

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Controle de caos em uma
cadeia trófica de três espécies,
descrita através do modelo de
Hastings e Powell**

por

Evandro Manica

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale
Orientadora

Porto Alegre, Março de 2000.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Manica, Evandro

Controle de caos em uma cadeia trófica de três espécies, descrita através do modelo de Hastings e Powell / Evandro Manica.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2000.

195 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2000.

Orientadora: Varriale, Maria Cristina

Dissertação: Matemática Aplicada

Controle de caos, Cadeia alimentar, Modelos predador-presa

Controle de caos em uma cadeia trófica de três espécies, descrita através do modelo de Hastings e Powell

por

Evandro Manica

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade
Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção
do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Sistemas não lineares e ecologia

Orientadora: Profa. Dra. Maria Cristina Varriale

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana
IF/UFPR

Prof. Thomas Braun, Ph.D.
IF/UFRGS

Prof. Jacques Aveline Loureiro da Silva, Ph.D.
PPGMAp/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
31 de Março de 2000.

Prof. Rudnei Dias da Cunha, D. Phil.
Coordenador

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer a algumas das inúmeras pessoas que tornaram possível a realização deste trabalho:

- À Profa. Maria Cristina Varriale, por sua orientação;
- Ao Prof. Fernando Lang da Silveira, pela ajuda com o software SPSS;
- Ao Prof. Rudnei Dias da Cunha, pela sempre disponibilidade em ajudar a resolver problemas referentes à implementação;
- Aos meus amigos e colegas, pelo incentivo e ajuda durante a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	6
LISTA DE TABELAS	12
RESUMO	13
ABSTRACT	14
1 INTRODUÇÃO	15
2 MODELOS DISCRETOS	22
2.1 Mapas Unidimensionais	22
2.1.1 Ponto fixo e órbita periódica de um mapa unidimensional	23
2.1.2 Estabilidade de um ponto fixo - método analítico	24
2.1.3 Estabilidade de um ponto fixo - método gráfico	27
2.1.4 Bifurcação em um mapa unidimensional	31
2.2 Mapas Bidimensionais	35
2.3 Mapa de Poincaré ou de Primeiro Retorno	37
3 MODELOS CONTÍNUOS PARA POPULAÇÕES	41
3.1 Modelos de crescimento contínuo para uma única espécie	41
3.1.1 Modelo de Malthus	42
3.1.2 Modelo de Verhulst	42
3.1.3 Determinação das soluções estacionárias	44
3.2 Modelos de crescimento contínuo para duas espécies interagentes	46
3.2.1 Modelos presa-predador de Lotka-Volterra	48
3.2.2 Ciclo limite - Teorema de Poincaré-Bendixson	53
3.2.3 Modelos presa-predador mais realísticos	54
3.3 O modelo de Hastings e Powell para três espécies interagentes	61

4	CAOS: CARACTERIZAÇÃO E CONTROLE	64
4.1	Sensibilidade às condições iniciais	64
4.2	Expoentes de Lyapunov	66
4.3	Rotas para o caos	69
4.4	O método <i>OGY</i> para controle de caos	72
4.4.1	Forma geral do mapa bidimensional sobre a seção de Poincaré	76
4.4.2	Linearização do mapa bidimensional em torno do ponto fixo instável	76
4.4.3	Cálculo das direções estável e instável e vetores base contravariantes	77
4.4.4	Determinação do deslocamento horizontal do ponto fixo quando mudamos o valor do parâmetro b	79
4.4.5	Cálculo do ajuste adequado para o parâmetro b	80
4.4.6	Aplicação do método <i>OGY</i>	81
4.4.7	Método <i>OGY</i> - Caso unidimensional	84
4.4.8	Método <i>OGY</i> para órbitas de período mais alto	89
5	CARACTERIZAÇÃO DE ATRADORES DO MODELO DE HASTINGS E POWELL	90
5.1	Versão adimensional do modelo	90
5.2	Estados estacionários e análise de estabilidade linear	93
5.3	O método de integração numérica	102
5.4	Cálculo dos expoentes de Lyapunov	107
5.5	Visualização de alguns atradores	112
5.6	O atrator caótico sobre o qual efetuaremos o controle	121
6	APLICAÇÃO DO MÉTODO OGY	123
6.1	Identificação de algumas das órbitas periódicas instáveis	123
6.1.1	Seção de Poincaré	124
6.1.2	Mapa de Primeiro retorno e determinação dos pontos fixos instáveis	126

6.1.3	Órbitas periódicas instáveis \times pontos fixos instáveis	130
6.2	Estabilização da órbita correspondente ao par de pontos $1a-1f$ sobre a seção de Poincaré	136
6.2.1	Linearização do mapa sobre a seção de Poincaré, próximo ao ponto fixo $1a$	137
6.2.2	Cálculo da razão deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro, próximo ao ponto fixo $1a$	140
6.2.3	Aplicação do controle para o ponto fixo $1a$	147
6.3	Estabilização da órbita correspondente ao par de pontos $3a-3f$ sobre a seção de Poincaré	153
6.3.1	Linearização do mapa sobre a seção de Poincaré próximo ao ponto fixo $3a$	153
6.3.2	Cálculo da razão deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro, próximo ao ponto fixo $3a$	155
6.3.3	Aplicação do controle para o ponto fixo $3a$	159
6.4	Aplicação do controle para os dois pontos fixos seqüencialmente	164
7	CONCLUSÃO	169
7.1	Principais resultados	169
7.2	Dificuldades na aplicação do método	170
7.3	Trabalhos Futuros	172
APÊNDICE A	TEOREMA DO VALOR MÉDIO	173
APÊNDICE B	ESTABILIDADE DE LYAPUNOV E ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE UMA ÓRBITA PERIÓDICA	177
APÊNDICE C	ANÁLISE NO PLANO DE FASE PARA UM SISTEMA BIDIMENSIONAL	179
APÊNDICE D	CONDIÇÕES DE ROUTH-HURWITZ	186
APÊNDICE E	MÍNIMOS QUADRADOS	188

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 191

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 0.8x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$	28
Figura 2.2	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 1.5x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$	28
Figura 2.3	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 0.8x_i(1 - x_i)$	29
Figura 2.4	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 1.5x_i(1 - x_i)$	29
Figura 2.5	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 2.8x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$	30
Figura 2.6	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 2.8x_i(1 - x_i)$	30
Figura 2.7	Gráfico $x^* \times p$ para o mapa $x_{i+1} = px_i(1 - x_i)$, indicando a estabilidade de $x^* = 0$ para $0 \leq p < 1$ e de $x^* = \frac{p-1}{p}$, para $1 < p < 3$	31
Figura 2.8	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.2x_i(1 - x_i)$	32
Figura 2.9	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.2x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$	32
Figura 2.10	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.45x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$	33
Figura 2.11	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.45x_i(1 - x_i)$	34
Figura 2.12	(a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.65x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$	34
Figura 2.13	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1 - x_i)$	35
Figura 2.14	No espaço de fase, seção de Poincaré de trajetória do tipo ciclo limite para um sistema dinâmico tridimensional (Ferrara, 1994)	40
Figura 3.1	Gráfico da solução da equação (3.5) para diferentes valores de N_0 . (a) $0 < N_0 < \frac{K}{2}$; (b) $\frac{K}{2} < N_0 < K$; (c) $N_0 = K$; (d) $N_0 > K$	43
Figura 3.2	Gráfico de $F(N) \times N$, para o Modelo de Verhulst: $\frac{dN}{dt} = F(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$	44
Figura 3.3	Trajetoárias no plano de fase uv , resultantes do modelo de Lotka-Volterra	50
Figura 3.4	Gráfico de um ciclo limite no plano de fase NP	54
Figura 3.5	Gráfico da resposta funcional tipo I para o modelo de Lotka-Volterra, $R(N) = b$	56
Figura 3.6	Gráfico da resposta funcional tipo II, $R(N) = \frac{A}{N+B}$	57
Figura 3.7	Gráfico da resposta funcional tipo II, $R(N) = A \frac{[1 - e^{-aN}]}{N}$	57

Figura 3.8	Gráfico da resposta funcional tipo <i>III</i> , $R(N) = \frac{AN}{N^2+B^2}$	58
Figura 3.9	Gráfico da resposta do predador $NR(N) = bN$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo <i>I</i> apresentada na figura 3.5	58
Figura 3.10	Gráfico da resposta do predador $NR(N) = \frac{AN}{N+B}$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo <i>II</i> mostrada na figura 3.6	59
Figura 3.11	Gráfico da resposta do predador $NR(N) = A [1 - e^{-aN}]$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo <i>II</i> mostrada na figura 3.7	59
Figura 3.12	Gráfico da resposta do predador $NR(N) = \frac{AN^2}{N^2+B^2}$ à densidade de presas, para a resposta funcional tipo <i>III</i> mostrada na figura 3.8	60
Figura 4.1	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1 - x_i)$, iniciando com a condição inicial $x_0 = 0.3$	65
Figura 4.2	Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1 - x_i)$, iniciando com a condição inicial $x_0 = 0.305$	66
Figura 4.3	Gráfico $x_\infty \times p$ para a equação logística $x_{i+1} = px_i(1 - x_i)$; x_∞ representa o valor assintótico de x_i	71
Figura 4.4	Gráfico dos vetores \mathbf{e}_u e \mathbf{e}_s tangentes, em \mathbf{u}_F , às variedades instável e estável, respectivamente, juntamente com seus respectivos vetores base contravariantes \mathbf{f}_u e \mathbf{f}_s	79
Figura 4.5	Representação esquemática do método <i>OGY</i> , onde $u_F(b)$ é o ponto fixo instável que se deseja estabilizar.	83
Figura 4.6	Forma linear do mapa $x_{i+1} \times x_i$ em torno do ponto fixo instável (a) para $b = b_0$ (1); (b) para $b = b_0$ (pontilhada (1)) e $b = b_0 + \Delta b$ (linha cheia (2))	88
Figura 5.1	As curvas $x[+]$ e $x[-]$ representam, respectivamente, as soluções $x_+^*(b_1)$ e $x_-^*(b_1)$, da equação algébrica (5.22).	96
Figura 5.2	Gráfico $z_+^* = \frac{125x_+^*}{2(1+b_1x_+^*)} - 5$, onde x_+^* é dado em (5.24) em função de b_1	97
Figura 5.3	Expoente de Lyapunov λ_1 em função do parâmetro b_1	110
Figura 5.4	Expoente de Lyapunov λ_2 em função do parâmetro b_1	111
Figura 5.5	Expoente de Lyapunov λ_3 em função do parâmetro b_1	112
Figura 5.6	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.13$	114

Figura 5.7	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.30$	114
Figura 5.8	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.39$	115
Figura 5.9	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.46$	115
Figura 5.10	Gráfico $x \times t$ para $b_1 = 2.13$	116
Figura 5.11	Gráfico $y \times t$ para $b_1 = 2.13$	116
Figura 5.12	Gráfico $z \times t$ para $b_1 = 2.13$	117
Figura 5.13	Gráfico $x \times t$ para $b_1 = 2.46$	117
Figura 5.14	Gráfico $y \times t$ para $b_1 = 2.46$	118
Figura 5.15	Gráfico $z \times t$ para $b_1 = 2.46$	118
Figura 5.16	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.463$	119
Figura 5.17	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.51$	119
Figura 5.18	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$	120
Figura 5.19	O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.879$	120
Figura 5.20	Projeção xy do do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$. . .	121
Figura 5.21	Projeção xz do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$	121
Figura 5.22	Projeção yz do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$	122
Figura 6.1	Pontos (x_i, y_i) que constituem a seção de Poincaré na região “fora da alça” para $b_1 = 2.75$	125
Figura 6.2	Pontos (x_i, y_i) que constituem a seção de Poincaré na região da “alça” para $b_1 = 2.75$	126
Figura 6.3	Mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ para $b_1 = 2.75$ na alça . . .	128
Figura 6.4	Mapa de primeiro retorno $y_{i+1} \times y_i$ para $b_1 = 2.75$ na alça . . .	128
Figura 6.5	Mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ para $b_1 = 2.75$ na região fora da alça	129
Figura 6.6	Mapa de primeiro retorno $y_{i+1} \times y_i$ para $b_1 = 2.75$ na região fora da alça	129
Figura 6.7	Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável 1a . .	131
Figura 6.8	Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável 2a . .	131

Figura 6.9	Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável $3a$. . .	132
Figura 6.10	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $1a$	133
Figura 6.11	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $1f$	133
Figura 6.12	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $2a$	134
Figura 6.13	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $2f$	134
Figura 6.14	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $3a$	135
Figura 6.15	Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $3f$	135
Figura 6.16	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.75$, próximos ao ponto fixo $1a$	140
Figura 6.17	Deslocamento do mapa quando variamos o parâmetro, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, mapa de primeiro retorno para $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$	141
Figura 6.18	Ampliação da figura 6.17 na região próxima ao ponto fixo $1a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, os mapas correspondem a $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$	142
Figura 6.19	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.746$, próximos ao ponto fixo $1a$	143
Figura 6.20	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.754$, próximos ao ponto fixo $1a$	144
Figura 6.21	Ampliação das retas das figuras 6.16, 6.19 e 6.20 próximo ao ponto fixo $1a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita: $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$	144
Figura 6.22	Gráfico $x_i \times t$ sobre a seção de Poincaré mostrando o controle do ponto fixo $1a$	149
Figura 6.23	Gráfico $y_i \times t$ sobre a seção de Poincaré mostrando o controle do ponto fixo $1a$	149
Figura 6.24	Gráfico $x \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$. . .	150

Figura 6.25	Gráfico $y \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$. . .	150
Figura 6.26	Gráfico $z \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$. . .	151
Figura 6.27	Gráfico, no espaço de fase, da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$	151
Figura 6.28	Projeção no plano xy da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$	152
Figura 6.29	Projeção no plano xz da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$	152
Figura 6.30	Projeção no plano yz da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$	153
Figura 6.31	Ampliação da figura 6.17 em torno do ponto fixo $3a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, os mapas correspondem a $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$	154
Figura 6.32	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.75$, próximos ao ponto fixo $3a$	155
Figura 6.33	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.746$, próximos ao ponto fixo $3a$	156
Figura 6.34	Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.754$, próximos ao ponto fixo $3a$	157
Figura 6.35	Ampliação das retas mostradas nas figuras 6.32, 6.33 e 6.34 próximo aos respectivos pontos fixos, juntamente com a reta $y = x$. (a) $b_1 = 2.754$, (b) $b_1 = 2.75$, (c) $b_1 = 2.746$	157
Figura 6.36	Gráfico $x_i \times t$ sobre a seção de Poincaré na região onde foi aplicado o controle para o ponto fixo $3a$	159
Figura 6.37	Gráfico $y_i \times t$ sobre a seção de Poincaré na região onde foi aplicado o controle para o ponto fixo $3a$	160
Figura 6.38	Gráfico $x \times t$ mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$. . .	161
Figura 6.39	Gráfico $y \times t$ mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$. . .	161
Figura 6.40	Gráfico $z \times t$, mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$. . .	162

Figura 6.41	Gráfico no espaço de fase do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$	162
Figura 6.42	Projeção no plano xy do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$	163
Figura 6.43	Projeção no plano xz do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$	163
Figura 6.44	Projeção no plano yz do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$	164
Figura 6.45	Controle para os pontos fixos $3a$ e $1a$ seqüencialmente	165
Figura 6.46	Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de entrarmos na região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$	166
Figura 6.47	Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de sairmos da região em que o ponto fixo $3a$ estava controlado	167
Figura 6.48	Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de entrarmos na região de aplicação do controle do ponto fixo $1a$	168
Figura 6.49	Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de sairmos da região em que o ponto fixo $1a$ estava controlado	168
Figura C.1	Singularidade <i>nó</i> tipo I - <i>estável</i>	183
Figura C.2	Singularidade tipo <i>Ponto de Sela</i>	183
Figura C.3	Singularidade tipo <i>Espiral estável</i>	184
Figura C.4	Singularidade tipo <i>centro</i>	184
Figura C.5	Singularidade <i>nó</i> tipo II - <i>instável</i>	185
Figura C.6	Singularidade tipo <i>estrela</i>	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Valores dos parâmetros propostos por Hastings e Powell(1991) .	92
Tabela 5.2	Pontos de equilíbrio genéricos da equação (5.11)	95
Tabela 5.3	Tabela dos pontos fixos para $b_1 = 2$	100
Tabela 5.4	Tabela dos pontos fixos para 8 valores distintos de b_1 entre 2.113 e 2.51	101
Tabela 5.5	Tabela dos pontos fixos para $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.879$	102

RESUMO

Fizemos o controle de caos determinístico num modelo de ecossistema, recentemente proposto por Hastings e Powell, descrevendo o comportamento dinâmico de uma cadeia alimentar de três espécies. Este modelo ecológico é um sistema dinâmico tridimensional, envolvendo três equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem com um parâmetro de controle.

Calculamos os expoentes de Lyapunov para os atratores do sistema, quando se varia o parâmetro do sistema. Observamos que, dependendo do valor assumido por este parâmetro de controle, o comportamento dinâmico do ecossistema pode evoluir para diferentes atratores, tais como um ponto de equilíbrio estável, ou um ciclo limite estável, ou um atrator caótico.

Se, por um lado, a imprevisibilidade a longo alcance associada com o caos pode ser indesejável em tal contexto, por outro lado, a possibilidade de usar o método *Ott-Grebogi-Yorke* (OGY) de controle de caos evidencia que, a presença de caos pode, na verdade, ser vantajosa, pois podemos escolher qualquer uma, de um grande número de órbitas para estabilizar. Para testar como o modelo de Hastings e Powell responde à estratégia de controle OGY, tentamos aplicar esta técnica para o controle de um dos atratores caóticos previamente observados.

Assim, depois de reconhecer um valor do parâmetro do sistema que está relacionado a um atrator caótico, localizamos as órbitas de sela periódicas imersas nele. A seguir, exploramos as órbitas periódicas instáveis já existentes em nosso atrator caótico e, fazendo pequenas perturbações dependentes do tempo no parâmetro do sistema, estabilizamos duas órbitas periódicas distintas. Além disso, verificamos a flexibilidade da aplicação do método OGY de controle, permitindo alterar o comportamento dinâmico do sistema de órbitas periódicas diferentes.

ABSTRACT

We have achieved control of deterministic chaos in an ecosystem model, recently proposed by Hastings & Powell, describing the dynamical behavior of a three-species food chain. This ecological model is a three-dimensional dissipative dynamical system involving three first-order nonlinear differential equations with a control parameter.

We evaluate the Lyapunov exponents for the attractors of the system, as the system parameter is varied. So we observe that, depending on the value assumed by this control parameter, the dynamical behavior of the ecosystem can evolve to many different attractors, such as stable focus, or a stable limit cycle, or a chaotic attractor.

At first sight, the long-term unpredictability associated with chaos may be undesirable in such setting; but, since we can use the Ott-Grebogi-Yorke (OGY) method of controlling chaos, the presence of chaos may be in fact advantageous, because we can choose any one of a number of different orbits to stabilize. In order to check how does the Hastings & Powell respond to the OGY control strategy, we attempt to apply this technique for the control of one of the chaotic attractors previously observed.

So, after recognizing a value of the system parameter which is related to a chaotic attractor, we locate periodic saddle orbits embedded in it. Then, we exploit the already existing unstable periodic orbit in our chaotic attractor, and we stabilize two different attracting time-period motions by making small time-dependent perturbations on the system parameter. Furthermore, we check the multipurpose flexibility, as the system behavior can be allowed for switch different stabilized periodic orbits.

1 INTRODUÇÃO

O crescente estudo de modelos matemáticos em ecologia é um reflexo de sua utilidade na compreensão dos processos dinâmicos envolvidos em áreas como interações presa-predador e competição, gerenciamento de recursos renováveis, controle ecológico de pestes entre outros.

Em particular, os modelos matemáticos de cadeias tróficas buscam contemplar, em sua formulação, algumas das características observáveis do meio, tais como: quantidade de alimento disponível, taxa de crescimento, taxa de mortalidade, termos de predação, termos de migração, possivelmente incluindo flutuações. Os modelos que levam em consideração somente algumas características observáveis, sem levar em consideração as flutuações nas mesmas são chamados de *determinísticos*; os que levam em consideração flutuações envolvem probabilidades e são chamados de *estocásticos*. No que segue, nos referiremos apenas a modelos determinísticos, ou seja, não levaremos em consideração as flutuações do ambiente.

Um *sistema dinâmico* pode ser definido como a prescrição matemática determinística para a evolução do estado de um sistema à medida que o tempo passa. A variável tempo pode ser contínua, no caso de equações diferenciais, ou pode ser discreta, no caso de mapas. Um sistema dinâmico contínuo n -dimensional pode ser escrito sob a forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{x} = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \in \mathfrak{R}^n$, caracteriza o estado do sistema em algum instante de tempo t , $t \in \mathfrak{R}$ e $\mathbf{F} : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^n$.

No caso em que $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ não tem dependência explícita na variável independente, este sistema é chamado de *sistema dinâmico autônomo*; quando esta dependência é explícita, este sistema é chamado de *sistema dinâmico não autônomo*.

Um sistema dinâmico n -dimensional descreve uma *trajetória* num espaço n -dimensional à medida que o tempo passa, ou seja, temos por essa *trajetória* a de-

scrição do comportamento do sistema ao longo do tempo. O lugar geométrico onde esta trajetória pode ser representada é o que chamamos de *espaço de fase*. No *espaço de fase* temos a representação da evolução do sistema; cada ponto, no espaço de fase, é caracterizado por um conjunto de valores para as variáveis dependentes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em algum instante de tempo e representa o estado do sistema, neste instante de tempo.

Um sistema dinâmico pode depender de um ou mais parâmetros e apresentar diferentes comportamentos à medida que variamos cada um dos parâmetros associados ao sistema.

Podemos classificar os sistemas dinâmicos em *conseqvativos* e *dissipativos*. Um sistema é dito ser conservativo se o volume no espaço de fase é preservado ao longo do tempo, ou seja, dada a evolução de um elemento de volume no espaço de fase, este elemento de volume se conserva.

Um sistema dinâmico é dito dissipativo se dada a evolução de um elemento de volume, no espaço de fase, houver uma contração deste elemento de volume. Para um sistema da forma do sistema (1.1), tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (1.2)$$

onde V é o volume no espaço de fase, e $\nabla \cdot \mathbf{F}$ é o divergente de \mathbf{F} . Assim, para um sistema descrito por (1.1), o divergente de \mathbf{F} representa a divergência média da velocidade no espaço de fase. Para um sistema hamiltoniano, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ e, portanto, $\frac{dV}{dt} = 0$ e o volume se conserva (sistema conservativo); caso contrário, $\frac{dV}{dt} < 0$ e o sistema é dissipativo, ou seja, temos a contração do volume no espaço de fase.

Um sistema dissipativo pode apresentar diversos tipos de *atratores*, dependendo do valor dos parâmetros do sistema, tais como *pontos de equilíbrio estável* (ou pontos fixos, no caso de mapas), *ciclos limite* e *atratores caóticos*. Cada um destes pode ser atraído por um conjunto de condições iniciais próximas a eles. O conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convergem para um dado atrator chama-se *bacia de atração* do atrator em questão.

Em um sistema dinâmico contínuo dissipativo, as soluções geram elementos de volume que se contraem, de maneira que a dinâmica tende a uma região limitada no espaço de fase. Um atrator caótico é formado por combinação, em pelo menos uma direção, de dobras juntamente com um número infinito de expansões, além de contrações em outras direções.

A presença de caos em sistemas dinâmicos dissipativos foi verificada há bastante tempo, e desde então vem recebendo muita atenção por parte de alguns estudiosos. O caos já foi detectado em muitos sistemas físicos e químicos (Peng et al. 1991, Takens 1981 e Bykov 1998). Em especial, tem sido evidenciada a relevância dos estudos de sistemas caóticos, na descrição da dinâmica de sistemas ecológicos, não apenas no que tange à caracterização, mas também ao controle do mesmo.

Se, por um lado, a imprevisibilidade de longo alcance associada com o caos pode ser indesejável, por outro lado, a presença de caos pode ser vantajosa pois, através de seu controle, pode-se escolher qualquer órbita periódica instável imersa sobre um atrator caótico, e estabilizá-la. Em outras palavras, diferentes órbitas podem ser estabilizadas para o mesmo sistema, no mesmo intervalo para o parâmetro; isso, sem falar da flexibilidade permitida em estabilizar seqüencialmente várias órbitas distintas.

Sabe-se que o caos já foi aplicado para melhorar a potência de lasers, para sincronizar a saída de circuitos eletrônicos, para controlar oscilações em reações químicas e até para estabilizar o comportamento errático do coração de animais e para codificar mensagens para segurança nas comunicações (Ditto 1993).

Na física, vários experimentos foram realizados verificando-se a presença de caos como por exemplo numa fita magnetoelástica (Ditto 1990), circuitos elétricos (Chua 1997) e na química, na importante reação de Belousov-Zhabotinskii (Lathrop 1989) e em sistemas biológicos (Abrams 1987); caos aparece também em dinâmica dos fluidos (Takens 1981) .

A principal característica do caos determinístico é a dependência sensível às condições iniciais, ou seja, dadas duas condições iniciais próximas, a não linearidade do modelo causa um afastamento exponencial entre elas à medida que o tempo passa. Para medir a taxa de divergência de trajetórias e portanto, quantificar a dependência sensível às condições iniciais utilizam-se os expoentes de Lyapunov. A soma de todos os expoentes de Lyapunov de um atrator de um sistema dinâmico contínuo qualquer é sempre negativa, pois apenas sistemas dinâmicos dissipativos possuem atratores e, num sistema dissipativo, sempre temos contração do volume no espaço de fase. A partir de seu sinal podemos determinar o tipo de comportamento assintótico, ou seja, determinar o tipo de atrator que o sistema pode ter para um dado valor do parâmetro. Quando um dos expoentes de Lyapunov tiver sinal positivo, implica que temos caos.

Para um dado sistema dissipativo, a transição ao caos pode ocorrer de diferentes formas. A transição ao caos acontece a partir da desestabilização de órbitas periódicas à medida que o parâmetro varia. Assim, podemos falar em *cenários*, ou seqüências de bifurcações que nos levam ao caos. Os principais cenários são: cenário de *Ruelle Takens via quasi-periodicidade*, cenário de *Feigenbaum via duplicação de período* e o cenário de *Pomeau-Manneville via intermitência*.

Em 1990, *Ott, Grebogi e Yorke* propuseram um método para controle de caos de uma órbita periódica instável imersa num atrator caótico fazendo somente pequenas perturbações num parâmetro acessível do sistema. Tal método para controle pode ser aplicado da seguinte forma: identifica-se uma órbita periódica instável de baixo período sobre a seção de Poincaré $n - 1$ dimensional correspondente ao sistema dinâmico n -dimensional, escolhe-se a que nos dá a performance desejada e por meio de pequenas perturbações no sistema obtém-se a estabilização da órbita já existente. Neste artigo *Ott, Grebogi e Yorke* mostram a aplicação do método para o controle de um ponto fixo instável do mapa de Hénon.

Neste método para controle de caos não necessitamos conhecer o sistema dinâmico; basta apenas que tenhamos o conhecimento de uma série temporal para

uma das variáveis dependentes; neste caso, os elementos necessários para a aplicação do controle podem ser obtidos pela técnica de imersão, para reconstrução do atrator.

Desde então outros métodos para controle surgiram e inúmeras comparações têm sido feitas. Grebogi e Lai (1997) mostram que a aplicação do método *OGY* é um caso particular da técnica de posicionamento de pólos estudada na teoria de sistemas. Ditto (1990) mostra a aplicação deste método para o controle de caos de uma fita magnetoelástica. O controle também foi aplicado com sucesso na química, para o controle de reações químicas (Peng et al 1991).

No presente trabalho, faremos o estudo de um sistema dinâmico contínuo dissipativo tridimensional proposto por Hastings e Powell e que descreve a evolução dinâmica de um sistema do tipo presa-predador para uma cadeia trófica composta por três espécies de peixes. Este sistema depende de alguns parâmetros e apresenta um comportamento dinâmico bastante variado, à medida que os valores de alguns dos parâmetros são mudados. Os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar, dependendo do valor do parâmetro, variam desde ponto de equilíbrio estável, oscilações periódicas (ciclos limite) e caos.

Após investigar diferentes tipos de comportamento presentes neste sistema, nos fixaremos numa região onde temos a presença de caos, região esta determinada através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, onde aplicaremos o método para controle de caos proposto por Ott, Grebogi e Yorke em 1991 e conhecido como método *OGY*.

Portanto, dado o sistema de Hastings e Powell e nos fixando num valor de parâmetro onde temos a presença de caos, o nosso objetivo é aplicar o método para controle de caos proposto por Ott, Grebogi e Yorke (1991) para este sistema a fim de fazermos o controle de algumas das órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico para um dado valor do parâmetro.

Nos primeiros três capítulos fazemos uma revisão de alguns importantes conceitos que utilizaremos ao longo deste trabalho e nos seguintes, apresentaremos os resultados obtidos.

No capítulo 2, faremos um breve estudo de importantes conceitos presentes em mapas discretos unidimensionais e bidimensionais, tais como ponto fixo, órbitas periódicas e pelo mapa logístico veremos o conceito de bifurcação. A partir destes, definiremos mapa de Poincaré ou mapa de primeiro retorno, que é importante na determinação dos pontos fixos sobre um mapa na seção de Poincaré.

No capítulo 3, introduziremos algumas características de modelos contínuos para uma espécie, enfatizando os modelos de Malthus e Verhulst, e para duas espécies, enfatizando os modelos presa-predador de Lotka-Volterra. Neste capítulo definiremos resposta funcional, que representa a resposta do predador à densidade de presas, e definiremos ciclo limite e algumas condições para seu aparecimento. Além disso, construiremos o sistema de Hastings e Powell identificando o significado de cada termo nas equações diferenciais propostas.

No capítulo 4, apresentaremos importantes características de dinâmicas caóticas, como por exemplo a dependência sensível às condições iniciais. Definiremos expoentes de Lyapunov, bem como seu uso na identificação de diferentes tipos de atratores. Apresentaremos as três principais rotas que levam ao caos e por fim faremos uma descrição detalhada do método *OGY* para o controle de caos, método este que será aplicado no controle das órbitas periódicas instáveis do sistema de Hastings e Powell.

No capítulo 5 faremos uma investigação do comportamento global do sistema de Hastings e Powell, explorando-o no que tange aos seus estados assintóticos para diversos valores do parâmetro. Serão calculados, para este sistema, os expoentes de Lyapunov para diferentes valores do parâmetro e por fim, pela integração numérica visualizaremos alguns dos principais comportamentos assintóticos obtidos a partir da variação do valor do parâmetro do sistema.

No capítulo 6 serão calculados todos os elementos necessários à aplicação do método *OGY* para duas órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico e para um valor do parâmetro para o qual identificaremos a presença de caos. Os cálculos foram realizados aplicando o método *OGY* para uma seção de Poincaré bidimensional. Mostraremos, neste capítulo, a aplicação do controle para duas órbitas periódicas instáveis imersas no atrator e também algumas das dificuldades encontradas para a aplicação do método para este sistema. Mostrar-se-á também a comparação entre a dinâmica antes da aplicação do controle e depois da aplicação do controle mostrando a efetividade da aplicação do mesmo. Complementarmente à estabilização de duas órbitas distintas, também verificaremos a flexibilidade em se aplicar seqüencialmente o controle para uma e outra órbitas periódicas.

2 MODELOS DISCRETOS

Denomina-se *mapa* um sistema dinâmico que evolui no tempo de forma discreta.

Existem várias razões para se estudar mapas, do ponto de vista de seu comportamento dinâmico, visto que há vários modelos cujas soluções aparecem sob a forma de relações de recorrência e, portanto, cuja dinâmica é descrita por mapas.

Não obstante o modelo de Hastings e Powell, sobre o qual versa este trabalho, seja um modelo contínuo no tempo, a técnica para se efetuar o controle de caos sobre este modelo será implementada sobre um mapa (discreto) associado ao sistema. Este é o motivo que nos leva a dedicar este capítulo a uma revisão dos fatos essenciais relativos a modelos discretos.

2.1 Mapas Unidimensionais

Utilizando o índice $i \in Z_+$, isto é, $i = 0, 1, 2, \dots$, para ordenar os passos temporais discretos, e representando por x_i , a medida de uma variável x , após i passos de tempo, e sendo p um parâmetro associado ao mapa, um mapa unidimensional pode ser escrito sob a forma:

$$x_{i+1} = F(x_i, p), \quad (2.1)$$

onde F é uma função de x_i e de p . A equação (2.1) é denominada genericamente de *equação a diferenças* de primeira ordem.

Um exemplo muito estudado é o mapa *logístico*:

$$x_{i+1} = px_i(1 - x_i) \quad (2.2)$$

onde p é o parâmetro de controle. Esta equação é usada em algumas situações para modelar a dinâmica de populações biológicas.

Define-se então *órbita* do mapa (2.1) como a seqüência de pontos $\{x_0, x_1, \dots\}$ onde:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0), \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x_0)), \\ &\vdots \\ x_n &= F(x_{n-1}) = F^{n-1}(F(x_0)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

definida pela equação (2.1). A notação $F^N(x_i)$ representa a N -ésima iterada da equação a diferenças (2.1), e significa tomar a N -ésima aplicação sucessiva do mapa em x_i , isto é, $F^N(x_i) = F(F(F \dots (x_i) \dots))$, N vezes. Para simplificar deixamos de escrever explicitamente que F também envolve um parâmetro p .

2.1.1 Ponto fixo e órbita periódica de um mapa unidimensional

A partir da equação (2.1) define-se *ponto fixo*, como segue. Diz-se que x^* é um ponto fixo do mapa (2.1) se

$$x^* = F(x^*), \tag{2.4}$$

isto significa que, se a órbita do mapa atingir o ponto fixo num determinado instante de tempo, a órbita ali permanecerá, pelos subseqüentes instantes de tempo.

No caso em que o sistema dinâmico for descrito por uma equação do tipo:

$$x_{i+1} = F(x_i) = x_i f(x_i) \tag{2.5}$$

onde $f(x_i)$ é uma função de x_i , os pontos fixos de (2.5) são soluções x^* tais que

$$x^* = F(x^*) = x^* f(x^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = 0 \quad \text{ou} \quad f(x^*) = 1 \tag{2.6}$$

Para o exemplo do mapa logístico (2.2), obtém-se:

$$x^* = 0 \tag{2.7}$$

ou

$$p(1 - x^*) = 1, \quad \text{donde} \quad x^* = \frac{p-1}{p} \tag{2.8}$$

Ao estudarmos modelos contínuos (capítulo 2), o análogo do ponto fixo será denominado *estado estacionário* ou *solução de equilíbrio* ou *solução estacionária*.

Além dos pontos fixos, observam-se em mapas do tipo (2.1) os chamados *ciclos de período k* , que são definidos por uma seqüência de k pontos, tais que:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F(x_i) \\x_{i+2} &= F(F(x_i)) = F^2(x_i) \\&\vdots \\x_{i+k} &= F^k(x_i) = x_i\end{aligned}$$

onde é admitido não haver periodicidade inferior a k ; assim, existem k pontos distintos, e cada um deles se repete após k iterações. Comparando com a definição de ponto fixo, observamos que uma órbita periódica de período k é ponto fixo do mapa $x_{i+1} = g(x_i)$, onde definimos $g(x_i) \equiv F^k(x_i)$. Por outro lado, um ponto fixo corresponde a uma órbita periódica de período 1.

2.1.2 Estabilidade de um ponto fixo - método analítico

Um ponto fixo pode ser *estável*, *assintoticamente estável* ou *instável*, dependendo do comportamento da seqüência de pontos x_{i+1} , x_{i+2} , x_{i+3}, \dots , a partir de um ponto x_i próximo de x^* .

Um ponto fixo x^* é estável se a resposta do mapa a uma pequena perturbação em torno de x^* permanecer pequena quando $i \rightarrow \infty$, ou seja, se depois de uma pequena perturbação as subseqüentes iteradas do mapa permanecerem próximas a x^* . Este tipo de estabilidade também é denominada de *estabilidade neutra* ou *estabilidade de Lyapunov* (apêndice B).

Se, para uma condição inicial x_i próxima a um ponto fixo x^* , a seqüência de pontos x_{i+1} , x_{i+2}, \dots se aproximar de x^* quando $i \rightarrow \infty$, isto é,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x^*, \quad (2.9)$$

este ponto será assintoticamente estável. Neste caso, o ponto fixo x^* é um *atrator*, também denominado *sorvedouro* (“sink”). Por outro lado, se a seqüência acima se afastar de x^* , então este ponto será instável e o ponto x^* é um *repulsor*, também denominado *fonte* (“source”).

Observamos que todo ponto fixo x^* que é assintoticamente estável, também é estável, mas nem todo ponto fixo estável é assintoticamente estável. Para examinar analiticamente esta questão, consideramos um ponto x_i próximo de x^* , isto é,

$$x_i = x^* + \varepsilon_i \quad (2.10)$$

onde ε_i é um valor pequeno, positivo ou negativo, cujo módulo mede o afastamento (distância) entre x_i e x^* . Para se analisar a estabilidade de x^* deve-se saber se:

$$x_{i+1} = F(x_i) = F(x^* + \varepsilon_i) = x^* + \varepsilon_{i+1} \quad (2.11)$$

se afasta ou se aproxima de x^* , isto é, se ε_{i+1} é, em módulo, maior ou menor do que o módulo de ε_i . Na vizinhança de x^* , consideraremos uma aproximação linear para $F(x^* + \varepsilon_i)$, efetuando a expansão de (2.11) em série de Taylor em torno de x^* (assumindo que F seja diferenciável), como segue:

$$x^* + \varepsilon_{i+1} = F(x^* + \varepsilon_i) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx_i} \right|_{x_i=x^*} \varepsilon_i + O(\varepsilon_i^2) \quad (2.12)$$

onde $O(\varepsilon_i^2)$ representa termos da ordem de ε_i^2 . Lembrando que $F(x^*) = x^*$ e mantendo apenas os termos de primeira ordem em ε_i , obtém-se, como consequência do teorema do valor médio (apêndice A), que:

$$\varepsilon_{i+1} = \left. \frac{dF}{dx_i} \right|_{x_i=x^*} \varepsilon_i, \quad (2.13)$$

donde concluímos que, $|\varepsilon_{i+1}| < |\varepsilon_i|$ e conseqüentemente $x_i \rightarrow x^*$ quando $i \rightarrow \infty$, se e somente se

$$\left| \left. \frac{dF}{dx_i} \right|_{x_i=x^*} \right| < 1 \quad (2.14)$$

Neste caso o ponto fixo $x_i = x^*$ será assintoticamente estável para a aproximação linear do mapa (2.1), isto é, no limite quando $i \rightarrow \infty$ tem-se $x_i \rightarrow x^*$, ou equivalentemente, $\varepsilon_i \rightarrow 0$; caso contrário, o ponto fixo será instável.

É importante enfatizar que as definições acima são *locais*, visto que a aproximação linear utilizada para obter a equação (2.13) justifica-se pelo fato de que x_i é um valor próximo ao ponto fixo x^* . Isto significa que, se um ponto fixo é assintoticamente estável, fica assegurado que é um atrator para soluções com condições iniciais próximas a ele, mas pode não atrair soluções com condições iniciais distantes.

Para o exemplo do mapa logístico, tem-se:

$$F(x_i) = px_i(1 - x_i) \quad (2.15)$$

donde

$$\left. \frac{dF}{dx_i} \right|_{x_i=x^*} = p(1 - 2x^*), \quad (2.16)$$

que, substituída na condição (2.14), fornece:

$$-1 < p(1 - 2x^*) < 1. \quad (2.17)$$

A seguir, substituindo em x^* , cada um dos valores de x^* determinados em (2.8), analisaremos a estabilidade assintótica de cada um destes pontos fixos. Assim, concluímos que o ponto fixo $x^* = 0$ é assintoticamente estável se e somente se $-1 < p < 1$; no caso em que p é um parâmetro não negativo, esta condição reduz-se para $0 \leq p < 1$.

Por outro lado, o equilíbrio $x^* = \frac{p-1}{p}$ é assintoticamente estável se e somente se $-1 < -p + 2 < 1$, donde se obtém $1 < p < 3$.

Quanto à estabilidade de órbitas periódicas, para mapas unidimensionais, adota-se o mesmo procedimento analisado acima, visto que uma órbita periódica de período k do mapa $x_{i+1} = F(x_i)$ é um ponto fixo do mapa $x_{i+1} = g(x_i)$, onde definimos $g(x_i) \equiv F^k(x_i)$. Então, a estabilidade da órbita é investigada a partir da aproximação linear para $g(x_i)$.

2.1.3 Estabilidade de um ponto fixo - método gráfico

Podemos também analisar a estabilidade de um ponto fixo por meio de um procedimento gráfico.

Graficamente, os estados estacionários são intersecções da curva $x_{i+1} = F(x_i)$ com a reta $x_{i+1} = x_i$ como mostrado nas figuras 2.1, 2.2, 2.5, 2.9, 2.10 e 2.12. Os gráficos apresentados nestas figuras correspondem ao mapa logístico descrito pela equação (2.2), para valores positivos distintos do parâmetro p ; além disso, traçamos apenas o primeiro quadrante, pois consideramos uma modelagem de um sistema para o qual valores de x_i negativos não possuem significado. Após traçar, em um mesmo sistema de coordenadas, tendo x_{i+1} como eixo vertical e x_i como eixo horizontal, os gráficos de $x_{i+1} = F(x_i)$ e de $x_{i+1} = x_i$, a seqüência solução x_1, x_2, \dots , pode ser obtida a partir de um valor inicial x_0 , como segue: iniciando em x_0 , no eixo horizontal, o valor de x_1 é determinado traçando um segmento vertical até a curva $x_{i+1} = F(x_i)$ e fazendo a leitura no eixo vertical. A reta $x_{i+1} = x_i$ é, a seguir, utilizada para transferir o valor de x_1 , do eixo vertical para o eixo horizontal; esta transferência é efetuada através do segmento horizontal, da curva $x_{i+1} = F(x_i)$ até a reta $x_{i+1} = x_i$. Repetindo o procedimento acima, determinamos x_2 e assim por diante.

Por outro lado, a condição (2.14) estabelecida na subseção anterior implica, graficamente, em comparar, em um ponto fixo x^* , a inclinação da reta tangente à curva $x_{i+1} = F(x_i)$ com a da própria reta $x_{i+1} = x_i$, que a intercepta neste ponto.

As figuras 2.1 e 2.2, que correspondem a $p = 0.8$ e $p = 1.5$ respectivamente, representam situações para as quais, quando $i \rightarrow \infty$, $x_i \rightarrow x^*$ monotonicamente. Para $p = 0.8$, iniciando em qualquer ponto x_0 , a seqüência x_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, converge monotonicamente para $x^* = 0$; este é o único ponto fixo não negativo para o mapa em questão. Por outro lado, para $p = 1.5$, o mapa possui dois pontos fixos

distintos $x^* = 0$ e $x^* = \frac{1}{3}$, e a seqüência converge monotonicamente para o segundo. Nas figuras 2.3 e 2.4 traçamos os gráficos $x_i \times i$ correspondentes.

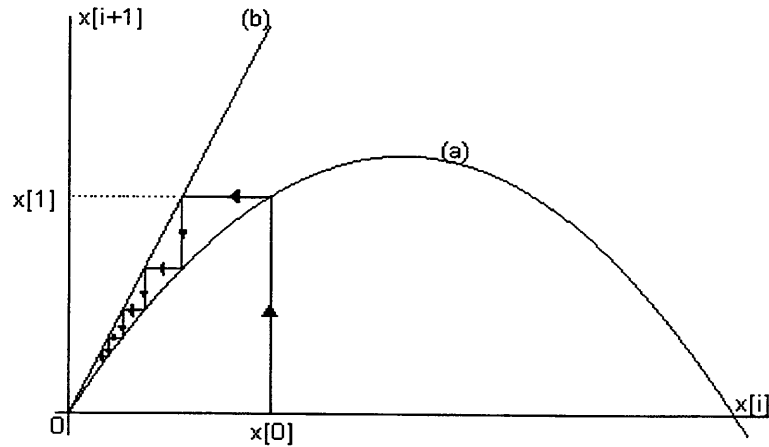


Figura 2.1: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 0.8x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$

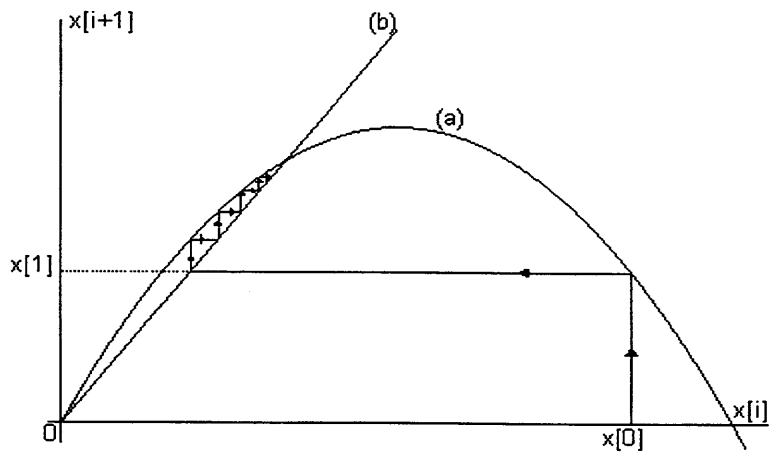


Figura 2.2: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 1.5x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$

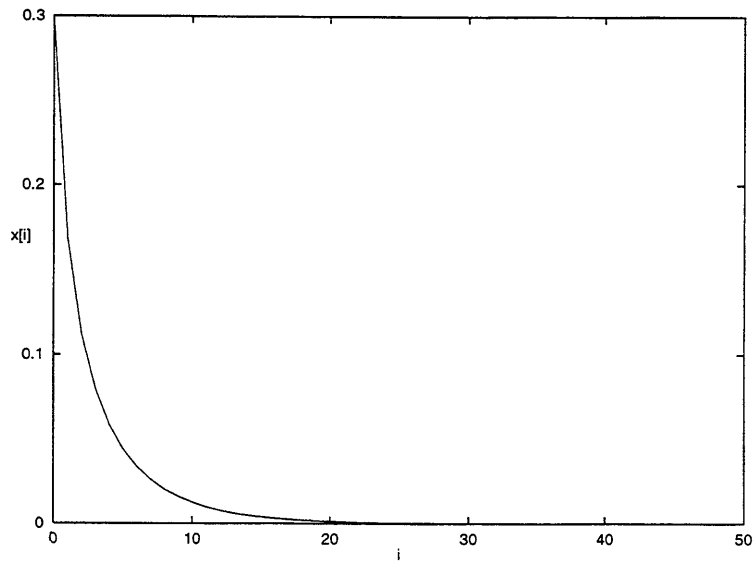


Figura 2.3: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 0.8x_i(1 - x_i)$

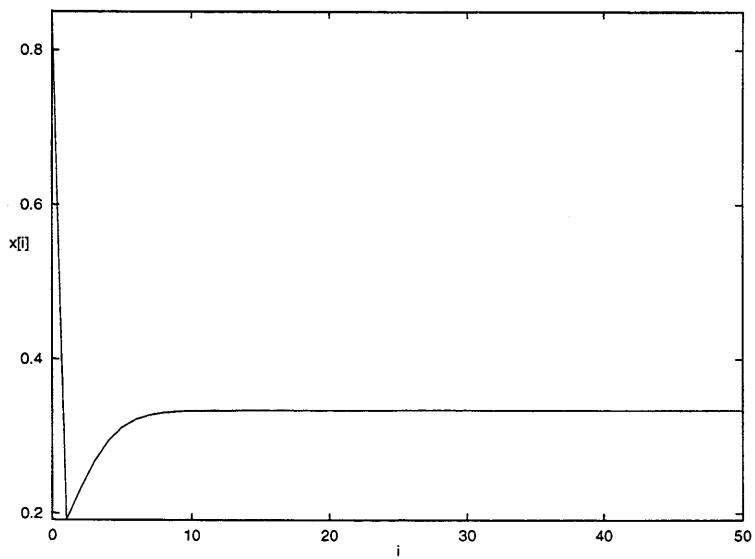


Figura 2.4: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 1.5x_i(1 - x_i)$

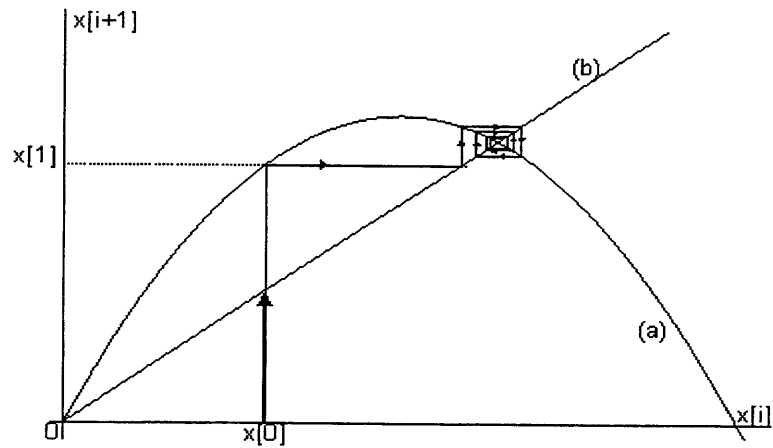


Figura 2.5: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 2.8x_i(1 - x_i)$; (b) $x_{i+1} = x_i$

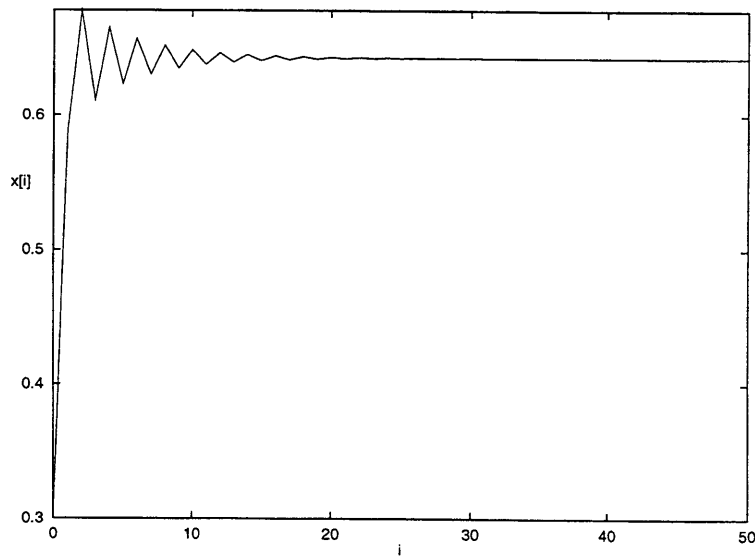


Figura 2.6: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 2.8x_i(1 - x_i)$

A convergência para um ponto fixo também pode ser do tipo oscilatória (ou alternada), como mostrado nas figuras 2.5 e 2.6, para $p = 2.8$; neste caso, a seqüência x_0, x_1, x_2, \dots converge de forma oscilatória, para $x^* = \frac{9}{14}$.

2.1.4 Bifurcação em um mapa unidimensional

Do que foi apresentado nas subseções anteriores, observamos que a estabilidade local de um ponto fixo de um mapa unidimensional está associada com uma condição para o parâmetro envolvido no mapa em questão.

No exemplo do mapa logístico (2.2), para p não negativo, foi mostrado que existem duas soluções de equilíbrio, $x^* = 0$ e $x^* = \frac{p-1}{p}$, sendo que a primeira é estável para $0 \leq p < 1$, enquanto que a segunda é estável para $1 < p < 3$. Esta situação pode ser melhor visualizada através de um gráfico $x^* \times p$, como mostra a figura 2.7. No intervalo em que cada uma das soluções de equilíbrio é estável, esta é traçada com linha contínua; caso contrário, usa-se uma linha tracejada. As duas curvas interceptam-se em $p = 1$, onde ocorre uma troca de estabilidade de um ponto fixo para outro.

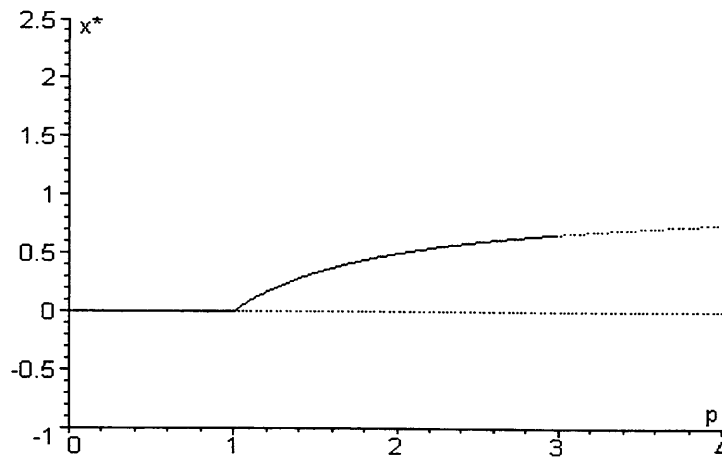


Figura 2.7: Gráfico $x^* \times p$ para o mapa $x_{i+1} = px_i(1 - x_i)$, indicando a estabilidade de $x^* = 0$ para $0 \leq p < 1$ e de $x^* = \frac{p-1}{p}$, para $1 < p < 3$

Para $p > 3$, não existem pontos fixos estáveis.

Da mesma forma que na subsecção anterior, traçamos, na figura 2.8, o gráfico $x_i \times i$, para $p = 3.2$, onde observamos que a partir de $i \simeq 10$, x_i alterna-se entre os seguintes dois valores distintos: $x_i \simeq 0.8$ e $x_i \simeq 0.51$; trata-se portanto, de um estado assintótico do tipo órbita de período 2 ou ciclo 2. A mesma oscilação estacionária pode ser visualizada na figura 2.9, em um gráfico onde traçamos a curva $x_{i+1} = F(x_i)$, juntamente com a reta $x_{i+1} = x_i$; o que se observa, neste caso, é um caminho retangular, percorrido no sentido horário.

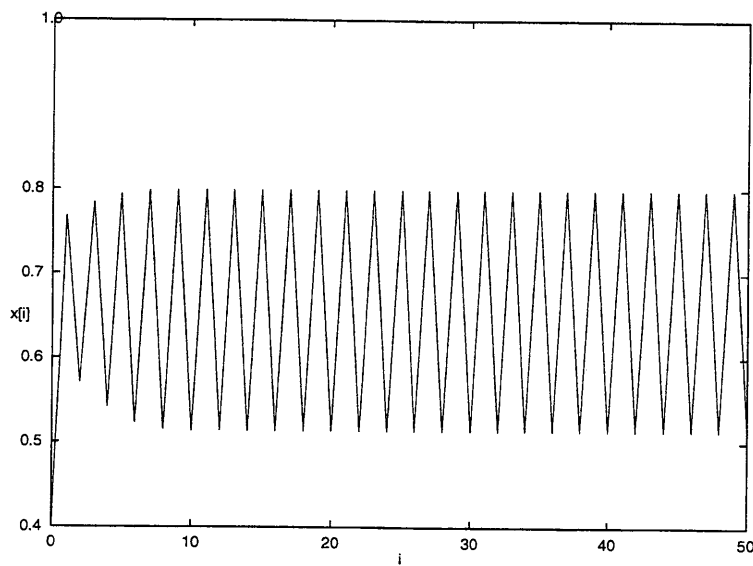


Figura 2.8: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.2x_i(1 - x_i)$

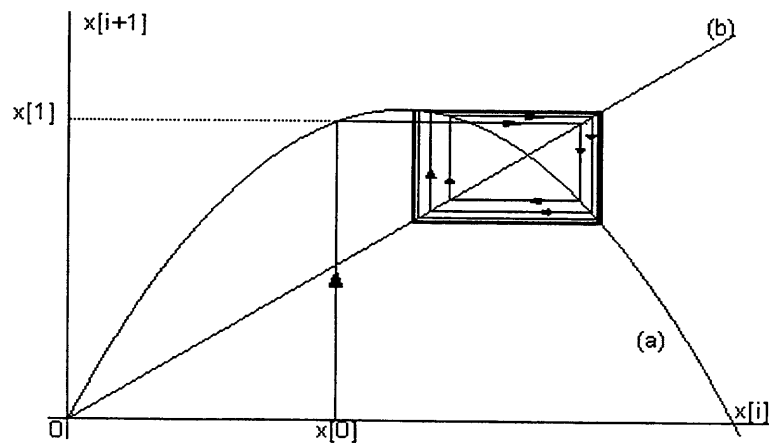


Figura 2.9: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.2x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$

O aparecimento de uma nova solução, em um certo valor do parâmetro, corresponde a uma mudança qualitativa do diagrama no espaço de fases; diz-se então que, neste valor do parâmetro, o sistema dinâmico perde a estabilidade estrutural, e sofre uma *bifurcação*.

Aumentando ainda mais o valor do parâmetro p , no mapa logístico, outros tipos de soluções serão identificados. Para $p = 3.45$, por exemplo, cada estado na oscilação de período 2 se separa em dois estados distintos, e a solução assintótica é periódica com período 4. As figuras 2.10 e 2.11 apresentam os gráficos correspondentes.

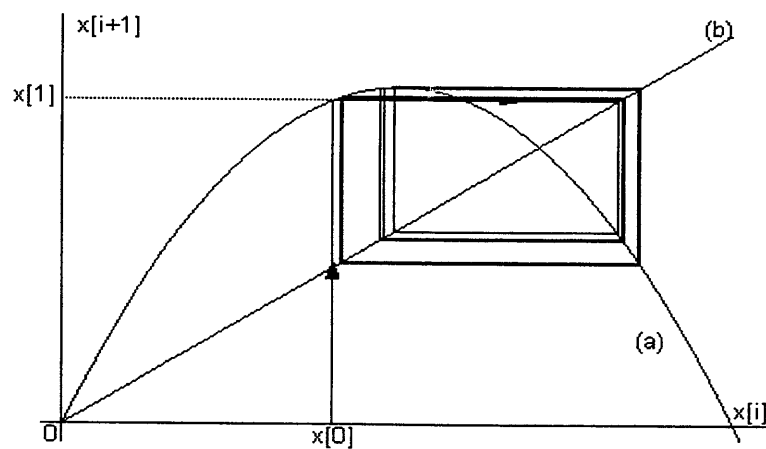


Figura 2.10: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.45x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$

Continuando a aumentar o valor de p , identifica-se órbitas periódicas de período 8, 16, \dots , constituindo uma seqüência de duplicação de período.

A partir de um certo valor de parâmetro, podemos também visualizar, através de um procedimento gráfico, tal como o da figura 2.12, que corresponde a $p = 3.65$, situações nas quais o sistema não tende a um ponto, nem a um ciclo, nem vai a infinito, mas fica vagando aleatoriamente dentro de uma região limitada. Traçamos, na figura 2.13, o gráfico $x_i \times i$ correspondente, onde observamos a inexistência de padrão que se repete e a estrutura fina do gráfico é imprevisível. A caracterização

de tais soluções, denominadas *caóticas*, será apresentada de forma mais detalhada no capítulo 3.

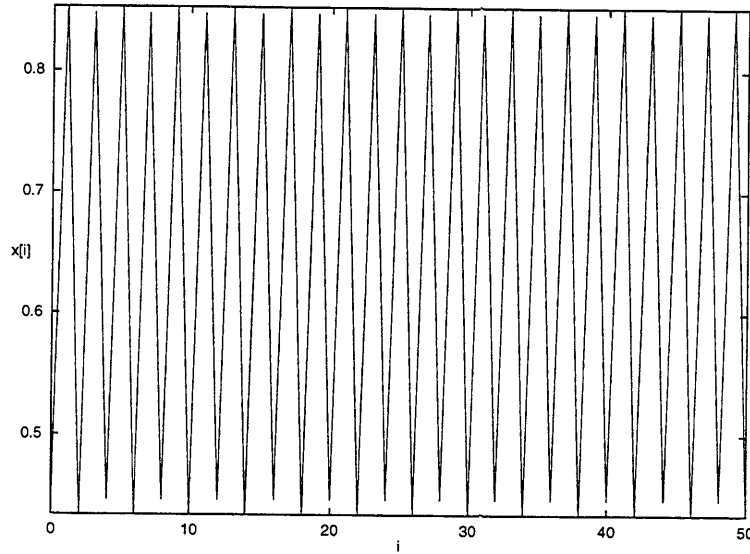


Figura 2.11: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.45x_i(1 - x_i)$

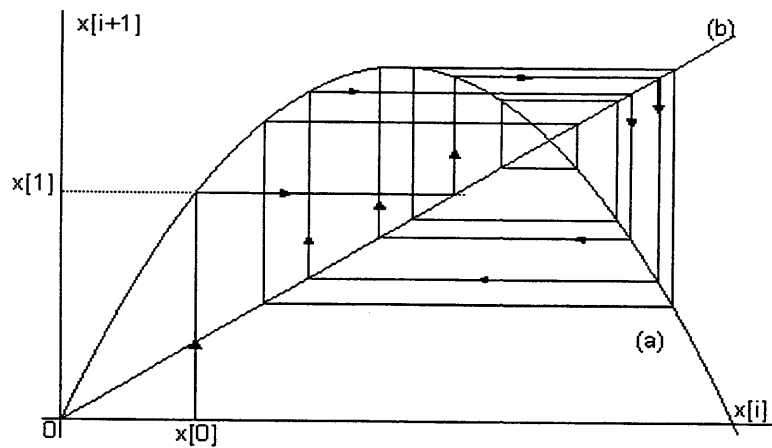


Figura 2.12: (a) $x_{i+1} = F(x_i) = 3.65x_i(1 - x_i)$ (b) $x_{i+1} = x_i$

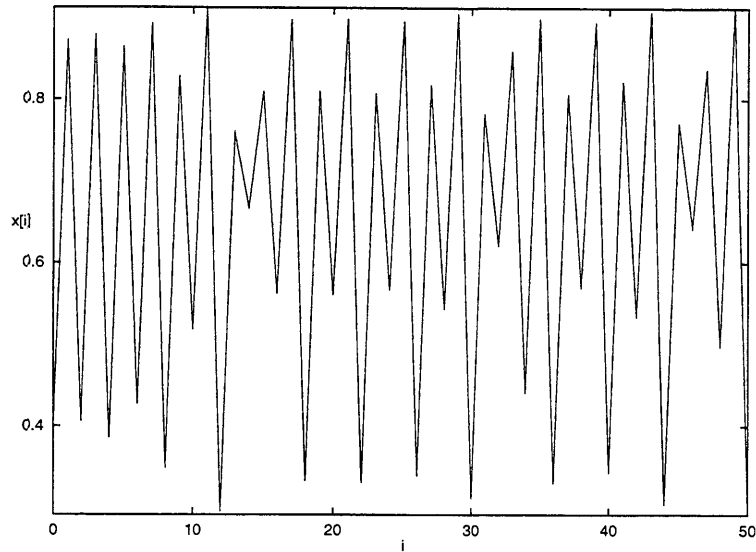


Figura 2.13: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1 - x_i)$

2.2 Mapas Bidimensionais

Muito do que foi apresentado acima para mapas unidimensionais pode ser imediatamente generalizado para mapas bidimensionais. Seja o mapa,

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= G(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (2.18)$$

com um ponto fixo em (x^*, y^*) , isto é,

$$\begin{aligned} x^* &= F(x^*, y^*) \\ y^* &= G(x^*, y^*) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Analogamente à equação (2.10), para o mapa unidimensional, considerando um ponto (x_i, y_i) próximo de (x^*, y^*) , isto é,

$$\begin{aligned} x_i &= x^* + \varepsilon_i \\ y_i &= y^* + \eta_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde ε_i e η_i são, em módulo, muito pequenos e medem as projeções da distância entre (x_i, y_i) e (x^*, y^*) , nas direções horizontal e vertical, respectivamente, tem-se:

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i) = F(x^* + \varepsilon_i, y^* + \eta_i) = x^* + \varepsilon_{i+1}$$

$$y_{i+1} = G(x_i, y_i) = G(x^* + \varepsilon_i, y^* + \eta_i) = y^* + \eta_{i+1}, \quad (2.21)$$

para a qual, a expansão em série de Taylor de F e G em torno do ponto fixo fornece:

$$\begin{aligned} x^* + \varepsilon_{i+1} &= F(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{(x^*, y^*)} \varepsilon_i + \left. \frac{\partial F}{\partial y_i} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + O(\varepsilon_i^2, \eta_i^2) \\ y^* + \eta_{i+1} &= G(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial G}{\partial x_i} \right|_{(x^*, y^*)} \varepsilon_i + \left. \frac{\partial G}{\partial y_i} \right|_{(x^*, y^*)} \eta_i + O(\varepsilon_i^2, \eta_i^2) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mantendo somente os termos de primeira ordem (aplicação do teorema do valor médio - apêndice A) em ε_i e η_i , e lembrando que $F(x^*, y^*) = x^*$ e $G(x^*, y^*) = y^*$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= a \varepsilon_i + b \eta_i \\ \eta_{i+1} &= c \varepsilon_i + d \eta_i \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde a matriz dos coeficientes é a matriz Jacobiana (também chamada de **matriz comunidade**) do mapa, calculada no ponto fixo, isto é,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_i, y_i)} \right|_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial F}{\partial y_i} \right|_{(x^*, y^*)} \\ \left. \frac{\partial G}{\partial x_i} \right|_{(x^*, y^*)} & \left. \frac{\partial G}{\partial y_i} \right|_{(x^*, y^*)} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Em notação vetorial, tem-se:

$$\mathbf{s}_{i+1} = \mathbf{J}^* \mathbf{s}_i \quad (2.25)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^* &= \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_i, y_i)} \right|_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \\ \mathbf{s}_i &= \begin{bmatrix} \varepsilon_i \\ \eta_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_{i+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{i+1} \\ \eta_{i+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

A estabilidade do ponto fixo (x^*, y^*) depende dos autovalores λ_1 e λ_2 de \mathbf{J}^* . Os autovalores da matriz \mathbf{J}^* são calculados a partir do polinômio característico $P(\lambda)$ obtido de:

$$P(\lambda) = |\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (2.27)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem 2.

Estes autovalores podem ser reais ou complexos conjugados. Se λ_1 e λ_2 são reais o ponto fixo é assintoticamente estável para $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, e, neste caso, (x^*, y^*) é um *atrator*; se λ_1 e λ_2 forem maiores que a unidade em valor absoluto, isto é, se $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2$ o ponto fixo é instável; diz-se então que (x^*, y^*) é um *repulsor*; se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$ ou $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| < 1$ tem-se um *ponto de sela hiperbólico*. Quando $|\lambda| = 1$, a aproximação linear não é suficiente para estabelecer a estabilidade ou instabilidade do ponto fixo; termos de ordem superior devem ser considerados (Ferrara 1994). A maneira como as iteradas se aproximam ou se afastam de (x^*, y^*) pode ser monotônica ou alternada, dependendo dos sinais de λ_1 e λ_2 .

Se os autovalores são complexos conjugados, temos 3 casos a analisar. Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ há convergência ao ponto fixo considerado, que é neste caso uma *espiral estável*. Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$, então o ponto fixo é uma fonte e, portanto, *instável*. Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, o ponto fixo (x^*, y^*) é um *centro*.

Os critérios de estabilidade para mapas bidimensionais podem ser resumidos em termos de um círculo de raio unitário no plano complexo dos autovalores. Se os dois autovalores estão no interior do círculo de raio unitário, o ponto fixo é assintoticamente estável; se ao menos um deles está fora, então o ponto fixo é instável; portanto o limite de estabilidade é o círculo unitário.

2.3 Mapa de Poincaré ou de Primeiro Retorno

Conforme esclarecemos no início deste capítulo, que dedicamos a uma revisão de alguns aspectos sobre mapas (discretos), a técnica de controle de caos que adotaremos neste trabalho (capítulo 4) será implementada sobre um mapa específico associado ao sistema dinâmico em estudo. Este mapa é denominado *mapa de Poincaré*; para um sistema dinâmico n -dimensional contínuo no tempo, trata-se

de um mapa em um espaço de fases $(n-1)$ -dimensional, cuja definição formularemos a seguir.

Para definirmos este mapa, consideremos, por exemplo, as soluções $\mathbf{r}(t) \in \mathfrak{R}^3$ de um dado sistema diferencial autônomo,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{r}), \quad (2.28)$$

$\mathbf{G} : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, onde \mathbf{G} e \mathbf{r} são dados por:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{r}) \\ G_2(\mathbf{r}) \\ G_3(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

e \mathbf{G} não depende explicitamente da variável independente t .

Então podemos tomar qualquer ponto $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ intersecção da órbita $\mathbf{r}(t)$ com o plano de equação $z = \text{constante}$ e definir outro ponto \mathbf{r}_{i+1} neste plano como segue.

Sendo $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_i$, integramos o sistema diferencial para encontrar a órbita de \mathbf{r} no espaço de fase, isto é, localizamos \mathbf{r} em \mathfrak{R}^3 para $t > 0$. Assim, definimos \mathbf{r}_{i+1} como o ponto onde a órbita atravessa novamente o plano $z = \text{constante}$.

Desta maneira definimos um mapa $\mathbf{F} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i), \quad (2.30)$$

onde

$$\mathbf{r}_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{r}_i) \\ F_2(\mathbf{r}_i) \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Este mapa é chamado *mapa de Poincaré* ou *mapa de primeiro retorno* no plano $z = \text{constante}$ para o sistema diferencial (2.28) e será de grande utilidade na técnica que usaremos para o controle de caos (capítulo 4). Podem haver casos onde a órbita nunca atravessará o plano novamente, e assim \mathbf{r}_{i+1} nunca existirá.

Podemos também definir um mapa de primeiro retorno para qualquer superfície não plana no \mathfrak{R}^3 bem como para sistemas de ordem superior a 3 (Drazin 1992); em qualquer caso, será sempre constituído por uma seqüência de pontos nos quais a órbita do sistema dinâmico contínuo original intercepta a seção de Poincaré.

Um exemplo clássico é o sistema tridimensional de Lorenz,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.32}$$

onde b , σ e r são parâmetros positivos, ao qual é associado o mapa bidimensional de Hénon:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= 1 - ax_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= bx_i\end{aligned}\tag{2.33}$$

onde a é uma constante positiva e b é o mesmo parâmetro do sistema (2.33) acima.

Devemos enfatizar aqui, que o mapa de primeiro retorno tem como dimensão uma unidade a menos que o sistema contínuo ao qual é associado, ou seja, se o sistema contínuo for n dimensional, o mapa de Poincaré será $(n-1)$ -dimensional. Assim, uma órbita periódica do sistema dinâmico 3-dimensional (2.28) corresponde a um ponto fixo do mapa (2.30), como mostra a figura 2.14, devendo, portanto, satisfazer a condição $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i$.

Graficamente um ponto fixo de um mapa de Poincaré bidimensional:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= G(x_i, y_i)\end{aligned}\tag{2.34}$$

é determinado a partir de dois gráficos de primeiro retorno, ou seja, traçamos a reta $x_{i+1} = x_i$ no gráfico de $x_{i+1} = F(x_i, y_i)$ para determinar x^* e a reta $y_{i+1} = y_i$ no gráfico de $y_{i+1} = G(x_i, y_i)$ para determinar y^* .

Devemos também lembrar que a uma órbita periódica no espaço de fase n -dimensional corresponde um ponto na seção de Poincaré.

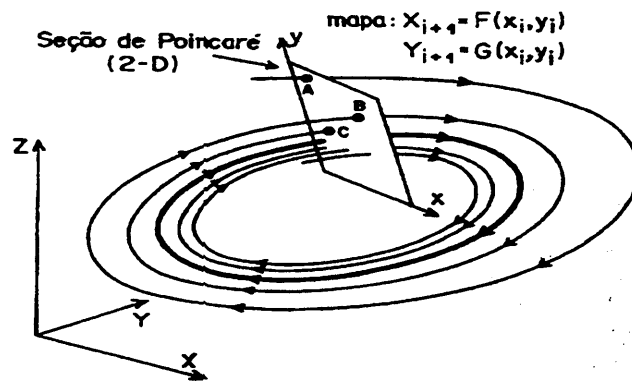


Figura 2.14: No espaço de fase, seção de Poincaré de trajetória do tipo ciclo limite para um sistema dinâmico tridimensional (Ferrara, 1994)

Dado um sistema dinâmico contínuo n -dimensional, a determinação do mapa de Poincaré a ele associado não é trivial.

Em nosso trabalho, a técnica de controle de caos que implementaremos faz uso de uma aproximação linear para o mapa de Poincaré do sistema contínuo tridimensional; então o procedimento adotado foi o de recorrer a um método de mínimos quadrados (Apêndice E), para efetuar a regressão linear procurada, a partir dos pares de coordenadas (conhecidas) dos pontos da seção de Poincaré, que é bidimensional.

3 MODELOS CONTÍNUOS PARA POPULAÇÕES

No contexto de dinâmica de populações, são utilizados modelos contínuos para descrever sistemas nos quais ocorre sobreposição de populações, ou seja, considerando populações que variam continuamente com o tempo.

O sistema dinâmico tridimensional proposto por Hastings e Powell, que constitui o objeto de estudo deste trabalho, é um modelo contínuo, para descrever a evolução dinâmica de uma cadeia trófica de três níveis de peixes interagentes.

Neste capítulo, nosso propósito é o de compreender o significado de cada um dos termos utilizados na construção do modelo de Hastings e Powell. Para isso, iniciando por uma revisão de algumas características básicas de certos modelos contínuos para uma única espécie, seguiremos com alguns sistemas de duas espécies interagentes, do tipo presa-predador, donde finalmente poderemos construir o modelo de Hastings e Powell.

3.1 Modelos de crescimento contínuo para uma única espécie

Os modelos de uma única espécie são relevantes em estudos de laboratório; no mundo real, podem nos dar uma idéia de como certos fatores influenciam a dinâmica de uma população.

Representando por $N(t)$ a população de uma dada espécie no tempo t , podemos escrever, para a taxa de variação $\frac{dN}{dt}$, desta população, a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = (\text{taxa de nascimentos}) - (\text{taxa de mortes}) + (\text{taxa de migração}). \quad (3.1)$$

3.1.1 Modelo de Malthus

O modelo mais simples não inclui a migração e considera que as taxas de nascimento e mortalidade são proporcionais a N . Desta forma,

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN \quad (3.2)$$

onde b e d são constantes positivas, cuja solução, conhecida a população inicial $N(0) = N_0$, é dada por

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t} \quad (3.3)$$

Assim, se $b > d$, a população cresce exponencialmente com o tempo, enquanto que, se $b < d$, ela se extingue. O modelo da equação (3.2) foi proposto por *Malthus(1798)* e não descreve a situação real, pois a solução (3.3) implicaria que, se $b > d$, a população cresceria indefinidamente. Neste modelo a taxa de crescimento per capita é uma constante, pois $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = b - d$.

3.1.2 Modelo de Verhulst

Em 1836, *Verhulst* propôs uma modificação na equação (3.2), introduzindo um termo que limita o tamanho da população quando esta se torna muito grande. O modelo sugerido por ele foi:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (3.4)$$

onde r é a taxa de crescimento, per capita, intrínseco da população e K é denominado a *capacidade de suporte do ambiente*, que é determinada pela quantidade de recursos disponíveis.

A equação (3.4) é chamada de *equação logística*. Neste modelo a taxa de crescimento *per capita* é $r(1 - \frac{N}{K})$, a qual depende de N .

Se $N(0) = N_0$, então a solução de (3.4) é:

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{[K + N_0(e^{rt} - 1)]} \quad (3.5)$$

e, no limite quando t tende a infinito, a população tende à capacidade de suporte, ou seja,

$$N(t) \rightarrow K \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

desde que $N_0 > 0$ e $r > 0$.

Na figura 3.1 apresentamos o gráfico da solução (3.5), para diversos valores de N_0 . Todas as curvas satisfazem (3.6). Vemos que, se $0 < N_0 < K$, $N(t)$ cresce monotonicamente aproximando-se de K ; se $N_0 > K$, $N(t)$ decresce monotonicamente aproximando-se de K . Para o caso em que $0 < N_0 < K$ temos duas situações para analisar, se $0 < N_0 < \frac{K}{2}$ e se $N_0 > \frac{K}{2}$. Para o primeiro caso, a forma de $N(t)$ é uma sigmóide, indicando que a curva tem um ponto de inflexão; para o último, $N(t)$ simplesmente cresce aproximando-se de K , não existindo o ponto de inflexão para valores positivos de $N(t)$.

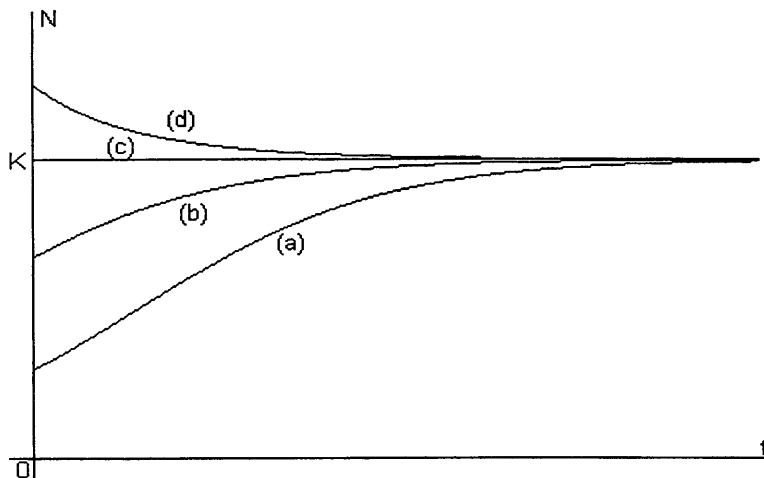


Figura 3.1: Gráfico da solução da equação (3.5) para diferentes valores de N_0 . (a) $0 < N_0 < \frac{K}{2}$; (b) $\frac{K}{2} < N_0 < K$; (c) $N_0 = K$; (d) $N_0 > K$

A existência deste ponto de inflexão é facilmente justificada através da visualização do gráfico de $F(N) \times N$, onde $F(N) = \frac{dN}{dt}$, apresentado na figura 3.2, pois para $0 < N_0 < \frac{K}{2}$, a declividade da curva é positiva e à medida que N cresce a declividade da curva vai diminuindo até que em $N = \frac{K}{2}$ esta é nula e para $N > \frac{K}{2}$ esta declividade passa a ser negativa, ou seja, a população continua a crescer mas de

forma mais lenta. Esta mudança de sinal da derivada de $F(N)$, em $N = \frac{K}{2}$, indica a presença de um ponto de inflexão em $N = \frac{K}{2}$.

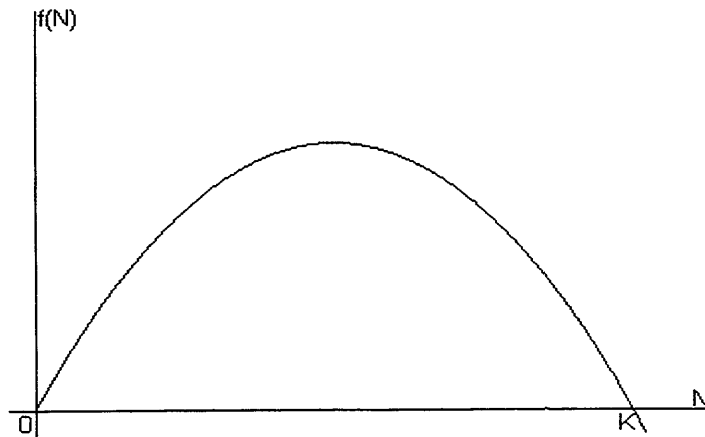


Figura 3.2: Gráfico de $F(N) \times N$, para o Modelo de Verhulst: $\frac{dN}{dt} = F(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$

3.1.3 Determinação das soluções estacionárias

Define-se *estado estacionário* ou *estado de equilíbrio*, como a solução N^* , tal que

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=N^*} = 0 \quad (3.7)$$

Isto significa que, em $N = N^*$, a taxa de variação da população com o tempo é nula; N^* é, portanto, o análogo de *ponto fixo* na descrição para modelos discretos.

Genericamente, para uma população cuja dinâmica é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad (3.8)$$

onde $F(N)$ é uma função de N , as soluções estacionárias N^* serão determinadas a partir da condição $F(N^*) = 0$. Mostraremos, a seguir, que as soluções estacionárias N^* são linearmente estáveis a pequenas perturbações se $F'(N^*) < 0$, e linearmente

instáveis se $F'(N^*) > 0$. Para isto, consideramos valores de $N(t)$ próximos a N^* , isto é, tais que:

$$N(t) = N^* + \eta(t) \quad (3.9)$$

onde $\eta(t)$ representa uma pequena perturbação, positiva ou negativa. Efetuando a expansão de $F(N^* + \eta(t))$ em série de Taylor em torno de N^* , a equação (3.8) torna-se:

$$\frac{d\eta}{dt} = F(N^* + \eta) \approx F(N^*) + \eta F'(N^*) + O(\eta^2) \quad (3.10)$$

Mantendo somente os termos até primeira ordem em η (aplicação do teorema do valor médio - apêndice A) e lembrando que $F(N^*) = 0$ obtemos:

$$\frac{d\eta}{dt} \approx \eta F'(N^*), \quad (3.11)$$

que tem como solução:

$$\eta(t) \propto e^{[F'(N^*)t]} \quad (3.12)$$

Assim, o módulo de η cresce ou decresce, dependendo do sinal de $F'(N^*)$. Se $F'(N^*) > 0$, $|\eta(t)|$ cresce com o tempo, o que significa que qualquer perturbação no sistema cresce em módulo quando $t \rightarrow \infty$ e N^* é um estado estacionário instável; se $F'(N^*) < 0$, então $|\eta(t)|$ decresce com o tempo, ou seja, quando $t \rightarrow \infty$ qualquer perturbação que impusermos ao sistema a partir do estado de equilíbrio nos leva de volta a ele e, assim, N^* é um estado estacionário estável.

Tomando como exemplos os modelos acima, temos que:

1. Para o *modelo de Malthus*, o estado estacionário é dado por:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=N^*} = 0 \quad \rightarrow \quad (b-d)N^* = 0 \quad \rightarrow \quad N^* = 0 \quad (3.13)$$

A derivada $F'(N^*)$ é igual a $(b-d)$, independente de N^* . Portanto, o único estado estacionário, $N^* = 0$, será estável se $b < d$ pois, neste caso, tem-se $F'(N^*) < 0$; se $b > d$, N^* será instável.

2. Para o *modelo de Verhulst* existem dois estados estacionários para a equação (3.4), a saber, $N^* = 0$ e $N^* = K$. A derivada de $F(N)$

calculada no ponto de equilíbrio é dada por:

$$F'(N^*) = r \left(1 - \frac{2N^*}{K} \right) \quad (3.14)$$

Verificamos, da equação (3.14), que $N^* = 0$ é instável, pois $F'(0) = r > 0$, enquanto que $N^* = K$ é estável, pois $F'(K) = -r < 0$.

A capacidade de suporte K determina o tamanho da população no estado estacionário estável, enquanto que r mede a taxa na qual a população se aproxima desta capacidade de suporte.

Observamos também que os equilíbrios N^* de (3.8) são zeros de $F(N)$, isto é, são os valores de N para os quais, em um gráfico de $F(N) \times N$, $F(N)$ intercepta o eixo N . Neste gráfico, o sinal de $F'(N^*)$ é obtido traçando-se a reta tangente à curva, no ponto de equilíbrio e analisando sua inclinação. Se a inclinação for positiva o ponto de equilíbrio é instável, e se a inclinação for negativa, o ponto de equilíbrio é estável.

No gráfico de $F(N) \times N$, apresentado na figura 3.2, para o modelo de Verhulst, os valores de N^* são, como visto acima, $N^* = 0$ e $N^* = K$.

De fato, tanto deste gráfico quanto daquele apresentado na figura 3.1, observamos que $N^* = K$ é estável, enquanto que $N^* = 0$ é instável.

3.2 Modelos de crescimento contínuo para duas espécies interagentes

Em geral, existe um conjunto de espécies interagindo chamado de *cadeia trófica*. Quando espécies interagem a dinâmica de cada uma das espécies é afetada pela presença das outras espécies.

Representando por N_i , $i = 1, 2, \dots, n$, as populações de n espécies distintas interagentes, um sistema de equações diferenciais autônomas, para modelar

esta cadeia trófica, terá a forma:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= F_1(N_1, N_2, \dots, N_n) \\ \frac{dN_2}{dt} &= F_2(N_1, N_2, \dots, N_n) \\ &\vdots \\ \frac{dN_n}{dt} &= F_n(N_1, N_2, \dots, N_n)\end{aligned}\tag{3.15}$$

Os estados estacionários deste sistema serão n -uplas $(N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*)$, coordenadas de um ponto no *espaço de fases* n -dimensional, tais que esteja satisfeito o seguinte conjunto de condições:

$$\frac{dN_1}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dN_n}{dt} = 0.\tag{3.16}$$

No que segue, nos concentraremos em sistemas de duas espécies.

É conveniente classificar a interação direta entre duas espécies em três categorias:

1. *Competição*(-,-). Cada uma das espécies inibe o crescimento da outra.
2. *Comensalismo*(+,+). Cada uma das espécies acelera o crescimento da outra.
3. *Predação*(+,-). Uma espécie, o predador, inibe o crescimento da outra, a presa; e esta por sua vez acelera o crescimento do predador.

Na classificação acima, os sinais entre parênteses são os sinais dos termos de interação nas equações diferenciais para a taxa de crescimento de cada uma das populações. O sinal + indica que a espécie está sendo beneficiada pela interação com a outra espécie, e o sinal – indica que a espécie está sendo prejudicada pela interação com a outra espécie.

Um efeito de inibir significa ou um aumento na taxa de mortalidade ou uma diminuição na taxa de natalidade, enquanto que um efeito de acelerar implica

ou um aumento da taxa de natalidade ou uma diminuição na taxa de mortalidade (Smith 1974).

3.2.1 Modelos presa-predador de Lotka-Volterra

Volterra, em 1926, propôs um modelo simples para a predação de uma espécie por outra, para explicar os níveis oscilatórios de certa captura de peixes no *Adriático*. Estas mesmas equações haviam sido derivadas por *Lotka* em 1920, para uma reação química hipotética e, por isso, o modelo abaixo descrito é conhecido como o modelo de *Lotka-Volterra*.

Sendo $N(t)$ a população de presas (base da cadeia trófica) e $P(t)$ a população de predadores (topo da cadeia trófica) no tempo t , o modelo de *Lotka-Volterra* é escrito como segue:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= N(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d)\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde a , b , c e d são constantes positivas.

Este modelo é baseado nas seguintes hipóteses:

1. na ausência de predação, a população de presas cresce exponencialmente numa forma Malthusiana, isto é, de acordo com o termo aN ; isto supõe que existe abundância de alimento (plantas em um lago) para as presas;
2. o efeito da predação é reduzir a taxa de crescimento da população de presas por um termo proporcional às populações de presa e predador, isto é, de acordo com o termo $-bNP$, b é a frequência de captura por predador;
3. na ausência de presas para o sustento, a população de predadores decai de forma exponencial, de acordo com uma taxa $-dP$; os predadores sobrevivem alimentando-se de presas;

4. a contribuição da população de presas para a taxa de crescimento da população de predadores é cNP , isto é, é proporcional a quantidade de presas disponíveis bem como ao tamanho da população de predadores; c é a frequência de nascimento de predadores, por presa consumida.

Pode-se dizer que os termos bNP e cNP representam a conversão de energia de uma fonte para outra. Como um primeiro passo na análise do modelo de Lotka-Volterra, adimensionalizaremos o sistema (3.17) definindo uma nova variável independente, o tempo adimensional τ , e como novas variáveis dependentes, as populações adimensionais u (população de presas) e v (população de predadores), e ainda um parâmetro adimensional α , como segue:

$$u(\tau) \equiv \frac{cN(t)}{d}, \quad v(\tau) \equiv \frac{bP(t)}{a}, \quad \tau \equiv at, \quad \alpha \equiv \frac{d}{a}; \quad (3.18)$$

assim o sistema de equações diferenciais (3.17) torna-se:

$$\frac{du}{d\tau} = R(u, v), \quad \frac{dv}{d\tau} = S(u, v). \quad (3.19)$$

onde definimos $R(u, v) \equiv u(1 - v)$ e $S(u, v) \equiv \alpha v(u - 1)$.

Neste novo sistema de equações diferenciais, todas as quantidades envolvidas são adimensionais e, além disso, o número dos parâmetros ficou reduzido de quatro (a, b, c, d) para um único parâmetro α , igual à razão entre a taxa de morte dos predadores e a taxa de crescimento linear da população de presas. Os estados estacionários são soluções do sistema algébrico

$$\begin{aligned} u^*(1 - v^*) &= 0 \\ \alpha v^*(u^* - 1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Obtém-se, portanto, $(u^*, v^*) = (0, 0)$ e $(u^*, v^*) = (1, 1)$.

No plano de fase (u, v) , as trajetórias são soluções da equação diferencial:

$$\frac{dv}{du} = \alpha \frac{v(u - 1)}{u(1 - v)}, \quad (3.21)$$

as quais têm a forma

$$\alpha u + v - \ln(u^\alpha v) = H \quad (3.22)$$

onde H é uma constante arbitrária que satisfaz a condição: $H > 1 + \alpha$. Para um dado H , a solução (3.22) representa uma trajetória fechada, mais especificamente uma oscilação em torno do ponto $(1,1)$ no espaço de fase uv e implica soluções periódicas em τ para u e v , como podemos ver pela figura 3.3. A equação (3.22) representa uma lei de conservação.

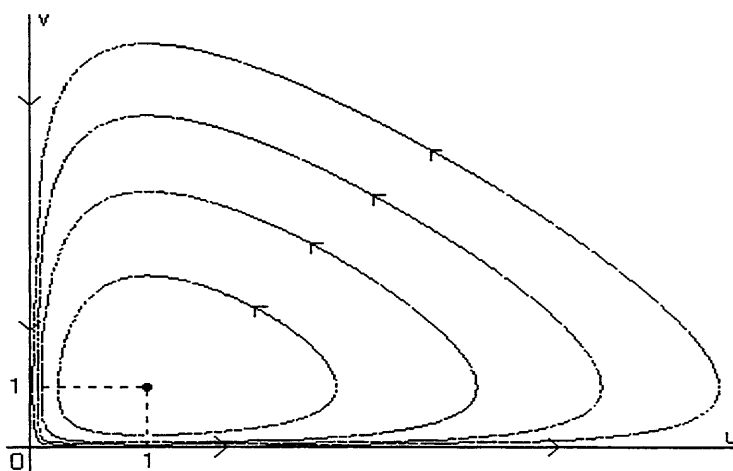


Figura 3.3: Trajetórias no plano de fase uv , resultantes do modelo de Lotka-Volterra

Também da figura 3.3 percebe-se que o modelo de Lotka-Volterra não é o adequado para descrever sistemas do tipo presa-predador: as soluções são *estruturalmente instáveis* (Apêndice B), visto que qualquer pequena perturbação moverá a solução para outra trajetória e esta não estará, em todos os seus pontos próxima da solução original.

A órbita $\mathbf{R}(t)$ para $t \geq 0$ de uma dada solução, periódica ou não, pode ser descrita como uma curva limitada por um tubo de raio ϵ no espaço de fase \mathcal{R}^m . Se todas as órbitas iniciando em $t = 0$ dentro de uma distância δ de $\mathbf{R}(0)$ permanecer dentro do tubo para todo $t > 0$ então \mathbf{R} é orbitalmente estável (Drazin 1993). Esta região também é denominada *bacia de atração* da órbita.

Para investigar sobre a estabilidade dos estados estacionários do sistema de equações diferenciais (3.19), determinados acima, considera-se uma aproximação linear deste sistema em torno destes pontos (u^*, v^*) . Considerando pontos (u, v) suficientemente próximos de (u^*, v^*) , isto é,

$$u(\tau) = u^* + \eta(\tau) \quad (3.23)$$

$$v(\tau) = v^* + \xi(\tau), \quad (3.24)$$

onde $|\eta| \ll 1$ e $|\xi| \ll 1$, e somente os termos lineares (aplicação do teorema do valor médio - apêndice A) em $(u - u^*)$ e $(v - v^*)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} &\approx R(u^*, v^*) + \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{(u^*, v^*)} \eta + \left. \frac{\partial R}{\partial v} \right|_{(u^*, v^*)} \xi \\ \frac{d\xi}{d\tau} &\approx S(u^*, v^*) + \left. \frac{\partial S}{\partial u} \right|_{(u^*, v^*)} \eta + \left. \frac{\partial S}{\partial v} \right|_{(u^*, v^*)} \xi \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $\eta = (u - u^*)$ e $\xi = (v - v^*)$, são valores, em módulo, pequenos. Visto que $R(u^*, v^*) = 0$ e $S(u^*, v^*) = 0$, o sistema acima pode ser escrito, em forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\eta}{d\tau} \\ \frac{d\xi}{d\tau} \end{bmatrix} \approx \mathbf{A} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

onde definimos a matriz

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{(u^*, v^*)} & \left. \frac{\partial R}{\partial v} \right|_{(u^*, v^*)} \\ \left. \frac{\partial S}{\partial u} \right|_{(u^*, v^*)} & \left. \frac{\partial S}{\partial v} \right|_{(u^*, v^*)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - v^* & -u^* \\ \alpha v^* & \alpha(u^* - 1) \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

denominada *matriz comunidade* do sistema. A solução é da forma:

$$\begin{bmatrix} \eta(\tau) \\ \xi(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{l}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{m}e^{\lambda_2 t} \quad (3.28)$$

onde \mathbf{l} e \mathbf{m} são os autovetores correspondentes aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Os autovalores λ_1 e λ_2 são dados pelo polinômio característico da matriz \mathbf{A} e assim são soluções de:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (3.29)$$

Para $(u^*, v^*) = (0, 0)$ denominado estado de equilíbrio trivial, a matriz \mathbf{A} em (3.26) é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\alpha$.

A solução de (3.26) com \mathbf{A} dada por (3.30) tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \eta(\tau) \\ \xi(\tau) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^\tau + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\alpha\tau} \quad (3.31)$$

isto é, $\eta(\tau) = c_1 e^\tau$ e $\xi(\tau) = c_2 e^{-\alpha\tau}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Então quando $\tau \rightarrow \infty$, tem-se $|\eta(\tau)|$ cresce exponencialmente enquanto que $|\xi(\tau)|$ decresce exponencialmente pois $\alpha > 0$, donde concluímos que este ponto é linearmente instável. Como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ este é um *ponto de sela* (Apêndice C), exceto estritamente ao longo de $\mathbf{m} = c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, qualquer pequena perturbação cresce exponencialmente em módulo.

Para $(u^*, v^*) = (1, 1)$ temos que a matriz \mathbf{A} em (3.26) é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

e com os autovalores λ dados por:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 = \pm i\sqrt{\alpha} \quad (3.33)$$

Assim, o único equilíbrio não trivial do modelo de Lotka-Volterra, $(u^*, v^*) = (1, 1)$, é uma singularidade do tipo *centro* (neutralmente estável), uma vez que os autovalores são puramente imaginários. A solução de (3.26), com \mathbf{A} dada por (3.32) é da forma:

$$\begin{bmatrix} \eta(\tau) \\ \xi(\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{l}e^{i\sqrt{\alpha}\tau} + \mathbf{m}e^{-i\sqrt{\alpha}\tau} \quad (3.34)$$

onde \mathbf{l} e \mathbf{m} são os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , respectivamente. Assim, as soluções na vizinhança do ponto singular $(u^*, v^*) = (1, 1)$ são periódicas em τ com período $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$. Em termos dimensionais, vemos de (3.18) que este período é $T = 2\pi \left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$, isto é, o período é proporcional à raiz quadrada da razão da taxa linear de crescimento intrínseco (a) da população de presas pela taxa de mortalidade (d) dos predadores. Mesmo tratando apenas com pequenas perturbações em torno do estado estacionário $(u^*, v^*) = (1, 1)$, vemos como o período depende da taxa de crescimento intrínseco das presas e da taxa de mortalidade dos predadores.

3.2.2 Ciclo limite - Teorema de Poincaré-Bendixson

O modelo de Lotka-Volterra, apresentado na seção anterior, mesmo sendo não realístico, mostra que simples interações presa-predador podem resultar num comportamento oscilatório das populações. Heuristicamente, espera-se que, se a população de presas aumenta, a população de predadores também aumente. Entretanto, mais predadores consomem mais presas, cuja população começa a decrescer; com menos alimento, a população de predadores também inicia seu declínio, e, quando este nível populacional chega a um valor suficientemente baixo, isto permite um novo crescimento da população de presas e o ciclo reinicia. Dependendo do sistema, tais oscilações podem decair ou crescer ou tender a uma oscilação do tipo *ciclo limite* ou mesmo exibir um comportamento caótico, embora no último caso, para modelos contínuos, precisamos de no mínimo três espécies interagindo, ou o modelo precisa conter alguns termos de retardo (Murray, 1993).

Dada uma solução gerada pela evolução de uma condição inicial no tempo, um ciclo limite é, no espaço de fase, uma curva fechada que pode atrair soluções suficientemente próximas a ele. Enfatizamos que este não é o caso da família de trajetórias fechadas que constituem as soluções do modelo de Lotka-Volterra, pois qualquer pequena perturbação fará com que elas se movam para outras trajetórias também fechadas; estas soluções não estarão, em todos os seus pontos, próximas da solução original. Uma trajetória de ciclo limite estável é tal que qualquer per-

turbação a partir da trajetória decai para zero. Um exemplo de ciclo limite, no qual foram eliminados os transientes antes de se chegar à solução estável, é mostrado na figura 3.4. Um teorema que prova a existência de ciclos limite (Aligood 1997) é o

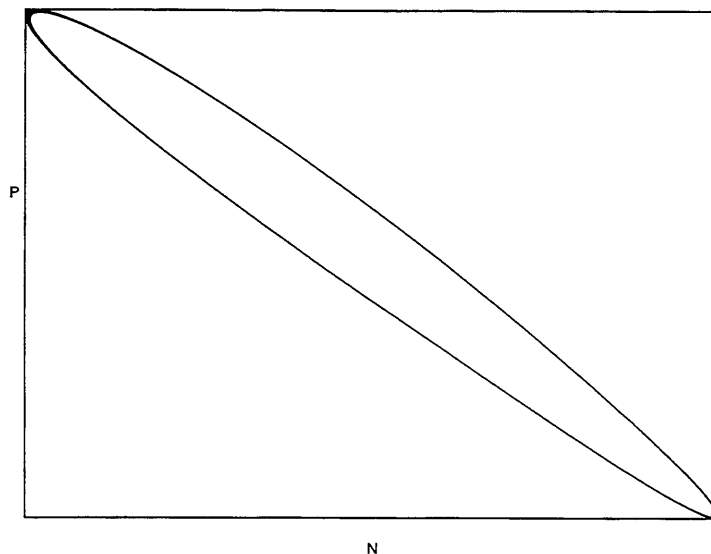


Figura 3.4: Gráfico de um ciclo limite no plano de fase NP

teorema de *Poincaré-Bendixson*, enunciado como segue:

Teorema de Poincaré Bendixson: “Seja R uma região limitada e fechada consistindo de pontos não singulares de um sistema $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ tal que alguma trajetória H do sistema está inteiramente dentro da região R . Então, ou H é uma trajetória fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada ou ela termina em um ponto de equilíbrio.”

O teorema implica, em particular, que se a região R não contém pontos de equilíbrio, e alguma trajetória H permanece em R , então R deve conter uma solução periódica (ciclo limite).

3.2.3 Modelos presa-predador mais realísticos

Um dos motivos que torna o sistema Lotka-Volterra anteriormente descrito (equação (3.17)) não realístico, é o fato que, na ausência de predação, a população de presas cresce indefinidamente (abundância de alimento para as presas).

Na forma como foi escrita a equação (3.17), os termos do lado direito são as taxas de crescimento, as quais dependem da densidade, de uma forma muito restrita; as taxas de crescimento per capita de cada espécie dependem apenas da população da outra espécie. Para ser mais realístico, as taxas de crescimento per capita de cada população deveriam depender tanto da população de presas quanto da população de predadores.

Um primeiro passo razoável para que o modelo de Lotka-Volterra seja mais realístico é considerar o crescimento da população de presas, na ausência de predadores, como logístico; assim, esta cresceria tendendo a um valor limite máximo, que vem a ser sua capacidade de suporte. Além disso, no termo de interação presente em $\frac{dN}{dt}$, deveríamos ter a presença de um termo que descreva a relação entre a quantidade de presas presentes e a voracidade dos predadores. Assim, podemos escrever a equação que descreve o crescimento da população de presas como:

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N, P), \quad \text{com} \quad f(N, P) = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) - PR(N), \quad (3.35)$$

onde $R(N)$ é a resposta funcional do predador à mudança na densidade de presas e K é a capacidade de suporte para a presa quando $P \equiv 0$. O termo $-PR(N)$ é chamado de termo de predação, na taxa de crescimento per capita da população de presas.

Esta resposta funcional também poderia ser incluído na equação diferencial que descreve a taxa de variação da população de predadores, como segue:

$$\frac{dP}{dt} = Pg(N, P) \quad \text{com} \quad g(N, P) = -d + cR(N) \quad (3.36)$$

A resposta funcional dos predadores à densidade de presas, mede a taxa na qual as presas estão sendo capturadas pelo predador, como uma função da densidade de presas.

Holling classifica em 3 tipos as respostas funcionais de um predador à densidade de presas (Smith 1974):

1. tipo *I* : $R(N) = b > 0$, isto é, o predador captura as presas numa taxa constante, como no modelo de Lotka-Volterra (figura 3.5);
2. tipo *II*: $R(N) = \frac{A}{N+B}$ ou $R(N) = A \frac{[1-e^{-aN}]}{N}$, onde A , B , e a são constantes positivas, típico de predador invertebrado;
3. tipo *III*: $R(N) = \frac{AN}{N^2+B^2}$, onde A é uma constante positiva; típico de predador vertebrado.

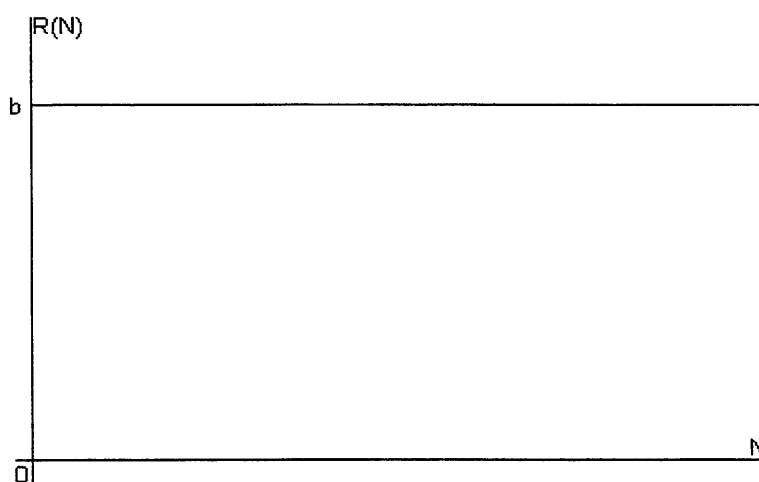


Figura 3.5: Gráfico da resposta funcional tipo *I* para o modelo de Lotka-Volterra, $R(N) = b$

A forma das respostas funcionais tipo *II* e tipo *III* são mostradas nas figuras 3.6 a 3.8. Tanto as do tipo *II* quanto as do tipo *III* contemplam situações em que, quando a população de presas se torna muito grande, a resposta do predador a este aumento seja capturar cada vez menos presas. O que distingue esses 2 tipos, na classificação de Holling, é seu comportamento para um pequeno número de presas: o predador vertebrado (tipo *III*) “não nota” a presença de presas, quando a população destas é muito pequena.

Para o modelo de Lotka-Volterra, a resposta do predador $NR(N)$ à densidade de presas N é bN , que cresce de forma linear à medida que N cresce (figura 3.9).

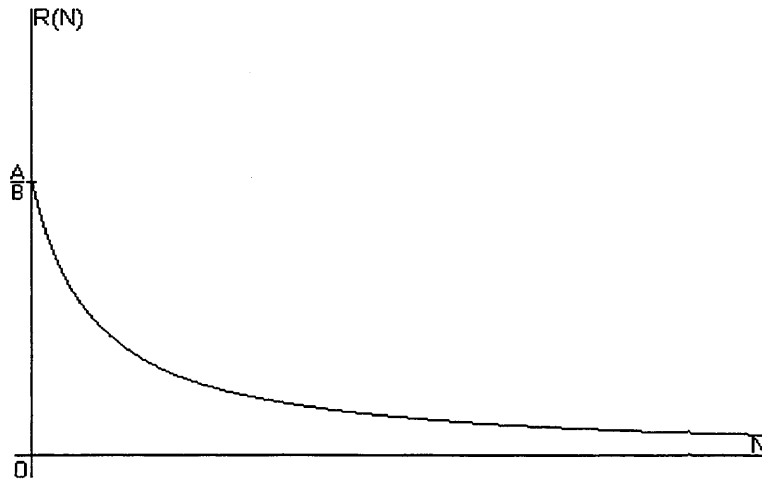


Figura 3.6: Gráfico da resposta funcional tipo II, $R(N) = \frac{A}{N+B}$

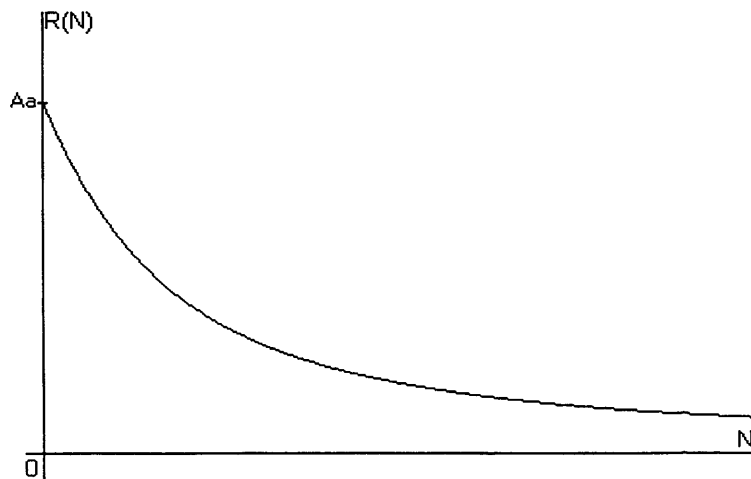


Figura 3.7: Gráfico da resposta funcional tipo II, $R(N) = A \frac{[1 - e^{-aN}]}{N}$

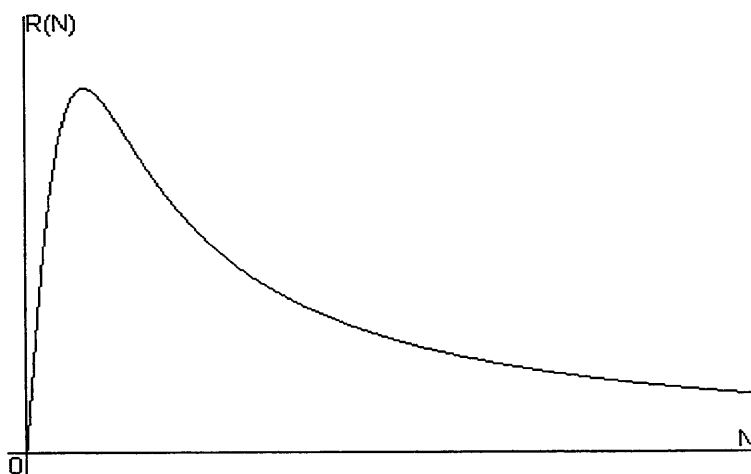


Figura 3.8: Gráfico da resposta funcional tipo *III*, $R(N) = \frac{AN}{N^2+B^2}$

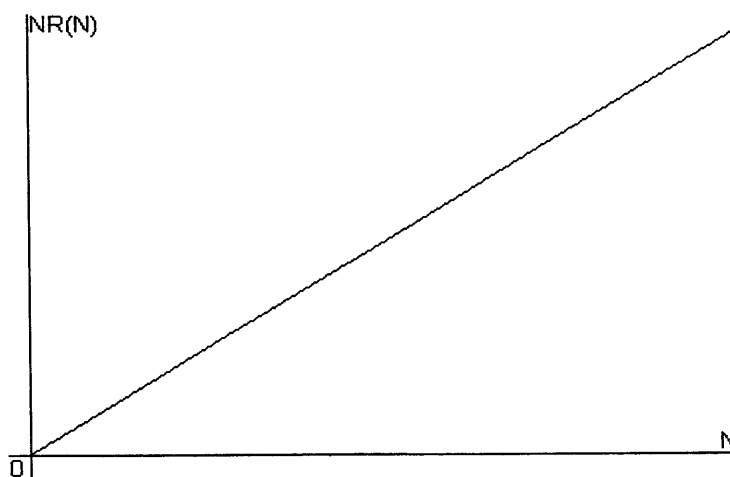


Figura 3.9: Gráfico da resposta do predador $NR(N) = bN$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo *I* apresentada na figura 3.5

Em vez disto, para as respostas funcionais tipos *II* e *III*, correspondem termos $NR(N)$ que saturam para grandes valores de N , como mostrado nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12.

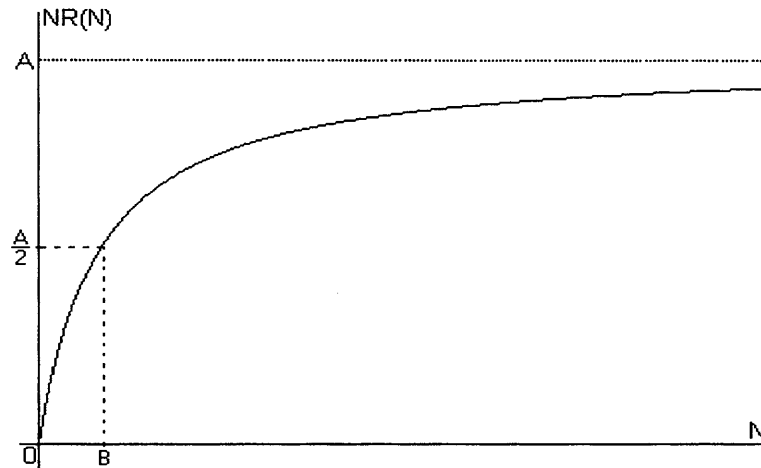


Figura 3.10: Gráfico da resposta do predador $NR(N) = \frac{AN}{N+B}$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo *II* mostrada na figura 3.6

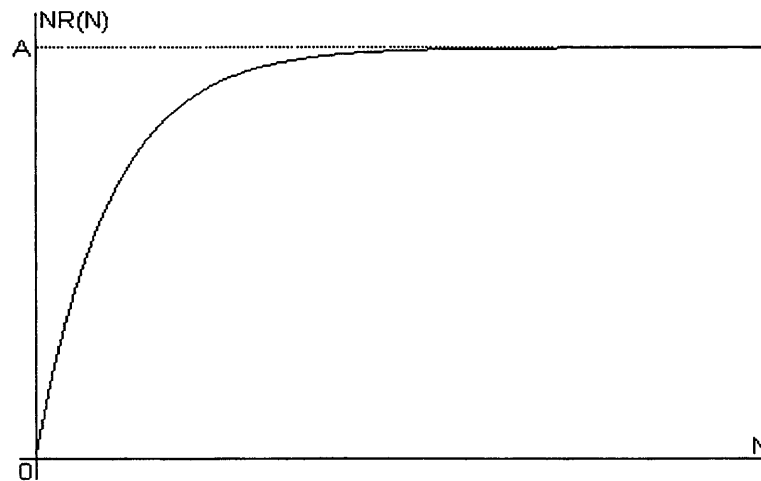


Figura 3.11: Gráfico da resposta do predador $NR(N) = A[1 - e^{-aN}]$ à densidade de presas N , para a resposta funcional tipo *II* mostrada na figura 3.7

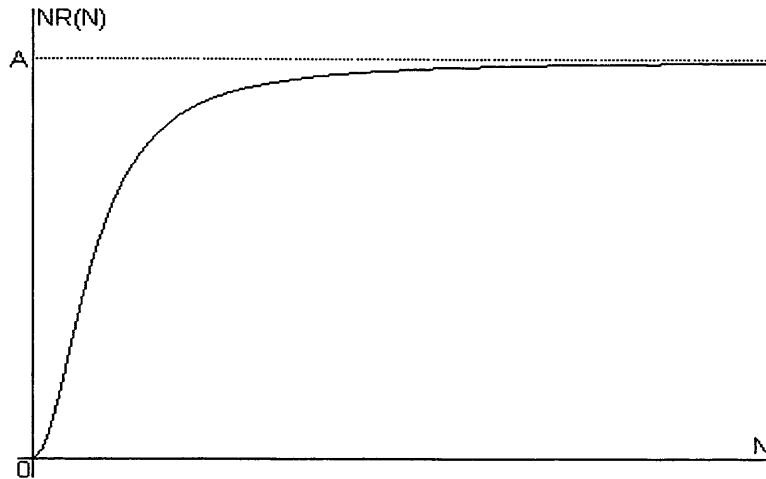


Figura 3.12: Gráfico da resposta do predador $NR(N) = \frac{AN^2}{N^2+B^2}$ à densidade de presas, para a resposta funcional tipo *III* mostrada na figura 3.8

Cabe, ainda, observar (figura 3.10) que o parâmetro B , na expressão $\frac{AN}{N+B}$, onde $A > 0$ e $B > 0$, tem o seguinte significado: é o nível populacional de presas, para o qual este termo é igual à metade do seu máximo, visto que se trata de uma função monotonicamente crescente e

$$\frac{AN}{B+N} \Big|_{N=B} = \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{AN}{N+B} \right). \quad (3.37)$$

A forma saturante $\frac{AN}{B+N}$ torna-se aproximadamente constante, para altas densidades populacionais enquanto que, em baixas densidades populacionais, são aproximadamente lineares. A saturação para N grande é um reflexo da limitada capacidade do predador, ou da falta de persistência do predador, quando a presa é abundante. Pode-se mostrar (Murray 1993) que o modelo

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N \left[r \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{AP}{N+B} \right] \\ \frac{dP}{dt} &= P \left(-d + \frac{CN}{N+B} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde os parâmetros r , K , A , B , C e d são constantes positivas, exhibe propriedades de bifurcação, o que não ocorre com o modelo de Lotka-Volterra. Enquanto se varia os parâmetros do sistema, atravessa-se do domínio de estabilidade para o de instabilidade de um equilíbrio não trivial, e o estado estacionário bifurca para uma

solução periódica de ciclo limite. Neste regime de instabilidade deste equilíbrio, que ocorre em certo domínio do espaço de parâmetros, aplica-se o teorema de Poincaré-Bendixson, donde se conclui que a trajetória do sistema tende a um ciclo limite.

Uma *bifurcação de Hopf* ocorre quando, para um par de autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$ (α e $\beta \in \mathfrak{R}$), em $\alpha = 0$ passarmos de um ponto de equilíbrio estável ($\alpha < 0$) para um ciclo limite estável ($\alpha > 0$).

3.3 O modelo de Hastings e Powell para três espécies interagentes

Na seção anterior, vimos que os modelos contínuos para duas espécies apresentam dois padrões básicos: ou se aproximam de um equilíbrio, ou se aproximam de um ciclo limite.

Mas, para entender a essência do comportamento de um sistema complexo, é necessário incorporar um maior número de espécies. O modelo de Hastings e Powell(1991) pretende descrever, através de um sistema de três equações diferenciais acopladas, o comportamento dinâmico de uma cadeia trófica composta por três espécies de peixes em um lago.

Representando por $Z(T)$, $Y(T)$, e $X(T)$, as populações de cada uma dessas espécies em um instante de tempo T , e estabelecendo a hierarquia desta cadeia, de tal modo que Z (predador para Y) ocupe o topo da cadeia, Y (predador para X e presa para Z) no nível intermediário, e X (presa para Y) em sua base, Hastings e Powell formularam um modelo muito simples, do qual, dependendo da escolha dos parâmetros, podem resultar dinâmicas caóticas.

Os diversos termos que compõem o sistema dinâmico em questão, têm seu significado estabelecido nos modelos que apresentamos previamente neste capítulo, para um menor número de espécies. O modelo envolve um conjunto de dez parâmetros,

$\{R_0, K_0, A_1, B_1, A_2, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2\}$, como segue:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= X \left[R_0 \left(1 - \frac{X}{K_0} \right) - C_1 Y F_1(X) \right] \\ \frac{dY}{dT} &= Y [-D_1 + X F_1(X) - Z F_2(Y)] \\ \frac{dZ}{dT} &= Z [-D_2 + C_2 Y F_2(Y)],\end{aligned}\tag{3.39}$$

onde

$$F_1(X) \equiv \frac{A_1}{X + B_1}\tag{3.40}$$

é a resposta funcional (tipo *II*) de Y à densidade de suas presas X e,

$$F_2(Y) \equiv \frac{A_2}{Y + B_2}\tag{3.41}$$

é a resposta funcional (tipo *II*) de Z à densidade de suas presas Y .

O parâmetro R_0 é a taxa de crescimento intrínseco da população X , enquanto que K_0 é a capacidade de suporte do ambiente para a população X ; C_1^{-1} e C_2 são, respectivamente, as taxas de conversão de presa-predador para as espécies Y e Z , respectivamente; D_1 e D_2 são as taxas de mortalidade de cada uma destas espécies.

Podemos, ainda, observar que este modelo satisfaz o que segue:

1. na ausência de Y , a população X tem sua dinâmica estabelecida pela equação logística, ou modelo de Verhulst (subseção 3.1.2):

$$\frac{dX}{dT} = R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0} \right)\tag{3.42}$$

enquanto que a população Z tende à extinção de acordo com a equação diferencial:

$$\frac{dZ}{dT} = -D_2 Z\tag{3.43}$$

2. na ausência de Z , o sistema reduz-se para

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= X \left[R_0 \left(1 - \frac{X}{K_0} \right) - C_1 Y F_1(X) \right] \\ \frac{dY}{dT} &= Y [-D_1 + X F_1(X)]\end{aligned}\tag{3.44}$$

que (subseção 3.2.3) dependendo dos valores dos parâmetros apresentará dois estados estacionários sendo um deles o trivial, estando sujeito a uma bifurcação para uma solução periódica do tipo ciclo limite.

3. evidentemente, decorre do fato de que a população Z só se alimenta de X , que na ausência desta última, tanto Y quanto Z vão à extinção.

No capítulo 5, estabeleceremos os valores numéricos atribuídos aos parâmetros envolvidos no modelo de Hastings e Powell, os quais além de serem escolhidos de modo a serem biologicamente razoáveis para cadeia trófica de três espécies de peixes em um lago, contemplavam a possibilidade de apresentar soluções caóticas.

Em nosso trabalho, após investigar o comportamento da dinâmica global do sistema, para diversos valores dos parâmetros envolvidos, nos fixamos em uma situação caracterizada por um atrator caótico e, sobre este, aplicamos uma técnica de controle de caos, a qual nos permite estabilizar alguma das órbitas periódicas instáveis imersas no atrator.

4 CAOS: CARACTERIZAÇÃO E CONTROLE

A ocorrência de soluções caóticas, em problemas relativamente simples (por exemplo, em mapas unidimensionais não inversíveis como o mapa logístico apresentado no capítulo 1), tem estimulado grande número de pesquisas nos últimos anos, e várias questões estão em aberto. Soluções caóticas são muito mais comuns do que se imaginava e são atualmente investigadas na descrição de grande variedade de fenômenos.

Por outro lado, visto que sobre um atrator caótico estão imersas um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis (capítulo 3), a presença de caos tem sido considerada de interesse e vantajosa, na medida que em alguma destas órbitas pode corresponder a um desempenho desejável para o sistema. Efetuar o controle de caos significa estabilizar o sistema em alguma das órbitas que estão imersas no atrator caótico, e a ampla flexibilidade na escolha em questão coloca o atrator caótico em situação de vantagem sobre os demais estados assintóticos de um sistema.

4.1 Sensibilidade às condições iniciais

Embora freqüentemente um atrator de um sistema dinâmico possa ser simultaneamente *caótico* e *estranho*, a primeira característica é relacionada com uma descrição da dinâmica sobre o atrator, enquanto que a última refere-se à geometria do atrator. Nosso estudo neste trabalho fundamenta-se principalmente sobre os aspectos dinâmicos.

Uma das características de um atrator sobre o qual a dinâmica é *caótica* é a extrema sensibilidade às condições iniciais. Isto significa que, com condições iniciais muito próximas, as soluções de um sistema contínuo podem diferir bastante, após algum intervalo de tempo (ou após algumas iterações, para sistemas discretos). Como exemplo, apresentamos nas figuras 4.1 e 4.2, os gráficos $x_i \times i$, para o mapa

logístico (capítulo 1)

$$x_{i+1} = px_i(1 - x_i), \quad (4.1)$$

ambos correspondendo a $p = 3.65$, sendo que, para o primeiro, usamos $x_0 = 0.3$ e o segundo corresponde a $x_0 = 0.305$; observamos que as duas soluções permanecem próximas durante aproximadamente 13 iterações, mas, depois disso, seus gráficos são bastante distintos; certamente, não seria possível usar uma dessas soluções para estimar o valor da outra, para $i > 25$. Então, da alta sensibilidade às condições iniciais, a qual por sua vez decorre do fato de que o mapa é não linear, resulta a *imprevisibilidade* no comportamento do sistema.

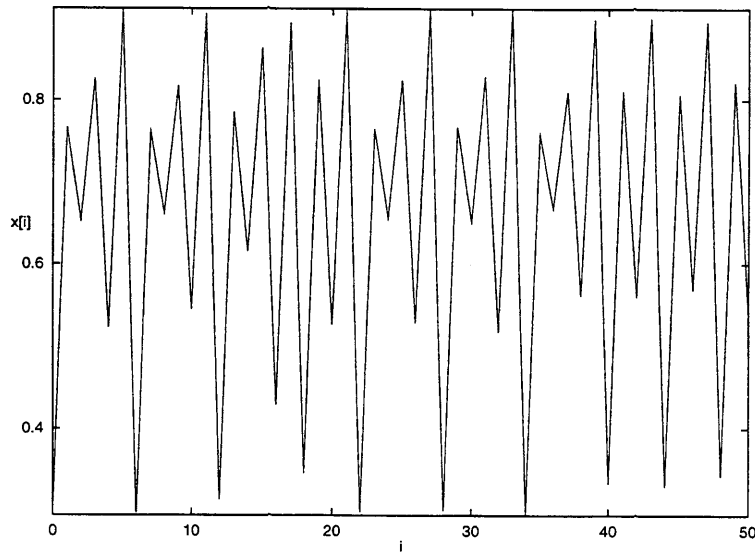


Figura 4.1: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1 - x_i)$, iniciando com a condição inicial $x_0 = 0.3$

Cabe enfatizar que a situação de caos acima descrita é devida à ampliação exponencial produzida pelas não linearidades do sistema, nas pequenas diferenças inicialmente existentes (nas condições iniciais), e correspondem a leis de evolução determinísticas, isto é, sem inclusão de ruído nem flutuações.

Do ponto de vista geométrico, um atrator é dito *estranho*, quando sua dimensão não for um número inteiro; é, portanto, um *fractal*. Existem atratores caóticos que não são estranhos (por exemplo, os mapas unidimensionais) e também existem atratores estranhos que não são caóticos, mas para a maioria dos casos en-

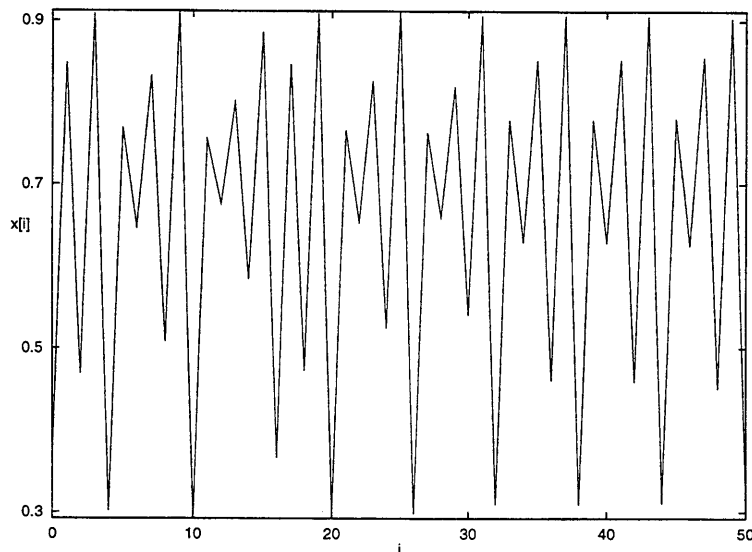


Figura 4.2: Gráfico $x_i \times i$ para o mapa $x_{i+1} = 3.65x_i(1-x_i)$, iniciando com a condição inicial $x_0 = 0.305$

volvendo equações diferenciais (sistemas dinâmicos contínuos), “estranhez” e “caoticidade” ocorrem simultaneamente (Ott, 1992).

Lembrando que, em um sistema dinâmico contínuo dissipativo, as soluções geram elementos de volume que se contraem, de maneira que a dinâmica tende a uma região limitada no espaço de fase, a característica de “caoticidade” (pontos inicialmente e arbitrariamente próximos estarão exponencialmente separados após um intervalo de tempo suficientemente longo) implica em que tais atratores resultem de combinações, em pelo menos uma direção, de dobras juntamente com um número infinito de expansões, além de contrações em outras direções. Isto exige pelo menos uma dinâmica tridimensional. A quantificação destas contrações e expansões no espaço de fase será efetuada através dos expoentes de Lyapunov, cuja definição estabeleceremos na próxima seção.

4.2 Expoentes de Lyapunov

Nesta seção apresentaremos somente o cálculo dos expoentes de Lyapunov para sistemas dinâmicos contínuos.

Dado um sistema dinâmico contínuo num espaço de fase n -dimensional, uma n -esfera infinitesimal de condições iniciais evoluirá para um n -elipsóide, devido à deformação produzida pelo fluxo. O i -ésimo expoente de Lyapunov é definido em termos do comprimento do i -ésimo eixo principal do elipsóide, $p_i(t)$, como segue:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log_2 \frac{p_i(t)}{p_i(0)} \quad (4.2)$$

onde os λ 's são ordenados em ordem decrescente de magnitude.

Assim, os expoentes de Lyapunov estão relacionados à natureza de expansão e contração das diferentes direções no espaço de fase. Uma vez que a orientação do elipsóide muda continuamente quando ele evolui, as direções associadas com um dado expoente variam de maneira complicada através do atrator. Não podemos falar, portanto, de uma direção bem definida associada a um dado expoente.

A expansão exponencial indicada por um expoente de Lyapunov positivo é incompatível com o movimento num atrator limitado, a menos que algum tipo de processo de contração junte trajetórias que estão a princípio muito distantes uma da outra. Cada expoente positivo reflete uma direção na qual o sistema experimenta o repetido alongamento e dobra que descorrelaciona estados próximos num atrator. Um atrator para um sistema dissipativo com um ou mais expoentes de Lyapunov positivos é dito ser *caótico* ou *estranho*.

Observamos que a extensão linear do elipsóide cresce com $2^{\lambda_1 t}$; a área definida pelos 2 primeiros eixos cresce com $2^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$, o volume tridimensional cresce de acordo com $2^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}$ e assim por diante. Os eixos que estão em média se expandindo correspondem aos expoentes positivos e os que estão se contraindo correspondem aos expoentes negativos.

Para um sistema dinâmico n -dimensional, a soma dos expoentes de Lyapunov corresponde à taxa de variação de um elemento de volume n -dimensional. O volume de uma n -esfera, em um certo instante de tempo t , pode ser escrito como:

$$V(t) = V(0)2^{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)t} \quad (4.3)$$

onde $V(0)$ é o volume inicial da n -esfera e λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são os expoentes de Lyapunov correspondentes a cada um dos eixos principais $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, respectivamente.

Assim, se a soma dos expoentes de Lyapunov for negativa, teremos contração no volume inicial; se a soma dos expoentes for igual a zero então o volume se conserva. Um sistema onde temos contração no volume é chamado de *sistema dissipativo*; o sistema para o qual volume se conserva é chamado *sistema conservativo*.

Visto que a contração de um elemento de volume, no espaço de fase, para um sistema dinâmico dissipativo, está associado à divergência média da velocidade no espaço de fase (capítulo 1), concluímos que esta divergência também está associada à soma dos expoentes de Lyapunov. Em conseqüência, qualquer sistema dinâmico dissipativo terá no mínimo um expoente negativo, de modo que a soma de todos os expoentes seja negativa, e o movimento pós-transiente das trajetórias ocorrerá, num conjunto limite de volume zero, um atrator. Além disso, a sensibilidade às condições iniciais, que caracteriza um atrator caótico (seção 3.1) implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

É possível identificar-se um atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. Apresentamos, abaixo, os sinais dos expoentes de Lyapunov associados aos atratores possíveis em um espaço de fase tridimensional:

1. *ponto fixo*: neste caso, os sinais dos expoentes são $(-, -, -)$. Com efeito, as trajetórias convergem para um único ponto, cessando qualquer deslocamento;
2. *ciclo limite*: tem-se $(0, -, -)$, o expoente nulo corresponde à direção ao longo da trajetória;
3. *toro T^2* : tem-se $(0, 0, -)$, agora existem duas direções ao longo das quais processam-se os deslocamentos;

4. *atrator caótico*: um dos expoente deve ser positivo, uma vez que existe sensibilidade às condições iniciais. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo. Sendo o sistema dissipativo, a desigualdade $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ é válida e o terceiro expoente deve ser necessariamente negativo. Resulta, portanto, $(+, 0, -)$.

4.3 Rotas para o caos

A natureza do movimento assintótico de um sistema dinâmico pode mudar à medida que o parâmetro de controle varia. Os valores do parâmetro para os quais ocorre mudança de regime assintótico são chamados *pontos de bifurcação*. De cada bifurcação, pode resultar um aumento na periodicidade, quasi-periodicidade e caos.

Podemos, portanto, falar em termo de *cenários*, isto é, *seqüências de bifurcações*. O estudo de *rotas* possíveis para o caos tem raízes no estudo geral de equações diferenciais determinísticas e constitui a chamada *teoria geométrica do caos*.

A respeito de órbitas periódicas de períodos altos, existem dois importantes resultados. O primeiro deles é o teorema proposto por *Sarkovskii*, que ordena os números naturais de maneira não usual, tal que para cada número natural n , a existência de um ponto de período n implica a existência de órbitas periódicas de todos os períodos mais altos que n no ordenamento. O segundo é um teorema provado por Li e Yorke, em 1975, e mostra que se para um sistema com três ou mais equações diferenciais, tivermos período três para um determinado valor do parâmetro, então certamente para algum outro valor do parâmetro teremos caos. Devemos ressaltar que o resultado de Li e Yorke, para sistemas contínuos, é semelhante ao teorema de Sarkovskii, para sistemas discretos.

Ao abordarmos a questão de possíveis cenários ou rotas para o caos devemos compreender de que forma um regime periódico perde a estabilidade (destabilização de um ciclo limite) em consequência de uma variação no parâmetro de controle. O fato de haver estabilidade ou instabilidade de uma órbita periódica depende dos autovalores da matriz de Floquet

$$\mathbf{M} = \left[\frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (4.4)$$

que corresponde à linearização do mapa de Poincaré em torno de seu ponto fixo. Se todos os autovalores estão no interior do círculo de raio unitário, ou seja, se o módulo de todos os autovalores da matriz de Floquet for menor que 1, então teremos estabilidade da órbita periódica; mas, se a partir do estado de equilíbrio, mediante uma variação no parâmetro um dos autovalores assumir um valor, em módulo, maior do que 1, cruzando o círculo unitário, a órbita periódica torna-se instável. Segundo o tipo de cruzamento do círculo unitário e a natureza da bifurcação, o comportamento dinâmico que substituirá o regime periódico será diferente.

Abaixo, apresentaremos algumas das principais rotas para o caos e algumas de suas principais características.

Se o cruzamento se dá por $+1$ trata-se de uma *bifurcação sela-nó*. No ponto de bifurcação a solução periódica deixa de existir para dar origem a um regime chamado *intermitência tipo I*. Tal regime é caracterizado por fases de comportamento regular quasi-periódico interrompidas por “explosões” (“bursts”) de comportamento caótico. A intermitência tipo *I* aparece, por exemplo, no mapa logístico nas janelas de periodicidade ímpar (figura 4.3).

Quando o cruzamento se dá por -1 a bifurcação é do tipo *flip* (ou *subarmônica*) e pode ser tanto *supercrítica* (normal) ou *subcrítica* (inversa). No primeiro caso, ocorre uma *cascata flip com duplicação de período*, levando finalmente ao caos. Este tipo de comportamento pode ser visto na figura 4.3, com relação ao mapa logístico $x_{i+1} = px_i(1 - x_i)$ quando aumentamos o valor do parâmetro a partir de $p = 2$. De $p = 2$ até $p = 3$, temos um ponto fixo estável, $x^* = \frac{p-1}{p}$

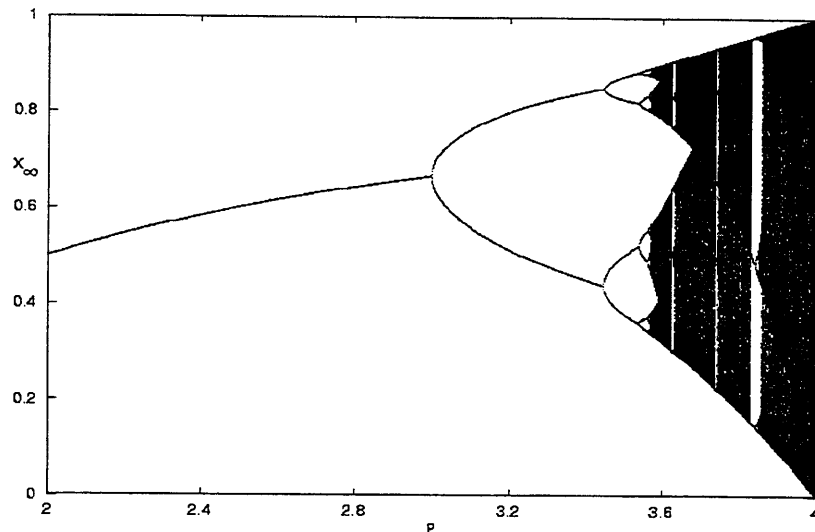


Figura 4.3: Gráfico $x_{\infty} \times p$ para a equação logística $x_{i+1} = px_i(1-x_i)$; x_{∞} representa o valor assintótico de x_i

(como podemos verificar da figura 2.7). Em $p = 3$, ocorre a primeira duplicação de período. Para valores maiores que $p = 3$, à medida que p aumenta, vão ocorrendo novas duplicações até que, em $p \simeq 3.57$ temos um regime caótico. A bifurcação subcrítica leva a *intermitências do tipo III*; trata-se de um comportamento bastante similar às intermitências do tipo *I*, mas, neste caso, a amplitude aumenta a cada oscilação durante as fases regulares, até finalmente ser interrompida por um explosão caótica.

Finalmente existe uma possibilidade de que dois autovalores complexos conjugados, $\alpha \pm i\beta$, cruzem simultaneamente o círculo de raio unitário. Trata-se de uma *bifurcação secundária de Hopf* (ou de Neimark). Se ela é supercrítica, ela nos leva a um atrator estável, um toro T^2 , na superfície do qual estabelece-se uma nova solução correspondente a um regime quasiperiódico. Uma segunda bifurcação supercrítica secundária de Hopf ocorre gerando uma transição $T^2 \rightarrow T^3$ e um atrator estranho pode aparecer como resultado dessa terceira bifurcação. Este cenário é denominado transição para o caos *via quasi-periodicidade*. Se a bifurcação

é *subcrítica* encontra-se um outro fenômeno chamado *intermitência tipo II*. Essa intermitência tem as mesmas propriedades globais que as do tipo *I* e *III*, mas agora as instabilidades que se desenvolvem nas fases regulares têm uma frequência não relacionada com a frequência fundamental do ciclo original.

Os três cenários para o caos acima indicados não são os únicos. Com efeito outras rotas existem. Em todos os casos o ponto em comum é que o caos é iniciado por bifurcações. Os diferentes cenários não se contradizem reciprocamente, podendo se desenvolver concorrentemente em diferentes regiões do espaço de fases.

Analogamente ao fato de que, em um sistema dinâmico contínuo, uma bifurcação de Hopf (seção 3.2) associada com uma desestabilização de um ponto de equilíbrio, dá lugar a um ciclo limite estável, também a bifurcação que é associada com o estabelecimento de um atrator caótico resulta de uma desestabilização, desta vez de órbitas periódicas.

A técnica de controle de caos, que será apresentada na próxima seção, fundamenta-se exatamente no fato de que um atrator caótico tem imerso nele um número infinito de órbitas periódicas instáveis; o que se deseja é estabilizar uma delas.

4.4 O método *OGY* para controle de caos

A presença de caos em sistemas físicos foi extensivamente demonstrada e é muito comum (Ditto 1995, Ditto 1993, Grebogi 1997, Ott 1993). Na prática, entretanto, é freqüentemente desejado que o caos seja evitado e que a performance do sistema seja melhorada ou mudada de alguma maneira.

Dado um atrator caótico, uma forma de eliminar o caos seria fazer uma grande alteração no sistema o que conseqüentemente mudaria por completo sua dinâmica. Porém, nosso objetivo, é fazer uma pequena perturbação num parâmetro acessível do sistema, de modo a obtermos o comportamento desejado.

A observação chave é que um atrator caótico tem imerso dentro dele um número infinito de órbitas periódicas instáveis. Desejamos fazer pequenas perturbações no sistema; não desejamos criar novas órbitas com propriedades diferentes das já existentes, o que queremos é explorar as órbitas que ali estão imersas.

Os sistemas dinâmicos traçam trajetórias suaves no espaço de fase. Para sistemas periódicos, estas trajetórias são curvas que são traçadas repetidamente a cada período do sistema. Esta trajetória contém toda a informação que é necessária para prever a dinâmica futura do sistema (Ditto 1995).

Conforme vimos na seção 1.3, uma útil representação do sistema pode ser obtida interseccionando um plano com o espaço de fase, assim o número infinito de pontos de uma trajetória periódica no espaço de fase é reduzido a um conjunto finito de pontos de intersecção com este plano, e o sistema dinâmico passa de contínuo para discreto. Se imaginarmos um plano horizontal, por exemplo, então um ciclo limite no espaço de fase intersecciona este plano duas vezes, uma vez na subida e outra vez na descida. E se nos restringirmos a um único sentido, para esta intersecção, concluímos que um ciclo limite fica reduzido a um único ponto, pois uma vez que o ciclo intersecciona o plano na subida, necessariamente intersecciona o plano na descida. Este ponto será um ponto fixo no mapa sobre a seção. Esta seção é chamada *seção de Poincaré* e contém toda a informação que necessitamos para o controle.

Soluções periódicas, de período n , poderão ser representadas por n pontos na seção de Poincaré. Para um atrator caótico, no qual temos uma superposição de um número infinito de movimentos periódicos, o número de pontos na seção também será infinito.

O controle proposto pelo método *OGY* (Ott et al 1991) é constituído pelas seguintes etapas: determina-se algumas das órbitas periódicas de baixo período que estão imersas no atrator caótico; examinam-se estas órbitas; após escolher aquela que apresenta a performance desejada para o sistema, faz-se pequenas per-

tubações (ajustes) sucessivas no parâmetro, de forma a estabilizar esta órbita. O método não se aplica somente a sistemas tridimensionais, mas também a sistemas de mais alta ordem (Auerbach 1992).

Neste método formulado por Ott, Grebogi e Yorke, não necessitamos do conhecimento das equações que descrevem o sistema; apenas necessitamos conhecer uma série temporal para alguma variável do sistema e, a partir dela, podemos reconstruir o atrator utilizando uma técnica de imersão (ver, por exemplo, Ditto 1990 ou Lathrop 1989).

O ponto inicial para o controle de caos é o espaço de fase do sistema. O conhecimento do atrator e de sua resposta a pequenas perturbações do sistema são ingredientes necessários para o controle de caos.

Uma vez identificada uma órbita periódica instável no atrator, será necessário caracterizar a forma do atrator localmente e determinar a resposta do atrator a um estímulo externo. O método *OGY* permite controlar qualquer movimento periódico do sistema, mas neste trabalho nosso objetivo consiste em estabilizar o sistema em uma órbita de período 1.

A identificação de movimentos periódicos instáveis é um processo direto, que é feito verificando os pontos que retornam próximos entre duas sucessivas iterações na seção de Poincaré. Como a seção de Poincaré para um sistema tridimensional tem dimensão 2, podemos também determinar uma órbita de período 1 instável imersa no atrator, construindo o mapa de primeiro retorno sobre a seção de Poincaré e identificando seus pontos de intersecção com a reta $y = x$; estes serão, sobre a seção de Poincaré, os pontos fixos (instáveis) procurados (capítulo 1).

Uma vez que determinamos, sobre a seção de Poincaré, qual ponto fixo instável desejamos controlar, observamos o movimento do ponto representando o estado atual do sistema. Em sistemas caóticos de baixa dimensão, este ponto ocasionalmente se aproximará do nosso ponto fixo instável. Na vizinhança deste ponto, a aproximação acontece ao longo da direção estável e o afastamento acontece

ao longo da direção instável. Estas duas direções formam uma sela (capítulo 1) em torno do ponto fixo considerado. Estes *autovetores*, ao longo dos quais a velocidade com que um ponto qualquer do sistema se aproxima ou se afasta da vizinhança do ponto fixo instável (que correspondem aos *autovalores* estável (λ_s) e instável (λ_u), respectivamente), é tudo o que necessitamos para caracterizar a forma local do atrator em torno de nosso ponto fixo.

Para a determinação da resposta do atrator a um estímulo, introduzimos uma mudança no sistema, variando o parâmetro de controle, que representaremos por b . Uma vez identificado, sobre a seção de Poincaré, o ponto fixo (de sela) que desejamos estabilizar, mediremos a posição deste ponto fixo para vários valores do parâmetro, um pouco diferentes do valor nominal b_0 , isto é, num pequeno intervalo em torno de algum valor nominal b_0 . Estas medidas nos indicam as mudanças na posição do atrator, que decorrem de uma mudança no valor do parâmetro do sistema.

A técnica de imersão permite determinar, a partir de uma série temporal, os autovalores estável e instável do mapa sobre a seção de Poincaré no ponto fixo escolhido experimentalmente e $|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$. Da mesma forma, os autovetores nas direções estável, e_s , e instável, e_u , também podem ser determinados experimentalmente, por esta mesma técnica.

Uma vez determinado o ponto fixo instável sobre a seção de Poincaré, para aplicarmos o método *OGY*, devemos determinar uma aproximação linear para o mapa em torno do ponto fixo, e determinar as direções estável e instável. A seguir, alteramos o parâmetro, e conseqüentemente a posição do ponto fixo instável e de suas direções estável e instável, de tal forma que a iterada seguinte no novo valor do parâmetro caia exatamente na direção estável do ponto fixo original.

No que segue, calcularemos os elementos necessários à aplicação do método proposto por *OGY*, para o controle de caos do modelo em estudo neste trabalho. Aqui, além da aplicação do método para um mapa bidimensional sobre a

seção de Poincaré, mostraremos também sua aplicação ao caso em que o mapa sobre a seção de Poincaré é unidimensional.

4.4.1 Forma geral do mapa bidimensional sobre a seção de Poincaré

Dado que o modelo contínuo aqui considerado é tridimensional e sendo b o parâmetro de controle, então uma intersecção com o plano $z = \text{constante}$, produz um mapa discreto bidimensional cuja forma não conhecemos, e genericamente pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n, b) \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n, b)\end{aligned}\tag{4.5}$$

ou sob forma vetorial:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{h}(\mathbf{u}_n, b)\tag{4.6}$$

onde definimos:

$$\mathbf{u}_{n+1} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}(\mathbf{u}_n, b) \equiv \begin{bmatrix} f(x_n, y_n, b) \\ g(x_n, y_n, b) \end{bmatrix}\tag{4.7}$$

onde $f(x_n, y_n, b)$ e $g(x_n, y_n, b)$ são funções de duas variáveis e que dependem de um único parâmetro b .

Este mapa tem um ponto fixo, que representaremos por \mathbf{u}_F , tal que

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{h}(\mathbf{u}_F, b)\tag{4.8}$$

4.4.2 Linearização do mapa bidimensional em torno do ponto fixo instável

Dada a forma geral do mapa bidimensional podemos, agora, determinar a forma linear do mapa em torno do ponto fixo instável.

Na superfície de seção (seção de Poincaré), próximo ao ponto fixo escolhido, isto é, em torno de $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_F$, podemos usar a aproximação linear para o mapa (4.5) ou (4.6), que pode ser expressa (como visto na seção 2.2), desprezando termos de segunda ordem em $(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F)$ (aplicação do teorema do valor médio - apêndice A), por:

$$\mathbf{u}_{n+1} \simeq \mathbf{u}_F + \mathbf{M}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F) \quad (4.9)$$

onde a matriz \mathbf{M} é definida por,

$$\mathbf{M} \equiv \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{(x_F, y_F)} & \left. \frac{\partial f}{\partial y_n} \right|_{(x_F, y_F)} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x_n} \right|_{(x_F, y_F)} & \left. \frac{\partial g}{\partial y_n} \right|_{(x_F, y_F)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

e cada uma das derivadas é calculada no ponto fixo $\mathbf{u}_F = (x_F, y_F)$.

4.4.3 Cálculo das direções estável e instável e vetores base contravariantes

Definida na seção anterior a forma linear do mapa, passaremos agora ao cálculo das direções estável e instável do mapa no ponto fixo, bem como dos vetores base contravariantes associados a cada uma das direções.

A matriz \mathbf{M} em (4.10) é caracterizada por seus autovalores e seus autovetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{e}_u &= \lambda_u \mathbf{e}_u \\ \mathbf{M}\mathbf{e}_s &= \lambda_s \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde \mathbf{e}_u e \mathbf{e}_s devem satisfazer as seguintes condições:

$$\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{para } i, j = u, s, \quad (4.12)$$

isto é,

$$\mathbf{e}_u^T \cdot \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_s^T \cdot \mathbf{e}_s = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_u^T \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_s^T \cdot \mathbf{e}_u = 0 \quad (4.13)$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker e os autovalores λ_u e λ_s devem satisfazer $|\lambda_u| > 1$ e $|\lambda_s| < 1$.

Partindo das equações (4.11) podemos escrever a matriz \mathbf{M} na forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_s \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.14)$$

Agora introduziremos os vetores base contravariantes $(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_s)$ que se relacionam com $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_s)$ da seguinte forma (figura 4.4):

$$\mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{para } i, j = u, s, \quad (4.15)$$

isto é,

$$\mathbf{f}_s^T \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{e}_u = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{f}_s^T \cdot \mathbf{e}_u = \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{e}_s = 0, \quad (4.16)$$

De (4.16) podemos deduzir que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u^T \\ \mathbf{f}_s^T \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

que substituído em (4.14), fornece:

$$\mathbf{M} = \left[\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u^T + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s^T \right]. \quad (4.18)$$

Então, a aproximação linear (4.9) do mapa, válida para \mathbf{u}_n próxima a \mathbf{u}_F , pode ser escrita sob a forma:

$$\mathbf{u}_{n+1} \simeq \mathbf{u}_F + \left[\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u^T + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s^T \right] (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F) \quad (4.19)$$

Para obtermos o controle forçaremos que a próxima iterada \mathbf{u}_{n+1} caia na direção estável do ponto fixo instável \mathbf{u}_F . Para isto, o produto escalar de \mathbf{u}_{n+1} com \mathbf{f}_u^T deve ser nulo, ou seja,

$$\mathbf{f}_u^T \cdot (\mathbf{u}_{n+1}(b_n + \delta b_n)) = 0 \quad (4.20)$$

isto é, o vetor deslocamento do ponto fixo na iterada seguinte não tem componente ao longo de \mathbf{f}_u^T .

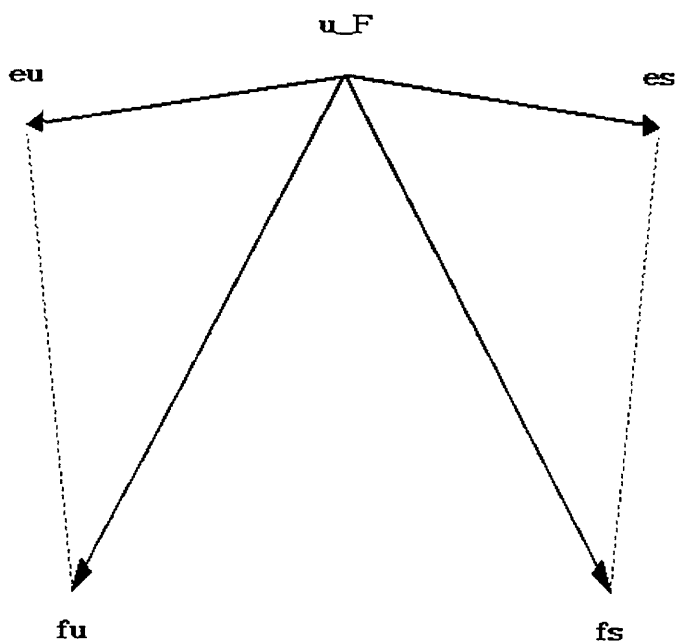


Figura 4.4: Gráfico dos vetores e_u e e_s tangentes, em \mathbf{u}_F , às variedades instável e estável, respectivamente, juntamente com seus respectivos vetores base contravariantes \mathbf{f}_u e \mathbf{f}_s

4.4.4 Determinação do deslocamento horizontal do ponto fixo quando mudamos o valor do parâmetro b

O mapa apresentado na equação (4.6) (seção 4.4.1) tem um ponto fixo, que representaremos por \mathbf{u}_F , cuja localização depende também do parâmetro b e é dado por:

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{h}(\mathbf{u}_F, b) \quad (4.21)$$

Se mudarmos o valor do parâmetro a cada iteração, o ponto fixo também muda, e desejamos relacionar a posição do ponto fixo $\mathbf{u}_F(b_{n+1})$ com $\mathbf{u}_F(b_n)$, para uma variação de b_n para b_{n+1} , no parâmetro b . Para $b = b_n$, temos de (4.21),

$$\mathbf{u}_F(b_n) = \mathbf{h}(\mathbf{u}_F(b_n), b_n) \quad (4.22)$$

A nova posição do ponto fixo perturbado pode ser estimada, se fizermos uma aproximação linear de $\mathbf{u}_F(b_{n+1})$ em torno de $b = b_n$, isto é, desprezando termos da ordem de $(b_{n+1} - b_n)^2$, como segue:

$$\mathbf{u}_F(b_{n+1}) \simeq \mathbf{u}_F(b_n) + (b_{n+1} - b_n) \left. \frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial b} \right|_{b=b_n}, \quad (4.23)$$

donde podemos definir um vetor \mathbf{g} ,

$$\mathbf{g} \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{u}_F}{\partial b} \right|_{b=b_n} \quad (4.24)$$

cuja expressão, para b_{n+1} próximo a b_n , se escreve, de (4.23)

$$\mathbf{g} \simeq \frac{\mathbf{u}_F(b_{n+1}) - \mathbf{u}_F(b_n)}{b_{n+1} - b_n}, \quad (4.25)$$

e pode ser determinado medindo-se o vetor deslocamento do ponto fixo.

4.4.5 Cálculo do ajuste adequado para o parâmetro b

Consideremos a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &: \mathbf{u}_F(b_n) \rightarrow \mathbf{u}_F(b_{n+1}) \\ \mathbf{M} &: \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde a translação do ponto fixo é realizada antes da aplicação do mapa. Expandindo a translação e o mapa, temos que (4.9) torna-se:

$$\mathbf{u}_{n+1}(b_n + \delta b_n) \simeq \mathbf{u}_F(b_{n+1}) + \mathbf{M}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F(b_{n+1})) \quad (4.27)$$

Por (4.23) e utilizando a definição (4.24), temos que:

$$\mathbf{u}_{n+1}(b_n + \delta b_n) \simeq \mathbf{u}_F(b_n) + (b_{n+1} - b_n)\mathbf{g} + \mathbf{M}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F(b_n) - (b_{n+1} - b_n)\mathbf{g}) \quad (4.28)$$

Definindo $\delta \mathbf{u}_n \equiv (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_F(b_n))$ e $\delta b_n \equiv (b_{n+1} - b_n)$, a equação (4.28) pode ser escrita como:

$$\mathbf{u}_{n+1}(b_n + \delta b_n) \simeq \mathbf{u}_F(b_n) + \delta b_n \mathbf{g} + \mathbf{M}(\delta \mathbf{u}_n - \delta b_n \mathbf{g}) \quad (4.29)$$

Como queremos que a próxima iterada caia na direção estável do ponto fixo instável, então \mathbf{u}_{n+1} deve ser perpendicular a \mathbf{f}_u^T , isto é, o produto escalar de \mathbf{u}_{n+1} por \mathbf{f}_u^T deve ser nulo. Então, usando a equação (4.29), o valor de δb_n adequado de modo a se obter o controle de caos, deve satisfazer a condição :

$$0 \simeq \mathbf{f}_u^T \cdot \delta b_n \mathbf{g} + \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{M} (\delta \mathbf{u}_n - \delta b_n \mathbf{g}) + \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{u}_F(b_n) \quad (4.30)$$

Utilizando para \mathbf{M} a forma encontrada na equação (4.18) e fazendo uso de (4.16), podemos escrever:

$$\mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{M} = \mathbf{f}_u^T \cdot [\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{f}_u^T + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{f}_s^T] = \lambda_u \mathbf{f}_u^T, \quad (4.31)$$

que, substituído na condição (4.30), fornece:

$$0 \simeq \mathbf{f}_u^T \cdot \delta b_n \mathbf{g} + \lambda_u \mathbf{f}_u^T (\delta \mathbf{u}_n - \delta b_n \mathbf{g}) + \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{u}_F(b_n) \quad (4.32)$$

e isolando δb_n da equação (4.32) acima, obtemos finalmente:

$$\delta b_n = \left(\frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \right) \left(\frac{\mathbf{f}_u^T \delta \mathbf{u}_n}{\mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{g}} \right) + \mathbf{f}_u^T \cdot \mathbf{u}_F(b_n) \quad (4.33)$$

e que é a variação máxima permitida para o parâmetro de modo que nossas aproximações sejam válidas.

Esta fórmula será utilizada sempre que a magnitude do lado direito de (4.33) for menor que um valor máximo pré-estabelecido b^* , ou seja, o intervalo de valores que o parâmetro pode assumir é $[b_n - b^*, b_n + b^*]$; caso contrário fazemos $\delta b_n = 0$.

Devemos ressaltar que pela matriz \mathbf{M} fizemos apenas uma aproximação linear para o mapeamento.

4.4.6 Aplicação do método *OGY*

Agora, com todos os elementos necessários para o controle calculados podemos aplicar o método *OGY* e fazer o controle do ponto fixo instável considerado.

Para um valor pequeno de b^* , uma condição inicial típica executará uma órbita caótica, que é a mesma do caso sem controle, até que \mathbf{u}_n caia na pequena tira próximo ao ponto fixo \mathbf{u}_F tal que seja válida a aproximação (4.9). Mesmo assim, por causa das não linearidades não incluídas em (4.19), o controle pode não ser capaz de trazer a órbita para o ponto fixo desejado. Neste caso a órbita sairá da tira e continuará a vagar caoticamente como se estivesse sem controle e, em algum momento, esta órbita estará suficientemente próxima ao ponto fixo, tal que a atração a \mathbf{u}_F é obtida.

Na figura 4.5(a)-(c) mostramos esquematicamente a aplicação do método *OGY*.

A figura 4.5(a) mostra um ponto fixo instável, $\mathbf{u}_F(b)$, com suas direções estável, \mathbf{e}_s , e instável, \mathbf{e}_u . A n -ésima iterada, \mathbf{u}_n é mostrada próxima à direção estável do ponto fixo instável $\mathbf{u}_F(b)$. Se não aplicarmos o controle, o movimento natural do sistema seria se aproximar do ponto fixo instável ao longo da direção estável e mover-se para longe do ponto fixo pela direção instável. Entretanto, se introduzirmos uma perturbação no sistema, moveremos o ponto fixo instável e suas variedades para o outro lado de \mathbf{u}_n (figura 4.5(b)).

O movimento de \mathbf{u}_n será, novamente, se aproximar ao longo da variedade estável e se afastar ao longo da variedade instável do novo ponto fixo. Entretanto, este movimento faz com que a próxima iterada (\mathbf{u}_{n+1}) caia exatamente sobre a direção estável do ponto fixo original e assim, as iteradas seguintes tenderão a este ponto fixo.

Se não tivéssemos a presença de ruído ou flutuações, o sistema permaneceria para sempre neste ponto fixo. Em presença de ruído e flutuações o método *OGY* deve ser aplicado a cada retorno à seção, de modo que o controle seja efetivo.

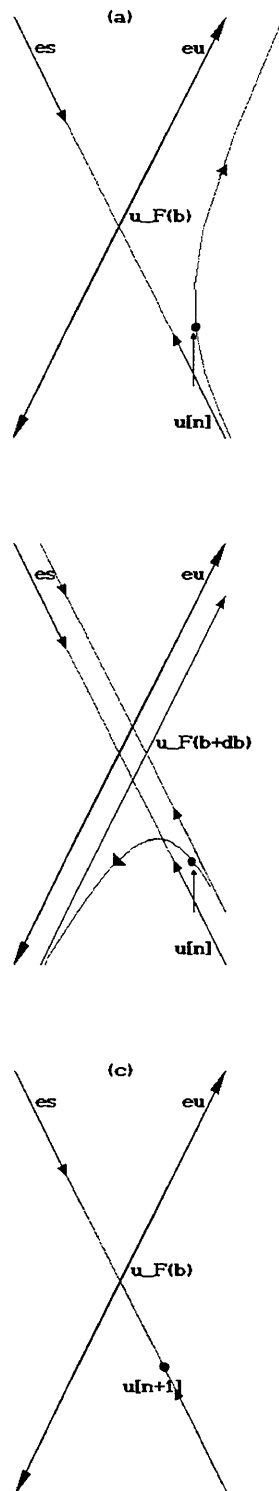


Figura 4.5: Representação esquemática do método *OGY*, onde $u_F(b)$ é o ponto fixo instável que se deseja estabilizar.

Assim, criamos uma órbita estável que, para uma condição inicial típica, é precedida por um transiente caótico, no qual a órbita é similar às órbitas no atrator caótico com a ausência de controle. O duração de tal transiente depende sensivelmente da condição inicial.

4.4.7 Método *OGY* - Caso unidimensional

Vimos acima como aplicar o método *OGY*, para um sistema tridimensional, através de seu mapeamento bidimensional sobre a seção de Poincaré e calculamos todos os elementos necessários para a aplicação deste método.

Existem casos, porém, em que a forma do mapeamento sobre a seção é tal que podemos aplicar o método *OGY* para uma dimensão. Por exemplo, se para um atrator de um sistema tridimensional, o mapeamento na seção for uma reta, podemos aplicar o método *OGY* para uma dimensão.

Abaixo mostraremos o cálculo dos elementos necessários para aplicação do método *OGY* em uma dimensão (Peng et al 1991).

1. *Forma geral do mapa e cálculo do ponto fixo.*

Dado que estamos em uma dimensão o mapa sobre a seção pode ser escrito genericamente por:

$$x_{i+1} = f(x_i, b) \tag{4.34}$$

onde b é o parâmetro do mapa e f é uma função de x_n e de b . O cálculo do ponto fixo, neste caso, é feito diretamente do mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ e é determinado, conforme vimos no capítulo 1, pela intersecção da reta $x_{i+1} = x_i$ com a função $x_{i+1} = f(x_i)$

2. Linearização em torno do ponto fixo instável

A forma linear do mapa (4.34) em torno do ponto fixo instável, desprezando-se os termos da ordem de $(x_i - x_F)^2$, é, conforme equação (2.13):

$$x_{i+1} \simeq x_F + a(x_i - x_F) \quad (4.35)$$

onde x_F é o ponto fixo instável e a é a declividade da reta tangente ao mapa de primeiro retorno no ponto fixo instável ($|a| > 1$) ou também definido como a taxa de variação do mapa calculada no ponto fixo x_F . Esta equação pode ser generalizada para órbitas de período k , $k > 1$, simplesmente encontrando a forma linear do mapa que nos leva de um ponto x_i para um ponto x_{i+k} , similar ao que fizemos para encontrar a forma linear mostrada na equação acima.

Mapas unidimensionais possuem ou uma direção estável ou uma direção instável. Como no neste caso, temos um ponto fixo instável, a direção associada a ele é a direção instável.

Aqui, o que necessitamos é calcular qual a declividade da reta tangente ao mapa de primeiro retorno no ponto fixo instável. Dado que não conhecemos a forma do mapa, tomando pontos próximos a este ponto fixo instável, fazemos o ajuste destes pontos a uma reta aplicando o método dos mínimos quadrados (apêndice E).

3. Determinação do deslocamento horizontal do mapa quando mudamos o valor do parâmetro b

O mapa em (4.34) tem um ponto fixo, x_F , cuja localização depende do valor do parâmetro e é dado por:

$$x_F = f(x_F, b) \quad (4.36)$$

A localização do ponto fixo aqui, como visto anteriormente, também depende do parâmetro, ou seja, quando o parâmetro varia, o ponto fixo também varia.

Para calcular o deslocamento horizontal do mapa, ou seja, paralelo ao eixo \mathbf{x}_i num gráfico $\mathbf{x}_{i+1} \times \mathbf{x}_i$, quando o parâmetro varia, primeiro calculamos a melhor aproximação linear para os pontos próximos ao ponto fixo, no valor nominal b_0 do parâmetro. Depois, variando o parâmetro b_0 por uma quantidade pequena Δb , calculamos a nova posição do ponto fixo e encontramos novamente a melhor reta que aproxima os pontos próximos a este novo ponto fixo. Assim, para o cálculo de g , que é a razão entre o deslocamento horizontal do mapa e a variação do parâmetro, determinamos a distância horizontal Δx (figura 4.6) entre o ponto fixo do mapa original e o mapa deslocado quando variamos o parâmetro, de b_0 para $b_0 + \Delta b$, e então, dividimos este valor pela variação Δb do parâmetro. Dessa forma podemos escrever g como,

$$g = \frac{\Delta x}{\Delta b} = \frac{x_n - x_F(b)}{\Delta b} \quad (4.37)$$

onde Δx é o deslocamento horizontal do mapa. Isto é semelhante ao que fizemos no caso bidimensional, só que no caso do mapa bidimensional medimos o deslocamento do mapa nas direções x e y e aqui estamos medindo somente o deslocamento na direção x .

4. Cálculo do ajuste adequado para o parâmetro b

Quando determinamos o deslocamento horizontal do ponto fixo, calculamos este deslocamento variando o valor do parâmetro por uma quantidade pequena Δb . A princípio, para o controle da órbita periódica deveríamos variar o valor do parâmetro e em seguida retornar ao valor original do parâmetro.

Entretanto, devido à presença de ruído e flutuações no sistema, para podermos estabilizar este sistema na vizinhança de x_F , esta perturbação apropriada Δb deve ser aplicada em cada retorno à seção e esta é facilmente calculada a partir do valor atual de x_n . Esta perturbação é dada por:

$$\Delta b = \frac{(x_n - x_F)}{g} \quad (4.38)$$

Esta fórmula será sempre aplicada quando x_n estiver suficientemente próximo de x_F de modo que a aplicação do controle seja possível.

5. Aplicação do método OGY

Sabemos que, em geral, um sistema caótico em algum momento cairá próximo ao ponto fixo x_F . Dado um ponto qualquer x_n próximo a x_F (figura 4.6(a)). Se continuarmos a iterar o mapa com este valor do parâmetro, a iterada seguinte x_{i+1} cairá mais longe do ponto fixo x_F . Entretanto, se introduzirmos uma perturbação no parâmetro b , o ponto fixo, e conseqüentemente o mapa, serão deslocados, e o que desejamos (figura 4.6(b)) ao aplicarmos o controle o ajuste adequado Δb é aquele para o qual a próxima iterada, $x_{n+1}(b_0 + \Delta b)$, com o valor do parâmetro mudado, seja exatamente igual ao ponto fixo instável x_F do parâmetro original. Vemos também, pela figura, que o efeito da perturbação é mover x_{n+1} verticalmente para o novo mapa.

Se retornarmos ao valor original b_0 , e não fizermos mais nenhuma perturbação no parâmetro, as iteradas seguintes permanecerão ali para todo n . Caso haja uma pequena perturbação no ponto fixo, ou seja, se houver qualquer distúrbio, causado pela presença de ruído ou flutuações, as iteradas seguintes (x_{n+2}, x_{n+3}, \dots) não permanecerão próximas ao ponto fixo instável x_F , para todo n , e o atrator ficará vagando aleatoriamente como no caso sem controle. Embora conceitualmente é útil imaginar a perturbação sendo desligada após cada retorno à seção, o algoritmo é mais eficientemente quando aplicado ajustando a perturbação, em cada retorno à seção, de acordo com a equação (4.38).

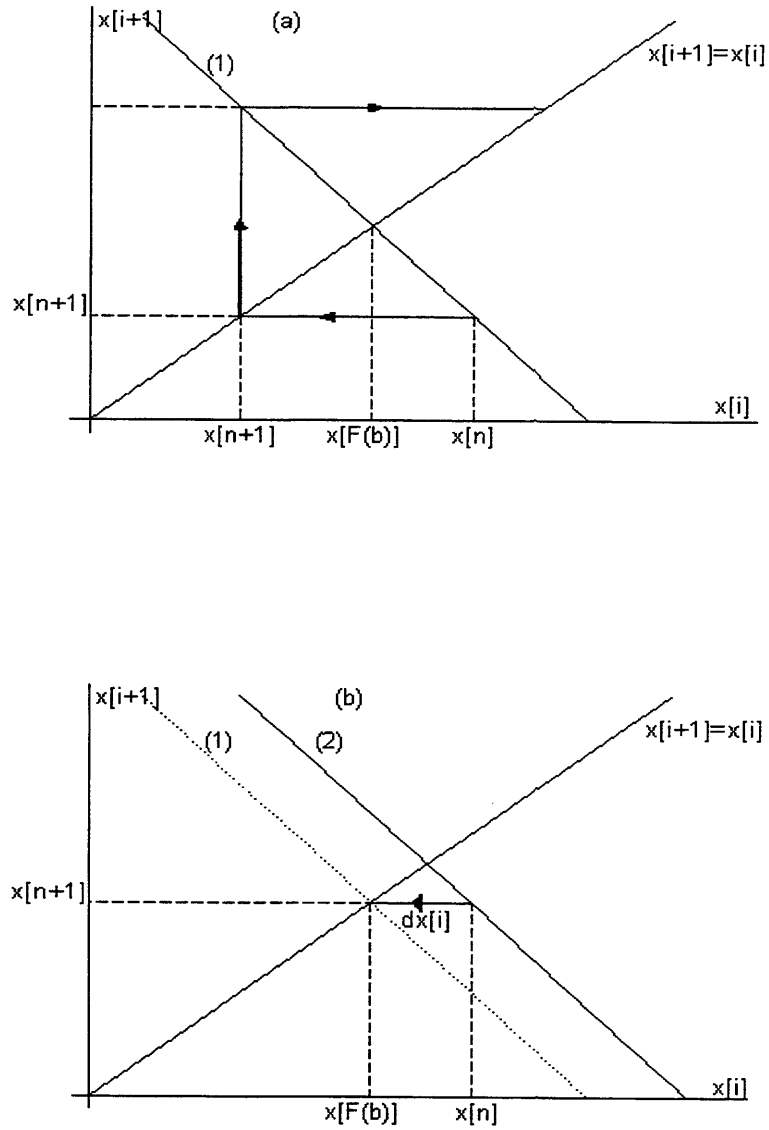


Figura 4.6: Forma linear do mapa $x_{i+1} \times x_i$ em torno do ponto fixo instável (a) para $b = b_0$ (1); (b) para $b = b_0$ (pontilhada (1)) e $b = b_0 + \Delta b$ (linha cheia (2))

4.4.8 Método *OGY* para órbitas de período mais alto

O método *OGY* é também eficientemente empregado para estabilização das órbitas periódicas instáveis de período mais alto.

Para estabilizar uma órbita instável de período K , g é primeiro determinado pelo monitoramento do sistema em dois valores do parâmetro um pouco diferentes b e $b + \Delta b$. Após isto, é então necessário medir a diferença $(x_n - x_F)$ em cada K -ésimo retorno à seção afim de aplicarmos a apropriada perturbação e conseguirmos estabilizar a respectiva órbita.

5 CARACTERIZAÇÃO DE ATRADORES DO MODELO DE HASTINGS E POWELL

Conforme estabelecido na Introdução (capítulo 1) deste trabalho, nosso objetivo é o de, após identificado um atrator caótico do sistema dissipativo de Hastings e Powell, escolher algumas das órbitas periódicas instáveis, de baixo período, imersas no mesmo e, através do controle de caos, estabilizá-las.

Reservamos para este capítulo, a investigação do comportamento global do sistema, explorando-o no que tange aos seus estados assintóticos, para diversos valores do parâmetro relevante na dinâmica do mesmo. Variando de forma sistemática este parâmetro de controle, serão calculados os expoentes de Lyapunov para os atratores do sistema dissipativo em estudo. Além disso, após efetuar a integração numérica do sistema de equações diferenciais, que modela o sistema, serão visualizados, no espaço de fase tridimensional correspondente, alguns dos estados assintóticos, identificados como estado de equilíbrio estável ou ciclos limite ou atratores caóticos, dependendo do valor do parâmetro de controle.

5.1 Versão adimensional do modelo

O modelo de Hastings e Powell, apresentado na seção 3.3, envolve três variáveis dependentes $\{X, Y, Z\}$, populações nos três níveis da cadeia trófica, uma variável independente tempo T , e dez parâmetros $\{R_0, K_0, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2\}$, como segue:

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dT} &= X \left[R_0 \left(1 - \frac{X}{K_0} \right) - C_1 Y \frac{A_1}{X + B_1} \right] \\
 \frac{dY}{dT} &= Y \left[-D_1 + X \frac{A_1}{X + B_1} - Z \frac{A_2}{Y + B_2} \right] \\
 \frac{dZ}{dT} &= Z \left[-D_2 + C_2 Y \frac{A_2}{Y + B_2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

A adimensionalização do sistema tem como objetivo, não apenas o de reduzir o número de parâmetros, mas principalmente, determinar as quantidades relevantes no mesmo.

Por exemplo, como veremos a seguir, não é a população X que é relevante, mas sim a razão $\frac{X}{K_0}$, isto é, a razão entre a população X e a capacidade de suporte do ambiente para esta população.

Como um primeiro passo para procedermos a adimensionalização, segundo Hastings e Powell, faz-se uma análise dimensional das diversas quantidades envolvidas no sistema, agrupando-as de acordo com sua dimensão. Usando a simbologia [...], para indicar “dimensão de ...”, podemos escrever:

$$[X] = [K_0] = [Y] = [Z] = [B_1] = [B_2] \quad (5.2)$$

as quais têm dimensão de população,

$$[A_1] = [A_2] = [R_0] = [D_1] = [D_2] = [T]^{-1} \quad (5.3)$$

que têm dimensão de inverso de tempo, e

$$[C_1] = [C_2] \quad (5.4)$$

que não possuem dimensão alguma. Para constituir as novas quantidades adimensionais, agrupa-se adequadamente as quantidades originais. Frequentemente existem muitas maneiras de se fazer uma adimensionalização de um mesmo sistema; a opção é feita segundo os objetivos a que nos propomos.

Neste trabalho, utilizaremos a adimensionalização proposta por Hastings e Powell, a saber:

$$x = \frac{X}{K_0}, \quad y = \frac{C_1 Y}{K_0}, \quad z = \frac{C_1 Z}{C_2 K_0} \quad (5.5)$$

serão as populações adimensionais (variáveis dependentes);

$$t = R_0 T \quad (5.6)$$

será a variável tempo adimensional; permanecerão os seguintes seis parâmetros adimensionais:

$$a_1 = \frac{K_0 A_1}{R_0 B_1}, \quad b_1 = \frac{K_0}{B_1}, \quad a_2 = \frac{C_2 K_0 A_2}{C_1 R_0 B_2}, \quad (5.7)$$

$$b_2 = \frac{K_0}{C_1 B_2}, \quad d_1 = \frac{D_1}{R_0}, \quad d_2 = \frac{D_2}{R_0}. \quad (5.8)$$

Assim o sistema (5.1) pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - f_1(x)y \\ \frac{dy}{dt} &= f_1(x)y - f_2(y)z - d_1 y \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(y)z - d_2 z \end{aligned} \quad (5.9)$$

com

$$f_i(u) = \frac{a_i u}{1 + b_i u} \quad i = 1, 2 \quad (5.10)$$

Observamos pela equação (5.10) que, se $b_i u \gg 1$, a forma saturante $f_i(u)$ torna-se aproximadamente constante; caso contrário, se $b_i u \ll 1$, $f_i(u)$ é aproximadamente linear. Esta análise é análoga ao comentário a respeito da expressão $\frac{AN}{B+N}$, após a equação (3.37).

Substituindo os valores numéricos para a_i , b_i , d_i considerados por *Hastings e Powell* (1991), como segue: o sistema (5.9) torna-se:

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros propostos por *Hastings e Powell*(1991)

a_1	a_2	b_1	b_2	d_1	d_2
5.0	0.1	b_1 é o parâmetro de controle	2.0	0.4	0.01

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - \frac{5x}{1+b_1 x} y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{5x}{1+b_1 x} y - \frac{0.1y}{1+2y} z - 0.4y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{0.1y}{1+2y} z - 0.01z \end{aligned} \quad (5.11)$$

Um dos fatores que guiou a escolha dos valores para os parâmetros, por Hastings e Powell, foi o fato de investigarem cadeias alimentares biologicamente razoáveis. Posteriormente, *McCann e Yodzis (1994)* apresentaram argumentações no sentido de que tais valores seriam muito pouco prováveis biologicamente. Um segundo fator que guiou sua escolha de parâmetros foi o seu interesse em sistemas que pudessem gerar caos, e uma das formas para se gerar caos é forçar periodicamente sistemas não lineares que já exibem comportamento de ciclo limite.

Assim, de modo semelhante à ocorrência de caos em oscilações periodicamente forçadas, a presença de caos no sistema de Hastings e Powell seria consequência do acoplamento não linear, através da espécie Y , dos subsistemas $X - Y$ e $Y - Z$, tendo este último, um período natural mais longo. Uma mortalidade de Z (topo da cadeia) muito menor do que a mortalidade de Y (nível intermediário) está contemplada na escolha, tal que, $d_2 \ll d_1$. Além disso, também segundo Hastings e Powell (1991), o parâmetro b_1 será considerado o parâmetro chave (parâmetro de controle) na determinação da estabilidade do modelo. Sua interpretação biológica pode ser obtida de (5.7), $b_1 = \frac{K_0}{B_1}$, onde K_0 é a capacidade de suporte do ambiente, para a população X (base da cadeia) e B_1 é o valor de X tal que a taxa de predação por predador é igual à metade do seu valor máximo; portanto, variar b_1 (que é evidentemente positivo) corresponde a variar K_0 e/ou B_1 , adequadamente.

5.2 Estados estacionários e análise de estabilidade linear

Um passo importante na análise de sistemas dinâmicos é a análise da estabilidade linear (local) do sistema em torno de seus pontos de equilíbrio, isto é, a estabilidade na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Considerando somente pequenos deslocamentos em torno de um ponto de equilíbrio, seu comportamento é analisado através da aproximação linear do sistema de equações diferenciais.

Os pontos de equilíbrio ou estados estacionários para o sistema (5.11) são os pontos (x^*, y^*, z^*) do espaço de fase xyz , tais que

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (5.12)$$

onde cada uma das soluções encontradas deve satisfazer simultaneamente às três equações.

Para determinar os estados estacionários, reescrevemos o sistema adimensional (5.11), como segue:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &\equiv x \left[1 - x - \frac{5y}{1 + b_1x} \right] \\ F_2(x, y, z) &\equiv y \left[\frac{5x}{1 + b_1x} - \frac{0.1z}{1 + 2y} - 0.4 \right] \\ F_3(x, y, z) &\equiv z \left[\frac{0.1y}{1 + 2y} - 0.01 \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Os pontos (x^*, y^*, z^*) procurados devem, portanto, satisfazer as seguintes condições:

$$F_i(x^*, y^*, z^*) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (5.15)$$

Desta forma obtemos, em função de b_1 , um conjunto $\{pf_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de seis pontos distintos, que discriminaremos abaixo.

Definindo três novas funções:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv 1 - x - \frac{5y}{1 + b_1x}, \\ f_2(x, y, z) &\equiv \frac{5x}{1 + b_1x} - \frac{0.1z}{1 + 2y} - 0.4, \\ f_3(y) &\equiv \frac{0.1y}{1 + 2y} - 0.01, \end{aligned} \quad (5.16)$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 F_1(x^*, y^*, z^*) = 0 &\Rightarrow x^* = 0 \text{ ou } f_1(x^*, y^*) = 0, \\
 F_2(x^*, y^*, z^*) = 0 &\Rightarrow y^* = 0 \text{ ou } f_2(x^*, y^*, z^*) = 0, \\
 F_3(x^*, y^*, z^*) = 0 &\Rightarrow z^* = 0 \text{ ou } f_3(y^*) = 0,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde, para satisfazer simultaneamente as três condições acima, temos, com pelo menos uma população nula, as seguintes possibilidades: Observamos que pf_3 recai

Tabela 5.2: Pontos de equilíbrio genéricos da equação (5.11)

i	x_i^*	y_i^*	z_i^*	pf_i
1	0	0	0	(0,0,0)
2	1	0	0	(1,0,0)
3	$\frac{0.4}{5-0.4b_1}$	$\frac{(1+b_1x_3^*)(1-x_3^*)}{5}$	0	posição que varia com b_1
4	0	1/8	-5	sem significado biológico

em pf_2 , se $b_1 = 11.5$; além disso, pf_3 não tem significado biológico, se $b_1 > 11.5$.

Os estados estacionários que envolvem persistência das três espécies são aqueles que satisfazem simultaneamente as três condições:

$$f_1(x^*, y^*) = 0, \tag{5.18}$$

$$f_2(x^*, y^*, z^*) = 0, \tag{5.19}$$

$$f_3(y^*) = 0. \tag{5.20}$$

De (5.20), obtém-se

$$y^* = \frac{1}{8}, \tag{5.21}$$

que substituído em (5.18), fornece a equação algébrica de 2º grau:

$$8b_1(x^*)^2 - 8(b_1 - 1)x^* - 3 = 0, \tag{5.22}$$

e que tem por soluções:

$$x_{+,-}^* = \frac{8(b_1 - 1) \pm \sqrt{64(b_1 - 1)^2 + 96b_1}}{16b_1}; \tag{5.23}$$

lembrando que $b_1 > 0$, é evidente que x_- será sempre negativo e, portanto, não possui significado biológico; por outro lado, x_+ será sempre positivo. Na figura 5.1, ilustramos o gráfico de x_+ e de x_- , para $0 < b_1 < 6$. A coordenada z^* do ponto de equilíbrio procurado é obtida substituindo (5.23) e (5.21) na condição (5.19), o que fornece:

$$z_{+,-}^* = \frac{125x_{+,-}^*}{2(1 + b_1x_{+,-}^*)} - 5.$$

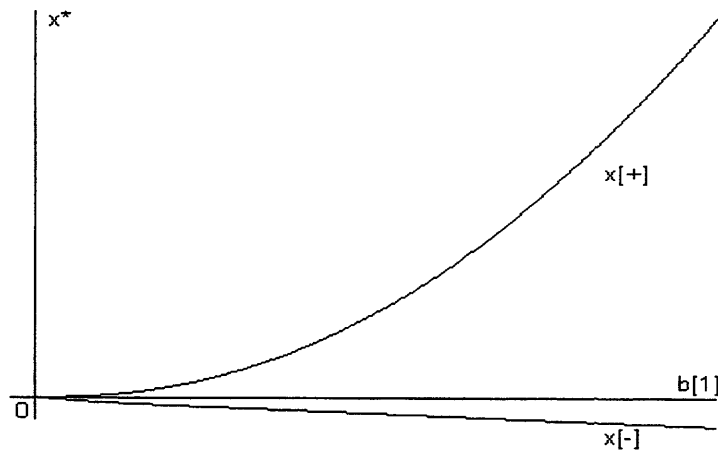


Figura 5.1: As curvas $x[+]$ e $x[-]$ representam, respectivamente, as soluções $x_+(b_1)$ e $x_-(b_1)$, da equação algébrica (5.22).

Uma vez que x_-^* não possui significado biológico, resta-nos agora verificar a validade da solução z_+^* . Fazendo-se o gráfico da solução z_+^* em função do parâmetro b_1 (figura 5.2) vemos que esta solução é positiva para o intervalo considerado. Assim, os critérios de estabilidade serão aplicados somente para o ponto fixo (x_+^*, y^*, z_+^*) , em função do parâmetro b_1 . A partir de agora, para clareza de notação, representaremos x_+^* por x^* e z_+^* por z^* .

Em síntese, existe um único estado de equilíbrio persistente, que representaremos por (x^*, y^*, z^*) , onde

$$x^* = \frac{8(b_1 - 1) + \sqrt{64(b_1 - 1)^2 + 96b_1}}{16b_1}, \quad (5.24)$$

$$y^* = \frac{1}{8}, \quad (5.25)$$

$$z^* = \frac{125x^*}{2(1 + b_1x^*)} - 5 \quad (5.26)$$

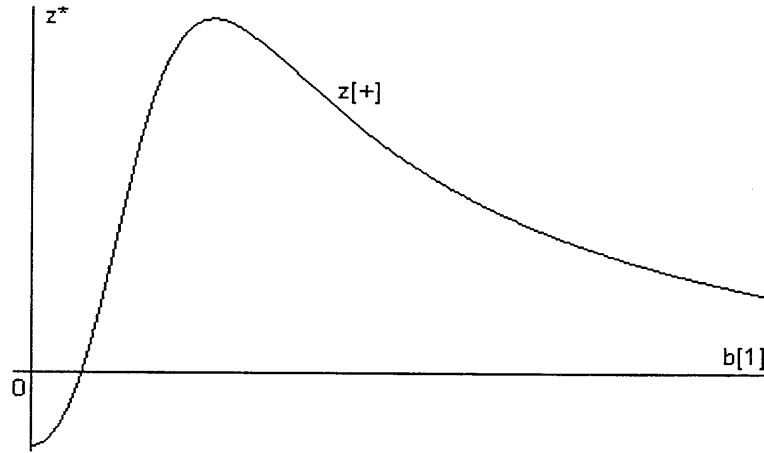


Figura 5.2: Gráfico $z_+^* = \frac{125x_+^*}{2(1+b_1x_+^*)} - 5$, onde x_+^* é dado em (5.24) em função de b_1 .

Para a análise da estabilidade linear de um sistema, em torno de um estado de equilíbrio (x^*, y^*, z^*) , utiliza-se a expansão em série de Taylor nas equações não lineares, em torno deste ponto, como segue.

Considerando um ponto (x, y, z) próximo a um ponto de equilíbrio (x^*, y^*, z^*) , tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= x^* + \eta_1(t), \\ y(t) &= y^* + \eta_2(t), \\ z(t) &= x^* + \eta_3(t), \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ e $\eta_3(t)$ são todos, em módulo, muito pequenos, o sistema de equações diferenciais (5.13) pode ser escrito sob a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i(t)}{dt} &= F_i(x^*, y^*, z^*) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} \eta_1(t) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} \eta_2(t) \\ &+ \left. \frac{\partial F_i}{\partial z} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} \eta_3(t) + O(\eta_i(t)^2), \end{aligned} \quad (5.28)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Mantendo, em (5.28), apenas os termos lineares em $\eta_i(t)$ (aplicação do teorema do valor médio - apêndice A), e lembrando que $F_i(x^*, y^*, z^*) = 0$, para $i = 1, 2, 3$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\eta_1(t)}{dt} \\ \frac{d\eta_2(t)}{dt} \\ \frac{d\eta_3(t)}{dt} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

onde os elementos J_{ij}^* , da matriz jacobiana (também conhecida como *matriz comunalidade*), são dados por:

$$\begin{aligned} J_{11}^* &= \left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = 1 - 2x^* - \frac{5y^*}{(1 + b_1 x^*)^2}, \\ J_{12}^* &= \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{-5x^*}{1 + b_1 x^*}, \\ J_{13}^* &= \left. \frac{\partial F_1}{\partial z} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = 0, \\ J_{21}^* &= \left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{5y^*}{(1 + b_1 x^*)^2}, \\ J_{22}^* &= \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{5x^*}{1 + b_1 x^*} - \frac{0.1z^*}{(1 + 2y^*)^2} - 0.4, \\ J_{23}^* &= \left. \frac{\partial F_2}{\partial z} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{-0.1y^*}{1 + 2y^*}, \\ J_{31}^* &= \left. \frac{\partial F_3}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = 0, \\ J_{32}^* &= \left. \frac{\partial F_3}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{0.1z^*}{(1 + 2y^*)^2}, \\ J_{33}^* &= \left. \frac{\partial F_3}{\partial z} \right|_{(x^*, y^*, z^*)} = \frac{0.1y^*}{1 + 2y^*} - 0.01. \end{aligned} \quad (5.30)$$

e o * significa que o elemento J_{ij} foi calculado no ponto de equilíbrio.

Prosseguindo com a análise da estabilidade, calcula-se o polinômio característico para a matriz comunidade J^* , escrito como:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= |\mathbf{J}^* - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} J_{11}^* - \lambda & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* - \lambda & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= \lambda^3 - (J_{11}^* + J_{22}^*)\lambda^2 - (J_{12}^*J_{21}^* + J_{32}^*J_{23}^* - J_{11}^*J_{22}^*)\lambda + J_{32}^*J_{23}^*J_{11}^*
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

onde λ é um autovalor da matriz \mathbf{J}^* e \mathbf{I} é a matriz identidade de terceira ordem.

Para definir a estabilidade local assintótica desses pontos, aplicaremos os critérios de *Routh-Hurwitz* (Apêndice D), de acordo com os quais, dado o polinômio:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \tag{5.32}$$

a solução (x^*, y^*, z^*) é linearmente estável se:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0; \tag{5.33}$$

e assim, para nosso sistema, temos

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(J_{11}^* + J_{22}^*) \\
 a_2 &= -(J_{12}^*J_{21}^* + J_{32}^*J_{23}^* - J_{11}^*J_{22}^*) \\
 a_3 &= J_{32}^*J_{23}^*J_{11}^*
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

donde as condições (5.33) fornecem:

$$\begin{aligned}
 x^* \left(B_1 + \frac{1}{1 + b_1 x^*} \right) &< \frac{8}{10}, \\
 \left(\frac{32}{10000} - \frac{4x^*}{1 + b_1 x^*} \right) B_1 x^* &> 0,
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$B_2 \left(\frac{8}{100} - \frac{x^*}{1 + b_1 x^*} \right) > B_1 x^* \left(\frac{10032}{10000} - \frac{4x^*}{1 + b_1 x^*} \right),$$

onde

$$B_1 = \left(\frac{5b_1}{8(b_1 x^* + 1)^2} - 1 \right), \tag{5.36}$$

$$B_2 = \frac{25x^*y^*}{(1+b_1x^*)^3} + \frac{0.01y^*z^*}{1+2y^*} + \left(1 - 2x^* - \frac{5y^*}{(1+b_x^*)^2}\right) \left(\frac{5x^*}{1+b_x^*} - \frac{0.1z^*}{(1+2y^*)^2} - 0.4\right).$$

Nas tabelas 5.3 e 5.4, apresentamos os pontos (x^*, y^*, z^*) , fornecidos com a ajuda do software *MapleV*, tais que são satisfeitas simultaneamente as condições $F_i(x^*, y^*, z^*) = 0$, $i = 1, 2, 3$, e correspondentes a 11 valores distintos de b_1 , escolhidos entre 2 e 2.879.

Observamos, para todos os valores de b_1 , a presença dos pontos previamente determinados:

$$\begin{aligned} pf_1 &= (0, 0, 0), \\ pf_2 &= (1, 0, 0), \end{aligned} \tag{5.37}$$

$$pf_4 = \left(0, \frac{1}{8}, -5\right), \tag{5.38}$$

além dos pontos pf_3 , pf_5 e pf_6 , também previstos analiticamente. Observamos, ainda, que apenas pf_1 , pf_2 , pf_3 e pf_6 possuem significado biológico, sendo que, destes últimos, apenas pf_6 contempla a persistência das três espécies.

O software *MapleV* também foi utilizado para testar as condições de estabilidade linear (5.35) para cada um dos pontos calculados. Na tabela 5.3, os pontos de equilíbrio pf_6 estão salientados com um asterisco *, para indicar que são estáveis, e os resultados estão em concordância com aqueles obtidos por Varriale e Gomes (1998).

Tabela 5.3: Tabela dos pontos fixos para $b_1 = 2$

<i>Pontos Fixos (x^*, y^*, z^*)</i>						
b_1	pf_1	pf_2	pf_3	pf_4	pf_5	pf_6
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.095 \\ 0.215 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.125 \\ -36.25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.125 \\ 13.75 \end{bmatrix}^*$

Tabela 5.4: Tabela dos pontos fixos para 8 valores distintos de b_1 entre 2.113 e 2.51

<i>Pontos Fixos (x^*, y^*, z^*)</i>						
b_1	pf_1	pf_2	pf_3	pf_4	pf_5	pf_6
2.113	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.22 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.23 \\ 0.125 \\ -33.80 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.76 \\ 0.125 \\ 13.23 \end{bmatrix}^*$
2.114	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0963 \\ 0.218 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.233 \\ 0.125 \\ -33.776 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.76 \\ 0.125 \\ 13.225 \end{bmatrix}$
2.13	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.096 \\ 0.218 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.231 \\ 0.125 \\ -33.458 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.762 \\ 0.125 \\ 13.153 \end{bmatrix}$
2.30	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.098 \\ 0.22 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.21 \\ 0.125 \\ -30.446 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.775 \\ 0.125 \\ 12.412 \end{bmatrix}$
2.39	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.099 \\ 0.223 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.125 \\ -29.083 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.782 \\ 0.125 \\ 13.037 \end{bmatrix}$
2.46	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.224 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.194 \\ 0.125 \\ -28.116 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.125 \\ 11.754 \end{bmatrix}$
2.463	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.224 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.193 \\ 0.125 \\ -28.076 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.787 \\ 0.125 \\ 11.742 \end{bmatrix}$
2.51	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.225 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.189 \\ 0.125 \\ -27.469 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.791 \\ 0.125 \\ 11.557 \end{bmatrix}$

Tabela 5.5: Tabela dos pontos fixos para $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.879$

<i>Pontos Fixos (x^*, y^*, z^*)</i>						
b_1	pf_1	pf_2	pf_3	pf_4	pf_5	pf_6
2.75	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.103 \\ 0.23 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.169 \\ 0.125 \\ -24.791 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.806 \\ 0.125 \\ 10.659 \end{bmatrix}$
2.879	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.104 \\ 0.233 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.125 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.16 \\ 0.125 \\ -23.591 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.813 \\ 0.125 \\ 10.21 \end{bmatrix}$

5.3 O método de integração numérica

A mais importante tarefa numérica na simulação de sistemas dinâmicos contínuos é o cálculo de trajetórias.

O principal objetivo da integração numérica é o de aproximar o comportamento de um sistema dinâmico contínuo no computador, pois muitos sistemas dinâmicos não possuem solução analítica fechada e portanto, a única maneira de determinarmos seu comportamento (sua dinâmica) é integrá-los numericamente. Uma vez que os computadores são discretos por natureza, ou seja, calculam de forma discreta, um algoritmo de integração aproxima um sistema dinâmico contínuo, tal como o problema de valor inicial abaixo,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{5.39}$$

por um sistema discreto (*Parker e Chua (1989)*). O sistema real simulado não é um sistema de equações diferenciais; é um sistema discreto e freqüentemente bastante complexo.

No nosso trabalho, precisamos integrar numericamente o sistema de equações diferenciais (5.11) não apenas para podermos determinar a forma de alguns dos atratores formados à medida que alteramos o valor do parâmetro b_1 , e para o cálculo dos expoentes de Lyapunov (através dos quais, classificamos os atratores em questão), mas também, evidentemente, em qualquer cálculo que envolva a posição de pontos destes atratores (isto é, valores das variáveis dependentes) no espaço de fase do sistema.

Todos os algoritmos para integração numérica tentam aproximar a solução $\phi_t(\mathbf{u}_0, t_0)$ do sistema contínuo (5.39), gerando uma seqüência de pontos $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ em t_0, t_1, \dots, t_k , respectivamente, e $\phi_{t_k}(\mathbf{u}_0, t_0)$ deve aproximar

$$\mathbf{u}_k \approx \phi_{t_k}(\mathbf{u}_0, t_0), \quad (5.40)$$

com

$$\dot{\mathbf{u}}(t_k) \approx \frac{\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k}{h}, \quad (5.41)$$

que é uma aproximação para frente no tempo (*forward*) para o vetor das derivadas temporais.

Existem vários métodos para se fazer a integração de um sistema dinâmico e dentre eles podemos destacar: método de Euler, método trapezoidal, método de Runge-Kutta, entre outros. Todos estes são métodos de passo simples, ou seja, necessitam de somente um valor de entrada em cada passo de integração. Existem também métodos de passo múltiplo (Parker e Chua (1989)) dos quais não trataremos aqui.

O método de integração utilizado no presente trabalho foi o de Runge-Kutta de quarta ordem, e que usa pontos intermediários para calcular o próximo valor na integração. Todos os métodos de Runge-Kutta têm sua origem na idéia de aproximar uma função por sua expansão em Série de Taylor.

As fórmulas para o método de Runge-Kutta de quarta ordem são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_k, t_k) \\
\mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1, t_k + \frac{h}{2}\right) \\
\mathbf{K}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2, t_k + \frac{h}{2}\right) \\
\mathbf{K}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_k + h\mathbf{K}_3, t_k + h) \\
\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde h é o passo de integração, \mathbf{f} é a função presente no sistema (5.39) e que estamos integrando, \mathbf{u}_k corresponde ao valor aproximado da função no tempo t_k e $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ são os passos intermediários do método de Runge-Kutta utilizados para aproximar \mathbf{u}_{k+1} .

Aqui, como estamos trabalhando com equações diferenciais autônomas, isto é, nas quais a função \mathbf{f} não depende explicitamente da variável independente tempo, o método de Runge-Kutta acima descrito reduz-se para:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_k) \\
\mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1\right) \\
\mathbf{K}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_k + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2\right) \\
\mathbf{K}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_k + h\mathbf{K}_3) \\
\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Para o problema de valor inicial considerado neste trabalho, cujas equações diferenciais foram apresentadas em (5.13), temos para as componentes de \mathbf{f} as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
F_1(x_k, y_k, z_k) &= x_k(1 - x_k) - \frac{5x_k y_k}{1 + b_1 x_k} \\
F_2(x_k, y_k, z_k) &= \frac{5x_k y_k}{1 + b_1 x_k} - \frac{0.1y_k z_k}{1 + 2y_k} - 0.4y_k \\
F_3(x_k, y_k, z_k) &= \frac{0.1y_k z_k}{1 + 2y_k} - 0.01z_k
\end{aligned} \tag{5.44}$$

e adotamos para valores iniciais: $x_0 = 0.4$, $y_0 = 0.1$ e $z_0 = 9.0$. Sendo as aproximações para frente no tempo para as derivadas, dadas por:

$$\dot{x}_{t_k} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{h} \quad \dot{y}_{t_k} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \quad \dot{z}_{t_k} \approx \frac{z_{k+1} - z_k}{h}, \quad (5.45)$$

os passos intermediários para o nosso sistema têm a forma:

$$\begin{aligned} K_{11} &= F_1(x_k, y_k, z_k), \\ K_{21} &= F_2(x_k, y_k, z_k), \\ K_{31} &= F_3(x_k, y_k, z_k), \\ K_{12} &= F_1\left(x_k + \frac{hK_{11}}{2}, y_k + \frac{hK_{21}}{2}, z_k + \frac{hK_{31}}{2}\right), \\ K_{22} &= F_2\left(x_k + \frac{hK_{11}}{2}, y_k + \frac{hK_{21}}{2}, z_k + \frac{hK_{31}}{2}\right), \\ K_{32} &= F_3\left(x_k + \frac{hK_{11}}{2}, y_k + \frac{hK_{21}}{2}, z_k + \frac{hK_{31}}{2}\right), \\ K_{13} &= F_1\left(x_k + \frac{hK_{12}}{2}, y_k + \frac{hK_{22}}{2}, z_k + \frac{hK_{32}}{2}\right), \\ K_{23} &= F_2\left(x_k + \frac{hK_{12}}{2}, y_k + \frac{hK_{22}}{2}, z_k + \frac{hK_{32}}{2}\right), \\ K_{33} &= F_3\left(x_k + \frac{hK_{12}}{2}, y_k + \frac{hK_{22}}{2}, z_k + \frac{hK_{32}}{2}\right), \\ K_{14} &= F_1(x_k + hK_{13}, y_k + hK_{23}, z_k + hK_{33}), \\ K_{24} &= F_2(x_k + hK_{13}, y_k + hK_{23}, z_k + hK_{33}), \\ K_{34} &= F_3(x_k + hK_{13}, y_k + hK_{23}, z_k + hK_{33}), \end{aligned} \quad (5.46)$$

e as aproximações serão calculadas por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14}) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24}) \\ z_{k+1} &= z_k + \frac{h}{6}(K_{31} + 2K_{32} + 2K_{33} + K_{34}) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Isto significa que, para obter a posição aproximada para um ponto no espaço de fase do sistema, utilizamos 12 valores intermediários, e este procedimento seria análogo se tivéssemos que resolver numericamente um sistema com n equações diferenciais de primeira ordem, em um espaço de fase n -dimensional.

O código de Runge-Kutta utilizado para integrar o sistema (5.11) foi retirado do livro de *Press et al (1992)* e implementado em FORTRAN 90. O passo de integração utilizado foi $h = 10^{-2}$ e investigamos atratores correspondentes a valores de b_1 no intervalo $[2, 3]$, à semelhança de Varriale e Gomes (1998).

A vantagem de utilizar o programa retirado de *Press et al (1992)* vem do fato de que ele executa implicitamente todas as operações indicadas acima e minimiza o número de atribuições. Para um sistema com mais equações, o procedimento com todas as variáveis acima seria muito suscetível a erros, além de trabalhoso em sua implementação. Então, optamos por utilizar o programa retirado de *Press et al (1992)* quando calculamos os expoentes de Lyapunov pois, para o cálculo destes, necessitamos, para cada uma das equações de movimento do sistema, integrar as três equações linearizadas correspondentes. Assim, para o sistema de três equações considerado neste trabalho, precisamos integrar 12 equações simultaneamente (3 de movimento e as 9 equações linearizadas correspondentes). Por outro lado, para a obtenção dos atratores, implementamos um programa, por nós elaborado, com todas as condições utilizadas acima, obtendo exatamente os mesmos resultados.

As funções F_1 , F_2 e F_3 foram implementadas em procedimentos separados de modo que, quando precisássemos de algum deles, estes eram chamados pelo programa principal e seu valor retornado ao mesmo. O motivo de se fazer isto é simples: evitar que se faça o mesmo cálculo repetidamente dentro do programa.

Sabe-se também que todo método numérico tem implícito nele um erro, uma vez que estamos fazendo uma aproximação do contínuo para o discreto. Este erro pode ser local ou global. O *erro local* é o erro do algoritmo num único passo de integração. O *erro global* é o erro causado pela sucessiva aplicação da fórmula de integração, ou seja, a soma dos erros locais.

O erro local pode ser separado em duas parcelas: erro por arredondamento (round-off error) e erro por truncamento (truncation error). O erro por arredondamento é o erro que resulta do fato de se aplicar uma aritmética real num

computador. Sua magnitude depende do *hardware* utilizado. O erro por truncamento é o erro local que resultaria se o algoritmo pudesse ser implementado num computador com precisão infinita; em outras palavras, é o erro local que ocorreria assumindo que não existisse erro por arredondamento (de ponto flutuante).

Para algoritmos de k -ésima ordem e passo simples, o erro por truncamento local é proporcional à k -ésima potência do passo de integração h ; assim, para $h < 1$, o erro será tanto menor quanto menor for o passo de integração e quanto maior for a ordem do método. Para o método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizado neste trabalho, utilizamos $h = 0.01$, e, portanto, o erro local por truncamento, que é da ordem de 10^{-8} , indica o quanto estamos nos afastando da solução real em cada iterada. O erro global por truncamento é a soma dos erros locais em cada passo de integração.

5.4 Cálculo dos expoentes de Lyapunov

Para termos certeza que estaremos trabalhando sobre um atrator caótico, calculamos os expoentes de Lyapunov da trajetória do sistema (5.11) para diversos valores do parâmetro de controle b_1 .

Os expoentes de Lyapunov exercem um papel importante no estudo de sistemas dinâmicos, tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista numérico (Benetim *et al* 1980).

No presente trabalho, procuramos identificar valores do parâmetro de controle b_1 , de tal forma que tenhamos a presença de um atrator caótico (estranho). Como temos um sistema contínuo tridimensional, reconhecer um atrator caótico corresponde a identificar valores de b_1 para os quais o atrator apresenta (seção 3.3) um expoente de Lyapunov positivo, um expoente zero e um expoente negativo.

Com o propósito de encontrar estes expoentes, implementou-se um algoritmo proposto por Wolf(1985), para o cálculo dos mesmos. Este programa foi

implementado em FORTRAN 90. Para assegurar que nosso programa estava correto calculamos os expoentes de Lyapunov para o atrator de Lorenz, e obtivemos: $\lambda_1 = 2.1624$, $\lambda_2 = -5.1537 \times 10^{-5}$ e $\lambda_3 = -32.3819$, os quais estão em boa concordância com os valores obtidos por Wolf (1985) ($\lambda_1 = 2.16$, $\lambda_2 = 0.0$ e $\lambda_3 = -32.4$).

Lembramos que os expoentes de Lyapunov são definidos pela evolução dos eixos de uma esfera infinitesimal de estados. O cálculo destes expoentes poderia ser implementado através da definição dos eixos principais com condições iniciais cujas separações são tão pequenas quanto permitidas pelas limitações computacionais. As condições iniciais são, então, avançadas no tempo através das equações não lineares de movimento. Esta aproximação apresenta um problema: em um sistema caótico não podemos garantir que a condição de pequenas separações para tempos da ordem de centenas de períodos orbitais seja satisfeito, sendo que esta é uma condição necessária para a convergência do espectro.

Este problema pode ser evitado com o uso de um espaço de fase, juntamente com uma aproximação do espaço tangencial. Uma trajetória fiducial, percorrida pelo centro da esfera, é definida pela ação das equações não lineares de movimento sobre as condições iniciais. As trajetórias dos pontos na superfície da esfera são definidas pelas equações de movimento linearizadas em pontos infinitesimalmente separados da trajetória fiducial. Em particular, os eixos principais são definidos pela evolução (via equações linearizadas) de uma estrutura vetorial inicialmente ortonormal, “ancorada” à trajetória fiducial. Por definição, os eixos principais definidos pelo sistema linear são sempre infinitesimais em relação ao atrator.

Para o sistema em estudo, as equações linearizadas de movimento, obtidas pela expansão em série de Taylor do sistema (5.11) em torno de cada um dos pontos da trajetória (x', y', z') , para um dado valor de b_1 , e mantendo-se somente os termos lineares em $(x - x')$, $(y - y')$ e $(z - z')$, são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= \left(1 - 2x' - \frac{5y'}{(1 + b_1x')^2}\right) \eta_1 - \left(\frac{5x'}{1 + b_1x'}\right) \eta_2 \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= \left(\frac{5y'}{(1 + b_1x')^2}\right) \eta_1 + \left(\frac{5x'}{1 + b_1x'} - \frac{0.1z'}{(1 + b_1y')^2} - 0.4\right) \eta_2 - \left(\frac{0.1y'}{1 + 2y'}\right) \eta_3 \end{aligned}$$

$$\frac{d\eta_3}{dt} = \left(\frac{0.1z'}{(1+b_1y')^2} \right) \eta_2 + \left(\frac{0.1y'}{1+2y'} - 0.01 \right) \eta_3 \quad (5.48)$$

onde $\eta_1 = (x - x')$, $\eta_2 = (y - y')$ e $\eta_3 = (z - z')$. A trajetória fiducial é criada implementando-se as equações de movimento e eliminando um certo transiente. Simultaneamente, as equações linearizadas de movimento foram integradas para 3 condições iniciais diferentes dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

definindo uma estrutura de 3 vetores ortonormais e que formam a base do espaço tridimensional. Como, num sistema caótico, os vetores tendem a seguir a direção de mais rápido crescimento, ou seja, os vetores inicialmente próximos tendem a colapsar na direção de mais rápido crescimento e devido à precisão finita dos cálculos, utilizou-se o processo de ortonormalização de *Gram-Schmidt*, dado genericamente por:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \\ \omega_2 &= \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \omega_1 \rangle \omega_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \omega_1 \rangle \omega_1\|} \\ &\vdots \\ \omega_n &= \frac{\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \omega_{n-1} \rangle \omega_{n-1} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \omega_1 \rangle \omega_1}{\|\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \omega_{n-1} \rangle \omega_{n-1} - \dots - \langle \mathbf{v}_n, \omega_1 \rangle \omega_1\|} \end{aligned} \quad (5.50)$$

de modo a preservarmos as direções dos vetores iniciais, onde \mathbf{v}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são os vetores obtidos da evolução de cada uma das condições iniciais (5.49) quando integramos as equações linearizadas de movimento, ω_i $i = 1, 2, \dots, n$ são os vetores normalizados, $\langle \dots, \dots \rangle$ significa o produto interno entre dois vetores e $\|\dots\|$ denota a norma do vetor em questão.

Assim, a cada iteração, ou seja, a cada vez que calculávamos o valor da nova aproximação para as variáveis de estado, ortonormalizávamos os vetores \mathbf{v}_i e acumulávamos o valor do módulo destes vetores \mathbf{v}_i e também a cada iteração aplicávamos a definição dos expoentes de Lyapunov da seguinte forma:

$$\lambda_i(I) = \log_2(\|\mathbf{v}_i\|) + \lambda_i(I), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.51)$$

onde $\lambda_i(I)$ é o valor para cada um dos expoentes de Lyapunov na I -ésima iteração. A partir de um dado momento, o valor de $\lambda_i(I)$ não muda significativamente indicando que chegamos ao valor assintótico do expoente de Lyapunov.

Para o cálculo de cada expoente do sistema estudado, eliminou-se um transiente de 8×10^3 iterações e calculou-se um adicional de 3.8×10^5 iterações, obtendo-se assim, o valor assintótico de cada expoente.

Com o objetivo de se conhecer a dinâmica da evolução do sistema, à medida que o parâmetro aumenta, foram calculados todos os expoentes de Lyapunov, correspondendo a cada um dos atratores para b_1 entre 2.0 e 3.0, variando-se b_1 em passos de 0.001.

Os gráficos da evolução de cada expoente, à medida que b_1 cresce, são dados nas figuras (5.3), (5.4), (5.5). Estes gráficos foram feitos com o software *GNUPLOT*, a partir de um arquivo de dados gerado em FORTRAN 90.

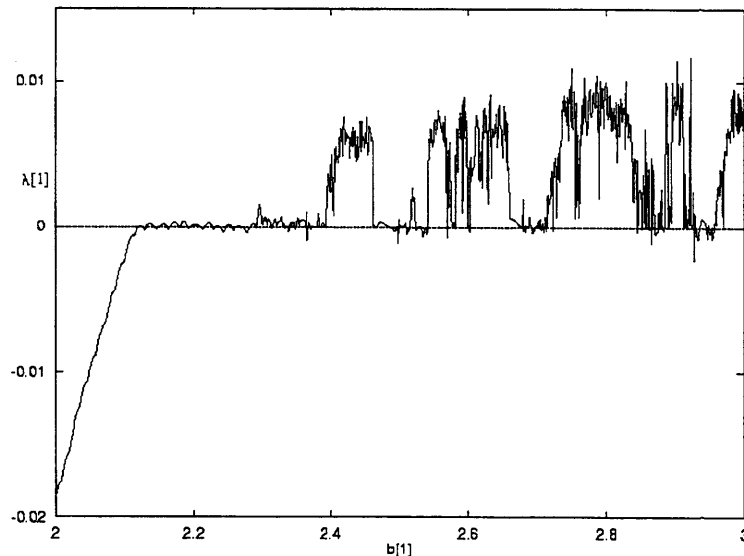


Figura 5.3: Expoente de Lyapunov λ_1 em função do parâmetro b_1

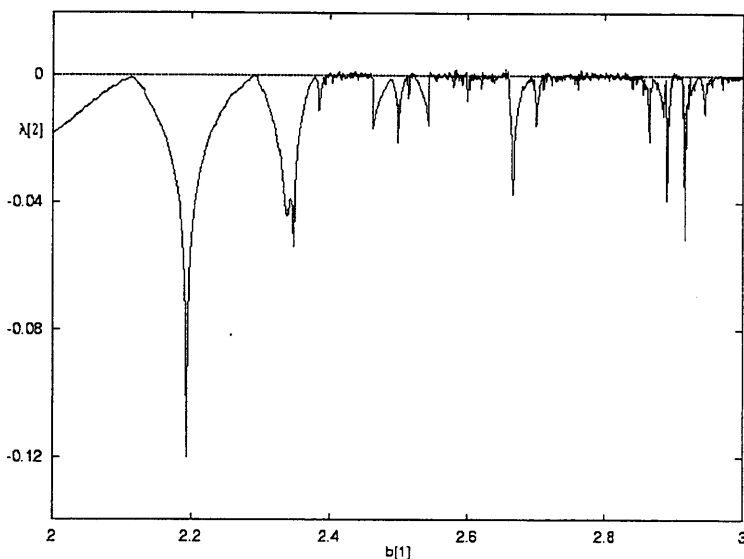


Figura 5.4: Expoente de Lyapunov λ_2 em função do parâmetro b_1

Pela análise das figuras, observa-se que, de $b_1 = 2.0$ até $b_1 \simeq 2.113$, temos os três expoentes negativos, significando (seção (4.2)) que neste intervalo para b_1 , o sistema possui um ponto de equilíbrio estável, e isto está de acordo com os resultados calculados na seção 5.2, quando utilizamos as condições de Routh-Hurwitz.

De $b_1 \simeq 2.113$ a $b_1 \simeq 2.39$, nota-se que λ_1 é aproximadamente nulo e que λ_2 e λ_3 são negativos, caracterizando (seção 4.2), a presença de ciclos limite. À medida que b_1 aumenta neste intervalo, os expoentes de Lyapunov ainda indicam ciclos limite, até que em $b_1 \simeq 2.39$ temos a presença de um atrator caótico. Para $b_1 > 2.39$ temos a alternância de ciclos limite e atratores caóticos. Esta alternância é típica de dinâmicas caóticas. O maior expoente de Lyapunov (λ_1) para o intervalo analisado ($b_1 \in [2, 3]$), assume um valor máximo da ordem de 1.2×10^{-2} , enquanto que λ_3 fica restrito ao intervalo $[-0.55, -0.35]$. Estes resultados concordam com o que foi visto na literatura (Ott 1993) de que, em módulo, o expoente mais negativo

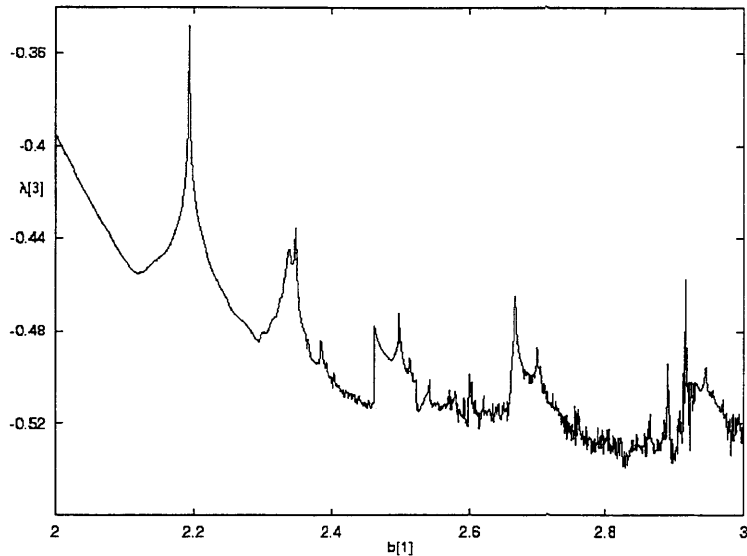


Figura 5.5: Expoente de Lyapunov λ_3 em função do parâmetro b_1

deve ser sempre bem maior que o expoente positivo e que a soma dos expoentes positivos, também em módulo, é sempre menor que a soma dos expoentes negativos.

Para implementar o controle de caos (capítulo seguinte), escolhemos o valor de $b_1 = 2.75$ pelo fato que, em torno deste valor, temos um “grande” intervalo onde está presente a dinâmica caótica. Contudo, outros valores de b_1 neste intervalo poderiam ter sido utilizados para o controle.

5.5 Visualização de alguns atratores

Como visto acima, pelo fato de não termos uma solução analítica fechada para o sistema (5.11), integramos este sistema numericamente para diferentes valores do parâmetro b_1 e calculamos os respectivos expoentes de Lyapunov. O traçado do atrator no espaço de fase é obtido a partir dos pontos (x, y, z) que resultam da integração numérica, após eliminar um transiente de 8×10^4 iterações.

Um fato que podemos adiantar relacionado à dinâmica do sistema (5.11) é que, às vezes, com uma pequena perturbação do parâmetro b_1 , os atratores formados podem apresentar estruturas completamente diferentes uma da outra, isto é, o modelo é extremamente sensível à variação de b_1 . Isto pode ser observado pelas figuras 5.9 e 5.16. A figura 5.9 ($b_1 = 2.46$) apresenta um atrator caótico, enquanto que na figura 5.16 ($b_1 = 2.463$) temos um ciclo limite.

A seguir, faremos uma breve análise de algumas estruturas aqui encontradas, para b_1 entre 2.0 e 3.0.

Como visto nas nas seções anteriores deste capítulo, para $b_1 = 2.0$ a $b_1 \simeq 2.113$, o sistema (5.11) possui um ponto de equilíbrio estável; este intervalo foi determinado pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov (figuras 5.3 a 5.5) e também pela aplicação das condições de Routh-Hurwitz.

A partir de $b_1 \simeq 2.113$ temos o surgimento de ciclos limite e atratores caóticos, conforme podemos observar pelas figuras 5.6 a 5.9.

Na figura 5.6 ($b_1 = 2.13$), temos a presença de um ciclo limite estável, o que dá ao sistema uma natureza oscilatória e periódica; os gráficos $x \times t$, $y \times t$ e $z \times t$ correspondentes estão apresentados nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12. O ponto fixo antes estável dá origem a um ciclo limite quando este passa por um valor crítico do parâmetro b_1 ; diz-se que o sistema sofre uma bifurcação neste valor de b_1 .

Em $b_1 = 2.30$ (figura 5.7) ocorre uma duplicação de período do ciclo visto na figura 5.6, o qual quadruplica para $b_1 = 2.39$ (figura 5.8). Esta seqüência de duplicações de período segue até que em $b_1 \simeq 2.46$ (figura 5.9) já temos a presença de um atrator caótico. O comportamento periódico, observado para valores de b_1 mais baixos, dá lugar a uma dinâmica caótica. O comportamento aperiódico que apresentamos nas figuras 5.13 a 5.15, para cada uma das três componentes $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, do sistema, é típico de dinâmicas caóticas.

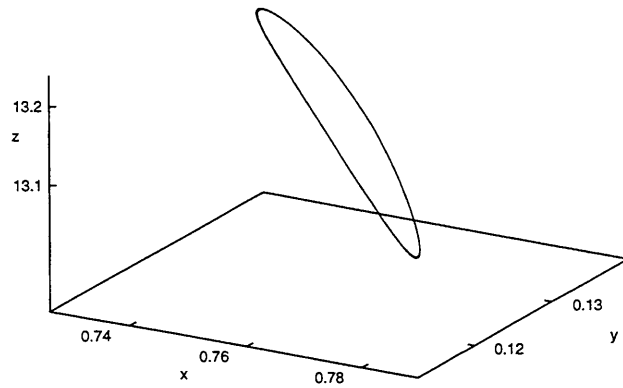


Figura 5.6: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.13$

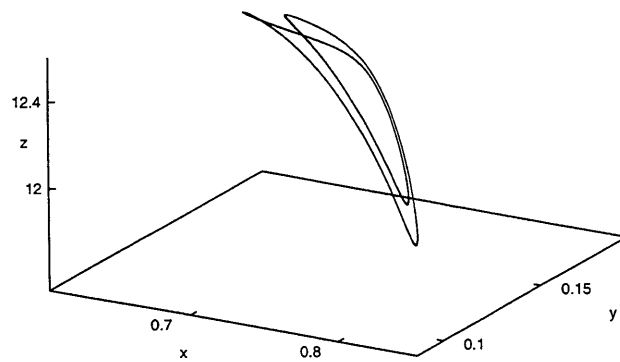


Figura 5.7: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.30$

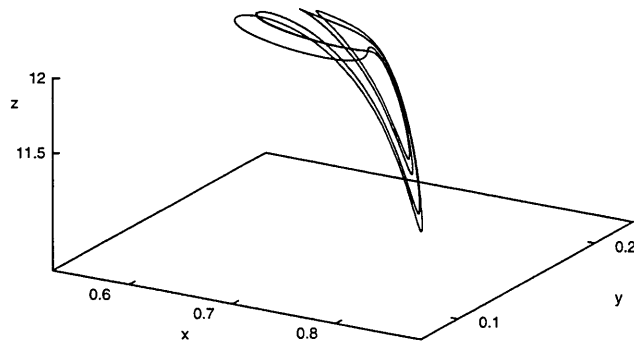


Figura 5.8: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.39$

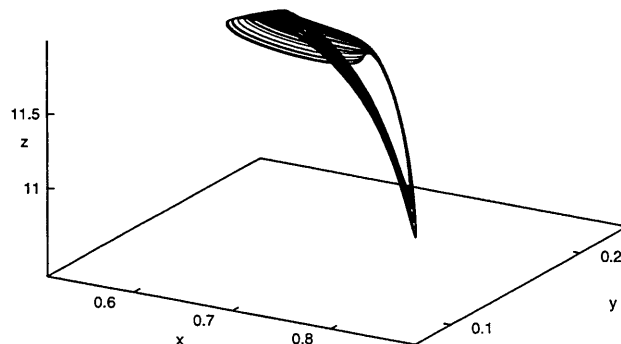


Figura 5.9: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.46$

Aumentando ainda mais o parâmetro, verificamos a presença de outros ciclos limite que vão duplicando de período até chegarmos novamente ao caos. Esta alternância de caos e janelas de periodicidade é outra importante característica de dinâmicas caóticas.

Em $b_1 = 2.463$ (figura 5.16) e em $b_1 = 2.51$ (figura 5.17) mostramos um ciclo limite e sua duplicação de período e, após uma nova seqüência de duplicações de período, chegamos novamente a um atrator caótico, tal como mostrado na figura

5.18, para $b_1 = 2.75$. Este é o atrator caótico sobre o qual resolvemos nos fixar, para efetuar o controle de caos, que apresentaremos no capítulo seguinte. Observa-se também da figura 5.16 que o ciclo formado em $b_1 = 2.463$ é dinamicamente diferente daquele formado em $b_1 = 2.13$ (figura 5.6).

Como um último exemplo de ciclo, mostramos na figura 5.19, um outro ciclo que não se parece com nenhum dos ciclos vistos anteriormente. Isto mostra a riqueza de dinâmicas que este sistema pode apresentar à medida que b_1 varia.

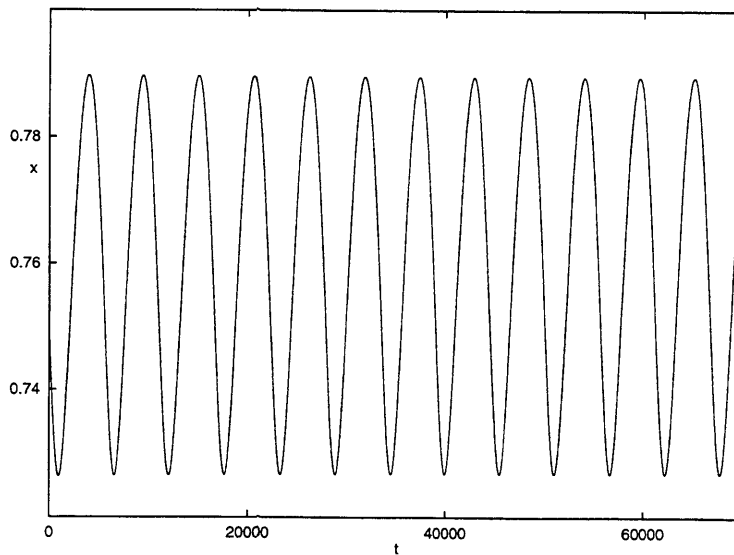


Figura 5.10: Gráfico $x \times t$ para $b_1 = 2.13$

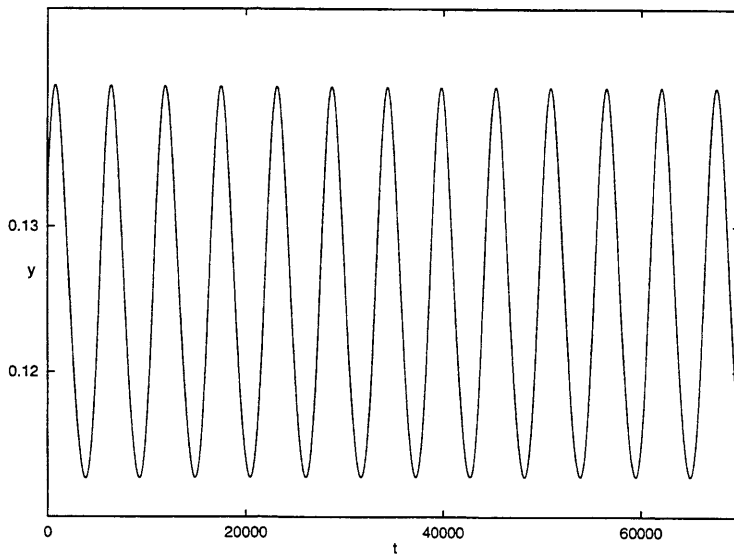


Figura 5.11: Gráfico $y \times t$ para $b_1 = 2.13$

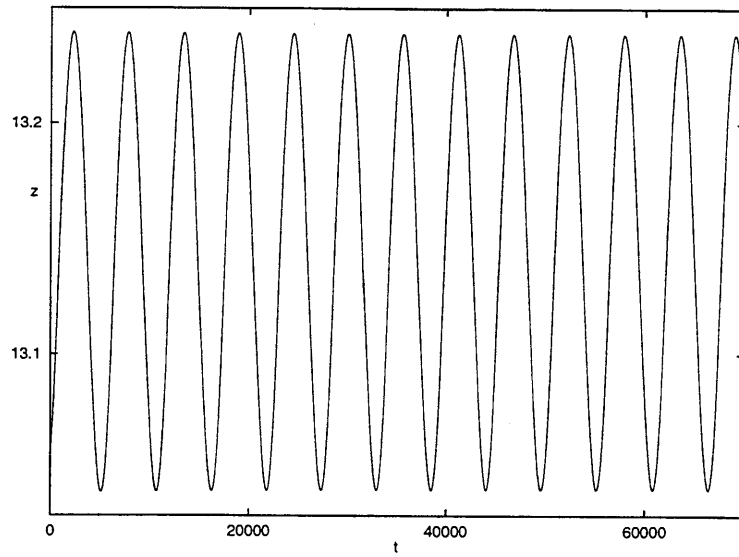


Figura 5.12: Gráfico $z \times t$ para $b_1 = 2.13$

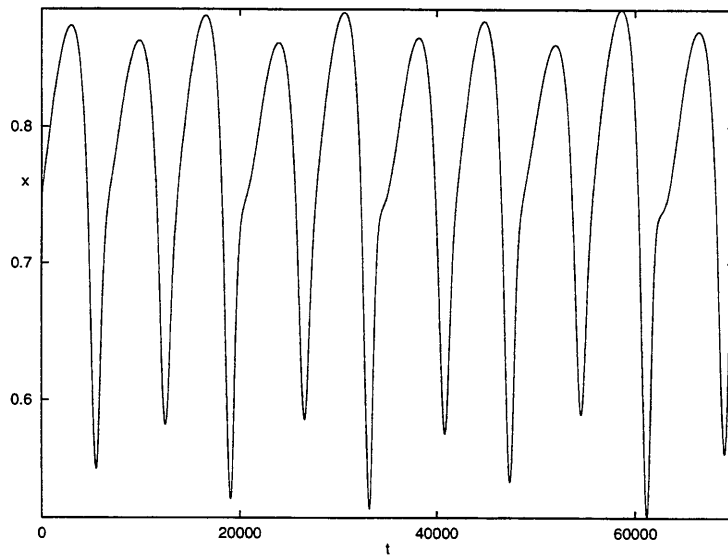


Figura 5.13: Gráfico $x \times t$ para $b_1 = 2.46$

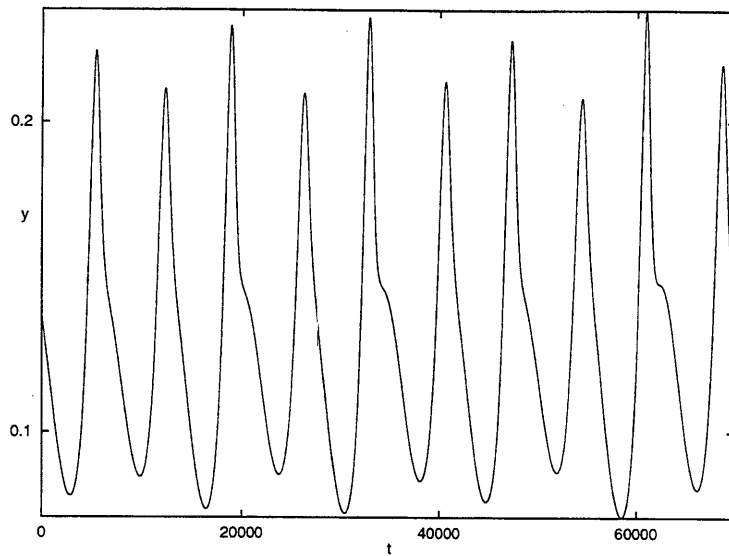


Figura 5.14: Gráfico $y \times t$ para $b_1 = 2.46$

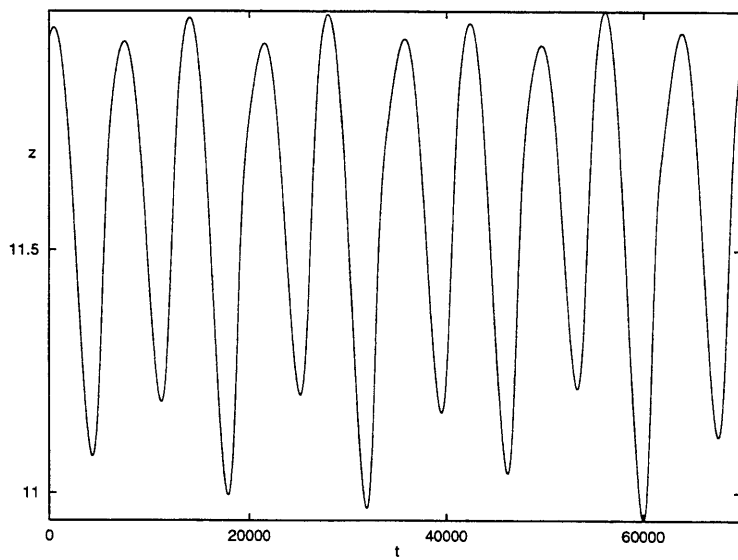


Figura 5.15: Gráfico $z \times t$ para $b_1 = 2.46$

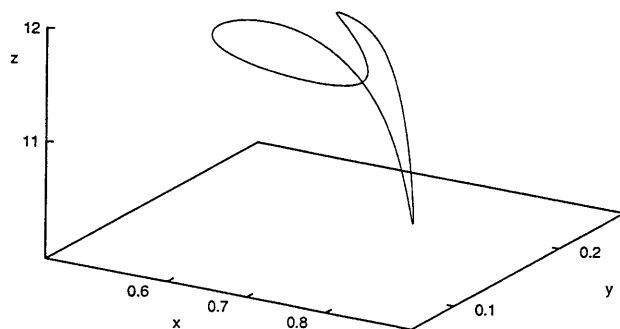


Figura 5.16: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.463$

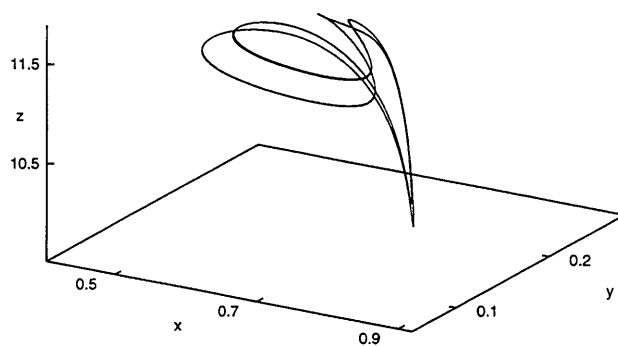


Figura 5.17: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.51$

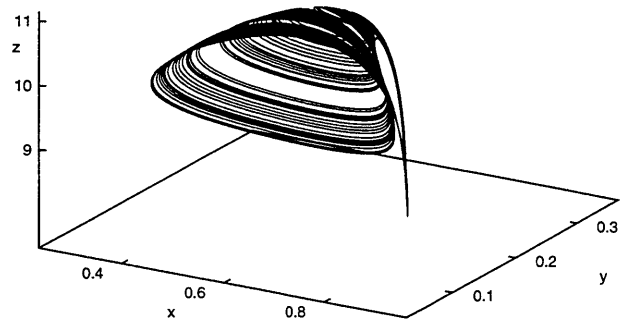


Figura 5.18: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$

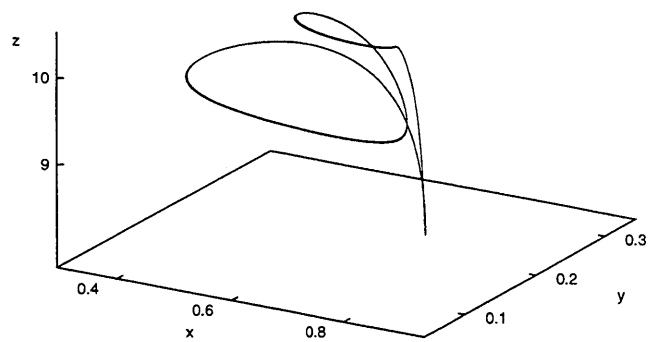


Figura 5.19: O atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.879$

5.6 O atrator caótico sobre o qual efetuaremos o controle

No capítulo seguinte, para efetuar o controle de caos, nos fixaremos sobre o atrator caótico (de acordo com o estudo dos expoentes de Lyapunov), que corresponde a $b_1 = 2.75$, apresentado na figura 5.18. Nas figuras 5.20, 5.21 e 5.22, apresentamos as projeções deste atrator nos planos xy , xz e yz , respectivamente.

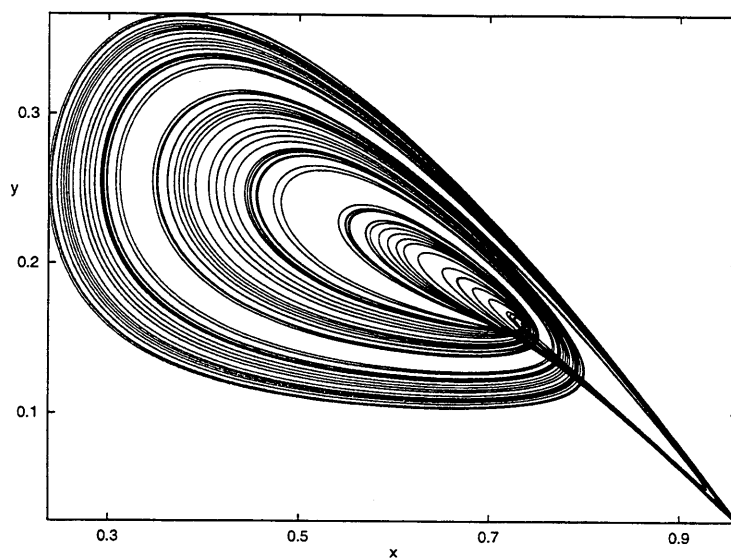


Figura 5.20: Projeção xy do do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$

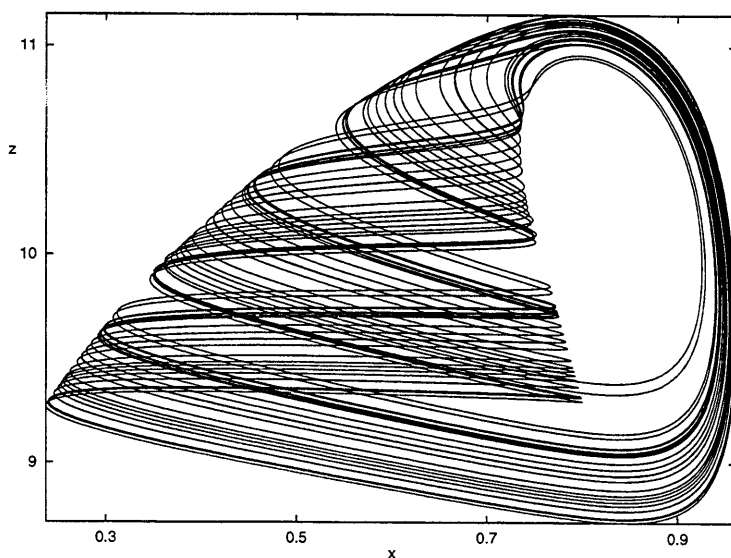


Figura 5.21: Projeção xz do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$

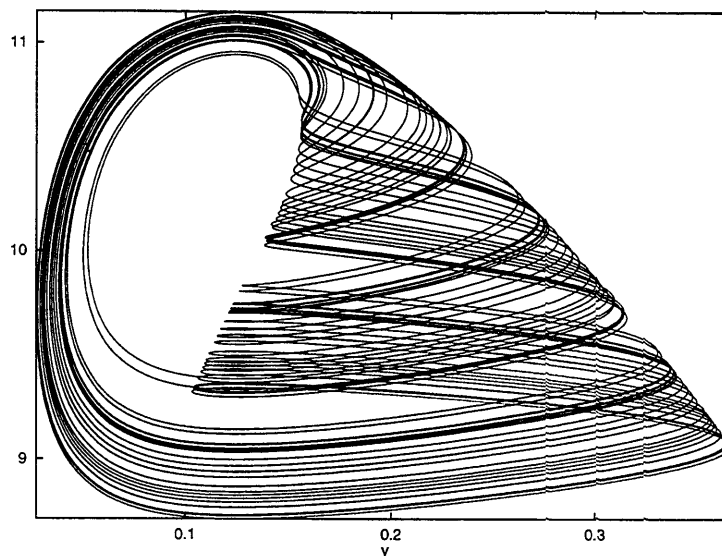


Figura 5.22: Projção yz do atrator no espaço de fase para $b_1 = 2.75$

Hastings e Powell(1991) afirmaram que a forma geométrica do atrator assemelha-se a uma xícara de chá virada (com a parte mais larga, a abertura, voltada para baixo).

Analisando os resultados da nossa integração numérica, observamos que o sentido da trajetória é tal que a “alça” da xícara é percorrida no sentido decrescente da componente z , enquanto que sobre o “corpo” da xícara, isto é, fora da alça, a xícara é contornada no sentido de z crescente.

Em termos de populações descritas pelo modelo, o contorno do corpo da xícara é constituído por oscilações para as populações das espécies X e Y , do nível mais baixo e do nível intermediário da cadeia trófica, respectivamente; a amplitude destas oscilações sofre uma redução enquanto que a população Z , topo da cadeia trófica, vai aumentando (o diâmetro da seção transversal da xícara virada vai diminuindo na subida); após a população Z sofre uma abrupta queda, sem variação em X nem em Y (a descida pela alça da xícara) e o processo recomeça.

6 APLICAÇÃO DO MÉTODO OGY

Após identificado (capítulo 5) o estado assintótico do sistema de Hastings e Powell, para $b_1 = 2.75$, como um atrator caótico, nossa proposta neste capítulo é a de efetuar o controle de caos sobre o mesmo, estabilizando algumas das órbitas periódicas instáveis imersas neste atrator. O referido controle deverá ser obtido mediante a aplicação do método *OGY*, exposto no capítulo 4.

6.1 Identificação de algumas das órbitas periódicas instáveis

Um atrator caótico tem imerso nele um número infinito de órbitas periódicas instáveis, podendo, a princípio, qualquer uma delas ser estabilizada (Ott, Grebogi e Yorke, 1990). Em 1989 Lathrop e Kostelich descreveram um procedimento para localizar órbitas periódicas de sela (instáveis) em um atrator caótico (reproduzido a partir de dados experimentais). O método foi aplicado a dados da chamada reação de Belousov-Zhabotinskii. Em 1990, Ditto et al. utilizaram o método criado por Ott, Grebogi e Yorke para fazer o controle de caos em um sistema físico (uma fita magnetoelástica parametrizada), obtendo o controle de órbitas periódicas de períodos 1 e 2. Para o presente trabalho nos restringiremos apenas a órbitas periódicas de período 1.

Como vimos no capítulo 4, a estabilização pretendida pode ser efetuada, trabalhando sobre uma seção de Poincaré do atrator. Neste caso, considerando separadamente aqueles pontos sobre a seção, que são provenientes da intersecção da trajetória por um lado ou por outro da seção de Poincaré, observamos que, a uma órbita periódica instável de período 1 sobre o atrator no espaço tridimensional, corresponde um único ponto fixo instável sobre a seção de Poincaré bidimensional.

Sendo assim, o primeiro passo, para a aplicação do método OGY, consiste em identificar os pontos fixos instáveis do mapa (discreto) bidimensional, sobre uma seção de Poincaré do atrator caótico em estudo.

6.1.1 Seção de Poincaré

Para reduzirmos o problema tridimensional contínuo a um problema bidimensional discreto, devemos começar por decidir qual é a seção de Poincaré sobre a qual trabalharemos.

Considerando o formato do atrator (figura 5.18) em estudo, que em \mathbb{R}^3 está contido na região $0 < x < 1$, $0 < y < 0.4$ e $8.5 < z < 11.5$, optamos, neste trabalho, por construir uma seção de Poincaré, através da intersecção do atrator com o plano $z = 10$.

Traçar a seção de Poincaré significa, portanto, marcar os pontos de intersecção entre o atrator e o plano $z = 10$. Além disso, como observamos na seção 4.4, este plano é interceptado tanto pela “alça” da xícara, quando a trajetória é percorrida no sentido de z decrescente, quanto pelo “corpo” da xícara, enquanto z aumenta. Como uma oscilação periódica instável, sobre o atrator tridimensional, corresponde a um ponto na “subida” em z (isto é, fora da alça) e o outro ponto na “descida” em z (isto é, sobre a alça), traçaremos separadamente duas seções de Poincaré.

Computacionalmente, a captura dos pontos da trajetória, que correspondem a $z = 10$, foi efetuada como segue: a cada vez que um ponto passava entre $z = 10$ e $z = 10.001$, era marcado um ponto na seção (esta seção foi construída de tal forma que pelo menos um ponto fosse marcado a cada passagem da trajetória sobre o atrator por essa seção). Caso existisse mais de um ponto nesta faixa, o segundo era descartado; apenas o primeiro ponto que atingia a seção (em cada subida ou em cada descida) era marcado. Devemos ressaltar, que em cada passagem pelo plano $z = 10$, ou na subida ou na descida, pelo menos um ponto era marcado.

Para darmos uma volta completa partindo de um ponto da alça ou de um ponto fora dela necessitamos entre 9000 e 12000 iterações em média, e assim um ponto é marcado na seção após este número de iterações.

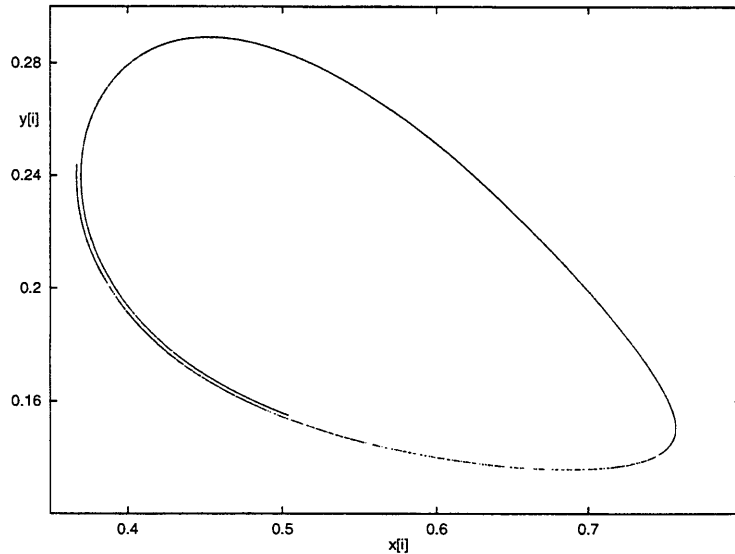


Figura 6.1: Pontos (x_i, y_i) que constituem a seção de Poincaré na região “fora da alça” para $b_1 = 2.75$

A forma geométrica de cada uma das seções de Poincaré, obtida como descrito acima, é apresentada nas figuras 6.1 e 6.2. As seções mostradas nas figuras 6.1 e 6.2 têm aproximadamente 9400 pontos (x_i, y_i) cada uma, o que corresponde a 9400 descidas ao longo da alça e também, evidentemente, a 9400 subidas contornando o corpo da xícara (fora da alça). Efetuar o controle de caos significa, em termos destas seções reduzir cada uma delas a um ponto apenas, pois o atrator em \mathfrak{R}^3 ficará “controlado” em uma órbita periódica estável.

Na seção 6.1.3, verificaremos que a cada órbita periódica instável do atrator tridimensional, corresponde um ponto fixo instável do mapa que descreve a seção apresentada na figura 6.1, e também a outro ponto fixo instável da mapa que descreve a seção apresentada na figura 6.2.

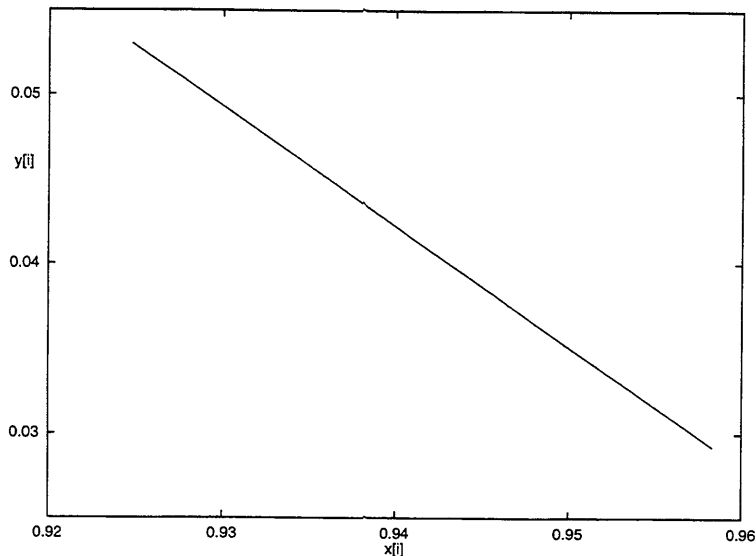


Figura 6.2: Pontos (x_i, y_i) que constituem a seção de Poincaré na região da “alça” para $b_1 = 2.75$

6.1.2 Mapa de Primeiro retorno e determinação dos pontos fixos instáveis

Na subseção anterior, nosso problema original, que consiste em estabilizar uma órbita periódica instável sobre o atrator, obtido em \mathbb{R}^3 , mediante a integração numérica do sistema de Hastings e Powell, foi transformado para o problema em \mathbb{R}^2 , de estabilizar um ponto fixo instável de um mapa do tipo

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F(x_i, y_i), \\y_{i+1} &= G(x_i, y_i)\end{aligned}\tag{6.1}$$

que descreva a seqüência ordenada de pontos que constituíram alguma das seções de Poincaré previamente apresentadas.

Os pontos fixos de um mapa tipo (6.1), são pontos (x^*, y^*) tais que (capítulo 2) as condições

$$\begin{aligned}x^* &= F(x^*, y^*) \\y^* &= G(x^*, y^*)\end{aligned}\tag{6.2}$$

sejam simultaneamente satisfeitas.

A questão é que não conhecemos a forma analítica das funções F e G em (6.2); a única informação que temos são as coordenadas de cada um dos pontos sobre a seção, pois estes pontos foram selecionados dentre o conjunto de pontos obtidos por integração numérica do sistema tridimensional de Hastings e Powell.

Por outro lado, sabemos como determinar pontos fixos a partir de um mapa de primeiro retorno (capítulo 2), e temos as informações necessárias para construir os gráficos $x_{i+1} \times x_i$ e $y_{i+1} \times y_i$, para a seqüência de pontos sobre cada uma das seções de Poincaré acima estabelecidas.

As coordenadas (x^*, y^*) de um ponto fixo em duas dimensões podem ser determinadas a partir dos mapas de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ e $y_{i+1} \times y_i$, pois x^* e y^* são as intersecções destes gráficos com as retas $x_{i+1} = x_i$ e $y_{i+1} = y_i$, respectivamente. Da intersecção do mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ como a reta $x_{i+1} = x_i$, determinamos a primeira componente do ponto fixo e da intersecção do mapa de primeiro retorno $y_{i+1} \times y_i$ com a reta $y_{i+1} = y_i$ determinamos a segunda componente do ponto fixo.

As formas do mapa de primeiro retorno, $x_{i+1} \times x_i$ e $y_{i+1} \times y_i$, para pontos que constituem a seção de Poincaré na região da alça, são mostradas nas figuras 6.3 e 6.4, respectivamente. Observamos que a reta $x_{i+1} = x_i$ intercepta o gráfico apresentado na figura 6.3, em três pontos distintos; por outro lado, a reta $y_{i+1} = y_i$ também intercepta o gráfico apresentado na figura 6.4 em três pontos distintos. Para agrupar corretamente cada um dos valores de x^* encontrados com seu par y^* , para constituir os pontos fixos, fazemos uso da seguinte informação, fornecida pela seção de Poincaré: ao menor x^* corresponde o maior y^* , e ao maior x^* corresponde o menor y^* . Desta forma determinamos os seguintes três pontos fixos instáveis $(0.93323, 0.047)$, $(0.943462, 0.0397)$, $(0.95403, 0.03224)$, aos quais de agora em diante, nos referiremos como pontos fixos instáveis $(2a)$, $(1a)$ e $(3a)$, respectivamente. A precisão com a qual estas coordenadas estão apresentadas é obtida como segue: após “descobrir” os pontos na intersecção dos mapas de primeiro retorno com as retas $x_{i+1} = x_i$ e $y_{i+1} = y_i$ respectivamente, os mesmos (suas coordenadas)

podem ser reconhecidos na listagem dos resultados da integração numérica (capítulo 5); acompanhados de uma coordenada z , cujo valor é aproximadamente 10, verificamos a existência de duas iteradas sucessivas em que os valores fornecidos para as coordenadas x e y são de fato quase iguais (muito próximas).

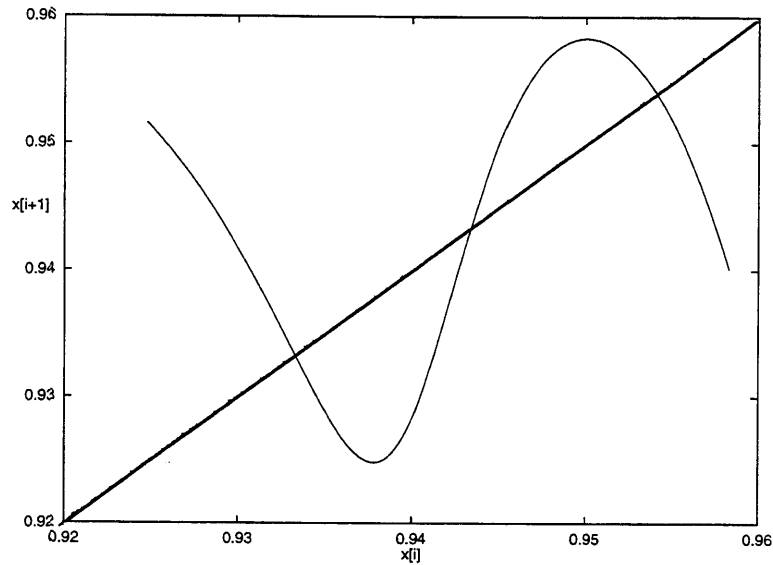


Figura 6.3: Mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ para $b_1 = 2.75$ na alça

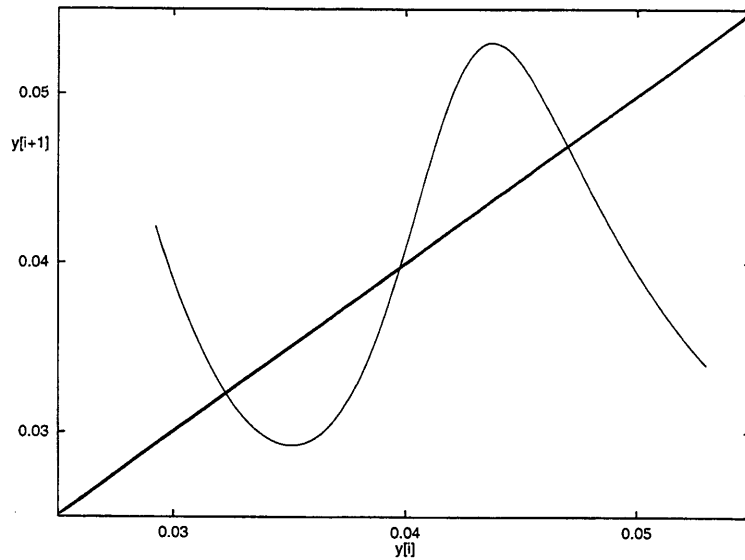


Figura 6.4: Mapa de primeiro retorno $y_{i+1} \times y_i$ para $b_1 = 2.75$ na alça

Para o cálculo dos pontos fixos instáveis do mapa que corresponde aos pontos que constituem a seção de Poincaré fora da alça, o procedimento é análogo ao feito para os pontos da alça. Os gráficos dos mapas de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$

e $y_{i+1} \times y_i$ são mostrados nas figuras 6.5 e 6.6, respectivamente. De imediato, percebemos que as formas destes são mais irregulares, quando comparadas aos mapas de primeiro retorno apresentados nas figuras 6.3 e 6.4. Traçando, como antes, as retas $x_{i+1} = x_i$ e $y_{i+1} = y_i$, nos mapas de primeiro retorno fora da alça correspondentes, encontramos os seguintes pontos fixos instáveis: $(0.373, 0.255)$, $(0.580, 0.259)$ e $(0.756, 0.149)$, e que, de agora em diante, denominaremos de pontos fixos $(3f)$, $(1f)$ e $(2f)$, respectivamente.

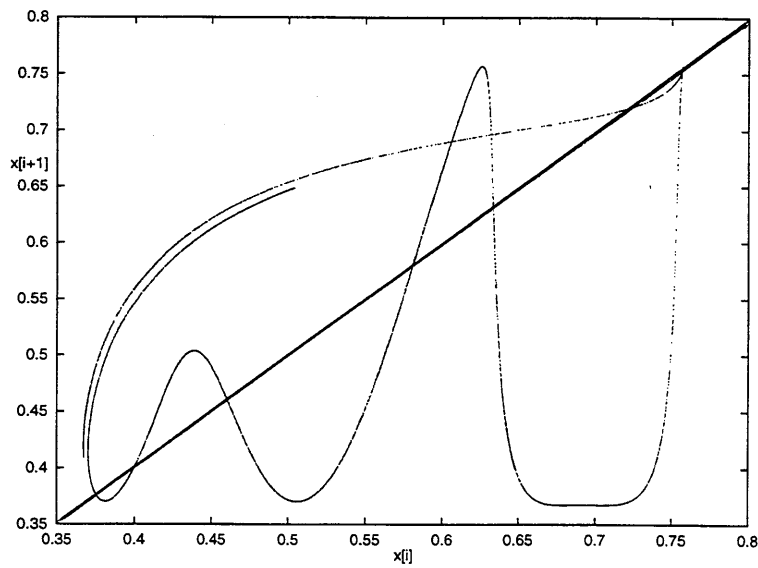


Figura 6.5: Mapa de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ para $b_1 = 2.75$ na região fora da alça

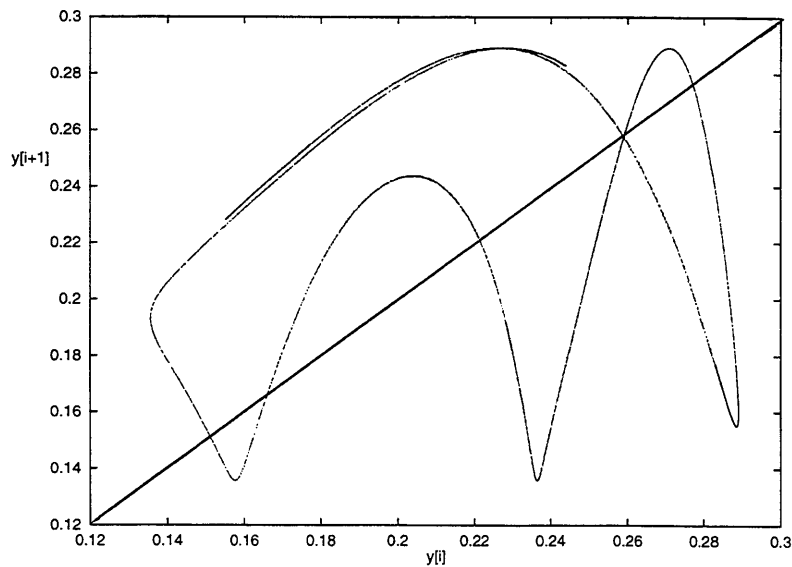


Figura 6.6: Mapa de primeiro retorno $y_{i+1} \times y_i$ para $b_1 = 2.75$ na região fora da alça

Na subseção seguinte, verificaremos que, como seria de se esperar, cada ponto fixo da seção de Poincaré apresentada na figura 6.1 corresponde a um ponto fixo daquela apresentada na figura 6.3, e cada par assim formado, representa, por sua vez, a mesma órbita periódica instável imersa no atrator caótico do sistema original.

Devemos ressaltar, também, que o cálculo do ponto fixo aqui teve que ser feito de forma bastante precisa, ou seja, o ponto fixo teve que ser calculado com pelo menos 4 casas decimais depois da vírgula corretas; se não o fizéssemos, todo o procedimento posterior estaria prejudicado, e uma imprecisão na 4ª casa poderia significar que o nosso ponto fixo não era ponto fixo para o valor de parâmetro 2.75 em estudo, mas para um valor de parâmetro diferente, próximo ao valor de parâmetro original; este fato está ilustrado, por exemplo na figura 6.18. Sem a precisão necessária, na determinação do ponto fixo, o controle não teria sido possível, pois, para a aplicação do método *OGY* de controle, é preciso determinar o deslocamento do ponto fixo com relação a uma pequena variação do parâmetro.

6.1.3 Órbitas periódicas instáveis \times pontos fixos instáveis

Uma vez determinado (seção 6.1.2) um ponto fixo instável do mapa de Poincaré, podemos visualizar a órbita periódica instável correspondente, que está imersa no atrator caótico de nosso sistema e que desejamos estabilizar.

As órbitas periódicas instáveis correspondentes aos pontos fixos instáveis $1a$, $2a$ e $3a$ são apresentadas nas figuras 6.7, 6.8 e 6.9, respectivamente. Cada uma destas órbitas correspondendo a cada um dos pontos fixos instáveis ($1a$, $2a$ e $3a$) foi determinada da seguinte forma: tomando como ponto inicial o ponto fixo instável, marcamos todos os pontos, até o próximo retorno da trajetória à seção. Embora, aparentemente, estes gráficos se pareçam com curvas fechadas (órbitas periódicas estáveis), isto não é verdade, pois o ponto de retorno à seção de Poincaré não coincide com o ponto inicial, e se continuarmos a iterar, os pontos subsequentes da trajetória não passarão sobre a seqüência dos anteriores; trata-se, de fato, de uma

órbita periódica de período 1, instável. O conjunto de um número infinito de órbitas periódicas instáveis é que forma o atrator caótico.

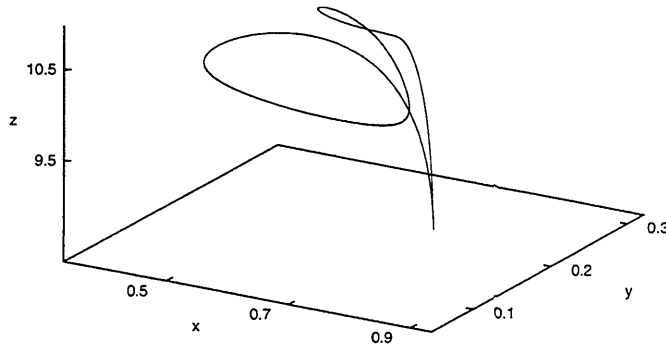


Figura 6.7: Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável 1a

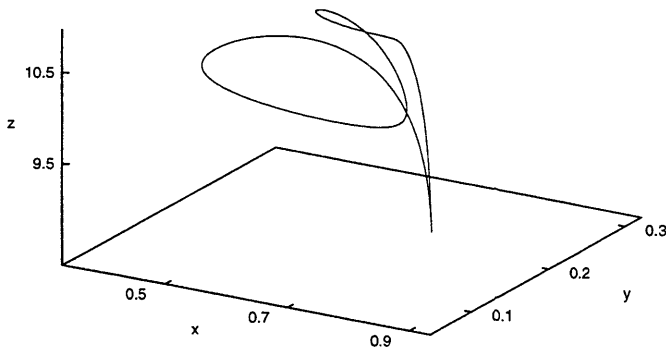


Figura 6.8: Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável 2a

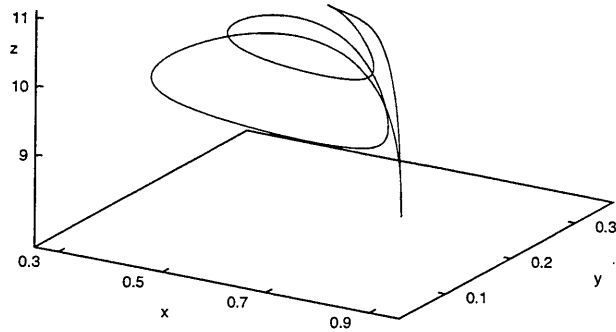


Figura 6.9: Órbita periódica instável referente ao ponto fixo instável $3a$

Observamos destas figuras que elas são diferentes uma da outra. Vemos também da figura 5.19 (atrator em 2.879) uma certa semelhança com a órbita do ponto $1a$ (figura 6.7), indicando que à medida que o parâmetro aumenta, algumas estruturas no atrator se repetem.

Observamos, também, que os “períodos” de cada uma das órbitas mostradas são diferentes. Para o ponto fixo $1a$ (figura 6.7) o tempo para o atrator dar uma “volta completa”, ou seja, a órbita formada entre dois retornos sucessivos à seção, é de aproximadamente 10600 iterações, enquanto que para o ponto $2a$ é de aproximadamente 9300 iterações e por fim, para o ponto fixo $3a$ necessitamos de aproximadamente 10900 iterações.

Mostraremos, a seguir, que os pontos fixos instáveis da alça estão relacionados aos pontos fixos fora da alça; mais especificamente, os pontos $1a$ e $1f$ representam a mesma órbita periódica instável, a qual denominaremos de órbita 1 (figura 6.7), também os pontos $2a$ e $2f$ relacionam-se com a órbita 2 (figura 6.8), bem como os pontos $3a$ e $3f$ com a órbita 3 (figura 6.9).

As figuras 6.10 e 6.11 são gráficos $x \times t$ da trajetória, para aproximadamente quatro voltas completas sobre o atrator, iniciando-se no ponto fixo $1a$ e no ponto fixo $1f$, respectivamente.

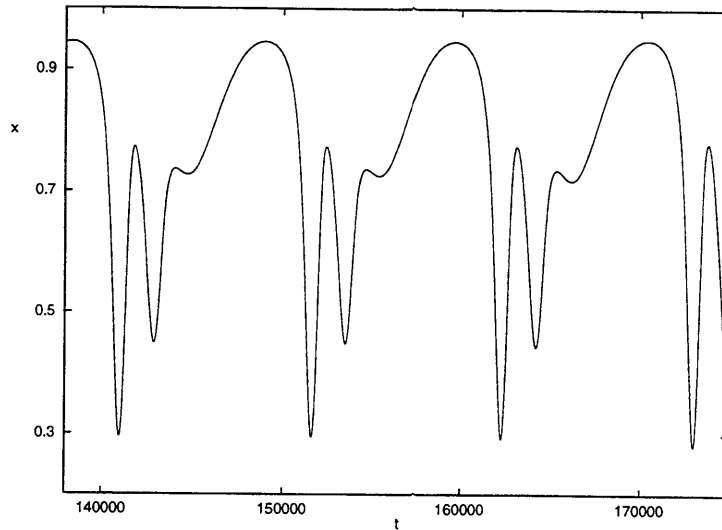


Figura 6.10: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $1a$

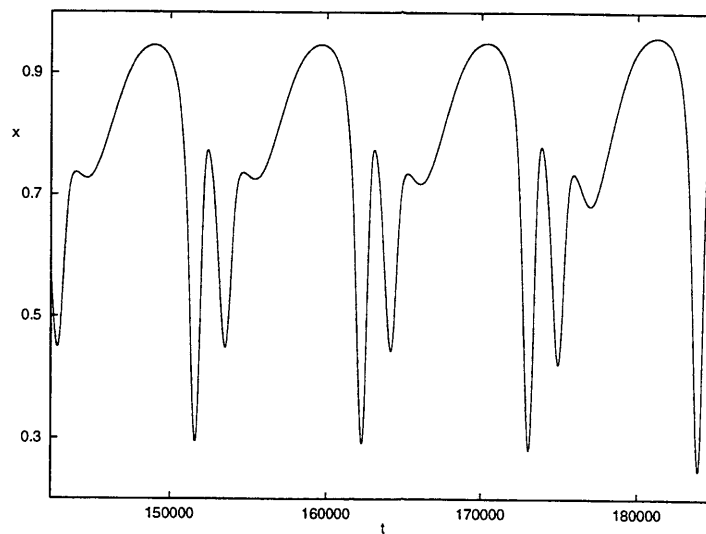


Figura 6.11: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $1f$

Pelo que podemos observar elas têm a mesma estrutura (deslocada) e portanto, representam a mesma órbita. O mesmo vale, quando comparamos os gráficos $x \times t$ para os pontos iniciais $2a$ (figura 6.12) com $2f$ (figura 6.13) e $3a$ (figura 6.14) com $3f$ (figura 6.15).

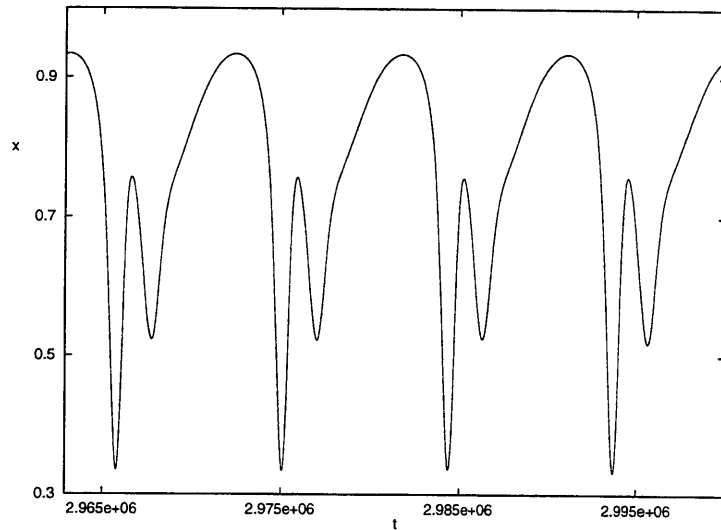


Figura 6.12: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $2a$

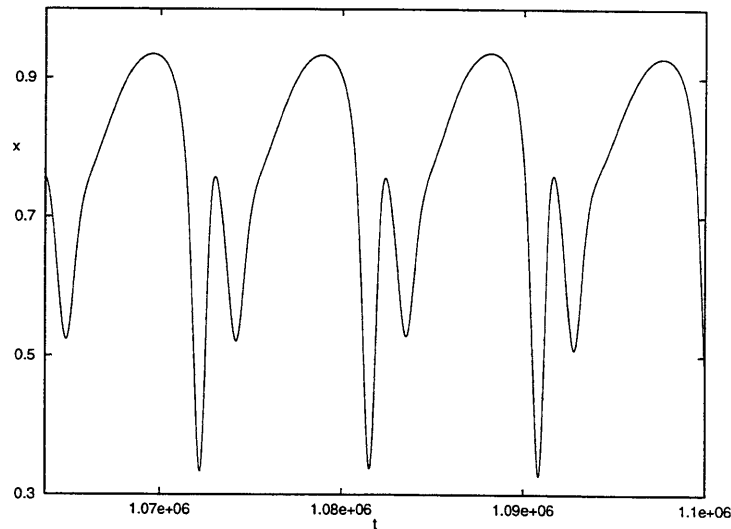


Figura 6.13: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $2f$

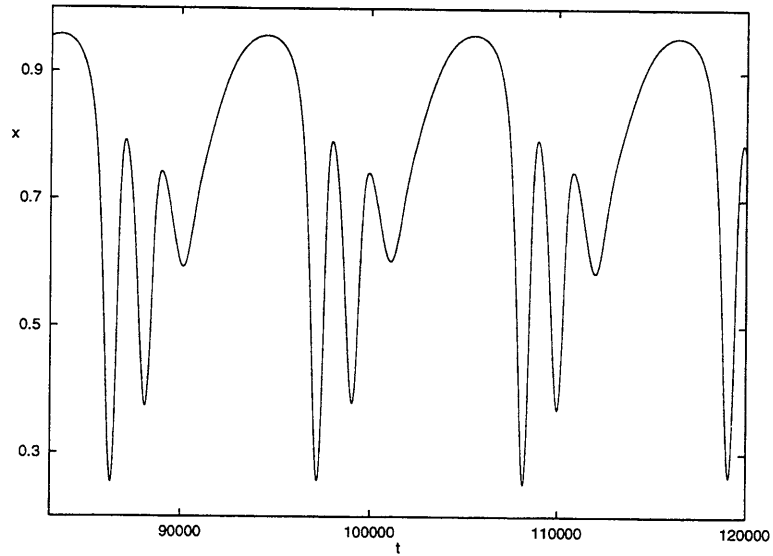


Figura 6.14: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $3a$

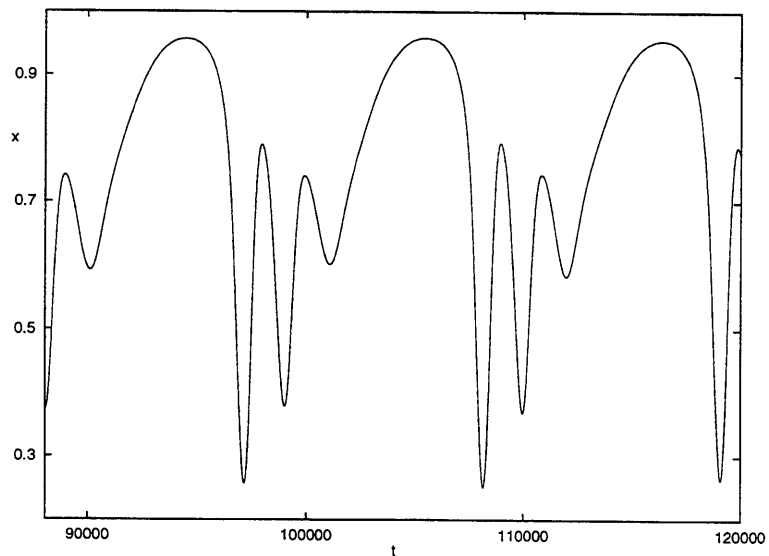


Figura 6.15: Gráfico $x \times t$ para aproximadamente quatro voltas sobre o atrator, iniciando no ponto fixo $3f$

Do estudo acima, acabamos de identificar três órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico que resulta do sistema dinâmico de Hastings e Powell em estudo; vimos que, a cada uma destas órbitas periódicas instáveis corresponde um ponto fixo instável do mapa que descreve a seção de Poincaré sobre o “corpo da xícara virada” (figura 6.1) e outro ponto fixo instável do mapa que descreve a seção de Poincaré sobre a “alça da xícara virada” (figura 6.2). Assim, para efetuar o controle de caos, de modo a estabilizar a órbita periódica apresentada na figura 6.7, podemos aplicar o método *OGY*, de modo a estabilizar o ponto fixo instável $1a$ sobre a seção “na alça”, da figura 6.2 (que corresponde aos mapas de primeiro retorno apresentados nas figuras 6.3 e 6.4) ou, equivalentemente, estabilizar o ponto fixo instável $1f$ sobre a seção “fora da alça”, figura 6.1 (que corresponde aos mapas de primeiro retorno apresentados nas figuras 6.5 e 6.6). Analogamente, para a órbita periódica instável apresentada na figura 6.8, podemos optar por trabalhar em torno do ponto fixo $2a$ ou do ponto fixo $2f$, e, para a órbita apresentada na figura 6.9, podemos nos fixar sobre o ponto $3a$ ou $3f$.

Face à equivalência acima estabelecida, optamos por trabalhar sobre a seção “na alça”, pois esta permite um tratamento unidimensional, enquanto que o controle através da seção “fora da alça” exige um tratamento em \mathbb{R}^2 .

6.2 Estabilização da órbita correspondente ao par de pontos $1a-1f$ sobre a seção de Poincaré

Depois da identificação de um ponto fixo instável sobre a seção de Poincaré, devemos investigar de que forma o sistema se comporta, próximo ao ponto fixo em questão. Para isso, o primeiro passo é determinar a aproximação linear para o mapa em torno deste ponto fixo instável, evidentemente tal mapa linear só é válido na vizinhança do ponto fixo considerado.

Para o controle em duas dimensões, é preciso calcular, como descrito no capítulo 4, uma matriz 2×2 (aproximação linear do mapa), que nos leva de um ponto

(x_i, y_i) para um ponto (x_{i+1}, y_{i+1}) , sobre a seção de Poincaré. Esta matriz vem da expansão em série de Taylor das funções $F(x_i, y_i)$ e $G(x_i, y_i)$ em (6.1), mantendo-se somente os termos lineares em $(x_i - x^*)$ e $(y_i - y^*)$. O cálculo desta matriz poderia se feito pelo método de regressão linear (mínimos quadrados) descrito no Apêndice E.

Neste caso, após o cálculo desta matriz 2×2 , deveríamos calcular os seus autovalores com seus autovetores associados, tendo que obrigatoriamente encontrar um autovalor com módulo menor que 1 ($|\lambda_1| < 1$) e um autovalor com módulo maior que 1 ($|\lambda_2| > 1$), pois o ponto fixo seria um ponto de sela (instável). Os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 representam as direções estável e instável, e, em se tratando de um ponto de sela, a aproximação ao ponto fixo é possível apenas para pontos sobre a direção estável. Além disso, deveríamos calcular os vetores base contravariantes e o controle é obtido através da imposição de que uma iterada subsequente caia exatamente sobre a direção (variedade) estável do ponto fixo instável, isto é, sem nenhuma componente sobre a direção instável. Assim, a órbita é atraída para o ponto fixo desejado.

Entretanto, devido à forma unidimensional da nossa seção de Poincaré “na alça”, vamos trabalhar, no que segue, com uma dimensão apenas. O controle de caos será aplicado, seguindo as diversas etapas estabelecidas na subseção 4.4.7.

6.2.1 Linearização do mapa sobre a seção de Poincaré, próximo ao ponto fixo $1a$

O procedimento, para obter o controle de caos do nosso sistema, pode agora ser estabelecido através de um tratamento em uma única dimensão, x , como segue. A partir do mapa $x_{i+1} = f(x_i, b_1)$, do qual x^* é um ponto fixo instável, queremos determinar um valor adequado para uma pequena perturbação Δb_1 no parâmetro b_1 , tal que o sistema “levemente perturbado”, leve de um valor x_n para um valor $x_{n+1}(b_1 + \delta b_1) = x^*$, como mostrado na figura 4.6.

Considerando que, para pontos próximos ao ponto fixo e para pequenas variações do parâmetro, a *razão* entre o *deslocamento horizontal* de um mapa de primeiro retorno (em decorrência de uma pequena variação do parâmetro) e a *variação do parâmetro* que gerou este deslocamento é uma constante, g , característica do sistema para o ponto fixo em questão, o valor adequado de $\Delta b_1]_{controle}$ é dado por

$$\Delta b_1]_{controle} = \frac{x_n - x^*}{g}, \quad (6.3)$$

pois, como facilmente identificado na figura 4.6, o deslocamento horizontal desejado é $x_n - x^*$.

A primeira etapa consiste em, determinar a linearização do mapa $x_{i+1} = f(x_i, b_1)$ que apresentamos na figura 6.3 e que corresponde à seção de Poincaré “na alça” para pontos próximos ao ponto fixo instável $1a$: $(0.943462, 0.0397)$, do qual agora só interessa a coordenada x^* . É claro que poderíamos também optar por nos fixar sobre o mapa apresentado na figura 6.4, e, neste caso, só nos interessaria a coordenada y^* .

Para a determinação deste mapa, selecionamos alguns pontos que passam próximos ao ponto fixo instável ($1a$). A distância máxima na coordenada x , em módulo, que consideramos admissível como próximo do ponto fixo foi de 0.0025. Para a determinação destes pontos, usamos o programa que seleciona os pontos da seção de Poincaré e toda vez que um ponto (x_i, y_i) , passava a esta distância do ponto fixo instável, isto é, $|x_i - x^*| < 0.0025$, o ponto era marcado.

Entretanto, como estamos numa órbita caótica os pontos que passam próximo a um ponto fixo ficam um certo tempo perto deste ponto fixo e depois se afastam, e como o atrator é ergódico, após um intervalo de tempo suficientemente grande teremos novamente outros pontos que passarão próximo a este ponto fixo. Portanto, os pontos que utilizamos para calcular o mapeamento linear em torno do ponto fixo considerado, não são pontos que ficaram durante todo tempo próximos ao ponto fixo e depois se afastaram e não mais retornaram a ele, mas sim são pontos que em intervalos diferentes passaram um curto tempo perto do ponto fixo e depois

se afastaram. A cada passagem perto do ponto fixo instável tínhamos, em média, 5 a 6 pontos marcados sobre a seção, e o total de pontos foi de 17 pontos, indicando 4 passagens (grupos de valores), próximo ao ponto fixo.

Com a coluna das coordenadas x_i do total de 17 pontos próximos ao ponto fixo instável construímos (deslocando-a), a coluna dos valores de x_{i+1} , e os parâmetros a e b na reta $x_{i+1} = ax_i + b$, pelo método dos mínimos quadrados (veja apêndice E). Para este caso, o método dos mínimos quadrados se reduz a um ajuste de curvas, e como queremos linearização, trata-se de determinar a melhor reta que passa por estes pontos.

Este ajuste foi feito usando o software estatístico *SPSS*, que nos forneceu a seguinte forma para o mapa linearizado:

$$x_{i_2+1} = 4.4764835691x_{i_2} - 3.2798713754, \quad (6.4)$$

a qual se ajusta bem aos pontos da seção, conforme podemos ver na figura 6.16. Acrescentamos um subíndice 2 para diferenciar de outras linearizações que serão obtidas posteriormente, para pequenas variações do parâmetro b_1 . Os erros no cálculo do coeficiente angular e do termo independente de (6.4), também fornecidos pelo software, foram de ($e_{a_1} \simeq 0.033$) e ($e_d \simeq 0.031$), respectivamente. O módulo do coeficiente angular da reta é, como seria de se esperar, maior que 1, pois trata-se de um mapa unidimensional com ponto fixo instável.

O mapa linearizado (6.4) quando iterado, fornece aproximadamente, a seqüência de coordenadas x , dos pontos sobre a seção de Poincaré, que estão suficientemente próximos de $x^* = 0.943462$, do ponto $1a$.

Além da visualização gráfica apresentada na figura 6.16, a qualidade do ajuste também pode ser testada, calculando, através de (6.4), o valor de x_{i_2} tal que $x_{i_2+1} = x_{i_2}$; deste cálculo, obtemos como ponto fixo deste mapa, o valor $x^* = 0.943445$, que está em concordância com o ponto fixo obtido do mapa de primeiro retorno, até a quarta casa decimal.

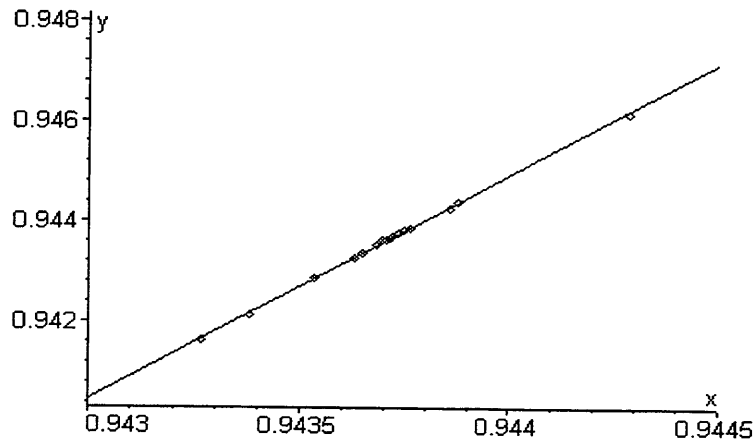


Figura 6.16: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.75$, próximos ao ponto fixo $1a$

6.2.2 Cálculo da razão deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro, próximo ao ponto fixo $1a$

A próxima etapa para a aplicação do controle é a determinação da constante g , que resulta da razão entre o deslocamento horizontal do mapa à medida que variamos o parâmetro de controle do sistema (b_1), e a variação do parâmetro responsável por este deslocamento. Para isso, modificaremos o sistema através da variação do valor do parâmetro b_1 , de 2.75 para valores suficientemente próximos deste, de modo que seja válida a hipótese que g é uma constante. Para cada variação Δb_1 , corresponde uma variação horizontal do mapa, e evidentemente um novo valor de ponto fixo.

Evidentemente, a variação máxima do parâmetro deverá estar contida no intervalo em b_1 onde temos a presença de uma dinâmica caótica (seção 5.4). Ao determinar os mapas de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ para vários outros valores do parâmetro, escolheremos convenientemente, adotar como variação máxima do parâmetro o valor 0.004, ou seja, b_1 estará restrito ao intervalo $[2.746, 2.754]$. Abaixo, estão no mesmo gráfico (figura 6.17) o mapa de primeiro retorno de $x_{i+1} \times x_i$, para $b_1 = 2.746$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.754$. Escolhemos valores para o parâmetro b_1 tais

que seja possível visualizar melhor a variação do mapa com relação à variação do parâmetro. Para valores de b_1 mais próximos de $b_1 = 2.75$, os mapas de primeiro retorno quase se sobrepõem.

A construção de cada um dos mapas de primeiro retorno foi obtida depois de repetir todo o procedimento feito anteriormente para $b_1 = 2.75$, e que consiste das seguintes etapas: integração numérica; identificação dos pontos da órbita caótica que constituem a seção de Poincaré; a partir das coordenadas x_i , destes pontos, traçar o mapa $x_{i+1} \times x_i$.

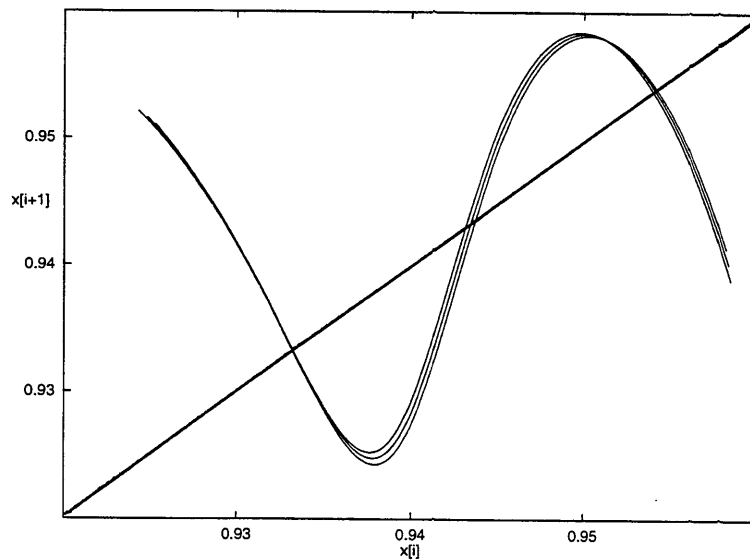


Figura 6.17: Deslocamento do mapa quando variamos o parâmetro, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, mapa de primeiro retorno para $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$

Na figura 6.18 temos uma ampliação da região do ponto fixo $1a$, com os respectivos deslocamentos do ponto fixo, para $b_1 = 2.746$ e $b_1 = 2.754$. A seqüência das figuras é, da esquerda para a direita, $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$, $b_1 = 2.746$. Assim, vemos que à medida que o valor do parâmetro aumenta, o mapa de primeiro retorno se desloca da direita para a esquerda; isto implica, portanto, que g é uma constante negativa.

Adotando o mesmo gráfico apresentado na subseção 6.1.2, determinamos os pontos fixos destes novos mapas, concluindo que quando b_1 foi variado

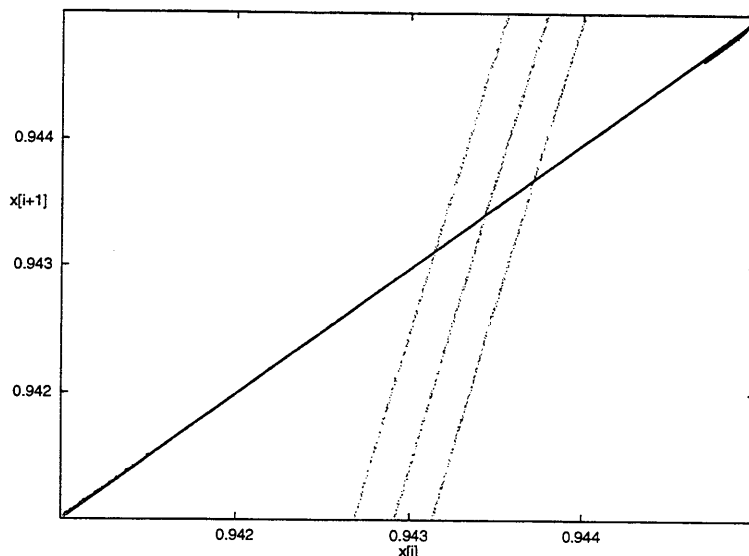


Figura 6.18: Ampliação da figura 6.17 na região próxima ao ponto fixo $1a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, os mapas correspondem a $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$

de 2.75 para 2.746, o ponto fixo se deslocou de 0.943462 para 0.943748 e quando variamos o parâmetro para 2.754 o ponto fixo passou de 0.943462 para 0.9431264.

Da figura 6.18, também podemos observar que na região da ampliação estes conjuntos de pontos podem ser bem aproximados por retas paralelas, isto é, a distância horizontal entre dois mapas que correspondem a valores distintos mas suficientemente próximos, do parâmetro b_1 , é a mesma, para todo ponto próximo ao ponto fixo.

A partir do programa que seleciona os pontos sobre a seção de Poincaré, escolhemos pontos a uma distância de 0.0025 de cada um dos pontos fixos e calculamos a reta que melhor aproxima os pontos, próximo a cada um destes pontos fixos, através do software *SPSS*, e estas são dadas por: para $b_1 = 2.746$,

$$x_{i_1+1} = 4.4691803957x_{i_1} - 3.2739584111 \quad (6.5)$$

para $b_1 = 2.75$ (determinada anteriormente em (6.4)),

$$x_{i_2+1} = 4.4764835691x_{i_2} - 3.2798713754 \quad (6.6)$$

e para $b_1 = 2.754$,

$$x_{i_3+1} = 4.5615628063x_{i_3} - 3.3590957782. \quad (6.7)$$

onde agora usamos os sub-índices 1 e 3 para distinguir entre as três linearizações dos mapas correspondentes. Os erros associados a cada um dos coeficientes das aproximações lineares feitas acima são dados, para os valores do parâmetro $b_1 = 2.746$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.754$, respectivamente, por : ($e_{a_{11}} = 0.030, e_{a_{12}} = 0.033, e_{a_{13}} = 0.024$), para o coeficiente angular das aproximações lineares; e ($e_{d_1} = 0.028, e_{d_2} = 0.031, e_{d_3} = 0.023$) para os termos independentes de cada uma das aproximações.

Os gráficos da aproximação linear determinada pelo método dos mínimos quadrados, juntamente com os pontos do mapa de primeiro retorno com os quais foram feitos os ajustes acima, são mostrados nas figuras 6.16, 6.19 e 6.20. Na figura 6.21 apresentamos em um mesmo gráfico uma ampliação das retas mostradas nas figuras 6.16, 6.19 e 6.20, mostrando a boa aproximação dos pontos pelas retas consideradas.

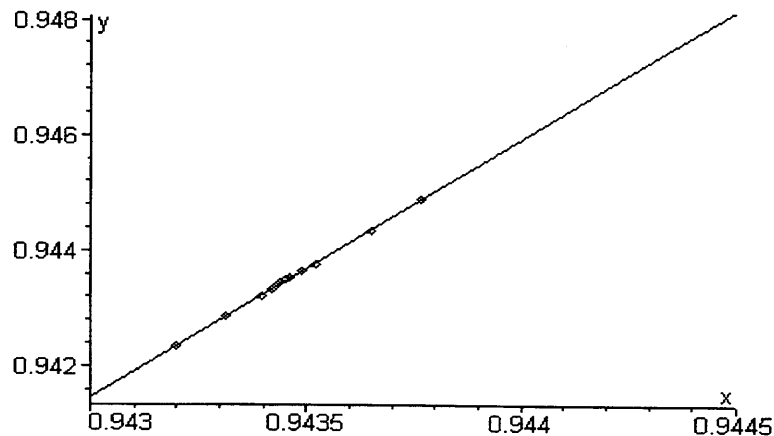


Figura 6.19: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.746$, próximos ao ponto fixo $1a$

Para testar a qualidade do ajuste das equações 6.5 a 6.7 calculamos os pontos fixos destes mapas, isto é, calculamos os pontos tais que $x_{i_k+1} = x_{i_k}$, para compará-los com aqueles calculados através do procedimento gráfico apresentado na

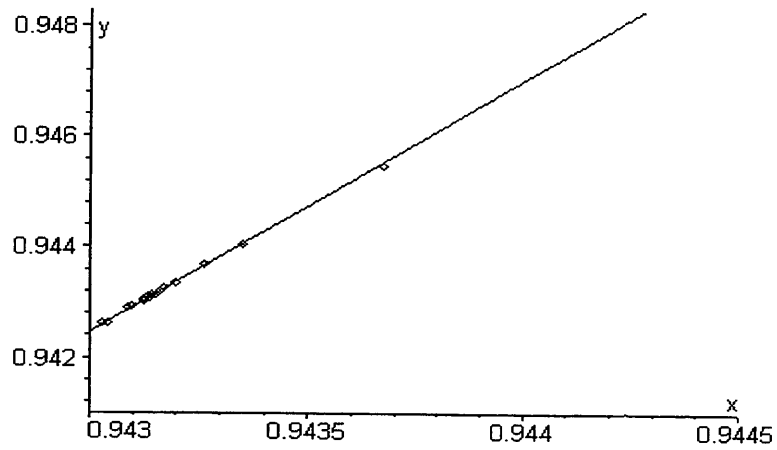


Figura 6.20: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.754$, próximos ao ponto fixo $1a$

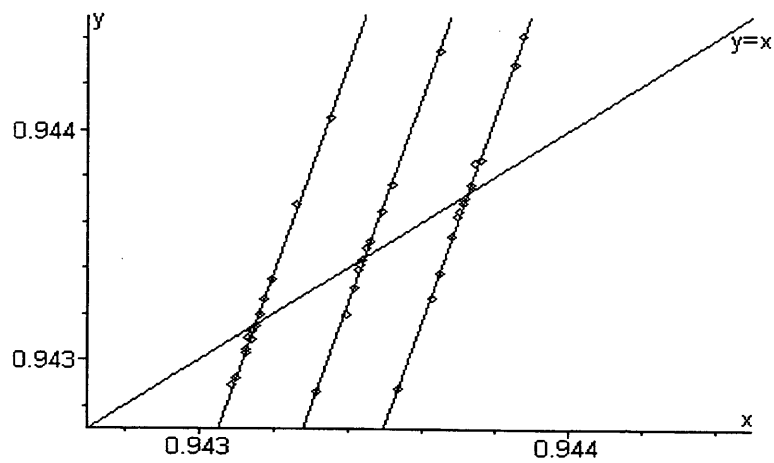


Figura 6.21: Ampliação das retas das figuras 6.16, 6.19 e 6.20 próximo ao ponto fixo $1a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita: $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$

subseção 6.1.2. Para as três retas (equações 6.5 a 6.7) os pontos onde $x_{i+1} = x_i$ são: 0.943726, 0.9434450 e 0.9541521, que concordam com os pontos fixos originais até a quarta casa decimal, o que consideramos uma boa aproximação dos pontos fixos calculados na seção: 0.943748, 0.943462 e 0.9431264.

Visto que, para pontos próximos ao ponto fixo, os mapas de primeiro retorno são aproximadamente lineares e, para pequenas variações no valor do parâmetro, o mapa desloca-se de tal forma que o novo mapa é quase paralelo ao anterior, concluímos que o deslocamento que queremos calcular pode ser obtido a partir de qualquer ponto destes mapas. Decidimos, portanto, calcular o deslocamento horizontal, a partir do ponto fixo do mapa que corresponde a $b_1 = 2.75$, pois conhecemos a coordenada x^* deste ponto com uma boa precisão.

Passaremos, a seguir, ao cálculo deste deslocamento horizontal, tanto para o parâmetro aumentado por 0.004, quanto para o parâmetro reduzido por 0.004.

Da figura 4.6, pode-se facilmente verificar que, dado um ponto x_n sobre o mapa de primeiro retorno: $x_{n+1} = f(x_n, b_1)$, a nova coordenada horizontal deste ponto, ao mudarmos o parâmetro para $b_1 + \Delta b_1$, é o valor de x_n tal que sua iterada (x_{n+1}) seja igual àquela que seria obtida pelo mapa de origem (antes do deslocamento).

Assim, para obter a nova coordenada horizontal do ponto fixo do mapa, que corresponde a $b_1 = 2.75$, quando variamos o parâmetro, substituímos nas equações (6.5) ($b_1 = 2.746$) e (6.7) ($b_1 = 2.754$), x_{i_k+1} por $x^* = 0.943445$, pois o que queremos é o valor de x_{i_k} que fornece como imagem a mesma imagem que seria obtida antes do deslocamento (x^* neste caso).

Substituindo, portanto, o valor do ponto fixo do mapa (6.6) no lugar de x_{i_1+1} e de x_{i_3+1} , nas equações (6.5) e (6.7), respectivamente, obtemos, os seguintes valores para x_{i_1} e x_{i_3} ,

$$x_{i_1} = 0.9436637445 \quad \text{e} \quad x_{i_3} = 0.9432164056. \quad (6.8)$$

Assim, o deslocamento horizontal do mapa, quando o parâmetro passou de 2.75 para 2.746, é dado por:

$$\delta_1 = x_{i_1} - x^* \simeq 0.9436637445 - 0.9434450 = .0002186482 \quad (6.9)$$

e quando o parâmetro passou de 2.75 para 2.754, o deslocamento foi de:

$$\delta_2 = x_{i_3} - x^* \simeq 0.9432164056 - 0.9434450 = -.0002286907 \quad (6.10)$$

O sinal $-$ indica o deslocamento para a esquerda, quando b_1 é aumentado.

Uma vez calculado o deslocamento horizontal do mapa, resta agora dividir pelo valor da variação do parâmetro correspondente e o valor obtido para esta razão é o que *Peng et al*(1991) representa por g , e que deve ser aproximadamente constante para pequenas variações do parâmetro. No nosso caso, obtivemos para o valor de g , quando b_1 varia de 2.75 para 2.746 :

$$g_1 = \frac{0.9436637445 - 0.9434450}{2.746 - 2.75} \simeq -0.05466205 \quad (6.11)$$

e quando o valor do parâmetro variou de 2.75 para 2.754, o valor de g calculado foi:

$$g_2 = \frac{0.9432164056 - 0.9434450}{2.754 - 2.75} \simeq -0.057172675 \quad (6.12)$$

e que concordam até a segunda casa decimal.

Como temos dois valores diferentes de g , e como queremos utilizar somente um valor para o controle, fizemos uma média aritmética dos dois valores encontrados para g_1 e g_2 e assim, o deslocamento médio do mapa é dado por:

$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2}{2} \simeq -0.0559173625 \quad (6.13)$$

valor este que será utilizado para o controle.

Esta média dos valores de g pode ser feita devido ao fato que o método *OGY* é pouco sensível a erros nas medições dos parâmetros, caso contrário esta média poderia não ser uma boa medida do deslocamento do mapa com relação à variação do valor do parâmetro.

Da mesma forma que fizemos para g , calculamos também o deslocamento médio, em módulo, do mapa na região considerada, e este é dado por:

$$|\overline{\delta}| = \frac{|\delta_1| + |\delta_2|}{2} \simeq 0.00022366945 \quad (6.14)$$

Portanto, o controle só será aplicado se um ponto estiver a uma distância menor ou igual a $|\overline{\delta}|$ do ponto fixo considerado.

6.2.3 Aplicação do controle para o ponto fixo $1a$

Agora que temos todos os elementos necessários para o controle, ou seja, escolhemos, para um atrator caótico que corresponde a um certo valor para o parâmetro, um ponto fixo para o controle e já conhecemos o valor de g correspondente, aplicar o controle é aplicar ao sistema o valor de Δb_1 adequado. Como já indicamos no início da subseção 6.2.1, este valor é dado por $\frac{x_n - x^*}{g}$, desde que x_n esteja no intervalo estabelecido em (6.14) e $|\Delta b_1| < 0.004$ (subseção 6.2.2).

O programa para o controle é simples. Juntamente com os procedimentos para a integração numérica das equações de movimento, são fornecidos ao programa o valor do ponto fixo instável x^* ($1a$), o valor da razão g entre o deslocamento horizontal do mapa e a variação do valor do parâmetro, e a distância máxima admitida $|\overline{\delta}|$ com relação ao ponto fixo para aplicarmos o controle.

Assim, integra-se o sistema de equações diferenciais original e quando um ponto chega a uma distância menor ou igual a $|\overline{\delta}|$ do ponto fixo $1a$ sobre a seção de Poincaré (isto é, no plano $z = 10$) aplicamos o controle e na primeira vez que o controle foi aplicado conseguimos a estabilização do ponto fixo instável $1a$. O valor para o ponto fixo controlado 0.9435.. não foi exatamente o mesmo valor encontrado para o ponto fixo $1a$, 0.943462, mas um valor muito próximo a ele; observamos variações a partir da quinta casa decimal, que não aparece no gráfico da figura 6.22 devido à escala utilizada.

O controle teve que permanecer ligado por todo o tempo para que o ponto fixo instável $1a$ permanecesse controlado, ou seja, caso contrário o sistema continuava a “vagar” aleatoriamente como no caso não controlado. A cada retorno à seção, o sistema teve que ser perturbado, pois o valor do ponto encontrado não era exatamente o ponto fixo $1a$, o tamanho da perturbação aplicada ao mapa após cada retorno à seção oscilou entre 0.002 e 0.001, em torno do valor nominal $b_1 = 2.75$.

Segundo *Ott, Grebogi e Yorke (1990)*, às vezes o controle pode não ser capaz de trazer a iteração seguinte para perto do ponto fixo desejado e assim, devemos esperar que o sistema retorne suficientemente próximo ao ponto fixo de forma que possamos aplicar novamente o controle.

Em seu artigo *Peng et al (1991)* afirmam que o algoritmo por eles utilizado para o controle foi mais eficiente quando o controle foi mantido ligado, ou seja, o valor do parâmetro era continuamente ajustado de forma a não permitir que o ponto fixo escapasse.

As figuras 6.22 e 6.23 mostram o ponto fixo controlado; tanto para o valor de x quanto o de y sobre a seção de Poincaré $z = constante$, permanecem constantes, que corresponde a ter uma órbita periódica estável no espaço de fase em \mathfrak{R}^3 .

Nos gráficos para $x_i(t)$ e $y_i(t)$ apresentados nestas figuras, vemos uma primeira região de transiente caótico, na qual não podemos aplicar o controle e, após este transiente, quando um ponto da seção se aproximou do ponto fixo, o controle foi aplicado e dessa perturbação do parâmetro obtivemos a estabilização do ponto fixo na seção de Poincaré e conseqüentemente da órbita periódica instável em \mathfrak{R}^3 . Da mesma forma que os valores de x_i permaneceram constantes, os valores de y_i , quando da aplicação do controle, também permaneceram restritos a um único valor.

Também podemos verificar que o controle foi efetivo na região considerada, através das figuras 6.24, 6.25 e 6.26, onde apresentamos os gráficos da evolução temporal do sistema dinâmico próximo à região onde foi aplicado o controle. Nestes

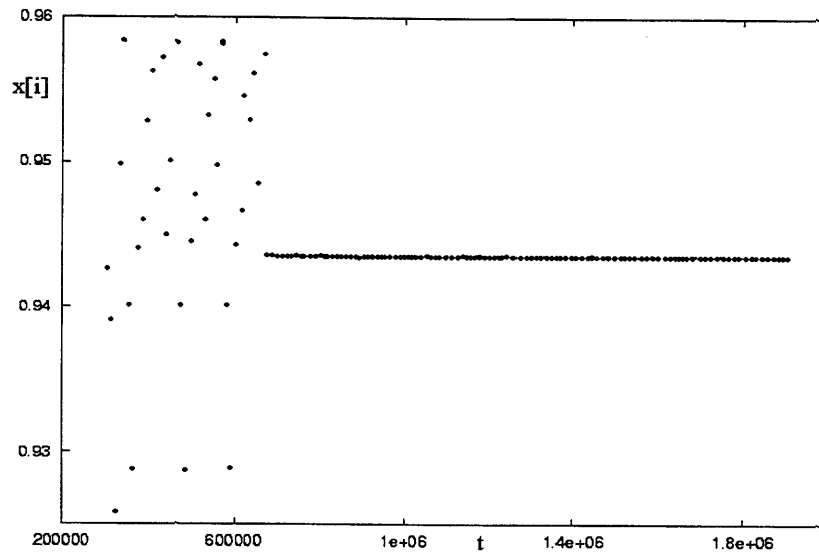


Figura 6.22: Gráfico $x_i \times t$ sobre a seção de Poincaré mostrando o controle do ponto fixo $1a$

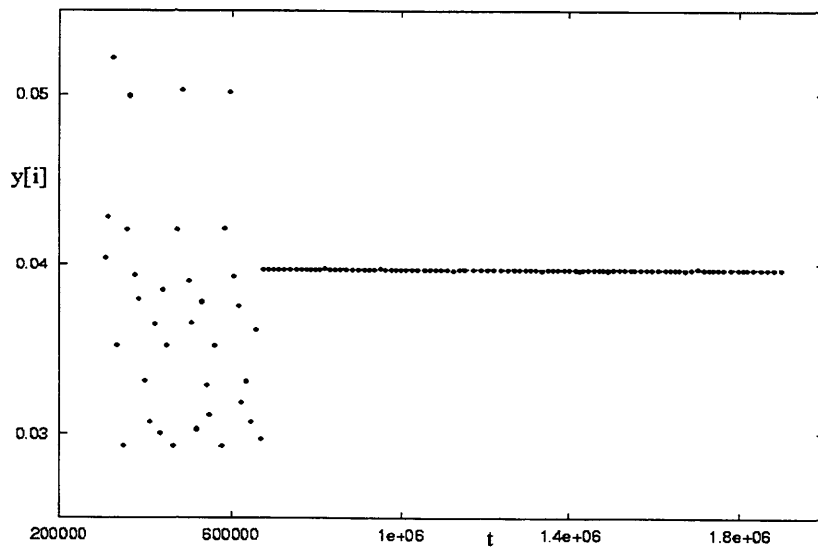


Figura 6.23: Gráfico $y_i \times t$ sobre a seção de Poincaré mostrando o controle do ponto fixo $1a$

gráficos, para $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, vemos que, antes da aplicação do controle, tínhamos uma dinâmica caótica (oscilações irregulares) e depois da aplicação do controle (por volta de $t = 690000$), as oscilações passaram a ser periódicas indicando que nossa órbita periódica antes instável estava agora estabilizada.

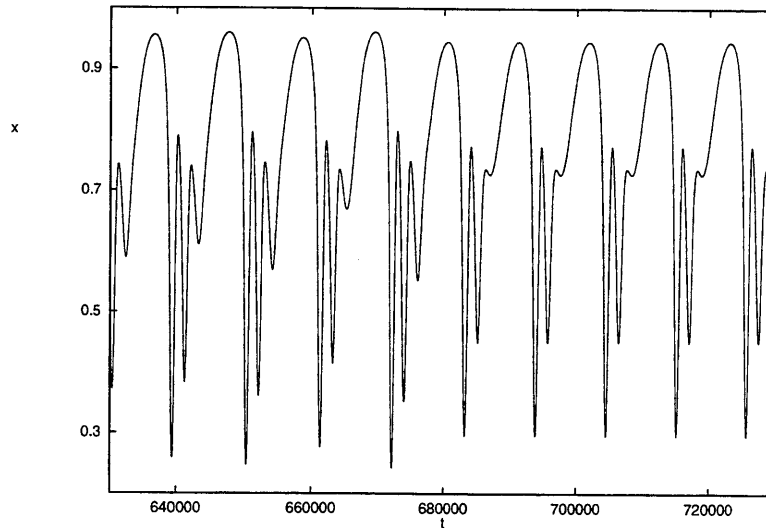


Figura 6.24: Gráfico $x \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$

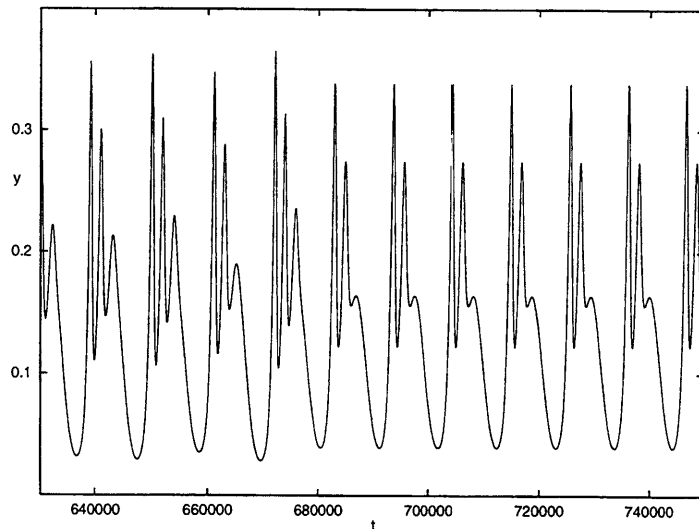


Figura 6.25: Gráfico $y \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$

O ciclo estabilizado, bem como suas projeções no plano xy , xz e yz são mostradas nas figuras 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30, respectivamente.

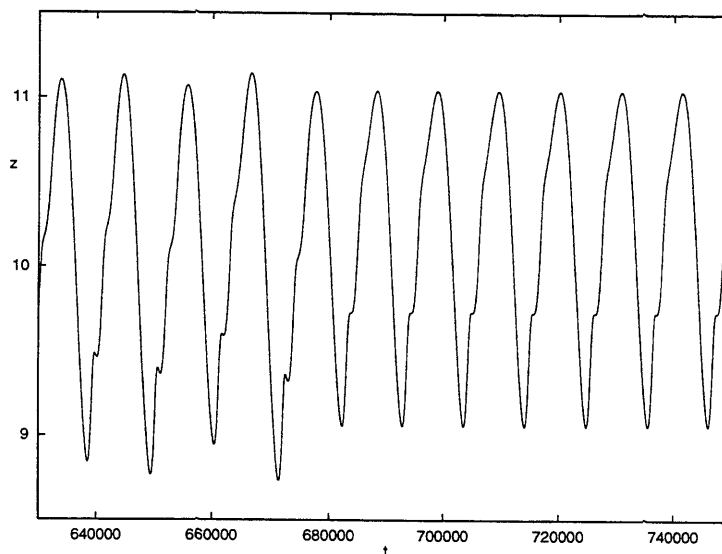


Figura 6.26: Gráfico $z \times t$ mostrando a evolução temporal do sistema tridimensional na órbita periódica estabilizada sobre o ponto fixo $1a$

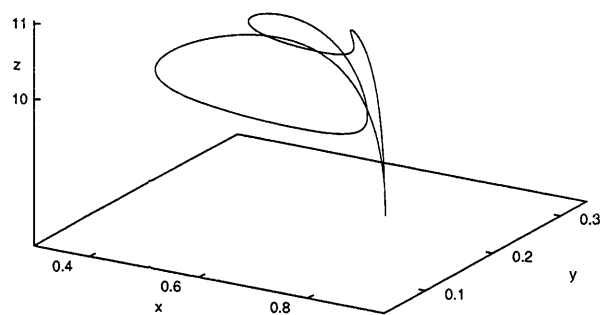


Figura 6.27: Gráfico, no espaço de fase, da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$

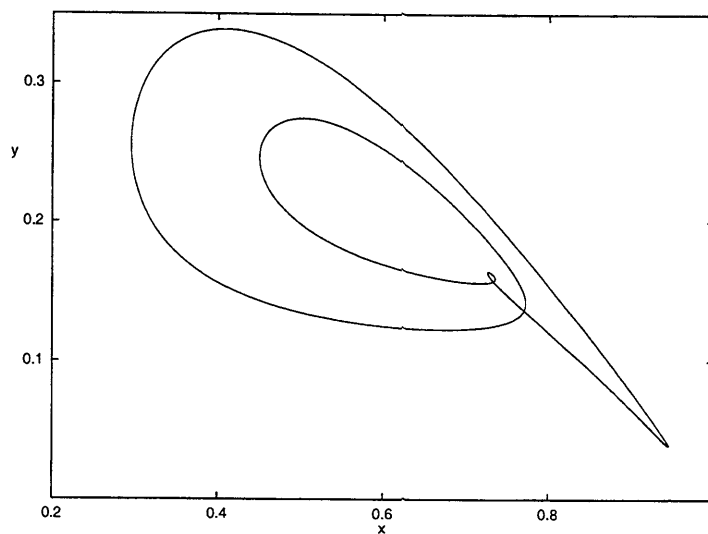


Figura 6.28: Projecção no plano xy da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$

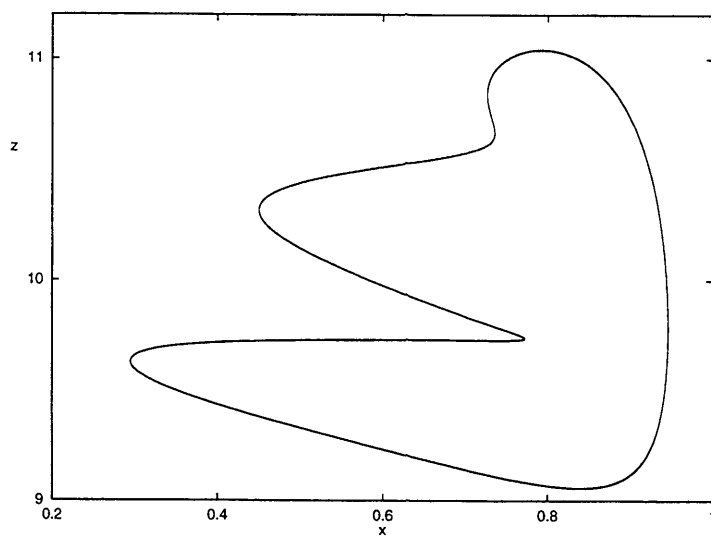


Figura 6.29: Projecção no plano xz da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$

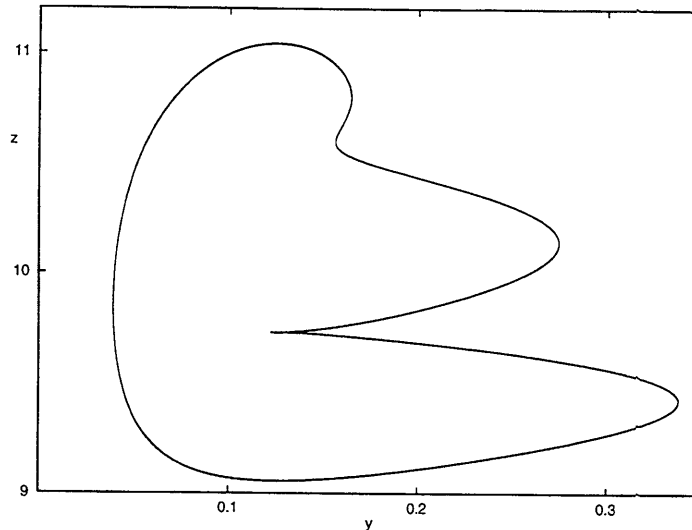


Figura 6.30: Projeção no plano yz da órbita periódica controlada correspondente ao ponto fixo $1a$

6.3 Estabilização da órbita correspondente ao par de pontos $3a-3f$ sobre a seção de Poincaré

Na seção anterior mostramos a estabilização do ponto fixo $1a$; agora aplicaremos os mesmos procedimentos, para tentar estabilizar o ponto fixo $3a$ da seção de Poincaré.

6.3.1 Linearização do mapa sobre a seção de Poincaré próximo ao ponto fixo $3a$

Fazemos agora a determinação do mapa linear em torno do ponto fixo $3a$. Para isto, da mesma forma que fizemos para o ponto fixo instável $1a$, na subseção 6.2.1, selecionamos alguns pontos que passam próximo ao ponto fixo instável $3a$, mais precisamente a uma distância máxima 0.0005 do ponto fixo instável $3a$. Para ajustar uma reta através dos pontos próximos ao ponto fixo $3a$, utilizamos o software estatístico *SPSS*, que utiliza o método dos mínimos quadrados. Analogamente ao que fizemos para o ponto fixo $1a$, os pontos utilizados para o ajuste, não correspondem a uma só passagem a esta distância do ponto fixo, mas correspondem a várias

passagens próximas ao ponto fixo. Em cada uma das faixas temos, em média, de 5 a 6 pontos, perfazendo um total de 21 pontos, indicando 6 passagens (grupos de pontos) próximo ao ponto fixo.

Fomos obrigados a estabelecer uma distância máxima de 0.0005, isto é, $|x_i - x^*| \leq 0.0005$ na seleção dos pontos x_i próximos ao ponto fixo instável $3a$, bem menor que aquela que admitimos quando tomamos os pontos próximos ao ponto fixo $1a$, pelo fato do mapa ser mais irregular (figura 6.31). Se tomarmos uma distância maior do que esta, a aproximação linear do mapa não seria mais válida em tal intervalo maior, em torno de x^* .

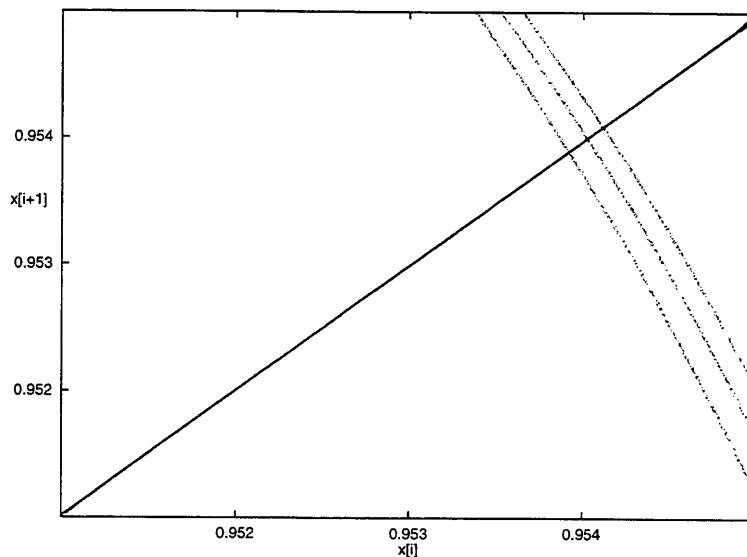


Figura 6.31: Ampliação da figura 6.17 em torno do ponto fixo $3a$, juntamente com a reta $y = x$; da esquerda para a direita, os mapas correspondem a $b_1 = 2.754$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.746$

A forma linear para o mapa em torno do ponto fixo $3a$, calculada com a ajuda do *SPSS*, para $b_1 = 2.75$ é:

$$x_{i+1} = -2.0877014926x_i + 2.9457274595 \quad (6.15)$$

sendo que cada um dos coeficientes contém um erro, e este erro também fornecido pelo *SPSS*, ocorre na segunda casa decimal. O erro associado a cada um dos coeficientes é: ($ea_1 = 0.022$ e $ed = 0.021$)

O ajuste é mostrado na figura 6.32. Vemos, deste gráfico, que esta reta é uma boa aproximação para os pontos próximos ao nosso ponto fixo instável $3a$.

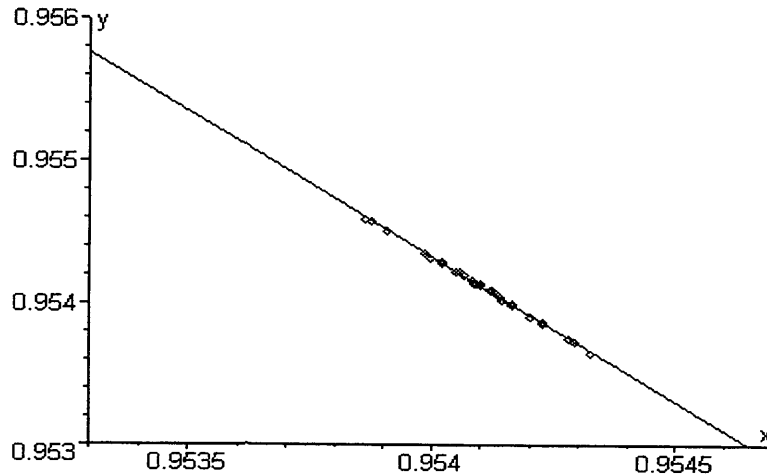


Figura 6.32: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.75$, próximos ao ponto fixo $3a$

6.3.2 Cálculo da razão deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro, próximo ao ponto fixo $3a$

Utilizando novamente a mesma variação no valor do parâmetro e os mesmos critérios vistos na subseção 6.2.2, calculamos o deslocamento horizontal apresentado pelo mapa em consequência de uma pequena variação do parâmetro. O cálculo do deslocamento horizontal do ponto fixo $3a$ é feito da mesma forma que para o ponto fixo $1a$.

A figura 6.17, apresentada na subseção 6.2.2, mostra a variação do mapa quando o valor do parâmetro varia. Na figura 6.31 vemos a ampliação deste gráfico em torno do ponto fixo $3a$ donde observamos novamente que, próximo ao ponto fixo e para pequenas variações do parâmetro, são aproximadamente retas paralelas.

As aproximações lineares para os mapas de primeiro retorno em torno dos pontos fixos para $b_1 = 2.746$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.754$, calculados com a ajuda do

SPSS, para pontos próximos a estes pontos fixos, são, respectivamente:

$$x_{i_1+1} = -2.0442948694x_{i_1} + 2.9045858038 \quad (6.16)$$

$$x_{i_2+1} = -2.0877014926x_{i_2} + 2.9457274595 \quad (6.17)$$

$$x_{i_3+1} = -2.1911654036x_{i_3} + 3.0440867208 \quad (6.18)$$

sendo que cada um dos coeficientes contém um erro, também fornecido pelo *SPSS*, e este erro está na segunda casa decimal. O erro associado a cada um dos coeficientes é: ($ea_{11} = 0.018$, $ea_{12} = 0.022$, $ea_{13} = 0.021$ e $ed_1 = 0.017$, $ed_2 = 0.021$, $ea_d = 0.020$)

Os ajustes são mostrados nas figuras 6.32, 6.33 e 6.34, donde podemos observar que o ajuste foi quase perfeito; na figura 6.35, apresentamos uma ampliação destas retas próximo aos respectivos pontos fixos. Todos os coeficientes angulares são, em módulo, maiores do que um, como seria de se esperar (pontos fixos instáveis).

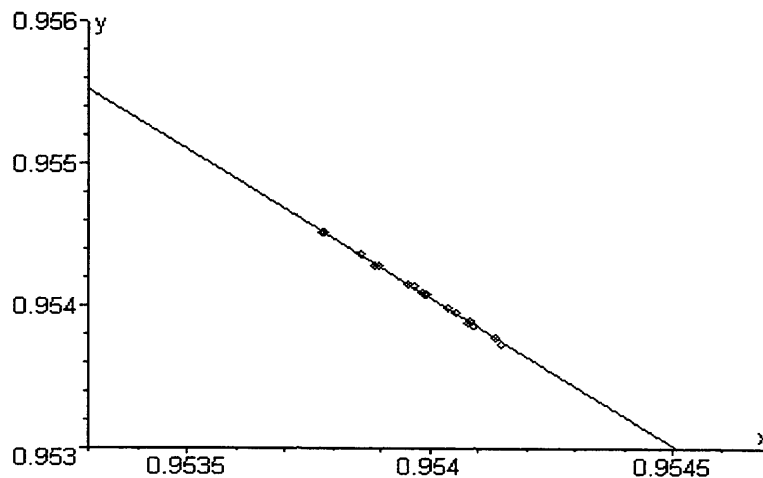


Figura 6.33: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.746$, próximos ao ponto fixo $3a$

Os pontos fixos dos mapas lineares calculados a partir das equações (6.16) a (6.18) são: 0.9541079064 para $b_1 = 2.746$; 0.9540195081 para $b_1 = 2.75$ e 0.95393376 para $b_1 = 2.754$ e que concordam bem com os valores obtidos a partir da intersecção dos mapas de primeiro retorno $x_{i+1} \times x_i$ com a reta $x_{i+1} = x_i$, os quais são: 0.95412737, 0.95403671 e 0.95393377 para $b_1 = 2.746$, $b_1 = 2.75$ e $b_1 = 2.754$, respectivamente.

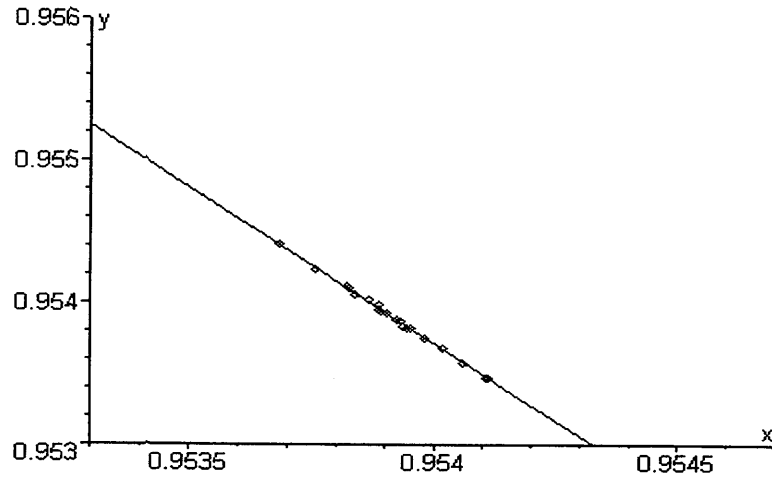


Figura 6.34: Reta que ajusta os pontos do mapa para $b_1 = 2.754$, próximos ao ponto fixo $3a$

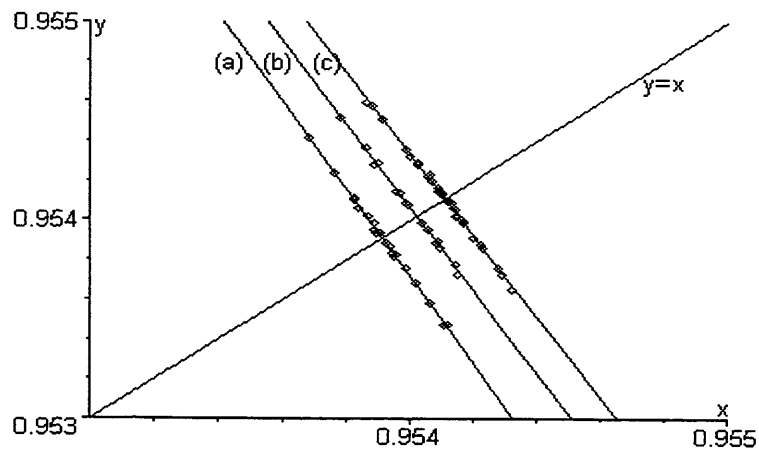


Figura 6.35: Ampliação das retas mostradas nas figuras 6.32, 6.33 e 6.34 próximo aos respectivos pontos fixos, juntamente com a reta $y = x$. (a) $b_1 = 2.754$, (b) $b_1 = 2.75$, (c) $b_1 = 2.746$

Substituindo o valor do ponto fixo do mapa (6.17) no lugar de x_{i_1+1} e x_{i_3+1} nas equações (6.16) e (6.18), respectivamente, obtemos as novas coordenadas horizontais do ponto fixo do mapa (6.17) quando variamos o parâmetro, como segue:

$$x_{i_1} = 0.9541511478 \quad \text{e} \quad x_{i_3} = 0.9538609954 \quad (6.19)$$

Assim, o deslocamento horizontal do mapa quando variamos o parâmetro de 2.75 para 2.746 é:

$$\delta_1 = x_{i_1} - x^* \simeq 0.9541511478 - 0.95403 = +0.0001316397 \quad (6.20)$$

e, quando variamos o parâmetro de 2.75 para 2.754,

$$\delta_2 = x_{i_3} - x^* \simeq 0.9538609954 - 0.95403 = -0.0001585127 \quad (6.21)$$

Para a razão entre o deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro, quando b_1 varia de 2.75 para 2.746, obtemos:

$$g_1 \simeq \frac{0.9541511478 - 0.95403}{2.746 - 2.75} \simeq -0.032909925 \quad (6.22)$$

e quando b_1 varia de 2.75 para 2.754,

$$g_2 \simeq \frac{0.9538609954 - 0.95403}{2.754 - 2.75} \simeq -0.039628175 \quad (6.23)$$

Da mesma forma que fizemos para o ponto fixo instável $1a$, calculamos a média dos valores para o deslocamento horizontal e também da razão deslocamento horizontal do mapa / variação do valor do parâmetro, e para este caso seus valores são dados por:

$$\begin{aligned} \overline{|\delta|} &= \frac{|\delta_1| + |\delta_2|}{2} \simeq 0.0001450762 \\ \bar{g} &= \frac{g_1 + g_2}{2} \simeq -0.0362655 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Os valores de \bar{g} e $\overline{|\delta|}$, comparados aos valores calculados para o ponto fixo $1a$, estão na mesma ordem de magnitude, mas, aqui, ambos os valores g e δ são menores quando comparados com aqueles.

6.3.3 Aplicação do controle para o ponto fixo $3a$

Para o controle deste ponto fixo, aplicamos todos os valores acima encontrados para o ponto fixo $3a$. E da mesma forma que antes, o controle só foi aplicado quando estávamos a uma distância menor ou igual a $|\overline{\delta}|$ do ponto fixo.

O gráfico resultante da aplicação do controle neste ponto fixo é mostrado nas figuras 6.36 e 6.37

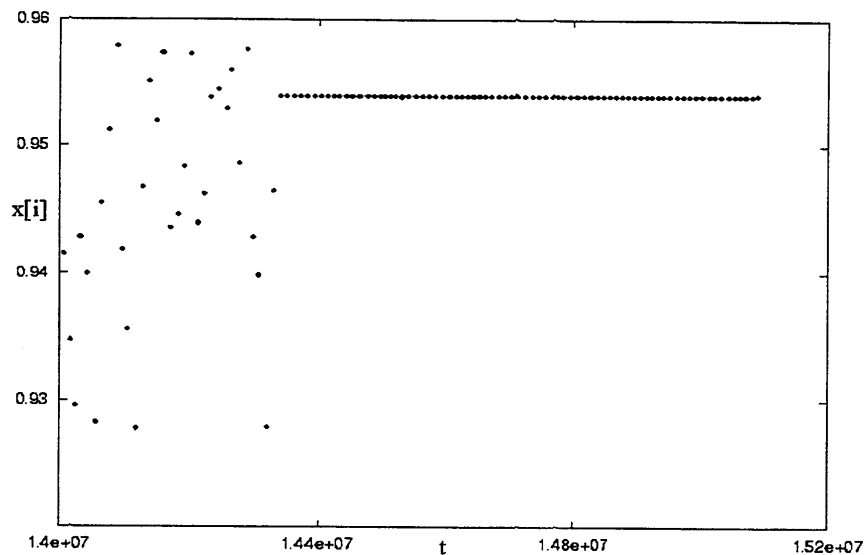


Figura 6.36: Gráfico $x_i \times t$ sobre a seção de Poincaré na região onde foi aplicado o controle para o ponto fixo $3a$

Observamos, neste gráfico, da mesma forma que nas figuras 6.22 e 6.23, um transiente inicial caótico e quando um ponto chegou suficientemente próximo ao ponto fixo $3a$ de forma a podermos aplicamos o controle, tornou-se possível a estabilização do ponto fixo $3a$, muito próximo a seu valor inicialmente calculado.

A aplicação do controle foi mais difícil neste caso, devido ao fato que a distância máxima para podermos captar um ponto próximo ao ponto fixo era menor e pelo fato de os pontos da dinâmica não se aproximarem tanto do ponto

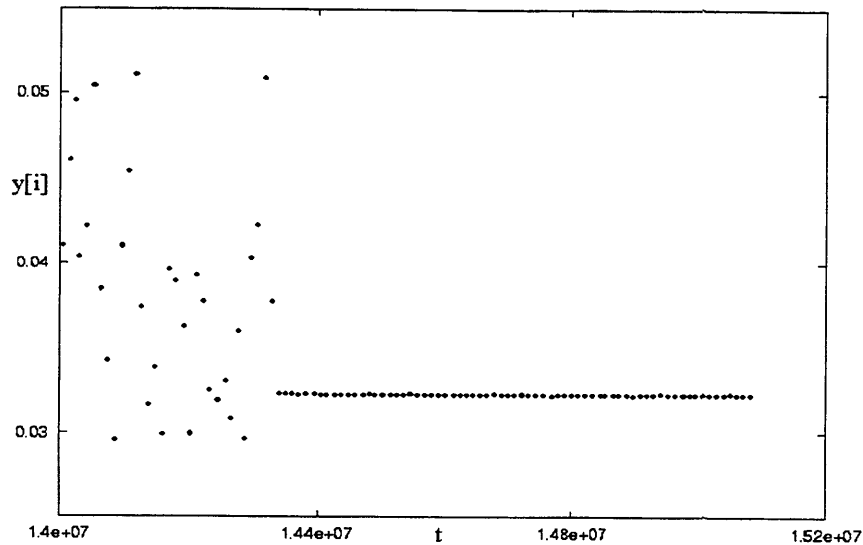


Figura 6.37: Gráfico $y_i \times t$ sobre a seção de Poincaré na região onde foi aplicado o controle para o ponto fixo $3a$

fixo como acontecia para o ponto fixo $1a$. Neste caso, tivemos que eliminar um transiente muito maior do que para o outro caso considerado. Para o ponto fixo $1a$, o transiente foi de 8×10^3 e para o ponto fixo $3a$ foi de 1.4×10^7 iterações. Novamente comprovamos o surgimento de periodicidade, na região de controle, construindo os gráficos da evolução temporal próximo à região de aplicação do controle, mostrados nas figuras 6.38, 6.39 e 6.40, para $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Pelas figuras 6.38 a 6.40 primeiro vemos a formação de estruturas aperiódicas e em t aproximadamente 1.434×10^7 iterações, começamos a notar o surgimento de periodicidade e portanto, a indicação de controle da órbita periódica desejada, relacionada ao ponto fixo $3a$.

O ciclo controlado bem como suas projeções nos planos xy , xz e yz são mostradas nas figuras 6.41 a 6.44. Cada uma das figuras mostradas resulta de aproximadamente 100000 pontos. Considerando que o período médio para uma volta é de aproximadamente 10000 pontos, nestas figuras a órbita executa aproximadamente 10 voltas completas no atrator.

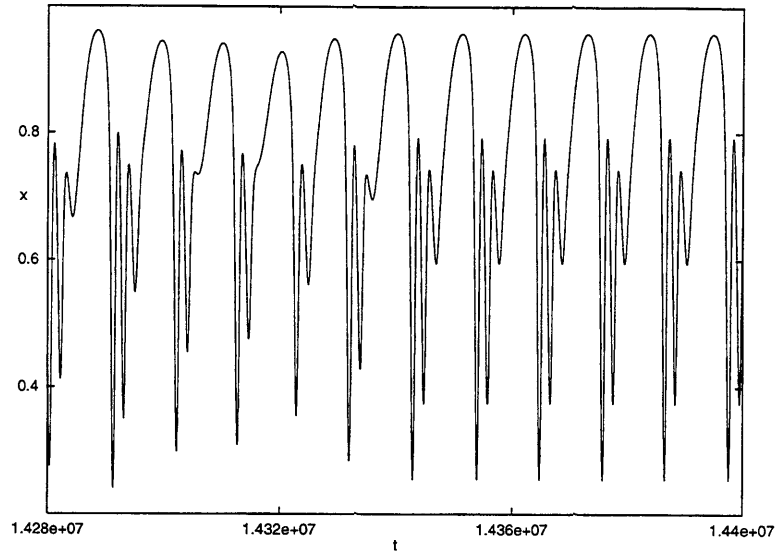


Figura 6.38: Gráfico $x \times t$ mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$

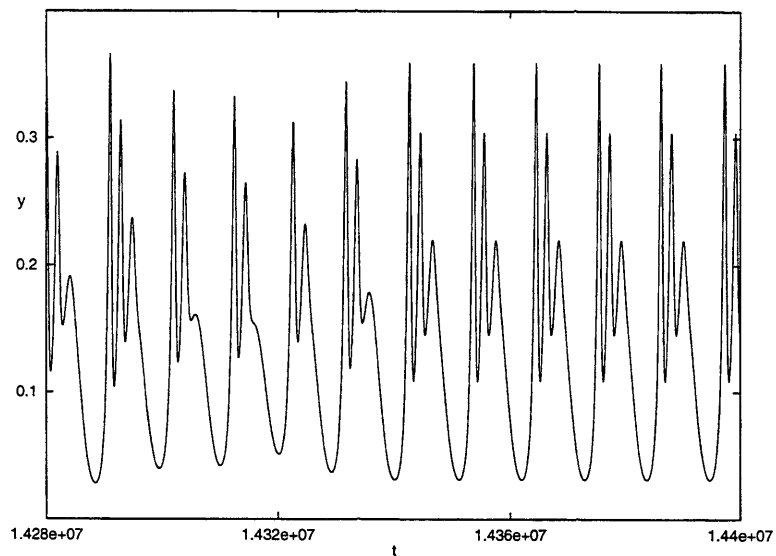


Figura 6.39: Gráfico $y \times t$ mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$

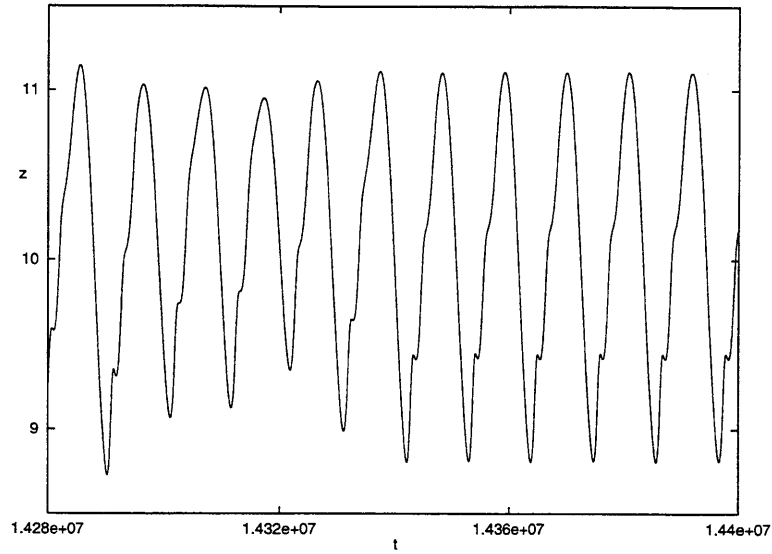


Figura 6.40: Gráfico $z \times t$, mostrando a evolução do sistema tridimensional, próximo à região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$

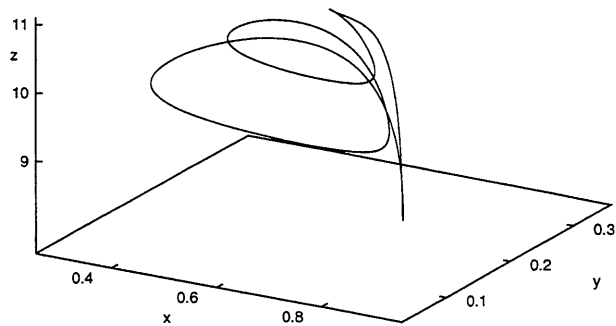


Figura 6.41: Gráfico no espaço de fase do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$

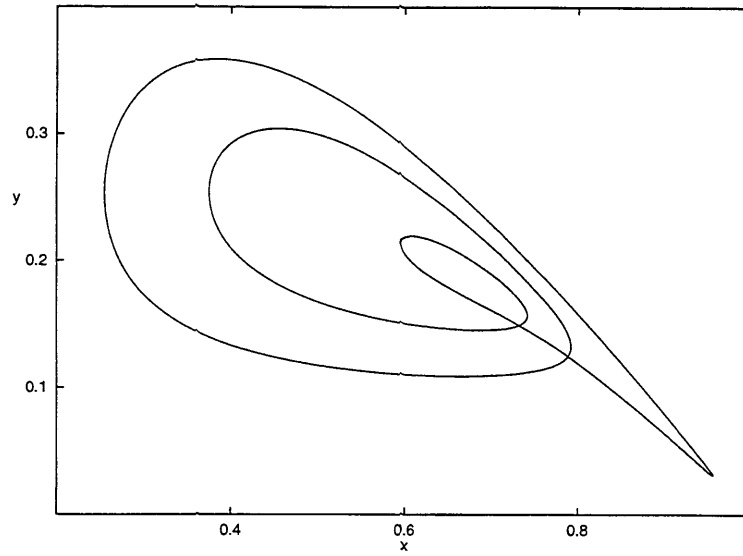


Figura 6.42: Projecção no plano xy do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$

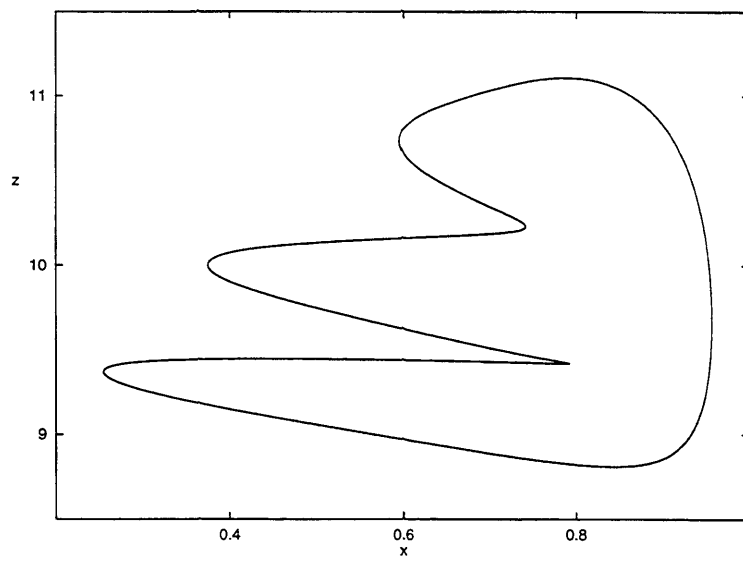


Figura 6.43: Projecção no plano xz do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$

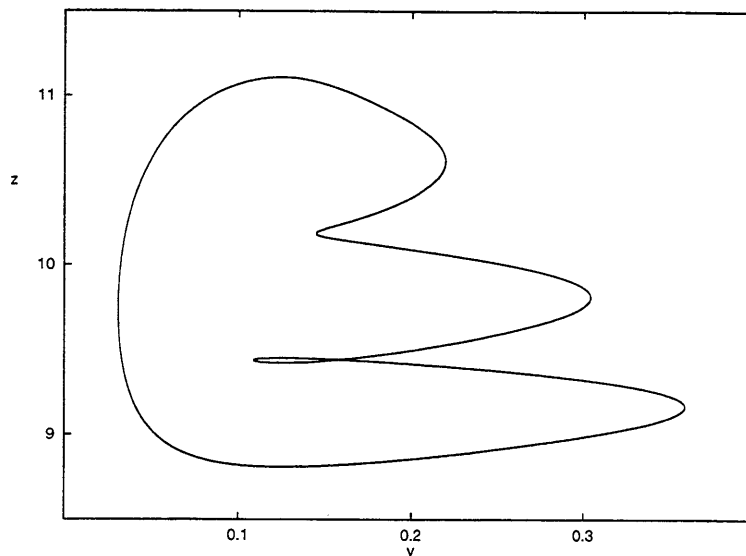


Figura 6.44: Projeção no plano yz do ciclo controlado através do ponto fixo $3a$

6.4 Aplicação do controle para os dois pontos fixos sequencialmente

Dado que temos todos os elementos necessários para a aplicação do método *OGY* tanto para o ponto fixo $1a$ quanto para o ponto fixo $3a$, aplicaremos o método para ambos os pontos fixos, controlando primeiro um e a seguir, controlando outro.

Para isto, primeiro aplicamos o controle para um dos pontos fixos e depois de controlado, desligamos o controle para este ponto, deixando o sistema evoluir caoticamente; depois, ligamos o controle para o outro ponto fixo até que seja possível controlar também o outro. A ordem de aplicação do controle em princípio, não deve influir no controle de cada um dos pontos fixos instáveis.

O procedimento para isto é simples. Desprezamos inicialmente um transiente da ordem de 1.4×10^7 iterações e aplicamos o controle para o ponto fixo $3a$. Assim, depois do transiente caótico inicial, observamos os pontos que atravessavam a seção e, quando um ponto passou suficientemente próximo ao ponto fixo $3a$, aplicamos o controle e, a partir disso, mantivemos este ponto fixo estabilizado.

Mantivemos o controle aplicado neste ponto fixo, por 70 passagens na seção de Poincaré, sendo que o controle foi obtido na trigésima terceira passagem pela seção. O ponto fixo foi estabilizado no ponto 0.9539... com variações a partir da quinta casa decimal, que não podemos perceber pela análise da figura 6.45.

Após estas 70 passagens pela seção, desligamos o controle para o ponto fixo $3a$ e ligamos então o controle para o ponto fixo $1a$. Para este ponto mantivemos o controle ligado por 80 passagens pela seção. Um ponto chegou suficientemente próximo ao ponto fixo $1a$ na trigésima sexta passagem pela seção, após o controle para o ponto fixo $3a$ ter sido desligado.

Terminado isto, foi desligado o controle, e o sistema voltou a oscilar de maneira caótica.

O gráfico ilustrando a aplicação do controle para os pontos fixos $3a$ e $1a$, seqüencialmente, é apresentado na figura 6.45; neste gráfico observamos a seqüência: transiente inicial - controle sobre o ponto fixo $3a$ - novo transiente caótico - controle sobre o ponto fixo $1a$ - caos novamente.

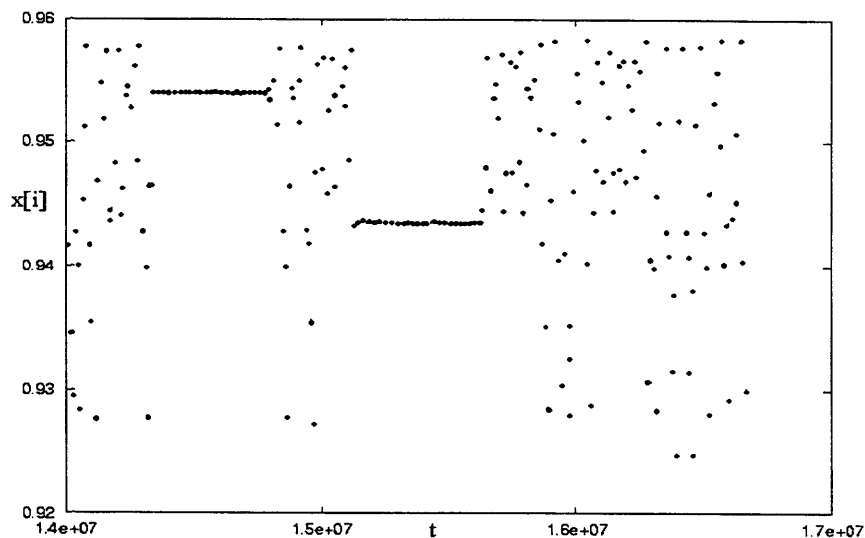


Figura 6.45: Controle para os pontos fixos $3a$ e $1a$ seqüencialmente

Para mostrar que nosso controle foi efetivo, mostramos, nas figuras 6.46 a 6.49, a evolução $x \times t$ em quatro regiões diferentes do gráfico apresentado na figura 6.45.

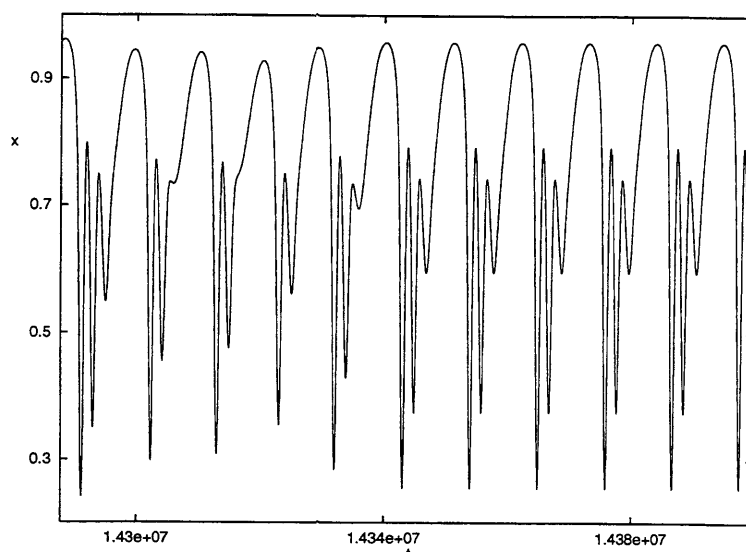


Figura 6.46: Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de entrarmos na região de aplicação do controle do ponto fixo $3a$

Na figura 6.46 temos a evolução temporal próximo à região de aplicação do controle para o ponto fixo $3a$. Nesta região, vemos inicialmente uma região de comportamento caótico e, depois da aplicação do controle, vemos a presença de estruturas periódicas indicando que o nosso ponto fixo, antes instável, foi controlado. Na figura 6.47, a evolução temporal ainda com o controle ligado no ponto fixo $3a$ com uma parte da evolução depois que desligamos o controle para este ponto.

Da mesma forma que na figura 6.46, temos na figura 6.48 a evolução temporal próximo à região de aplicação do controle para o ponto fixo $1a$. Da mesma forma que para o ponto fixo $3a$, temos a presença de uma solução caótica até que obtemos o controle e a partir disto passamos a ter soluções que se repetem periodicamente.

Preferimos começar por aplicar o controle no ponto $3a$ pelo fato de ser mais difícil se encontrar um ponto que não ultrapasse a distância máxima permitida, para que se possa aplicar o controle e, também por não sabermos quando é que

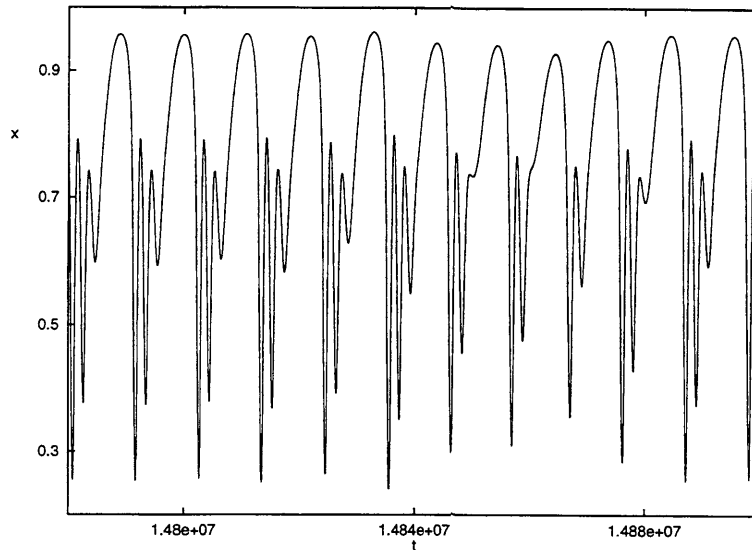


Figura 6.47: Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de sairmos da região em que o ponto fixo $3a$ estava controlado

passaríamos próximo a este ponto na nova dinâmica caótica, que se teria após uma liberação do controle anterior.

Tentamos também aplicar primeiro o controle no ponto $1a$ e depois no ponto $3a$, ou seja, inverter a ordem na seqüência anteriormente bem sucedida. Quando aplicamos para o ponto $1a$ a estabilização foi possível, mas no momento que desligamos o controle para o ponto fixo $1a$ e tentamos estabilizar o ponto fixo $3a$, nenhum ponto passou próximo o suficiente, de modo que pudessemos aplicar o controle.

Nada falamos a respeito do ponto fixo $2a$, pelo fato que, se analisarmos a figura 6.17, vemos que neste ponto fixo quando mudamos o parâmetro o ponto fixo muda muito pouco e a aplicação do controle neste ponto seria mais trabalhosa ou talvez nem conseguíssemos aplicar o controle e a conseqüente estabilização da órbita periódica correspondente.

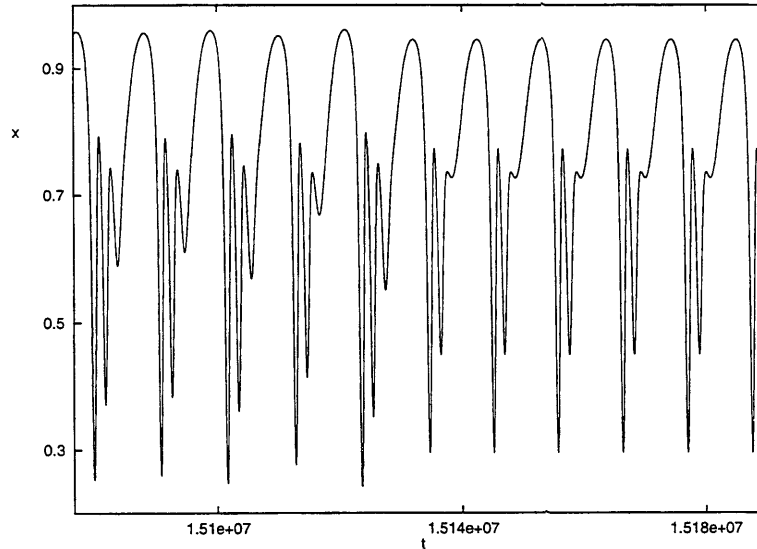


Figura 6.48: Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de entrarmos na região de aplicação do controle do ponto fixo $1a$

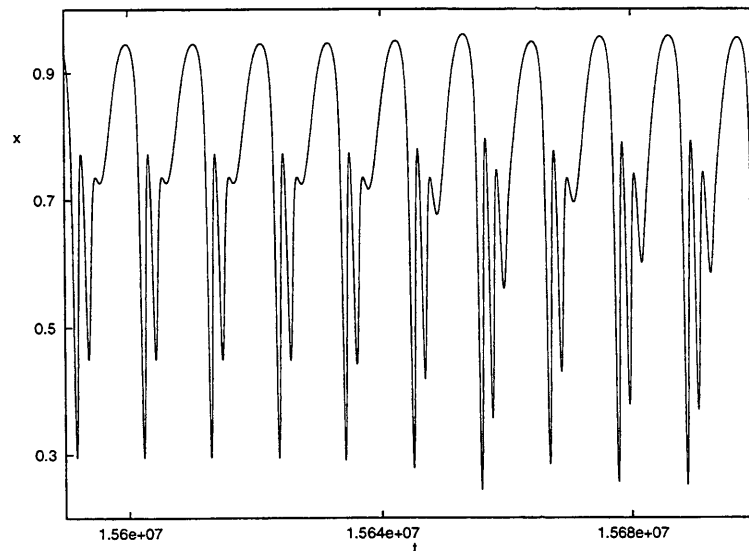


Figura 6.49: Gráfico $x \times t$ na região pouco antes de sairmos da região em que o ponto fixo $1a$ estava controlado

7 CONCLUSÃO

7.1 Principais resultados

O largo espectro de comportamentos, que o sistema dinâmico de Hastings e Powell pode apresentar, é verificado através do cálculo dos expoentes de Lyapunov dos atratores do sistema, variando-se o parâmetro relevante do sistema. Após identificar um valor do parâmetro, $b_1 = 2.75$, ao qual corresponde um atrator caótico, conseguimos, pela aplicação do método *OGY*, o controle de duas das órbitas periódicas instáveis de período 1 imersas neste atrator, efetuando apenas pequenas perturbações no valor do parâmetro b_1 .

O controle foi aplicado após concluídas as seguintes etapas:

1. escolha dos pontos fixos instáveis $1a$ e $3a$ do mapa sobre a seção de Poincaré, correspondentes a cada uma das órbitas periódicas instáveis do atrator tridimensional;
2. determinação da aproximação linear para o mapa em torno destes pontos fixos instáveis;
3. e determinação da razão g , deslocamento horizontal do mapa / variação do parâmetro b_1 sobre a seção.

Para este controle ser efetivo, ou seja, para mantermos cada um dos pontos fixos controlados após a aplicação do controle, tivemos que aplicar uma pequena perturbação a cada retorno à seção; caso contrário, o controle não seria efetivo.

Numa primeira etapa, aplicamos o controle para cada um dos pontos fixos separadamente, e em seguida aplicamos o controle para os dois pontos fixos instáveis seqüencialmente.

Para a aplicação do controle para o ponto fixo $1a$, para qualquer transiente inicial que eliminássemos, conseguimos aplicar o controle após um número relativamente pequeno de retornos à seção de Poincaré (em torno de 20 a 30 retornos), e assim, estabilizar a correspondente órbita periódica instável.

Quando aplicamos o controle para o ponto fixo $3a$, eliminamos um transiente de 14000000 de iterações e após 20 ou 30 retornos à seção conseguimos também aplicar o controle e estabilizar a órbita correspondente a este ponto.

Verificamos, portanto, que no sistema ecológico de Hastings e Powell, é possível estabilizar diferentes órbitas no mesmo intervalo para o parâmetro.

Num segundo momento, então, aplicamos o controle para os dois pontos fixos seqüencialmente, ou seja, primeiro ligamos o controle para o ponto fixo $3a$ e, após aproximadamente 20 ou 30 retornos à seção, conseguimos controlá-lo. Obtido o controle deste ponto, desligamos o controle para este ponto fixo e ligamos o mesmo para o ponto fixo $1a$, obtendo a sua estabilização após aproximadamente 50 retornos à seção. A estabilização de ambos os pontos fixos não foi possível quando tentamos aplicar o controle primeiro para o ponto fixo $1a$ e depois para o ponto fixo $3a$.

Portanto, no presente trabalho, mostramos não apenas a possibilidade da aplicação do método *OGY* para o controle de duas órbitas periódicas instáveis distintas, presentes no atrator caótico para $b_1 = 2.75$ do sistema de Hastings e Powell, mas verificamos também a flexibilidade de estabilizar seqüencialmente uma órbita e outra.

7.2 Dificuldades na aplicação do método

Mesmo tendo conseguido a estabilização de dois pontos fixos instáveis sobre a seção de Poincaré correspondendo a duas órbitas periódicas instáveis do atrator tridimensional de Hastings e Powell, encontramos algumas dificuldades na aplicação do método *OGY* para a correspondente estabilização.

A primeira dificuldade encontrada foi na determinação dos pontos fixos instáveis sobre a seção de Poincaré. Tais pontos tiveram que ser determinados com precisão de 4 casas decimais, pois devido à sensibilidade do sistema, um erro na quarta casa decimal implicaria no cálculo bastante impreciso do ponto fixo e conseqüentemente nos outros elementos necessários para a aplicação do método *OGY* e não obteríamos o controle desejado. A partir do cálculo do ponto fixo, com esta cuidadosa precisão, todos os outros elementos puderam ser determinados, também com maior precisão.

Na aplicação do método *OGY*, outra dificuldade surgiu quando da aplicação do controle sobre o ponto fixo instável $3a$, em decorrência provavelmente de uma maior instabilidade desta órbita, quando comparada com a primeira.

A obtenção da estabilização dos dois pontos seqüencialmente só foi possível quando iniciamos aplicando o controle para o ponto fixo $3a$. No momento que aplicamos o controle, primeiro para o ponto fixo instável $1a$, conseguindo sua estabilização e depois, quando desligamos o controle para o ponto $1a$, e ligamos para o ponto $3a$, não obtivemos sucesso na estabilização da órbita correspondente. Isto se deve ao fato que, ao aplicarmos o controle para o ponto fixo $1a$ a dinâmica do sistema mudou e assim, não conseguimos chegar suficientemente próximo ao ponto fixo de modo a aplicarmos o controle. Conjecturamos que talvez o ponto $3a$ não seja mais ponto fixo instável da dinâmica alterada pelo controle anterior. Além da extrema sensibilidade do sistema a qualquer variação do parâmetro b_1 , parece-nos que o ponto fixo $3a$ é mais instável que o ponto $1a$. Essa mudança na dinâmica, quando iniciamos pelo controle do ponto fixo instável $3a$, não afetou a obtenção do controle posterior para o ponto fixo $1a$.

A aplicação do controle para o ponto fixo $2a$ não foi feita devido a dificuldade na obtenção dos elementos necessários à aplicação do método *OGY*. Um dos fatores é que o mapa varia tão pouco quando o valor do parâmetro varia que seria difícil calcular o deslocamento linear do mapa.

7.3 Trabalhos Futuros

Não obstante o exaustivo debate que encontramos na literatura (*Upadhyay et al, 1998*) a respeito de existir, ou não, caos na natureza, acreditamos que, em decorrência do fato de que os modelos matemáticos, para sistemas ecológicos, são não lineares, o interesse pelo estudo de sistemas caóticos e dos comportamentos complexos exibidos por sistemas não lineares continuará motivando grande número de pesquisadores, tanto teóricos quanto experimentais.

A relevância dos estudos de sistemas caóticos tem sido evidenciada, não apenas com relação à sua caracterização, mas também ao controle do mesmo. Vários outros métodos foram propostos (*Shinbrot 1995*), além do método *OGY*, que utilizamos neste trabalho. Dominar técnicas de controle de caos é extremamente importante, visto que abre um leque enorme de comportamentos dinâmicos acessíveis.

No que se refere especificamente a este trabalho, uma possível extensão imediata do mesmo seria, aplicar o método *OGY* no modelo de Hastings e Powell, ainda com $b_1 = 2.75$, para estabilizar órbitas periódicas instáveis de período mais alto, “na alça”, ou ainda, aplicar o método para estabilizar órbitas periódicas de instáveis de período 1 e mais altos na região “fora da alça”, onde seria necessário um estudo bidimensional. Além disso, como há muitos outros valores de b_1 , para os quais o comportamento do sistema é caótico, muitas outras órbitas periódicas poderiam ser exploradas.

APÊNDICE A TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Queremos dar aqui uma demonstração do teorema do valor médio, pois ele é a ferramenta que nos garante que as linearizações (empregadas para análise de estabilidade de pontos fixos) utilizadas ao longo deste trabalho são válidas.

Nas secções 2.1.2, 2.2 e 3.1.3, trabalhamos com funções de uma única variável, enquanto que nas secções 3.2.1, 4.4.2 e 5.2, a linearização foi efetuada para um sistema de funções de mais de uma variável. Então, começaremos por nos referir a funções de uma única variável (teorema 1 e teorema 2) e, a seguir, a sua versão para funções diferenciáveis de \mathbb{R}^p em \mathbb{R}^q (teorema 3).

Como a demonstração do teorema do valor médio depende do teorema de Rolle, este é enunciado a seguir:

Teorema 1 (Teorema de Rolle) *Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $J = [a, b]$, que a derivada de f exista no intervalo aberto (a, b) e que $f(a) = f(b) = 0$. Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Agora é possível estudar o teorema do valor médio para funções reais de uma variável (Bartle, 1964).

Teorema 2 (Teorema do Valor Médio) *Suponha que f é contínua em um intervalo fechado $J = [a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então existe um ponto c em (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração:

Considere a função φ , definida em J :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

De acordo com a hipótese, sabe-se que φ é contínua em $J = [a, b]$. A diferenciabilidade de φ em (a, b) é fácil de checar e decorre das propriedades de f . Além disto, tem-se que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. A aplicação do teorema de Rolle garante a existência de um ponto $c \in J$ tal que

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o que conduz ao resultado.

Teorema 3 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : \Omega \in \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que o conjunto Ω possua os pontos a e b , o segmento de reta que os une e, além disso, que f seja diferenciável em cada ponto deste segmento. Então existe um ponto c neste segmento de reta tal que*

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a),$$

onde $Df(c)$ é a matriz jacobiana avaliada no ponto c .

Demonstração:

Considere a função φ definida de $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = f((1 - t)a + tb), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\varphi(0) = f(a)$, $\varphi(1) = f(b)$ e que, pela regra de cadeia,

$$\varphi' = Df((1 - t)a + tb)(b - a),$$

onde $Df(\cdot)$ é a matriz jacobiana avaliada em um determinado ponto.

Pelo teorema 2, concluímos que existe um ponto t_0 com $0 < t_0 < 1$, tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0)$$

e, tomando $c = (1 - t_0)a + t_0b$, segue-se o resultado.

Corolário 1 *Seja $f : \Omega \in \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Suponha que o conjunto Ω possua os pontos a e b , o segmento de reta que os une e, além disso, que f seja diferenciável em cada ponto deste segmento. Se $y \in \mathbb{R}^q$, então existe um ponto c neste segmento de reta tal que*

$$(f(b) - f(a)) \cdot y = Df(c)(b - a) \cdot y.$$

Demonstração:

Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = f(x) \cdot y$. Aplicando o teorema 2, existe um ponto c neste segmento de reta tal que $F(b) - F(a) = DF(c)(b - a)$, de onde fica clara a validade do resultado expresso no enunciado do corolário.

Corolário 2 *Seja $f : \Omega \in \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Suponha que o conjunto Ω possua os pontos a e b , o segmento de reta que os une e, além disso, que f seja diferenciável em cada ponto deste segmento. Então existe uma função linear $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ tal que*

$$f(b) - f(a) = L(b - a).$$

Demonstração:

Sejam y_1, y_2, \dots, y_q pontos em \mathbb{R}^q tal que $y_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $y_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $y_q = (0, 0, \dots, 1)$. Observamos que as q funções f_1, f_2, \dots, f_q de Ω em \mathbb{R} que fornecem a representação em coordenadas do mapeamento f são obtidas por

$$f_i(x) = f(x) \cdot y_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Aplicando o corolário 1 a cada uma destas funções, obtemos q pontos c_i no segmento de linha que une a e b tal que

$$f_i(b) - f_i(a) = Df(c_i)(b - a) \cdot y_i.$$

Como a representação matricial de $Df(c)$ é dada pela matriz $q \times p$ com elementos

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(c), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, \dots, p;$$

então a função linear L tem a seguinte representação matricial:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(c_i), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

APÊNDICE B ESTABILIDADE DE LYAPUNOV E ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE UMA ÓRBITA PERIÓDICA

Podemos definir a estabilidade de uma solução periódica de duas diferentes formas. Supondo que o sistema diferencial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (\text{B.1})$$

para $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tem uma solução conhecida \mathbf{X} de período T , tal que $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)$ para todo t , então \mathbf{X} é representado por uma curva fechada no espaço de fase.

A solução periódica é dita *estável no sentido de Lyapunov* ou simplesmente *estável* se uma pequena perturbação inicial do sistema $\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t)$ suficientemente pequena permanecer pequena, para todo $t \geq 0$, sempre que $\mathbf{x}(0) - \mathbf{X}(0)$ for suficientemente pequena, ou seja, se dadas duas condições iniciais próximas elas permanecerem próximas para todo t . A estabilidade de Lyapunov está relacionada com a evolução no tempo, de soluções do sistema cujos valores iniciais são infinitesimalmente diferentes.

Entretanto esta definição de estabilidade é muito restrita pois estamos freqüentemente mais interessados no caráter qualitativo do conjunto de soluções no espaço de fase do que com o comportamento da própria solução num dado tempo.

A partir disso, podemos definir estabilidade de outra forma. Assim, teremos que uma solução \mathbf{X} será *estruturalmente estável* ou *estável no sentido de Poincaré*, se as órbitas $\mathbf{x}(t)$ para $t \geq 0$ de todas as soluções vizinhas permanecerem próximas à órbita de \mathbf{X} no espaço de fase. Portanto, a estabilidade de estrutural ou de Poincaré está relacionada com o caráter qualitativo do conjunto de todas as soluções de um sistema. Se este caráter é mudado quando se faz uma perturbação infinitesimal do sistema, então o sistema é estruturalmente estável.

Então estabilidade no sentido de Lyapunov implica estabilidade no sentido de Poincaré, mas a recíproca não é verdadeira.

APÊNDICE C ANÁLISE NO PLANO DE FASE PARA UM SISTEMA BIDIMENSIONAL

Podemos classificar os sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em sistemas autônomos e não autônomos.

Um sistema autônomo é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.1})$$

onde as funções F_i não dependem explicitamente do tempo. Num sistema não autônomo a função F_i depende explicitamente da variável t , ou seja, $F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$. Sob forma vetorial o sistema acima é dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.2})$$

onde $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n$.

Os sistemas autônomos podem ser classificados como *lineares* ou *não lineares* dependendo da forma das F_i no lado direito de (C.1). Um sistema autônomo de equações é *linear* se cada uma das funções F_i , $i = 1, 2, \dots, n$ for uma função linear das variáveis dependentes x_1, x_2, \dots, x_n ; caso contrário, o sistema é dito ser *não linear*.

Aqui discutiremos brevemente um sistema com duas equações diferenciais ordinárias autônomas de primeira ordem da forma:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (\text{C.3})$$

onde $F(x, y)$ e $G(x, y)$ são funções de x e y .

Temos que as *trajetórias de fase* ou *curvas de fase* de (C.3) são soluções de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \quad (\text{C.4})$$

Através de qualquer ponto (x_0, y_0) existe uma única curva exceto em *pontos de equilíbrio* (x^*, y^*) onde:

$$F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$$

Expandindo as equações em (C.3) em série de Taylor em torno de x^* e y^* e mantendo somente os termos lineares em $(x - x^*)$ e $(y - y^*)$ temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d\xi}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

onde $\eta = x - x^*$, $\xi = y - y^*$, e definimos:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \quad (\text{C.6})$$

Quando $x = x^*$ e $y = y^*$, temos $\eta = 0$ e $\xi = 0$, respectivamente.

Eliminando a variável t , obtemos a equação diferencial para as curvas no plano de fase:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a\eta + b\xi}{c\eta + d\xi}, \quad (\text{C.7})$$

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de \mathbf{A} definidos na equação abaixo:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \quad (\text{C.8})$$

As soluções de (C.7) dadas por:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{C.9})$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são os autovetores de \mathbf{A} correspondentes a λ_1 e λ_2 , respectivamente.

A forma de (C.9) é válida para autovalores distintos. Caso os autovalores forem iguais, as soluções são proporcionais a $(c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}$.

Classificação das singularidades no plano de fase

1. λ_1 e λ_2 reais e distintos.

(a) λ_1 e λ_2 reais e com mesmo sinal.

Os autovalores típicos são ilustrados na figura C.1. Suponha $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Então, de (C.9), por exemplo, para $c_2 = 0, c_1 \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad (\text{C.10})$$

assim, a solução no plano de fase simplesmente move-se ao longo de \mathbf{v}_1 em direção à origem quando $t \rightarrow \infty$, na direção mostrada na figura C.1 - ao longo de PO se $c_1 > 0$ e ao longo de QO se $c_1 < 0$. De (C.9) vemos que toda solução tende a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$ uma vez que, com $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, $e^{\lambda_2 t} = O(e^{\lambda_1 t})$ quando $t \rightarrow \infty$ e assim:

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \sim c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{quando } t \rightarrow \infty \quad (\text{C.11})$$

Assim, suficientemente próximo à origem todas as soluções tendem a zero ao longo de \mathbf{v}_1 como mostrado na figura C.1. Esta é chamada singularidade do tipo *nó* (tipo 1). Com $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ este ponto é um *nó estável*, pois todas as trajetórias tendem a $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ este ponto é um *nó instável*: $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow -\infty$.

(b) λ_1 e λ_2 tem sinais diferentes.

Suponha, por exemplo, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ então $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ ao longo de \mathbf{v}_1 quando $t \rightarrow \infty$ enquanto que $\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ ao longo de \mathbf{v}_2 quando $t \rightarrow -\infty$.

Existem assim, sentidos diferentes em \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , ou seja, dependendo do valor das constantes as soluções se afastam (ou se aproximam) em sentidos diferentes: as soluções próximas a $(0,0)$ são como mostradas na figura C.2. Esta é uma singularidade do tipo *ponto de sela*. Esta singularidade é sempre instável: exceto estritamente ao longo de \mathbf{v}_1 , qualquer pequena perturbação em torno de $(0,0)$ cresce exponencialmente.

2. λ_1 e λ_2 complexos: $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$.

As soluções de (C.8) envolvem $e^{\alpha t} e^{\pm i\beta t}$ as quais implicam uma aproximação oscilatória a origem.

(a) $\alpha \neq 0$. Neste caso, temos uma *espiral*, a qual é estável se $\alpha < 0$ e instável se $\alpha > 0$: A figura C.3 ilustra uma singularidade do tipo espiral.

(b) $\alpha = 0$. Neste caso, as curvas no espaço de fase são elipses. Esta singularidade é chamada um *centro* e é ilustrada na figura C.4. Estes tipos de singularidade não são estáveis no sentido usual; uma pequena perturbação de uma destas curvas não se extingue no sentido de retornar a curva não perturbada. A perturbação simplesmente nos dá outra solução. No caso de singularidades do tipo centro, determinadas por uma solução do sistema não linear (C.3) devemos observar os termos de ordem mais elevada na expansão em série de Taylor das funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ em torno do ponto em questão para determinar sua estabilidade.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Aqui os autovalores não são distintos.

(a) Em geral, as soluções agora envolvem termos como $te^{\lambda t}$ e existe um único autovetor \mathbf{v} ao longo do qual as soluções tendem a $(0,0)$. Esta é uma singularidade de tipo *nó* (tipo 2), uma ilustração da qual é mostrada na figura C.5.

- (b) Se as soluções não contém o termo $te^{\lambda t}$ temos uma singularidade do tipo *estrela* que pode ser estável ou instável, dependendo do sinal de λ . Trajetórias vizinhas de uma singularidade do tipo estrela são mostradas na figura C.6. A singularidade depende de a , b , c , e d na matriz A em (C.7).

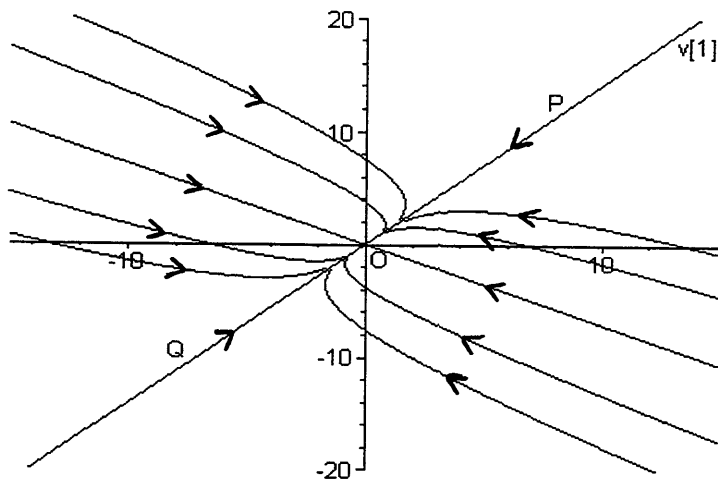


Figura C.1: Singularidade nó tipo *I* - estável

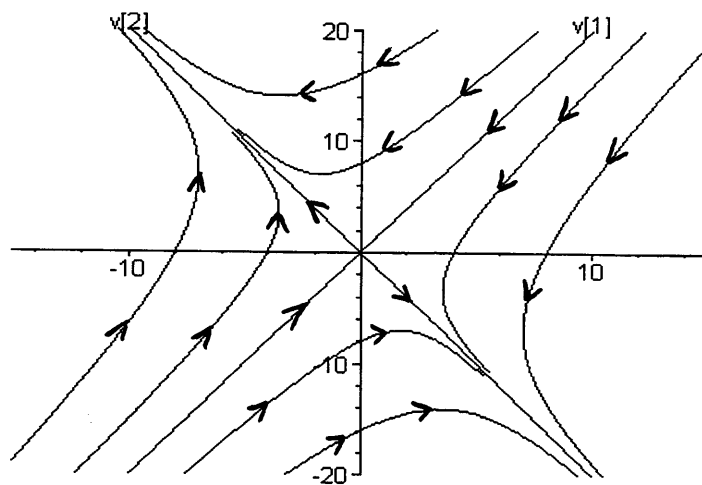


Figura C.2: Singularidade tipo *Ponto de Sela*

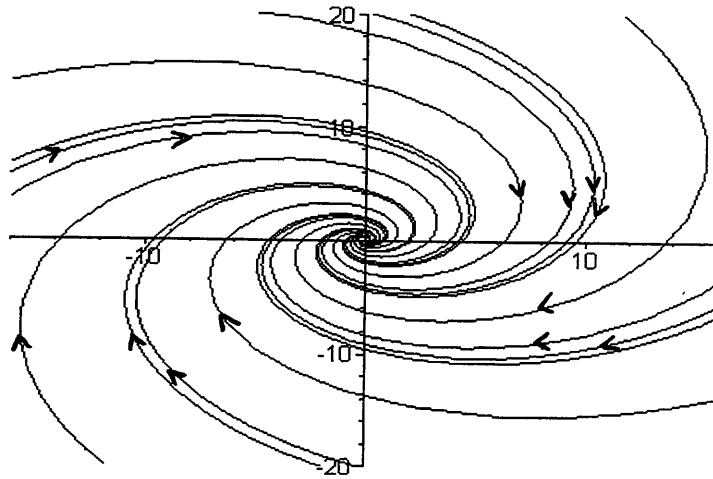


Figura C.3: Singularidade tipo *Espiral estável*

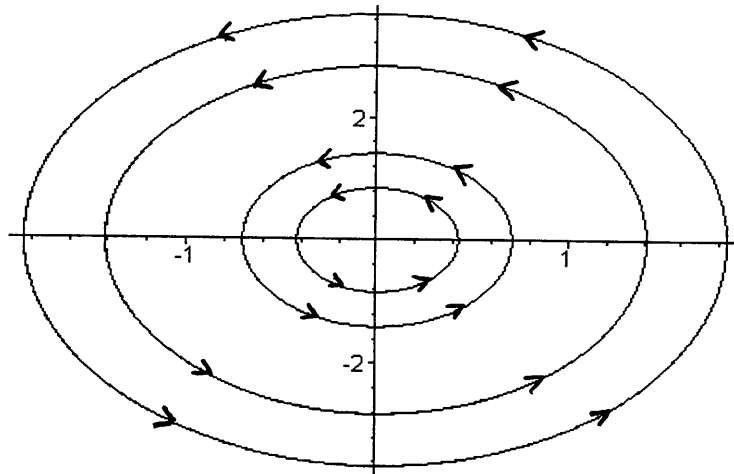


Figura C.4: Singularidade tipo *centro*

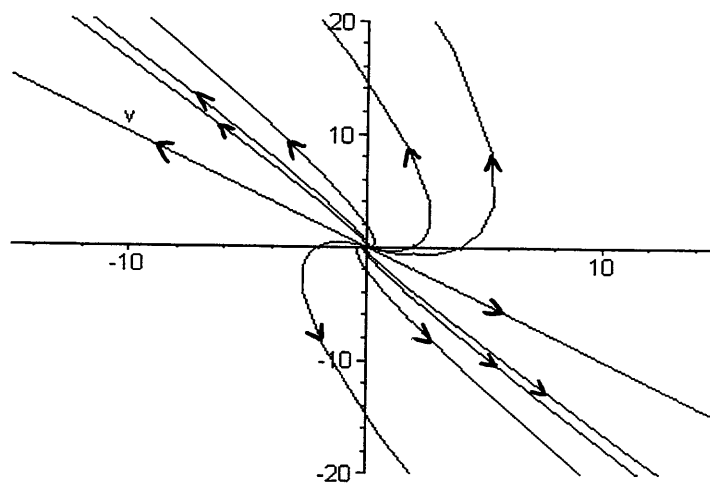


Figura C.5: Singularidade *nó* tipo *II* - *instável*

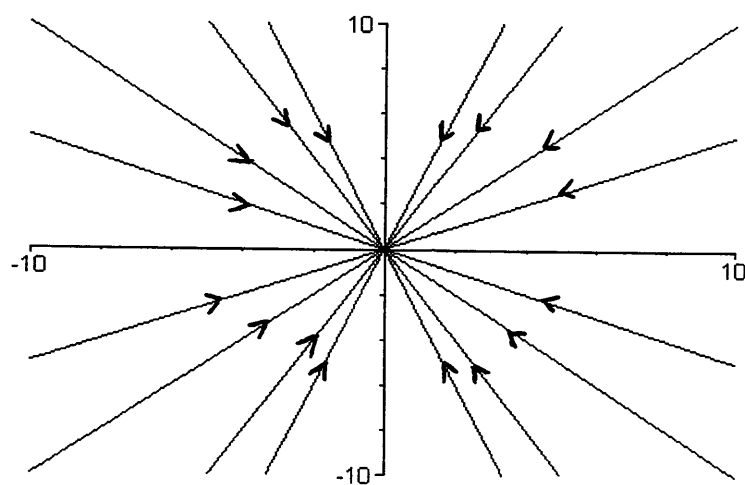


Figura C.6: Singularidade tipo *estrela*

APÊNDICE D CONDIÇÕES DE ROUTH-HURWITZ

No presente trabalho, as condições de Routh-Hurwitz foram utilizadas para determinar a estabilidade de um ponto fixo para alguns valores do parâmetro do sistema dinâmico de Hastings e Powell (capítulo 5).

Este sistema pode ser escrito na forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, p) \quad (\text{D.1})$$

Assim, a estabilidade de um ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* deste sistema de equações diferenciais ordinárias tais como que se originam em modelos populacionais interagentes, é determinado pelas raízes de um polinômio. Expandindo o sistema (D.1) em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio \mathbf{x}^* e mantendo somente os termos lineares em $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, temos:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (\text{D.2})$$

onde $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ e a matriz \mathbf{A} é a matriz Jacobiana calculada no estado estacionário \mathbf{x}^* - a matriz comunidade em termos ecológicos. A análise de estabilidade na qual estamos interessados, envolve sistemas lineares da forma vetorial na forma acima e as soluções são:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{\lambda t} \quad (\text{D.3})$$

onde \mathbf{r}_0 é um vetor constante e os autovalores λ são raízes do *polinômio característico*,

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0, \quad (\text{D.4})$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. A solução $\mathbf{r} = 0$ é estável se $\text{Re}\lambda < 0$ para todas as raízes λ . Se isto é satisfeito, então $\mathbf{r} \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$ e conseqüentemente $\mathbf{r} = 0$ é estável para pequenas perturbações.

Se o sistema é de **n-ésima** ordem, o polinômio característico pode ser dado na forma geral,

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (\text{D.5})$$

onde os coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ são todos reais. Aqui assumimos que $a_n \neq 0$, pois, caso contrário, $\lambda = 0$ é uma solução, e o polinômio característico é então de ordem $n - 1$ com o equivalente $a_n \neq 0$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são raízes distintas não nulas de (D.5), estas são:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -a_1, \quad \sum_{i,j, i \neq j}^n \lambda_i \lambda_j = a_2, \quad \dots \quad \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n a_n \quad (\text{D.6})$$

Para estabilizade de \mathbf{x}^* , precisamos de condições para os a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ tais que os zeros $P(\lambda)$ tenham $\text{Re}\lambda < 0$. As condições suficientes e necessárias para isto ser satisfeito são as chamadas condições de *Routh-Hurwitz*. Existem várias formas equivalentes, uma das quais é, juntamente com $a_n > 0$,

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{D.7})$$

Estas condições são obtidas, usando-se métodos de variáveis complexas, da teoria de sistemas dinâmicos. Como um exemplo, para a equação cúbica,

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (\text{D.8})$$

as condições para $\text{Re}\lambda < 0$ são:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

As equações (D.7) são condições necessárias e suficientes para que \mathbf{x}^* seja ponto de equilíbrio estável do sistema (D.2)

APÊNDICE E MÍNIMOS QUADRADOS

Tratamento bidimensional

Na seção 4.4, o que precisamos para aplicar o método *OGY* é conhecidos n pares de valores $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ determinar uma matriz \mathbf{M} 2×2 , de modo que esta matriz \mathbf{M} nos leve de um ponto $\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ para um ponto $\mathbf{u}_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix}$. Portanto o que desejamos é calcular uma matriz tal que,

$$\begin{bmatrix} r_i \\ s_i \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

onde $r_i = x_{i+1}$, $s_i = y_{i+1}$, x_i e y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são valores conhecidos da nossa integração numérica. Definindo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

concluimos que a , b , c e d são os elementos da matriz \mathbf{M} , que queremos determinar, e o problema desdobra-se em dois problemas não acoplados de regressão linear com termo independente nulo, dados por:

$$\begin{aligned} r_i &= ax_i + by_i \\ s_i &= cx_i + dy_i \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Pelo método dos mínimos quadrados, desejamos encontrar a , b , c e d tais que:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=0}^{n-1} [r_i - (ax_i + by_i)]^2 \\ S &= \sum_{i=0}^{n-1} [s_i - (cx_i + dy_i)]^2 \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

sejam mínimos, devendo, portanto, satisfazer as seguintes condições,

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \quad (\text{E.5})$$

Observamos que as somas devem ir até $i = n - 1$, devido ao objetivo específico de determinar um mapa que leva do ponto \mathbf{u}_i para o ponto \mathbf{u}_{i+1} , para uma seleção de pontos, da qual \mathbf{u}_{n+1} não fazia parte.

Assim, para calcular os valores de a , b , c e d , devemos resolver os dois sistemas algébricos abaixo, dados em forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i & \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i r_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i r_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i & \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i s_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Resolvidos os sistemas acima, temos os valores de a , b , c , d que melhor representam a aproximação linear do mapa sobre a seção de Poincaré bidimensional.

Tratamento unidimensional

Em um tratamento unidimensional do controle de caos, eram conhecidos n valores $\{x_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$, e desejávamos calcular a e b , tais que

$$x_{i+1} = ax_i + b. \quad (\text{E.8})$$

Queríamos, portanto, encontrar uma função linear da forma:

$$f(x_i) = ax_i + b \quad (\text{E.9})$$

que melhor se ajustasse a um conjunto de pontos $\{x_i, z_i\}$, onde $z_i = x_{i+1}$ e x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são conhecidos.

Aplicando o método dos mínimos quadrados, queremos encontrar uma $f(x_i)$ tal que,

$$Q = \sum_{i=0}^n (z_i - f(x_i))^2 \quad (\text{E.10})$$

seja mínimo. Para isso, ela deve satisfazer

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{db} = 0 \quad (\text{E.11})$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^n (z_i - (ax_i + b)) (-x_i) &= 0 \\ 2 \sum_{i=0}^n (z_i - (ax_i + b)) (-1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Das condições acima, obtemos o seguinte sistema algébrico para a e b :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n ax_i^2 + \sum_{i=0}^n bx_i &= \sum_{i=0}^n z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n ax_i + \sum_{i=0}^n b &= \sum_{i=0}^n x_i \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} z_i x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

Resolvido o sistema e substituindo os valores de a e b encontrados em (E.9), temos determinada a função $f(x_i)$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABARBANEL, H. D. I., *Analysis of observed chaotic data*. New York: Springer-Verlag New York, 1996.
2. ABRAMS, P. A., ROTH, J. The responses of unstable food chains to enrichment. *Evolutionary Ecology*, v.8, p.150-171, 1994.
3. ABRAMS, P. A., ROTH, J. D. The effects of enrichment of three species food chains with nonlinear functional responses. *Ecology*, v.75, n.4, p.1118-1130, 1994.
4. ALIGOOD, K. T., SAUER, T. D., YORKE, J. A., *Chaos: an introduction to dynamical systems*. New York: Springer-Verlag, 1996
5. ARECCHI, F. T., BOCCATELLI, S., CIOFINI, M., MEUCCI, R. The control of chaos: theoretical schemes and experimental realizations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v.8, n.8, p.1643-1665, Agosto, 1998.
6. AUERBACH, D., GREBOGI, C., OTT, E., YORKE, J. A. Controlling chaos in high dimensional systems. *Physical Review Letters*, Woodbury, v.69, n.24, p.3479-3482, Dezembro, 1992.
7. BARTLE, R. G., *The elements of real analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964
8. BASSANEZZI, R. C., FERREIRA, W. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Editora Harbra, 1988.
9. BENETTIN, G., GALGANI, L., GIORGILLI, A., STRELCYN, J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. *Meccanica*, p.9-29, março, 1980.

10. BYKOV, V. V., On bifurcations leading to chaos in Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v.8, n.4, p.685-699, abril, 1998.
11. DITTO, W. L., RAUSEO, S. N., SPANO, M. L. Experimental control of chaos. *Physical Review Letters*, Woodbury, v.65, n.26, p.3211-3214, Dezembro, 1990.
12. DITTO, W. L., SPANO, M. L., LINDLER, J. F. Techniques for the control of chaos. *Physica D*, Amsterdam, v.86, p.198-211, 1995.
13. DITTO, W. L., PECORA, L. M. Mastering chaos. *Scientific America*, v.269, n.2, p.62-68, Agosto, 1993.
14. DRAZIN, P. G. *Nonlinear systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
15. ECKMANN, J. P., RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v.57, n.3, p.617-656, Julho, 1985.
16. FARMER, J. D., OTT, E., YORKE, J. A. The dimension of chaotic attractors. *Physica 7D*, Amsterdam, p.153-180, 1983.
17. FERRARA, N. F., CINTRA DO PRADO, C. P. *Caos: uma introdução*. São Paulo:Edgard Blücher LTDA, 1994.
18. FRØYLAND, J., ALFSEN, K. H. Lyapunov-exponent spectra for the Lorenz model. *Physical Review A*, Woodbury, v.39, n.5, p.2928-2931, Maio, 1984.
19. GREBOGI, C., OTT, E., YORKE, J. A. Critical exponent of the chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 57, n.6, p.1284-1287, Setembro, 1986.

20. GREBOGI, C., LAY, Y. C., HAYES, S. Control and applications of chaos. *Journal of Franklin Institute*, Great Britain, v.334B, n.5/6, p.115-1146, Março, 1997.
21. GREBOGI, C., LAY, Y. C. Controlling chaotic dynamical systems. *Systems and Control Letters*, v.31, p.307-312, 1997.
22. GUCKENNHEIMER, J., HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations to vector fields*. New York: Springer Verlag, 1983.
23. HASTINGS, A., POWELL, T. Chaos in a three-species food chain. *Ecology*, v.72, n.3, p. 896-903, Setembro, 1991.
24. KOSTELICH, E. J., YORKE, J. A. Noise reduction in dynamical systems. *Physical Review A*, Woodbury, v.38, n.3, p.1649-1652, Agosto, 1988.
25. LATHROP, D. P., KOSTELICH, E. J. Characterization of an experimental strange attractors by periodic orbits. *Physical Review A*, Woodbury, v.40, n.7, p.4028-4031, Outubro, 1989.
26. LI, T. Y., YORKE, J. A. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*. v.82, p.985-992, 1975.
27. MAY, R. M. *Theoretical ecology: principles and applications*, Princeton: Princeton University, 1976.
28. McCANN, K., YODZIS, P. Biological conditions for chaos in a three-species food chain. *Ecology*, v. 75, n.2, p.561-564, 1994.
29. MURATORI, S., RINALDI, S. Low- and high-frequency oscillations in a three dimensional food chain systems. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, v.52, n.6, p. 1688-1706, Dezembro, 1992.

30. MURRAY, J. D. *Mathematical Biology*. New York: Springer-Verlag, 1993.
31. OTT, E., GREBOGI, C., YORKE, J. A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, Woodbury, v.64, n.11, p.1196-1199, Março, 1990.
32. OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
33. PARKER, T. S., CHUA, L. O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.
34. PENG, B., PETROV, V., SHOWALTER, K. Controlling chemical chaos. *The Journal of Physical Chemistry*, v.95, n.13, p.4957-4959, Abril, 1991.
35. PHILLIPSON, P. E., SCHUSTER, P. Analitics of bifurcation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v.8, n.3, p.471-482, Março, 1998.
36. PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P. *Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
37. RAI, V., SREENIVAZAN, R. Period-doubling bifurcations leading to chaos in a model food chain. *Ecological Modelling*, Amsterdam, v.69, p.63-77, Setembro, 1993.
38. SHINBROT, T. Progress in the control of chaos. *Advances in Physics*, London, v.44, n.2, p.73-111, Abril, 1995.
39. SMITH, J. M. *Models in Ecology*. Cambridge: Cambridge University express, 1974.
40. SPSS incorporation, *SPSS Base 8.0 for Windows User's Guide*. USA, 1998.

41. TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, n.898, p.366-381, 1981.
42. UPADHYAY, R. K., JYENGAR, S. R. K., RAI, V. Chaos: an ecological reality?. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v.8, n.6, p.1325-1333, Junho, 1998.
43. VARRIALE, M. C., GOMES, A. A. A study of a three species food chain. *Ecological Modelling*, Amsterdam, v.110, p.119-133, Fevereiro, 1998.
44. WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, J. B., VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica 16D*, Amsterdam, p.285-317, Outubro, 1985.
45. YANG, T., CHUA, L. O. Control chaos using sampled-data feedback control. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v.8, n.12, p.2433-2438, Dezembro, 1998.