Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Pontos de Entropia e Função Entropia para Ações de Semigrupo Livre

Tese de Doutorado

Marcus Vinícius da Silva

Porto Alegre, dezembro de 2023.

Tese submetida por Marcus Vinícius da Silva [1] como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:
Fagner Bernardini Rodrigues (UFRGS)

Banca Examinadora:
Alex Jenaro Becker (UFSM)
Alexandre Tavares Baraviera (UFRGS)
José Afonso Barrionuevo (UFRGS)

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Se quer ir rápido, vá sozinho.
Se quer ir longe, vá acompanhado.
- Provérbio africano

A entrega da tese de doutorado marca o fim do doutorado, mas, mais do que isso, marca o fim de uma longa trajetória de estudo formal que começou muito antes da graduação. Os agradecimentos que me sinto compelido a fazer tentarão refletir isso, porém é conveniente salientar que eu fui ajudado por tanta gente, em tantos momentos, de tantas formas, que produzir uma lista exaustiva de todos aqueles a quem sou grato é humanamente impossível.

Primeiramente agradeço à minha mãe Maria Helena e ao meu pai João Rogério. Foram eles que me ensinaram os valores que me trouxeram até aqui, como o apreço pela Verdade, o desejo de conhecimento, a disciplina para o trabalho. Foram eles também que me deram os meios materiais para que eu perseguisse meus objetivos acadêmicos, às vezes à custa de grande sacrifício. Em 2015, quando eu ainda cursava Ciência da Computação e perguntei para minha mãe se ela achava que seria tudo bem se eu trocasse para a Matemática, ela me respondeu que sim com

muito mais confiança do que eu mesmo sentia. Para ela era óbvio que eu devia estudar o que eu mais gostava, mesmo que isso significasse ficar mais tempo sem ganhar dinheiro. A lembrança dessa crença tácita dela nas minhas capacidades foi o que me segurou em muitos momentos desde então. Ter terminado o doutorado foi para mim uma felicidade agridoce porque meu pai e minha mãe, meus dois maiores apoiadores, não estiveram aqui para dividir esse momento comigo. Continuar em frente, pronto para os próximos objetivos, como eles me ensinaram, é a minha forma de honrar-lhes a memória.

À minha família também devo agradecimentos, pelo apoio e por sempre me lembrarem do orgulho que eles tem por mim e pela minha trajetória. Em especial à Vó Celézia, que divide as refeições e os conselhos em qualquer momento que eu precise, e que me conhece muito bem: deixa uma térmica de café pronta sempre que intui que eu vou fazer uma visita.

Além da família, um outro conjunto de pessoas que foi essencial nessa história, assim como são essenciais na maioria das histórias: meus professores, tutores, mestres, mentores e guias. A professora Vanusa, minha primeira professora de Matemática, uma grande amiga que cultivou em mim o gosto pelo assunto; o professor Rogério, que me guiou em momentos chave da minha carreira matemática; o professor Eduardo, meu bisafessor (pois foi professor do Rogério, que foi professor da Vanusa, que foi minha professora), com quem tive o privilégio de estudar diversas disciplinas da graduação e por quem nutro imensa admiração; o professor Diego, meu orientador no período do mestrado, com quem comecei a parte mais voltada à pesquisa da carreira de matemático; e demais professores do Instituto de Matemática e Estatística, que em maior ou menor grau dividiram comigo

seu conhecimento matemático e sabedoria de vida, às vezes no contexto de sala de aula, às vezes no contexto de um barzinho. Cito em especial Miriam, Álvaro, Vanderson e Ricardo. Muito obrigado!

Dentre os mentores que eu tive nessa última fase da minha formação, dois se destacam. O primeiro é o professor Fagner, meu orientador do doutorado. Eu não tenho como expressar a extensão da minha gratidão. Ele já demonstrava ser um orientador fora de série em condições normais, mas foi durante a pandemia e meu período de luto pela minha mãe que eu percebi a sorte grande que eu tinha tirado na orientação. Ele sempre conseguiu me fazer ir além do que eu achava que conseguia. Me incentivou a correr atrás das oportunidades, algumas inclusive que eu não teria se não fosse por ele, e me ajudou a não ter medo de abraçá-las. Por tudo isso e muito mais, muito obrigado! Espero um dia poder proporcionar aos meus orientandos tal nível de qualidade de orientação.

O segundo mentor que se destaca é o professor Paulo, que foi meu co-orientador no período que fiquei na Universidade do Porto. Além da generosidade em me receber, sou grato pela disposição em me ajudar tanto nos problemas matemáticos que estávamos encarando quanto naqueles existenciais próprios do período da minha vida em que o conheci. Muito obrigado pela Matemática e pelos cafés!

Um assunto importante na academia, mas de que ainda se fala pouco, é a saúde mental. Para cuidar da minha eu sempre pude contar com a ajuda da minha psicóloga Claudia. Não fosse por ela, teria sido muito mais difícil lidar com todas as mudanças e questões que enfrentei pelo caminho. Muito obrigado por tudo!

Cruzei caminhos com muita gente incrível na Matemática da

UFRGS. Tem a turma antiga: Izabella, Josué, Will, Feltes, Pessil, Gleiciano. Foram inúmeras conversas e episódios da sitcom, lidando em conjunto com as questões que nos apareciam. Hoje estamos espalhados pelo Brasil e pelo mundo, mas sinto que estamos sempre perto. Tem meus parceiros de Sistemas Dinâmicos Andressa e Arthur, e o Humberto e a Alessandra, que não são de Sistemas Dinâmicos mas também são parceiros. Tem a turma mais nova, novos personagens da sitcom: Luiza, André, Vitória, Gabriel e Wesley. Muito obrigado pelos chimarrões, pelos cafés, pelas sessões de terapia em grupo, pelos veganismos. Todos vocês foram e são muito importantes para mim, os últimos oito anos não teriam sido nem uma fração do que foram não fossem por vocês.

Agradeço aos amigos do Coral da UFRGS, pelo apoio e presença essencial na minha vida desde a minha extremamente acertada decisão de fazer a audição lá em 2018.

Agradeço àqueles amigos que acabaram se tornando minha família: Jan, Lis, Jaime e Bruno. Poder compartilhar com vocês as minhas conquistas é uma das melhores partes delas. Se vocês já não fossem meus, eu roubava!

Agradeço aos amigos que desafiam categorização, mas que foram importantes, em particular, para que eu permanecesse firme no estudo, e também em geral, para que eu permanecesse firme na vida: Alan, Jéferson, Karina, Madruga, Vinícius, Aline e Lucas. Cada um foi importante à sua maneira, e sou grato a todos!

Agradeço, por fim, à banca da defesa da tese, por aceitar o convite e pelas ótimas sugestões dadas. Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, PPGMAT-UFRGS, e ao Instituto de Matemática e Estatística, por tudo que me proporcionaram.

À CAPES, agência de fomento sem a qual eu e tantos outros que eu conheço não teriam como ir atrás do sonho de se tornar matemáticos. À todos que no passado lutaram por educação gratuita e de excelência, e àqueles que continuam lutando por isso no presente. Muito obrigado!

Dedico esta tese aos meus amigos. Na vida, esse sistema dinâmico caótico e imprevisível, vocês têm sido meus pontos de entropia favoritos.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de algumas propriedades locais da entropia topológica de uma ação de semigrupo livre. Para fazer isso, focamos no conjunto de pontos de entropia de uma ação de semigrupo livre e mostramos que esse conjunto carrega a entropia total do sistema (o que, do ponto de vista da caoticidade do sistema, dá uma relevância fundamental a esse conjunto). Provamos que a entropia topológica de uma ação de semigrupo está focada em um conjunto enumerável de pontos. Nossos resultados são inspirados pelos resultados de [2].

Palavras-chave: Ação de semigrupo livre, entropia topológica, pontos de entropia, função entropia, skew-products.

Abstract

The aim of this work is to study some local properties of the topological entropy of a free semigroup action. In order to do that we focus on the set of entropy points of a free semigroup action, show that this set carries the full entropy of the system (which, with respect to the chaocity of the system, gives a fundamental relevante to such set). We prove that the topological entropy of a free semigroup action focuses on a countable set of points. Our results are inspired by the ones presented in [2].

Keywords: Free semigroup action, topological entropy, entropy points, entropy function, skew-products.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O conceito de entropia, que foi introduzido ao mundo dos sistemas dinâmicos mais de cinquenta anos atrás em [3], tornou-se um ingrediente importante na caracterização da complexidade de sistemas dinâmicos. A entropia topológica representa a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbita que são distinguíveis com precisão arbitrariamente grande, porém finita, e descreve de forma bruta mas sugestiva a complexidade exponencial total da estrutura das órbitas através de um único número. Dessa forma, tem, naturalmente, conexão com os conceitos de complexidade e de caos, que têm sido áreas de intensa pesquisa no último meio século.

Um vasto leque de investigações tem acontecido envolvendo comparações com outras formas de entropia, como, por exemplo, a entropia de Kolmogorov-Sinai (entropia métrica), entropia de grupo fundamental, entropia de Shannon, e entropia algébrica. Além disso, muita pesquisa continuou acontecendo nas conexões, principalmenta através de estimativas, com outros aspectos dos espaços, como a estrutura de sistemas dinâmicos mensuráveis no princípio variacional, estrutura de variedades diferenciáveis, métricas Riemannianas (em que Newhouse desempenhou papel importante em [4],[5],[6]), homotopia e homologia como na conjectura de Shub [7] (a qual foi confirmada para funções suaves por Yomdin [8]). Por exemplo, graças ao princípio variacional, a entropia topológica é uma ferramenta fundamental para obter informações estatísticas e ergódicas para uma ampla gama de sistemas dinâmicos. Além do mais, representa um invariante topológico importante no estudo das propriedades termodinâmicas de certos sistemas com motivação física (ver [9]). Nos trabalhos de James Maxwell e Ludwig Boltzmann, por exemplo, relacionados a mecânica estatística, o conceito de entropia métrica tem um papel fundamental (ver [10] e as suas referências).

A atividade crescente de pesquisa em aplicações envolvendo entropia topológica é, muito provavelmente, devida a sua íntima relação com complexidade, eficiência de comunicação, imprevisibilidade, e caos dinâmico. A título de exemplo, aplicações em mecânica dos fluidos e dinâmica granular relacionadas a mixing estão agora bem estabelecidas e continuam sendo intensamente investigadas. Outras áreas de aplicação têm visto intensa atividade nos anos recentes. Essas incluem aplicações em biologia onde, por exemplo, uma forma generalizada de entropia topológica é usada na análise de sequências de DNA (ver [11], [12] e suas referências), engenharia industrial (ver [13] e suas referências), em que redes de manufatura são estudadas usando entropia topológica (ver [14] e suas referências), engenharia de comunicações, teoria de controle e engenharia (ver [15] e suas referências), matéria condensada e física quântica (ver [16] e suas referências), teoria de grupos, teoria da informação, e até mesmo em ciências sociais (ver [17] e suas referências). Com o sucesso da entropia topológica como ferramenta nessas áreas, é provável que a pesquisa sobre esse assunto ganhe mais espaço.

Na medida em que entropia topológica tem se mostrado tão importante na teoria de sistemas dinâmicos e também em numerosas áreas de aplicação, têm sido feitos bastantes esforços de pesquisa dedicados a encontrar esquemas eficientes e efetivos para sua aproximação ou computação exata. Nesses esforços foi feito progresso considerável, especialmente no desenvolvimento de esquemas algorítmicos para encontrar cotas inferiores em duas e três dimensões.

Esta tese é baseada principalmente em [1], no qual foi considerada uma noção de entropia topológica para uma ação de semigrupo livre introduzida por Bufetov [18] no fim do século passado. Naquele trabalho o autor considera um semigrupo livre G gerado por um conjunto finito de funções contínuas $G_1 = \{\mathrm{Id}, f_1, \ldots, f_p\}$ agindo em um espaço métrico compacto X com o passeio aleatório $\eta_p = (\frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p})^{\mathbb{N}}$, e obtém uma relação entre a entropia topológica da ação de semigrupo livre induzida por G, a entropia topológica do shift $\sigma : \Sigma_p^+ \longrightarrow \Sigma_p^+$ e o skew-product contínuo associado $\mathcal{F}_G : \Sigma_p^+ \times X \longrightarrow \Sigma_p^+ \times X$. Além de representar uma extensão natural ao conceito de sistema dinâmico, graças à sua relação com aplicações do tipo skew-product, entender o comportamento dinâmico de ações de semigrupo livre atraiu diversos pesquisadores, veja por exemplo [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]. Recentemente, em [30, 31, 32], uma definição mais geral de entropia topológica inspirada por aquela introduzida em [18] foi explorada. Nesse contexto, em que o passeio aleatório considerado em G é qualquer medida de probabilidade de Borel $\mathbb{P}$ em Σ_p^+, os autores introduzem uma definição de entropia métrica de uma ação de semigrupo livre com respeito a uma medida de probabilidade de Borel no espaço de fase e um princípio variacional é obtido. Um dos ingredientes principais para se obter tal princípio variacional é a relação entre a ação de semigrupo livre e o skew-product.

Começando com o estudo de análogos topológicos aos sistemas de Kolmogorov, recentemente muita atenção foi dada às propriedades locais da entropia e seus vários resultados interessantes (ver [2, 33, 34, 35, 36, 37]). Em [2], usando a definição de Bowen de entropia topológica, explorou-se o conceito de ponto de entropia (ponto para o qual a entropia topológica é positiva para qualquer vizinhança fechada que o contenha) para uma função única. A partir dos resultados apresentados lá, é possível ver a importância de tal noção para o melhor entendimento do comportamento local da dinâmica, sua entropia topológica e também sua entropia métrica, uma vez que eles mostram que o suporte de medidas ergódicas está contido no conjunto dos pontos de entropia e que a entropia métrica de uma medida ergódica representa uma cota inferior para a entropia topológica de conjuntos borelianos, entre outros resultados importantes, como aqueles relativos à função entropia. Esses resultados contribuem para o entendimento do comportamento local da entropia topológica. Uma consequência de certa forma surpreendente do estudo dos pontos de entropia uniforme é que para qualquer sistema dinâmico topológico existe um conjunto enumerável fechado cuja entropia é igual à entropia do sistema original. Mais que isso, esse conjunto enumerável fechado pode ser escolhido tal que tenha no máximo um ponto de acumulação.

O objetivo principal de [1] e, em consequência, desta tese, é obter propriedades importantes que ajudem a descrever o comportamento local das ações de semigrupo livre e sua entropia topológica. Para isso, foca-se nos conjunto de pontos de entropia para uma ação de semigrupo livre (a existência de tais pontos foi garantida para ações de semigrupo livre com entropia topológica positiva em [38]). Os resultados são motivados por aqueles apresentados em [2]. Mostramos que o conjunto de pontos de entropia de uma ação de semigrupo livre contém toda entropia topológica do sistema (ver Teorema A); dada uma medida de probabilidade no espaço de fase, sob certas condições, a entropia métrica da ação de semigrupo livre com respeito àquela medida representa uma cota inferior para a entropia topológica de qualquer conjunto boreliano (ver Teorema B); se a ação de semigrupo livre satisfaz a propriedade da especificação orbital forte, então sua função entropia é constante (ver Teorema E); assim como no contexto clássico (com uma dinâmica dada por uma função só), sempre existe um conjunto enumerável fechado com entropia total, esse conjunto contém no máximo um ponto de acumulação e, no caso em que esse ponto de acumulação existe, a função entropia avaliada nesse ponto coincide com a entropia da ação (ver Teorema F).

A tese é organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentadas as definições e resultados mais importantes que serão usados no resto do texto. Os Capítulos 3 e 4 trazem os resultados referentes aos pontos de entropia e à função entropia, respectivamente. Por fim, no Capítulo 5 são apresentados alguns exemplos.

Capítulo 2

Preliminares

Nesta primeira seção relembraremos a definição de entropia topológica para sistemas dinâmicos usuais. Isso é importane porque mais adiante generalizaremos essas definições para o caso de ações de semigrupo livre.

2.1 Entropia em sistemas dinâmicos determinísticos

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Para $x, y \in X$, definimos a métrica dinâmica

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

As métricas d e d_n geram a mesma topologia em X porque f é contínua. Note que $d_n(x, y)$ ser pequeno significa que, de certa forma, os segmentos de órbita de comprimento n que começam em x e y têm comportamento parecido.

Dado $K \subseteq X$, um conjunto $E \subseteq K$ é dito (n, ε)-separado em K se, para todos $x, y \in E$ distintos, tivermos que $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. Denotamos por $S_n(K, f, \varepsilon)$ a cardinalidade máxima possível de um conjunto (n, ε)-separado em K.

Um conjunto $F \subseteq K$ é dito (n, ε)-gerador em K se, para cada $y \in K$, existir $x \in F$ tal que $d_n(x, y) \leq \varepsilon$. Denotamos por $B_n(K, f, \varepsilon)$ a cardinalidade mínima possível de um conjunto (n, ε)-gerador em K.

Definimos, ainda,

$$S(K, f, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(K, f, \varepsilon)$$

e

$$B(K, f, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log B_n(K, f, \varepsilon).$$

Definição 2.1. *A entropia topológica de f em relação ao conjunto K é dada por*

$$h_{top}(K, f) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(K, f, \varepsilon).$$

Observação 2.2. *Pode-se mostrar que a Definição 2.1 poderia ser feita usando-se conjuntos geradores, isto é,*

$$h_{top}(K) = \lim_{\varepsilon \to 0} B(K, f, \varepsilon).$$

Este fato se deve à seguinte relação:

$$B_n(K, f, \varepsilon) \leq S_n(K, f, \varepsilon) \leq B_n(K, f, \frac{\varepsilon}{2}).$$

É usual suprimir o f nas definições acima quando for claro pelo contexto qual dinâmica está sendo considerada.

2.2 Ações de semigrupo livre

Dado um conjunto finito de funções contínuas $g_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $p \geq 1$, e o conjunto de geradores $G_1 = \{\mathrm{Id}, g_1, g_2, \ldots, g_p\}$, definimos G_n como o conjunto formado por n elementos de G_1 concatenados. Ou seja, escrevemos $\underline{g} \in G_n$ se, e somente se, $\underline{g} = g_{i_n} \dots g_{i_2} g_{i_1}$, com $g_{i_j} \in G_1$, e definimos $G_0 = \{\text{Id}\}$. Dessa forma, o conjunto $G = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} G_n$, com a operação de composição, é um semigrupo livre finitamente gerado. Um semigrupo pode ter vários conjuntos de geradores. Assumiremos que o conjunto de geradores G_1 é minimal, isto é, nenhuma das funções g_i pode ser escrita como composição das demais. Denotaremos $G_1^* = G_1 \setminus \{\text{Id}\}$ e, para cada $n \in N$, G_n^* será o espaço das concatenações de n elementos de G_1^*. Dessa forma, G_n pode ser pensado como o conjunto das palavras de até n letras, enquanto que G_n^* é o conjunto de palavras de exatamente n letras. Podemos, também, escrever $|\underline{g}| = n$ ao invés de $\underline{g} \in G_n^*$.

Em G, a operação de semigrupo de concatenação é a usual: se $\underline{g} = g_{i_n} \dots g_{i_2} g_{i_1}$ e $\underline{h} = g_{j_m} \dots g_{j_2} g_{j_1}$, com $|\underline{g}| = n$ e $|\underline{h}| = m$, então $\underline{g}\underline{h} = g_{i_n} \dots g_{i_2} g_{i_1} g_{j_m} \dots g_{j_2} g_{j_1} \in G_{n+m}^*$. Se $\underline{g} = g_{i_n} \dots g_{i_2} g_{i_1}$ e $k \leq n$, denotaremos por $\underline{g}_k$ o elemento do semigrupo que é igual a $\underline{g}$ nos primeiros k índices, isto é, $\underline{g}_k = g_{i_k} g_{i_{k-1}} \dots g_{i_2} g_{i_1}$. Para $k = 0$, definimos $\underline{g}_k = \text{Id}$.

O semigrupo livre finitamente gerado G induz uma ação em X, definida a seguir.

Definição 2.3. *Dizemos que*

$$\begin{aligned} \mathbb{S} : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

é uma ação de semigrupo se, para quaisquer $\underline{g}, \underline{h} \in G$ e $x \in X$, tivermos $\mathbb{S}(\underline{g}\underline{h}, x) = \mathbb{S}(\underline{g}, \mathbb{S}(\underline{h}, x))$. Dizemos que $\mathbb{S}$ é contínua se a função $\underline{g} : X \longrightarrow X$ é contínua para todo $\underline{g} \in G$.

Associado ao conceito de ação de semigrupo, temos o seguinte skew-product, cuja dinâmica é relacionada à dinâmica da ação.

Definição 2.4. *Dadas as funções contínuas $g_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, \ldots, p$, definimos o skew-product*

$$\mathcal{F}_G : \Sigma_p^+ \times X \longrightarrow \Sigma_p^+ \times X$$
$$(\omega, x) \mapsto (\sigma(\omega), g_{\omega_1}(x)),$$

onde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ é um elemento do espaço unilateral de sequências $\Sigma_p^+ = \{1, 2, \ldots, p\}^{\mathbb{N}}$, e σ é o shift em Σ_p^+. Para $n \geq 1$, escrevemos $\mathcal{F}_G^n(\omega, x) = (\sigma^n(\omega), g_{\omega_n} \ldots g_{\omega_1}(x))$.

Se $\omega, \omega' \in \Sigma_p^+$, podemos definir a distância $d(\omega, \omega') = \frac{1}{2^n}$, em que n é a primeira coordenada na qual ω difere de ω'. O espaço unilateral das sequências Σ_p^+, munido com essa distância, é um espaço métrico compacto.

2.3 Entropia de ações de semigrupo

Consideraremos agora um semigrupo livre finitamente gerado (G, G_1) agindo em um espaço métrico compacto (X, d) através da ação $\mathbb{S}$. Dado $\underline{g} = g_{i_n} \ldots g_{i_1} \in G_n$, definimos, para $x, y \in X$, a métrica dinâmica

$$d_{\underline{g}}(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(\underline{g}_i(x), \underline{g}_i(y)).$$

Note que dois pontos estarem próximos nessa métrica significa que suas órbitas pela ação permanecem próximas pelas primeiras $n - 1$ iterações.

Seja $K \subseteq X$ um conjunto compacto e $\varepsilon > 0$. Dizemos que $E \subseteq K$ é um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-separado de K se, para todos $x, y \in E$ distintos, tivermos que $d_{\underline{g}}(x, y) \geq \varepsilon$. A cardinalidade máxima possível de um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-separado de K é denotada por $s(K, \underline{g}, \varepsilon)$.

Dizemos que $F \subseteq K$ é um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-gerador de K se, para todo $y \in K$, existir $x \in F$ tal que $d_{\underline{g}}(x, y) \leq \varepsilon$. A cardinalidade mínima possível de um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-gerador é denotada por $b(K, \underline{g}, \varepsilon)$.

Definimos, ainda,

$$S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = \frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g} \in G_n^*} s(K, \underline{g}, \varepsilon),$$

$$S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon),$$

e, similarmente,

$$B_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = \frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g} \in G_n^*} b(K, \underline{g}, \varepsilon),$$

$$B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log B_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Definição 2.5. *Dado um conjunto compacto $K \subseteq X$, definimos a entropia topológica da ação $\mathbb{S}$ em K por*

$$h_{top}(K, \mathbb{S}) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Observação 2.6. *A Definição 2.5 poderia ter sido feita em termos de conjuntos geradores, isto é,*

$$h_{top}(K, \mathbb{S}) = \lim_{\varepsilon \to 0} B(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Segue imediatamente das definições, e é um fato que será usado em diversos pontos do texto, que, se $K \subseteq M \subseteq X$, então $h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) \leq h_{\text{top}}(M, \mathbb{S})$.

Essa definição de entropia para ações de semigrupo livre foi introduzida em [18], onde Bufetov mostrou a relação que existe entre a entropia topológica de uma ação de semigrupo, do skew-product associado, e do shift.

Teorema 2.7. $h_{top}(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G) = h_{top}(X, \mathbb{S}) + \log p.$

Note que o $\log p$ que aparece na fórmula de Bufetov é, na verdade, a entropia do shift de p símbolos. Assim, de certa forma, o que está se dizendo é que a complexidade de $\mathcal{F}_G$ é composta das complexidades de $\mathbb{S}$ e do shift σ.

Definiremos no que segue a entropia métrica de uma ação de semigrupo livre. Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das medidas em X, por $\mathcal{M}_1(X)$ o conjunto das probabilidades de Borel em X, e para uma função contínua dada $f : X \longrightarrow X$ denotamos por $\mathcal{M}_{\text{inv}}(X)$ o subconjunto das probabilidades f-invariantes em X. Em [32] os autores consideraram $\mathbb{P} = \eta_{\underline{a}} = (a_1, a_2, \ldots, a_p)^{\mathbb{N}}$, com $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ um vetor de probabilidade, e definiram a entropia métrica de uma ação de semigrupo livre $\mathbb{S}$ com respeito a $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ como

$$h_\nu(\mathbb{S}, \eta_{\underline{a}}) = \sup_{\mu \in \Pi(\nu,\sigma)} \left\{ h_\mu(\mathcal{F}_G) + \int_{\Sigma_p^+} \log a_{\omega_1} d\eta_{\underline{a}}(\omega) \right\},$$

em que $\Pi(\nu, \sigma)$ é o subconjunto de $\mathcal{M}_1(\Sigma_p^+ \times X)$ que consiste das probabilidades μ que são $\mathcal{F}_G$-invariantes, com marginal em Σ_p^+ σ-invariante e cuja marginal em X é ν. Eles mostraram que essa entropia métrica satisfaz um princípio variacional, dado por

$$h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}, \eta_{\underline{a}}) = \sup_{\nu \in \mathcal{M}(X) : \Pi(\nu,\sigma) \neq \emptyset} h_\nu(\mathbb{S}, \eta_{\underline{a}}).$$

Quando $\eta_{\underline{a}} = \eta_{\underline{p}} = (\frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p})^{\mathbb{N}}$, nós temos a definição a seguir, que será a que usaremos neste trabalho.

Definição 2.8. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado e $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ com $\Pi(\nu, \sigma) \neq \emptyset$. Então*

$$h_\nu(\mathbb{S}) = h_\nu(\mathbb{S}, \eta_{\underline{p}}) = \sup_{\mu \in \Pi(\nu,\sigma)} h_\mu(\mathcal{F}_G) - \log p$$

é a entropia métrica de $\mathbb{S}$ com respeito a medida ν.

Capítulo 3

Pontos de Entropia

Definição 3.1. *Dizemos que* $x_0 \in X$ *é um ponto de entropia se, para qualquer vizinhança fechada* K *de* x_0*, tivermos que*

$$h_{top}(K, \mathbb{S}) > 0.$$

O conjunto dos pontos de entropia é denotado por $E_p(X, \mathbb{S})$*.*

Dizemos que $x_0 \in X$ *é um ponto de entropia total se, para qualquer vizinhança fechada* K *de* x_0*, tivermos que*

$$h_{top}(K, \mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S}).$$

Quando falarmos em pontos de entropia total vamos assumir que $h_{top}(X, \mathbb{S}) > 0$*. O conjunto dos pontos de entropia total é denotado por* $E_p^f(X, \mathbb{S})$*.*

Pontos de entropia são aqueles cujas vizinhanças refletem a complexidade do sistema inteiro. Se medirmos o caos do sistema pela sua entropia topológica, a presença de um ponto de entropia em uma vizinhança fechada significa que o sistema, quando restrito a essa vizinhança, é caótico.

Sabe-se que se uma ação de semigrupo tiver entropia topológica positiva, então deve ter algum ponto de entropia total. De fato, em [38] os autores mostraram o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre com entropia topológica positiva. Então $E_p^f(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$.*

A proposição a seguir é uma generalização do resultado de Bufetov. Aqui mostramos que a fórmula não vale apenas para o espaço inteiro, mas também quando consideramos um cilindro em Σ_p^+ e um subconjunto compacto qualquer $K \subseteq X$.

Proposição 3.3. *Seja $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in \Sigma_p^+$ e $l \in \mathbb{N}$. Então*

$$h_{top}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G) = h_{top}(K, \mathbb{S}) + \log p.$$

Demonstração. Primeiro mostraremos que vale a desigualdade $\geq$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere $N = p^n$. N é o número de palavras distintas de comprimento n, as quais denotaremos por $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^N$.

Seja $(\theta(i))_{i=1}^N \subseteq \Sigma_p^+$ uma sequência tal que $\theta(i)|_{[1,n]} = \theta^i$. Note que, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, a sequência $(\omega_1 \dots \omega_l \theta(i))_{i=1}^N$ é um conjunto $(n+l, \varepsilon, \sigma)$-separado de $[\omega_1 \dots \omega_l]$.

Denotaremos $\theta^i = \theta_1^i \dots \theta_n^i$ e $\underline{g}^{(i)} = g_{\theta_n^i} \dots g_{\theta_1^i} g_{\omega_l} \dots g_{\omega_1}$. Sejam $x_1^i, \dots, x_{s_i}^i$ pontos que formam um conjunto $(\underline{g}^{(i)}, \varepsilon)$-separado de K, onde $s_i = s(K, \underline{g}^{(i)}, \varepsilon)$. Assim os pontos $(\omega_1 \dots \omega_l \theta(i), x_j^i)$ com $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, s_i$ formam um conjunto $(n+l, \varepsilon, \mathcal{F}_G)$-separado de $[\omega_1 \dots \omega_l] \times K$. Isso implica que

$$\begin{aligned} S_{n+l}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) &\geq \sum_{i=1}^N s(K, \underline{g}^{(i)}, \varepsilon) \\ &= p^n \frac{1}{p^n} \sum_{i=1}^N s(K, \underline{g}^{(i)}, \varepsilon) \\ &= p^n S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Disso, obtemos que

$$\begin{aligned}
S([\omega_1 \ldots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) = \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log S_{n+l}([\omega_1 \ldots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log \left(p^n S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon)\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon) + \log p \\
&= S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) + \log p,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

e, portanto, que

$$\begin{aligned}
h_{\text{top}}([\omega_1 \ldots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G) &= \lim_{\varepsilon\to 0} S([\omega_1 \ldots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \\
&\geq \lim_{\varepsilon\to 0} S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) + \log p \\
&= h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) + \log p.
\end{aligned}$$

Para provarmos a desigualdade inversa, considere $\varepsilon > 0$ e tome $C(\varepsilon)$ um inteiro positivo tal que $2^{-C(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{100}$. Note que existem $N = p^{n+2C(\varepsilon)}$ palavras distintas de comprimento $n + 2C(\varepsilon)$. Denotaremos essas palavras por $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^N$.

Seja $(\omega(i))_{i=1}^N \subseteq \Sigma_p^+$ uma sequência satisfazendo

$$\omega(i)|_{[1,n+2C(\varepsilon)+l]} = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_l \omega^i.$$

Os elementos dessa sequência formam um conjunto $(n+l, \varepsilon, \sigma)$-gerador de $[\omega_1 \ldots \omega_l]$. Denote $\theta^i = \omega(i)|_{[1,n+l]}$ (θ^i será repetido para vários i) e $\underline{g}^{(i)}$ a concatenação associada a θ^i. Defina $b_i = b(K, \underline{g}^{(i)}, \varepsilon)$ e assuma que os pontos $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{b_i}^i$ formam um conjunto $(\underline{g}^{(i)}, \varepsilon)$-gerador de K de cardinalidade mínima.

Segue que os pontos $(\omega(i), x_j^i)$ com $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, b_i$ formam um conjunto $(n + l, \varepsilon, \mathcal{F}_G)$-gerador de $[\omega_1 \ldots \omega_l] \times K$.

Como esse conjunto é finito, existe uma constante positiva $T(\varepsilon)$ que compensa a multiplicidade dos θ^i (e que depende só de ε) tal que

$$B_{n+l}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{N} b_i \leq T(\varepsilon) \sum_{|\underline{g}|=n+l} b(K, \underline{g}, \varepsilon),$$

do que obtemos que

$$\begin{aligned}
&B([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) = \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log B_{n+l}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log \left(T(\varepsilon) \sum_{|\underline{g}|=n+l} b(K, \underline{g}, \varepsilon) \right) \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log \left(T(\varepsilon) p^{n+l} \frac{1}{p^{n+l}} \sum_{|\underline{g}|=n+l} b(K, \underline{g}, \varepsilon) \right) \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+l} \log \big(T(\varepsilon) p^{n+l} B_{n+l}(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \big) \\
&\qquad = B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) + \log p,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

e disso segue que $h_{\text{top}}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G) \leq h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) + \log p$. □

Essa proposição tem algumas consequências interessantes, descritas no que segue.

Corolário 3.4. $E_p(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G) = \Sigma_p^+ \times X$.

Demonstração. Dados $(\omega, x) \in \Sigma_p^+ \times X$ e F uma vizinhança fechada de (ω, x), existe $l \in \mathbb{N}$ e subconjuntos fechados $[\omega_1 \dots \omega_l] \subseteq \Sigma_p^+$ e $K \subseteq X$ tais que $(\omega, x) \in [\omega_1 \dots \omega_l] \times K \subseteq F$.

Como $h_{\text{top}}(F, \mathcal{F}_G) \geq h_{\text{top}}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G)$ e, pela Proposição 3.3, $h_{\text{top}}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G) \geq \log p > 0$, segue que $h_{\text{top}}(F, \mathcal{F}_G) > 0$. Como F é uma vizinhança fechada qualquer de (ω, x), temos que $(\omega, x) \in E_p(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$. □

Corolário 3.5. *Um ponto $x \in X$ é um ponto de entropia total para $\mathbb{S}$ se, e somente se, o ponto $(\omega, x) \in \Sigma_p^+ \times X$ é um ponto de entropia total para $\mathcal{F}_G$, para todo $\omega \in \Sigma_p^+$. Isto é, $x \in E_p^f(X, \mathbb{S})$ se, e somente se, $(\omega, x) \in E_p^f(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$, para todo $\omega \in \Sigma_p^+$.*

Demonstração. Seja $(\omega, x) \in E_p^f(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$ e K uma vizinhança fechada de x. O conjunto $\Sigma_p^+ \times K$ é uma vizinhança fechada de (ω, x). Da Proposição 3.3 e da fórmula de Bufetov, temos que

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) + \log p &= h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G) \\ &= h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times K, \mathcal{F}_G) \\ &= h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) + \log p, \end{aligned}$$

e, portanto, $x \in E_p^f(X, \mathbb{S})$.

Por outro lado, sejam $x \in E_p^f(X, \mathbb{S})$ e $\omega \in \Sigma_p^+$. Qualquer vizinhança fechada V de (ω, x) contem uma vizinhança fechada da forma $[\omega_1 \dots \omega_l] \times K$ para algum $l \in \mathbb{N}$ e algum $K \subseteq X$ vizinhança fechada de x. Então, pela Proposição 3.3, temos que

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(V, \mathcal{F}_G) &\geq h_{\text{top}}([\omega_1 \dots \omega_l] \times K, \mathcal{F}_G) \\ &= h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) + \log p \\ &= h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) + \log p \\ &= h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G). \end{aligned}$$

Isso implica que $h_{\text{top}}(V, \mathcal{F}_G) = h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$, e portanto $(\omega, x) \in E_p^f(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$. □

Outra consequência importante da Proposição 3.3 é uma demonstração alternativa do Teorema 3.2.

Corolário 3.6. *$E_p^f(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Como mostrado em [2], $E_p^f(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G) \neq \emptyset$. Então, do Corolário 3.5, obtemos que $E_p^f(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$. $\square$

O resultado a seguir será importante na demonstração do Teorema 3.8.

Lema 3.7. *Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ uma função contínua. Dados $K \subseteq X$ e $\alpha > 0$, se $h_{top}(K, f) \geq \alpha$, então $h_{top}(f(K), f) \geq \alpha$.*

Demonstração. Seja $K \subseteq X$ e $\alpha > 0$. Provaremos por contradição. Suponha que $h_{\text{top}}(f(K), f) < \alpha$. Então existe $\gamma > 0$ tal que $h_{\text{top}}(f(K), f) \leq \alpha - \gamma$. Da Definição 2.1 temos que, dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(f(K), f, \varepsilon) \leq (\alpha - \gamma) + \eta,$$

para todo $\varepsilon \in [0, \delta]$. Isso implica que, para ε nessa faixa, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que

$$S_n(f(K), f, \varepsilon) \leq e^{n(\eta + (\alpha - \gamma))}, \tag{3.3}$$

para todo $n \geq N_0$.

Considere $E \subseteq K$ um conjunto (n, ε)-separado de K de cardinalidade máxima. Seja $E_1 \subseteq E$ um conjunto $(1, \varepsilon)$-separado de E. Para cada par de pontos $x, y \in E \setminus E_1$ existe algum $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$, portanto trata-se de um conjunto $(n-1, \varepsilon)$-separado de $f(K)$. Dessa forma, como

E é a união disjunta de E_1 e $E \setminus E_1$, e como $S_{n-1}(f(K), f, \varepsilon) \leq S_n(f(K), f, \varepsilon)$, segue que

$$\begin{aligned} S_n(K, f, \varepsilon) &\leq S_{n-1}(f(K), f, \varepsilon) + S_1(K, f, \varepsilon) \\ &\leq S_n(f(K), f, \varepsilon) + S_1(K, f, \varepsilon). \end{aligned}$$

Juntando isso com 3.3 obtemos que

$$S_n(K, f, \varepsilon) \leq e^{n(\eta+(\alpha-\gamma))} + S_1(K, f, \varepsilon),$$

para todo $n \geq N_0$, e daí segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(K, f, \varepsilon) \leq \eta + (\alpha - \gamma).$$

Portanto $h_{\text{top}}(K, f) \leq \eta + (\alpha - \gamma)$.

Como η pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, conclui-se que $h_{\text{top}}(K, f) \leq \alpha - \gamma$, o que contradiz a hipótese e conclui a prova. $\square$

O próximo resultado garante que o conjunto dos pontos de entropia de $\mathbb{S}$ e o conjunto dos pontos de entropia total de $\mathbb{S}$ são ambos $\mathbb{S}$-invariantes.

Teorema 3.8. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Então $g(E_p(X, \mathbb{S})) \subseteq E_p(X, \mathbb{S})$ e $g(E_p^f(X, \mathbb{S})) \subseteq E_p^f(X, \mathbb{S})$ para todo $g \in G$.*

Demonstração. Mostraremos apenas a invariância por $g \in G$ de $E_p(X, \mathbb{S})$, uma vez que a invariância de $E_p^f(X, \mathbb{S})$ é provada por argumentos similares. Note que para mostrar que $E_p(X, \mathbb{S})$ é invariante por qualquer $f \in G$, basta mostrar que é invariante por qualquer $f \in G_1$.

Sejam $f \in G_1^*$ e $x_0 \in E_p(X, \mathbb{S})$. Seja $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \Sigma_p^+$ tal que $g_\omega^1 = g_{\omega_1} = f$, considere o cilindro $[\omega_1]$, que contem ω, e tome $K \subseteq X$ qualquer vizinhança fechada de $f(x_0)$. Como f é contínua e $x_0 \in E_p(X, \mathbb{S})$, temos que $f^{-1}(K)$ é vizinhança fechada de x_0 e que $h_{\text{top}}(f^{-1}(K), \mathbb{S}) > 0$. Pela Proposição 3.3 segue que $h_{\text{top}}([\omega_1] \times f^{-1}(K), \mathcal{F}_G) > \log p$, e como $\mathcal{F}_G([\omega_1] \times f^{-1}(K)) \subseteq \Sigma_p^+ \times K$, obtemos que

$$\begin{aligned}\log p &< h_{\text{top}}(\mathcal{F}_G([\omega_1] \times f^{-1}(K)), \mathcal{F}_G)\\ &\leq h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times K, \mathcal{F}_G)\\ &= h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) + \log p.\end{aligned}$$

Logo, $h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) > 0$ e, pelo Lema 3.7, $f(x_0) \in E_p(X, \mathbb{S})$. $\square$

O próximo Lema, além de ser uma ferramenta importante que será usada no resto do trabalho, também ajuda no entendimento de como a entropia é distribuída em um conjunto.

Lema 3.9. *Sejam $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado e $K_1, K_2, \ldots, K_m \subseteq X$. Então*

$$S(\cup_{i=1}^m K_i, \mathbb{S}, \varepsilon) = \max_i S(K_i, \mathbb{S}, \varepsilon)$$

para qualquer $\varepsilon > 0$, e portanto

$$h_{top}(\cup_{i=1}^m K_i, \mathbb{S}) = \max_i h_{top}(K_i, \mathbb{S}).$$

Demonstração. Fixa $\varepsilon > 0$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\underline{g} \in G_n^*$, existe $i(\underline{g}, \varepsilon) \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$s(K, \underline{g}, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^m s(K_i, \underline{g}, \varepsilon) \leq m \cdot s(K_{i(\underline{g},\varepsilon)}, \underline{g}, \varepsilon),$$

onde $K = \cup_{i=1}^m K_i$ e $s(K_{i(\underline{g},\varepsilon)}, \underline{g}, \varepsilon) = \max_{1 \leq i \leq m} s(K_i, \underline{g}, \varepsilon)$. Logo,

$$S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \leq m \cdot \frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g} \in G_n^*} s(K_{i(\underline{g},\varepsilon)}, \underline{g}, \varepsilon).$$

Lembre que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = S(K, \mathbb{S}, \varepsilon)$$

e que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}).$$

Podemos escolher uma sequência crescente $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{1}{n_j} \log S_{n_j}(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \to \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon)$$

se $j \to \infty$.

Pelo menos um dos elementos do conjunto $\{K_1, \ldots, K_m\}$ aparece infinitas vezes na sequência $\{K_{i(\underline{g},\varepsilon)}\}_{\underline{g}\in G^*_{n_j}, j\in\mathbb{N}}$. Seja $K_{i(\varepsilon)}$ esse elemento. Escolhendo uma subsequência de $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma, por simplicidade) podemos assumir que $K_{i(\underline{g},\varepsilon)} = K_{i(\varepsilon)}$ para todo $\underline{g} \in G^*_{n_j}$ e $j \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} &\lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log S_{n_j}(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \leq \\ &\qquad \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log \left(m \cdot \frac{1}{p^{n_j}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{n_j}} s(K_{i(\underline{g},\varepsilon)}, \underline{g}, \varepsilon) \right) \\ &\qquad = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log \left(\frac{1}{p^{n_j}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{n_j}} s(K_{i(\varepsilon)}, \underline{g}, \varepsilon) \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Agora, seja $\{\varepsilon_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge a zero. Pelo menos um dos elementos do conjunto $\{K_1, \ldots, K_m\}$, digamos K^*, aparece infinitas vezes na sequência $\{K_{i(\varepsilon_l)}\}_{l\in\mathbb{N}}$. Podemos tomar uma subsequência $\{\varepsilon_{l_t}\}_{t\in\mathbb{N}}$ tal que $K_{i(\varepsilon_{l_t})} = K^*$, para todo

$t \in \mathbb{N}$. Por 3.4, podemos concluir que

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) &= \lim_{t\to\infty} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log S_{n_j}(K, \mathbb{S}, \varepsilon_{l_t}) \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \log \left(\frac{1}{p^{n_j}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{n_j}} s(K^*, \underline{g}, \varepsilon_{l_t}) \right) \\ &\leq h_{\text{top}}(K^*, \mathbb{S}). \end{aligned}$$

Concluimos, em particular, que

$$h_{\text{top}}(\cup_{i=1}^m K_i, \mathbb{S}) \leq \max_i h_{\text{top}}(K_i, \mathbb{S}).$$

A desigualdade contrária segue do fato que $K_i \subseteq K$ para todo $i = 1, \ldots, m$. □

A entropia topológica da ação de semigrupo ser positiva quando restrita a um subconjunto de X está relacionada à presença de pontos de entropia nesse subconjunto. É isso que prova a proposição a seguir.

Proposição 3.10. *Seja K um subconjunto fechado de X.*

i. Se $h_{top}(K, \mathbb{S}) > 0$, então $K \cap E_p(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$.

ii. Se $h_{top}(K, \mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S})$, então $K \cap E_p^f(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$.

Demonstração. (i.) Suponha $h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) > 0$. Podemos cobrir K por finitas bolas fechadas $B_1^1, \ldots, B_{l_1}^1$, de diâmetro no máximo 1, porque K é compacto. Além disso, podemos assumir que $K = \cup_{j=1}^{l_1} B_j^1$ (pois, para os nosso propósitos, bastaria tomar $A_j^1 = B_j^1 \cap K$). Pelo Lema 3.9, temos

$$0 < h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) = h_{\text{top}}(\cup_{j=1}^{l_1} B_j^1, \mathbb{S}) = \max_j h_{\text{top}}(B_j^1, \mathbb{S}),$$

o que implica a existência de um índice j_1 tal que $h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(B^1_{j_1},\mathbb{S})$. Podemos então cobrir $B^1_{j_1}$ por finitas bolas fechadas $B^2_1,\dots,B^2_{l_2}$, de diâmetro no máximo $\frac{1}{2}$. Pelo mesmo raciocínio, deve existir j_2 tal que $h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(B^1_{j_1},\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(B^2_{j_2},\mathbb{S})$. Por indução, para cada $n \geq 2$ existe uma bola fechada $B^n_{j_n}$ de diâmetro no máximo $\frac{1}{n}$, tal que $h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(B^n_{j_n},\mathbb{S})$. Como $B^n_{j_n} \subseteq B^{n-1}_{j_{n-1}}$ para todo n, sabemos que existe um único $x \in K$ na interseção de todas essas bolas fechadas. Como para qualquer vizinhança contendo x vai conter $B^n_{j_n}$ para algum n, segue que essa vizinhança terá entropia positiva. Portanto, tal x é ponto de entropia para $\mathbb{S}$.

(ii.) Se $h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(X,\mathbb{S})$, então $h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times K, \mathcal{F}_G) = h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$. Em [2, Theorem 3.5] é provado que existe $(\omega, x) \in \Sigma_p^+ \times K \cap E_p^f(\Sigma_p^+ \times X, \mathcal{F}_G)$. Pelo Corolário 3.5, temos que $x \in K \cap E_p^f(X,\mathbb{S})$. $\square$

Antes de prosseguir para a prova do Teorema A, precisamos definir um conceito que será utilizado na demonstração.

Definição 3.11 (Entropia de Katok)**.** *Dados uma medida de probabilidade de Borel ν em X, $\delta \in (0,1)$ e $\varepsilon > 0$, definimos*

$$h^K_\nu(\mathbb{S},\varepsilon,\delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta),$$

onde

$$S_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta) = \frac{1}{p^n} \sum_{\underline{g}\in G_n^*} s_\nu(\underline{g},\varepsilon,\delta),$$

e, para $\underline{g} \in G_n^*$,

$$s_\nu(\underline{g},\varepsilon,\delta) = \inf_{\{E\subseteq X:\nu(E)>1-\delta\}} s(E,\underline{g},\varepsilon),$$

em que $s(E,\underline{g},\varepsilon)$ *denota a cardinalidade máxima de conjuntos* $(\underline{g},\varepsilon)$*-separados de* E*. A* K*-entropia métrica da ação de semigrupo livre* $\mathbb{S}$ *com respeito a* ν *é definida por*

$$h_\nu^K(\mathbb{S}) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} h_\nu^K(\mathbb{S},\varepsilon,\delta).$$

O limite acima está bem definido por causa da monotonicidade da função

$$(\varepsilon,\delta) \mapsto \frac{1}{n}\log S_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta)$$

nas variáveis ε e δ. Além disso, se o conjunto de geradores for $G_1 = \{\mathrm{Id}, f\}$, então recupera-se a noção de entropia proposta por Katok para uma única dinâmica f.

Observação 3.12. *A Definição 3.11 poderia ter sido feita em termos de conjuntos geradores, ao invés de conjuntos separados. Dados* $\varepsilon > 0$*,* $\delta \in (0,1)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\underline{g} \in G_n^*$*, definimos*

$$b_\nu(\underline{g},\varepsilon,\delta) = \inf_{\{E\subseteq X:\nu(E)>1-\delta\}} b(E,\underline{g},\varepsilon).$$

Pode se provar que

$$h_\nu^K(\mathbb{S}) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log B_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta),$$

onde

$$B_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta) = \frac{1}{p^n}\sum_{\underline{g}\in G_n^*} b_\nu(\underline{g},\varepsilon,\delta).$$

Por [32, Theorem C], vale um princípio variacional nesse contexto, a saber,

$$h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S}) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}_1(X)} h_\nu^K(\mathbb{S}).$$

O Teorema A, que é provado em seguida, mostra que a entropia métrica e a entropia topológica de uma ação de semigrupo livre é concentrada no conjunto de pontos de entropia.

Teorema A. *Seja* $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ *uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Então*

i. $E_p(X, \mathbb{S})$ *e* $E_p^f(X, \mathbb{S})$ *são ambos* $\mathbb{S}$*-invariantes;*

ii. se $\nu \in M_1(X)$ *é tal que* $\Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$ *e* $h_\nu(\mathbb{S}) > 0$ *então* $supp(\nu) \subseteq E_p(X, \mathbb{S})$*;*

iii. $h_{top}(E_p(X, \mathbb{S}), \mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S})$.

Demonstração. (i.) Segue do Teorema 3.8.

(ii.) Para $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ denotamos o subconjunto de medidas ergódicas em $\Pi(\sigma, \nu)$ por $\Pi(\sigma, \nu)_{\mathrm{erg}}$.

Como $h_\nu(\mathbb{S}) = \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\mathrm{erg}}} \{h_\mu(\mathcal{F}_G) - \log p\}$ e, por hipótese, $h_\nu(\mathbb{S}) > 0$ e $\Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset$, então existe uma probabilidade ergódica $\mu \in \Pi(\sigma, \nu)_{\mathrm{erg}}$ para a qual vale que $h_\mu(\mathcal{F}_G) > \log p$.

Se $x \in \mathrm{supp}(\nu)$, então para qualquer vizinhança fechada N_x de x teremos $\mu(\Sigma_p^+ \times N_x) = \nu(N_x) > 0$. Como μ é $\mathcal{F}_G$-ergódica e $\mu(\Sigma_p^+ \times N_x) > 0$, podemos aplicar [2, Theorem 3.7], segundo o qual

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) : K \in B_{\Sigma_p^+ \times X} \text{ com } \mu(K) > 0\} \geq h_\mu(\mathcal{F}_G),$$

onde $B_{\Sigma_p^+ \times X}$ é a σ-álgebra de Borel de $\Sigma_p^+ \times X$. Como $\Sigma_p^+ \times N_x \in B_{\Sigma_p^+ \times X}$, temos que

$$\begin{aligned} S(\Sigma_p^+ \times N_x, &\mathcal{F}_G, \varepsilon) \geq \\ &\geq \inf\{S(K, \mathcal{F}_G, \varepsilon) : K \in B_{\Sigma_p^+ \times X} \text{ com } \mu(K) > 0\} \\ &\geq h_\mu(\mathcal{F}_G). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo, como $h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times N_x, \mathcal{F}_G) = \lim_{\varepsilon\to 0} S(\Sigma_p^+ \times N_x, \mathcal{F}_G, \varepsilon)$, então, fazendo $\varepsilon \to 0$ em 3.5,

$$h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times N_x, \mathcal{F}_G) \geq h_\mu(\mathcal{F}_G).$$

Disso, aplicando a Proposição 3.3,

$$h_{\text{top}}(N_x, \mathbb{S}) + \log p = h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times N_x, \mathcal{F}_G) \geq h_\mu(\mathcal{F}_G).$$

Como $h_\mu(\mathcal{F}_G) > \log p$, isso implica que $h_{\text{top}}(N_x, \mathbb{S}) > 0$, ou seja, que $x \in E_p(X, \mathbb{S})$.

(iii.) Note que

$$h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) = \sup_{\nu\in\mathcal{M}_1 : \Pi(\sigma,\nu)_{\text{erg}} \neq \emptyset} h_\nu(\mathbb{S}).$$

Pelo item (ii) temos que o supremo é avaliado entre todas as probabilidades de X com suporte contido em $E_p(X, \mathbb{S})$ (que é $\mathbb{S}$-invariante pelo item (i)). Da prova de [32, item (iii), Theorem C] temos que

$$h_\nu(\mathbb{S}) \leq h_\nu^K(\mathbb{S}),$$

o que implica que $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) = h_{\text{top}}(E_p(X, \mathbb{S}), \mathbb{S})$, uma vez que $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq E_p(X, \mathbb{S})$. $\square$

Similarmente ao que foi provado em [2], é possível obter uma cota superior para a entropia métrica de uma ação de semigrupo livre com respeito a uma probabilidade ν com $\Pi(\sigma, \nu)_{\text{erg}} \neq \emptyset$ em termos da informação local da entropia topológica.

Teorema B. *Sejam $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado e $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ tal que $\Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$. Então*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \geq h_\nu(\mathbb{S}),$$

onde B_X é a σ-álgebra de Borel de X.

Em particular, para $K \in B_X$, $h_{top}(K, \mathbb{S}) \geq h_\nu(\mathbb{S})$.

Demonstração. Sejam $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ e $K \in B_X$ satisfazendo $\nu(K) > 0$. Temos que $\Pi(\sigma,\nu)_{\mathrm{erg}} \neq \emptyset$, e para $\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\mathrm{erg}}$ vale, por causa da ergodicidade de μ, que existe $m = m(K) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\left(\cup_{i=0}^{m(K)} \mathcal{F}_G^i(\Sigma_p^+ \times K)\right) \geq 1 - \delta.$$

Afirmação: se definirmos $K^{(m)} := \pi_X(\cup_{i=0}^{m(K)} \mathcal{F}_G^i(\Sigma_p^+ \times K))$, então $S(K,\mathbb{S},\varepsilon) = S(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon)$.

De fato, note que, como $\mu\left(\cup_{i=0}^{m(K)} \mathcal{F}_G^i(\Sigma_p^+ \times K)\right) \geq 1-\delta$ e $\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\mathrm{erg}}$, então $\nu(K^{(m)}) \geq 1-\delta$. Fixa $n \in \mathbb{N}$ e tome $\underline{g} \in G_n^*$. Seja $E_{\underline{g}} \subseteq K^{(m)}$ um conjunto $(\underline{g},\varepsilon)$-separado. Deve existir um $i_0 = i_0(n) \leq m$ tal que

$$|E_{\underline{g}} \cap \pi_X(\mathcal{F}_G^{i_0}(\Sigma_p^+ \times K))| \geq \frac{|E_{\underline{g}}|}{m+1}, \tag{3.6}$$

porque, do contrário, como

$$E_{\underline{g}} \subseteq \pi_X(\Sigma_p^+ \times K) \cup \pi_X(\mathcal{F}_G(\Sigma_p^+ \times K)) \cup \cdots \cup \pi_X(\mathcal{F}_G^{m(K)}(\Sigma_p^+ \times K))$$

e, portanto,

$$E_{\underline{g}} = \bigcup_{i=0}^{m(K)} \left(E_{\underline{g}} \cap \pi_X(\mathcal{F}_G^i(\Sigma_p^+ \times K))\right),$$

teríamos que

$$|E_{\underline{g}}| \leq \sum_{i=0}^{m(K)} |E_{\underline{g}} \cap \pi_X(\mathcal{F}_G^i(\Sigma_p^+ \times K))| < (m+1)\frac{|E_{\underline{g}}|}{m+1} = |E_{\underline{g}}|,$$

o que seria uma contradição.

Se $\underline{g} = g_{j_n} \dots g_{j_1}$, então tomando $\underline{\tilde{g}} = \underline{g}\underline{g}_{i_0}$, nós temos que $\underline{g}_{i_0}^{-1}(E_{\underline{g}})$ é um conjunto $(\underline{\tilde{g}},\varepsilon)$-separado, com $\underline{\tilde{g}} \in G_{n+m}$ (pois

$|\underline{g}| = n$ e $|\underline{g}_{i_0}| = i_0 \leq m$). Ou seja, dado $E_{\underline{g}} \subseteq K^{(m)}$ um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-separado, construímos $\underline{g}_{i_0}^{-1}(E_{\underline{g}}) \cap K$ que é um conjunto $(\underline{\tilde{g}}, \varepsilon)$-separado em K, e sabemos relacionar suas cardinalidades por 3.6. Assim, obtemos

$$s(K, \underline{\tilde{g}}, \varepsilon) \geq \frac{1}{m+1} s(K^{(m)}, \underline{g}, \varepsilon) \geq \frac{1}{m+1} s(K, \underline{g}, \varepsilon),$$

em que a segunda desigualdade vem do fato de que $K \subseteq K^{(m)}$.

Denote por $\tilde{G}^*_{m+n}$ o subconjunto dos $\tilde{g}$ obtidos na construção acima. Observe que $|\tilde{G}^*_{m+n}| = |G^*_n|$, pois para cada $\underline{g} \in G^*_n$ construímos exatamente um $\underline{\tilde{g}} \in \tilde{G}^*_{m+n}$. Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{g} \in G^*_n} s(K, \underline{g}, \varepsilon) &\leq \sum_{\underline{g} \in G^*_n} s(K^{(m)}, \underline{g}, \varepsilon) \\
&\leq (m+1) \sum_{\underline{\tilde{g}} \in \tilde{G}^*_{m+n}} s(K, \underline{\tilde{g}}, \varepsilon) \\
&\leq (m+1) \sum_{\underline{g} \in G^*_{m+n}} s(K, \underline{g}, \varepsilon) \\
&= (m+1) p^{m+n} \frac{1}{p^{m+n}} \sum_{\underline{g} \in G^*_{m+n}} s(K, \underline{g}, \varepsilon) \\
&= (m+1) p^{m+n} S_{m+n}(K, \mathbb{S}, \varepsilon),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$S_{m+n}(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq \frac{1}{p^m} \frac{1}{m+1} S_n(K^{(m)}, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq \frac{1}{p^m} \frac{1}{m+1} S_n(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S(K,\mathbb{S},\varepsilon) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+m} \log S_{m+n}(K,\mathbb{S},\varepsilon) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+m} \log \left(\frac{1}{p^m} \frac{1}{m+1} S_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+m} \log S_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+m} \log \left(\frac{1}{p^m} \frac{1}{m+1} S_n(K,\mathbb{S},\varepsilon) \right) \\
&= S(K,\mathbb{S},\varepsilon),
\end{aligned}$$

de forma que $S(K,\mathbb{S},\varepsilon) = S(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon)$, pois

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+m} \log S_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) = S(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon),$$

o que finaliza a prova da afirmação.

Como vale que $B_n(R,\mathbb{S},\varepsilon) \leq S_n(R,\mathbb{S},\varepsilon)$ para quaisquer $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $R \subseteq X$, temos que, para $0 < \delta < 1$,

$$\begin{aligned}
&\inf\{S(K,\mathbb{S},\varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\
&= \inf\{S(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\
&= \inf\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log S_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\
&\geq \inf\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log B_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf\{\log B_n(K^{(m)},\mathbb{S},\varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log B_\nu(\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta).
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e $\delta \to 0$, e lembrando que

$$h_\nu^K(\mathbb{S}) = \lim_{\delta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log B_\nu(X,\mathbb{S},n,\varepsilon,\delta) \geq h_\nu(\mathbb{S}),$$

concluimos a prova. $\square$

Como consequência do Teorema B, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.13. *Seja* $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ *uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Então*

$$\overline{\bigcup \{supp(\nu) : \Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset \text{ e } h_\nu(\mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S})\}} \subseteq E_p^f(X, \mathbb{S}).$$

Em particular, se existe $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ *de entropia máxima e que satisfaça* $\Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$*, então* $h_{top}(E_p^f(X, \mathbb{S}), \mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S})$.

Capítulo 4

Função Entropia

Para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, definimos

$$h_d(x, \varepsilon) = \inf\{B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \text{ é uma viz. compacta de } x\},$$

onde o subscrito d enfatiza a métrica usada, e $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon)$ é como definido na Seção 2.3. Como, por [38], $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \leq S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \leq B(K, \mathbb{S}, \frac{\varepsilon}{2})$, essa definição poderia ser feita equivalentemente em termos de conjuntos separados.

Já que $h_d(x, \varepsilon)$ aumenta quando $\varepsilon \to 0$, está bem definido o limite

$$h_d(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} h_d(x, \varepsilon)$$

e é no máximo $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$. Adaptando a prova de [39, Proposition 2.5.3], podemos concluir que $h_d(x)$ depende apenas da topologia de X, e não da métrica específica. Dessa forma, denotaremos $h_d(x)$ por $h_{\text{top}}(x)$.

Definição 4.1. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado contínua. A função $h_{top} : X \longrightarrow [0, h_{top}(X, \mathbb{S})]$ é chamada de função entropia de $\mathbb{S}$.*

O próximo teorema dá uma cota inferior, dependendo da entropia métrica, para a função entropia em cada ponto. Além disso, prova que o supremo da função entropia é dado pela entropia topológica.

Teorema C. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Então*

i. $h_{top}(x) \geq \sup\{h_\nu(\mathbb{S}) : \nu \in \mathcal{M}_1(X),\ \Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$ *e* $x \in supp(\nu)\}$*;*

ii. Para todo $\varepsilon > 0$*,* $h_d(\cdot, \varepsilon)$ *é semicontínua superiormente e, consequentemente,* h_{top} *é Borel mensurável;*

iii. A função entropia $h_{top} : X \longrightarrow [0, \infty]$ *é* $\mathbb{S}$*-invariante;*

iv. Se $K \subseteq X$ *é fechado, então* $\sup_{x \in K} h_{top}(x) \geq h_{top}(K, \mathbb{S})$*. Em particular*

$$\sup_{x \in X} h_{top}(x) = h_{top}(X, \mathbb{S});$$

v. h_{top} *é* $\mathbb{S}$*-invariante e, para qualquer* $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ *satisfazendo* $\Pi(\sigma, \nu)_{erg} \neq \emptyset$*, temos*

$$\int_X h_{top}(x)\, d\nu \geq h_\nu(\mathbb{S}).$$

Demonstração. Sabemos que

$$h_{\mathrm{top}}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \text{ vizinhança compacta de } x\},$$

e do Teorema B temos que, para ν ergódica,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \geq h_\nu(\mathbb{S}).$$

Como vale a inclusão $\{K \text{ vizinhança compacta de } x\} \subseteq \{K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \text{ vizinhança compacta de } x\} \\ &\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(K, \mathbb{S}, \varepsilon) : K \in B_X \text{ com } \nu(K) > 0\} \\ &\geq h_\nu(\mathbb{S}), \end{aligned}$$

provando o item (i).

Para o item (ii), seja $\varepsilon > 0$. Para $r \in \mathbb{R}$, se $h_{\text{top}}(x_0, \varepsilon) < r$, então existe uma vizinhança fechada K de x_0 com $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) < r$. Em particular, $h_{\text{top}}(x, \varepsilon) < r$ para todo $x \in K$. Logo, $h_{\text{top}}(\cdot, \varepsilon)$ é semicontínua superiormente. Já que $h_{\text{top}}(x)$ pode ser obtida como o limite de $\{h_{\text{top}}(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$, que é uma sequência de funções semicontínuas superiormente, segue que h_{top} é Borel mensurável.

(iv) Cubra K por finitas bolas fechadas $B_1^1, \ldots, B_{l_1}^1$, as quais têm diâmetros no máximo 1. Sabemos que

$$h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) = \max_j h_{\text{top}}(B_j^1, \mathbb{S}),$$

e isso implica a existência de j_1 tal que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = B(B_{j_1}^1 \cap K, \mathbb{S}, \varepsilon)$. Da mesma forma, cobrindo $B_{j_1}^1$ por finitas bolas fechadas $B_1^2, \ldots, B_{l_2}^2$ de diâmetro no máximo $\frac{1}{2}$, podemos concluir que existe um j_2 tal que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = B(B_{j_2}^2 \cap K, \mathbb{S}, \varepsilon)$. Por indução, para cada $n \geq 2$, existe uma bola fechada $B_{j_n}^n \subseteq B_{j_{n-1}}^{n-1}$ tal que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) = B(B_{j_n}^n \cap K, \mathbb{S}, \varepsilon)$. Seja x_0 o único ponto que está na interseção de todas as bolas $B_{j_n}^n$. x_0 é um elemento de K, pois K é fechado. Se K' é uma vizinhança fechada qualquer de x_0, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande teremos que $B_{j_n}^n \cap K \subseteq K'$, o que implica

$$B(K', \mathbb{S}, \varepsilon) \geq B(B_{j_n}^n \cap K, \mathbb{S}, \varepsilon) = B(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Já que isso vale para qualquer K' vizinhança fechada de x_0, segue que

$$h_d(x_0, \varepsilon) = \inf\{B(K', \mathbb{S}, \varepsilon) : K' \text{ viz. fechada de } x_0\} \geq B(K, \mathbb{S}, \varepsilon),$$

e disso, fazendo $\varepsilon \to 0$ e lembrando que $h_d(x_0, \varepsilon) \leq h_{\text{top}}(x_0)$ para todo ε, obtemos

$$h_{\text{top}}(x_0) \geq h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}).$$

Tomando o supremo dentre todos elementos de K, podemos concluir que

$$\sup_{x \in K} h_{\text{top}}(x) \geq h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}).$$

Para a parte final da prova do Teorema C precisaremos da seguinte proposição, que é uma consequência da definição de função entropia de $\mathbb{S}$ e de $\mathcal{F}_G$ e é, de certa forma, a versão para função entropia da Proposição 3.3. Escreveremos $h_{\text{top}}(\cdot, \mathbb{S})$ e $h_{\text{top}}((\cdot, \cdot), \mathcal{F}_G)$ para explicitar qual dinâmica está sendo levada em consideração. Lembre que, para qualquer espaço topológico compacto Y, se d' é uma métrica em Y que gera a topologia de Y, então $h_{\text{top}}(\cdot) = h_{d'}(\cdot)$.

Proposição 4.2. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Para $x \in X$ e $\omega \in \Sigma_p^+$,*

$$h_{top}((\omega, x), \mathcal{F}_G) = h_{top}(x, \mathbb{S}) + \log p.$$

Demonstração da Proposição. Fixa $\varepsilon > 0$. Seja $x \in X$ e $\delta > 0$. Existe $Z = Z(\varepsilon)$ uma vizinhança fechada de x tal que

$$h_d(x, \varepsilon) \leq B(Z, \mathbb{S}, \varepsilon) \leq h_d(x, \varepsilon) + \delta.$$

Dado $\omega \in \Sigma_p^+$, note que $\Sigma_p^+ \times Z$ é uma vizinhança fechada de

(ω, x). Segue que

$$\begin{aligned} h_{D\times d}((\omega,x),\varepsilon) &\leq B(\Sigma_p^+ \times Z, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \\ &\leq B(Z, \mathbb{S}, \varepsilon) + \log p \\ &\leq h_d(x,\varepsilon) + \delta + \log p, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade vem de 3.2. Então, fazendo $\delta \to 0$ e $\varepsilon \to 0$, concluimos que

$$h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G) \leq h_{\text{top}}(x,\mathbb{S}) + \log p.$$

Por outro lado, dada $\Sigma \times K$ uma vizinhança fechada de (ω, x) (a qual podemos assumir sem perda de generalidade que foi tomada tal que Σ seja um cilindro e K uma vizinhança fechada de x), temos, de 3.1, na prova da Proposição 3.3, que

$$S(K,\mathbb{S},\varepsilon) + \log p \leq S(\Sigma \times K, \mathcal{F}_G, \varepsilon),$$

para todo $\varepsilon > 0$. Logo

$$\begin{aligned} &h_{D\times d}((\omega,x),\varepsilon) = \\ &\qquad = \inf\{S(V,\mathcal{F}_G,\varepsilon) : V \text{ é uma viz. fechada de } (\omega,x)\} \\ &\qquad = \inf\{S(\Sigma \times K,\mathcal{F}_G,\varepsilon) : \Sigma \text{ é um cilindro contendo } \omega \\ &\qquad\qquad \text{e } K \text{ é uma viz. fechada de } x\} \\ &\qquad \geq \inf\{S(K,\mathbb{S},\varepsilon) : K \text{ é uma viz. fechada de } x\} + \log p \\ &\qquad = h_d(x,\varepsilon) + \log p, \end{aligned}$$

portanto $h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G) \geq h_{\text{top}}(x,\mathbb{S}) + \log p$ e isso conclui a prova da Proposição. □

O próximo Lema garante que a função entropia associada a $\mathcal{F}_G$ é $\mathcal{F}_G$-invariante.

Lema 4.3. *Seja $\mathcal{F}_G : \Sigma_p^+ \times X \longrightarrow \Sigma_p^+ \times X$ o skew-product dado na Definição 2.4. Então a função entropia associada a $\mathcal{F}_G$ é $\mathcal{F}_G$-invariante.*

Demonstração do Lema. Seja $(\omega, x) \in \Sigma_p^+ \times X$ e $\varepsilon > 0$ fixo. Seja $K \subseteq \Sigma_p^+ \times X$ uma vizinhança fechada de $\mathcal{F}_G(\omega, x)$. Pela continuidade de $\mathcal{F}_G$, existe $M \subseteq \mathcal{F}_G^{-1}(K)$ uma vizinhança fechada de (ω, x) cujo diâmetro é menor que ε. Então, dado $n \in \mathbb{N}$, se $E \subseteq M$ é (n, ε)-separado em M, então $\mathcal{F}_G(E) \subseteq K$ é $(n-1, \varepsilon)$-separado em K. Isso implica que

$$S_n(M, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \leq S_{n-1}(K, \mathcal{F}_G, \varepsilon),$$

e, portanto,

$$S(M, \mathcal{F}_G, \varepsilon) \leq S(K, \mathcal{F}_G, \varepsilon).$$

Dessa forma, da definição de h_{top} temos

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}((\omega, x), &\mathcal{F}_G) = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(U, \mathcal{F}_G, \varepsilon) : U \text{ é viz. fechada de } (\omega, x)\} \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{S(V, \mathcal{F}_G, \varepsilon) : V \text{ é viz. fechada de } \mathcal{F}_G(\omega, x)\} \\ &= h_{\text{top}}(\mathcal{F}_G(\omega, x), \mathcal{F}_G). \end{aligned}$$

Para a desigualdade inversa, tome $K \subseteq \Sigma_p^+ \times X$ uma vizinhança fechada de $\mathcal{F}_G(\omega, x)$, e considere $\mathcal{F}_G^{-1}(K)$, que é vizinhança fechada de (ω, x) e satisfaz $\mathcal{F}_G(\mathcal{F}_G^{-1}(K)) = K$. Se $F \subseteq \mathcal{F}_G^{-1}(K)$ é um conjunto (n, ε)-gerador de $\mathcal{F}_G^{-1}(K)$, então $\mathcal{F}_G(F) \subseteq K$ é um conjunto $(n-1, \varepsilon)$-gerador de K. Logo

$B(K,\mathcal{F}_G,\varepsilon) \le B(\mathcal{F}_G^{-1}(K),\mathcal{F}_G,\varepsilon)$, o que implica

$$\begin{aligned}
&h_{\text{top}}(\mathcal{F}_G(\omega,x),\mathcal{F}_G) = \\
&\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf\{B(K,\mathcal{F}_G,\varepsilon) : K \text{ viz. fechada de } \mathcal{F}_G(\omega,x)\} \\
&\qquad \le \lim_{\varepsilon\to 0}\inf\{B(K',\mathcal{F}_G,\varepsilon) : K' \text{ é viz. fechada de } (\omega,x)\} \\
&\qquad = h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G),
\end{aligned}$$

e isso conclui a prova do Lema. □

O seguinte Corolário prova o item (iii) do Teorema.

Corolário 4.4. *A função entropia associada a $\mathbb{S}$ é $\mathbb{S}$-invariante.*

Demonstração do Corolário. Seja $f \in G_1^*$, e seja $\omega = \omega_1\omega_2\cdots \in \Sigma_p^+$ tal que $g_\omega^1 = f$. Então, pela Proposição 4.2 e pelo Lema 4.3 temos

$$\begin{aligned}
h_{\text{top}}(x,\mathbb{S}) + \log p &= h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G) \\
&= h_{\text{top}}(\mathcal{F}_G(\omega,x),\mathcal{F}_G) \\
&= h_{\text{top}}((\sigma(\omega),f(x)),\mathcal{F}_G) \\
&= h_{\text{top}}(f(x),\mathbb{S}) + \log p.
\end{aligned}$$

Como isso vale para qualquer $f \in G_1^*$, fica provado o Corolário.

□

Só falta provar o item (v) do Teorema C. Para tanto, do item (ii) temos que

$$\sup_{(\omega,x)\in\Sigma_p^+\times X} h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G) = h_{\text{top}}(\Sigma_p^+\times X,\mathcal{F}_G).$$

Seja $\alpha \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(\Sigma_p^+ \times X)$. Pelo Lema 4.3 $h_{\text{top}}((\cdot,\cdot),\mathcal{F}_G)$ é $\mathcal{F}_G$-invariante, logo existe $c \ge 0$ com $h_{\text{top}}(\Sigma_p^+ \times X,\mathcal{F}_G) \ge c$ tal que $h_{\text{top}}((\omega,x),\mathcal{F}_G) = c$ para α-q.t.p. (ω,x). Isso se deve ao fato de

$(\mathcal{F}_G, \alpha)$ ser um sistema ergódico. Por (i), aplicado a $\mathcal{F}_G$, temos $c \geq h_\alpha(\mathcal{F}_G)$. Logo,

$$\int_{\Sigma_p^+ \times X} h_{\text{top}}((\omega, x), \mathcal{F}_G) d\alpha \geq h_\alpha(\mathcal{F}_G).$$

Para $\nu = (\pi_X)_* \alpha$ obtemos, pela Proposição 4.2,

$$\begin{aligned}
h_\nu(\mathbb{S}) &= \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\text{erg}}} \{h_\mu(\mathcal{F}_G) - \log p\} \\
&\leq \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\text{erg}}} \left\{ \int_{\Sigma_p^+ \times X} h_{\text{top}}((\omega, x), \mathcal{F}_G) d\mu(\omega, x) - \log p \right\} \\
&= \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\text{erg}}} \int_{\Sigma_p^+ \times X} \left(h_{\text{top}}((\omega, x), \mathcal{F}_G) - \log p \right) d\mu(\omega, x) \\
&= \sup_{\mu \in \Pi(\sigma,\nu)_{\text{erg}}} \int_{\Sigma_p^+ \times X} h_{\text{top}}(x, \mathbb{S}) d\mu(\omega, x) \\
&= \int_X h_{\text{top}}(x, \mathbb{S}) d\nu(x),
\end{aligned}$$

o que finaliza a prova. □

Definição 4.5. *Dizemos que $x \in X$ é um ponto de entropia uniforme e denotamos $x \in E_{up}(X, \mathbb{S})$ se $h_{top}(x) > 0$.*

Dizemos que $x \in X$ é um ponto de entropia uniforme total e denotamos $x \in E_{up}^f(X, \mathbb{S})$ se $h_{top}(x) = h_{top}(X, \mathbb{S})$.

O teorema a seguir relaciona as noções de ponto de entropia e ponto de entropia uniforme. Além disso, mostra que os conjuntos de pontos de entropia uniforme e pontos de entropia uniforme total são $\mathbb{S}$-invariantes e que, para $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ satisfazendo $\Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset$ e $h_\nu(\mathbb{S}) > 0$, nós temos $\text{supp}(\nu) \subseteq h_{\text{top}}^{-1}((0, \infty])) = E_{up}(X, \mathbb{S})$. No caso em que $h_\nu(\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$, vale que $\text{supp}(\nu) \subseteq h_{\text{top}}^{-1}(h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})) = E_{up}^f(X, \mathbb{S})$.

Teorema D. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado.*

i. $E^f_{up}(X,\mathbb{S}) \subseteq E_{up}(X,\mathbb{S}) \cap E^f_p(X,\mathbb{S})$, *e* $E_{up}(X,\mathbb{S}) \subseteq E_p(X,\mathbb{S})$.

ii. Se K é um conjunto fechado com $h_{top}(K,\mathbb{S}) > 0$, então $K \cap E_{up}(X,\mathbb{S}) \neq \emptyset$. Em particular, $E_{up}(X,\mathbb{S}) \neq \emptyset$ quando $h_{top}(X,\mathbb{S}) > 0$.

iii. $E_{up}(X,\mathbb{S})$ e $E^f_{up}(X,\mathbb{S})$ são $\mathbb{S}$-invariantes.

iv. $E_{up}(X,\mathbb{S})$ é um conjunto F_σ, ou seja, é uma união enumerável de conjuntos fechados de X. $E^f_{up}(X,\mathbb{S})$ é um conjunto $F_{\sigma\delta}$, ou seja, uma interseção enumerável de conjuntos F_σ de X.

v. Se $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ é tal que $\Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset$ e $h_\nu(\mathbb{S}) > 0$, então $supp(\nu) \subseteq E_{up}(X,\mathbb{S})$.

vi. Se $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ é tal que $\Pi(\sigma,\nu)_{erg} \neq \emptyset$ e $h_\nu(\mathbb{S}) = h_{top}(X,\mathbb{S})$, então $supp(\nu) \subseteq E^f_{up}(X,\mathbb{S})$.

vii. $h_{top}(E_{up}(X,\mathbb{S}),\mathbb{S}) = h_{top}(X,\mathbb{S})$.

Demonstração. (i) Seja $x \in E^f_{\mathrm{up}}(X,\mathbb{S})$, ou seja, tal que $h_{\mathrm{top}}(x) = h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S})$. Se $h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S}) > 0$, então $h_{\mathrm{top}}(x) > 0$ e, portanto, $x \in E_{\mathrm{up}}(X,\mathbb{S})$.

Como $h_{\mathrm{top}}(x) = h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S})$, então dado um $\delta > 0$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $h_{\mathrm{top}}(x,\varepsilon) > h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S}) - \delta$ para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$. Além disso, para todo compacto K contendo x vale que $h_{\mathrm{top}}(x,\varepsilon) \leq S(K,\mathbb{S},\varepsilon)$. Logo,

$$S(K,\mathbb{S},\varepsilon) > h_{\mathrm{top}}(X,\mathbb{S}) - \delta,$$

para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$ e todo K compacto contendo x. Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que

$$h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) \geq h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) - \delta,$$

para todo K compacto contendo x. Como vale para qualquer $\delta > 0$, segue que $h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) \geq h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$, e portanto $x \in E_p^f(X, \mathbb{S})$.

Para a segunda parte do item, seja $x \in E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$ e K uma vizinhança fechada de x.

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \\ &\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{B(K', \mathbb{S}, \varepsilon), K' \text{ é viz. fechada de } x\} \\ &= h_{\text{top}}(x) > 0, \end{aligned}$$

logo, $x \in E_p(X, \mathbb{S})$.

(ii) Este item é consequência do item (iv) do Teorema C, que diz que, se $K \subseteq X$ é fechado, então

$$\sup_{x \in K} h_{\text{top}}(x) \geq h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}).$$

De fato, se $h_{\text{top}}(K, \mathbb{S}) > 0$, então segue do Teorema C que existe $x \in K$ com $h_{\text{top}}(x) > 0$, logo $K \cap E_{\text{up}}(X, \mathbb{S}) \neq \emptyset$, o que vale em particular para $K = X$.

(iii) Seja $x \in E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$. Temos que $h_{\text{top}}(x) > 0$, e do item (iii) do Teorema C a função h_{top} é $\mathbb{S}$-invariante, portanto também temos $h_{\text{top}}(f(x)) > 0$ para toda $f \in G_1$. Logo, $f(x) \in E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$ para toda $f \in G_1$, o que significa que $E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$ é $\mathbb{S}$-invariante.

Da mesma forma, se $x \in E_{\text{up}}^f(X, \mathbb{S})$, vale que $h_{\text{top}}(x) = h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$ e também que $h_{\text{top}}(f(x)) = h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$, pois h_{top} é $\mathbb{S}$-invariante. Logo, $f(x) \in E_{\text{up}}^f(X, \mathbb{S})$ para toda $f \in G_1$, e portanto $E_{\text{up}}^f(X, \mathbb{S})$ é $\mathbb{S}$-invariante.

(iv) Vamos assumir sem perda de generalidade que $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) > 0$. Então

$$E_{\text{up}}(X, \mathbb{S}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : h_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, a função $h_d(\cdot, \varepsilon)$ é semicontínua superiormente, portanto $\{x \in X : h_d(x, \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{m}\}$ é fechado para quaisquer $m, n \in N$, e $E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$ é F_σ.

Já para $E^f_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$, temos que, se $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) < \infty$,

$$E^f_{\text{up}}(X, \mathbb{S}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : h_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \geq h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) - \frac{1}{m}\},$$

e, se $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) = \infty$,

$$E^f_{\text{up}}(X, \mathbb{S}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : h_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \geq m\},$$

de forma que $E^f_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$ é $F_{\sigma\delta}$.

(v) Por C, temos que

$$h_{\text{top}}(x) \geq \sup\{h_\nu(\mathbb{S}) : \nu \in \mathcal{M}_1(X), \Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset \text{ e } x \in \text{supp}(\nu)\}.$$

Seja $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ com $\Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset$ e $h_\nu(\mathbb{S}) > 0$. Então, se $x \in \text{supp}(\nu)$,

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(x) &\geq \sup\{h_\nu(\mathbb{S}) : \nu \in \mathcal{M}_1(X), \Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset \text{ e } x \in \text{supp}(\nu)\} \\ &\geq h_\nu(\mathbb{S}) > 0, \end{aligned}$$

de onde $h_{\text{top}}(x) > 0$ e, portanto, $x \in E_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$.

(vi) Seja $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ com $\Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset$ e $h_\nu(\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$. Então

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) &\geq h_{\text{top}}(x) \\ &\geq \sup\{h_\nu(\mathbb{S}) : \nu \in \mathcal{M}_1(X), \Pi(\sigma, \nu) \neq \emptyset \text{ e } x \in \text{supp}(\nu)\} \\ &\geq h_\nu(\mathbb{S}) \\ &= h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}). \end{aligned}$$

Ou seja, $h_{\text{top}}(x) = h_{\text{top}}(X, \mathbb{S})$ e, portanto, $x \in E^f_{\text{up}}(X, \mathbb{S})$.

(vii) Para este item basta imitar o argumento feito no item (iii) do Teorema A. $\square$

Definição 4.6. *Dizemos que uma ação contínua de semigrupo livre $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ associada ao semigrupo finitamente gerado G satisfaz a propriedade da especificação orbital forte (conceito introduzido em [38]) se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $p(\varepsilon) > 0$ um inteiro tal que, para*

- *qualquer $\underline{h}_{p_j} \in G^*_{p_j}$,*
- *quaisquer pontos $x_1, \ldots, x_k \in X$,*
- *quaisquer números naturais $n_1, \ldots, n_k$ (com $p_j \geq p(\varepsilon)$ para $1 \leq j \leq k$),*
- *e quaisquer $\underline{g}_{n_j,j} = g_{i_{n_j},j} \ldots g_{i_{n_2},j} g_{i_{n_1},j} \in G_{n_j}$ (onde $1 \leq j \leq k$) elementos do semigrupo,*

existe $x \in X$ tal que

$$d(\underline{g}_{l,1}(x), \underline{g}_{l,1}(x_1)) < \varepsilon$$

para todo $l = 1, \ldots, n_1$ e

$$d(\underline{g}_{l,j} \underline{h}_{p_{j-1}} \ldots \underline{g}_{n_2,2} \underline{h}_{p_1} \underline{g}_{n_1,1}(x), \underline{g}_{l,j}(x_j)) < \varepsilon$$

para todo $j = 2, \ldots, k$ e $l = 1, \ldots, n_j$ (aqui estamos considerando $\underline{g}_{l,j} = g_{i_l,j} \ldots g_{i_1,j}$).

É interessante notar que, no caso de uma dinâmica só, essa definição recai na definição da propriedade da especificação.

No teorema a seguir mostramos que a propriedade da especificação orbital forte implica que todo ponto é um ponto de entropia total uniforme.

Teorema E. *Seja* $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ *uma ação de semigrupo livre finitamente gerado tal que todo* $g \in G_1$ *é um homeomorfismo local. Se* $\mathbb{S}$ *satisfaz a propriedade da especifição orbital forte, então* $h_{top}(x) = h_{top}(X, \mathbb{S})$*, para todo* $x \in X$.

Demonstração. Como $\mathbb{S}$ tem a propriedade da especificação orbital forte, então por [38, Theorem 11] temos que $h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) > 0$ e que todo ponto é um ponto de entropia total.

Fixa $\zeta > 0$. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$S(X, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq h_{\text{top}}(X, \mathbb{S}) - \zeta, \tag{4.1}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Pela definição da função entropia, existe $\eta \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \eta)$ existe uma vizinhança fechada de x, digamos $K = K(\frac{\varepsilon}{4})$, para a qual temos

$$h_{\text{top}}(x) - \zeta < S\left(K, \mathbb{S}, \frac{\varepsilon}{4}\right) < h_{\text{top}}(x) + \zeta.$$

Fixa $\varepsilon \in (0, \eta)$ e seja $p(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ como dado pela propriedade da especificação orbital forte. Como $G_{p(\varepsilon)}$ tem finitos elementos com finitos ramos inversos, então existe C_ε (que depende de ε e tende a zero quando $\varepsilon \to 0$) tal que

$$\text{diam}(\underline{h}^{-1}(B(y, \varepsilon))) \leq C_\varepsilon,$$

para $\underline{h} \in G_{p(\varepsilon)}$ e $y \in X$.

Fixa $\underline{h} = h_{i_{p(\varepsilon)}} \dots h_{i_1} \in G^*_{p(\varepsilon)}$. Toma $n \geq 1$ e $\underline{g} = g_{i_n} \dots g_{i_1} \in G_n$ arbitrários. Seja $E = \{x_1, \dots, x_l\} \subseteq X$ um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon)$-separado maximal e considere um aberto $W \subseteq K$ definido como o conjunto de pontos $y \in K$ tais que $d(y, \partial K) > C_\eta$. Assuma que $0 < \varepsilon \leq \eta$ satisfaz $\varepsilon + C_\varepsilon < C_\eta$.

Dado um conjunto ε-separado $F = \{z_1, \dots, z_m\} \subseteq \overline{W}$, pela propriedade da especificação, para qualquer $x_i \in E$ e $z_j \in F$ existe $y_i^j \in B(z_j, \frac{\varepsilon}{4}) \cap \underline{h}^{-1}(B(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4}))$.

Como $\operatorname{diam}(\underline{h}^{-1}(B(y, \frac{\varepsilon}{4}))) \leq C_{\frac{\varepsilon}{4}}$, segue que

$$\begin{aligned}
C_\eta &\leq d(z_j, \partial K) \\
&\leq d(z_j, y_i^j) + d\left(y_i^j, \underline{h}^{-1}\left(B\left(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\right) + \\
&\qquad d\left(\underline{h}^{-1}\left(B\left(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4}\right)\right), \partial K\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + C_{\frac{\varepsilon}{4}} + d\left(\underline{h}^{-1}\left(B\left(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4}\right)\right), \partial K\right),
\end{aligned}$$

o que implica que $d(\underline{h}^{-1}(B(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4})), \partial K) \geq C_\eta - \frac{\varepsilon}{4} - C_{\frac{\varepsilon}{4}} > 0$.

Disso podemos concluir que $\underline{h}^{-1}(B(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4})) \subseteq K$, para todo i. Uma vez que $\{x_i\}_{i=1}^{l}$ é $(\underline{g}, \varepsilon)$-separado, segue que os conjuntos $B(x_i, \underline{g}, \frac{\varepsilon}{4})$, com $i = 1, \ldots, l$ são dois-a-dois disjuntos e os pontos $y_i^j \in K$ são $(\underline{g}\underline{h}, \frac{\varepsilon}{4})$-separados. Isso prova que

$$s\left(K, \underline{g}\underline{h}, \frac{\varepsilon}{4}\right) \geq s(X, \underline{g}, \varepsilon)\dot{s}(K, \mathrm{Id}, \varepsilon) \geq s(X, \underline{g}, \varepsilon).$$

Os elementos $\underline{g}$ e $\underline{h}$ foram escolhidos arbitrariamente, portanto somando sobre todas as possíveis concatenações, fazendo $n \to \infty$, e lembrando de 4.1 deduzimos que

$$h_{\mathrm{top}}(x) + \zeta \geq S\left(K, \mathbb{S}, \frac{\varepsilon}{4}\right) \geq S(X, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq h_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{S}) - \zeta,$$

de onde obtemos que $h_{\mathrm{top}}(x) \geq h_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{S}) - 2\zeta$. Como ζ pode ser escolhido arbitrariamente, segue que $h_{\mathrm{top}}(x) = h_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{S})$. $\square$

O último teorema mostra que entropia topológica de uma ação de semigrupo livre pode ser computada em termos de conjuntos enumeráveis.

Teorema F. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \to X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado. Então existe um subconjunto fechado enumerável $K \subseteq X$ tal que $h_{top}(K, \mathbb{S}) = h_{top}(X, \mathbb{S})$. Além disso,* *i.* *$K$ pode ser escolhido de forma que tenha no máximo um ponto de acumulação;*

ii. *K tem um único ponto de acumulação se, e somente se, existe $x \in X$ com $h_{top}(x) = h_{top}(X, \mathbb{S})$.*

Demonstração. O teorema será consequência da seguinte proposição.

Proposição 4.7. *Seja $\mathbb{S} : G \times X \to X$ uma ação de semigrupo livre finitamente gerado e h_{top} sua função entropia.*

i. *Se K é um subconjunto fechado com um único ponto de acumulação x_0, então $h_{top}(x_0) \geq h_{top}(K, \mathbb{S})$.*

ii. *Seja $x_0 \in X$. Então existe um subconjunto fechado enumerável $K \subseteq X$ tal que $x_0 \in K$ é seu único ponto de acumulação em X e $h_{top}(x_0) = h_{top}(K, \mathbb{S})$.*

Demonstração da Proposição. (i) Seja $\varepsilon > 0$. Por hipótese, para qualquer vizinhança Z de x_0, temos que $K \setminus Z$ é finito, e isso implica que $B(Z, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq B(K, \mathbb{S}, \varepsilon)$. Da definição de h_{top} temos que

$$h_{\text{top}}(x_0) \geq h_d(x_0, \varepsilon) \geq B(K, \mathbb{S}, \varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos que $h_{\text{top}}(x_0) \geq h_{\text{top}}(K, \mathbb{S})$.

(ii) Assuma que $h_{\text{top}}(x_0) < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$K_n = \left\{ x \in X : d(x, x_0) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, escolhemos $\varepsilon_m > 0$ tal que

$$h_{\text{top}}(x_0) - \frac{1}{m} < \inf_{n \in \mathbb{N}} S(K_n, \mathbb{S}, \varepsilon_m) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \limsup_{k \to \infty} \frac{1}{k} \log S_k(K_n, \mathbb{S}, \varepsilon_m).$$

Assim, existe uma sequência crescente $\{k_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{p^{k_{n,m}}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{k_{n,m}}} S(K_n, \underline{g}, \varepsilon_m) = S_{k_{n,m}}(K_n, \mathbb{S}, \varepsilon_m) \geq e^{k_{n,m}(h_{\text{top}}(x_0)-\frac{1}{m})}.$$

Tome $\underline{g} \in G^*_{k_{n,m}}$ e denote por $E_{\underline{g},(n,m)}$ um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon_m)$-separado de K_n de máxima cardinalidade. Defina

$$E_{n,m} = \bigcup_{\underline{g}\in G^*_{k_{n,m}}} E_{\underline{g},(n,m)} \cup \{x_0\} \text{ e } K = \bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} E_{n,m}.$$

Se V é uma vizinhança de x_0, então pela definição dos conjuntos K_n, nós temos que $K_{n_0} \subseteq V$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então

$$K \setminus V \subseteq K \setminus K_{n_0} \subseteq \bigcup_{m=1}^{n_0-1} \bigcup_{n=m}^{n_0-1} E_{n,m}.$$

Como cada $E_{n,m}$ é finito, $K \setminus V$ é finito e isso garante que x_0 é o único ponto de acumulação possível para K.

Agora vamos mostrar que $h_{\text{top}}(x_0) = h_{\text{top}}(K, \mathbb{S})$. Para fazer isso, fixa $m \in \mathbb{N}$. Para $n \geq m$, tome $\underline{g} \in G^*_{k_{n,m}}$, e note que $E_{\underline{g},(n,m)}$ é um conjunto $(\underline{g}, \varepsilon_m)$-separado em K. Daí

$$\frac{1}{p^{k_{n,m}}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{k_{n,m}}} s(K, \underline{g}, \varepsilon_m) \geq \frac{1}{p^{k_{n,m}}} \sum_{\underline{g}\in G^*_{k_{n,m}}} |E_{\underline{g},(n,m)}| \geq e^{k_{n,m}(h_{\text{top}}(x_0)-\frac{1}{m})}.$$

Nesse caso, obtemos

$$\begin{aligned}
h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) &\geq S(K,\mathbb{S},\varepsilon_m) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log S_k(K,\mathbb{S},\varepsilon_m) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k_{n,m}}\log S_{k_{n,m}}(K,\mathbb{S},\varepsilon_m) \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{k_{n,m}}\log e^{k_{n,m}(h_{\text{top}}(x_0)-\frac{1}{m})} \\
&= h_{\text{top}}(x_0) - \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Como a desigualdade vale para qualquer $m \in N$, temos que $h_{\text{top}}(K,\mathbb{S}) \geq h_{\text{top}}(x_0)$. Aplicando o item (i) obtemos a igualdade que queríamos. $\square$

Agora podemos provar o Teorema F. Para $\varepsilon > 0$, considere $B_\varepsilon(x)$ a bola aberta de raio ε e centro em x. Como X é compacto, pelo Teorema C existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} h_{\text{top}}(x_n) = h_{\text{top}}(X,\mathbb{S}).$$

Seja $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência dada de números reais positivos que converge a zero. Aplicando a Proposição 4.7, dado $n \in \mathbb{N}$, é possível tomar um subconjunto enumerável fechado K_n tal que $h_{\text{top}}(K_n,\mathbb{S}) = h_{\text{top}}(x_n)$ e x_n é seu único ponto de acumulação em X. Além disso, $K_n \setminus B_{r_n}(x_n)$ é um subconjunto finito e, com essa observação, podemos assumir sem perda de generalidade que $K_n \subseteq B_{r_n}(x_n)$.

Defina $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n \cup \{x_0\}$. Como cada K_n é um conjunto enumerável fechado, K é enumerável fechado e o conjunto de pontos de acumulação de K é $\{x_0\}\cup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, como $x_n \to x_0$

e $r_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$h_{\mathrm{top}}(K, \mathbb{S}) \geq h_{\mathrm{top}}(K_n, \mathbb{S}) = h_{\mathrm{top}}(x_n),$$

o que implica que

$$h_{\mathrm{top}}(K, \mathbb{S}) \geq \lim_{n\to\infty} h_{\mathrm{top}}(x_n) = h_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{S}),$$

e isso termina a prova, tomando K como o conjunto desejado, uma vez que $h_{\mathrm{top}}(K, \mathbb{S}) \leq h_{\mathrm{top}}(X, \mathbb{S})$. $\square$

Capítulo 5

Exemplos

O primeiro exemplo considera uma ação de semigrupo livre em que o conjunto gerador é dado por funções expansoras.

Exemplo 5.1. Dizemos que um difeomorfismo local $f : M \longrightarrow M$ de classe C^1 em uma variedade Riemanniana compacta M é expansor se existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $\|(Df^n(x))^{-1}\| \leq C\lambda^n$ para todo $n \geq 1$ e $x \in M$. Em [38, Theorems 13 e 16] é mostrado que se $G_1^* = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ é um conjunto finito de funções expansoras agindo em M e G é o semigrupo livre gerado por G_1, então $\mathbb{S}$ tem a propriedade da especificação orbital forte e todo ponto $x \in M$ é um ponto de entropia total para $\mathbb{S}$. Além disso, pelo Teorema E, $h_{\text{top}}(x) = h_{\text{top}}(M, \mathbb{S})$ para todo $x \in M$.

O próximo exemplo mostra que é possível ter uma ação de semigrupo livre com um conjunto gerador que não é dado por funções expansoras, mas cujo conjunto dos pontos de entropia total continua sendo todo o espaço de fase.

Exemplo 5.2. Para qualquer $\beta > 0$, considere a função f_β :

$[0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$f_\beta(x) = \begin{cases} x(1+(2x)^\beta), & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2x-1, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

também conhecido como função de Manneville-Pomeau. Em-

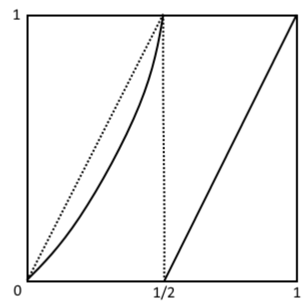

Figura 5.1: Gráfico da função de Manneville-Pomeau.

bora f_β não seja contínua, ela induz uma transformação do círculo $\tilde{f}_\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ que é contínua e topologicamente mixing.

Seja G o semigrupo gerado por $G_1 = \{\mathrm{Id}, \tilde{f}_\beta, R_\alpha\}$, em que R_α é a rotação de ângulo α. Nenhum dos elementos de G_1 é expansor. De novo, como mostrado em [38], temos que todo $x \in \mathbb{S}^1$ é um ponto de entropia total.

Nos exemplos anteriores o conjunto dos pontos de entropia era todo o espaço de fase. No próximo exemplo é apresentada uma ação de semigrupo livre para a qual o conjunto dos pontos de entropia não é o espaço todo.

Exemplo 5.3. Sejam X_1 e X_2 espaços métricos compactos não-vazios. Para $i \in \{1,2\}$ tome $f_i : X_i \longrightarrow X_i$ e $g_i : X_i \longrightarrow X_i$ funções contínuas. Então, defina $X = X_1 \cup X_2$, e

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \text{ se } & x \in X_1 \\ f_2(x), \text{ se } & x \in X_2 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), \text{ se} & x \in X_1 \\ g_2(x), \text{ se} & x \in X_2. \end{cases}$$

Se $f_2 = g_2 = \mathrm{Id}_{X_2}$ nós temos que a entropia topológica da ação de semigrupo gerado por $G_1 = \{\mathrm{Id}_X, f, g\}$ coincide com a entropia topológica da ação de semigrupo gerado por $H_1 = \{\mathrm{Id}_{X_1}, f_1, g_1\}$. Em particular, $E_p(X, \mathbb{S}) \subseteq X_1 \neq X$, no caso em que a ação de semigrupo livre do semigrupo gerado por H_1 tem entropia topológica positiva.

Na Proposição 3.10 vimos que se a entropia topológica de um subconjunto fechado é positiva então esse subconjunto contém um ponto de entropia. No exemplo a seguir veremos que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Exemplo 5.4. Considere

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Defina

$$A = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matrizes em $M_{5\times 5}(\mathbb{Z})$. Temos que $AB = BA$ e, como para qualquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{T}^5$ e $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$A^n B^m(x) = (C^n(x_1, x_2), C^m(x_3, x_4), 0),$$

essas matrizes induzem endomorfismos lineares não transitivos no toro $\mathbb{T}^5 = \mathbb{R}^5/\mathbb{Z}^5$. A ação dada pelo semigrupo gerado por $G_1 = \{\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^5}, A, B\}$ não admite um ponto com órbita densa. Outra consequência importante é que $h_{\mathrm{top}}(\pi(\{(0,0,0,0,x) : x \in \mathbb{R}\}), \mathbb{S}) = 0$, em que $\pi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{T}^5$ é a projeção canônica.

Por outro lado, dado $z \in \pi(\{(0,0,0,0,x) : x \in \mathbb{R}\})$, temos que $h_{\text{top}}(z) > 0$, ou seja, $z \in E_{up}(\mathbb{T}^5, \mathbb{S})$. De fato, seja $z \in \pi(\{(0,0,0,0,x) : x \in \mathbb{R}\})$ e $K \subseteq \mathbb{T}^5$ uma vizinhança fechada de z. Então existem $y \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(0,0,0,0,y) = z$, $U \subseteq \mathbb{R}$ vizinhança fechada de 0 e $V \subseteq \mathbb{R}$ vizinhança fechada de y tais que $\pi(U \times U \times U \times U \times V) \subseteq K$ é uma vizinhança fechada de z. Note que, por [40], dado $\alpha \in (0,1)$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno nós temos que

$$B(\pi(U \times U \times U \times U \times V), \mathbb{S}, \varepsilon) \geq \log \frac{4^\alpha}{2},$$

o que implica que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq B(\pi(U \times U \times U \times U \times V), \mathbb{S}, \varepsilon) \geq \log 2$. Dessa forma, como para qualquer vizinhança fechada K de z nós temos que $B(K, \mathbb{S}, \varepsilon) \geq \log 2$, segue que $h_{\text{top}}(z) \geq \log 2 > 0$.

No próximo exemplo apresentamos uma ação de semigrupo livre que é topologicamente transitiva, possui entropia topológica positiva, mas cujo conjunto dos pontos de entropia uniforme total não coincide com o espaço todo.

Exemplo 5.5. Seja $X = [0,2]$ e considere a função $f_1 : X \longrightarrow X$ (veja a Figura 5.2) definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - |1 - 3x|, & \text{se } x \in [0, \frac{2}{3}], \\ 3x - 2, & \text{se } x \in [\frac{2}{3}, 1], \\ x, & \text{se } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Nesse caso $f_1([0,1]) = [0,1]$, $f_1|_{[0,1]}$ é topologicamente transitiva e $h_{\text{top}}([0,2], f_1) = \log 3$.

Seja $f_2 : X \longrightarrow X$ (veja a Figura 5.3) definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} x, \ \text{se} & x \in [0,1], \\ 2 - |3 - 2x|, \ \text{se} & x \in [1,2]. \end{cases}$$

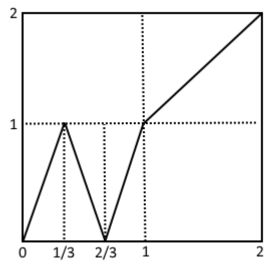

Figura 5.2: Gráfico da função f_1.

Note que $f_2([1,2]) = [1,2]$, $f_2|_{[1,2]}$ é topologicamente transitiva

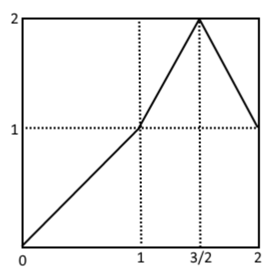

Figura 5.3: Gráfico da função f_2.

e $h_{\text{top}}([0,2], f_2) = \log 2$. Seja G o semigrupo livre gerado por $G_1 = \{\text{Id}, f_1, f_2\}$ e seja $\mathbb{S} : G \times X \longrightarrow X$ a ação de semigrupo livre induzida por G em X. Como para quaisquer dois conjuntos abertos $U, V \subseteq X$ existe $n \in \mathbb{N}$ para o qual $f_1^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ou $f_2^n(U) \cap V \neq \emptyset$, nós temos que $\mathbb{S}$ é topologicamente transitiva. Como

$$f_1|_{[0,1]} \circ f_2|_{[0,1]} = f_2|_{[0,1]} \circ f_1|_{[0,1]} = f_1|_{[0,1]},$$

e $f_1|_{[0,1]}$ satisfaz a propriedade da especificação (que coincide com a propriedade da especificação orbital forte quando consideramos o semigrupo gerado por $f_1|_{[0,1]}$), pelo Teorema E temos que $h_{\text{top}}(x) = \log 3$ para qualquer $x \in [0,1]$. Por outro lado, como

$$f_1|_{[1,2]} \circ f_2|_{[1,2]} = f_2|_{[1,2]} \circ f_1|_{[1,2]} = f_2|_{[1,2]},$$

temos, pelo Teorema E e usando que $f_2|_{[1,2]}$ tem a propriedade da especificação, que $h_{\text{top}}(x) = \log 2$ para qualquer $x \in [1,2]$, de forma que temos $E^f_{up}([0,2], \mathbb{S}) = [0,1] \neq [0,2]$.

Referências Bibliográficas

[1] F. Rodrigues, T. Jacobus, M. V. Silva. *Entropy points and applications for free semigroup actions.* Journal of Statistical Physics (2021), 186:6.

[2] Xiangdong Ye and Guohua Zhang. *Entropy points and applications.* Transactions of the American mathematical society 359:12 (2007), 6167–6186.

[3] R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrew. *Topological entropy.* Transactions of the American Mathematical Society, 114 (1965), 309—319.

[4] T. Downarowicz and . Newhouse. *Symbolic extensions and smooth dynamical systems.* Invent. Math., 160 (2005), 453–499.

[5] S. Newhouse. *Entropy and volume.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 8 (Conley Memorial Issue), (1988), 283–300.

[6] S. Newhouse. *Continuity properties of entropy.* Annals of Mathematics (2), 129 (1989), 215–235; Corrections to "Continuity properties of entropy", Annals of Mathematics (2), 131 (1990), 409–410.

[7] M. Shub. *Dynamical systems, filtrations and entropy.* Bull Amer. Math. Soc, 80 (1974),27-–41.

[8] Y. Yomdin. *Volume growth and entropy.* Israel Journal of Mathematics, 57 (1987), 285—300.

[9] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism, The Mathematical Structures of Equilibrium Statistical Mechanics.* Second edition. Cambridge University Press.

[10] D. Millar et al. *The Cambridge Dictionary of Scientists.* Cambridge University Press, 1996.

[11] D. Koslicki. *Topological entropy of DNA sequences.* Bioinformatics, 27:8 (2011) 1061–1067.

[12] Jin S, Tan R, Jiang Q, Xu L, Peng J, Wang Y, et al. *A Generalized Topological Entropy for Analyzing the Complexity of DNA Sequences.* PLoS ONE 9(2): e88519 (2014).

[13] N. Ampilova, I. Soloviev. *Entropies in investigation of dynamical systems and their application to digital image analysis.* Journal of Measurements in Engineering, 6:2 (2018) 107-118

[14] A. Brintrup, A. Ledwoch and J. Barros. *Topological robustness of the global automotive industry.* Logist. Res. 9:1 (2016).

[15] C. Kawan. *Invariance Entropy for Deterministic Control Systems.* Lecture Notes in Mathematics 2089. Springer International Publishing (2013).

[16] T. Hudetz. *Quantum Topological Entropy: First Steps of a "Pedestrian"Approach.* Quantum Probability and Related Topics, (1993) 237–261.

[17] Wissner-Gross, A. D., and C. E. Freer. *Causal Entropic Forces.* Physical Review Letters 110.16 (2013).

[18] A. Bufetov. *Topological entropy of free semigroup actions and skew-product transformations.* J. Dyn. Control Sys. 5:1 (1999), 137–142.

[19] A. Biś. *Partial variational principle for finitely generated groups of polynomial growth and some foliated spaces.* Colloq. Math. 110 (2008), 431–449.

[20] A. Biś. *An analogue of the variational principle for group and pseudogroup actions.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63:3 (2013) 839–863.

[21] A. Biś and P. Walczak. *Entropy of dal groups, pseudogroups, foliations and laminations.* Ann. Polon. Math. 100, n.1 (2011), 45–54.

[22] A. Biś and M. Urbanski. *Some remarks on topological entropy of a semigroup of continuous maps.* Cubo 8 (2006), no. 2, 63–71.

[23] A. Biś, M Carvalho, M. Mendes and P. Varandas. *A Convex Analysis approach to entropy functions, variational principles and equilibrium states.* Preprint 2020.

[24] E. Ghys, R. Langevin, P. Walczak. *Entropie géométrique des feuilletages.* Acta Math. 160:1–2 (1988) 105–142.

[25] D. Ruelle, *On a compact with $\mathbb{Z}^p$-action satisfying expansiveness and specification.* Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973) 237–251.

[26] X. Lin, D. Ma and Y. Wang. *On the measure-theoretic entropy and topological pressure of free semigroup actions.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 38:2 (2016), 686-716.

[27] H. Sumi. *Skew product maps related to finitely generated rational semigroups.* Nonlinearity 13:4 (2000), 995–1019.

[28] Q. Xiao and D. Ma. *Topological pressure of free semigroup sctions for non-compact sets and Bowen's equation, I.* J. Dyn. Diff. Equations (2021), https://doi.org/10.1007/s10884-021-09983-3.

[29] Q. Xiao, and D. Ma. *Topological Pressure of Free Semigroup Actions For Non-Compact Sets and Bowen's Equation, II.* J. Dyn. Diff. Equat. (2021). https://doi.org/10.1007/s10884-021-10055-9

[30] M. Carvalho, F. Rodrigues, P. Varandas. *Semigroups actions of expanding maps.* J. Stat. Phys. 116:1 (2017) 114–136.

[31] M. Carvalho, F. Rodrigues, P. Varandas. *Quantitative recurrence for free semigroup actions.* Nonlinearity 31:3 (2018) 864–886.

[32] M. Carvalho, F. Rodrigues and P. Varandas. *A variational principle for free semigroup actions.* Adv. Math. 334 (2018) 450–487.

[33] F. Blanchard. *A disjointness theorem involving topological entropy.* Bull. de la Soc. Math. de France, 121 (1993), 465–478.

[34] F. Blanchard and Y. Lacroix. *Zero-entropy factors of topological flows.* Proc. Amer. Math. Soc., 119 (1993), 985-992.

[35] F. Blanchard, E. Glasner and B. Host. *A variation on the variational principle and applications to entropy pairs.* Ergodic Th. and Dynam. Sys., 17 (1997), 29–43.

[36] F. Blanchard, B. Host, A. Maass, S. Martínez and D. Rudolph. *Entropy pairs for a measure.* Ergodic Th. and Dynam. Sys., 15 (1995), 621-632.

[37] W. Huang and X. Ye. *A local variational relation and applications.* Israel Journal of Mathematics, 151 (2006), 237-280.

[38] F.B. Rodrigues and P. Varandas. *Specification and thermodynamical properties of semigroup actions.* Journal Math. Phys. 57 (2016), 052704. doi.org/10.1063/1.4950928

[39] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems.* Cambridge, University press, 2002.

[40] A. Yu. Fishkin. *An analogue of the Misiurewicz-Przytycki theorem for some mappings.* Communications of the Moscow Mathematical Society (2001) 183–184.