

MARCELO SCHRAMM

DIFUSÃO DE NÊUTRONS EM REATORES NUCLEARES: UMA ABORDAGEM
ANALÍTICA DE MULTI-GRUPOS EM GEOMETRIA RETANGULAR PELA TEORIA
ESPECTRAL

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann

Porto Alegre
2010



Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica

**DIFUSÃO DE NÊUTRONS EM REATORES NUCLEARES: UMA ABORDAGEM
ANALÍTICA DE MULTI-GRUPOS EM GEOMETRIA RETANGULAR PELA TEORIA
ESPECTRAL**

MARCELO SCHRAMM

**ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS REQUISITOS
PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Prof. Paulo Otto Beyer
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Flávio Tadeu van der Laan
UFRGS / DEMEC

Prof. Dr. Francis Henrique Ramos França
UFRGS / DEMEC

Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey
UFRGS / DEMEC

Porto Alegre
2010

AGRADECIMENTOS

Por este trabalho, em meu nome, agradeço

ao meu orientador, Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann, pelo incentivo, ideias, apoio intelectual e paciência;

aos meus amigos externos à UFRGS, que sempre me incentivaram e acreditaram na minha capacidade;

aos professores do antigo DeNuc/UFRGS, pela fé investida em mim e em meu trabalho por todo este tempo;

aos amigos especiais que forneceram todos os conselhos que segui nas horas difíceis (você sabem quem são);

e aos colegas de reuniões sobre assuntos nucleares.

SCHRAMM, M. **Difusão de Nêutrons em Reatores Nucleares: Uma Abordagem Analítica de Multi-grupos em Geometria Retangular Pela Teoria Espectral**. 2010. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvido um algoritmo para a otimização do cálculo de grandezas neutrônicas em reatores nucleares. A abordagem utilizada para determinar o fluxo escalar de nêutrons parte da análise das equações de difusão que descrevem o comportamento deste em um meio homogêneo físsil. O modelo utilizado para representar os processos nucleares relevantes é o modelo bidimensional de difusão de nêutrons da teoria multi-grupo de energia, que envolve equações acopladas. Em sua modelagem, essas consideram, além da difusão, espalhamento, captura e fissão dos nêutrons. Para implementar as demais formulações analíticas, manipulações algébricas são realizadas e simplificações são aplicadas nas equações e condições do problema, o que permite elaborar o algoritmo de forma analítica. A transformada integral chamada GITT é aplicada numa das dimensões espaciais e, com a sua aplicação, as equações transformadas possuem apenas uma dimensão. O sistema de equações transformadas é resolvido por diagonalização, uma vez que o operador da equação de difusão de nêutrons é auto-adjunto, ou seja, não tem autovalores degenerados. Após a solução ser encontrada, uma análise de convergência e uma estimativa de erro são realizados utilizando o teorema cardinal de interpolação e o teorema de Parseval. Além disso, é conduzido um estudo sobre a variação do fluxo de nêutrons com a variação dos valores dos parâmetros nucleares. Um caso-teste é analisado utilizando o algoritmo proposto.

PALAVRAS-CHAVE: Difusão de nêutrons, Transformada integral, Solução analítica, Reatores nucleares.

SCHRAMM, M. **Difusão de Nêutrons em Reatores Nucleares: Uma Abordagem Analítica de Multi-grupos em Geometria Retangular Pela Teoria Espectral**. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso de Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

ABSTRACT

This work presents an algorithm for optimizing the calculation of neutronics quantities in nuclear reactors. The approach used to determine the scalar flux of neutrons starts from an analysis of the diffusion equation that describes the flux behavior in a homogeneous fissile medium. The model used to represent the relevant nuclear processes is the two-dimensional model of multi-energy group neutron diffusion theory, which involves coupled equations. The model considers beyond diffusion also scattering, capture and fission by neutrons. In order to implement the involved analytical formulations, algebraic manipulations and simplifications are introduced in the equations and conditions of the problem, that allows to develop the algorithm analytically. The integral transform called GITT is applied in one of the spatial dimensions and with its application, the transformed equations have only one dimension. The transformed system of equations is solved by diagonalization, since the operator of the neutron diffusion equation is self-adjoint, i.e. has non-degenerate eigenvalues. After the solution is found, a convergence analysis and error estimation are performed using the cardinal interpolation theorem and Parseval's theorem. In addition, a study on the variation of neutron flux with the variation of the nuclear parameters is performed. A test case is analyzed using the algorithm.

KEYWORDS: Neutron diffusion, Integral transform, Analytical solution, Nuclear reactors.

SUMÁRIO

RESUMO	5
ABSTRACT	6
SUMÁRIO	7
1. INTRODUÇÃO	8
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
3. DIFUSÃO DE NÊUTRONS	9
4. APLICAÇÃO DA GITT	11
5. DIAGONALIZAÇÃO	13
6. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	15
7. ANÁLISE DE VARIAÇÃO DE PARÂMETROS NUCLEARES	16
8. RESULTADOS E ANÁLISES	17
8.1. RESULTADOS, COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO	17
8.2. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	19
8.3. ESTUDO SOBRE A VARIAÇÃO NA SOLUÇÃO DEVIDO A MUDANÇA DE PARÂMETROS NUCLEARES	19
9. CONCLUSÕES	21
10. BIBLIOGRAFIA	23

1. INTRODUÇÃO

A demanda de energia no Brasil cresce com o passar do tempo, e este crescimento provoca uma série de preocupações em relação à oferta de energia surge, uma vez que já há escassez de energia elétrica. Novas usinas geradoras de energia elétrica surgem no país a fim de suprir esta necessidade inerente ao processo de desenvolvimento em que se encontra o Brasil, e as usinas nucleares de energia são uma opção cuja relevância vem crescendo ao longo do tempo e, cada vez mais, incentiva-se o uso de energia elétrica gerada a partir de fissões nucleares nos reatores nucleares. O comportamento dos nêutrons nos reatores de fissão nuclear depende de diversos parâmetros, como a geometria do reator, parâmetros nucleares, tempo, entre diversos outros, e é no assunto de aumento do rendimento da produção de energia e melhor aproveitamento do combustível de fissão que se enfoca o presente trabalho. É função da engenharia desenvolver técnicas de otimização de processos e aumento de produção útil, porém mantendo a saúde e segurança dos envolvidos na produção. É devido à enorme demanda que o país enfrentará nos próximos anos e da capacidade de otimizar os processos de produção de energia na área nuclear que a proposta deste trabalho foi escolhida: para oferecer melhorias na produção de energia elétrica e incentivar o estudo na área de energia nuclear.

As usinas nucleares, atualmente, funcionam através da reação nuclear chamada fissão, que consiste na partição de um núcleo atômico de um átomo físsil através de um choque com um nêutron livre, liberando certa quantidade de energia em escala nuclear. A área do conhecimento que estuda especificamente as reações nucleares e sua produção energética é chamada teoria de transporte de nêutrons, cuja simplificação é utilizada nas mais diversas modelagens de reatores nucleares. Esta simplificação é a teoria multi-grupos de energia de difusão de nêutrons, que considera reações nucleares de fissão e espalhamento em seus cálculos. É a partir deste tipo de modelagem que este trabalho realizará o seu estudo, que envolve otimização e análise de parâmetros nucleares.

A abordagem à qual o trabalho será sujeito é analítica, a fim de obter a maior acuidade quanto aos cálculos numéricos e a maior versatilidade na análise dos resultados. Para tal procedimento, é utilizada uma técnica que combina uma transformada integral com a diagonalização do sistema de equações diferenciais resultante da transformação. Após a aplicação da transformada, a equação diferencial matricial resultante é diagonalizada a fim de simplificar os cálculos. Depois de encontrada a solução para esta equação diferencial matricial diagonalizada, esta solução deve ser revertida para as funções transformadas que, por sua vez, compõem parte da solução do caso. Este tipo de solução é útil para qualificação e validação ou substituição de códigos de teoria de reatores nucleares que estudam o comportamento dependente do tempo de sistemas multiplicativos ativados por fontes externas de nêutrons, ou seja, não há necessidade de um benchmark, uma vez que a solução é analítica. Além disso, é feito um teste de convergência do resultado, com estimativa de erro correlacionado à quantidade de termos a serem relevados na solução em série gerada pela aplicação da GITT. Outro assunto a ser abordado no trabalho é a variação do comportamento da solução com a variação em certos parâmetros nucleares, análise que é feita de forma muito mais rápida e precisa quando utilizado um método analítico para encontrar suas soluções. Uma vez que se tem uma solução analítica, torna-se fácil realizar esta análise, pois ela é independente dos valores dos parâmetros nucleares para uma faixa de valores dos mesmos. Com isso, espera-se encontrar uma solução independente de implementações normalmente utilizadas em problemas semelhantes para a mesma precisão, que é uma exigência das agências responsáveis pelo comissionamento, operação e manutenção de reatores nucleares. Vale

lembrar que a solução encontrada é uma ideia de um método inovador para encontrar o comportamento neutrônico em um reator nuclear. Este trabalho foi apresentado no congresso internacional chamado Métodos Integrals em Ciência e Engenharia (IMSE, *Integral Methods in Science and Engineering*), de 12 a 14 de Julho de 2010, na cidade de Brighton, na Inglaterra, além de futuramente ser publicado como capítulo do livro do referido congresso, segundo a referência (Schramm et al., 2010).

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ao analisar uma pesquisa sobre teoria de reatores nucleares e métodos de encontrar comportamento neutrônico em seu núcleo, diversos conceitos de reatores nucleares foram analisados, visando ao contexto atual com que os reatores nucleares se encontram e, mais especificamente, o contexto em que o Brasil se encontra em relação à geração de energia elétrica utilizando usinas nucleares. Neste momento são citados os trabalhos de (Kadak, 2005), (Kuegeler et al., 2006), (Sefidvash, 2004) sobre o conceito atual em que se encontram as pesquisas sobre reatores nucleares, além de obter informações sobre perspectivas futuras sobre a energia nuclear no Brasil em (Barroso et al., 2004).

Devido à complexidade da modelagem dos núcleos de reatores nucleares, atualmente empregam-se quase sempre abordagens numéricas para a determinação do fluxo de nêutrons, fator de multiplicação efetivo, potência produzida, entre outros valores importantes nos cálculos de reatores nucleares. Por outro lado, devido ao risco que as reações nucleares oferecem, optam por características conservadoras nos cálculos e superestima-se o problema, obtendo resultados aceitáveis em relação à segurança, porém limitadas em relação à engenharia envolvida. Citam-se os trabalhos de (Leppänen, 2005) e (Aboanber et al., 2008) como exemplo apenas, ressaltando que a grande maioria dos estudos na área nuclear utilizam abordagens numéricas. O grupo do GENUC UFRGS possui uma característica diferente, favorecendo o estudo na área de energia nuclear de forma analítica, como é mostrado em diversos trabalhos como (Bodmann et al., 2009) e (Vilhena et al., 2008).

Como uma forma de especificar a pesquisa no estudo da difusão de nêutrons, tema deste trabalho, verificou-se então, de forma geral, artigos, dissertações de mestrado e teses de doutorado como referência, para fins de entendimento de quais procedimentos estão sendo utilizados em problemas de difusão de nêutrons. As referências de estudo neste caso são (Schramm et al., 2010), (Lemos, 2005), (Gonçalves, 2003), (Hauser, 2002), (Oliveira, 2000), (Pazos, 1999), (Batistela, 1997), (Zabadal, 1994), (Camargo, 2007), (Rodrigues, 2007), (Schneider, 2006), (Gonçalves, 1999), (Lorenzi, 1996), (Pazos, 1995), (Lompa, 1993) e em especial (Heinen, 2009), (Ceolin, 2010) e (Petersen, 2009).

Concentrando-se na aplicação do método espectral, os materiais explicativos sobre a transformada integral utilizada foram verificados em (Cotta et al., 1997), e sua análise de convergência foi baseada no conteúdo de (Barut, 1967).

Finalizando, (Sekimoto, 2007) foi utilizado como material atualizado sobre a teoria de reatores.

3. DIFUSÃO DE NÊUTRONS

É considerada a equação de difusão de nêutrons em regime estacionário para coordenadas cartesianas com dois grupos de energia em um retângulo de material homogêneo, cujo(s) núcleo(s) atômico(s) é(são) físsil(eis) ($0 < x < M$, $0 < y < L$):

$$-D_g \left(\frac{\partial^2 \phi_g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_g(x, y)}{\partial y^2} \right) + \Sigma_{Rg} \phi_g(x, y) = \chi_g \frac{\nu}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^2 (\Sigma_{fg'} \phi_{g'}(x, y)) + \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^2 (\Sigma_{g'g} \phi_{g'}(x, y)). \quad (3.1)$$

Nesta equação, o primeiro termo é o termo de difusão, o segundo termo é o termo de remoção, o terceiro termo é referente à fissão nuclear e o quarto termo denota o espalhamento de nêutrons. Para a implementação do método, utiliza-se como exemplo um caso teste para que o acompanhamento seja mais palpável. No caso teste, o problema está sujeito a condições de contorno de isolamento em três laterais do retângulo e de distância extrapolada no contorno restante, e a dimensão z , perpendicular às outras duas dimensões, será desprezada, como se fosse um paralelepípedo retangular fino de material físsil. Estas condições são descritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_g(0, y) &= \phi_g(M, y) = 0, \\ \phi_g(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \phi_g}{\partial y}(x, L) &= -\frac{\phi_g(x, L)}{d_g}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que d_g é a distância extrapolada do grupo g de energia em cm , que seguem a relação proporcional com o coeficiente de difusão: $d_g = 2,1312.D_g$, segundo a teoria apresentada em (Sekimoto, 2007). Aqui g é o sub-índice que denota o grupo de energia média dos nêutrons (1 para rápidos, 2 para térmicos); $\phi_g(x, y)$ é o fluxo escalar de nêutrons do grupo g de energia em $cm^{-2}.s^{-1}$, aqui chamado apenas de fluxo de nêutrons; D_g é o coeficiente de difusão para o grupo g de energia em cm ; Σ_{Rg} é a seção de choque macroscópica de remoção do grupo g de energia em cm^{-1} ; Σ_{ag} é a seção de choque macroscópica de absorção do grupo g de energia em cm^{-1} ; $\Sigma_{g'g}$ é a seção de choque macroscópica de espalhamento do grupo g' de energia para o grupo g de energia em cm^{-1} ; Σ_{fg} é a seção de choque macroscópica de fissão do grupo g de energia em cm^{-1} ; k_{eff} é o fator de multiplicação efetivo; ν é o número médio de nêutrons liberados por fissão; e χ_g é o espectro integrado de fissão do grupo g de energia (toma valores 1 se $g = 1$, 0 se $g = 2$). Para fins de cálculos, $\Sigma_{Rg} = \Sigma_{ag} + \Sigma_{gg'}$.

É importante ressaltar que o fator de multiplicação efetivo possui extrema relevância no funcionamento e segurança de um reator nuclear. Ele é uma razão entre a quantidade de nêutrons gerados em determinada fissão e a quantidade de nêutrons gerada na fissão anterior, ou seja, o ideal é que tenha o valor unitário para que o processo esteja equilibrado e auto-sustentável. O equilíbrio da população de nêutrons em reatores nucleares é do tipo instável: se mais nêutrons livres forem absorvidos que gerados, então o reator tende a “se apagar”; se mais nêutrons livres forem gerados que absorvidos, o reator tende a fugir de controle e

oferecer riscos de pequenas danificações até de vida em uma grande área. Devido à sua importância, a precisão mínima exigida pelas agências responsáveis para seu cálculo é de 5 algarismos significativos (erro menor que 10^{-4}). Apesar do cálculo do fator de multiplicação efetivo ser considerado por muitos o cálculo mais importante na teoria de reatores nucleares, este cálculo não será realizado neste trabalho devido ao tempo e extensão de trabalho necessário para este desenvolvimento. Por causa deste fato, este valor é considerado um parâmetro conhecido neste caso.

A equação (3.1) demonstra de uma forma geral o comportamento do fluxo de nêutrons, considerando ambos os grupos de energia. Se esta equação fosse reescrita relevando a importância de um grupo de energia de cada vez, percebe-se que não haveria termos de fissão nuclear na equação do grupo de nêutrons térmicos (pois os nêutrons gerados na fissão são liberados com altíssima energia, logo pertencem ao grupo de nêutrons rápidos) nem termos de espalhamento de nêutrons na equação do grupo de nêutrons rápidos (pois não se considera o *up-scattering* – aumento de energia do nêutron com uma colisão em um núcleo atômico). Com estas considerações, as equações de difusão de nêutrons tomam uma forma mais simplificada. Uma forma de simplificar ainda mais estas equações é rearranjar as constantes e atribuir outros nomes a elas. Com as simplificações citadas anteriormente, as equações acopladas de difusão de nêutrons rápidos e térmicos ficam da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1(x, y)}{\partial y^2} + \alpha \phi_1(x, y) + \gamma \phi_2(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2(x, y)}{\partial y^2} + \beta \phi_1(x, y) + \mu \phi_2(x, y) = 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

em que $\alpha = \frac{\nu \Sigma_{f1}}{k_{eff} D_1} - \frac{\Sigma_{R1}}{D_1}$, $\gamma = \frac{\nu \Sigma_{f2}}{k_{eff} D_1}$, $\beta = \frac{\Sigma_{12}}{D_2}$ e $\mu = -\frac{\Sigma_{R2}}{D_2}$.

Com as equações de difusão de nêutrons (3.3), é possível, de uma forma mais simples, encontrar uma solução analítica para o problema, uma vez que, com a aplicação da transformada integral (vista no próximo capítulo), o número de constantes cresce e é necessário organização para a execução do procedimento sistematicamente e para a redução do tempo computacional.

4. APLICAÇÃO DA GITT

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma transformada integral utilizada com sucesso atualmente para resolver problemas de difusão. Esta transformada necessita que as condições de contorno na dimensão transformada sejam homogêneas, além de, para a sua aplicação, também precisa que haja um termo laplaciano na(s) equação(ões) diferencial(is) que descreve(m) o problema. Como estas exigências são satisfeitas pelo problema (conforme mostrado nas equações (3.2) e (3.3)), a função fluxo de nêutrons em qualquer grupo pode ser transformada em uma expansão em série de autofunções ortonormais com a seguinte forma:

$$\phi_g(x, y) = \sum_{i=1}^{N_{max}} \frac{\psi_i(x) \varphi_{gi}(y)}{N_i^{1/2}}. \quad (4.1)$$

Na expansão em série original, a somatória tem limites 1 e ∞ , porém, para fins de encontrar valores numéricos, esta série é truncada em um determinado N_{\max} , suficiente para cumprir exigências de precisão que serão vistas no próximo capítulo. A dimensão transformada, neste caso, é a dimensão x , escolhida exatamente por satisfazer as condições de contorno necessárias para a aplicação da GITT, e as autofunções ortonormais relacionadas são os $\psi_i(x)$, cuja norma é N_i . Os $\varphi_{gi}(y)$ são as funções que contêm a informação dos parâmetros nucleares e também da geometria na outra dimensão do problema.

Os $\psi_i(x)$ são determinados por um problema auxiliar de Sturm-Liouville cujas condições de contorno são idênticas às do problema original na dimensão transformada. O problema auxiliar toma a forma

$$\psi_i''(x) + \lambda_i^2 \psi_i(x) = 0, \quad (4.2)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\psi_i(0) = \psi_i(M) = 0, \quad (4.3)$$

e a solução para este problema são as autofunções ortonormais

$$\psi_i(x) = \sin(\lambda_i x) \quad (4.4)$$

com os respectivos autovalores

$$\lambda_i = i\pi / M \quad (4.5)$$

para $i=1..N_{\max}$. Com as autofunções encontradas, é possível calcular a sua norma, cuja equação é

$$N_i = N_{ij} = \int_0^M \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (4.6)$$

apenas quando $j = i$ (quando esta igualdade não ocorre, a norma é nula). Substituindo (4.1) em (3.3) e agrupando os somatórios, obtêm-se as seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{N_{\max}} \left[\frac{\psi_i''(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}''(y)}{N_i^{1/2}} + \alpha \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + \gamma \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{N_{\max}} \left[\frac{\psi_i''(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} + \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}''(y)}{N_i^{1/2}} + \beta \frac{\psi_i(x) \varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + \mu \frac{\psi_i(x) \varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Como uma somatória de funções é idênticamente nula se, e somente se, todos os termos da somatória forem nulos, se analisa cada termo da somatória separadamente (cada i , ou um i não identificado). De acordo com a equação (4.2), o termo $\psi_i''(x)$ pode ser substituído por $-\lambda_i^2 \psi_i(x)$. Fazendo estas considerações e rearranjando as equações, obtêm-se:

$$\begin{cases} \frac{\psi_i(x)\varphi_{1i}''(y)}{N_i^{1/2}} + (\alpha - \lambda_i^2) \frac{\psi_i(x)\varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + \gamma \frac{\psi_i(x)\varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} = 0 \\ \frac{\psi_i(x)\varphi_{2i}''(y)}{N_i^{1/2}} + \beta \frac{\psi_i(x)\varphi_{1i}(y)}{N_i^{1/2}} + (\mu - \lambda_i^2) \frac{\psi_i(x)\varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Aplicando o operador ortogonal integral $\frac{1}{N_{ij}^{1/2}} \int_0^M \psi_j(x)(\cdot)dx$ nas duas equações, é possível eliminar a dependência de x das equações (tendo em mente que $\int_0^M \psi_i(x)\psi_j(x)dx = 0, i \neq j$ e $\int_0^M \psi_i(x)\psi_j(x)dx = N_i, i = j$). As equações resultantes deste processo são

$$\begin{cases} \varphi_{1i}''(y) + (\alpha - \lambda_i^2)\varphi_{1i}(y) + \gamma\varphi_{2i}(y) = 0 \\ \varphi_{2i}''(y) + \beta\varphi_{1i}(y) + (\mu - \lambda_i^2)\varphi_{2i}(y) = 0 \end{cases}, \forall i = 1..N_{\max}. \quad (4.9)$$

Estas são as chamadas equações transformadas da GITT.

Processo semelhante a este é realizado também nas demais condições de contorno, e o resultado deste processo são as condições de contorno transformadas

$$\begin{aligned} \varphi_{gi}(0) &= 0, \forall i = 1..N_{\max}, \\ \frac{d\varphi_{gi}}{dy}(L) &= -\frac{\varphi_{gi}(L)}{d_g}, \forall i = 1..N_{\max}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Com as equações e condições de contorno transformadas, parte-se para a próxima etapa de cálculo: a diagonalização, que é vista no próximo capítulo.

5. DIAGONALIZAÇÃO

As equações (4.9) valem para $i = 1..N_{\max}$, logo podem ser escritas como uma equação diferencial linear de segunda ordem matricial na forma

$$\frac{d^2}{dy^2} \begin{Bmatrix} \varphi_{11}(y) \\ \varphi_{12}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{1N_{\max}}(y) \\ \varphi_{21}(y) \\ \varphi_{22}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{2N_{\max}}(y) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha - \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda_2^2 & \cdots & 0 & 0 & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha - \lambda_{N_{\max}}^2 & 0 & 0 & \cdots & \gamma \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \mu - \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 & \mu - \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 & 0 & \cdots & \mu - \lambda_{N_{\max}}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{11}(y) \\ \varphi_{12}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{1N_{\max}}(y) \\ \varphi_{21}(y) \\ \varphi_{22}(y) \\ \vdots \\ \varphi_{2N_{\max}}(y) \end{Bmatrix} = \bar{0}, \quad (5.1)$$

em que $\bar{0} = \{0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T$. Este sistema de equações diferenciais escrito em forma matricial pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\bar{Y}''(y) + \bar{U}\bar{Y}(y) = \bar{0}, \quad (5.2)$$

em que

$$\bar{Y}(y) = \{\varphi_{11}(y) \ \varphi_{12}(y) \ \dots \ \varphi_{1N_{\max}}(y) \ \varphi_{21}(y) \ \varphi_{22}(y) \ \dots \ \varphi_{2N_{\max}}(y)\}^T \quad (5.3)$$

e

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda_2^2 & \dots & 0 & 0 & \gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha - \lambda_{N_{\max}}^2 & 0 & 0 & \dots & \gamma \\ \beta & 0 & \dots & 0 & \mu - \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \dots & 0 & 0 & \mu - \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & 0 & 0 & \dots & \mu - \lambda_{N_{\max}}^2 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Lembrando que os autovalores da matriz \bar{U} são distintos uma vez que o operador associado à equação de difusão de nêutrons é auto-adjunto, no próximo passo a matriz \bar{U} é diagonalizada, podendo então ser possível reescrever (5.2) da seguinte forma:

$$\bar{Y}''(y) + \bar{P}\bar{A}\bar{P}^{-1}\bar{Y}(y) = \bar{0}, \quad (5.5)$$

onde \bar{P} é a matriz dos autovetores de \bar{U} , \bar{P}^{-1} é sua inversa e \bar{A} é a matriz diagonal dos respectivos autovalores de \bar{U} . Definindo uma nova variável $\bar{R}(y) = \bar{P}^{-1}\bar{Y}(y)$ e multiplicando toda a equação por \bar{P}^{-1} , a equação (5.5) é reescrita como

$$\bar{R}''(y) + \bar{A}\bar{R}(y) = \bar{0}. \quad (5.6)$$

Lembrando que a matriz \bar{A} é diagonal, então a equação diferencial matricial (5.6) se reduz a uma série de equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem desacopladas com coeficientes constantes:

$$r_j''(y) + a_{jj}^2 r_j(y) = 0, \quad (5.7)$$

com $j = 1..2N_{\max}$ e a_{jj}^2 são os valores da diagonal de $\overline{\overline{A}}$, que por sua vez são os autovalores de $\overline{\overline{U}}$. A solução bem conhecida para esta equação é

$$r_j(y) = C_{1j} \cos(a_{jj}y) + C_{2j} \sin(a_{jj}y), \quad (5.8)$$

onde C_{1j} e C_{2j} são constantes a determinar pelas condições de contorno. Esta transformação $\overline{\overline{R}}(y) = \overline{\overline{P}}^{-1} \overline{\overline{Y}}(y)$ também vale para o vetor $\overline{\overline{Y}}(0)$, $\overline{\overline{Y}}(L)$ e $\overline{\overline{Y}}'(L)$, considerando também as condições de contorno. Com as condições de contorno transformadas, é possível calcular as constantes C_{1j} e C_{2j} . Assim que estas constantes forem determinadas para cada $j = 1..2N_{\max}$, reconstrói-se o vetor $\overline{\overline{R}}(y)$ e reverte-se a transformação utilizando a relação $\overline{\overline{Y}}(y) = \overline{\overline{P}} \overline{\overline{R}}(y)$. Feita esta reversão, o vetor $\overline{\overline{Y}}(y)$ está completamente determinado e, por conseguinte, as funções $\varphi_{gi}(y)$ que o compunham.

Estas funções auxiliares da GITT, quando encontradas, completam a transformação, e então os fluxos de nêutrons rápidos e térmicos estão encontrados de forma analítica. Esta solução é encontrada, neste caso teste, para um problema homogêneo, porém pode-se realizar procedimento semelhante para problemas heterogêneos seguindo os procedimentos de (Bodmann et al., 2009).

No próximo capítulo, será detalhada a análise de convergência para este caso-teste e uma estimativa de ordem de truncamento da série em função de um erro prescrito.

6. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Para mostrar a eficiência do algoritmo proposto e avaliar sua solução, na sequência é discutido um critério de convergência para uma precisão prescrita. Na verdade, a Teoria do Teorema Cardinal de Interpolação diz: "Uma função quadrática integrável $\Omega = \int_s \phi(x, y) dy \in L^2$, com $i = 1..I_{\max}$, cujo espectro é limitado por $(m\Sigma)$ tem uma solução exata para uma expansão finita". Mais especificamente, sabendo que os comportamentos dos fluxos de nêutrons rápidos e térmicos são determinados pelo valor da seção de choque total para cada grupo (Σ_{Tg}) , pode-se inferir que entre duas interações de nêutrons sucessivas, para cada livre caminho médio de nêutrons (dado como Σ_{Tg}^{-1} em cm), o fluxo de nêutrons é quase invariável. Ao analisar microscopicamente o problema, estima-se que a média de caminho percorrido por um nêutron logo após uma interação qualquer é igual ao livre caminho médio por definição, porém há uma probabilidade de interações ocorrerem antes (assim como depois) do nêutron ter percorrido o livre caminho médio. A ideia básica de definir o critério de convergência consiste na determinação de um divisor inteiro (m) do livre caminho médio de nêutrons tal que, abaixo deste valor, o valor do fluxo de nêutrons é quase homogêneo, garantindo que é muito pouco provável que interações que possam alterar o fluxo de nêutrons de forma significativa ocorram neste caminho. No caso da abordagem utilizada no presente caso, este teorema se encaixa perfeitamente se, depois de certa ordem de consideração da série (N_{\max}) , o erro se torna irrelevante, permitindo assim a aplicação do teorema cardinal de interpolação. A escolha de m é relacionada com o número máximo de termos (no caso N_{\max})

na série para a região de interesse, que depende da convergência da solução. Tendo estes conceitos em mente, é possível montar uma relação que compara m e N_{\max} :

$$\frac{N_{\max}}{m} = \text{int} \left\{ \frac{\sum_{T_g} \Delta r}{4\pi} \right\}, \quad (6.1)$$

em que $\sum_{T_g} = \sum_{a_g} + \sum_{f_g} + \sum_{g',g}$ e Δr denota a dimensão total no domínio transformado, ou seja, no presente caso, $\Delta r = M$.

Por outro lado, utiliza-se o teorema de Parseval para estimar o erro da solução, considerando a equação diferencial como um todo e cada termo um componente parcial na aplicação do teorema. No quadro deste teorema, é selecionado m em uma determinada maneira que a solução coincide com a solução exata em um intervalo de erro prescrito. O teorema de Parseval aplicado normalmente na engenharia, mais especificamente na engenharia elétrica na área de análise de sinais utilizando a transformada discreta de Fourier, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^I |f[n]|^2 = \sum_{k=1}^I |F[k]|^2, \quad (6.2)$$

com $f[n]$ e $F[k]$ como tendo ambos dimensão I , sabendo que $F[k]$ é a transformada de Fourier de $f[n]$. E, aplicado neste problema, utilizando as funções original e transformada da GITT, utilizando os limites conhecidos para a mesma e utilizando como parâmetro a equação diferencial para o grupo de nêutrons rápidos como uma estimativa de encontrar o erro, encontra-se

$$\sum_{i=1}^{N_{\max}} \left| \frac{\psi_i(x)\varphi_i''(y)}{N_i^{1/2}} + (\alpha - \lambda_i^2) \frac{\psi_i(x)\varphi_i(y)}{N_i^{1/2}} + \gamma \frac{\psi_i(x)\varphi_{2i}(y)}{N_i^{1/2}} \right|^2 - \sum_{i=1}^{N_{\max}} \left| \varphi_i''(y) + (\alpha - \lambda_i^2)\varphi_i(y) + \gamma\varphi_{2i}(y) \right|^2 = E, \quad (6.3)$$

em que E denota o erro absoluto cometido ao truncar a série. Para encontrar o erro relativo, divide-se E pela primeira somatória da equação (6.3), que denota a solução quase exata aplicada na equação de difusão de nêutrons rápidos.

Realizando um estudo utilizando as equações (6.3) e (6.1) é possível estimar um erro para uma determinada ordem de truncamento. No capítulo 8 é ilustrado este procedimento, realizando resultados por esta metodologia, com um erro menor que 1% onde apenas dois termos na série são suficientes.

7. ANÁLISE DE VARIAÇÃO DE PARÂMETROS NUCLEARES

Este capítulo é sobre realizar uma análise de variação da solução em função de variações de parâmetros nucleares, que pode ser realizada de forma explícita, uma vez que se tem um procedimento analítico de cálculo. O procedimento citado difere-se dos procedimentos numéricos devido à sua independência dos valores numéricos dos parâmetros nucleares no resultado, facilitando assim alguma incerteza quanto ao respectivo valor, caso necessário. Em outras palavras, com uma solução analítica apenas calcula-se novamente o

fluxo de nêutrons com os novos parâmetros nucleares, enquanto uma abordagem numérica do problema necessitaria que o problema fosse reiniciado e calculado novamente por inteiro.

Esta análise tem sua relevância no estudo de otimização de reatores nucleares. Com uma estimativa precisa dos efeitos dos parâmetros nucleares utilizados na modelagem de difusão de nêutrons é possível determinar com qual material é possível obter a maior fissão nuclear, moderação, revestimento, etc. Com esta análise é possível verificar a relevância de certos parâmetros físicos no resultado para fins de melhor interpretação do problema e, conseqüentemente, otimização dos resultados. O capítulo 8 demonstra situações mais específicas e resultados concretos para esta análise.

8. RESULTADOS E ANÁLISES

Para completar a análise, resolve-se a equação de difusão de nêutrons para dois grupos em um retângulo homogêneo com $L = M = 200\text{cm}$, com os parâmetros nucleares utilizados na Tabela 8.1, idênticos aos de (Aboanber et al., 2008).

Tabela 8.1 – Parâmetros nucleares para o caso teste

Parâmetros nucleares	Grupo de energia (g)	
	1	2
D_g [cm]	1,35	1,08
Σ_{ag} [cm^{-1}]	0,001382	0,00569
Σ_{fg} [cm^{-1}]	0,000242	0,00428
$\Sigma_{g'g}$ [cm^{-1}]	0	0,0023
ν	2,41	
k_{eff}	1,000008	

A partir destes dados são realizados os cálculos de fluxos de nêutrons, análise de convergência e análise de influência dos parâmetros no resultado.

8.1. RESULTADOS, COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO

O resultado obtido pela abordagem analítica utilizada neste trabalho é comparado com o resultado encontrado via método numérico, presentes em (Aboanber et al., 2008). A Tabela 8.2 demonstra o comportamento dos fluxos nêutrons rápidos e térmicos encontrados pela solução proposta com um erro relativo menor que 1% em relação à solução exata. Os valores de comparação de (Aboanber et al., 2008) servem apenas de parâmetro de ordem de grandeza, não necessitando calcular desvio relativo, pois as soluções encontradas pelo método proposto neste trabalho são exatas pelo fato de não ter sido introduzida nenhuma aproximação ao longo de sua derivação. Na tabela, $\phi_1(x, y)$ e $\phi_2(x, y)$ representam o fluxo normalizado de nêutrons rápidos e térmicos encontrados de forma analítica pela metodologia proposta nos capítulos anteriores. O método utilizado em (Aboanber et al., 2008) foi o método de Runge-Kutta generalizado.

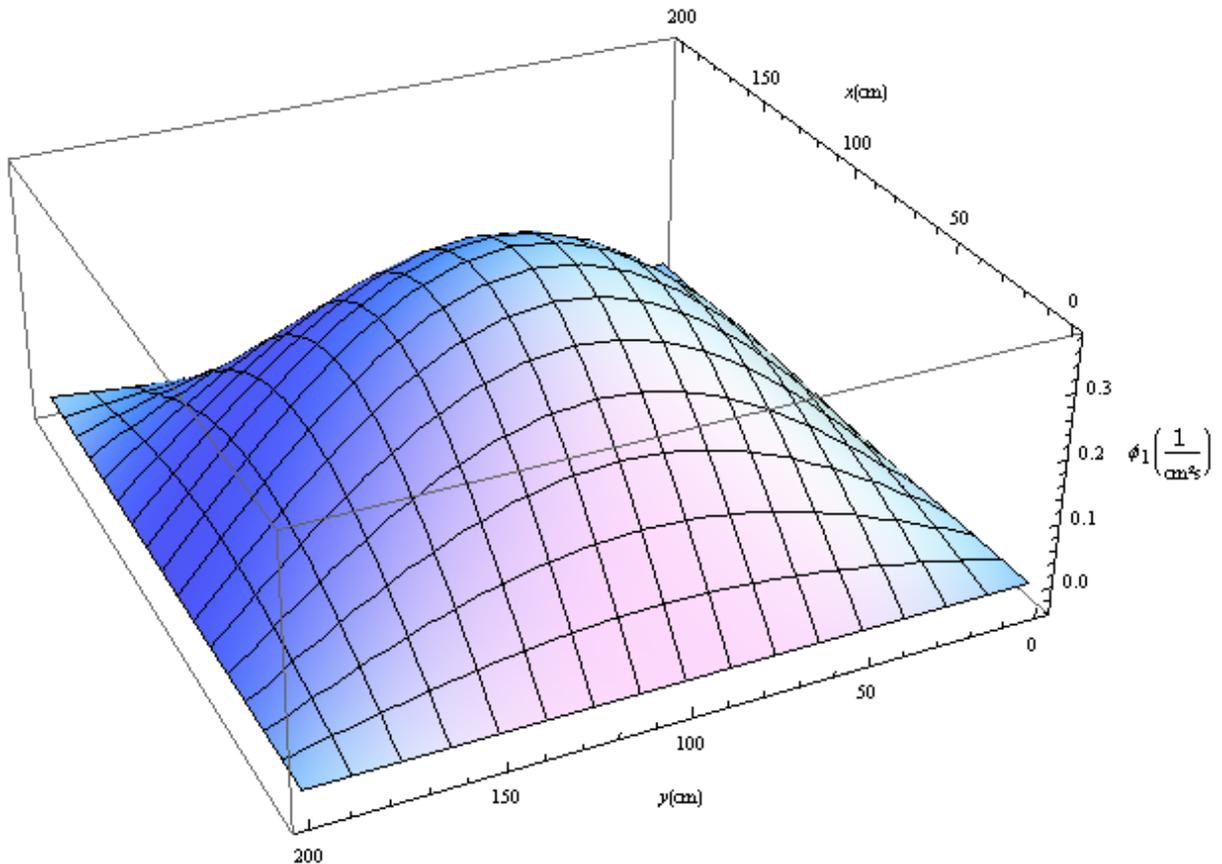


Figura 8.1 – Comportamento do fluxo de nêutrons rápidos em função da posição.

Tabela 8.2 – Valores dos fluxos normalizados de nêutrons rápidos e térmicos em certos pontos do domínio (segundo (Aboanber et al., 2008), $\phi_2(100,100) = 0,382cm^{-2}.s^{-1}$)

Ponto do domínio (x,y) [cm]	$\phi_1(x, y)$ [$cm^{-2}.s^{-1}$]	$\phi_2(x, y)$ [$cm^{-2}.s^{-1}$]
(50,50)	0,197212	0,167536
(50,100)	0,268498	0,228091
(50,150)	0,168486	0,142740
(100,50)	0,278900	0,236932
(100,100)	0,379713	0,322570
(100,150)	0,238275	0,201865
(150,50)	0,197212	0,167536
(150,100)	0,268498	0,228091
(150,150)	0,168486	0,142740

Na Figura 8.1, é apresentado um gráfico do fluxo de nêutrons rápidos, que mostra que ocorreu o esperado: o valor do fluxo normalizado de nêutrons teve seu máximo no centro e decaiu para perto de zero no seu contorno.

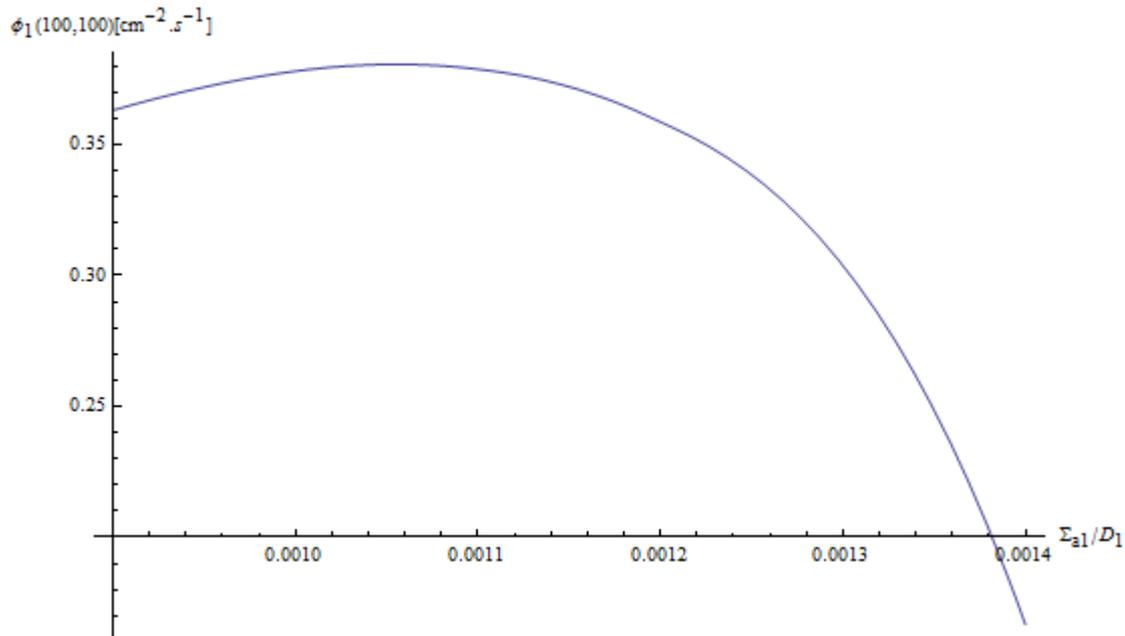


Figura 8.2 – Variação do fluxo de nêutrons com alteração na seção de choque de absorção (no caso teste, $\Sigma_{a1}/D_1 = 0,001023$).

8.2. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Como dito no capítulo 6, a análise de convergência pode ser realizada com sucesso seguindo os procedimentos descritos. Partiu-se de um valor grande o suficiente de m para que a suposição sobre o fluxo de nêutrons ser constante em $(m\Sigma_{Tg})^{-1}$ fosse verdadeira. Com este contexto, $m = 100$ e $\Sigma_{Tg} = \Sigma_{T1} = 0,001624cm^{-1}$. O procedimento é descrito a seguir:

$$N_{\max} = \text{int} \left\{ \frac{m\Sigma_{Tg}\Delta r}{4\pi} \right\} = 2. \quad (8.1)$$

O restante da análise estima o erro encontrado ao truncar a série no segundo termo e realizando esta análise encontra-se um erro inferior a 1% no resultado.

8.3. ESTUDO SOBRE VARIAÇÃO NA SOLUÇÃO DEVIDO A MUDANÇA DE PARÂMETROS NUCLEARES

Os parâmetros nucleares não possuem total liberdade, ou seja, não podem assumir qualquer valor real. Seus limites são muito restritos para que os resultados obtidos em uma análise sejam obtidos com precisão e, principalmente, consistência. A Figura 8.2, Figura 8.3 e Figura 8.4 demonstram as seções de choque macroscópicas, respectivamente, de absorção do grupo 1 de energia, de fissão do grupo 1 de energia e de fissão do grupo 2 de energia, todas em frações do coeficiente de difusão do grupo 1 de energia. Estes parâmetros foram alterados levemente, respeitando a consistência na solução. A Figura 8.5 demonstra a variação no resultado em relação à largura do domínio. Em ambos os casos, será analisado o valor do fluxo de nêutrons rápidos no centro do retângulo.

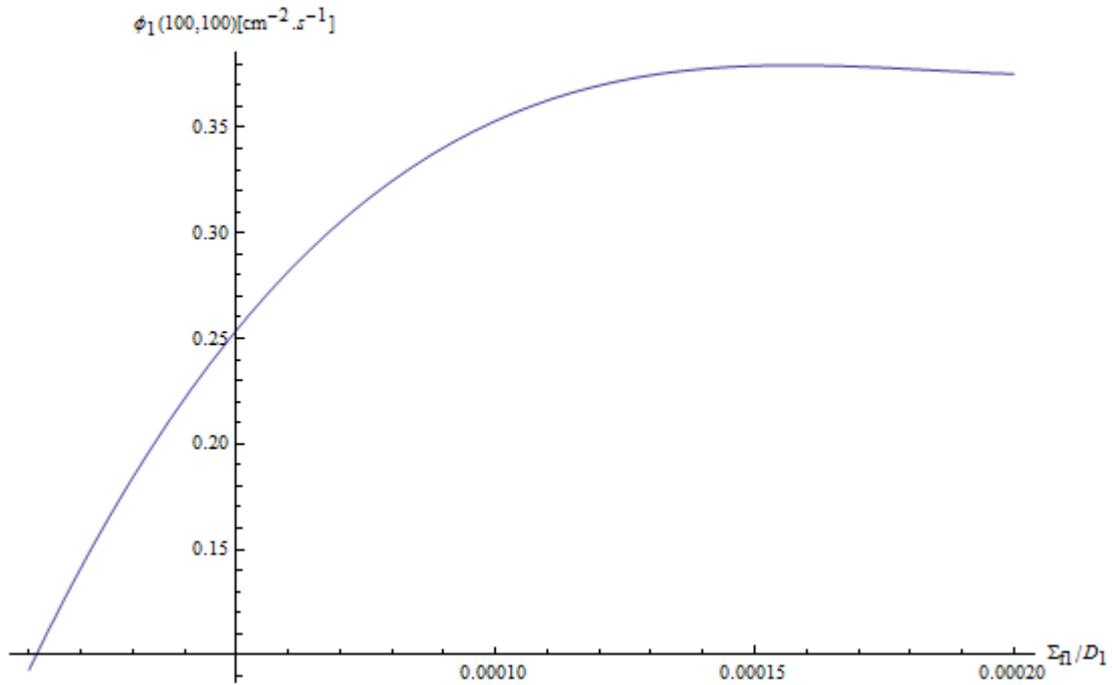


Figura 8.3 – Variação do fluxo de nêutrons com alteração na seção de choque de fissão do grupo 1 de energia (no caso teste, $\Sigma_{f1} / D_1 = 0,000179259$).

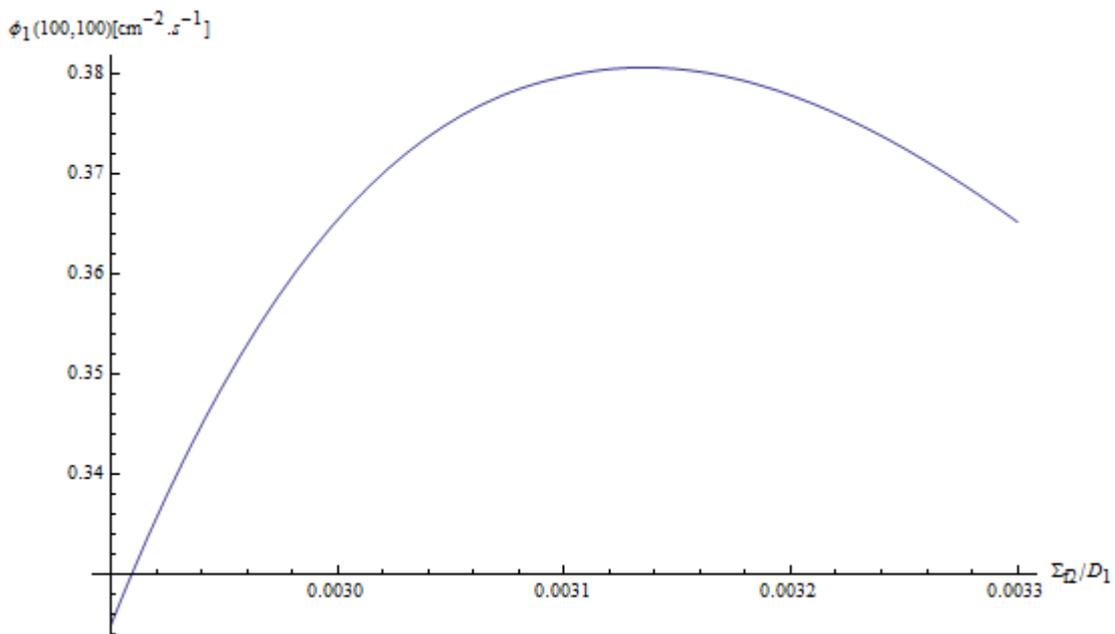


Figura 8.4 – Variação do fluxo de nêutrons com alteração na seção de choque de fissão do grupo 2 de energia (no caso teste, $\Sigma_{f1} / D_1 = 0,0031703$).

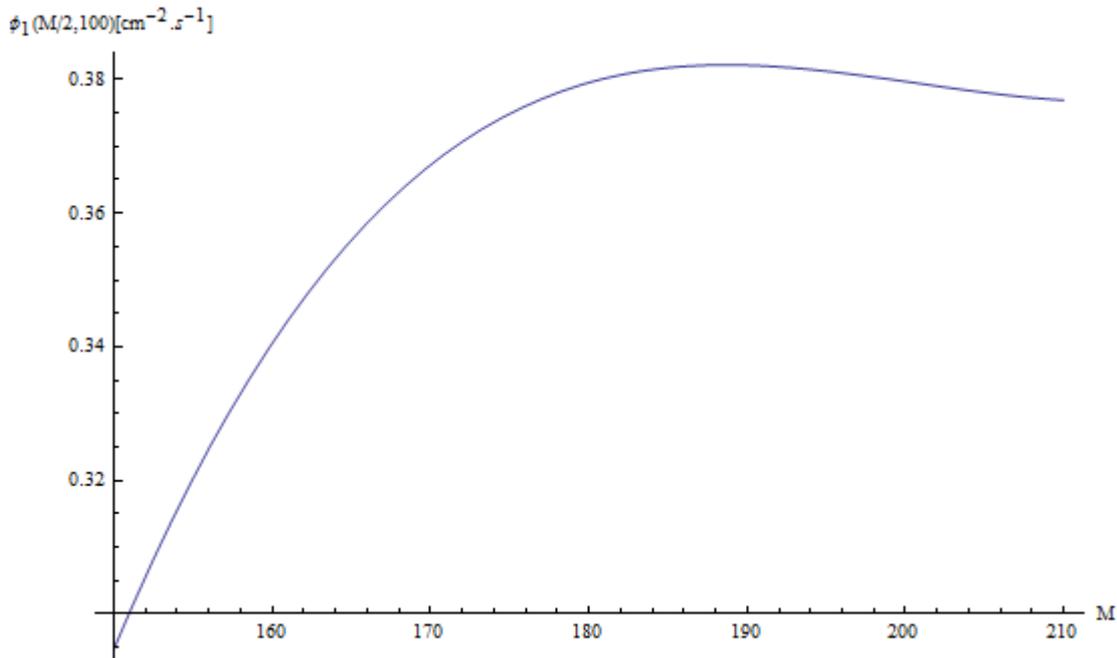


Figura 8.5 – Variação do fluxo de nêutrons com alteração na largura (no caso teste, $M = 200\text{cm}$).

Os limites dos gráficos foram escolhidos devido à necessidade de consistência no resultado, pois, quando foi calculado o fluxo de nêutrons em valores fora destes limites, o fluxo de nêutrons adotou valores negativos ou tendendo ao infinito, negando o comportamento real do fluxo de nêutrons em um meio físsil com sistema controlado.

9. CONCLUSÕES

O algoritmo proposto pode ser aplicado com sucesso, demonstrando ser útil para os cálculos neutrônicos. Os resultados esperados são concretizados ao simular uma situação e compará-la com outro trabalho, mostrando que a eficiência do método atinge a expectativa. A análise de convergência realizada pode ser implementada com sucesso comprovado devido à validação dos resultados, e sua estimativa de erro (no caso 1%) reforça o fato que um método analítico possui sua relevância nos cálculos, uma vez que o erro no resultado pode ser controlado e diminuído apenas aumentando o número de termos na série. O estudo sobre variação de parâmetros mostra que os valores do fluxo de nêutrons rápidos no centro do domínio com os parâmetros nucleares descritos na Tabela 8.1 são os maiores, aproximadamente, e este fato demonstra que os parâmetros nucleares, como era esperado, não estão completamente livres para adotar qualquer valor – qualquer parâmetro nuclear depende, mesmo que indiretamente, dos demais. A variação na largura do domínio denota um crescimento do fluxo de nêutrons a medida que a largura diminui – fato também esperado, uma vez que o fluxo de nêutrons calculado é normalizado. Vale ressaltar que os valores encontrados para os máximos do fluxo de nêutrons em todos os casos de variação de parâmetros nucleares ocorreram exatamente ou muito próximo de onde o parâmetro nuclear toma seu valor real, o que reforça o fato que os parâmetros nucleares são dependentes uns dos outros. Finalizando, é possível dizer que este tipo de implementação pode ser utilizada para problemas com mais regiões de interesse, diferentes condições de contorno, relevando a dimensão perpendicular às demais e possivelmente analisando a relevância no tempo do comportamento neutrônico. Este trabalho terá continuidade num futuro próximo, possibilitando assim a implementação para casos mais complexos,

como em geometria cilíndrica, que expressa geometria real de um reator nuclear, em meio heterogêneo considerando a situação transiente e tridimensional do fluxo de nêutrons.

10. BIBLIOGRAFIA

ABOANBER, A. E., HAMADA, Y. M., **Generalized Runge-Kutta Method for Two- and Three-Dimensional Space-Time Diffusion Equations with A Variable Time Step**, Annals of Nuclear Energy, v. 35, pp 1024-1040, 2008.

BATISTELA, C. H. F., **Estudo Da Criticalidade Pelo Método LTSN**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 1997.

BARROSO, A. C. O., DIEGUEZ, J. A. D., **Nuclear Power Energy Development in Brazil – Future Perspectives**, International Conference on Fifty Years of Nuclear Power The Next Fifty Years, IAEA-CN-114, Moscow/Obninsk, Russia, 2004.

BARUT, A. O., **The Theory of The Scattering Matrix for The Interactions of Fundamental Particles**, Macmillan, New York, USA, 1967.

BODMANN, B. E. J., VILHENA, M. T. M. B., FERREIRA, L. S., BARDAJI, J. B., **An Analytical Solver for The Multi-group Two-dimensional Neutron-diffusion Equation by Integral Transform Techniques**, Il Nuovo Cimento, v. 33, pp. 63-70, 2009.

CAMARGO, D. Q., **O Método CP Tridimensional: Criticalidade de Um Hexaedro**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2007.

CEOLIN, C., **Solução Analítica da Equação Cinética de Difusão Multigrupo de Nêutrons em Geometria Cartesiana Unidimensional pela Técnica da Transformada Integral**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2010.

COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., **Heat Conduction – Lumped Analysis Integral Transforms Symbolic Computation**, McGraw-Hill, Chichester, 1997.

GONÇALVES, G. A., **Solução Analítica da Equação de Transporte Multidimensional em Geometrias Cartesiana e Cilíndrica**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2003.

GONÇALVES, G. A., **Solução LTSN Da Equação Adjunta de Transporte de Nêutrons com Uma Fonte Arbitrária Para Elevada Ordem de Quadratura Para Uma Placa Homogênea**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 1999.

HAUSER, E. B., **Estudo e Solução Da Equação de Transporte de Nêutrons Bidimensional Pelo Método LTSN Para Elevadas Ordens de Quadraturas Angulares: LTSN 2d-diag e LTSN 2d-diagexp**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2002.

HEINEN, I. R., **Soluções Analíticas da Equação de Difusão de Nêutrons Geral por Técnicas de Transformadas Integrais**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2009.

KADAK, A. C., **A Future for Nuclear Energy – Pebble Bed Reactors**, International Journal of Critical Infrastructures, 2005.

KUGELER, K., TRAGSDORF, L. M., PÖPPE, N., **Aspekte der zukünftigen Nutzung der Kernenergie**, Die Zukunft der Energieversorgung in Deutschland, Herausforderungen-Perspektiven-Lösungen, Acatech Symposium, pp. 53-64, 2006.

LEPPÄNEN, J., **A New Assembly-level Monte Carlo Neutron Transport Code for Reactor Physics Calculations**, Palais des Papes, Avignon, France, American Nuclear Society, CD-ROM, 2005.

LEMOS, R. M., **Solução Analítica Das Equações Difusivas Da Teoria Geral de Perturbação Pelo Método Da Transformada de Laplace**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2005.

LOMPA, L. **Aplicação Da Teoria de Bifurcação À Dinâmica de Um Reator Nuclear a Leito Fluidizado**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 1993.

LORENZI, R. M. P., **Estudo Da Criticalidade em Uma Placa Plana Pelo Método LTSN**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em matemática aplicada, UFRGS, 1996.

OLIVEIRA, J. V. P., **Solução da Equação de Transporte Dependente do Tempo em uma Placa Plana pela Combinação do Método Espectral e da Transformada de Laplace**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia de minas, metalúrgica e materiais, UFRGS, 2000.

PAZOS, R. P., **Equação de Transporte de Nêutrons: Enfoque Dos Semi-grupos CO**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em matemática aplicada, UFRGS, 1995.

PAZOS, R. P., **Estudo de Convergência em Teoria de Transporte de Partículas Neutras**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia de minas, metalúrgica e materiais, UFRGS, 1999.

PETERSEN, C. Z., **Aplicação Do Método de Transformada de Laplace Para Determinação de Condições de Contorno Tipo Albedo Para Cálculos Neutrônicos**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2009.

RODRIGUES, L. J., **Cálculo Dos Fatores de Dancoff Com Absorção Parcial de Nêutrons em Geometria Cluster Pelo Método Direto**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 2007.

SCHRAMM, M., PETERSEN, C. Z., VILHENA, M. T. M. B., BODMANN, B. E. J., **An Efficient Algorithm to Solve the GITT-Transformed 2-D Neutron Diffusion Equation**, Integral Methods in Science and Engineering, Brighton, Inglaterra, 2010.

SEFIDVASH, F., **Preliminary Evaluation of The Fixed and Fluidized Bed Nuclear Reactor Concept Using The IAEA-INPRO Methodology**, Kerntechnik, 2004.

SEKIMOTO, H., **Nuclear Reactor Theory**, COE-INES Tokyo Institute of Technology, ISB987-4-903054-11-7 C3058 Part II, 2007.

SCHNEIDER, E., **Solução Das Equações Da Cinética Pontual Pelo Método Da Decomposição de Adomian**, dissertação de mestrado, programa de pós-graduação em matemática aplicada, UFRGS, 2006.

VILHENA, M. T. M. B., HEINEN, I. R., BODMANN, B. E. J., **An Analytical Solution for The General Perturbative Diffusion Equation by Integral Transform Techniques**, Annals of Nuclear Energy, v. 35, pp. 2410-2413, 2008.

ZABADAL, J. R. S., **Solução Da Equação Multidimensional de Transporte Pelo Método LTSN**, tese de doutorado, programa de pós-graduação em engenharia mecânica, UFRGS, 1994.