

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DE REDES NEURAIIS PARA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO REOLÓGICO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO

por

TIAGO DIERSMANN VIDAL SANTOS

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, janeiro de 2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO

Santos, Tiago Diersmann Vidal
AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DE REDES NEURAIIS PARA
ANÁLISE DO COMPORTAMENTO REOLÓGICO DE FLUIDOS DE
PERFURAÇÃO / Tiago Diersmann Vidal Santos. -- 2024.
27 f.
Orientador: Dr. Diogo Elias da Vinha Andrade.

Coorientador: Dr. Guilherme Henrique Fiorot.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto
Alegre, BR-RS, 2024.

1. Redes Neurais. 2. Fluido de perfuração. 3.
Comportamento reológico. I. Andrade, Dr. Diogo Elias
da Vinha, orient. II. Fiorot, Dr. Guilherme Henrique,
coorient. III. Título.

TIAGO DIERSMANN VIDAL SANTOS

AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DE REDES NEURAIIS PARA ANÁLISE DO
COMPORTAMENTO REOLÓGICO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Ignácio Iturrioz
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Energia e Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Dr. Diogo Elias da Vinha Andrade

Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Henrique Fiorot

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Diogo Elias da Vinha Andrade (Presidente)

Prof. Dr. Cirilo Seppi Bresolin

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Prof. Dr. Márcio Dorn

Porto Alegre, janeiro de 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo suporte e conselhos ao longo da jornada, são muito importantes na minha vida. Também agradeço ao conhecimento adquirido junto aos professores da universidade que abriram diversas portas na minha caminhada.

EPÍGRAFE

“Quando as pessoas dizem que algo é impossível, o que elas querem dizer é que é impossível para elas, não para você.”

Ian Cassel

Diersmann, Tiago. **AVALIAÇÃO DA PERFORMANCE DE REDES NEURAIIS PARA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO REOLÓGICO DE FLUIDOS DE PERFURAÇÃO**. 2024. 15. Monografia de Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2024.

RESUMO

Este trabalho visa desenvolver um modelo preditivo baseado em redes neurais para prever o comportamento reológico de fluidos de perfuração em testes de reinício de escoamento. A necessidade surge devido aos desafios enfrentados com métodos experimentais tradicionais, que são demorados e custosos. A metodologia envolve o uso de redes neurais profundas para modelar o comportamento complexo destes fluidos, visando reduzir a dependência de testes experimentais. A análise foca em dados de fluidos à base de óleo, comparando previsões da rede neural com modelos matemáticos tradicionais. Os resultados quantitativos mostram uma diferença absoluta média (AAD) de 5,25% a 8,07%, evidenciando a precisão do modelo preditivo baseado em redes neurais. A conclusão destaca a eficácia das redes neurais em minimizar o número de testes necessários, funcionando como um "reômetro digital". Este avanço representa um potencial significativo para aplicações industriais complexas e abre caminho para futuras pesquisas em reologia de fluidos complexos usando aprendizado de máquina. Este estudo é um passo importante na direção de técnicas mais avançadas e eficientes para a análise reológica, com implicações práticas significativas na indústria de perfuração.

PALAVRAS-CHAVE: Redes Neurais, Fluido de perfuração, Comportamento reológico.

Diersmann, Tiago. **EVALUATION OF NEURAL NETWORKS PERFORMANCE FOR RHEOLOGICAL BEHAVIOR ANALYSIS OF DRILLING FLUIDS**. 2024. 15. Mechanical Engineering End of Course Monography – Mechanical Engineering degree, The Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2024.

ABSTRACT

This work aims to develop a neural network to predict the rheological behavior of drilling fluids in flow restart tests. The need arises due to the challenges of traditional experimental methods, which are time-consuming and costly. The methodology involves using deep neural networks to model the complex behavior of these fluids, aiming to reduce the dependence on experimental tests. The analysis focuses on data from oil-based fluids, comparing neural network predictions with traditional mathematical models. The quantitative results show an Average Absolute Deviation (AAD) of 5.25% to 8.07%, demonstrating the precision of the neural network. The conclusion highlights the effectiveness of neural networks in minimizing the number of necessary tests, functioning as a "digital rheometer". This advancement represents significant potential for complex industrial applications and paves the way for future research in complex fluid rheology using machine learning. This study is an important step towards more advanced and efficient techniques for rheological analysis, with significant practical implications in the drilling industry.

KEYWORDS: Neural Networks, Drilling Fluid, Rheological Behavior.

NOMENCLATURA

Símbolos

t	Tempo	[s]
y	Saída genérica rede neural	
f	Função genérica de ativação	
x_i	Valor de entrada	
w_i	Peso atribuído nos valores de entrada	
b	Viés de saída	
N	Processamento da rede neural	
n	Número de observações	
Y_i	Valor experimental	
\hat{Y}_i	Valor previsto	

Símbolos gregos

α	Peso atribuído	
β	Peso atribuído	
θ	Parâmetro diferencial	
τ	Variação de tensão	[Pa]
$\dot{\gamma}$	Variação da taxa de deformação	[S^{-1}]
$\dot{\gamma}_{eq}$	Taxa de deformação em equilíbrio	[S^{-1}]

Abreviaturas e acrônimos

AAD	<i>Average Absolute Deviation</i>
DNN	<i>Deep Neural Network</i>
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
PINNs	Redes Neurais Informadas por Física
PreLU	<i>Parametric Rectified Linear Unit</i>
RNA	Rede Neural Artificial
ReLU	<i>Rectified Linear Unit</i>
SiLU	<i>Sigmoid Linear Unit</i>
Tanh	Tangente Hiperbólica

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	2
2.1 Testes reológicos de reinício de escoamento	2
2.2 Modelagens Matemáticas	4
2.3 Redes Neurais Profundas (DNNs)	4
3. METODOLOGIA.....	6
3.1 Dados Utilizados.....	6
3.2 Arquitetura da Rede Neural Profunda.....	7
4. RESULTADOS	10
4.1 Resultados do fluido de perfuração principal	10
4.2 Análise da introdução de um fluido de perfuração similar na DNN criada.....	12
5. CONCLUSÃO.....	15
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	16
APÊNDICE A – Equacionamento de Andrade et al. (2016).....	18

1. INTRODUÇÃO

O petróleo historicamente tem desempenhado um papel crucial como fonte primária de energia e agente de desenvolvimento econômico em escala global. No contexto brasileiro, este recurso natural emerge como um pilar significativo no avanço econômico do país e tem sido um vetor de pesquisas intensivas no setor, conforme destacado pelo Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis (IBP). A extração de petróleo, que pode ocorrer tanto em terra (*onshore*) quanto em alto mar (*offshore*), é notavelmente ilustrada pela exploração do pré-sal brasileiro (Mitishita, 2015), uma atividade complexa que envolve tecnologias avançadas e materiais de alta resistência, como diamante e aço, para a perfuração das rochas (Fernandes, 2014).

Durante o processo de extração, os fluidos de perfuração são fundamentais, cumprindo múltiplas funções essenciais para a eficiência e segurança operacional. Esses fluidos não apenas removem os cascalhos gerados pela broca e mantêm a estabilidade do poço, mas também exercem uma pressão hidrostática crítica sobre a formação rochosa e formam um filme protetor nas paredes do poço, minimizando a perda de fluido (Caenn et al., 1996). Classificados com base no principal componente de sua fase contínua, os fluidos de perfuração podem ser à base de água, óleo ou gás (Santos, 2012). Este estudo foca nos fluidos à base de óleo, explorando dados experimentais obtidos de trabalhos publicados na literatura de Andrade et al. (2016) e Negrão et al. (2011), com o objetivo de compreender seu comportamento reológico durante testes de reinício de escoamento até alcançar um estado de equilíbrio, aspecto crucial para a aplicação eficaz em perfuração de poços de petróleo (Da Rocha, 2010).

A natureza tixoelelastoviscoplastica dos fluidos de perfuração apresenta uma complexidade que exige análises detalhadas e precisas. Neste contexto, diversos estudos têm se concentrado na modelagem matemática desses fluidos para entender melhor seu escoamento. Um exemplo notável nesse campo é a equação desenvolvida por Souza Mendes e Thompson (2013), que demonstra uma aproximação significativa com o comportamento experimental observado, embora sua complexidade, refletida nos treze parâmetros distintos que incorpora, resulte em um modelo matematicamente e computacionalmente custoso. Outro exemplo é a modelagem proposta por Andrade et al. (2016), que apresenta apenas seis parâmetros, e mesmo assim consegue capturar de forma satisfatória elementos cruciais da curva experimental, como o pico de tensão e o estágio de equilíbrio.

Os modelos matemáticos convencionais, utilizados na caracterização reológica de fluidos tixoelelastoviscoplastico, dependem de uma extensa quantidade de dados experimentais para realizar a determinação das constantes empíricas (*'curve fitting'*). Estes modelos têm como base múltiplos parâmetros determinados através de experimentações detalhadas. No entanto, a realização desses experimentos práticos não apenas demanda um período extenso, frequentemente se estendendo por vários meses, mas também requer investimentos financeiros consideráveis para aquisição dos equipamentos laboratoriais. As limitações operacionais e econômicas das modelagens que necessitam diversos testes experimentais são os principais motivadores deste estudo, que busca investigar alternativas viáveis para a modelagem do comportamento reológico de fluidos complexos, conciliando precisão e eficiência.

A aplicação de redes neurais em reologia é um campo emergente na pesquisa acadêmica, com diversos estudos pioneiros já conduzidos. Um exemplo notável é o trabalho de Elkatatny et al. (2016), que empregaram uma rede neural para desenvolver um modelo matemático capaz de prever em tempo real as propriedades reológicas de fluidos de

perfuração. Este estudo alcançou resultados promissores, demonstrando a robustez da técnica de previsão baseada em RNAs.

Adicionalmente, há avanços significativos em aplicações similares. Alsabaa (2021) explorou o uso de RNAs para o monitoramento de lama oleosa, uma abordagem inovadora na gestão de fluidos em contextos industriais. Por outro lado, Esfe et al. (2018) investigaram a previsão do comportamento de fluidos híbridos nano-lubrificantes, ampliando o escopo de aplicação das RNAs para fluidos não newtonianos. Finalmente, Sheiati (2021) aplicou estas técnicas na previsão da resposta de pastas de cimento em um simulador *FlowCyl*, demonstrando a versatilidade das RNAs em diferentes contextos da reologia de fluidos complexos.

As redes neurais representam um marco significativo no avanço da computação, caracterizando-se pela sua habilidade intrínseca de ajustar dinamicamente seus parâmetros em resposta a variações estatísticas no ambiente de operação. Inspiradas pela complexa funcionalidade do cérebro humano, estas estruturas de aprendizado de máquina são configuradas para identificar, replicar padrões em conjunto de dados e, a partir disso, realizar tomadas de decisão informadas. Essencialmente, uma rede neural é composta por uma série de unidades de processamento - os neurônios artificiais - organizados em camadas que variam em número e complexidade conforme a necessidade específica da aplicação (Haykin, 1996).

Cada neurônio dentro destas camadas é responsável por receber, processar e transmitir informações. Essa transmissão ocorre através de conexões ponderadas, cujos pesos são ajustados durante o treinamento da rede, visando minimizar erros de previsão. Esse processo de aprendizado é iterativo e se concentra na otimização de uma função de perda, que quantifica a discrepância entre as previsões da rede e os valores reais observados (Goodfellow et al., 2016) possibilitando às redes neurais a capacidade de extrair padrões complexos e nuances dos dados que seriam inacessíveis a métodos analíticos tradicionais.

1.1 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver e aplicar uma rede neural artificial para analisar até que ponto as RNAs podem oferecer previsões acuradas do comportamento reológico de fluidos de perfuração em testes de reinício de escoamento, reduzindo assim a dependência de procedimentos experimentais onerosos e demorados. Este enfoque não apenas tem o potencial de otimizar significativamente o processo de análise de fluidos de perfuração, mas também de gerar *insights* valiosos sobre a aplicabilidade de técnicas de aprendizado de máquina em contextos industriais complexos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção são apresentadas a modelagem matemática que foi comparada para quantificar o comportamento do fluido tixoeleostoviscoelástico e a descrição do funcionamento do processo utilizado nas Redes Neurais Profundas.

2.1 Testes reológicos de reinício de escoamento

O objetivo central de um teste reológico é investigar e compreender detalhadamente o comportamento mecânico do fluido em estudo. Esta análise é crucial para determinar as aplicações potenciais do fluido e identificar suas limitações práticas. Na Figura 1, é ilustrada a curva de reinício de escoamento de um fluido genérico. Esta curva é fundamental para entender como a tensão (medida em Pascal [Pa]) varia com o tempo (em segundos [s]) em

testes realizados quando o fluido está em repouso e é repentinamente colocado em movimento.

Ao analisar essa curva, é essencial focar em certos pontos chave. O primeiro é a tensão de pico, que representa o valor máximo de tensão que o fluido pode suportar sem falhar. Este ponto é crítico, pois influencia diretamente na determinação nos picos de pressão observados em tubulações e aplicações reais. O segundo ponto de interesse é a tensão em regime permanente, que indica o valor no qual o fluido se estabiliza após o período transiente. Este valor auxilia na definição da potência de bombeamento necessária para manter o fluido escoando em uma tubulação em regime permanente. Por fim, é importante considerar o tempo necessário para que o fluido atinja esse estado de equilíbrio em regime permanente. Este aspecto é vital para compreender a resposta temporal do fluido sob condições de tensão variável.

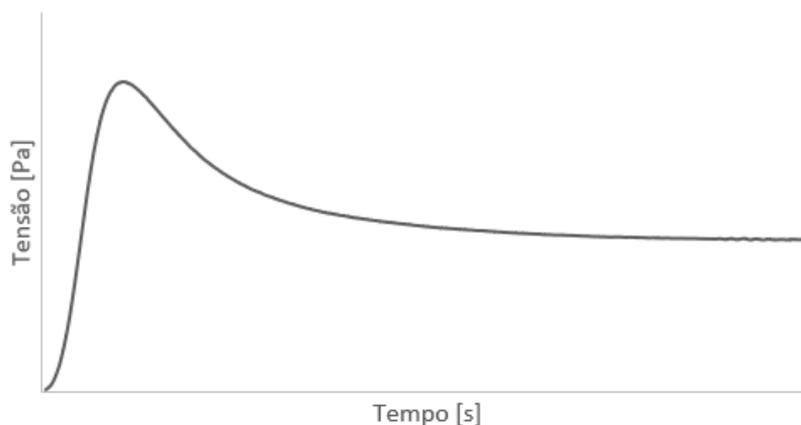


Figura 1 – Curva genérica de Tensão [Pa] x Tempo [s] de um fluido não newtoniano – Fonte: Autoria própria.

Para a realização de testes experimentais reológicos em um fluido é necessário a utilização de um reômetro rotacional. Existem diversos modelos e preços para este equipamento, porém um reômetro rotacional com precisão adequada para pesquisa, tal qual o Haake MARS III, base para os experimentos propostos no estudo de Andrade et al. (2016) e Negrão et al (2011), um laboratório que necessite de uma estrutura para testes com este equipamento pode desembolsar valores superiores a 500 mil reais. Na Figura 2 apresenta-se um exemplo de reômetro rotacional Haake III.



Figura 2 – Reômetro rotacional Haake MARS – Fonte: Thermo Fisher Scientific, 2024.

Os fluidos testados nesse equipamento necessitam de 30 minutos de preparação anteriormente a cada análise, e o teste em si dura em torno de 1 hora. Para cada curva nova de interesse para teste é necessário um tempo de uma hora e meia, considerando que o teste ocorra sem nenhuma falha ou empecilho. A Rede Neural Artificial pode ajudar a reduzir ao máximo a necessidade de testes, gerando economia monetária e de tempo.

2.2 Modelagens Matemáticas

Para averiguar a qualidade das previsões propostas nesse trabalho, além de comparar com os resultados experimentais, a Rede Neural foi comparada com a modelagem matemática proposta por Andrade et al. (2016) descrita no Apêndice A.

2.3 Redes Neurais Profundas (DNNs)

O avanço tecnológico tem proporcionado um vasto leque de novas ferramentas que têm se mostrado extremamente úteis no mercado de trabalho e no meio acadêmico. As redes neurais artificiais emergem como uma ilustração notável desses avanços, em razão de sua excepcional capacidade de se adaptar a uma ampla variedade de problemas específicos. Esses modelos computacionais, que emulam o funcionamento sináptico do cérebro humano, demonstram aplicabilidade em uma multiplicidade de disciplinas, incluindo psicologia, engenharia, estatística e física. (Abdi, 1999).

A funcionalidade central de uma Rede Neural Artificial é baseada na sua habilidade intrínseca de inferir ou prever saídas (*outputs*) a partir de um conjunto específico de entradas (*inputs*). Esse processo de inferência ou previsão é efetivado através da identificação e aplicação de padrões complexos, os quais são aprendidos pela rede durante um rigoroso procedimento de treinamento. Essa capacidade de discernimento, que permite à rede neural mapear de maneira eficiente os dados de entrada para as saídas correspondentes, é matematicamente representada e generalizada por uma fórmula específica.

$$y = f(x; \theta) \quad (1)$$

Este equacionamento genérico, característico das redes neurais do tipo *feedforward* (Goodfellow, 2016), descreve o fluxo de dados de entrada (x) através de uma função específica (f), utilizando parâmetros (θ) que são aprendidos durante o processo de treinamento da rede, para assim produzir a saída desejada (y), conforme descrito em obras de referência como o Goodfellow et al. (2016). No âmago de uma Rede Neural Artificial, encontra-se uma arquitetura composta por camadas de neurônios interconectados, onde cada neurônio atua como uma unidade de processamento fundamental. Estes neurônios estão intrinsecamente conectados, e seus pesos e limiares se ajustam de maneira adaptativa em resposta aos dados de entrada e às saídas correspondentes durante o treinamento. Ao detalhar o funcionamento interno de um único neurônio artificial, observa-se que ele opera como uma função matemática não linear. Esses neurônios individuais processam os sinais de entrada, ponderando-os e, posteriormente, passando-os por uma função de ativação, que introduz a não-linearidade essencial para a modelagem de relações complexas.

$$y = f\left(\sum_{i=1}^n (w_i \cdot x_i) + b\right) \quad (2)$$

Onde y representa a saída do neurônio, f é a função de ativação não linear que determina a resposta do neurônio, w_i são os pesos atribuídos a cada entrada inferida pelos

neurônios da camada anterior, x_i são os valores de entrada recebidos, b é o limiar que ajusta a saída além das entradas ponderadas e n é a quantidade de entradas que o neurônio recebe (Zayegh, 2018).

Em uma Rede Neural Artificial, a organização dos neurônios é estruturada em forma de camadas, cada uma desempenhando um papel específico no processo de aprendizado e processamento de dados. Inicialmente, encontra-se a camada de entrada, que serve como o ponto de recebimento dos dados iniciais para o sistema. Subsequentemente, estão as camadas ocultas, que podem variar em número. Estas camadas são fundamentais na arquitetura da rede, pois é nelas que ocorre o processamento substancial dos dados. Os neurônios nestas camadas processam as informações recebidas da camada anterior e transmitem os resultados processados para as próximas camadas. Concluindo a estrutura da rede, a camada de saída representa o final do fluxo lógico de processamento dentro da Rede Neural. Esta camada é crucial, pois é responsável por apresentar os resultados, como previsões ou classificações, baseados nos dados de entrada. A eficácia de uma Rede Neural, portanto, depende intrinsecamente da configuração precisa e da interação coordenada entre estas camadas, a Figura 3 demonstra a distribuição dos neurônios nas camadas principais.

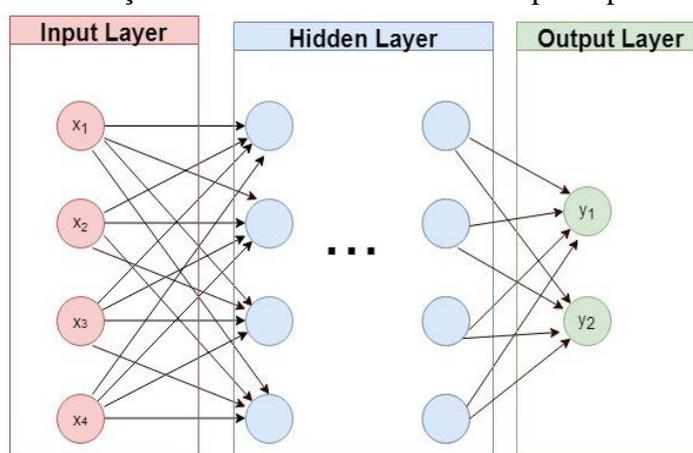


Figura 3 – Distribuição das camadas e neurônios de uma Rede Neural – Fonte: Bhargav, 2022.

Na Figura 3, identifica-se a presença de reticências na camada oculta (*Hidden Layer*) de uma Rede Neural, simbolizando a possibilidade de existência de múltiplas camadas ocultas. O número de camadas ocultas em uma Rede Neural está diretamente relacionado à complexidade do problema a ser resolvido. O aumento no número de camadas ocultas eleva substancialmente a demanda por recursos computacionais e a capacidade de processamento do modelo. Este aprofundamento em camadas ocultas adicionais converte uma Rede Neural padrão em uma Rede Neural Profunda (*Deep Neural Network*).

Os parâmetros modificáveis cruciais em uma Rede Neural incluem o número de neurônios e camadas, a escolha da função de ativação não linear e o ajuste de pesos. Esses parâmetros são denominados hiperparâmetros devido à sua capacidade de serem ajustados diretamente pelo usuário, conforme destacado por Ripley (1996). Embora existam outros parâmetros, como o limiar, eles não influenciam diretamente as operações matemáticas da rede. O ajuste adequado desses hiperparâmetros é vital para sua eficácia. Esse processo envolve equilibrar os recursos computacionais disponíveis, otimizar a qualidade da rede, e prevenir erros dimensionais como o sobreajuste. Este fenômeno ocorre quando a rede se ajusta excessivamente aos dados de treinamento, comprometendo sua habilidade de generalizar para novos dados, o que pode diminuir significativamente a performance da Rede Neural.

A otimização desses parâmetros é feita pelo treinamento da Rede Neural que consiste em um processo iterativo dos parâmetros da rede, como pesos e vieses, para minimizar a discrepância entre as saídas previstas e as reais ou desejadas. Para averiguar a qualidade da Rede Neural são utilizadas funções de erro que medem o quão bem o modelo proposto está realizando os cálculos solicitados, quantificando a diferença entre as previsões do modelo e os valores reais ou esperados. A função de erro é usada para guiar o processo de otimização do modelo, onde o objetivo é minimizar esse erro, ajustando os parâmetros do modelo de forma a melhorar suas previsões.

3. METODOLOGIA

Nesta seção, serão detalhados os dados relativos ao fluido que está sendo analisado, focando primordialmente no comportamento da tensão ao longo do tempo, conforme observado experimentalmente. Além disso, será realizada uma análise aprofundada da arquitetura da rede neural empregada, com ênfase na otimização dos parâmetros.

3.1 Dados Utilizados

Os dados experimentais do fluido à base de óleo em questão, amplamente empregado em operações de perfuração de poços de petróleo, foram extraídos de Andrade et al. (2016). A Figura 4 exibe a distribuição de tensão do fluido ao longo do tempo em escala logarítmica, cada curva corresponde a uma taxa de deformação em equilíbrio específica.

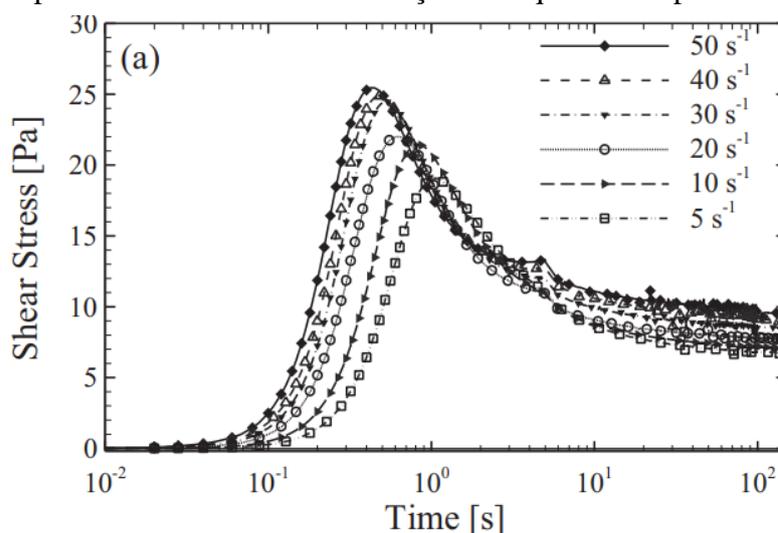


Figura 4 – Distribuição Tensão [Pa] x Tempo[s] do fluido de perfuração a base de óleo – Fonte: Andrade et al., (2016).

A metodologia para mensurar o comportamento do fluido envolveu o uso de um reômetro rotacional, que foi utilizado para determinar a relação entre tensão e tempo para seis distintas taxas de deformação final, variando de 5 s^{-1} e 50 s^{-1} . Na figura 4, é apresentada uma análise detalhada do comportamento do fluido em estudo, evidenciando suas fases distintas, decorrentes de sua composição complexa. O fluido é constituído por partículas de calcário suspensas em uma emulsão de óleo em água, conferindo-lhe propriedades tixelastoviscopelásticas. Inicialmente, o fluido exibe uma fase elástica, na qual se comporta analogamente a um sólido elástico, capaz de armazenar energia e retornar ao seu estado original, desde que a deformação aplicada não exceda seu limite elástico (Andrade et al., 2016).

Um aspecto significativo observado é o pico de tensão que o fluido atinge, um ponto crítico que deve ser cuidadosamente monitorado devido ao intervalo de pressão necessário para a eficácia do fluido (Caenn & Chillingar, 1996). Observa-se que, quanto maior a taxa de deformação, mais acentuado e rápido é o pico de tensão. Este fenômeno é de vital importância durante a implementação do fluido em contextos práticos de perfuração de poços de petróleo.

Após o pico de tensão, o fluido transita para a fase viscosa. Esta fase é caracterizada por uma relação não linear entre a resistência ao fluxo e a taxa de deformação, culminando no alcance de um estado de equilíbrio. O decaimento contínuo da tensão ao longo do tempo é um indicativo da tixotropia do fluido, uma propriedade que influencia diretamente no comportamento do fluido sob condições variadas de escoamento (Mewis and Wagner, 2009).

Os dados experimentais, que consistem em medições do tempo (segundos), tensão (Pascal) e taxa de deformação (1/s) para cada taxa de deformação em equilíbrio, constituíram a base fundamental para o treinamento e validação da Rede Neural, fornecendo um *benchmark* crucial, à partir da variação de tensão (Pa) ao longo do tempo (s), para a avaliação da qualidade e eficácia do modelo de Rede Neural desenvolvido.

3.2 Arquitetura da Rede Neural Profunda

Como Musgrave (2020) destaca, uma biblioteca eficaz é crucial para a formulação das equações diferenciais parciais que operam na 'caixa preta' das redes neurais. O *PyTorch* oferece ferramentas para a manipulação de tensores e a arquitetura flexível da rede, facilitando soluções personalizadas em aprendizado de máquina utilizada em artigos como Da Silva, 2023. Portanto, este trabalho utiliza o *PyTorch* para desenvolver redes neurais, capitalizando sua capacidade de gerenciar tarefas complexas de aprendizado profundo.

Todas as Redes Neurais Profundas (DNNs) desenvolvidas neste estudo utilizam dois dados de entrada: tempo (t), vetorial, e taxa de deformação em equilíbrio ($\dot{\gamma}_{eq}$), escalar. Durante o processamento interno da rede, os outputs gerados são a variação de tensão (τ) e a variação da taxa de deformação ($\dot{\gamma}$), ambos vetoriais. No treinamento, 60% dos dados das curvas de treino foram utilizados para analisar os padrões complexos para realizar as previsões.

$$\begin{bmatrix} \tau \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = N \left(\begin{bmatrix} t \\ \dot{\gamma}_{eq} \end{bmatrix} \right) \quad (3)$$

Em trabalhos relevantes, em termos arquitetura de RNAs, como os de Yu et al. (2020), a taxa de aprendizado é destacada como um parâmetro crucial. Seguindo a abordagem abordada por Da Silva (2023), foi utilizada a ferramenta *ReduceLROnPlateau* do Pytorch, um ajustador de taxa de aprendizagem em treinamento de redes neurais. Essa ferramenta diminui automaticamente a taxa de aprendizagem quando uma métrica monitorada, tal como a perda de validação, não apresenta melhoria, demonstrando sua eficácia na otimização do processo de aprendizado das redes. Outro parâmetro fixo no desenvolvimento do código foi o algoritmo de otimização, neste caso foi utilizado o Adam, devido ao sucesso de implementação em estudos como o de Kingma (2014).

Neste trabalho serão utilizadas duas funções de perda em conjunto para otimizar os parâmetros: O Erro Quadrático Médio (MSE - *Mean Squared Error*) mede a média dos quadrados das diferenças entre os valores previstos pelo modelo e os valores reais. A fórmula do MSE é dada por:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad (4)$$

Onde n é o número total de observações, Y_i são os valores reais e \hat{Y}_i são os valores previstos pelo modelo. A função de perda L1, também conhecida como Lasso, é utilizada para promover a dispersão dos coeficientes do modelo, tornando-a eficaz na seleção de características. A fórmula da função de perda L1 é:

$$L1 = \sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i| \quad (5)$$

Neste caso, $|Y_i - \hat{Y}_i|$ representa o valor absoluto da diferença entre os valores reais e os previstos. Ao utilizar ambas as funções de perda, um modelo pode se beneficiar da precisão do MSE em capturar a tendência central dos dados, enquanto a L1 contribui para a robustez e a seleção eficaz de características.

Para otimizar a configuração da DNN, foi empregada uma metodologia de testes estruturados, visando definir o número de camadas, a função de ativação e o número de neurônios. Foi dada especial atenção ao pico de tensão, um fator crítico no comportamento do fluido. Para avaliar a eficiência de cada configuração testada, utilizou-se um índice de eficiência baseado na média ponderada de parâmetros pré-definidos: a perda de dados, a Diferença Absoluta Média (AAD) entre os dados experimentais e os previstos, e a qualidade do pico de tensão, com um peso dobrado devido à sua importância.

A perda de dados durante o treinamento é calculada pelo conjunto de equações citadas 3 e 4, que representam o *Data Loss* total.

$$L_{dados}(Y) = \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \beta \sum_{i=1}^n |Y_i - \hat{Y}_i| \quad (6)$$

Onde α e β são os pesos de cada medida de perda, neste caso 0,5 cada. Já a AAD é determinada pela fórmula específica, fornecendo uma medida quantitativa da precisão da DNN em relação aos dados experimentais.

$$AAD\% = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{|\hat{Y}_i - Y_i|}{Y_i} \right] \times 100 \quad (7)$$

Onde n é o número de pontos. O processo de treinamento da DNN consiste na execução de um conjunto completo de passagens dos dados pelo modelo, conhecido como *epochs*. Para este projeto, foi estabelecido um total de 50.000 *epochs*, uma decisão baseada tanto na capacidade computacional disponível quanto na estratégia para prevenir o sobreajuste.

Os dados, 2400 linhas, foram divididos entre dados de treinamento e dados de teste, onde 60% dos dados foram aleatoriamente alocados no treinamento e o restante utilizados na validação, de forma uniforme. Os testes estruturados iniciaram com os parâmetros apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados iniciais para definição da arquitetura da DNN.

Epochs	50000
Dados Treino	60%
Dados Teste	40%
Algoritmo de Otimização	Adam
Taxa de aprendizagem	ReduceLROnPlateau
Número de pontos totais	2400
γ em equilíbrio para treino	$5 s^{-1}$; $30 s^{-1}$; $50 s^{-1}$
Funções de Ativação	ReLU; PreLU; SoftSign; Tanh; Sigmoid; SiLU
Número de Camadas	2; 3; 4; 5; 6
Número de Neurônios	12; 24; 36; 48; 60; 72

Na seção 3.1, detalha-se como a divisão dos dados do fluido foi orientada pelas taxas de deformação em equilíbrio, que variam de $5 s^{-1}$ e $50 s^{-1}$. Para o estudo, essas taxas foram categorizadas em dois grupos distintos, cada um com três diferentes taxas. O primeiro grupo, composto pelas taxas de $5 s^{-1}$, $30 s^{-1}$ e $50 s^{-1}$, foi especificamente utilizado para o treinamento e a avaliação da Rede Neural Profunda. Já o segundo grupo, que inclui as taxas de $10 s^{-1}$, $20 s^{-1}$ e $40 s^{-1}$, foi empregado nas atividades de previsão e nas análises comparativas apresentadas na seção de resultados.

Foram realizadas 150 validações cruzadas com os dados da Tabela 1 para identificar a Rede Neural Profunda (DNN) de melhor desempenho. Essa análise envolveu a avaliação das validações mais eficazes para cada função de ativação, utilizando o índice de *performance* da Rede Neural citado. A Tabela 2 mostra os melhores parâmetros para cada função de ativação.

Tabela 2 – Melhores parâmetros de acordo com a função de ativação.

Ativação	Índice	Neurônios	Camadas	Tempo[s]
ReLU	0,064749	12	4	2100
PreLU	0,034748	12	4	2040
SoftSign	0,07178	36	3	2318
Tanh	0,07517	72	2	2359
Sigmoid	0,038955	48	2	1578
SiLU	0,039247	36	3	2117

A Figura 5 consolida as informações da Tabela 2 visualizando a distribuição do índice de qualidade para cada função de ativação, onde quanto menor o índice melhor a precisão de previsão da DNN.

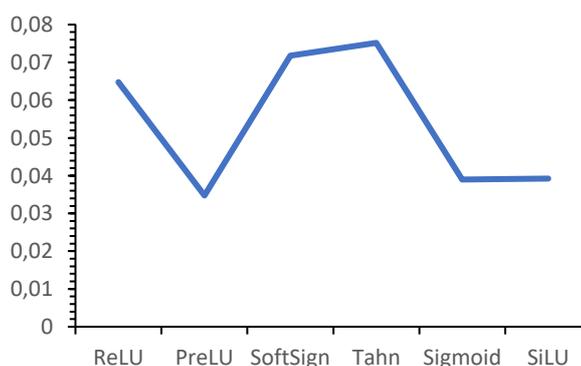


Figura 5 – Análise das validações segundo o índice de qualidade.

O tempo de processamento não foi levado em consideração pois a variação entre o mais rápido e o mais lento não foi significativamente relevante. A figura 3 mostra que a função de ativação PreLU mostrou o melhor resultado. A PreLU (*Parametric Rectified Linear Unit*) é caracterizada pela presença do alfa na equação que multiplica os valores de entrada negativos ao invés de transformá-los em zero. Logo a arquitetura final utilizada nesse trabalho foi a demonstrada na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros variáveis finais utilizados na DNN.

Função de ativação	Número de Neurônios	Número de Camadas
PreLU	12	4

4. RESULTADOS

Nessa seção os resultados previstos pela DNN obtidos pelo procedimento detalhado na seção 3.2 são comparados com os resultados experimentais e a modelagem proposta por Andrade et al. (2016) descrita no Apêndice A. Para analisar a aplicabilidade da DNN, a mesma DNN será analisada com outro fluido de perfuração similar ao proposto com a análise dos resultados.

4.1 Resultados do fluido de perfuração principal

As Figuras 6 , 7 e 8 ilustram os resultados das previsões geradas pela DNN, configurada com os parâmetros arquitetônicos definidos no estudo, e compara-os com os dados experimentais do comportamento do fluido, bem como com os resultados da modelagem apresentada por Andrade et al. (2016). Nesta figura, é exibido o comportamento da tensão do fluido em função do tempo, representado em uma escala logarítmica.

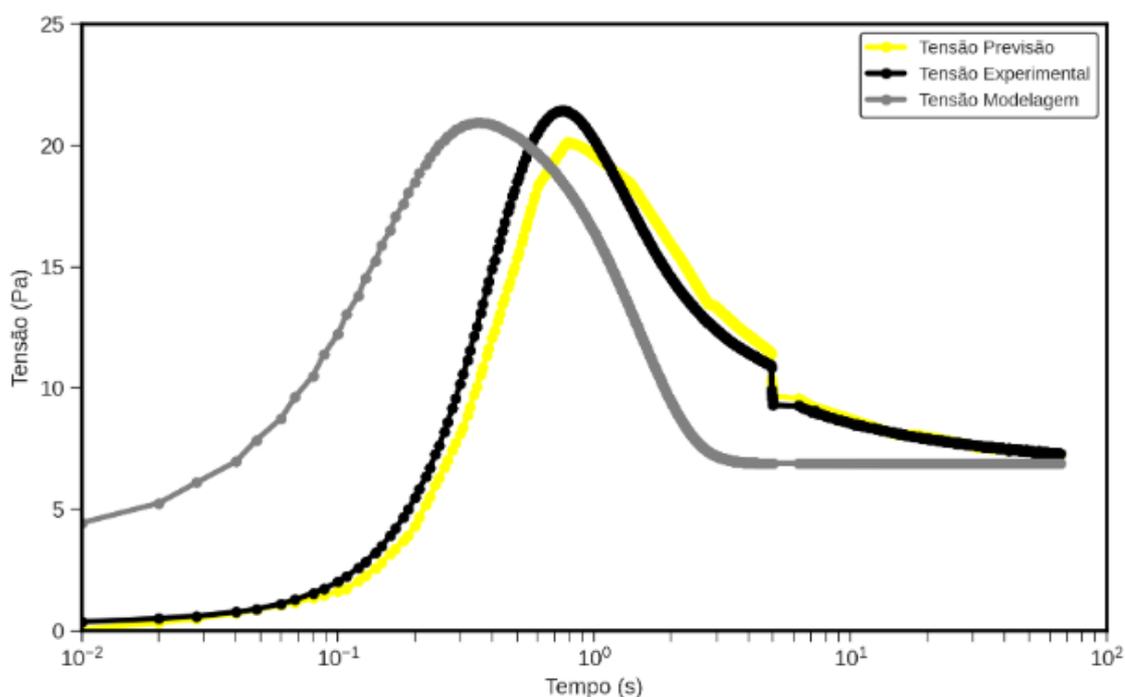


Figura 6 – Tensão [Pa] x Tempo [log10 s] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais e modelagem matemática. Taxa de deformação final de 10 s^{-1} .

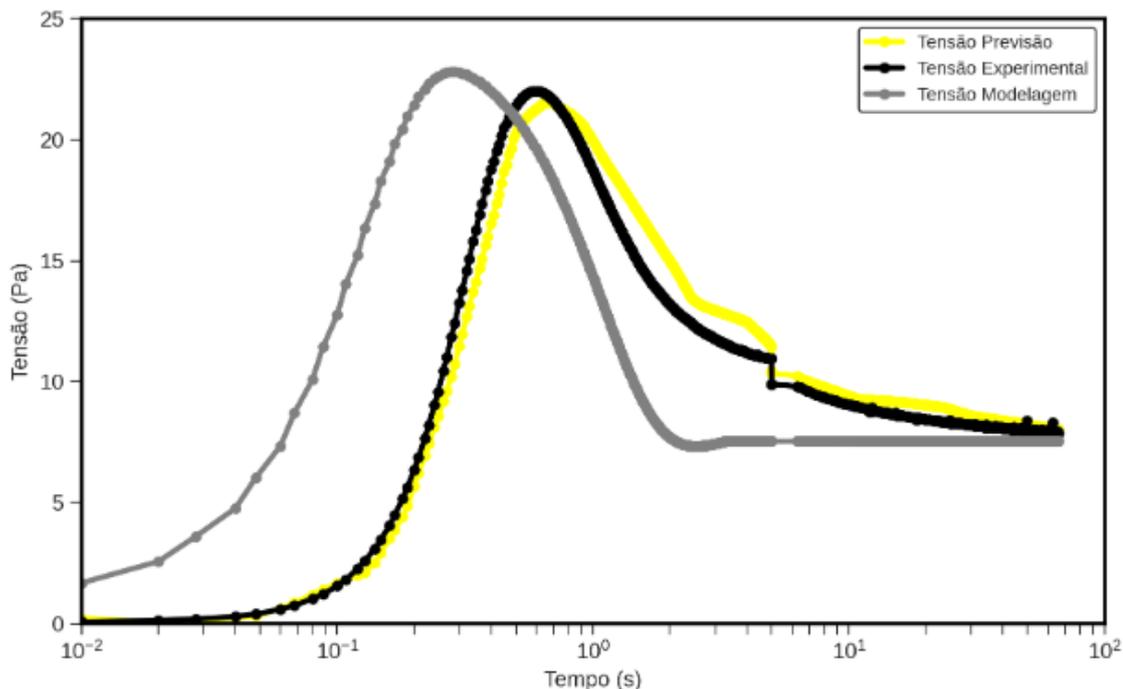


Figura 7 – Tensão [Pa] x Tempo [log10 s] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais e modelagem matemática. Taxa de deformação final de 20 s^{-1} .

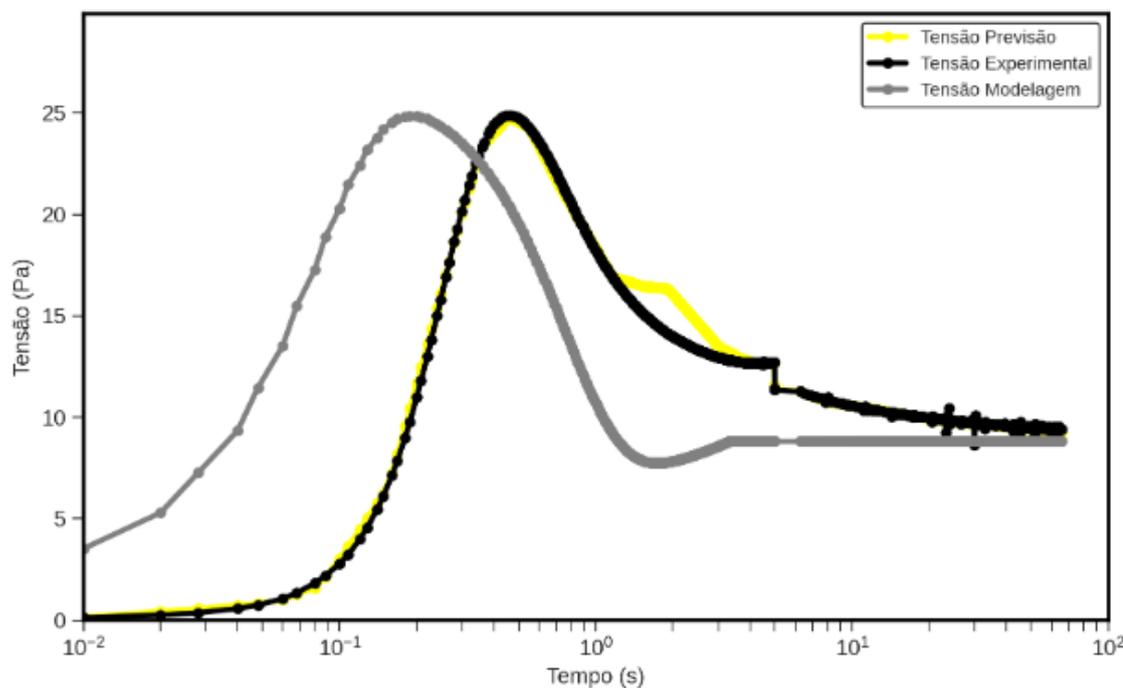


Figura 8 – Tensão [Pa] x Tempo [log10 s] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais e modelagem matemática. Taxa de deformação final de 40 s^{-1} .

Nas Figuras 6, 7 e 8, observa-se uma descontinuidade nos dados pouco antes da estabilização da tensão, uma lacuna decorrente dos métodos experimentais aplicados. Conforme Andrade et al. (2016), dois testes distintos foram realizados no fluido: um teste de rampa nos primeiros cinco segundos seguido por um teste de patamar a partir do sexto segundo. Estes métodos resultaram nas características observadas nos gráficos.

As curvas evidenciam a alta qualidade da Rede Neural Profunda desenvolvida neste trabalho, com todas as previsões apresentando semelhança à fase elástica experimental e apenas pequenas variações na fase viscosa. Na Figura 6, a previsão do pico de tensão foi a mais distante entre as três, com um desvio de 10,51%, alterando a fase elástica e viscosa próximas ao pico. No entanto, na fase de equilíbrio, as previsões foram mais precisas, com uma diferença de apenas 8,3% em relação ao valor final, resultando em um AAD (Diferença Absoluta Média) de 5,25%.

A Figura 7 exibiu um comportamento previsto mais próximo do experimental, com uma discrepância de 4,26% no pico de tensão e um AAD de 8,07%. Esta variação maior se deve principalmente ao decaimento viscoso do fluido, contudo, a precisão na previsão do pico sublinha a qualidade do modelo.

Por fim, a Figura 8 apresentou os resultados mais acurados, com uma diferença de 6,75% no pico de tensão e um AAD de 3,36%, evidenciando uma variação maior no decaimento de viscosidade. Este menor AAD pode ser atribuído à formação da DNN durante o treinamento, visto que a figura 8 refletiu a taxa de deformação final mais próxima das taxas usadas no treinamento da rede.

O AAD serve como principal indicador da precisão das previsões da Rede Neural em comparação aos dados experimentais. Neste experimento, o AAD variou entre 5,25% e 8,07%, um resultado considerado satisfatório, especialmente ao comparar com a modelagem matemática tradicional, que apresentou um AAD entre 6,3% e 13,1%, conforme relatado por Andrade et al. (2016).

4.2 Análise da introdução de um fluido de perfuração similar na DNN criada

A qualidade e representatividade da Rede Neural Profunda criada foi analisada utilizando outro fluido de perfuração similar ao fluido principal deste trabalho. Sem alterar nenhuma configuração inicial da DNN os dados retirados do artigo Negrão et al. (2011) foram submetidos a DNN para treinamento e previsão. A Figura 9 apresenta a distribuição comportamental do fluido de perfuração com as características similares as discutidas anteriormente, os testes foram realizados por um grupo de reologia da PUC-RJ.

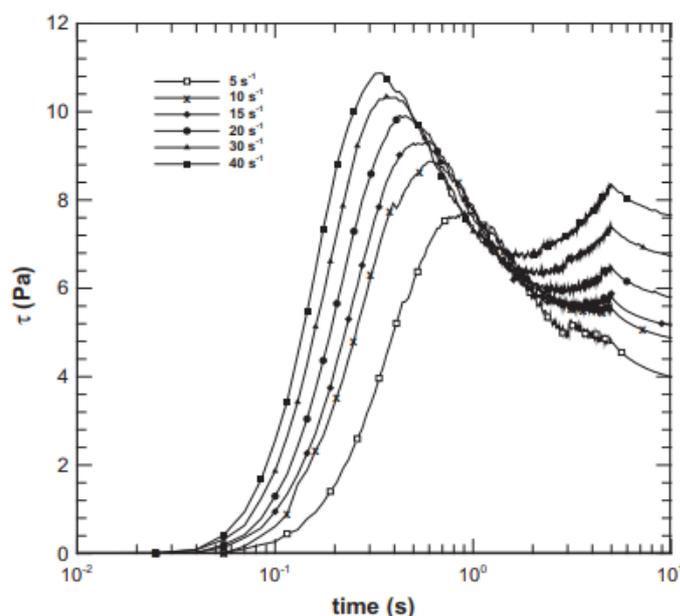


Figura 9 – Distribuição Tensão [Pa] x Tempo[s] do fluido de perfuração alternativo – Fonte: Negrão et al (2011).

O comportamento desse fluido é similar ao fluido principal apresentado na seção 3.1, com uma leve variação no final da fase viscosa até a estabilização da tensão. As taxas de deformação em equilíbrio possuem uma variação entre 5 s^{-1} e 40 s^{-1} , neste caso o grupo de treinamento da DNN foram as taxas de deformação 5 s^{-1} , 15 s^{-1} e 40 s^{-1} e as taxas de deformação para realizar as comparações das previsões foram 10 s^{-1} , 20 s^{-1} e 30 s^{-1} .

A Rede Neural foi ajustada com os mesmos parâmetros da DNN discutida na seção 3.2, consolidados na tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetro introduzidos na DNN para treinamento e previsão dos dados do novo fluido referente ao artigo de Negrão et al., (2011).

Epochs	50000
Dados Treino	60%
Dados Teste	40%
Algoritmo de Otimização	Adam
Taxa de aprendizagem	ReduceLROnPlateau
Número de pontos totais	2400
γ em equilíbrio para treino	5 s^{-1} ; 15 s^{-1} ; 40 s^{-1}
γ em equilíbrio para previsões	10 s^{-1} ; 20 s^{-1} ; 30 s^{-1}
Funções de Ativação	PreLU
Número de Camadas	4
Número de Neurônios	12

As Figuras 10, 11 e 12 apresentam os gráficos das previsões calculadas pela Rede Neural Profunda computada com os parâmetros obtidos na arquitetura da DNN juntamente com o comportamento experimental do fluido. Essas Figuras apresentam o comportamento de tensão do fluido de tensão pelo tempo em escala logarítmica. Nesse exemplo a análise foi feita somente entre a previsão proposta e os dados experimentais para analisar o comportamento da Rede Neural do fluido estudado no artigo Negrão et al., 2011.

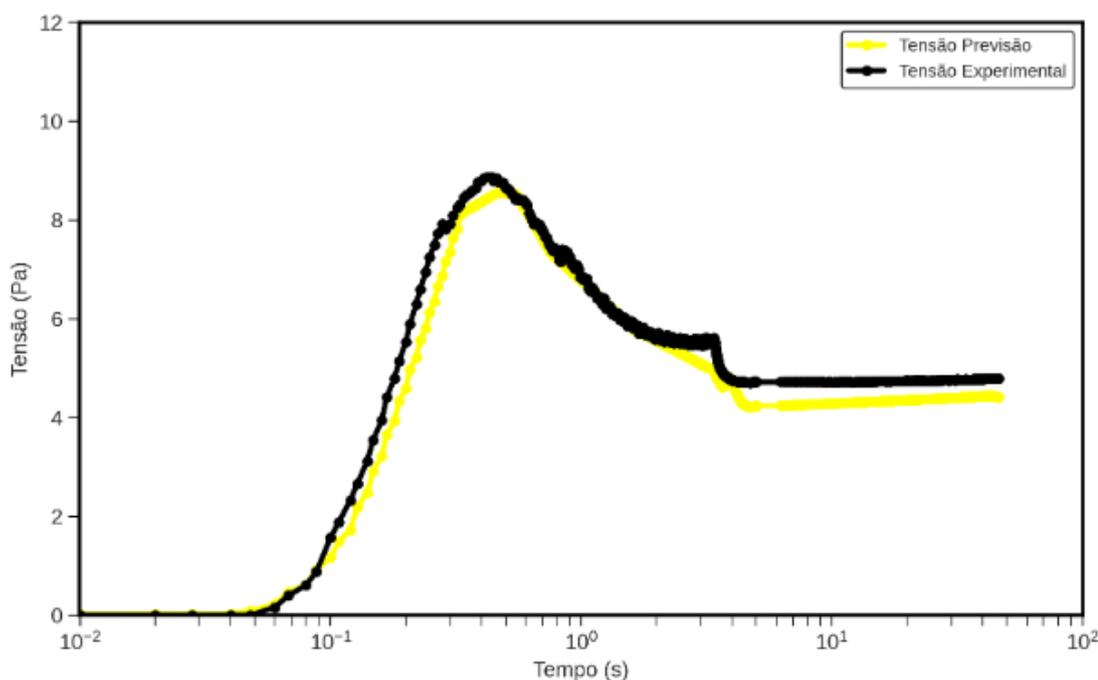


Figura 10 – Tensão [Pa] x Tempo [$\log_{10} \text{ s}$] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais do fluido alternativo para taxa de deformação final de 10 s^{-1} .

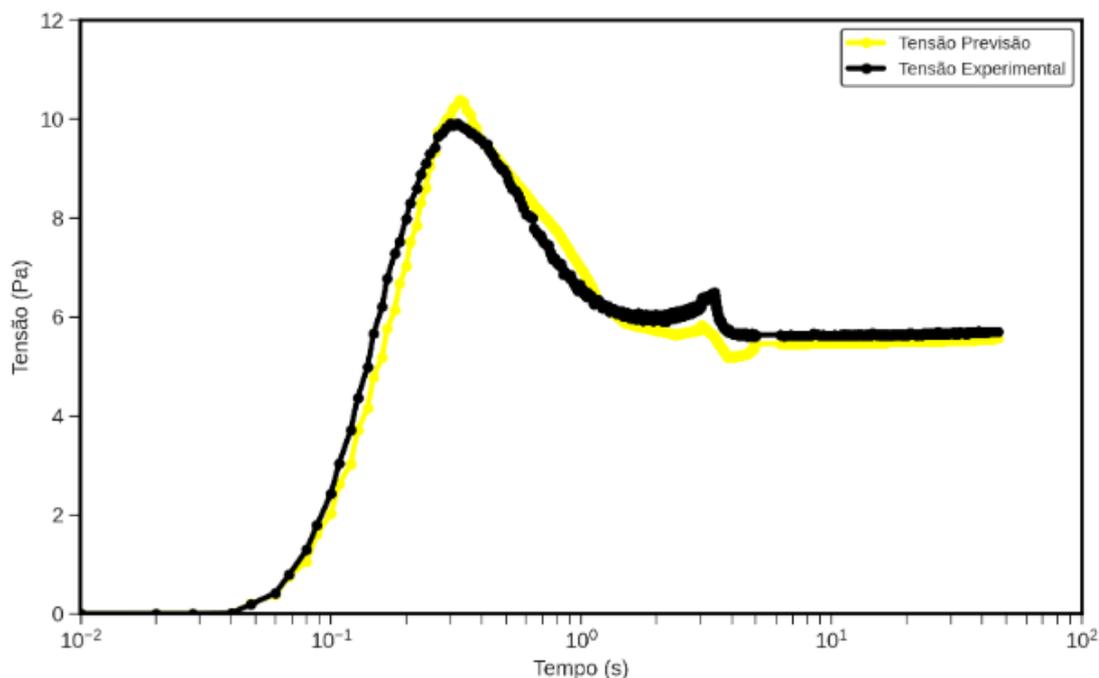


Figura 11 – Tensão [Pa] x Tempo [log10 s] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais do fluido alternativo taxa de deformação final de 20 s^{-1} .

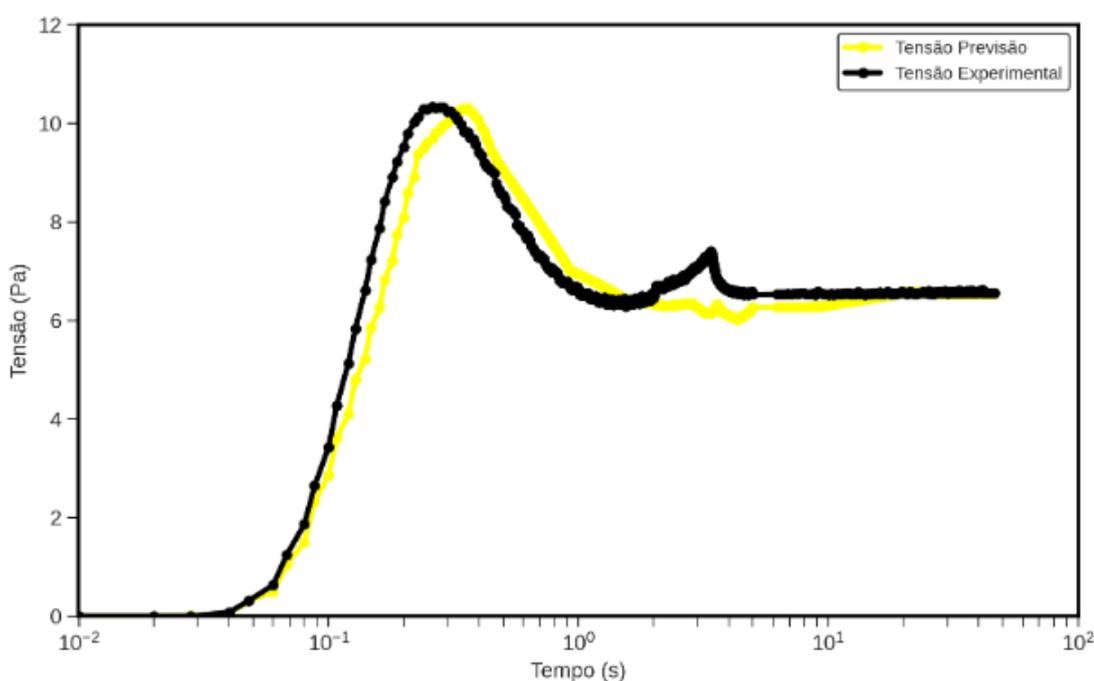


Figura 12 – Tensão [Pa] x Tempo [log10 s] da comparação da previsão da DNN com os resultados experimentais do fluido alternativo taxa de deformação final de 30 s^{-1} .

Na Figura 10, observa-se uma distribuição homogênea dos dados com uma margem de erro praticamente constante ao longo da curva. O pico de tensão diferiu em 3,44%, indicando um pequeno deslocamento na fase elástica, e o AAD registrado foi de 6,06%. Este valor atesta a eficácia da Rede Neural para casos semelhantes.

Por outro lado, a figura 11 mostrou uma diferença mais notável no pico de tensão, com uma margem de erro de 5,33%. Apesar disso, as variações ao longo da curva foram mais

suaves, e a tensão na fase de equilíbrio se mostrou equivalente, resultando em um AAD de 5,28%. Já a figura 12 apresentou uma margem de erro no pico de 5,06% e uma previsão menos precisa para o segundo pico antes da estabilização da tensão, alcançando um AAD de 5,54%.

A proximidade dos valores de AAD nos diferentes gráficos indica a estabilização da performance da Rede Neural Profunda neste contexto e sugere que a distribuição dos dados de treinamento foi adequada. Conforme indicado por Negrão et al. (2011) e Andrade et al. (2016), modelagens com AAD inferiores a 10% são consideradas de boa qualidade, o que reforça a eficácia dos resultados obtidos para ambos os fluidos analisados neste estudo.

5. CONCLUSÃO

A discussão proposta na introdução trouxe como questionamento a possibilidade de introduzir a metodologia de Redes Neurais para prever o comportamento de um fluido de perfuração à base de óleo. Existem diversas modelagens matemáticas, citadas na seção 1 e ao longo desse trabalho, que realizam o *curve fit* desse fluido, porém necessitam de diversos testes experimentais. A Rede Neural reduz a necessidade de diversos testes gerando uma economia de dinheiro e tempo, transformando-se em um “reômetro digital”.

A concretização da metodologia proposta na seção 3 e os resultados demonstrados na seção 4 mostraram que a Rede Neural Profunda possibilita a redução de testes necessários para análise das curvas.

Em ambos os fluidos, tanto no fluido principal quanto no fluido adicional, discutido na seção 4.2, foi possível realizar o treinamento com 50% das curvas experimentais, com uma margem de erro média de 5,56% no fluido principal e 5,63% no fluido adicional, valores considerados bons, como visto na seção 4.2, por estarem abaixo de 10%. Esses dados enfatizam a robustez da Rede Neural Profunda ajustada nesse trabalho para fluidos de perfuração com comportamentos de tensão ao longo do tempo similares.

Na realização do treinamento foram utilizadas as curvas do comportamento referentes as taxas de deformação em equilíbrio extremas e uma intermediária e as demais taxas utilizadas para analisar a qualidade da previsão. Diante dos resultados obtidos, pressupõe-se que a qualidade da previsão será mantida para outros valores dentro do intervalo das curvas extremas, assim sendo possível realizar diversos testes, com a margem de erro média citada, e a taxas de deformação em equilíbrio diferentes, sem a necessidade de realizar mais de 3 testes experimentais.

Este estudo demonstra o potencial das Redes Neurais Profundas na reologia e na previsão do comportamento de fluidos, minimizando a necessidade de experimentos. Para futuras investigações, seria interessante explorar a redução ainda maior dos testes experimentais, talvez através da implementação de Redes Neurais Informadas por Física (PINNs), que incorporam equações físicas para ajustar o máximo possível perda de dados na rede. Dado o caráter complexo dos fluidos em questão, pode ser necessário aplicar múltiplas equações físicas para modelar adequadamente cada aspecto do comportamento do fluido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDI, Hervé; VALENTIN, Dominique; EDELMAN, Betty. **Neural networks**. Sage, 1999.

ALSABAA, Ahmed et al. New correlations for better monitoring the all-oil mud rheology by employing artificial neural networks. **Flow Measurement and Instrumentation**, v. 78, p. 101914, 2021.

ANDRADE, Diogo EV et al. Curve-fitting equation for prediction of the start-up stress overshoot of an oil-based drilling fluid. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 146, p. 902-908, 2016.

BHARGAV, Nikhil, **Neurons in Neural Networks**. Disponível em: <<https://www.baeldung.com/cs/neural-networks-neurons>>. Acesso em: 21 dez. 2023.

CAENN, Ryen; CHILLINGAR, George V. Drilling fluids: State of the art. **Journal of petroleum science and engineering**, v. 14, n. 3-4, p. 221-230, 1996.

DA ROCHA, Leandro Lourenço Vieira. Modelagem do reinício do escoamento de um fluido de perfuração tixotrópico. 2010. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

DA SILVA, Bruno Fagherazzi Martins. On the application of Physics-Informed Neural Networks in the modelling of Roll Waves. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

ELKATATNY, Salaheldin; TARIQ, Zeeshan; MAHMOUD, Mohamed. Real time prediction of drilling fluid rheological properties using Artificial Neural Networks visible mathematical model (white box). **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 146, p. 1202-1210, 2016.

ESFE, Mohammad Hemmat et al. Modeling and prediction of rheological behavior of Al₂O₃-MWCNT/5W50 hybrid nano-lubricant by artificial neural network using experimental data. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 510, p. 625-634, 2018.

FERNANDES, Rubens R. et al. Correlation between the gel-liquid transition stress and the storage modulus of an oil-based drilling fluid. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, v. 231, p. 6-10, 2016.

FERNANDES, Rubens Rosario. Metodologia para preparação de amostras em testes reológicos e determinação da tensão limite de escoamento de fluidos de perfuração. 2014. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

GOODFELLOW, Ian; BENGIO, Yoshua; COURVILLE, Aaron. **Deep learning**. MIT press, 2016.

HAYKIN, Simon. Neural networks expand SP's horizons. **IEEE Signal Processing Magazine**, v.13, n. 2, p. 24-49, 1996.

HOUSKA, M. **Engineering aspects of the rheology of thixotropic liquids**. D, Czech Technical University of Prague, Prague, 1981.

IBP (Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis). **Estudo mostra importância do setor de petróleo e gás para a economia do Brasil**. Disponível em: <<https://www.ibp.org.br>>. Acesso em: 12 nov. 2023.

IONESCU, Clara-Mihaela et al. Mathematical modelling with experimental validation of viscoelastic properties in non-Newtonian fluids. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, v. 378, n. 2172, p. 20190284, 2020.

LECUN, Yann; BENGIO, Yoshua; HINTON, Geoffrey. **Deep learning**. *nature*, v. 521, n. 7553, p. 436-444, 2015.

MEWIS, Jan; WAGNER, Norman J. Thixotropy. **Advances in colloid and interface science**, v. 147, p. 214-227, 2009.

MITISHITA, Rodrigo Seiji. Projeto de aparato experimental para avaliação de pressões e vazões no reinício de escoamento de fluidos de perfuração. 2015. **Trabalho de Conclusão de Curso**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

MUSGRAVE, Kevin; BELONGIE, Serge; LIM, Ser-Nam. **Pytorch metric learning**. arXiv preprint arXiv:2008.09164, 2020.

Negrão, C.O.R., Franco, A.T., Rocha, L.L.V., 2011. A weakly compressible flow model for the restart of thixotropic drilling fluids. **J. Nonnewton Fluid Mech.** 166, 1369–1381.

NIKBAKHT, Saeid; ANITESCU, Cosmin; RABCZUK, Timon. Optimizing the neural network hyperparameters utilizing genetic algorithm. **Journal of Zhejiang University-Science A**, v. 22, n. 6, p. 407-426, 2021.

PYTORCH. **Non-linear Activations (weighted sum, nonlinearity)**. Disponível em: <<https://pytorch.org/docs/stable/nn.html>> . Acesso em: 17 nov. 2023.

RUDER, Sebastian. **An overview of gradient descent optimization algorithms**. arXiv preprint arXiv:1609.04747, 2016.

SANTOS, Matheus Barreto. Perfuração de poços de petróleo: fluidos de perfuração. **Bolsista de Valor**, v. 2, p. 121-128, 2012.

SHEIATI, Shohreh et al. Neural network predictions of the simulated rheological response of cement paste in the FlowCyl. **Neural Computing and Applications**, v. 33, n. 19, p. 13027-13037, 2021.

Reômetro rotacional Haake MARS – **Thermo Fisher Scientific**, 2024. Disponível em: <<https://www.directindustry.com/pt/prod/thermo-fisher-scientific/product-236295-2382387.html>> Acesso em: 14 jan 2024.

ZAYEGH, Amer; AL BASSAM, Nizar. Neural network principles and applications. **Digital**

systems, 2018.

APÊNDICE A – Equacionamento de Andrade et al. (2016)

A modelagem matemática criada por Andrade et al. 2016 parte do princípio de que o comportamento do fluido em estudo tem um comportamento gráfico similar a uma equação de segundo grau. No artigo proposto, o gráfico analisado apresenta a tensão [Pa] em relação a deformação ao invés do tempo. Assim possibilitando a adequação do modelo a equação 8.

$$\frac{d^2\tau_y}{d\gamma^2} + K_1\frac{d\tau_y}{d\gamma} + K_2(\tau_y - \tau_{y,\infty}) = 0 \quad (8)$$

Essa é uma adequação de uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea. Onde K_1 e K_2 são parâmetros de ajuste e a equação depende da primeira e segunda derivadas de τ_y relativo à deformação γ e o valor de $\tau_{y,\infty}$. A equação 8 foi resolvida considerando a condição hiperbólica proposta por Kreyszing (2006). Essa iteração resulta na equação 9 que propõe uma equação com seis parâmetros.

$$\tau_y(\dot{\gamma}, \gamma) = \tau_{y,\infty} + e^{-\frac{1}{2}K_1\gamma} \left(C_1 e^{\frac{1}{2}\lambda_k\gamma} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\gamma} \right) \quad (9)$$

Onde C_1 e C_2 dependem das condições de contornos determinadas: (i) $\tau_y = 0$ para $\gamma = 0$ (ii) $\tau_y = \tau_{y,c}$ para $\gamma = \gamma_c$. $\tau_{y,c}$ é o valor máximo de τ_y , que é a tensão excessiva que ocorre na deformação crítica, γ_c . As variáveis C_1 e C_2 são descritas nas equações 10 e 11 respectivamente.

$$C_1 = \frac{(\tau_{y,c} - \tau_{y,\infty})e^{\frac{1}{2}K_1\gamma_c} + \tau_{y,\infty}e^{-\frac{1}{2}K_1\gamma_c}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\gamma_c} - e^{\frac{1}{2}\lambda_k\gamma_c}} \quad (10)$$

$$C_2 = - \left[\frac{(\tau_{y,c} - \tau_{y,\infty})e^{\frac{1}{2}K_1\gamma_c} + \tau_{y,\infty}e^{-\frac{1}{2}K_1\gamma_c}}{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k\gamma_c} - e^{\frac{1}{2}\lambda_k\gamma_c}} \right] \quad (11)$$

Como $\tau_{y,c}$ depende da magnitude da taxa de cisalhamento, a equação 12 foi proposta para adequar-se as exigências.

$$\tau_{y,c} = K_3\dot{\gamma}^{K_4} \quad (12)$$

As equações descritas apresentam seis parâmetros variáveis de acordo com o fluido estudado. Os parâmetros K_3 e K_4 são determinados pelo valor de $\tau_{y,c}$ e os valores K_1 e K_2 são ajustados aos dados reológicos transitórios do fluido estudado, já os parâmetros μ_p e $\tau_{y,\infty}$ são obtidos pela equação de equilíbrio calculada no início do artigo Andrade et al, 2016. A equação 13 apresenta a equação de Bingham para os dados do fluido.

$$\tau = 6.26 + 0.0642\dot{\gamma} \quad (13)$$

$R^2 = 0,996$