O Campo Multiplicativo a partir do Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos

The multiplicative field from the formula (-1): developing digital learning objects and learning strategies for operations with positive and negative numbers

Anuar Daian de Morais
Marcus Vinicius de Azevedo Basso
Cristiano Lopes Lima
anuar_com_u@yahoo.com.br, mbasso@ufrgs.br, clopes@gmail.com
Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Porto Alegre – RS – Brasil

Resumo
Nesse artigo apresentamos a discussão dos problemas relativos ao Campo Multiplicativo na aprendizagem das operações com números positivos e negativos e a extensão no desenvolvimento do objeto digital de aprendizagem *Fórmula (-1)*. De caráter experimental, esse trabalho constitui parte de uma pesquisa de mestrado cujo objetivo é desenvolver um conjunto de objetos digitais para aprendizagem das operações com números positivos e negativos centrado na exploração de estruturas Aditivas e Multiplicativas sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.
Palavras-chave: objetos digitais de aprendizagem, matemática, campo multiplicativo, operações com inteiros

Abstract
This article shows a discussion about relatives problems of Multiplicative Fields in the knowledge of operations with positive and negatives numbers and the extension in the development of learning digital object Formula (-1). This work has a experimental character and is inserted in the masters research whose the objective is to development a set of additive and multiplicative learning virtual objects which focused on exploitation of additive and multiplicative structures from the perspective of Gerárd Vergnaud's Conceptual Fields.
Keywords: digital learning objects, mathematics, multiplicative field, integer operations.

1. Introdução

Movidos pelo o interesse em desenvolver alternativas para o ensino e aprendizagem das operações com números positivos e negativos, via utilização das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TICs) em educação, estamos procurando responder a seguinte questão: *Como um objeto digital de aprendizagem pode promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo que envolvam operações com números positivos e negativos sob a perspectiva dos Campos Conceituais de Vergnaud?* No artigo *Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos* apresentamos uma proposta de Objeto Digital para Aprendizagem (ODA) chamado ***Fórmula (-1).***

O Fórmula (-1) é um jogo que visa promover o desenvolvimento do raciocínio aditivo, através da ampliação e construção de novos significados para as operações com números positivos e negativos. Nele, duas lesmas disputam uma corrida tendo como referência uma reta numérica, como mostra a figura abaixo. (BASSO & MORAIS, 2008)

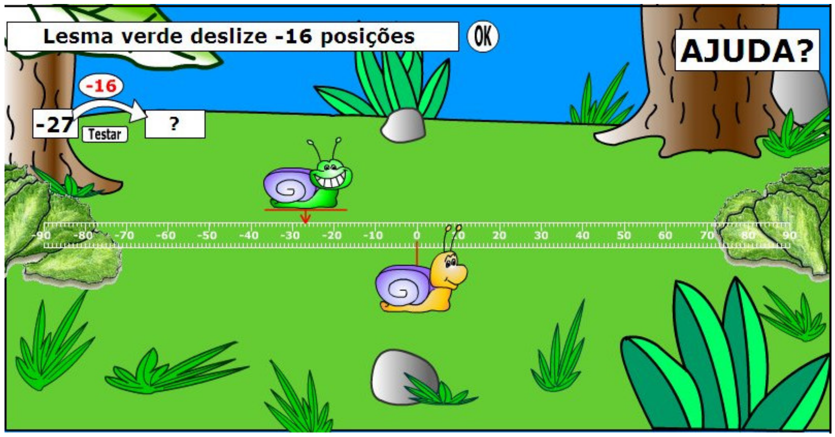


Figura 1

Portanto, para determinar o deslocamento das lesmas (e vencer o jogo) os jogadores terão que realizar operações com números positivos e negativos, já que estão inseridas num sistema referencial.

O Fórmula (-1) está disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br/users/anuar/formula_1

Diante deste contexto, será que não poderíamos aproveitar o Fórmula (-1) para a multiplicação de números inteiros? Sendo assim, especificamente neste artigo, vamos nos deter na seguinte questão: *Como podemos implementar o ODA Fórmula (-1) para auxiliar na promoção do desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, através da ampliação e construção de novos significados para as operações com números positivos e negativos?*

Essa proposta baseia-se na crença de que, via interação com o ODA, as crianças poderão estabelecer relações e generalizações a respeito das operações envolvidas, já que o objeto privilegia a utilização de esquemas de ação na solução dos problemas propostos de modo prático. Esses esquemas podem ser observados a partir de uma afirmação, pequenos movimentos com dedos ou olhos e etc. Por outro lado, tais esquemas de ação precisam estar coordenados com um sistema simbólico, ou seja, a criança deve utilizar símbolos como ferramenta para registrar e quantificar as operações realizadas na prática, o instrumento simbólico. Segundo Piaget, ao estudar o desenvolvimento das crianças, "*é através da coordenação dos **Sistemas de Ação** e dos **Sistemas Simbólicos** que as crianças desenvolvem o raciocínio Aditivo e Multiplicativo" (2001 apud NUNES)*. Ainda ressaltamos que cabe ao educador(a) desenvolver uma proposta didática que fomente a coordenação entre os sistemas de ação e os sistemas simbólicos.

2. Fundamentação Teórica

O Campo Multiplicativo é definido como um conjunto de problemas e situações que envolvem multiplicação ou divisão na sua resolução. É comum que o ensino da multiplicação seja a partir da idéia de adição repetida de parcelas iguais. No entanto tais operações são distintas. Na adição os problemas envolvem o mesmo tipo de grandeza e geralmente referem-se à invariante conceitual parte-todo (conhece-se as partes e pretende-se descobrir o todo ou sabe-se o todo e uma parte e se quer saber a outra). Todavia o invariante conceitual do raciocínio multiplicativo é, segundo NUNES (2001,

p. 78), a existência de uma relação fixa entre duas variáveis de grandezas (ou quantidades) diferentes.

> *"Ao resolver problemas de raciocínio multiplicativo, estamos buscando um valor numa variável que corresponda a um valor dado na outra variável. A relação constante entre as duas variáveis é que possibilita a dedução na resolução de problemas do raciocínio multiplicativo." (NUNES, 2001, p. 79)*

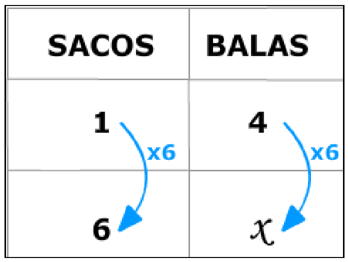
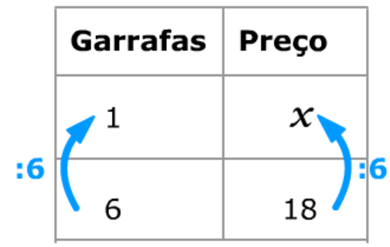
Sendo assim os problemas do Campo Multiplicativo envolvem relações quaternárias (duas medidas de um tipo e duas de outro) ao invés das relações ternárias presentes na adição. Em função disso, no livro "*El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas en la escuela primaria*", Vergnaud afirma que a representação a x b = c é inadequada para representar as correspondências entre as quantidades envolvidas na multiplicação, "*pois não comporta mais que três termos*" (1991, p.197). Portanto se deve utilizar um esquema que deixe explícito essas relações quaternárias, ou seja, algo que torne visível as quatro quantidades envolvidas nos problemas do Campo Multiplicativo e, esse esquema, nada mais é do que uma tabela. O autor diz que o uso de tabelas não é um empecilho para as crianças já que na sua organização (da tabela) os dois tipos de variáveis e a correspondência existente entre as quantidades são identificadas facilmente. E isso só é possível, pois as tabelas traduzem o isomorfismos das medidas, ou seja, as operações realizadas num tipo de variável são equivalentes às operações do segundo tipo de variável envolvida no problema.

Segundo Vergnaud, para analisar os esquemas de pensamento para os quais os alunos recorrem ao resolver problemas do campo multiplicativo, é importante partir do conceito de proporcionalidade, já que as relações de grandezas diferentes são quocientes de dimensão diferentes (2008, p. 46). Em função disso, o autor apresenta sete exemplos de problemas de diferentes níveis de complexidade e que serão reapresentados logo abaixo:

Exemplo1: Tenho 6 sacos de balas. Há 4 balas em cada saco. Quantas balas tenho?
Exemplo2: Minha mãe quer comprar um tecido que custa R$16,80 o metro para fazer um vestido. Ela necessita de quatro metros e meio. Quanto deverá pagar?
Exemplo3: Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?
Exemplo 4: Pedro tem R$12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$4,00 cada. Quantos pacotes pode comprar?
Exemplo 5: Uma carreata de carros cobre um trecho de 247.760 km. Um carro consome 6.785 litros de álcool a cada 100 quilômetros. Quanto consumirá este carro durante a carreata?
Exemplo 6: Comprei 12 garrafas de água. Cada caixa de três custa R$19,50. Quanto devo pagar?
Exemplo 7: Três latas de tintas pesam 400 gramas. Para pintar um quadro são necessárias 8 latas. Quanto pesam as 8 latas?

Os problemas 5, 6 e 7 utilizam a "regra de três" na sua solução e são fundamentais para a sofisticação do desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. No entanto, analisaremos apenas os quatro primeiros exemplos, pois já nos dão subsídios suficientes para os fins propostos neste trabalho.

Como vimos, a multiplicação e a divisão são definidas como operações irmãs, já que dizem respeito à mesma relação fixa, onde uma é a operação inversa da outra. No quadro abaixo, perceba que a operação utilizada na resolução do problema depende do lugar onde a incógnita está localizada.

Transformação Direta	**Transformação Inversa**
Tenho 6 sacos de balas. Há 4 balas em cada saco. Quantas balas tenho?  Utiliza-se a multiplicação.	Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?  Utiliza-se a divisão.

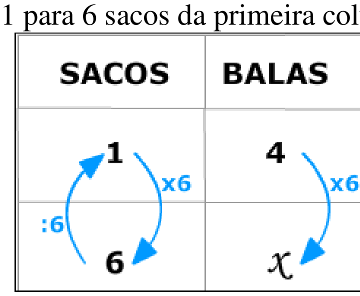
A Multiplicação:

Os exemplos 1 e 2 são problemas cuja solução envolve a operação da multiplicação e a diferença entre eles é que o exemplo 1 envolve quantidades discretas e o exemplo 2, quantidade contínuas. O autor ressalta que utilizar a idéia da multiplicação como uma adição repetida de parcelas iguais é conveniente para operações com números inteiros, mas para as operações com números decimais surge a necessidade explicações adicionais.

Analisando o exemplo 1 para apresentar alguns dos benefícios de utilizar tabelas para representar e resolver problemas do campo multiplicativo. Neste problema 1 e 6 são números que representam a quantidade de sacos, são medidas; 4 e **X** são números que representam quantidades de balas, são medidas de outra natureza. Podemos determinar a solução deste problema utilizando dois procedimentos diferentes para achar **X**: empregando a relação vertical ou horizontal da tabela.

A Relação Vertical:

Na relação vertical realiza-se operações entre as grandezas de mesmo tipo (que estão na mesma coluna) e são estendidas às grandezas da outra coluna. Como podemos observar na Figura 2, para determinar o valor de **X** balas realizamos a multiplicação de 4 pelo operador (x6), isso nada mais é do que aplicar – na coluna das balas – a operação que expressa a passagem de 1 para 6 sacos da primeira coluna.



Figuras 2

Note que os operadores verticais (x6) e (:6) não possuem dimensão (são um escalar). Além disso, são operadores inversos: o operador (:6) representa o operador inverso do operador (x6) que fez passar de um saco para seis sacos. Vergnaud afirma que as crianças não apresentam dificuldades em relação às operações verticais.

A Relação Horizontal:

Diferentemente da relação anterior, os operadores horizontais possuem dimensão, já que, segundo Vergnaud, "*são funções que expressam a relação entre medidas de categorias diferentes*" (1991, p.203); tanto é que tal fato nos obriga a utilizar a relação verbal "*balas por sacos"*.
Como podemos observar na Figura 3, para determinar o valor de **X** balas, aplicamos a função (*X4 balas por saco*) à quantidade de 6 sacos.

Figura 3

Note que (*:4 balas por saco*) é sua função inversa, pois "desfaz" a transformação realizada por *(X4 balas por saco).*

Sinteticamente, existem dois procedimentos para encontrar **X**:
1º - Aplicando operador escalar (x6) na quantidade de 4 balas
2º - Aplicar a função (X4 *balas por saco*) à quantidade de 6 sacos.

Vergnaud chama a atenção para o fato de que os dois procedimentos são equivalentes, mas distintos e por isso não podemos confundi-los e, para o autor, é só esta análise que permite compreender que, ao fazer 6x4 ou 4x6, não se multiplica sacos por balas ou balas por sacos, mas aplica-se a noção de proporção. Concordamos com tal afirmação, pois identificamos que as crianças apresentam algumas dificuldades quando utilizam o segundo procedimento, e concluímos que tal dificuldade deriva da presença da proporcionalidade nessas funções e que pode ser reconhecida em perguntas do tipo: *como podemos encontrar balas se 6 é o número de pacotes?*

Para Vergnaud a compreensão desse fato só é possível quando realizamos a chamada análise dimensional – amplamente utilizada na Física – pois é através dela que identificaremos os diferentes tipos de relações envolvidas na multiplicação. Todavia o autor avisa que esse tipo de análise é útil para o esclarecimento dos professores e não aconselha sua utilização para os alunos, já que a noção de proporção está no limite da capacidade cognitiva das crianças que cursam as séries finais do ensino fundamental.

A Análise Dimensional

Como estamos falando de uma relação quaternária que utiliza a noção de proporção podemos realizar a análise de duas formas:

1º Formulação: **X** balas estão para 4 balas, assim como 6 sacos estão para 1 sacos:

$$\frac{x \ \ balas}{4 \ \ balas} = \frac{6 \ \ sacos}{1 \ \ sacos}$$

Multiplicando os dois termos por *"4 balas"* temos:

$$x \quad balas = \frac{6 \quad sacos \quad \times \quad 4 \quad balas}{1 \quad sacos}$$

Como o denominador é 1e ao simplificarmos a dimensão *"sacos"*, teremos:

$$x \quad balas \;=\; \frac{6 \quad \cancel{sacos} \quad \times \quad 4 \quad balas}{1 \quad \cancel{sacos}} = 6 \quad \times \quad 4 \quad balas$$

Logo reaparece o primeiro procedimento utilizado para encontrar **X**.

<u>2º Formulação</u>: **X** balas estão para 6 sacos, assim como 4 balas estão para 1 sacos. Fazendo a análise dimensional teremos:

$$\frac{x \quad balas}{6 \quad sacos} = \frac{4 \quad balas}{1 \quad sacos}$$

Multiplicando os dois termos por *"6 sacos"* temos:

$$x \quad balas = 6 \quad sacos \times \frac{4 \quad balas}{1 \quad sacos}$$

$$= 6 \quad sacos \times 4 \quad \frac{balas}{sacos}$$

Neste passo intermediário podemos identificar o segundo procedimento, que utiliza função na sua resolução. Mas também podemos continuar e simplificar a dimensão *"sacos",* obtendo:

$$x \quad balas \;=\; \frac{6 \quad \cancel{sacos} \quad \times \quad 4 \quad balas}{1 \quad \cancel{sacos}} = 6 \quad \times \quad 4 \quad balas$$

Essa análise nos permite perceber que, nos tipos mais elementares, de multiplicação já intervém o cálculo relacional de quatro quantidades.

A Divisão:

Os exemplos 3 e 4 são problemas cuja solução envolve a divisão, no entanto representam diferentes níveis de dificuldade. No exemplo três procura-se encontrar o valor unitário da garrafa e deve-se determiná-lo ao conhecer um vínculo de correspondência entre grandezas de diferentes tipos (preço por garrafa).

Exemplo3: Paguei R$18,00 por 6 garrafas de suco. Quanto custa uma garrafa?

	Garrafas	Preço	
	1	x	
:6	6	18	:6

Neste exemplo, para encontrar o valor **X**, é necessário dividir 18 reais entre 6 tal qual na representação vertical. O operador :6 é um operador sem dimensão (um escalar) que fará reproduzir na coluna da direita o que foi expresso na passagem de 6 garrafas para 1 garrafa e que expressa a passagem de 6 garrafas para uma garrafa. Desta maneira operador (:6) é operador inverso do operador (X6) que faz passar de uma garrafa par 6 garrafas.

Já no exemplo 4, se conhece o valor unitário e é necessário determinar o número de unidades do primeiro tipo, correspondente à quantidade dada no segundo tipo.

Exemplo 4: Pedro tem R$12,00 e quer comprar alguns pacotes de caramelo que custam R$4,00 cada. Quantos pacotes pode comprar?

Pacotes	Preço
1 $\xrightarrow{x\ 4}$	4
x $\xleftarrow{:\ 4}$	12

A operação *(:4 reais por pacote)* é a função inversa da função direta *(X4 reais por pacote)*, que faz passar, na linha de cima, o preço de um pacote a partir de uma unidade (valor unitário). Vergnaud comenta que este tipo de divisão é mais delicada que a primeira, supomos que isso se deve aos obstáculos cognitivos impostos pela aplicação de raciocínio inverso e que estão presentes neste tipo de questão.

Da mesma maneira que no exemplo 1, podemos resolver os dois problemas utilizando tanto a relação vertical, quanto a horizontal, além disso podemos realizar a mesma análise dimensional.

Imaginamos que um leitor, imbuído de um senso de praticidade, possa fazer a seguinte afirmação: "se as duas formas são equivalente, basta utilizar o 1º procedimento, já que não apresenta grandes dificuldades às crianças". Lembre-se que temos como objetivo auxiliar no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos nossos alunos. Para isso é importante possibilitar uma diversidade de experiências que contribuam para que (as crianças) atribuam diferentes sentidos e significados para os diferentes sistemas simbólicos.

No livro *"Atividade Humana e Conceituação"* Vergnaud apresenta o seguinte exemplo esclarecedor e que iremos transcrever (2008, p. 29):
A fórmula ***V=S.H*** representa as relações entre o volume, a superfície da base e altura de prisma reto. Podemos ler esta fórmula da seguinte maneira.

- Para uso direto: O cálculo do volume, quando conhecemos a superfície da base e a altura.
- Para uso indireto: O cálculo da altura, quando conhecemos o volume e a superfície da base; ou ainda para o cálculo da superfície da base, quando conhecemos o volume e sua altura.
- Através de proporção (maneira mais sofisticada): o volume é proporcional à superfície da base, quando a altura se mantém constante; e proporcional à altura, quando a superfície da base se mantém constante.

Para ele (e concordamos), o sentido atribuído aos signos depende de várias conceituações que não estão contidas nos significados dos símbolos. Além disso, é através de sua a atividade, que o aluno desenvolverá diferentes categorias de pensamento que lhe permitirão ter maiores condições de compreender uma fórmula, enunciados ou situações problemas. A terceira interpretação da fórmula (apresentada logo acima) é praticamente ausente da escola básica, segundo Vergnaud.

Portanto concluímos que o 2º procedimento utilizado para resolver problemas do campo multiplicativo, contribui para o desenvolvimento da noção da proporcionalidade e deve ser explorado desde o ensino fundamental.

3. O Jogo Fórmula (-1): Campo Multiplicativo

Tendo como base teórica as situações apresentadas na seção anterior, pretendemos estender as operações do campo multiplicativo ao contexto virtual proposto pelo ***Fórmula (-1)***, ou seja, através da simulação de deslocamentos de objetos inseridos num sistema referencial. Diante dessa situação, o jogador realizará operações que envolvam multiplicação com números positivos e negativos.

Temos a crença que um ODA deveria priorizar a coordenação dos sistemas de ação e representação simbólica por parte dos sujeitos que venham a utilizá-lo. Sendo assim, a versão do ODA ***Fórmula (-1)*** para o campo multiplicativo, deve sugerir a utilização de tabelas para resolver tal problema.

Nele duas pulgas disputam uma corrida tendo como referência uma reta numérica, como mostra a figura abaixo.

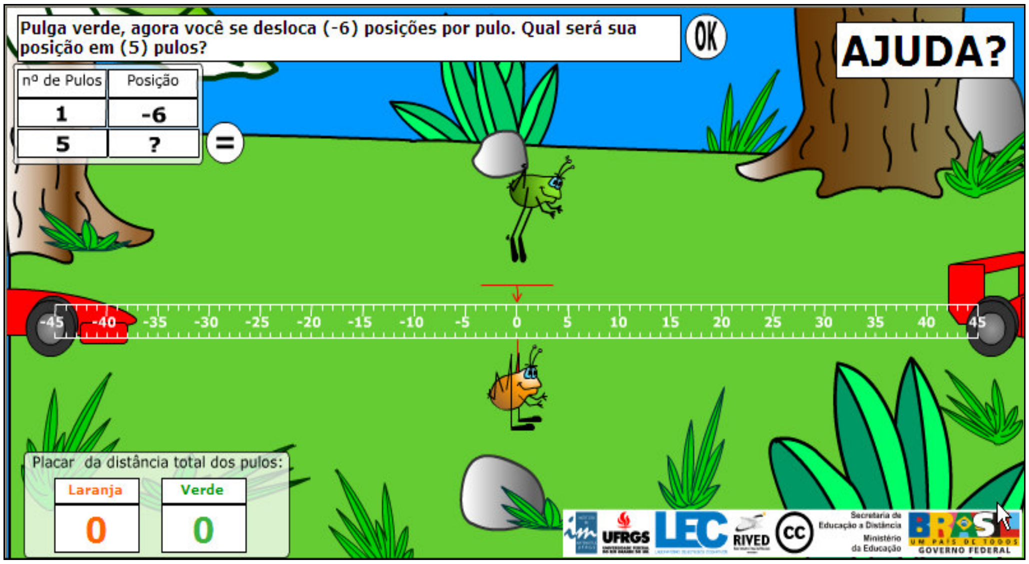


Figura 1

Em cada jogada o jogador deverá resolver os seguinte problema: *Você se desloca (+7) posições por pulo, Qual será sua posição após (+5) pulos?*

Como se joga:

A Pulga verde inicia o jogo. Para iniciar, o primeiro jogador deve clicar no botão OK e descubra para qual posição ela deve pular. Digite sua resposta na caixa " **?** "e, logo em seguida no botão **" = "** para conferir sua resposta. Se a resposta estiver correta a distância pulada será somada ao placar que fica na parte inferior do canto esquerdo da tela. Veja os exemplos:

Na primeira fase, ao clicar no botão OK será sorteado o problema:

Os pulos serão dados sempre partindo da posição zero.

Exemplo 1:

nº de Pulos	Posição
1	+5
+3	?

Significa que a pulga deve dar 3 pulos de 5 posições (em cada salto) para a direita.

Exemplo 2:

nº de Pulos	Posição
1	-5
+2	?

Significa que a pulga deve dar 2 pulos de 4 posições (em cada salto) para a esquerda.

Na segunda fase do jogo além das duas situações anteriores será atribuído uma significado geométrico para multiplicações do tipo: *(–a) x (b)* e *(–a) x (–b)*, pois não existe -5 pulos.

Exemplo 3: Significa que a pulga deve dar 5 pulos de 5 posições (em cada salto) para o CONTRÁRIO da direita.

nº de Pulos	Posição
1	+4
-5	?

Exemplo 4:

nº de Pulos	Posição
1	-5
-4	?

Significa que a pulga deve dar 5 pulos de 5 posições (em cada salto) para o CONTRÁRIO da direita.

O objetivo do Jogo: Ganha o carro a Pulga que, com seus pulos, somar uma distância superior a 100 no placar.

Ao definir este objetivo, o Fórmula (-1) gera situações que contribua para a diferenciação entre dois tipos de números: aqueles que expressam a posição da Pulga em relação à um ponto de referência (é dotado de sinal positivo ou negativo, portanto um número inteiro) e os que representam a distância percorrida nos seus saltos (representam medidas, ou seja, são números naturais, já que não são positivos, nem negativos).

4. Conclusões

Vamos retomar o questionamento apresentado no início deste trabalho: *Como podemos implementar o ODA Fórmula (-1) para auxiliar na promoção do desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, através da ampliação e construção de novos significados para as operações com números positivos e negativos?*

Acreditamos que o ODA Fórmula (-1), ao apresentar a utilização de tabelas para solucionar problemas que envolvem operações com números negativos, pode servir como mais uma alternativa para fomentar a coordenação entre os *Sistemas de Ação* e *Simbólicos* e, assim, estender o raciocínio multiplicativo para operações que envolvem operações com números negativos. Mais do isso, ele faz uso de uma ferramenta que auxilia no desenvolvimento da noção da proporcionalidade que é um dos conhecimentos essenciais para o desenvolvimento da matemática na escola de nível médio e superior.

Além disso, estamos convencidos de que avançamos mais um passo na direção do desenvolvimento de um objeto digital de aprendizagem que promova o desenvolvimento do raciocínio aditivo e multiplicativo que envolva operações com números positivos e negativos sob a perspectiva de Campos Conceituais de Vergnaud e que foi proposto no artigo *Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos*.

Em termos de perspectivas para continuidade da proposta de pesquisa, temos como objetivo desenvolver um ODA (também nestes moldes) que contemple as operações com medidas contínuas e que ainda não foram contempladas no Fórmula (-1), mas que já estão sendo desenvolvidas.

Gostaríamos de ressaltar que o ODA Fórmula (-1) não apresenta (diretamente) problemas que envolvam a divisão com números positivos e negativos, mas ele serve de ponto de partida para que esse tipo de problema seja apresentado e explorado em sala aula. Lembramos que cabe ao professor desenvolver esse raciocínio inverso através de uma proposta didática que complemente o Fórmula (-1).

Também vale ressaltar que não se trata de acreditamos que esse ODA, sozinho, oferece a garantia da aprendizagem das operações com números positivos e negativos. A rigor, estamos investigando a possibilidades que seu uso oferece em termos de contribuição para tais aprendizagens o que implica na continuidade da pesquisa citada nesse trabalho.

5. Referências

CESA, Ana Cristina Possapp. **Proposta de Estudo dos inteiros.** UCS. p.43-47

KIMURA, Cecília F. K. TESE: **Jogo como ferramenta no trabalho com números negativos: um estudo sob a perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget.** PUC/SP, 2005.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide. **Número negativos: uma história de incertezas.** Bolema, Ano 7, nº8, pp49 a59, 1992.

MORAIS, Anuar Daian de, BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; LIMA, Cristiano Lopes; **Fórmula (-1): desenvolvendo objetos digitais de aprendizagem e estratégias para a aprendizagem das operações com números positivos e negativos**. RENOTE : revista novas tecnologias na educação – Porto Alegre : UFRGS, Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação, dezembro de 2008; Disponível em: <http://www.cinted.ufrgs.br/renote/dez2008/artigos/11b_anuar.pdf >

MOREIRA, Marco Antônio. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**. Investigações em Ensino de Ciências – V7(1), pp. 7-29, 2002, Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a2002.pdf> Acesso em: 1 set. 2008.

NUNES, Terezinha, Tânia M. M. Campos, Sandra Magina, Peter Bryant. **Introdução à Educação Matemática: operações numéricas.** São Paulo: Proem, 2001.

PIAGET, Jean, INHELDER, Bärbel. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Editora Zahar, Riode Janeiro, 1975.

PIAGET, Jean, SZEMINSKA, Alina. **A gênese do número na criança**. Editora Zahar, Riode Janeiro, 1975.

VERGNAUD, Gérard. **Atividade humana e conceituação.** Editora GEEMPA, Porto Alegre, 2008.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la ensenhanza de las matemáticas en la escuela primaria.** 1ed. México: Trillas, 1991.