilha 1

ponto C – conjunto de terras

ponto D – ilha 2

segmento 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 - sete pontes

As respostas foram praticamente unânimes e corretas, ou seja, visualizando as duas figuras, lado a lado, os alunos foram capazes de relacionar os elementos entre as figuras.

A seguir, mostrei para os alunos que quando utilizamos grafos os pontos são chamados de vértices e os segmentos de arestas. Também, mostrei para eles como identificar o grau de um vértice, isto é, que somando o número de arestas que chegam a um vértice temos o grau desse vértice.

Assim, questionei aos alunos qual seria o grau dos vértices da figura, e eles informaram, acertadamente que o:

Grau do vértice A = 3

Grau do vértice B = 5

Grau do vértice C = 3

Grau do vértice D = 3

Perguntei, então, para eles qual a relação havia entre os graus dos vértices da figura . Cerca de 30% dos alunos que participaram das atividades respondeu que todos eram ímpares. Os demais disseram não haver relação entre eles e que os graus dos vértices A, C e D eram iguais.

Entreguei, então, esta nova representação das pontes de Königsberg na forma de grafo para que os mesmos procurassem um caminho que saísse de um determinado lugar, passasse pelas sete pontes e voltasse ao início. Novamente, a resposta foi negativa. Ninguém conseguiu realizar tal proeza. Informei para eles que ninguém havia conseguido encontrar tal caminho e que foi o matemático Euler quem decifrou o problema.

Alguns alunos ficaram "desapontados" pelo fato de não haver uma solução, porém a maioria entendeu que aquela atividade era "histórica" e que havia a necessidade de ser aplicada para uma compreensão inicial de Teoria dos Grafos.

Euler usou um raciocínio muito simples. Transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história. Então percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. A razão de tal situação é que de cada ponto deve haver um número par de caminhos, pois será preciso um caminho para "entrar" e outro para "sair". Os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao final do percurso, pois estes não precisam de um para entrar e um para sair, respectivamente. Se não houver pontos com número ímpar de caminhos, pode-se (e deve-se) iniciar e terminar o trajeto no mesmo ponto, podendo esse ser qualquer ponto do grafo. Isso não é possível quando temos dois pontos com números ímpares de caminhos, sendo obrigatoriamente um o início e outro o fim.

Aproveitei a oportunidade, utilizando o grafo da figura 37, e expliquei para os alunos os conceitos de passeio, trilha, caminho, circuito e ciclo.

Mostrei, então, que como existiam quatro vértices ímpares, seria necessário passar por todas as pontes e repetir o menor número delas possível. Seria uma "eulerização" do grafo, ou seja, a implantação de arestas artificiais, que representam a parte do percurso a ser repetido, e que poderiam ser as arestas 8 e 9, conforme mostrado na figura 35.

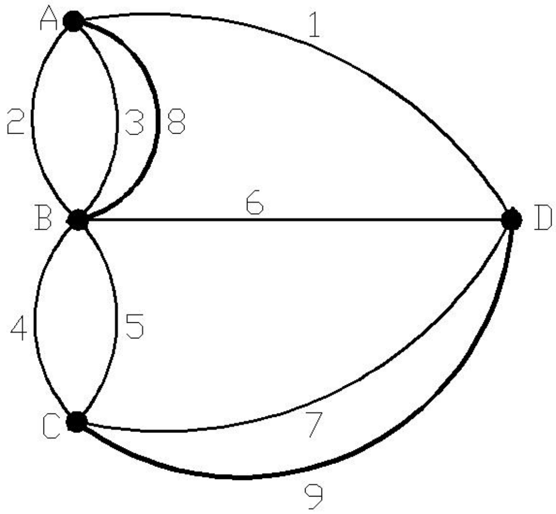



Figura 35 – Grafo das pontes de Königsberg "eulerizado"

Uma vez que o grafo foi "eulerizado" é possível encontrar um caminho euleriano. Por exemplo, podemos percorrer a seguinte rota para passear pelas pontes de Königsberg:

$$A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} D \xrightarrow{7} C \xrightarrow{9} D \xrightarrow{1} A \xrightarrow{3} B \xrightarrow{8} A,$$

repetindo apenas as arestas "3" e "7".

Comentei com os alunos que, na prática, os grafos costumam ser valorados, ou seja, cada aresta tem um custo associado. O problema, então, passa a ser encontrar não só um caminho que percorra todas as arestas, mas um caminho euleriano que seja mínimo (possua menor custo).

A atividade, então, foi concluída e os alunos começaram a "gostar" do assunto.

### 3.2.2 Atividade 2

Entreguei para os alunos um mapa com arruamento grifado dentro de uma determinada região e informei que teriam 15 minutos para realizar a atividade.

Os alunos deveriam escolher uma esquina (vértice) como ponto de partida, percorrer todos as quadra grifadas e voltar ao início.

A primeira pergunta feita pelos alunos, quando receberam a atividade 2, foi se aquele "mapa" também não tinha solução. Expliquei para eles que a resposta ao questionamento havia sido comentada na atividade anterior.

Os alunos, então, começaram a realizar a atividade. Passados cinco minutos, alguns alunos já disseram que o mapa não tinha solução, porém após a obtenção de resultados por alunos mais "ligados" no assunto, aqueles partiram em busca da solução.

Passados os quinze minutos, perguntei para eles quantos haviam conseguido realizar a tarefa. Em todas as turmas aplicadas a maioria havia conseguido. Então, perguntei para eles o que havia feito com que eles pudessem realizar o caminho. A resposta foi unânime: por "tentativa".

Expliquei para eles que bastaria ter observado os vértices e verificado que todos eram pares e, assim, concluído que o mapa poderia ser "atravessado".

Após esta informação, os alunos que não haviam conseguido avaliaram os vértices, verificaram que todos eram pares e, então, com a certeza de que havia um caminho, buscaram um dos traçados possíveis.

A atividade foi interessante, pois esperávamos que os alunos observassem todas as "esquinas" para verificar se as mesmas eram vértices pares ou ímpares e, após esta análise, procurar um caminho. Pelo contrário, os alunos ao receberem a folha saíram direto procurando um caminho.

Uma das soluções apresentadas pode ser vista na figura 36.

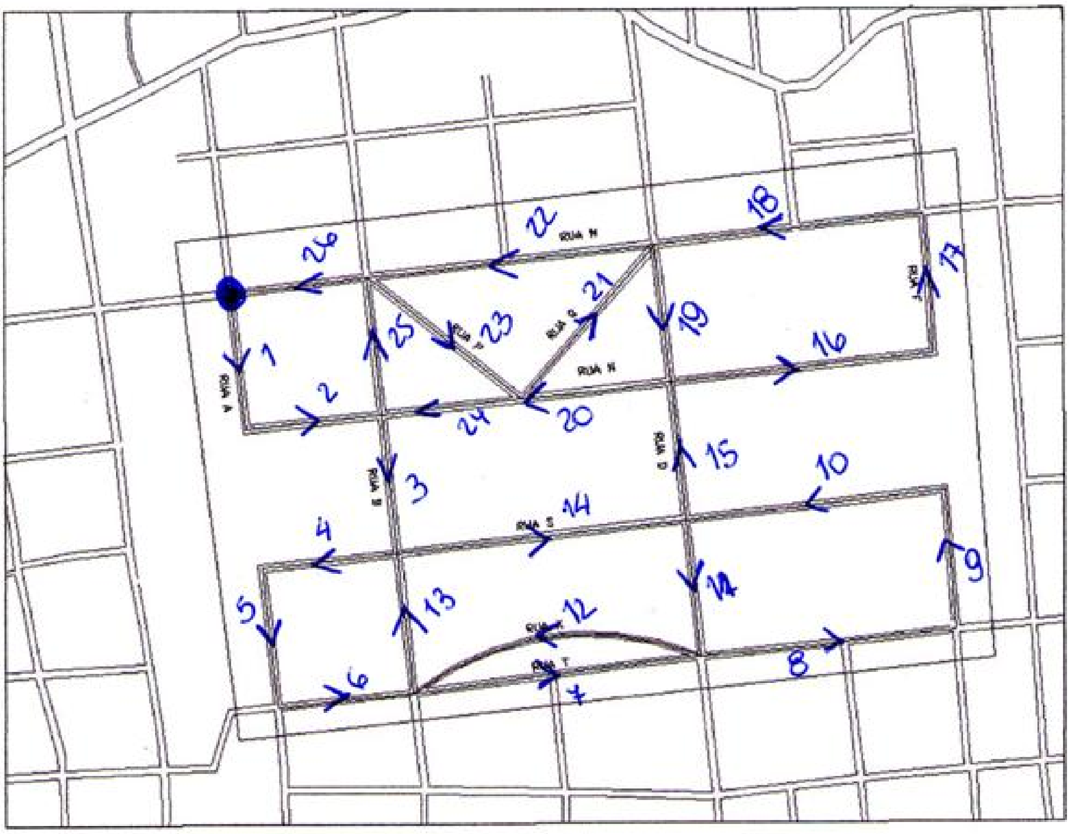


Figura 36 – Solução apresentada por aluno na realização da atividade 2

### 3.2.3 Atividade 3

A atividade estava relacionada ao seu “habitat” de estudo, ou seja, na região próxima a sua escola.

Entreguei para os alunos um mapa com arrumento grifado dentro de uma determinada região, onde estavam as esquinas estavam numeradas e a esquina com número “0” era aquela onde está localizada a escola. Informei que o caminho não necessitava ser percorrido conforme a ordem das esquinas. Foram dados, novamente, 15 minutos para realizar a atividade.

Agora, a pergunta feita pelos alunos, quando receberam a atividade 3, foi se aquele “mapa” também tinha solução conforme o mapa da atividade 2.

Novamente, expliquei para eles que a resposta ao questionamento havia sido comentada nas duas atividades anteriores.

Após o tempo estabelecido para a atividade, em todas as turmas, a totalidade dos alunos não havia conseguido encontrar um caminho.

Então, perguntei para eles de que maneira haviam tentado obter o caminho. A resposta foi unânime: por "tentativa".

Expliquei para os alunos que não conseguiriam obter êxito nas suas tentativas, pois haviam esquinas (vértices) ímpares, conforme havia sido comentado nas atividades 1 e 2.

Perguntei para os alunos se, a partir daquele comentário, poderiam me informar quantas arestas eram necessárias para tornar o grafo "eulerizado". Do total de alunos em que foram aplicadas as atividades, apenas um aluno informou que seriam necessárias "oito arestas porque as esquinas (vértices) 1, 3, 5, 6, 16, 17, 20 e 21 eram ímpares".

Avaliamos, então, todos os vértices quanto a paridade. Obtemos um total de oito vértices ímpares. Assim, seriam necessárias quatro arestas para a "eulerização" do grafo. Note que o único aluno que respondeu sobre a quantidade de arestas necessárias não se deu conta que uma aresta é formada por dois vértices.

A partir daí, começamos a procurar no mapa as melhores soluções para a colocação das arestas. Fica evidente no mapa que para tornar pares as esquinas 16, 17, 20 e 21 pares, basta acrescentarmos uma aresta entre os vértices 16 e 20 e outra entre 17 e 21, percorrendo, assim, o menor percurso. Para as esquinas 1, 3, 5 e 6, a maioria dos alunos buscou a proximidade numérica, porém os mais "ligados" buscaram o menor percurso, ou seja, criaram as arestas entre os vértices 1 e 5 e entre 3 e 6. Após esta informação, os alunos procuraram algum dos traçados possíveis.

A atividade foi interessante, pois esperávamos que os alunos, após a realização das duas atividades anteriores, observassem todas as "esquinas" para verificar se as mesmas eram vértices pares ou ímpares e, após esta análise, procurassem um caminho. Pelo contrário, novamente, os alunos ao receberem a folha saíram direto procurando um caminho.

Uma das soluções apresentadas pode ser vista na figura 39.

Após a realização da atividade 3, perguntei para os alunos se haviam ficado com alguma dúvida sobre algum conceito, que aplicados de maneira informal poderiam ter deixado alguma dúvida. Para a nossa surpresa, os alunos perguntaram se não havia mais alguma atividade, pois eles haviam gostado do assunto. Um professor solicitou que lhe fosse enviado, por e-mail, mais atividades sobre Teoria dos Grafos, que seriam aplicadas aos alunos posteriormente.

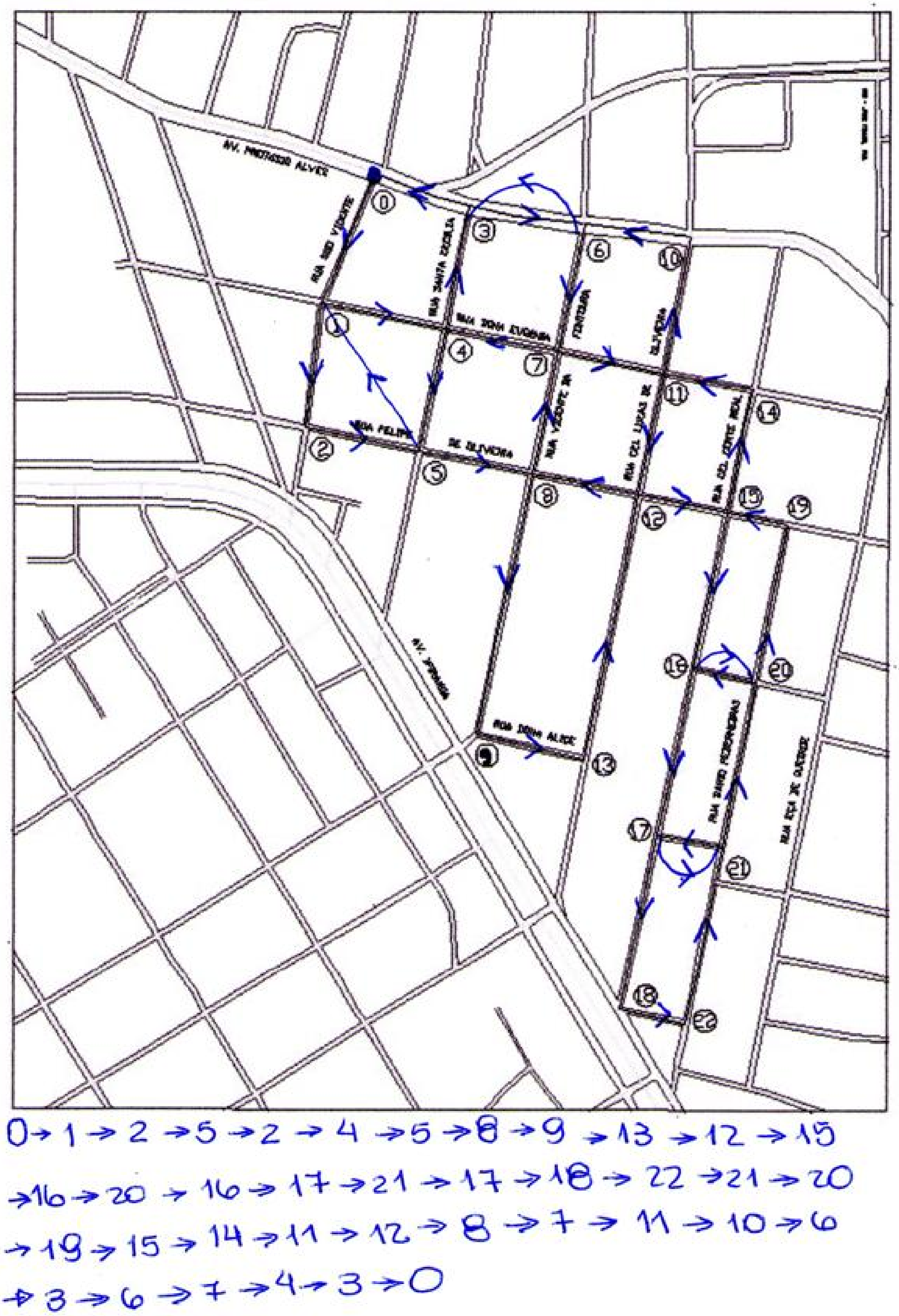



Figura 37 – Solução apresentada por aluno na realização da atividade 3

## 4. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Ao final deste trabalho, consideramos que os resultados obtidos foram satisfatórios. Os requisitos propostos foram todos cumpridos, alcançando os objetivos do trabalho que era inserir a Teoria dos Grafos no Ensino Médio e aplicar essa inserção em sala de aula. O Instituto Estadual Rio Branco, local onde foi realizada a prática contribuiu e muito para que esses objetivos fossem alcançados.

As atividades realizadas com os alunos foram organizadas de maneira que fosse despertado nos mesmos o interesse pelo assunto. O começo das atividades pelo problema histórico das sete pontes de Königsberg atraiu a atenção dos alunos para decifrar um enigma semelhante aos que eles demonstraram realizar com certa freqüência, que é sair de um determinado lugar e chegar em outro sem levantar o lápis e sem passar pelo mesmo local.

A introdução de uma atividade em que o trajeto fosse resolvido de uma maneira relativamente simples, ou seja, a aplicação direta de um circuito euleriano, incentivou ainda mais os alunos para a realização da terceira atividade. Foi proposto aos alunos uma situação real que era proposto passear pelo bairro onde estudam, ou seja, sair da escola em que estudam, passar por esquinas determinadas e retornar para a escola.

A prática aplicada por MALTA foi realizada em uma escola particular em duas turmas regulares de segunda série do Ensino Médio no ano de 2006, onde "os alunos estão familiarizados com um trabalho desafiador e aceitam com naturalidade propostas diferenciadas" (2008, p.60). Diferentemente, a nossa prática foi aplicada em uma escola estadual, cujos alunos são oriundos da periferia urbana de Porto Alegre, e que eram convidados a participar de uma oficina sobre conteúdos que não eram abordados no currículo do Ensino Médio. Aqueles alunos que vieram para as oficinas estavam realmente interessados aprender "algo mais". A escola, seja pelo seu corpo diretivo seja pelos professores, sempre nos apoiou colocando o laboratório de Matemática a disposição e incentivando a participação dos alunos.

As nossas atividades têm algo em comum com as aulas 1, 2 e 3 realizadas por MALTA. Nenhum dos nossos alunos conseguiu chegar a conclusão de que o fato de não ser possível encontrar um caminho euleriano pelas Pontes de Königsberg era devido ao fato de todos os vértices serem ímpares, ao contrário dos alunos de MALTA que, na aula 1, conseguiram chegar a conclusão que devido a existência do número ímpar de pontes seria impossível realizar tal passeio.

Os nossos alunos compreenderam bem os conceitos fundamentais de grafos, tais como: vértice (identificação e grau), aresta, passeio, trilha, caminho, circuito e ciclo, conforme também relatou MALTA. Porém, eles não adquiriram a "competência" de que ao resolver a atividade deveriam, inicialmente, verificar a paridade dos vértices, ao invés de, "por tentativas", procurar um caminho euleriano aleatório.

Talvez os motivos para os alunos não terem aplicado a teoria seja:

- que a atividade é diferente daquelas a que estão acostumados, onde há uma sequência de procedimentos a serem "imitados";
- a dificuldade em aplicar um resultado geral abstrato a instâncias particulares, ou seja, teoria separada da prática.

Isso se confirma pelo fato de que os alunos, ao receberem a atividade 3, similar à anterior, novamente não avaliaram o grau dos vértices. Nas duas ocasiões, atividades 2 e 3, somente quando alertados sobre tal procedimento é que os alunos conseguiram completar a atividade.

A Teoria dos Grafos é essencial para a resolução de problemas, desde os mais simples aos mais elaborados. São problemas que justificam a atenção devido ao fato de que aparecem em diversas aplicações e serem considerados de difícil solução. Os grafos são uma fonte inesgotável de problemas com enunciado simples, mas que "escondem", na maioria dos casos, uma sofisticada estrutura matemática.

O ensino de Teoria dos Grafos oferece uma excelente oportunidade de contribuir para um ensino que coopere para a articulação da Matemática estudada no Ensino Médio com temas atuais da ciência e da tecnologia. Concordo com MALTA quando afirma que "Teoria dos Grafos é um assunto que pode ser inserido no Ensino Médio. É preciso incluir no Currículo atual uma Matemática com tópicos como este que são aplicados no dia a dia da sociedade atual bem como apresentar aos alunos uma Matemática dinâmica, no sentido de ainda estar sendo pesquisada" (2008, p. 94).

Conforme recomendado pelo MEC, utilizando Matemática para entender a tecnologia estamos apontando para a Matemática que precisa ser ensinada para quem tem que lidar com os procedimentos algorítmicos. É com base nessa recomendação que entendemos que seja necessária a implementação deste tema, ainda desconhecido pela maioria dos alunos. Esperamos, assim, dar uma pequena contribuição ao conhecimento, ensino e aprendizagem de tópicos de grafos no Ensino Médio.

Esperamos, também, que os resultados das atividades aqui realizadas apontem para a possibilidade, importância, relevância, e potencialidade desse assunto no Ensino Médio.

Este trabalho tem um caráter introdutório, apesar do enfoque formativo. Estamos certos de que os assuntos da Teoria dos Grafos, aqui tratados e aplicados, provavelmente, não permitirão resolver um problema real de roteamento ou de transporte, porém permitirão que seja entendido os princípios básicos que um profissional da área utilizaria na resolução do problema real.

Temos, portanto, no ensino de grafos, mais uma oportunidade de contribuir para um ensino de Matemática que seja experimental, contextualizado, atual e relevante para o século XXI.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOAVENTURA NETTO, P. O. Teoria e modelos de grafos. São Paulo: E. Blücher, 1979.

BRASIL. Ministério da Educação. *Lei nº 9.394/96* – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Art.35. 1996.

______. ______. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

DIESTEL, R. Graph theory. New York: Springer-Verlag, 1997.

LIPSCHUTZ, S., LIPSON, M. Matemática discreta. São Paulo: E. Bookman, 2004.

LUCCHESI, C. L., *Introdução à Teoria dos Grafos*, XII Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1979

MALTA, Gláucia H. S. “Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível”. 2008. 154 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. UFRGS. Porto Alegre, 2008.

SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., MURARI, I. T. C. Introdução à análise Combinatória. Rio de Janeiro: E. Ciência Moderna, 2007.

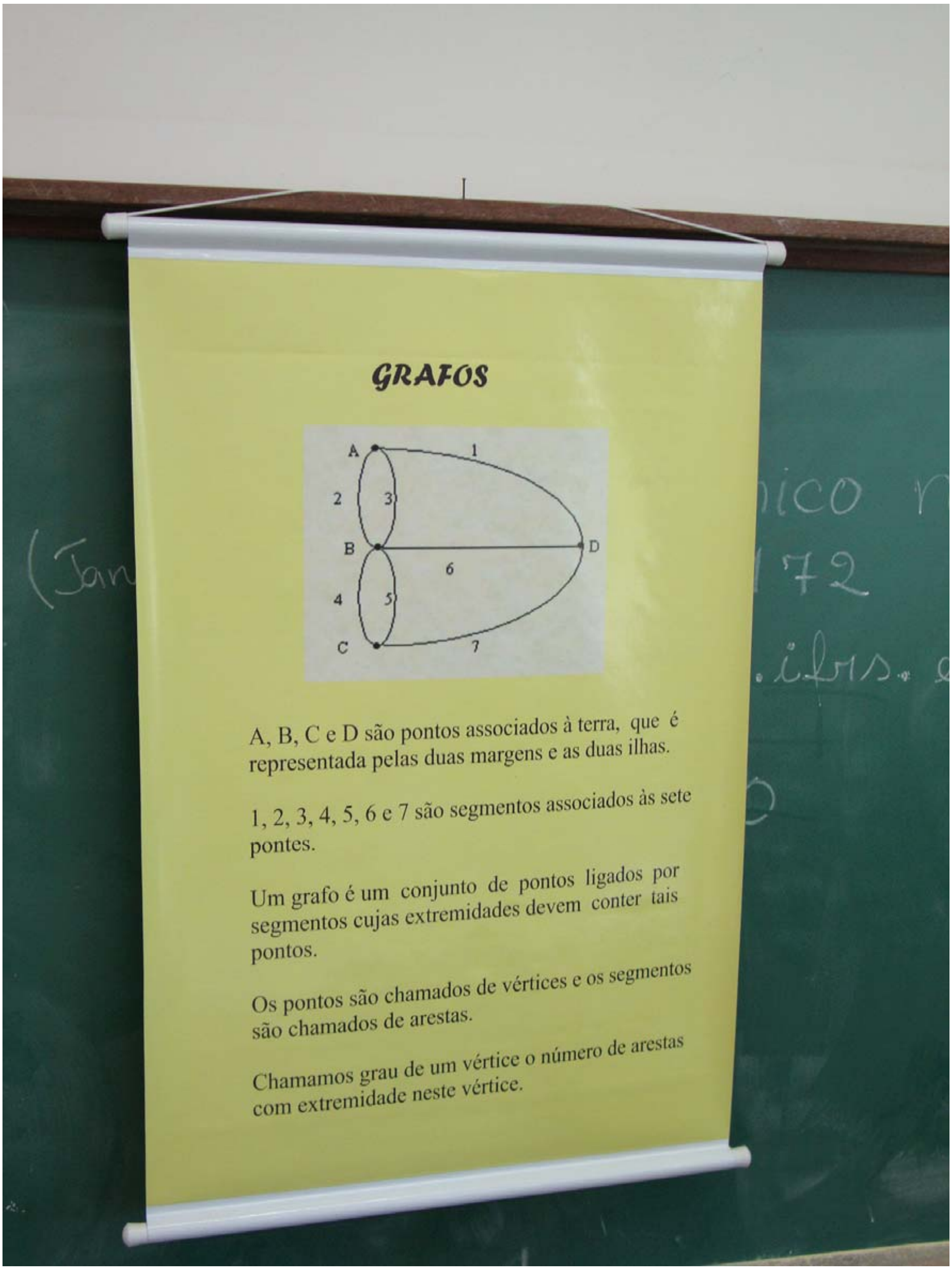
WEST, D. Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001

## ANEXO A

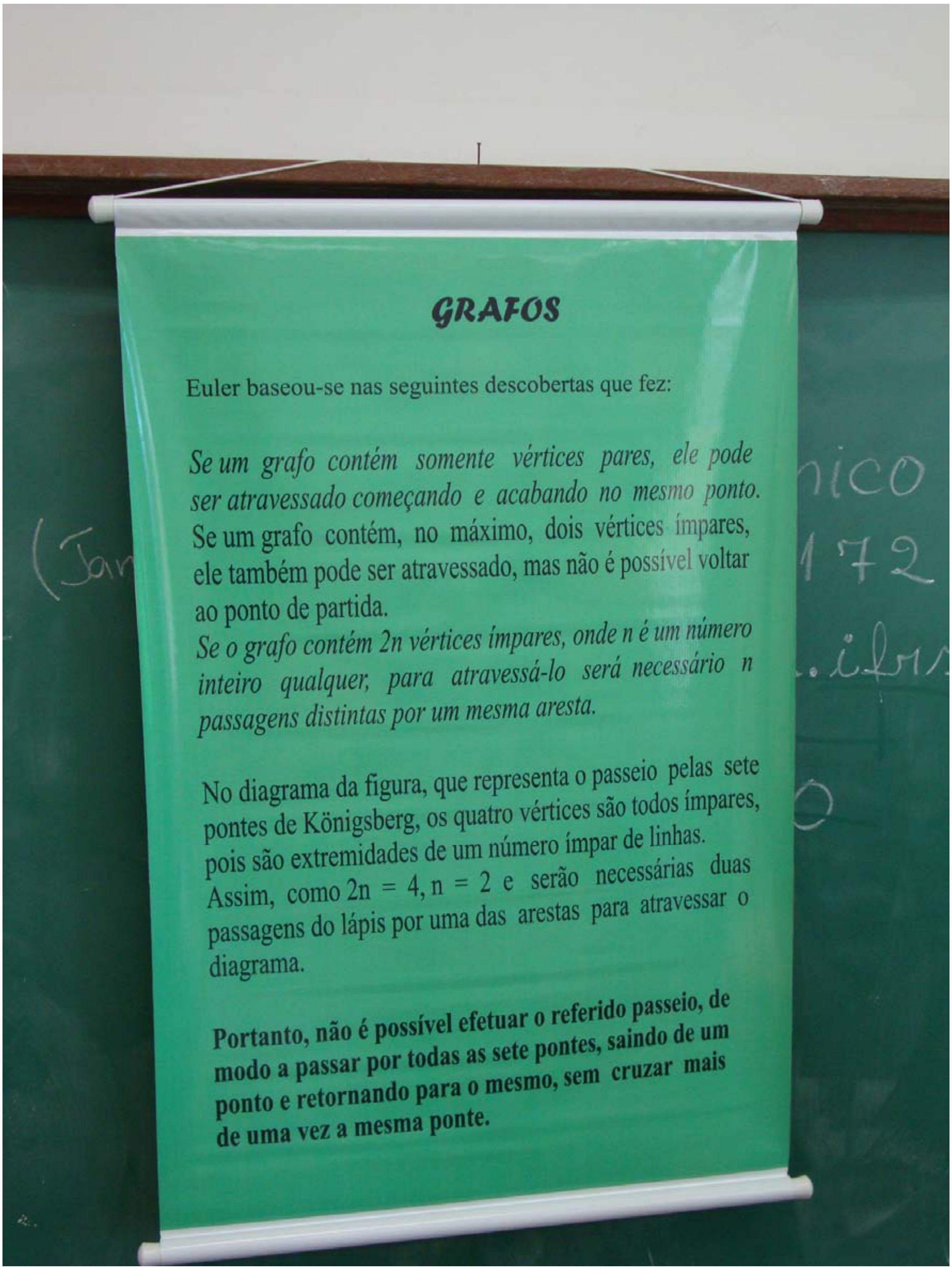
Pôsteres utilizados na prática em sala de aula

a) Pôster 1

b) Pôster 2

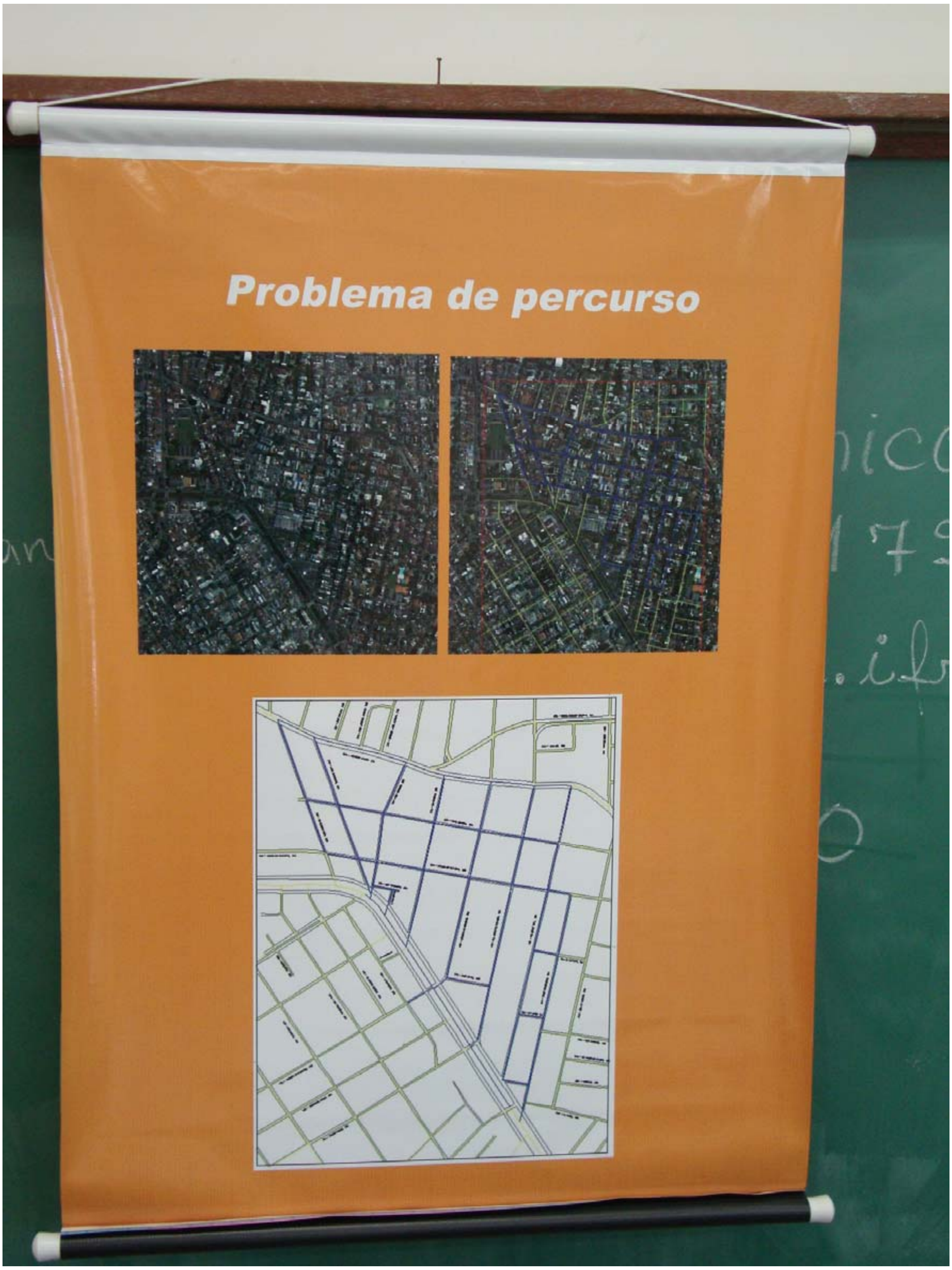

GRAFOS
A
1
2
3
B
D
6
4
5
C
7
A, B, C e D são pontos associados à terra, que é representada pelas duas margens e as duas ilhas.
1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são segmentos associados às sete pontes.
Um grafo é um conjunto de pontos ligados por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos.
Os pontos são chamados de vértices e os segmentos são chamados de arestas.
Chamamos grau de um vértice o número de arestas com extremidade neste vértice.

c) Pôster 3


GRAFOS
Euler baseou-se nas seguintes descobertas que fez:
Se um grafo contém somente vértices pares, ele pode ser atravessado começando e acabando no mesmo ponto.
Se um grafo contém, no máximo, dois vértices ímpares, ele também pode ser atravessado, mas não é possível voltar ao ponto de partida.
Se o grafo contém 2n vértices ímpares, onde n é um número inteiro qualquer, para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por um mesma aresta.
No diagrama da figura, que representa o passeio pelas sete pontes de Königsberg, os quatro vértices são todos ímpares, pois são extremidades de um número ímpar de linhas.
Assim, como 2n = 4, n = 2 e serão necessárias duas passagens do lápis por uma das arestas para atravessar o diagrama.
Portanto, não é possível efetuar o referido passeio, de modo a passar por todas as sete pontes, saindo de um ponto e retornando para o mesmo, sem cruzar mais de uma vez a mesma ponte.

d) Pôster 4

e) Pôster 5



f) Pôster 6