UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS

APREÇANDO OPÇÕES VIA MÉTODO DE MONTE-CARLO

BRUNO VIACELLI PONTELLO

PORTO ALEGRE
2010

BRUNO VIACELLI PONTELLO

APREÇANDO OPÇÕES VIA MÉTODO DE MONTE-CARLO

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo

Porto Alegre
2010

BRUNO VIACELLI PONTELLO

APREÇANDO OPÇÕES VIA MÉTODO DE MONTE-CARLO

Monografia apresentada ao Departamento de Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas.

Aprovado em: Porto Alegre, ____ de ______________________ de 2010

____
Prof. Dr. Fabrício Tourrucôo (Orientador)

____
Prof. Dr. Antônio Lima

____
Prof. Dr. Ronald Otto Hillbrecht

AGREDECIMENTOS

Agradeço a todos que colaboraram para a realização deste trabalho, especialmente aos meus amigos, pelo constante incentivo para a conclusão deste, e ao professor Fabrício Tourrucôo, pelos auxílios prestados e conhecimentos compartilhados.

RESUMO

Nos últimos anos, o mercado de opções tem mostrado crescente expansão no volume de negócios da mesma forma que o interesse na determinação destas. Neste trabalho, buscou-se aplicar complementarmente o método de Monte-Carlo no modelo Black-Scholes na precificação de uma opção de compra européia sobre um ativo não-pagador de dividendos. Para este objetivo, faz-se uma apresentação das variáveis que afetam o prêmio das opções, seguidas da revisão individual de cada modelo mencionado.

Palavras-chave: Mercado de opções. Precificação de opções. Modelo Black-Scholes. Simulações de Monte-Carlo

ABSTRACT

In the last years, options market has shown increasing growth in its trading volume so as the interest in its price determination. In this study, we sought to apply the Monte-Carlo method together on Black-Scholes model in pricing a European call option on an asset which pays no dividends. For this purpose, it is made a presentation of the variables that affect the premium of the options, followed by an individual review of each model mentioned.

Key-words: Option markets. Options pricing. Black-Scholes model. Monte-Carlo simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ATM = *At the money*

ITM = *In the money*

MBG = Movimento Browniano Geométrico

OTM = *Out of the money*

SMC = Simulação de Monte-Carlo

VI = Valor intrínseco

LISTA DE SÍMBOLOS

μ = Média ou valor esperado

c = Prêmio de uma opção de compra

p = Prêmio de uma opção de compra

r = Taxa de juros livre de risco

S = Preço à vista do ativo subjacente

T = Tempo até o vencimento da opção

X = Preço de exercício

θ = Média entre um número aleatório e seu oposto

Σ = Somatório

σ = Volatilidade

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Questão a investigar

O trabalho aqui desenvolvido está centrado em dois pontos base: na revisão da bibliografia de apreçamento de opções relativa ao modelo Black-Scholes, de imenso sucesso e aceitação geral no âmbito das finanças, e na exploração das simulações de Monte-Carlo em uma modelagem compartilhada com B&S na precificação de uma *call* européia sobre uma ação que não distribui dividendos. O modelo de Black-Scholes sugere soluções analíticas no que diz respeito a determinar o preço de opções, que são insatisfatórias quando se eleva o grau de complexidade em torno da opção.

O modelo original, publicado em 1973 por Fischer Black e Myron Scholes, visava precificar contratos de opção do tipo europeu de compra ou de venda sobre ações não-pagadoras de dividendos durante o período de vida da opção. Certas premissas do modelo de B&S não condizem com a realidade. Dois exemplos são as hipóteses de que o preço das ações segue o comportamento de um Movimento Browniano Geométrico (MBG) e o fato da volatilidade do preço das ações ser tomada como constante ao longo do tempo.

Dada a necessidade de elevar a complexidade do modelo e facilidade de sua implementação, a aplicação conjunta do método de Monte-Carlo será analisada ao longo deste trabalho.

1.2 Objetivos e hipóteses

Os objetivos deste trabalho são apresentar fatores que afetam o prêmio das opções, revisar o modelo de Black-Scholes, revisar o método de Monte-Carlo e aplicá-lo de maneira compartilhada com a abordagem Black-Scholes na precificação de uma opção de compra do tipo europeu sobre um ativo que não distribui dividendos.

Num primeiro momento, será feita uma introdução na questão sobre apreçamento de opções, apresentando conceitos básicos e variáveis que influem no preço da opção. Em seguida, será feita uma revisão do modelo Black-Scholes, apresentando seus aspectos, suas premissas e que implicações elas trouxeram. Por fim, o mesmo será feito para as simulações de Monte-Carlo.

Neste trabalho, assumem-se as hipóteses de que o mercado, no qual os exemplos serão desenvolvidos, é composto por vários participantes, não há custos de transação, todos os lucros estão sujeitos à mesma taxação, que é possível tomar ou conceder empréstimos à taxa de juros livre de risco e não há possibilidade de arbitragem livre de risco.

1.3 Justificativa da importância do tema

O modelo de Black-Scholes, modelo mais comumente utilizado na precificação de opções financeiras nas bolsas de valores mundiais, propõe uma fórmula para calcular o preço de uma opção do tipo européia a partir de informações obtidas no mercado.

Os pressupostos do modelo são: a taxa de juros livre de risco é conhecida e constante ao longo do tempo, o preço do ativo-objeto segue um Movimento Browniano Geométrico[1], o ativo-objeto não paga dividendos ou qualquer outro provento, a opção é

[1] Movimento Browniano Geométrico é um processo estocástico (processo aleatórios dependentes do tempo) contínuo e será abordado ao longo deste trabalho.

do tipo europeu[2], não há custos de transação, não existe possibilidade de arbitragem, isto é, toda carteira de ativos que não apresente risco deve apresentar como retorno (*payoff*) a taxa de juros livre de risco.

Ao se analisar esses pressupostos, é possível observar algumas limitações do modelo Black-Scholes. Por exemplo, a taxa de juros livre de risco pode oscilar no decorrer do tempo e nem sempre é conhecida; os custos de transação são desconsiderados em todas as operações propostas; e, por fim, o modelo inicialmente prevê avaliação dos preços de opções do tipo europeu e o ativo-objeto não distribuiu dividendos ao longo do tempo. Métodos para mensurar a volatilidade do preço do ativo-objeto, que corresponde à medida de incerteza sobre movimentos futuros no preço do ativo, são mais um assunto de grande discussão no mundo das finanças internacionais.

O modelo de Black-Scholes serviu de base para estudos mais elaborados sobre modelos de apreçamento, que têm por função tornar mais transparente o processo de formação de preços em função de outros parâmetros disponíveis no mercado. Considerando taxa de juros livre de risco e a volatilidade como processos estocásticos, os resultados obtidos serão mais complexos que os resultados do modelo original.

O método de Monte-Carlo, que consiste em simular realizações do processo estocástico que modela a evolução dos preços da ação, dados parâmetros como o preço atual do ativo, preço de exercício, prazo até o vencimento, volatilidade do ativo-objeto e a taxa de juros livre de risco, será então analisado.

[2] Opções do tipo europeu serão conceituadas mais adiante.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos no que diz respeito à precificação de opções e quais variáveis são relevantes na formação dos seus preços.

2.1 Opções financeiras

O mercado de ações é onde ocorrem negociações de ações, as quais podem ser consideradas como um percentual de uma empresa – teoricamente não é errado intitular de sócio do Jorge Gerdau aquele que detém ações da Gerdau S.A.. No mercado de opções, diferentemente, são negociados contratos de opções.

Uma opção dá a seu detentor o direito de fazer algo, porém o mesmo não é obrigado a exercer esse direito, segundo HULL (2009, p. 201). SILVA (2008, p. 23) afirma que “uma opção é o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um bem ou ativo, negociado no mercado de referência da opção a um preço determinado até a data de vencimento ou expiração”.

Resumindo, um contrato de opção é um contrato futuro no qual é estabelecido o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um ativo, negociado no seu mercado de referência, a um preço pré-determinado (preço de exercício ou *strike price*), numa determinada data futura ou num prazo determinado até uma data de vencimento e pode ser classificado de acordo com a sua classe, estilo, mercado do ativo objeto, ativo objeto da opção.

Os contratos de opções podem pertencer a duas classes: opções de compra ou opções de venda. No primeiro caso, o titular da opção tem o direito de comprar o ativo-objeto, enquanto o lançador tem a obrigação de vendê-lo segundo as especificações do contrato. O titular é denominado aquele que compra a opção e lançador, aquele que a vende. Se tratando de opções de venda, o titular tem o direito de vender o ativo-objeto e o lançador tem a obrigação de comprá-lo, quando for do desejo do titular.

Opções de compra serão referidas como *call* e opções de venda, como *put*, mesma nomenclatura utilizada na bibliografia pesquisada.

Opções, independente da classe a qual pertencerem, podem possuir diferentes ativos-objetos. As mais conhecidas são opções sobre ações; porém, existem opções sobre índices de ações, divisas, taxas de juros, *commodities* e outros ativos financeiros ou não. Outra distinção é quanto ao mercado do ativo-objeto: opções sobre ativos negociados no mercado a vista, *spot options*, ou no mercado de derivativos, *options on futures*.

2.1.1 Opções européias x americanas

Das quatro classificações anteriormente citadas, a última, referente ao estilo da opção, será abordada neste subitem.

O direito de compra ou venda negociado no contrato possui limite de tempo para ser exercido, determinado pela data de vencimento, também denominada data de exercício ou data de maturidade (*expiration date* ou *maturity date*). As primeiras opções negociadas eram do tipo europeu (*european options*), as quais poderiam ser exercidas apenas na data de vencimento, nunca antes. Nas opções do tipo americano (*american options*), diferentemente, o titular poderá exercer o seu direito a qualquer momento, desde a data na qual foi lançada até a data de expiração.

Opções sobre taxa de câmbio, sobre ouro e sobre a taxa média de Depósitos Interfinanceiros de um dia (DI de 1 dia) são do tipo europeu, enquanto opções sobre ações, *commodities* e índices de ações, são do tipo americano geralmente.

2.1.2 Valor intrínseco x valor tempo

Fatores que influem no preço de um contrato de opção serão abordados mais detalhadamente no próximo capítulo, mas no que se refere à precificação das opções, o valor do prêmio pode ser dividido entre o valor intrínseco e o valor tempo.

"O valor intrínseco de uma opção é definido como o máximo entre zero e o valor que a opção teria se fosse exercida imediatamente" de acordo com HULL (2009), ou seja, o valor intrínseco de uma opção de compra seria o máximo entre zero e a diferença entre o preço a vista do ativo-objeto (S) e o preço de exercício da opção(X): $máx(S - X; 0)$. No caso de uma opção de venda seria o máximo valor entre a diferença entre o preço de exercício e o preço a vista do ativo subjacente e zero: $máx(X - S; 0)$.

2.1.3 Probabilidade de exercício (***Moneyness***)

"O termo *moneyness* é definido como uma medida do grau no qual é provável que um ativo tenha valor monetário positivo na data do vencimento ou exercício" (SILVA, 2008, p. 74). Ou seja, *moneyness* é a probabilidade da opção ser exercida.

Pelo conceito de *moneyness*, opções de compra podem ter três classificações:

- Dentro do dinheiro (*in the money* - ITM): preço de exercício é menor que o preço à vista;

- No dinheiro (*at the money* - ATM): preço de exercício é igual ao preço à vista;

- Fora do dinheiro (*out of the money* - OTM): preço de exercício é maior que o preço à vista.

Para opções de venda (*put*), as condições de *moneyness* seriam:

- Dentro do dinheiro (*in the money* - ITM): preço de exercício é maior que o preço à vista;

- No dinheiro (*at the money* - ATM): preço de exercício é igual ao preço à vista;

- Fora do dinheiro (*out of the money* - OTM): preço de exercício é menor que o preço à vista.

Quadro 1: *Moneyness* segundo a classe da opção (fonte: SILVA, 2008, p. 75)

MONEYNESS	Sigla	*Call*	*Put*
In the money (dentro do dinheiro)	ITM	S>X	S<X
At the money (no do dinheiro)	ATM	S=X	S=X
Out of the money (fora do dinheiro)	OTM	S<X	S>X

Por exemplo, supondo que o preço de um ativo (S) seja igual a \$50,00 e que, para este mesmo ativo, três séries de *call* são negociadas em bolsa, cujos preços de exercícios (X) sejam, respectivamente, \$48,00, \$50,00 e \$53,00. Somente a primeira série possui *moneyness*; é a única série a apresentar condições para exercício, enquanto as outras duas, não. O preço desta opção será no mínimo \$2,00, que é o seu valor intrínseco neste momento. Supondo os mesmo valores para uma *put*, a última série seria a única a apresentar condições para exercício e o prêmio a ser pago seria, no mínimo, igual a \$3,00.

Resumidamente, opções ITM serão exercidas na data de exercício (possuem maior probabilidade de serem exercidas), dado que o titular pode auferir lucro imediatamente executando seu direito, enquanto as opções OTM, não (possuem pouca probabilidade de serem exercidas). Opções ATM geralmente não são exercidas, porque ao fazê-lo o titular não obtém lucro.

O conceito de *moneyness* auxilia a entender a relação entre o preço à vista (S) e o preço de exercício da opção (X) no que se refere à precificação destas últimas. Quanto maior for a probabilidade de a opção ser exercida, maior será o prêmio pago pelos investidores para exercer esse direito. A tabela abaixo mostra essa relação:

Quadro 2: Relação entre o preço à vista (s) com o prêmio da opção (fonte: SILVA, 2008, p. 77)

Prêmio da opção	**Preço do ativo-objeto da opção (S)**	
	Diminui	**Aumenta**
Opção de compra (*call*)	Diminui	Aumenta
Opção de venda (*put*)	Aumenta	Diminui

Resumindo, deve-se lembrar que *moneyness* remete ao valor intrínseco da opção, a diferença entre o preço de exercício e o preço à vista, que necessariamente não tem o mesmo significado que preço. O preço de uma *call* ou *put*, como citado anteriormente, resultado do somatório entre o valor intrínseco e o valor temporal. Também denominado de valor extrínseco, o valor temporal é a diferença entre o preço da opção e o seu valor intrínseco; nas palavras de SILVA (2008), é a quantidade de prêmio que excede o valor intrínseco.

Este é o foco central das teorias sobre avaliação de preços das opções: a determinação do valor temporal de uma opção, que será abordado no próximo capítulo.

2.2 Formação Dos Preços De Opções

Na seção anterior foi feito uma revisão acerca dos conceitos básicos sobre contratos de opções, premissas básicas e termos técnicos. Esta seção objetiva expor e revisar os parâmetros considerados no cálculo do prêmio das opções.

2.2.1 Variáveis que afetam o prêmio opções

Com base na diferença entre valor intrínseco e o prêmio de uma opção, exposta na seção anterior, fica claro que o preço do ativo subjacente (*underlying asset price*) e o preço de exercício (*strike price*) não são suficientes para determinar o prêmio a ser pago por uma opção.

Independente do modelo de precificação selecionado, as variáveis básicas que alteram o preço da opção são:

- Preço do ativo-objeto (S);
- Preço de exercício (X);
- Tempo até o vencimento da opção (T);
- Taxa de juros livre de risco (r), e
- Volatilidade do preço do ativo subjacente (σ).

Cada variação individual em um desses fatores acarreta em uma variação no prêmio da opção, como será explicado a seguir.

Os efeitos de variações no preço do ativo subjacente ou no preço de exercício da opção foram estudados no capítulo anterior: a relação destas duas variáveis determina o *moneyness* da opção, ou seja, se ela possui valor monetário (valor intrínseco) positivo e qual o seu valor. Também é possível determinar o valor temporal da opção através dessa relação. Resumindo, à medida que aumenta o preço do ativo subjacente, mais valiosa se torna uma opção de compra, ao passo que quanto maior for o preço de exercício, menor o prêmio da mesma opção. No caso de uma opção de venda, a relação é inversa: quanto maior for o preço do ativo objeto, menor o prêmio a ser pago pela *put*, ao passo que seu prêmio aumenta à medida que o preço de exercício aumenta.

O tempo até o vencimento ou prazo para exercício influi positivamente no prêmio da opção independentemente do tipo. Essa constatação deriva do fato de uma opção com maior prazo oferece mais condições para exercício do que outra com menor prazo. Quanto mais distante for a data de exercício, maior o direito concedido e, consequentemente, maior o prêmio a ser pago.

A influência que a taxa de juros livre de risco tem sobre o prêmio das opções é muito discutida no cenário internacional de finanças. Ativos financeiros, como ações, apresentam elevada sensibilidade a variações na taxa de juros; aumentos na taxa de juros podem reduzir o preço do ativo, o que reduziria o preço de uma opção de compra ou aumentaria o de uma opção de venda. A hipótese geralmente aceita, diz que taxas de juros mais altas acarretam em preços mais elevados para *calls* e preços mais baixos para *puts*.

A volatilidade do preço do ativo subjacente representa a medida de incerteza relacionada ao preço de mercado do mesmo ativo numa determinada data futura, ou seja, corresponde às oscilações que podem ocorrer no preço do ativo-objeto no decorrer do tempo. Expectativas de amplos movimentos no preço do ativo significam maiores probabilidades de exercício, consequentemente, maiores prêmio. Volatilidade elevada não restringe oscilações apenas num sentido: quanto maior a volatilidade, maior o preço da opção, seja ela do tipo de compra ou de venda. Nas palavras de HULL (2009), a volatilidade "é a medida da incerteza acerca dos movimentos de preços futuros da ação", mesma definição adotada por SILVA (2008).

HULL (2009) acrescenta outra variável relevante no que diz respeito à determinação do preço de opções: se a ação subjacente é pagadora de dividendos ou não. Como os dividendos reduzem o preço da ação na data ex-dividendos, o fato da ação distribuir dividendos afeta positivamente o preço das *puts* e negativamente o das *calls*, seguindo a relação entre o preço a vista e o prêmio da opção.

A tabela a seguir resume os efeitos que cada variável isoladamente (apenas a variável em destaque apresenta oscilação, enquanto as outras permanecem constantes) tem sobre o prêmio das opções sobre ações:

Quadro 3: Sumário do efeito sobre o preço da opção sobre ação em função de aumento em uma variável enquanto as outras permanecem constantes (fonte: HULL, 2009, p. 228)

Variável	***Call* européia**	***Put* européia**	***Call* americana**	***Put* americana**
Preço a vista da ação	+	-	+	-
Preço de exercício	-	+	-	+
Tempo até a expiração	?	?	+	+
Volatilidade	+	+	+	+
Taxa de juros livre de risco	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

Nota: + indica que aumento na variável causa elevação do preço da opção; - indica que aumento na variável causa queda no preço da opção; ? Indica que a relação é incerta.

2.2.2 A importância da volatilidade

Ao contrário dos outros fatores, que possuem valor numérico exato, a volatilidade, de acordo com SILVA (2008) “só pode ser conhecida a partir da certeza gerada de uma estimativa de volatilidade histórica.”, ou seja, não é possível saber o valor preciso da volatilidade do preço de uma ação num determinado momento da mesma forma que as outras variáveis.

Todos os modelos de avaliação de prêmios de opções levam em consideração a possibilidade do preço do ativo subjacente oscilar; porém, essas oscilações não apresentam um padrão, fato que dificulta bastante o apreçamento de opções. Logo, mensurar a volatilidade do preço do ativo-objeto com precisão é um dos pontos cruciais na avaliação do preço de um contrato de opção.

Existem diversos métodos para estimar a volatilidade do preço do ativo e, periodicamente, novas alternativas são propostas para este fim. É sabido que volatilidade não é constante ao longo do tempo, apresentando autocorrelação e heteroscedasticidade, o que sugere cautela ao escolher o método utilizado para medi-la e, assim, não causar distorções nos preços da opção.

Os métodos mais comuns para obter a volatilidade são a volatilidade histórica e a volatilidade implícita, segundo SILVA NETO (1996).

"A volatilidade passada é medida normalmente pelo desvio padrão dos movimentos no preço do ativo subjacente, expressa em percentual, e calculada para pequenos e bem recentes períodos, quase sempre diários, semanais ou mensais." (SILVA, 2008, P. 99). Através da volatilidade histórica é possível estimar a volatilidade futura, a partir de uma série histórica.

Segundo HULL (2009, p. 296), a volatilidade histórica pode ser calculada a partir da seguinte fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$$

ou:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

onde:

$$u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Por sua vez, a volatilidade implícita é interpretada como a estimativa de mercado para a volatilidade do preço do ativo-objeto. Na prática, sua estimação é feita através de própria fórmula de Black-Scholes, assumindo o prêmio da opção como o preço de mercado; após verificar as outras variáveis do modelo, preço a vista, preço de exercício, taxa de juros e tempo de vida do contrato, executa-se a fórmula a fim de determinar o nível de volatilidade implícita que aquele determinado preço de mercado da opção detém. Em outras palavras a volatilidade implícita “é o desvio padrão que torna o preço da opção, calculado pelo modelo de Black-Scholes, igual ao prêmio da opção negociada pelo mercado.” (SILVA, 2008, p. 104)

Ao utilizar B&S para calcular a volatilidade implícita de uma série de opções, verifica-se que a mesma não é constante.

3 O MODELO DE BLACK & SCHOLES

Em 1973, Fischer Black, Myron Scholes publicaram o artigo "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" no *Journal of Political Economy*, que representou importante avanço no que diz respeito a apreçamento de opções. Neste artigo foi desenvolvido o que hoje é conhecido como o Modelo Black-Scholes, método de maior influência e aceitação no âmbito de finanças mundiais, cujo objetivo se encontra em "apreçar opções de compra e de venda européias sobre ações que não pagam dividendos" (HULL, 2009, p. 289)

3.1 Premissas básicas

O modelo de Black-Scholes se propõe a determinar o preço de uma opção de compra ou de venda em função do preço do ativo e das outras variáveis abordadas no capítulo anterior. Para isso, são levantadas as seguintes hipóteses:

- As opções abordadas são do tipo europeu, ou seja, não podem ser exercidas antes do vencimento;
- As opções têm ações que não distribuem dividendos como ativo subjacente;
- Não há custos de transação na compra ou na venda do ativo ou da opção;
- A taxa de juros livre de risco é conhecida e constante ao longo do tempo de vida da opção;

- O preço do ativo-objeto apresenta distribuição probabilística lognormal (Figura 3.1).

O modelo de B&S parte do princípio que os preços das ações apresentam um comportamento estocástico[3] contínuo na forma de um Movimento Browniano Geométrico (MBG), através do qual é possível assumir que a distribuição probabilística dos mesmos é do tipo lognormal e, consequentemente, as variações percentuais nos preços em um curto período de tempo possuem distribuição normal (Figura 3.2).

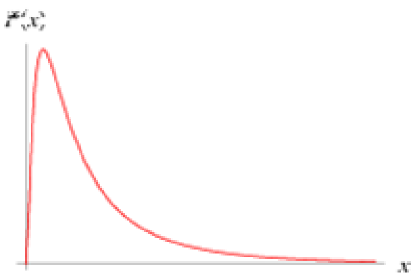

Figura 3.1 – Exemplo de uma distribuição lognormal (fonte: http://mathworld.wolfram.com/LogNormalDistribution.html)

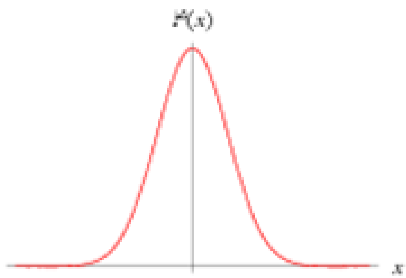

Figura 3.2 – Exemplo de uma distribuição normal (fonte: http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html)

[3] Segundo GUJARATI (2006, p. 638) um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias ordenadas no tempo.

Uma representação matemática para a dinâmica do retorno das ações é:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (3.1)$$

onde:

dS = taxa de retorno do ativo

μ = expectativa da taxa de retorno

dt = intervalo de tempo

σ = desvio padrão da taxa de retorno

dz = variável aleatória com distribuição normal

3.2 O Modelo de Black-Scholes

A análise de Black, Scholes e Merton, consiste na composição de uma carteira de ativos sem risco, composto por uma posição em ações e uma posição em opções. O motivo para a carteira de ativos apresentar risco igual a zero, visto que não existem oportunidades de arbitragem sem risco, é que ambos, preço da ação e preço da opção, são afetados pela volatilidade do preço da ação. Supondo que a carteira de ativos apresente a proporção adequada entre ações e opções que o constituem, os ganhos obtidos na posição em ações seriam compensados pela perda na posição em opções; o mesmo aconteceria no caso de perda na posição acionária. O retorno da carteira de ativos sem risco é sempre conhecido para um curto período de tempo e equivale à taxa de juros livre de risco. Para que permaneça sem risco, a posição elaborada deve sofrer reajustes, dado que a proporção adequada entre ações e opções pode variar (*risk-neutral valuation*).

As fórmulas originais de Black-Scholes para precificação de opções de compra ou de venda européias para ações que não distribuem dividendos a partir de cinco variáveis, preço do ativo, preço de exercício, taxa de juros livre de risco volatilidade e prazo até o vencimento, são:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \tag{3.2}$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{3.3}$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S = preço da ação a vista

X = preço de exercício

r = taxa de juros livre de risco

T = tempo até a data de vencimento

σ = volatilidade do preço da ação

N(x) = função de distribuição normal cumulativa de x

Existem diversas interpretações para as fórmulas acima. Segundo SILVA (2008, p. 121), a equação que determina o preço de uma *call* sobre uma ação não-pagadora de dividendos é composta por duas partes, sendo que "uma dá uma 'pseudo-probabilidade', derivada da expectativa em receber o ativo subjacente (um *cash inflow*) em determinado momento, e a outra dá o valor do dinheiro no tempo, ajustado pela expectativa do pagamento no exercício (um *cash outflow*)."; o preço da opção seria a diferença entre a expectativa do benefício em adquirir a ação e o pagamento do preço de exercício trazido a valor presente.

Já TOMPKINS (1994) afirma que $N(d_1)$ é a probabilidade do preço à vista ficar acima do preço de exercício na data de vencimento e $N(d_2)$, a probabilidade do preço a vista, na data de vencimento, desvalorizar abaixo do seu patamar atual.

Não há distinção entre a preferência do investidor em relação ao risco; qualquer investidor precificará opções de maneira comum, visto que a rentabilidade esperada da opção não é variável considerada pelo modelo. Esse conceito é chamado de *risk-neutral valuation*; segundo HULL (2009), "qualquer título cujo preço dependa do preço de outros títulos pode ser apreçado supondo-se que os investidores são indiferentes ao risco". De fato, os investidores não são indiferentes ao risco; essa suposição é tida verdadeira apenas no apreçamento de derivativos, opções no caso, cujo preço esteja atrelado ao preço de outro ativo. Pelo mesmo raciocínio, é possível notar que o modelo Black-Scholes não necessita de um histórico de valores negociados para precificar opções, a exceção da volatilidade do preço do ativo-objeto.

3.3 Considerações sobre o Modelo Black-Scholes

O modelo de precificação de contratos de opções publicado por Fischer Black, Myron Scholes em 1973 causou uma revolução na área de finanças, como mencionado no início deste capítulo. Por sua causa, inúmeros estudos sobre determinação do preço de opções foram desenvolvidos a partir daquele ano. Embora sua aceitação, faz-se necessário alguns questionamentos quanto às premissas por eles sugeridas.

Em primeiro lugar, o modelo foi desenvolvido para precificar opções do tipo europeu sobre ações que não distribuem dividendos ao longo da vida da opção. Na maioria dos casos, as ações negociadas em bolsa pagam dividendos aos seus acionistas. As equações de Black-Scholes sofreram alguns ajustes, o que possibilitava apreçar opções sobre ações pagadoras de dividendos. O modelo foi estendido para precificar corretamente outros tipos de opções (sobre contratos futuros, sobre índices de taxas de juros e sobre cotações de moedas). O próprio Fischer Black verifica que os preços teóricos fornecidos pelo seu modelo são consideravelmente diferentes daqueles observados no mercado; opções ITM (alta probabilidade de exercício) seriam superavaliadas, enquanto as OTM (pequena probabilidade de exercício), subavaliadas.

Outra forte crítica é com relação à hipótese de que os preços dos ativos subjacentes seguissem um Movimento Browniano Geométrico, isto é, um movimento aleatório. Esta suposição é desprovida de fundamento, pois os preços flutuam segundo ações humanas, as quais são parcialmente aleatórias e parcialmente determinísticas. O Movimento Browniano, publicado por Robert Brown em 1827 para explicar o comportamento de partículas sólidas suspensa num fluido, é quase totalmente aleatório e, visualmente, muito semelhante às oscilações dos preços no mercado de ações. Entretanto, oscilações nos preços de um determinado ativo são consequência de ações humanas, as quais são parcialmente aleatórias e parcialmente determinísticas. Por exemplo, quando o preço de uma ação está abaixo da média, os investidores tendem a considerá-lo barato e compram.

Por fim, a volatilidade dos preços, na prática, não é constante. HULL (2009) aponta a “chegada aleatória de novas informações acerca dos retornos futuros da ação” como uma das possíveis causas da volatilidade do preço e cita os trabalhos de Eugene Fama e Kenneth French, que sustentam a hipótese de que a volatilidade é em boa parte gerada pela negociação, testando empiricamente se a volatilidade dos preços é maior quando o pregão está aberto.

A volatilidade histórica é estimada com base nos preços passados, mas o seu valor futuro, de difícil determinação, pode variar. O preço futuro da ação apresenta incertezas quanto ao seu valor, as quais estão “sistematicamente implícitas tanto nas flutuações futuras do preço do ativo-objeto quanto nos prêmios de suas opções negociadas pelo mercado.” (SILVA, 2008, p. 124).

A volatilidade implícita é aquela da qual resulta o preço de mercado de uma opção e sugere que as mesmas devem ser usadas para monitorar a opinião do mercado com relação à volatilidade das ações. Tomar a volatilidade implícita do ativo-objeto para calcular o prêmio da opção referente, prática comum entre *traders* segundo HULL (2009).

Ao final deste capítulo, duas questões com relação ao modelo de Black & Scholes ficam evidentes. A primeira delas remete à veracidade com a qual o modelo reproduz a realidade: as premissas levantadas por ele, na prática, não se confirmam; tomar por constante um fator tão sensível, como a volatilidade, pode gerar resultados duvidosos. A segunda é com relação à aplicação de B&S, que apresenta dificuldades tanto teóricas como empíricas na tentativa de apreçar opções mais complexas.

4 O MÉTODO DE MONTE-CARLO

Atualmente, investigações sobre avaliação do preço de opções mais complexas estão muito presentes em pesquisas em desenvolvimento na temática financeira. As soluções proposta por Black-Scholes foram baseadas em opções européias sobre ações não-pagadoras de dividendos; as simulações de Monte-Carlo, nome cunhado por Nicholas Metropolis referente ao interesse de seu colega, Stanislaw Ulam, por pôquer, surgem como alternativa bem sucedida para atender essa demanda por novos procedimentos numéricos na avaliação de prêmio de opções mais complexas.

O método surge durante a Segunda Guerra Mundial sob autoria de John Von Neumann, cientista do Projeto Manhattan, como solução para problemas probabilísticos relacionados à difusão aleatória de nêutrons em processo de fissão nuclear (bomba atômica). Em 1977, BOYLE introduziu as simulações de Monte-Carlo na área de precificação de opções com a publicação de seu artigo "*Options: A Monte-Carlo Approach*" no *Journal of Financial Economics*. A aplicação desse tipo de simulações na avaliação de opções se restringiu à precificação de opções do estilo europeu, por causa dessas simulações serem inerentemente do tipo *forward*, e não comportariam um modelo de programação dinâmica, *backward*. Com a evolução do cálculo computacional, as SMC são mais aplicáveis na avaliação de prêmios de opções de diferentes complexidades e demais temas que envolvam a tomada de decisão sob incerteza. As simulações abordadas pelo método são feitas por um computador, que escolhe ao acaso o valor de uma das variáveis e roda uma vasta quantidade de simulações, a fim de obter o caminho que o valor do ativo-objeto percorreria.

Atualmente, as simulações de Monte-Carlo são uma poderosa ferramenta para trabalhar com variáveis confrontadas com incerteza. Áreas como a de análise de risco, análise de sensibilidade, quantificação de risco e previsão de eventos (*forecasting*) são alguns exemplos onde SMC são frequentemente aplicadas.

4.1 Conceitos Básicos

METROPOLIS e ULAM (1949) definem o método em questão como uma abordagem estatística para o estudo de equações diferencias que ocorrem em diversos ramos da ciência natural. HAMMERSLEY e HANDSCOMB (1964) definem o método de Monte-Carlo inicialmente como o ramo da matemática experimental preocupada com experimentos com números aleatórios. MUN (2006) afirma que as simulações de Monte-Carlo, são, em sua mais simples forma, um gerador de números aleatórios, útil para previsão, estimativa e análise de risco. Por sua vez, BENNINGA (2008) classifica SMC como uma técnica de experimentação para determinação numérica de uma função ou processo.

Resumidamente, o método de Monte-Carlo consiste em gerar *n* cenários futuros aleatórios e analisar a distribuição probabilística de cada um deles. Entende-se por “cenários aleatórios” o conjunto das variáveis relacionadas, cujos valores foram determinados através de um processo aleatório.

Por exemplo, na determinação do prêmio de uma opção, as cinco variáveis envolvidas na equação de precificação - preço do ativo-objeto, preço de exercício, prazo até o vencimento, taxa de juros livre de risco e volatilidade - teriam seus valores aleatoriamente determinados; então, a equação (3.2) ou (3.3), dependendo do tipo da opção, seria resolvida utilizando-se os valores simulados. Os resultados obtidos teriam a sua distribuição probabilística analisada, a fim de prever o preço da opção.

No capítulo anterior, foi visto que o modelo de Black-Scholes apresenta dificuldades ao lidar com opções de maior complexidade. Pode-se citar como exemplos de opções mais complexas opções asiáticas e opções barreira. O retorno que se obtém com ambas as opções, diferentemente das opções européias ou americanas, não dependem do preço final do ativo subjacente: o retorno de uma opção asiática[4], segundo HULL (2009), depende “do preço médio do ativo durante no mínimo parte da vida da opção”, enquanto o retorno de uma opção barreira, também de acordo com HULL (2009), está atrelado ao fato de o preço do ativo atingir determinado patamar dentro de um período de tempo. Ambos os dois tipos de opção dependem do caminho apresentado pelo preço do ativo-objeto (*path-dependent options*) e, geralmente, esse tipo de opção não permite soluções analíticas. A SMC fornece a ferramenta útil para precificar opções como as descritas assim (BENNINGA, 2008).

As simulações de Monte-Carlo, aparentemente, são bastante simples de serem aplicadas; porém, quanto mais sofisticado for o modelo, mais complexas são as simulações e, da mesma forma, o estudo da distribuição da probabilidade dos cenários. O operacional das SMC requer bons conhecimentos matemáticos e estatísticos – conceitos como eventos aleatórios, números aleatórios, função distribuição acumulada são essenciais – além de um conhecimento mínimo em programação de cálculo computacional.

De modo geral, o processo de simulação pode ser resumido pela figura abaixo:

[4] HULL (2009) afirma existirem dois tipos de opções asiáticas: um cujo *payoff* da opção é $máx(0, S_{médio} - X$, para uma *call*, ou $máx(0, X - S_{médio})$, para *put*, onde $S_{médio}$é o valor médio do preço do ativo subjacente calculado para um período predeterminado, e outro cujo preço de exercício é o preço médio do ativo para um período predeterminado (S_T). O retorno da opção será $máx(0, S_T - S_{médio})$, para uma opção de compra, e $máx(0, S_{médio} - S_T)$, para uma opção de venda.

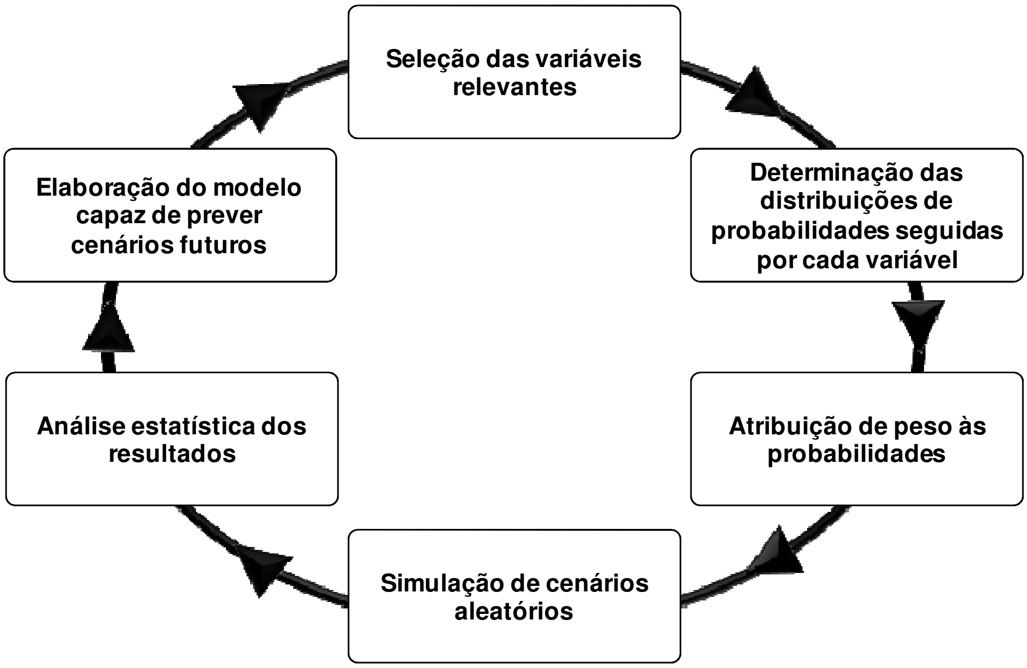

Figura 4.1 – Generalização do Método de Monte-Carlo (fonte: Elaborada pelo autor)

4.2 Precificação de uma *call* européia via Monte-Carlo

Ao implementar a teoria do método de Monte-Carlo no processo de precificação de opções, pode-se assumir que todos os fatores influentes no preço de opção têm seus valores alterados com o decorrer do tempo, aproximando o modelo da realidade. Para isso, supondo *full simulation*, o preço do ativo subjacente, o preço de exercício, a taxa de juros livre de risco, o prazo até o vencimento e a volatilidade seriam tratados como processos estocásticos com distribuições de probabilidade particulares, sendo necessário analisar a sensibilidade de cada um segundo a correlação apresentada com o prêmio.

Em outras palavras, cada variável seria tomada como um processo de Markov: um processo estocástico, no qual o valor presente da variável é suficiente para determinar seu valor futuro. O valor final da mesma independe dos valores assumidos anteriormente.

O processo de Wiener é um caso especial do processo de Markov, devendo apresentar média zero e variância igual a um ($N{\sim}(0{,}1)$). Supondo que uma variável aleatória y seja um processo de Wiener, então, uma variação Δy durante um pequeno intervalo de tempo, Δt, é dado por:

$$\Delta y = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

ou:

$$dy = \varepsilon\sqrt{dt}$$

onde ε é uma variável aleatoriamente selecionada com distribuição normal, com média zero e variância igual a um ($N{\sim}(0{,}1)$); consequentemente, Δy também segue uma distribuição normal ($N{\sim}(0,\sqrt{\Delta t})$). Logo, a variável x pode ser definida em termos de dy pela equação:

$$dx = adt + bdz$$

onde α e b são constantes. Já o termo diferencial dz é uma variável aleatória sorteada de uma distribuição $N{\sim}(0,\sqrt{dt})$.

Retomando a premissa do modelo de Black-Scholes de que o preço do ativo-objeto (S) obedece a um Movimento Browniano Geométrico, tem-se:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$$

onde μ é a taxa de retorno esperada e σ, a volatilidade, ambos constantes no modelo B&S.

A determinação do prêmio de opções através de SMC se resume em simular os valores assumidos pelas variáveis do modelo de B&S, gerando números aleatórios e distribuição de probabilidades para cada uma delas, determinar o retorno do ativo e, finalmente, precificar a opção através das médias das simulações.

Considerando a hipótese de neutralidade ao risco (*risk-neutral valuation*), a taxa de retorno μ da equação acima pode ser substituída pela taxa de juros livre de risco:

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

Tratando-se de uma *call* do tipo europeu que obedeça às premissas do modelo de Black-Scholes, sua precificação pode ser determinada com base no valor esperado da sua remuneração final descontada a taxa livre de risco. Gerar-se-iam números aleatórios (z_j) para o preço do ativo, segundo a equação:

$$S_{T,j} = S_0 e^{\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z_j\right]}$$

Os retornos na data de vencimento para cada preço S simulado seriam calculados com base na função:

$$f_{T,j} = máx(S_{T,j} - X, 0)$$

Em seguida, cada retorno obtido seria descontado com base na taxa de juros livre de risco e, por fim, seria calculada a média aritmética destes:

$$C = e^{-rT} \frac{\sum_{j=1}^{M} f_{T,j}}{M}$$

Supondo um ativo, cujo preço no mercado à vista (S) seja de $ 100,00, uma *call* do tipo europeu com preço de exercício (X) igual a $ 130,00, com vencimento projetado dois anos (T) para frente (assume-se 5% a.a. para a taxa de juros livre de risco e 30% a.a. para a volatilidade) seria precificada a $ 10,77 via Black-Scholes. Abaixo, são apresentados os cálculos que originam esse prêmio:

$$c = 100 * N(-0{,}170564207) - 130 * e^{-0{,}05*2} * N(-0{,}594828276) = 10{,}77$$

onde:

$$d_1 = \frac{(\ln\left(\frac{100}{130}\right) + \left(0{,}05 + \frac{0{,}3^2}{2}\right)2)}{0{,}3\sqrt{2}} = -0{,}170564207$$

e

$$d_2 = \frac{(\ln\left(\frac{100}{130}\right) + \left(0{,}05 + \frac{0{,}3^2}{2}\right)2)}{0{,}3\sqrt{2}} - 0{,}3\sqrt{2} = -0{,}594828276$$

Visto que o preço do ativo acrescido da valorização resultante da taxa de juros livre de risco será igual a $ 110,25:

$$100(1 + 0{,}05)^2 = 110{,}25$$

$$110{,}25 - 100 = 10{,}25$$

Via Monte-Carlo, como dito anteriormente, deve-se simular valores aleatórios (z_j) para o preço do ativo (S), calcular o retorno obtido para cada preço na data de vencimento e calcular a média dos mesmos descontados a taxa de juros livre de risco.

A amostragem elaborada neste trabalho envolveu a geração de 7000 números aleatórios para o preço a vista do ativo-objeto através do programa Microsoft Office Excel 2007, e, para esta amostra, foram realizadas 160 simulações no total. Abaixo, é descrita a equação que dá origem à amostra de preços (S) em função do número aleatório (z_j), seguido do quadro que relaciona o número de simulações rodadas com o prêmio da opção encontrado e o respectivo erro (diferença entre o preço via B&S e o preço via SMC):

$$S_{2,j} = 100 * e^{[\left(0{,}05 - \frac{0{,}3^2}{2}\right)2 + 0{,}3\sqrt{2}Z_j]}$$

$$f_{2,j} = máx(S_{2,j} - 130{,}0)$$

$$C = e^{-0,05*2}\frac{\sum_{j=1}^{7000} f_{2,j}}{7000}$$

Simulações	***Call*** **SMC**	**Erro**
10	10,52	-0,2418
20	10,71	-0,0591
40	11,15	0,3878
80	10,86	0,0922
160	11,17	0,4034

Tabela 1: Tabela de comparação de prêmio SMC vs. B&S: S = 100,00; X = 130,00; T = 2 anos; r = 5% a.a.; σ = 30% a.a (fonte: Elaborada pelo autor)

A fim de aumentar a precisão dos prêmios encontrados através de Monte-Carlo, foi aplicada a *antithetic variable technique* (técnica das variáveis antitéticas) com o intuito de reduzir a variância da amostra. O procedimento consiste em gerar outra realização de S_T, $\tilde{S}_T$, em função de z_j, porém com o sinal trocado:

$$\tilde{S}_{2,j} = 100 * e^{\left[\left(0,05-\frac{0,3^2}{2}\right)2-0,3\sqrt{2}Z_j\right]}$$

que gera outro retorno:

$$\tilde{f}_{2,j} = máx(\tilde{S}_{2,j} - 130,0)$$

A média dos retornos obtidos a partir de S_T e $\tilde{S}_T$ descontada a valor presente, é o prêmio da opção:

$$\theta_j = \frac{f_{2,j} + \tilde{f}_{2,j}}{2}$$

$$C = e^{-0,05*2}\frac{\sum_{j=1}^{7000} \theta_j}{7000}$$

Esta técnica se mostra bastante útil, porque quando um valor está superestimado, seu oposto tenderia estar subvalorizado, e vice-versa, reduzindo a variância da amostra, além de ser relativamente simples e possuir baixo custo de implementação. Abaixo segue o quadro com os resultados após a redução da variância:

Simulações	***Call*** SMC **(red. var.)**	Erro
10	10,80	0,0391
20	10,74	-0,0254
40	11,18	0,4113
80	11,01	0,2411
160	10,70	-0,0696

Tabela 2: Tabela de comparação de prêmio SMC vs. B&S após aplicação da *antithetic variable technique*: S = 100,00; X = 130,00; T = 2 anos; r = 5% a.a.; σ = 30% a.a. (fonte: Elaborada pelo autor)

4.3 Considerações sobre as simulações de Monte-Carlo

Comparando o prêmio de B&S aos resultantes das simulações de Monte-Carlo, surge a dúvida se é válido o esforço e o custo computacional para obter resultados tão similares, dados os erros observados.

Tratando-se de precificação, a SMC tem aplicação recomendada e mais eficaz quando se lida com processos estocásticos mais complexos que o MBG, quando a opção depende de diferentes processos estocásticos e/ou múltiplas variáveis de estado ou quando o preço futuro do ativo depende do caminho de preço do ativo. Dada a simplicidade (baixo nível de complexidade acerca das variáveis do modelo) em apreçar opções européias sobre ativos que não pagam dividendos, Monte-Carlo não é o método mais aconselhado. Segundo BENNINGA (2008), o método deve ser utilizado em problemas que não possuem formas para determinação de valor; caso contrário, deve-se aplicar a solução usual. Nas palavras de SILVA (2008):

> Pode-se dizer que embora os resultados obtidos em diversas pesquisas sobre os vieses apresentados pelo Modelo B&S, a relação esforço computacional e o

> resultado prático, não se justifica, visto que esse modelo, além de ser menos complexo, a diferença entre os prêmios é muito pequena e, segundo vários autores e inclusive como afirma HULL, J. (1996, p. 386): "Em geral, a pesquisa empírica realizada tem servido de apoio ao Black-Scholes. Seu modelo tem sobrevivido à prova do tempo. Apesar de se verificar diferenças entre os preços de mercado e os preços dados pelo Modelo de Black-Scholes, elas têm sido muito pequenas quando comparadas aos custos operacionais." (SILVA, 2008, p. 124)

Por outro lado, as simulações de Monte-Carlo ganham destaque à medida que aumenta a complexidade. No artigo de ARAGÃO e LA ROCQUE (1999), por exemplo, no qual é realizada uma SMC bivarada, gerando números aleatórios para o preço do ativo e para a volatilidade implícita. Os autores, após a verificação dos resultados, concluem como vantajosa a inclusão de Monte-Carlo e afirmam:

> Os resultados preliminares indicam que a inclusão da estocasticidade na volatilidade e de sua correlação com o preço do ativo-objeto podem explicar uma parte considerável das distorções observadas na prática com relação ao modelo de Black-Scholes. No entanto, para elaborar um modelo de *pricing* preciso, é necessário um maior preciosismo na definição dos processos estocásticos, consistência entre eles, atentando-se para a relação entre a volatilidade da ação e volatilidade implícita e critérios de estimação de parâmetros. (ARAGÃO; LA ROCQUE, 1999, p. 15)

As simulações de Monte-Carlo se apresentaram, até aqui, como uma poderosa e promissora ferramenta ao lidar com problemas envoltos em incerteza. BENNINGA (2008) considera SMC como "[...] na melhor das hipóteses, o 'segundo melhor' método para precificação de opções, em se tratando de simular diversos caminhos para o preço das ações. GLASSERMAN (2003) afirma que estudos sobre precificação de opções através do método de Monte-Carlo ainda são muito recentes e, como muitos deles estão em processo evolutivo, toda e qualquer comparação ou conclusão são potencialmente prematuros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos deste trabalho eram apresentar fatores que afetam o prêmio das opções, revisar o modelo de Black-Scholes, revisar o método de Monte-Carlo e aplicá-lo na precificação de uma opção de compra do tipo europeu sobre um ativo que não distribui dividendos.

Num primeiro momento deste trabalho, o modelo de precificação de opções proposto por Fisher Black e Myron Scholes em 1973 é revisado, discriminando-se suas principais características. Finalizada a leitura deste trabalho, fica evidente que o modelo Black-Scholes peca na descrição da realidade. Como abordado no segundo capítulo, a volatilidade, única variável não-passível de observação no mercado, não é constante no decorrer do tempo e a sua mensuração é um assunto discutível, e, dado que o mercado é coordenado por ações humanas, não é correto afirmar que os preços se comportam seguindo um Movimento Browniano Geométrico.

Outros fatores, além do preço passado, exercem influência no preço futuro. Por exemplo, a chegada de novas informações influencia as ações no mercado acionário: supondo que seja uma notícia positiva, os investidores se encontram inclinado a entrar no mercado, o que proporciona oscilações nos preços e, consequentemente, na volatilidade do ativo. O preço variou devido à ação determinística da mesma forma que a volatilidade. Este exemplo também colabora para a tese de que a própria negociação causa a volatilidade nos preços, como citado no final do segundo capítulo.

Em seguida, foram apresentadas as simulações de Monte-Carlo. O método, primeiramente, surge como solução a problemas probabilísticos relacionados à difusão aleatória de nêutrons em processo de fissão nuclear no Projeto Manhattan, em 1945; foi publicado pela primeira vez por Nicholas Metropolis e Stanislaw Ulam no *Journal of the*

American Statistical Association, em 1949, num artigo que leva o nome do método no título. A SMC consiste em submeter uma variável independente a um processo de amostragem, para simular possíveis valores que uma(s) variável(is) dependente(s) pode(m) assumir e analisar as distribuições de probabilidade desses resultados, para determinar qual é o mais provável de ocorrer. É comumente aplicada em problemas que envolvam tomada de decisão sob incerteza.

O método se mostrou capaz de aproximar o prêmio de uma opção de compra do tipo européia sobre um ativo não-pagador de dividendos. Finalizada a leitura das referências, a técnica se mostra bastante promissora. Entretanto, SMC demanda um maior esforço de cálculo computacional e de programação, o que acarreta num acréscimo nos custos. Vale ressaltar também que os prêmios encontrados via Monte-Carlo são uma aproximação de preços, não necessariamente verificados no mercado de opções.

Apesar de o modelo Black-Scholes apresentar algumas deficiências em representar dados empíricos, ele permanece como referência global na determinação do prêmio de opções financeiras, auxiliando em trabalhos atuais e instigando estudos futuros. As simulações de Monte-Carlo representam um campo de pesquisa recente e bastante promissor. São um poderoso recurso para se trabalhar com processos mais complexos, como opções asiáticas ou opções de barreira.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, C. S. L.; LA ROCQUE, E. **Simulação de Monte Carlo (SMC) com volatilidade estocástica para a análise do risco de uma carteira de opções**. 1999. Disponível em: http://www.riskcontrol.com.br/arquivos/Artigos/SMC.pdf. Acesso em: 9 jul. 2010.

BENNINGA, S. **Financial modeling**. Cambridge: The MIT Press, 2008.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of political economy**, Vol. 81, 1973, p. 637-654.

BOYLE, P. Options: A Monte Carlo Approach. **Journal of financial economics**. Vol. 4. 1977. p. 323-338.

CHIANG, A.C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para economistas**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M. Option Pricing: A Simplified Approach. **Journal of financial economics**, no. 7, 1979, p.229-263.

DAMODARAN, A. **Avaliação de investimentos:** ferramentas e técnicas para a determinação do valor de qualquer ativo. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2010.

DAMODARAN, A. **Avaliação de investimentos:** ferramentas e técnicas para a determinação do valor de qualquer ativo. 1ª Ed. Rio de Janeiro: Qualitymark. 2002.

DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under uncertainty**. Princeton: Princeton University Press, 1994.

FORTUNA, E. **Mercado financeiro:** produtos e serviços. 16ª Ed. Rio de Janeiro: Qualitimark, 2005.

GLASSERMAN, P. **Monte Carlo methods in financial engineering**. New York: Springer-Verlag, 2003.

GUJARATI, D.N. **Econometria básica**. 4ª Ed.; Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C. **Monte Carlo methods**. New York: John Wiley & Sons, 1964.

HAUG, E. G. **The complete guide to option pricing formulas**. New York: Mc Graw Hill, 1998.

HULL, J. C. **Options, futures & others derivatives**. 5ª Ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2003.

HULL, J. **Fundamentos dos mercados futuros e de opções**. 6ª Ed. BM&F, 2009.

HULL, J.; WHITE, A. Using Hull-White interest-rate trees. **Journal of derivatives**, Vol. 3, 1996, p. 26-36.

JACKEL, P. **Monte Carlo methods in finance**. New York: John Wiley & Sons, 2002.

MCLEISH, D. L. **Monte Carlo simulation and finance**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo method. **Journal of the american statistical association**, Vol. 44, 1949, p. 335-341.

MUN, J., **Modeling risk:** applying Monte Carlo simulation, real options analysis, forecasting, and optimization techniques. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.

ROSS, S. A.; WESTERFIELD. R. W.; JAFFE, J. F. **Administração financeira:** corporate finance. 2a Ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SILVA NETO, L. A., **Opções:** Do tradicional ao exótico. 2ª Ed. São Paulo: Atlas. 1996.

SILVA, L. M. **Mercado de opções:** conceitos e estratégias. 3ª Ed. Rio de Janeiro: Halip, 2008.

TOMPKINS, R. G. **Options analysis**. Edição revisada. Illinois: Probus Publising, 1994