

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

MODELAGEM MECÂNICA E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE  
FLUIDOS SMD EMPREGANDO UM MÉTODO MULTI-CAMPOS DE GALERKIN  
MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Daniel Dall'Onder dos Santos

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, maio de 2010.

MODELAGEM MECÂNICA E INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE  
FLUIDOS SMD EMPREGANDO UM MÉTODO MULTI-CAMPOS DE GALERKIN  
MÍNIMOS-QUADRADOS

por

Daniel Dall'Onder dos Santos  
Engenheiro Mecânico

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da  
Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey

Comissão de Avaliação:

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Adriane Prisco Petry – PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Nilo Sérgio Medeiros Cardozo – PPGEQ / UFRGS

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Mônica Feijó Naccache – DEM / PUC-Rio

Prof. Dr. Horácio A Vielmo  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 14 de maio de 2010.

*“Is this the world we created?  
We made it on our own  
Is this the world we devastated  
Right to the bone?  
If there’s a God in the sky looking down  
What can he think of what we’ve done  
To the world that he created?”*

**Brian May e Freddie Mercury**

## AGRADECIMENTOS

Embora esta Dissertação seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, a caminhada até aqui não foi trilhada sozinha. Por isso, expresso aqui meus sinceros agradecimentos:

À Deus, pelas oportunidades que me proporcionou nesta vida, pelas lutas ganhas e pelas perdas, aprendendo sempre a ser mais forte e a fazer o bem.

Aos meus pais *Dailor* e *Enriete*, por primarem pela minha educação e acreditarem, juntamente comigo, que é preciso sempre ir além; por nunca deixarem faltar amor e compreensão nas horas de dificuldades, pelas alegrias de cada dia; pelo apoio e incentivo.

À minha irmã Fabíola, pelo apoio e companheirismo.

Ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Sérgio Luiz Frey, pela orientação e parceria nesta caminhada que iniciou ainda na graduação e que com certeza continuará rendendo bons frutos.

Aos demais professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Aos amigos e colegas Cleiton Elsner da Fonseca, Lober Hermany, Lucas Vieira Adamatti e Renato da Rosa Martins, pela paciência, companheirismo e a convivência diária no LAMAC.

Aos demais verdadeiros amigos, pela ajuda e carinho.

Ao Grupo de Reologia (GReo) da PUC-Rio pelo auxílio na interpretação dos parâmetros reológicos discutidos neste trabalho, em especial à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Mônica Feijó Naccache e ao Prof. Dr. Paulo Roberto de Souza Mendes.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos concedida.

À todas as pessoas que de alguma forma colaboraram para a conclusão desta etapa.

## RESUMO

A maioria dos líquidos encontrados na natureza são não-Newtonianos e o estudo do seu comportamento tem uma importância significativa em diferentes áreas da engenharia. Entre eles, uma larga classe de materiais que exibem pequena ou nenhuma deformação quando sujeitos a um nível de tensões inferiores a uma tensão limite de escoamento – chamado de comportamento viscoplástico. A presente Dissertação tem como objetivo o estudo numérico de escoamentos bi-dimensionais em regime permanente de fluidos viscoplásticos não-lineares em uma cavidade forçada. O modelo mecânico é definido pelas equações de conservação de massa e de balanço de *momentum* acopladas ao modelo viscoplástico recentemente introduzido por Souza Mendes e Dutra – SMD – e é aproximado por um método de elementos finitos multi-campos estabilizado baseado na metodologia de Galerkin mínimos-quadrados que possui como variáveis primais os campos de tensão-extra, velocidade e pressão. As condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos para tensão-extra-velocidade e velocidade-pressão são violadas, permitindo assim a utilização de interpolações de igual ordem. O método estabilizado foi implementado no código de elementos finitos para fluidos não-Newtonianos em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) da UFRGS. Em diversos trabalhos encontrados na literatura, a superfície de escoamento do material é definida como a região onde o módulo da tensão-extra é igual à tensão limite de escoamento. É mostrado nesta Dissertação que esta metodologia pode conduzir à alguns erros, dado ao grande aumento experimentado pela taxa de cisalhamento em uma pequena faixa de tensões próximas à tensão limite de escoamento. Assim, foi adotada outra metodologia, definindo a superfície de escoamento como a linha onde a taxa de cisalhamento é igual a um valor dado pela relação de parâmetros reológicos do fluido, especificamente a tensão limite de escoamento e a viscosidade Newtoniana para baixas taxas de cisalhamento. Nas simulações numéricas realizadas, o número de salto,  $J$ , o coeficiente de *power-law*,  $n$ , e a vazão adimensional,  $U^*$ , são variados de forma a avaliar de que modo influenciam na dinâmica de escoamentos viscoplásticos. Os resultados obtidos estão de acordo com a literatura e atestam a estabilidade da formulação empregada.

Palavras-chave: escoamentos viscoplásticos; modelo SMD; modelagem mecânica multi-campos; Galerkin mínimos-quadrados; escoamento em cavidade forçada.

## ABSTRACT

Non-Newtonian fluids are the majority of liquids found on the nature and the study of their behavior has a significant importance on different areas of engineering. Among them, there is a wide class of materials that exhibits little or no deformation when subjected to a stress level behind an apparent yield stress – called the viscoplastic behavior. The present thesis aimed to a numerical study of two dimensional steady state laminar flows of non-linear viscoplastic fluids in a lid-driven cavity. The mechanical model was defined by the mass conservation and momentum balance equations coupled to the recently introduced Souza Mendes and Dutra – SMD – viscoplastic model and has been approximated by a stabilized multi-field finite element method based on the Galerkin least-squares methodology, having as primal variables the extra-stress, velocity and pressure fields. In this way, the compatibility conditions between the extra-stress-velocity and pressure-velocity (Babuška-Brezzi condition) finite element subspaces are violated, allowing to use equal-order finite element interpolations. The stabilized method has been implemented in the finite element code for non-Newtonian fluids under development at the Laboratory of Applied and Computational Fluid Mechanics (LAMAC) of UFRGS. In several works found on the literature, the yield surface of the material is defined as the region where the stress modulus is equal to the yield stress. Is shown in this work that this methodology can lead to some errors, due to the large strain rate increasing in a small range of values of stress on the vicinity of the yield stress. Therefore, it was adopted another approach, defining the yield surface as the line where the strain rate is equal to a value given by the relation of the rheological parameters of the fluid, namely the yield stress and the viscosity at low shear rates. In the performed numerical simulations, the jump number,  $J$ , the the power-law coefficient,  $n$ , and the non-dimensional flow rate,  $U^*$ , are ranged in order to evaluate how they the influence on the viscoplastic fluid dynamics have been investigated. All results found were in accordance with the affine literature and attests the good stability features of the formulation.

Keywords: viscoplastic flows; SMD model; multi-field mechanical modeling; Galerkin least-squares; lid-driven cavity flow.

## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>MODELAGEM MECÂNICA</b> .....	<b>5</b>
2.1	Equação da Continuidade .....	5
2.2	Equação de Balanço da Quantidade de Movimento.....	6
2.3	Fluido Newtoniano Generalizado.....	8
2.4	Modelos de Viscoplasticidade.....	10
2.5	Modelo Viscoplastico SMD.....	14
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DE ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>19</b>
3.1	Definições Preliminares.....	19
3.2	Formulação Forte.....	21
3.3	Formulação de Galerkin.....	24
3.4	Método de Galerkin Mínimos-Quadrados.....	26
3.5	Problema Matricial.....	28
3.6	O Elemento Quadrangular Bi-Linear.....	31
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS</b> .....	<b>33</b>
4.1	Um novo critério para a determinação de zonas rígidas.....	33
4.2	Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada – validação.....	35
4.3	Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada.....	49
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS</b> .....	<b>69</b>
5.1	Comentários Finais.....	70
5.2	Perspectivas Futuras.....	71
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>73</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Curvas da viscosidade <i>versus</i> tensão cisalhante para as funções de Cross e Carreau.	11
Figura 2.2	Curvas da função de Herschel-Bulkley regularizada por Papanastasiou para diferentes valores do parâmetro $m$ .(a) <i>Flow chart</i> ; (b) Viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento.	13
Figura 2.3	Curvas da viscosidade <i>versus</i> tensão cisalhante para as funções de Papanastasiou-Modificada (Herschel-Bulkley regularizada) e Bi-Viscosidade.	14
Figura 2.4	<i>Flow chart</i> do modelo SMD.	15
Figura 2.5	Curva da viscosidade <i>versus</i> tensão cisalhante para a função SMD.	16
Figura 2.6	Curvas da função SMD para diferentes relações $\eta_0/\tau_0$ . (a) <i>Flow chart</i> ; (b) Viscosidade <i>versus</i> taxa de cisalhamento.	16
Figura 2.7	Curvas de escoamento de materiais reais. (a) Solução de água e carbopol a 0.2%; (b) Lama de perfuração; (c) Emulsão de água e óleo; (d) Maionese comercial; (e) Formulação de papel.	17
Figura 3.1	Quadrilátero bi-unitário no domínio $\xi$ e $\eta$ e quadrilátero no domínio do problema ( $x_1$ e $x_2$ ) – ordenação nodal local	31
Figura 4.1	Morfologia das zonas rígidas para escoamentos sem inércia com $Re_{RH}=0$ , $J=10$ , $n=0.5$ e $U^*=1.0$ para (a),(b) e (c); $Re_{RH}=0$ , $J=10^4$ , $n=0.2$ e $U^*=0.01$ para (d),(e) e (f): (a) Critério de $\tau$ ; (b) Critério de $\dot{\gamma}$ ; (c) Critérios de $\tau$ (regiões pretas) e $\dot{\gamma}$ (regiões cinza); (d) Critério de $\tau$ ; (e) Critério de $\dot{\gamma}$ ; (f) Critérios de $\tau$ (regiões pretas) e $\dot{\gamma}$ (regiões cinza).	34
Figura 4.2	Descrição do problema da cavidade.	36
Figura 4.3	Módulo da tensão na posição $x_2^*=0.5$ : teste de independência de malha através de simulações sem inércia com $Re_{RH}=0$ , $J=10^4$ , $n=0.5$ e $U^*=0.1$ .	37
Figura 4.4	Discretizações do domínio empregadas: (a) 2500 elementos bilineares Q1/Q1/Q1; (b) 10000 elementos bilineares Q1/Q1/Q1.	37
Figura 4.5	Resultados para as zonas rígidas obtidos para escoamento sem inércia, $Re_{RH}=0$ , $J=10^4$ , $n=0.5$ e $U^*=0.1$ empregando diferentes discretizações: (a) 100 elementos; (b) 400 elementos; (c) 2500 elementos; (d) 10000 elementos; (e) 40000 elementos.	39
Figura 4.6	Curvas teóricas e reais para o termo regularizador do modelo SMD. (a) $J=9$ ; (b) $J=999$ .	40

- Figura 4.7 Curvas teóricas e reais para a função SMD sob influência de perturbações na taxa de cisalhamento para  $J=10^3$ . (a) Curva de escoamento; (b) Detalhe da região do platô. 41
- Figura 4.8 Comparação com os resultados de Neofytou, 2005, para  $Re_{PL}=100$  e  $Bn=0.01$  ( $Re_{RH}=1$ ,  $J=9$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=100$ ): (a) Perfil de velocidade horizontal em  $x_1^*=0.5$ ; (b) Perfil de velocidade vertical em  $x_2^*=0.5$ . 43
- Figura 4.9 Comparação com os resultados de Mitsoulis, 2001, empregando  $n=1.0$ ,  $\eta_0=1000$  Pa.s,  $\tau_0=1.0$  Pa e  $u_c=1.0$  m/s, variando  $U^*$  através do índice de consistência: (a) Posição do olho do vórtice em  $x_2^*$ ; (b) Valor da função linha de corrente no olho do vórtice. 44
- Figura 4.10 Resultados para escoamento sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$  obtidos com uma malha de 10000 elementos Q1/Q1/Q1: (a) campo de velocidade  $u_1^*$ ; (b) campo de velocidade  $u_2^*$ ; (c) campo de pressão; (d) tensão de cisalhamento; (e) módulo da tensão. 45
- Figura 4.11 Comparação com os resultados de Neofytou, 2005, para escoamentos com inércia,  $Re_{PL}=100$  – Trajetória do olho do vórtice dada a variação de  $U^*$  ( $Bn^{-1}$ ): (a) Vista do quadrante superior direito da cavidade; (b) Imagem ampliada da região de interesse. 48
- Figura 4.12 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.1$ ; (b)  $U^*=0.5$ ; (c)  $U^*=0.75$ ; (d)  $U^*=1.5$ ; (e)  $U^*=2$ ; (f)  $U^*=5$ ; (g)  $U^*=10$ . 50
- Figura 4.13 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.05$ ; (b)  $U^*=0.1$ ; (c)  $U^*=0.25$ ; (d)  $U^*=0.5$ ; (e)  $U^*=0.75$ ; (f)  $U^*=1.0$ . 51
- Figura 4.14 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=5$ ; (c)  $J=10$ , (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ . 53
- Figura 4.15 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=2.5$ ; (c)  $J=5$ ; (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ . 54
- Figura 4.16 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=1.5$  e  $U^*=1$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=2.5$ ; (c)  $J=10$ , (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ . 56
- Figura 4.17 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $n=0.2$ ; (b)  $n=0.35$ ; (c)  $n=0.6$ ; (d)  $n=0.8$ ; (e)  $n=1.2$ , (f)  $n=1.4$ . 57
- Figura 4.18 Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $n=0.2$ ; (b)  $n=0.35$ ; (c)  $n=0.5$ ; (d)  $n=0.8$ ; (e)  $n=1.2$ ; (f)  $n=1.4$ . 58
- Figura 4.19 Perfis do módulo da tensão-extra em  $x_2^*=0.5$  para escoamentos sem inércia, com  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$ ,  $U^*=1.0$ ;  $n=0.5$ , 1.0 e 1.5. 60
- Figura 4.20 Escoamento de fluido SMD sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$ : (a) Zonas rígidas através do critério de  $|\tau| > \tau_0$ ; (b) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.78$ ; (c) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.90$ ; (d) perfis de tensão-extra em  $x_1^*=1.0$ . 61

- Figura 4.21 Escoamento de fluido SMD com inércia,  $Re_{RH}=1000$ ,  $J=10^4$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=0.1$ : (a) Zonas rígidas através do critério de  $|\tau|>\tau_0$ ; (b) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.74$ ; (c) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.88$ ; (d) perfis de tensão-extra em  $x_l^*=1.0$ , (e) detalhe dos perfis de tensão-extra em  $x_l^*=1.0$ . 63
- Figura 4.22 Linhas de corrente e zonas rígidas para escoamentos com inércia para  $Re_{RH}=9999$  e  $n=1.0$ : (a)  $J=99$  e  $U^*=10$ ; (b)  $J=999$  e  $U^*=1$ ; (c)  $J=1999$  e  $U^*=0.5$ ; (d)  $J=2999$  e  $U^*=0.333$ ; (e)  $J=4999$  e  $U^*=0.2$ ; (f)  $J=9999$  e  $U^*=0.1$ . 66
- Figura 4.23 Linhas de corrente e zonas rígidas para escoamentos com inércia para  $Re_{RH}=1.0$ ,  $J=10^4$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.1$ ; (b)  $U^*=1.0$ ; (c)  $U^*=5.0$ ; (d)  $U^*=10.0$ ; (e)  $U^*=15.0$ . 68
- Figura 5.1 Cavidade forçada com razão de aspecto 2:1, casos com inércia. (a) Zonas rígidas e linhas de corrente para fluido SMD com  $Re_{RH}=1.41$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=5.0$ ; (b) Linhas de corrente para escoamento de fluido Newtoniano com  $Re=100$ ; (c) Vetores velocidade para escoamento de fluido Newtoniano com  $Re=100$ . 72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Coordenadas nodais no espaço $\xi$	32
------------	------------------------------------	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>a</b>	Campo vetorial qualquer	[-]
<b>A</b>	Campo tensorial qualquer	[-]
<b>Bn</b>	Número de Bingham	[-]
$C_0$	Espaço das funções contínuas	[-]
<b>D</b>	Tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
<b>dt</b>	Força devido à tensão que atua em um elemento de superfície	[N]
<b>E</b>	Matriz dos termos de $\boldsymbol{\tau}^h$	[-]
<b>F</b>	Matriz dos termos de forças de campo	[-]
<b>f</b>	Função de forças de corpo	[N/m <sup>3</sup> ]
<b>Fr</b>	Número de Froude	[-]
<b>G</b>	Matriz dos termos de pressão e continuidade	[-]
<b>g</b>	Campo de aceleração	[m/s <sup>2</sup> ]
<b>H</b>	Matriz de ligação entre os termos de $\boldsymbol{\tau}^h$ e $\mathbf{u}^h$	[-]
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio $\Omega$	[-]
$H_0^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev das funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam sobre o contorno $\Gamma_g$	[-]
<b>HB</b>	Número de Herschel-Bulkley	[-]
$h_k$	Comprimento de malha do elemento	[m]
<b>I</b>	Tensor unitário	[-]
$I_D$	Primeiro invariante do tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
$II_D$	Segundo invariante do tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
$III_D$	Terceiro invariante do tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
<b>J</b>	Matriz Jacobiana	[-]
$J$	Número de salto	[-]
<b>K</b>	Matriz dos termos difusivos	[-]
$K$	Índice de consistência	[Pa.s <sup>n</sup> ]
$L^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio $\Omega$	[-]
$L_0^2(\Omega)$	Espaço de Hilbert das funções de $L^2(\Omega)$ com média nula no domínio $\Omega$	[-]
$L_c$	Comprimento característico	[m]
<b>M</b>	Matriz dos termos de estabilização da equação da continuidade	[-]

$m$	Grau de interpolação de elementos finitos	[-]
$m$	Parâmetro regularizador de Papanastasiou	[s]
$m_k$	Parâmetro do grau de interpolação utilizado	[-]
$\mathbf{N}$	Matriz dos termos advectivos	[-]
$N_A$	Função de interpolação do nó global A	[-]
$n$	Índice de <i>power-law</i>	[-]
$\mathbf{n}$	Vetor normal unitário	[-]
$nsd$	Número de dimensões do problema	[-]
$\mathbf{P}$	Matriz dos termos $\varepsilon$	[-]
$P$	Espaço funcional do campo de pressão	[-]
$P^h$	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de pressão	[-]
$P_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento triangular ou tetraédrico	[-]
$p$	Pressão	[Pa]
$p^h$	Aproximação de elementos finitos para o campo de pressão	[Pa]
$Q_m$	Espaço polinomial de grau $m$ para elemento quadrangular ou hexaédrico	[-]
$Q_l$	Elemento quadrangular bi-linear	[-]
$q^h$	Função peso do campo de pressão	[-]
$\mathfrak{R}$	Espaço dos números reais	[-]
$R_k$	Espaço polinomial de ordem $k$	[-]
$R_l$	Espaço polinomial de ordem $l$	[-]
$R_m$	Espaço polinomial de ordem $m$	[-]
$Re_K$	Número de Reynolds de malha	[-]
$Re_{PL}$	Número de Reynolds <i>power-law</i>	[-]
$Re_{RH}$	Número de Reynolds reológico	[-]
$S$	Superfície de uma região arbitrária no espaço	[m <sup>2</sup> ]
$S^h$	Função peso do campo de tensão	[-]
$\mathbf{T}$	Tensor de tensão total	[Pa]
$\mathbf{t}^h$	Vetor de força de superfície	[Pa]
$t$	Tempo	[s]
$\mathbf{U}$	Vetor de graus de liberdade	[-]
$U^*$	Vazão adimensional	[-]

$U$	Variável genérica	[-]
$U_h$	Aproximação de elementos finitos de uma variável genérica $U$	[-]
$\mathbf{u}$	Vetor velocidade	[m/s]
$\mathbf{u}^h$	Aproximação de elementos finitos do campo de velocidade	[m/s]
$u_c$	Velocidade Característica	[m/s]
$u_i$	Componente da velocidade na direção $i$	[m/s]
$V$	Espaço funcional do campo de velocidade	[-]
$V^h$	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de velocidade	[-]
$V$	Volume de uma região arbitrária no espaço	[m <sup>3</sup> ]
$v^h$	Função peso do campo de velocidade	[-]
$\mathbf{X}$	Posição de um ponto qualquer no espaço	[m]
$x_i$	Direção $i$ do espaço	[m]

## LETRAS GREGAS

$\alpha$	Parâmetro de estabilização da equação do movimento	[-]
$\beta$	Parâmetro de estabilização da equação material	[-]
$\delta$	Parâmetro de estabilização da equação da continuidade	[-]
$\Sigma$	Espaço funcional do campo de tensão	[-]
$\Sigma^h$	Sub-espaço de elementos finitos para o campo de tensão	[-]
$\lambda$	Parâmetro de ajuste de curvas para os modelos de Cross e Carreau	[s]
$\dot{\gamma}$	Magnitude do tensor taxa de deformação	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_0$	Taxa de cisalhamento no fim da região de alta viscosidade da curva SMD	[s <sup>-1</sup> ]
$\dot{\gamma}_1$	Taxa de cisalhamento no início da região <i>power-law</i> da curva SMD	[s <sup>-1</sup> ]
$\eta$	Coordenada natural	[-]
$\eta$	Viscosidade não-Newtoniana	[Pa.s]
$\eta_0$	Viscosidade Newtoniana para baixas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
$\eta_\infty$	Viscosidade Newtoniana para altas taxas de cisalhamento	[Pa.s]
$\mu$	Viscosidade Newtoniana	[Pa.s]
$\mu_p$	Viscosidade pástica de Bingham	[Pa.s]
$\rho$	Massa específica do fluido	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\boldsymbol{\tau}$	Tensor de tensão-extra	[Pa]
$\tau$	Tensão de cisalhamento	[Pa]
$\tau_0$	Tensão limite de escoamento	[Pa]
$\boldsymbol{\tau}^h$	Aproximação de elementos finitos do campo de tensão	[Pa]
$\Omega$	Domínio do problema	[-]
$\Omega^h$	Partição do domínio $\Omega$ em elementos finitos	[-]
$\Omega_K$	Domínio do elemento finito K	[-]
$\bar{\Omega}$	Domínio limitado fechado do problema	[-]
$d\Gamma$	Elemento infinitesimal de superfície	[m <sup>2</sup> ]
$\Gamma$	Fronteira do domínio $\Omega$	[-]
$\Gamma_g$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas as condições de Dirichlet	[-]
$\Gamma_h$	Parte da fronteira $\Gamma$ na qual são impostas as condições de Neumann	[-]
$\xi$	Coordenada natural	[-]

## SUBSCRITOS

$a$	Número do ponto nodal local	[-]
$A$	Número do ponto nodal global	[-]
$g$	Condição de contorno de Dirichlet	[-]
$h$	Condição de contorno de Neumann	[-]

## SOBRESCRITOS

*	Denota variáveis adimensionais	[-]
$h$	Aproximação de elementos finitos	[-]
T	Transposta de uma matriz	[-]

## SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\nabla$	Operador gradiente espacial	[-]
$\  \cdot \ $	Norma das Funções $L^2$	[-]

## 1. INTRODUÇÃO

Uma larga gama de materiais de interesse industrial possui uma aparente tensão limite de escoamento. Entre eles, destacam-se os que são exemplos diretos do modelo clássico de Bingham, como creme dental, lama de perfuração, chocolate derretido, etc.; posteriormente, outros materiais como cremes e molhos culinários, tintas para impressão, maionese, explosivos plásticos, espumas, sangue, emulsões de carvão e água mostraram apresentar um comportamento semelhante. Historicamente, devido à limitada faixa da taxa de cisalhamento mensurável pelos primeiros reômetros, acreditava-se que a viscosidade destes materiais aumentava assintoticamente quando a tensão aplicada a eles era diminuída. Assim, havia uma determinada tensão onde a viscosidade tornava-se infinita e, deste modo, abaixo da aparente tensão de escoamento, o material era considerado um sólido com viscosidade infinita e acima desta tensão, um líquido pseudoplástico. Entre os modelos clássicos introduzidos para descrever a viscoplasticidade, destaca-se o já citado modelo de Bingham, que representa o escoamento linear de materiais viscoplásticos, e o modelo de Herschel-Bulkley, o qual prescreve pseudoplasticidade quando o material escoar.

Com o avanço das técnicas experimentais este quadro modificou-se significativamente. A região anteriormente considerada rígida – viscosidade infinita – é na verdade uma região de alta viscosidade finita, sendo assim impossível de ser modelada pelos modelos clássicos de Bingham e Herschel-Bulkley. Esta lacuna é bem abordada no artigo de Papanastasiou, 1987, no qual o autor substitui a região rígida por uma região de alta viscosidade, controlada por um parâmetro numérico  $m$ . Esse trabalho abriu novas perspectivas para a simulação numérica de materiais viscoplásticos, traduzindo-se em uma alta produtividade de publicações de artigos numéricos orientados sobre o assunto – como é citado na revisão bibliográfica incluída nesta seção de introdução.

Nesta Dissertação, é utilizada uma aproximação de elementos finitos estabilizada para a simulação numérica de materiais viscoplásticos, empregando o *benchmark* do escoamento no interior de uma cavidade forçada. As equações de balanço foram acopladas com o modelo de viscoplasticidade não-linear introduzido por Souza Mendes e Dutra, 2004, também chamado fluido SMD. Neste modelo, para baixos níveis de tensão, o material apresenta uma alta viscosidade Newtoniana; na tensão limite de escoamento, devido a fortes mudanças na estrutura

molecular do material, ocorre um salto na taxa de cisalhamento de um valor muito baixo para outro ordens de grandeza maior; para tensões superiores à tensão limite de escoamento, o fluido apresenta pseudoplasticidade [Sousa Mendes e Dutra, 2004].

O modelo mecânico mencionado acima é aproximado através de um método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados que possui como variáveis primais os campos de tensão-extra, velocidade e pressão. Esta metodologia, introduzida por Hughes et al., 1986, para o problema de Stokes, estendida para Navier-Stokes nas formulações mista por Franca e Frey, 1992, e multi-campos por Behr et al, 1993, não necessita satisfazer as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos para tensão-extra-velocidade e pressão-velocidade – chamada também de condição de Babuška-Brezzi [Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Além disso, reforça a estabilidade do método de Galerkin clássico adicionando termos malha-dependentes – funções do resíduo das equações governantes do problema – avaliados elemento a elemento. Como este resíduo é trivialmente satisfeito pela solução exata do problema, a consistência é preservada nesta classe de métodos.

Como já mencionado, a investigação numérica de modelos viscoplásticos regularizados ganhou forte impulso a partir do trabalho de Papanastasiou, 1987, onde o autor introduz uma regularização na equação para tensão do modelo clássico de Bingham que tem sido aplicada a uma ampla gama de escoamentos, descrevendo em apenas uma função contínua as tensões nas regiões de escoamento e de alta viscosidade do material – ou como referido na literatura clássica, regiões rígidas. Abdali et al., 1992, realizaram simulações via elementos finitos de escoamentos em contrações planas e axissimétricas de fluidos de Bingham. Vradis e Öttingen, 1997, empregando o método de diferenças finitas, simularam escoamentos de fluidos de Bingham através de uma expansão abrupta com razão de aspecto de 1:2. Burgos et al., 1999, empregaram soluções analíticas para o escoamento sobre uma cunha entre duas paredes para investigar a capacidade de diversos modelos regularizados de Herschel-Bulkley em predizer a morfologia das zonas rígidas; resultados são obtidos para diferentes parâmetros e comparados com as soluções exatas.

Alexandrou et al, 2001, realizaram aproximações de Galerkin para escoamentos em regime permanente de fluidos de Herschel-Bulkley através de expansões planares tridimensionais; os resultados para a topologia das zonas rígidas, assim como as zonas de recirculação, são obtidos em função dos números de Reynolds e de Herschel-Bulkley e do índice

*power-law*. Jay et al., 2001, simularam escoamentos de fluidos de Herschel-Bulkley através de expansões abruptas axissimétricas com razão de aspecto de 1:4 empregando o modelo de bi-viscosidade; a influência da pseudoplasticidade, inércia e tensão limite de escoamento na dinâmica do escoamento viscoplástico foi determinada. Mitsoulis e Zisis, 2001, realizaram aproximações de elementos finitos para escoamentos empregando o modelo de Bingham regularizado por Papanastasiou em uma cavidade forçada incluindo efeitos de inércia. Zisis e Mitsoulis, 2002, simularam escoamentos de fluidos de Bingham em torno de um cilindro mantido entre placas planas paralelas, enfatizando a caracterização das superfícies de escoamento e o cálculo do coeficiente de arrasto. Mitsoulis e Huilgol, 2004, simularam escoamentos de plásticos de Bingham em expansões abruptas através de um método de elementos finitos, computando o tamanho de vórtice e sua intensidade, bem como a correção de entrada.

Neofytou, 2005, empregou um método de volumes finitos para investigar os efeitos não-Newtonianos em fluidos de Casson, Quemada, Bingham e *power-law* escoando no interior de uma cavidade forçada. Mitsoulis, 2008, realizou aproximações de elementos finitos para a aproximação de processos de calandragem de materiais viscoplásticos empregando o modelo de Herschel-Bulkley regularizado por Papanastasiou; nesse trabalho, o autor obtém as regiões em escoamento e rígidas como uma função do número de HB considerando desde escoamentos de fluidos Newtonianos até fluidos altamente viscoplásticos. Balmforth et al., 2008, realizaram estudos numéricos de escoamentos reptantes de fluidos de Herschel-Bulkley nos quais uma parede oscilante estabelece uma camada de fluido em movimento unidimensional; para pequenas oscilações, a camada de fluido se movimenta rigidamente com a placa, enquanto para grandes oscilações, o material escoava e *plug-flows* – escoamentos tampão – coexistem com regiões que escoam. Ancey e Cochard, 2008, apresentam resultados analíticos e numéricos para o escoamento de fluidos de Herschel-Bulkley em uma calha de grande inclinação devido à força gravitacional, até que essa não é suficiente para exceder a tensão limite de escoamento do fluido; os resultados são obtidos para diferentes inclinações da calha e comparados com os dados experimentais disponíveis.

A regularização introduzida apresentada através do fluido SMD foi utilizada já em alguns trabalhos como Souza Mendes et al., 2007a, Souza Mendes et al., 2007b, e Naccache e Barbosa, 2007. No primeiro, o deslocamento de fluidos viscoplásticos através da injeção de gás em tubos capilares foi investigada. Nos seguintes, foram analisados escoamentos de líquidos viscoplásticos

através de uma expansão-contração planar e axissimétrica, respectivamente, empregando para isso o método dos volumes finitos.

Rafiee, 2008, utilizou a geometria da cavidade forçada para validar um método numérico *mesh-free*. Rudert e Schwarze, 2009, utilizaram o processo de preenchimento de uma cavidade 3D por fluido viscoplástico para testar um método numérico para escoamentos em superfície livre – problema também analisado em Alexandrou, 2001. Mitsoulis et al., 2006, investigaram escoamentos de fluidos de Bingham em uma cavidade empregando o método de elementos finitos e novamente a regularização de Papanastasiou; a localização do vórtice, sua intensidade e as zonas rígidas do escoamento foram determinadas para uma ampla faixa de números de Reynolds e Bingham.

Esta Dissertação tem como objetivo a modelagem mecânica e simulação numérica através do método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) de escoamentos de fluidos viscoplásticos SMD em uma cavidade forçada. Para um melhor entendimento e apreciação desta Dissertação, será apresentado um plano geral de seus capítulos:

- Capítulo 2: Modelagem mecânica baseada nas leis de conservação de massa e balanço de *momentum*; leis materiais dos fluidos viscoplásticos e modelo SMD.
- Capítulo 3: Descrição da aproximação de elementos finitos de Galerkin mínimos-quadrados para as equações do modelo mecânico multi-campos e resolução do sistema não-linear (modelo matricial).
- Capítulo 4: Apresenta a validação da implementação computacional da formulação multi-campos GLS e do modelo SMD, bem como a discussão dos resultados obtidos nas simulações numéricas realizadas.
- Capítulo 5: Resumo do conteúdo de cada um dos Capítulos da Dissertação, com destaque às principais conclusões obtidas no Capítulo 4, projetando perspectivas para futuros trabalhos.

## 2. MODELAGEM MECÂNICA

### 2.1 Equação da Continuidade

Tomando-se um material escoando em um referencial Euclidiano, considerando-se  $\mathbf{u}$  o vetor velocidade,  $\rho$  a massa específica,  $\mathbf{X}$  um ponto qualquer no espaço e  $t$  o tempo, onde  $\mathbf{u}$  e  $\rho$  são funções de espaço e tempo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \\ \rho &= \rho(\mathbf{X}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

O vetor  $\rho\mathbf{u}$  representa o fluxo de massa que atravessa uma superfície infinitesimal ortogonal ao vetor  $\mathbf{u}$ . Utilizando-se o teorema da divergência de Gauss,

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{a}) dV = \iint_\Gamma \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} d\Gamma\tag{2.2}$$

onde  $\mathbf{a}$  representa um campo vetorial qualquer,  $V$  é o volume de uma região arbitrária no espaço delimitada pela superfície  $\Gamma$  e  $\mathbf{n}d\Gamma$  é um vetor infinitesimal que representa um elemento infinitesimal de superfície, de direção ortogonal à região do espaço considerada. Se  $\mathbf{a}$  pode ser interpretado como o fluxo de uma propriedade escalar, então  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}d\Gamma$  é a taxa do fluxo desta propriedade através da superfície infinitesimal representada por  $d\Gamma$ . A integral no lado direito da Eq. (2.2) representa então o fluxo global daquela propriedade que atravessa a região do espaço considerada. Conseqüentemente,  $(\operatorname{div} \mathbf{a})$  pode ser interpretado como o valor local deste fluxo por unidade de volume do espaço.

Empregando-se estes conceitos no caso em questão, a divergência de  $\rho\mathbf{u}$  representa o fluxo líquido de massa por unidade de volume que atravessa um elemento de volume infinitesimal na vizinhança de um ponto arbitrário  $\mathbf{X}$ . Se um volume infinitesimal é escolhido como sistema, o princípio da conservação da massa expresso como

$$\left( \begin{array}{l} \text{Taxa líquida de massa} \\ \text{que atravessa o sistema} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Aumento de massa} \\ \text{dentro do sistema} \end{array} \right)\tag{2.3}$$

toma a forma

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.4)$$

Para fluidos com massa específica constante, o balanço de massa da Eq. (2.4) reduz-se a:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

## 2.2 Equação de Balanço da Quantidade de Movimento

O princípio da conservação de *momentum* é válido apenas para um referencial inercial, o qual assume-se existir no espaço euclidiano da física clássica. Se um referencial inercial existe, qualquer outro referencial transladando com velocidade constante em relação a este é inercial também. A equação de balanço de quantidade de movimento é escrita assumindo-se que o referencial é inercial.

A forma euleriana da equação de balanço de *momentum* pode ser obtida escrevendo explicitamente os termos a seguir:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Taxa líquida de} \\ \text{momentum que} \\ \text{atravessa o sistema} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Soma de todas as} \\ \text{forças de superfície que} \\ \text{agem sobre o sistema} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Soma de todas as} \\ \text{forças de corpo que} \\ \text{agem sobre o sistema} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Taxa de aumento} \\ \text{de momentum} \\ \text{no sistema} \end{array} \right) \quad (2.6)$$

A fim de expressar a taxa líquida de *momentum*, considera-se a díade  $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ . Da definição de díade [Astarita e Marruci, 1974], tem-se

$$(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \mathbf{u} (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma) \quad (2.7)$$

O termo entre parênteses no lado direito da Eq. (2.7) é o fluxo de massa através do elemento de superfície considerado; deste modo,  $(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma$  é interpretado como o fluxo de *momentum* através do mesmo elemento de superfície. Isto identifica a díade  $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$  como o fluxo de *momentum*. Empregando-se uma expressão análoga à Eq. (2.2)

$$\iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{A}) dV = \iint_\Gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  é um campo tensorial qualquer, pode-se escrever a divergência de  $\rho \mathbf{u}\mathbf{u}$  como o fluxo líquido de *momentum* por unidade de volume que atravessa um elemento de volume.

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = \left( \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de momentum} \\ \text{que atravessa o sistema} \end{array} \right) \quad (2.9)$$

Considerando-se agora o segundo termo da Eq. (2.6) – a soma de todas as forças de superfície. A força  $d\mathbf{t}$  devida à tensão que atuando em um elemento de superfície  $d\Gamma$  é, pela definição do tensor de tensão total:

$$d\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.10)$$

Utilizando-se novamente a Eq. (2.8), o lado direito da Eq. (2.10) é assim visto como a resultante das forças de superfície, sendo a divergência de  $\mathbf{T}$  a resultante por unidade de volume:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \left( \begin{array}{l} \text{Resultante das forças de superfície} \\ \text{por unidade de volume} \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Para fluidos com massa específica constante, o tensor de tensão total é decomposto em um tensor isotrópico e um tensor viscoso na forma

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.12)$$

onde  $p$  é a pressão,  $\mathbf{I}$  o tensor identidade e  $\boldsymbol{\tau}$  o tensor viscoso de tensão. Assim, a divergência do tensor de tensão total pode ser decomposta em:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \quad (2.13)$$

O terceiro termo da Eq. (2.6), quando expresso por unidade de volume do sistema, pode

ser escrito simplesmente como  $\rho \mathbf{g}$ , onde  $\mathbf{g}$  é o campo de aceleração (e.g. a aceleração da gravidade). O lado direito da Eq. (2.6), quando expresso por unidade de volume do sistema, é a derivada parcial em relação ao tempo do vetor  $\rho \mathbf{u}$ . Com as expressões obtidas, pode-se escrever a forma Euleriana da equação de balanço de quantidade de movimento da seguinte forma:

$$-\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) \quad (2.14)$$

Para escoamentos incompressíveis e regime permanente, a Eq. (2.14) pode ser re-escrita (na forma usualmente encontrada na literatura) como

$$\rho((\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.15)$$

### 2.3 Fluido Newtoniano Generalizado

A propriedade mais importante de fluidos macromoleculares é a viscosidade não-Newtoniana, dependente da taxa de cisalhamento. Esta relação de dependência acarreta saltos de diversas ordens de magnitude na viscosidade à medida que o fluido é cisalhado. Ficando claro, portanto, que este fenômeno não pode ser ignorado em cálculos de escoamentos em dutos e de processamento de polímeros; problemas de lubrificação, projeto de reômetros e operações de extrusão.

Um dos primeiros empirismos introduzidos foi uma modificação na lei de Newton da viscosidade, permitindo-se à viscosidade variar de acordo com a taxa de cisalhamento. Ou seja, para escoamentos onde  $u_1 = u_1(x_2)$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ , os primeiros reologistas substituíram

$$\tau_{12} = -\mu \frac{du_1}{dx_2} \quad (2.16)$$

onde  $\mu$  é constante para uma dada temperatura, pressão e composição pela expressão

$$\tau_{12} = -\eta \frac{du_1}{dx_2} \quad (2.17)$$

onde  $\eta$  é uma função de  $|du_1/dx_2|$  – uma vez que esperava-se que a mudança na viscosidade era devida apenas à magnitude e não também ao sinal do gradiente de velocidade.

Estendendo esta idéia para escoamentos arbitrários com qualquer campo de velocidades  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ , tem-se o modelo de Fluido Newtoniano Generalizado (FNG)

$$\boldsymbol{\tau} = -2 \eta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  é o tensor taxa de deformação dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right) \quad (2.19)$$

Se a viscosidade não-Newtoniana, de caráter escalar, é dependente do tensor taxa de deformação, então deve depender apenas de combinações particulares de componentes do tensor que são independentes do sistema de coordenadas – invariantes do tensor taxa de deformação:

$$\begin{aligned} I_D &= \text{tr } \mathbf{D} \\ II_D &= \text{tr } \mathbf{D}^2 \\ III_D &= \det \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para fluidos incompressíveis,  $I_D = 2(\text{div } \mathbf{u}) = 0$ . Para escoamentos puramente cisalhantes, o terceiro invariante,  $III_D$ , também se anula, uma vez que o elemento de fluido não sofre alteração de volume. Assim,  $\eta$  é função apenas do segundo invariante do tensor taxa de deformação,  $II_D$  (Bird, 1987). Efetivamente, emprega-se a magnitude do tensor taxa de deformação,  $\dot{\gamma}$ , chamada em escoamentos cisalhantes de taxa de cisalhamento, definida como:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} II_D} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{D}(\mathbf{u})^2} \quad (2.21)$$

## 2.4 Modelos de Viscoplasticidade

O conceito de uma tensão limite de escoamento para líquidos estruturados tem passado por um constante aprimoramento desde o início do século XX. Originalmente, aceitava-se a idéia de que a tensão limite de escoamento era essencialmente o ponto no qual, quando a tensão aplicada a um líquido era diminuída, este apresentava um comportamento semelhante a um sólido. Com a evolução das técnicas experimentais, ficou claro que embora exista uma faixa de tensões – em torno de uma aparente tensão limite de escoamento – na qual as propriedades mecânicas mudam drasticamente, o material, entretanto, apresenta pequena e continua deformação quando submetido a tensões abaixo deste nível. Este escoamento lento pode ser descrito por um platô de alta viscosidade Newtoniana em um gráfico log-log de viscosidade *versus* taxa de cisalhamento. Acima da tensão de limite de escoamento aparente, a maioria dos fluidos apresenta um comportamento power-law dependente da taxa de cisalhamento [Barnes, 1998].

A função viscosidade mais empregada para ajustar dados experimentais de fluidos viscoplásticos é a de Herschel-Bulkley. A expressão para tensão de cisalhamento deste modelo é dada por

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\tau$  é a tensão cisalhante,  $\tau_0$  é a tensão limite de escoamento,  $\dot{\gamma}$  é a taxa de cisalhamento,  $K$  é o índice de consistência e  $n$  é o índice de *power-law*. Quando  $n=1$ , o modelo de Bingham é recuperado:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} & \text{se } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{se } \tau \leq \tau_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde  $\mu_p$  é a viscosidade plástica. Ambos modelos – Herschel-Bulkley e Bingham – assumem uma viscosidade infinita no limite onde a taxa de cisalhamento é zero. Este comportamento não é compatível com as equações de conservação que governam escoamentos complexos. Além disso,

a predição de uma viscosidade infinita não reproduz os resultados experimentais de fluidos viscoplásticos, uma vez que para tensões menores que a tensão limite de escoamento aparente, a viscosidade apresenta um valor muito elevado, porém, finito. Para representar uma queda abrupta na viscosidade, pode-se empregar os modelos de Cross e de Carreau, respectivamente dados por

$$\eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + (\lambda \dot{\gamma})^{1-n}} \quad \text{e} \quad \eta = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{(1-n)/2}} \quad (2.24)$$

onde  $\eta \equiv \tau / \dot{\gamma}$  é a função viscosidade e  $\lambda$  é um parâmetro para o ajuste de curvas com dimensão de tempo. As duas funções acima são usualmente utilizada na modelagem de fluidos pseudoplásticos com uma viscosidade para baixas taxas de cisalhamento,  $\eta_0$ , uma região de *power-law* que inicia em  $\dot{\gamma} \simeq 1/\lambda$  e uma viscosidade para altas taxas de cisalhamento,  $\eta_{\infty}$ . No limite onde  $n \rightarrow 0$ , a capacidade de representar um comportamento *power-law* é empregada para obter uma queda abrupta na curva de viscosidade, limitada entre  $\eta_0$  e  $\eta_{\infty}$ , como mostrado na Fig. 2.1.

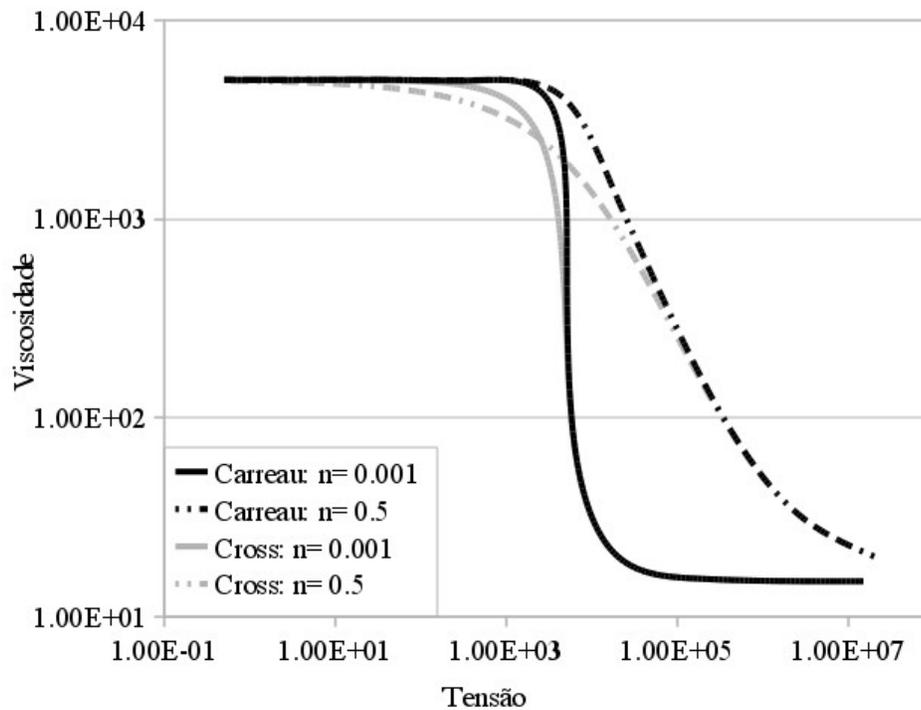


Figura 2.1 – Curvas da viscosidade *versus* tensão cisalhante para as funções de Cross e Carreau.

Uma função de Bingham regularizada foi proposta por Papanastasiou (1987) para a utilização em simulações numéricas de escoamentos via elementos finitos, consistindo no amortecimento do termo da tensão limite de escoamento através de uma exponencial que leva em seu argumento o parâmetro regularizador  $m$ . Quando  $m \rightarrow \infty$ , a função de Papanastasiou aproxima-se do modelo de Bingham, com a importante vantagem de ser contínuo tanto para regiões onde  $\tau > \tau_0$  quanto para  $\tau \leq \tau_0$ , sendo expressa como:

$$\tau = (1 - \exp(-m \dot{\gamma})) \tau_0 + \mu_p \dot{\gamma} \quad (2.25)$$

A extensão natural da regularização de Papanastasiou para fluidos viscoplásticos que apresentam pseudoplasticidade, ou seja, cuja viscosidade diminui para tensões de cisalhamento maiores que a tensão limite de escoamento é:

$$\tau = (1 - \exp(-m \dot{\gamma})) \tau_0 + K \dot{\gamma}^n \quad (2.26)$$

Da mesma maneira que para o modelo de Bingham, quando  $m \rightarrow \infty$  a função modificada de Papanastasiou aproxima-se do modelo de Herschel-Bulkley. A tensão dada pela Eq. (2.26) resulta na função viscosidade mostrada nas Fig. 2.2, onde pode-se observar que a função modificada de Papanastasiou não prediz um platô de viscosidade finita quando da ocorrência de taxas de cisalhamento muito baixas. Alternativamente, um modelo que possui um comportamento qualitativo mais adequado para materiais viscoplásticos é o da bi-viscosidade, cuja equação para tensão cisalhante é dada por

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \\ \tau &= \eta_0 \dot{\gamma} & \text{se } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $\dot{\gamma}_0 = \tau_0 / (\eta_0 - K \dot{\gamma}^{n-1}) \approx \tau_0 / \eta_0$  é a taxa de cisalhamento limite de escoamento.

Na Fig. 2.3 também pode-se observar a curva da função bi-viscosidade como uma função da tensão. Esta função envolve duas expressões diferentes, cada uma a ser aplicada para faixas diferentes da taxa de cisalhamento, delimitadas pela taxa de cisalhamento limite de escoamento, a

qual é determinada através de um procedimento de ajuste de curvas. Estas características, juntamente com a derivada descontínua, causam diversos problemas práticos que impedem ajustes de boa qualidade para dados experimentais de fluidos viscoplásticos e dificultam a implementação computacional.

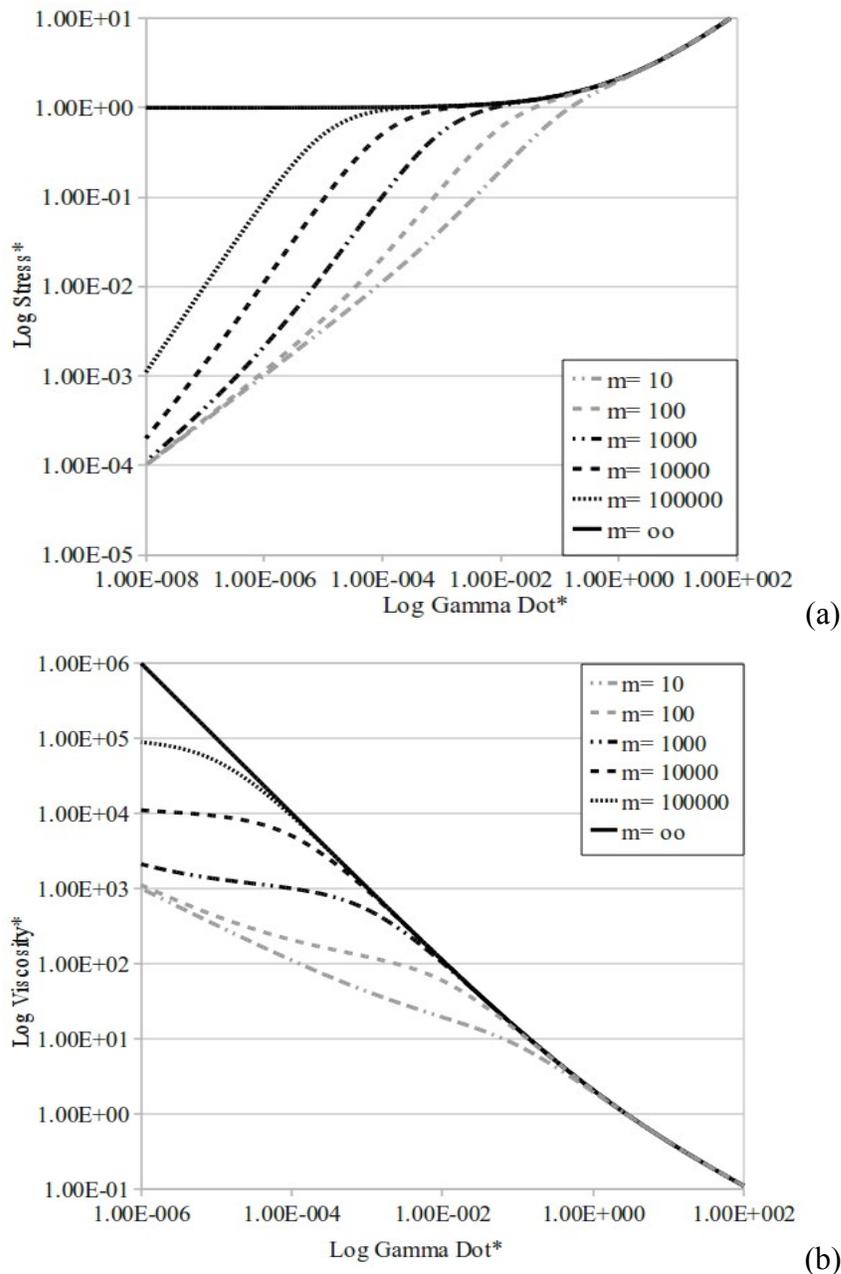


Figura 2.2 – Curvas da função de Herschel-Bulkley regularizada por Papanastasiou para diferentes valores do parâmetro  $m$ . (a) Curvas de escoamento; (b) Viscosidade *versus* taxa de cisalhamento.

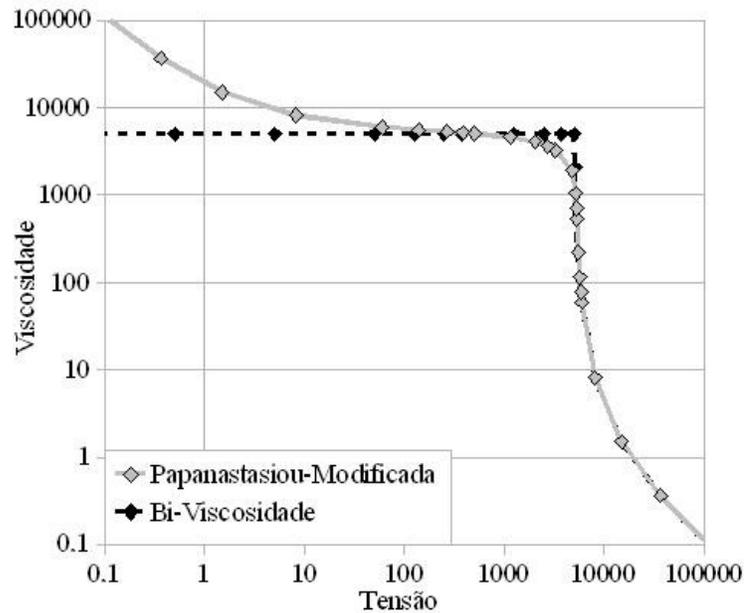


Figura 2.3 – Curvas da viscosidade *versus* tensão cisalhante para as funções de Papanastasiou-Modificada (Herschel-Bulkley regularizada) e Bi-Viscosidade.

## 2.5 Modelo viscoplástico SMD

A partir das dificuldades encontradas na aplicação dos modelos citados anteriormente e de observações experimentais, Souza Mendes e Dutra, 2004, propuseram uma nova função viscosidade. Seu comportamento é qualitativamente igual às demais funções de viscosidade viscoplásticas (Fig. 2.5), apresentando um platô de viscosidade muito elevada constante para baixas taxas de cisalhamento, seguida de uma queda abrupta da viscosidade em  $\tau=\tau_0$ , seguida de uma região *power-law*. Este comportamento é similar ao apresentado pela função bi-viscosidade (Fig. 2.3), com a exceção de que não há descontinuidade na derivada da curva em  $\tau=\tau_0$ .

A função SMD, escrita em sua forma para tensão cisalhante é dada por

$$\tau = (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \quad (2.28)$$

representada graficamente na Fig. 2.4. O significado físico dos parâmetros  $\eta_0$ ,  $\tau_0$ ,  $K$  e  $n$  está juntamente ilustrado nesta figura.

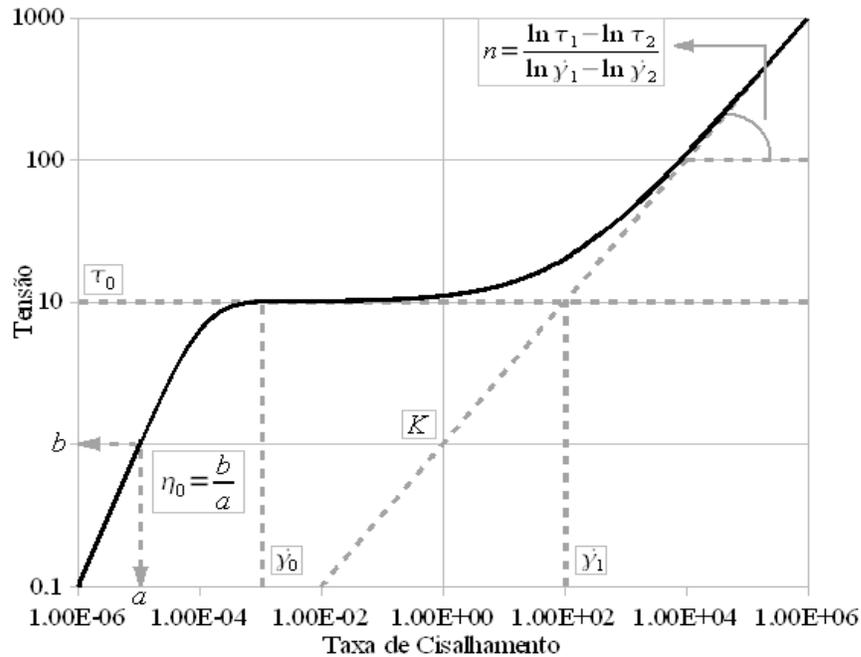


Figura 2.4 – Curva de escoamento do modelo SMD.

A viscosidade para baixas taxas de cisalhamento,  $\eta_0$ , é a razão entre a tensão e a taxa de cisalhamento tomadas em uma região onde  $\tau$  seja suficientemente menor que  $\tau_0$  para assegurar que  $\dot{\gamma}$  esteja dentro da região do platô da taxa de cisalhamento zero (Fig. 2.5). A tensão limite de escoamento fica evidente na Fig. 2.4 devido ao platô que ocorre em  $\tau_0$ . O índice  $n$  é a inclinação da região *power-law* no gráfico log-log de  $\tau$  x  $\dot{\gamma}$ . O intercepto da região *power-law* extrapolada com a linha vertical onde  $\dot{\gamma} = 1 \text{ s}^{-1}$  ocorre em  $\tau = K$ .  $\dot{\gamma}_0$  é a taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita na curva SMD, dada pela razão entre  $\eta_0$  e  $\tau_0$ ,  $\dot{\gamma}_1$  é a taxa de cisalhamento no início da região *power-law*, dada por  $(\tau_0/K)^{1/n}$ .

Uma importante característica deste modelo é que a função viscosidade é tal que

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0))}{\dot{\gamma}} (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) \\ &= \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{((\eta_0 / \tau_0) \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0))}{1} (\tau_0 + K \dot{\gamma}^n) = \eta_0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

em contraste com a função modificada de Papanastasiou, que prevê uma função viscosidade infinita quando a taxa de cisalhamento tende a zero [Souza Mendes e Dutra, 2004].

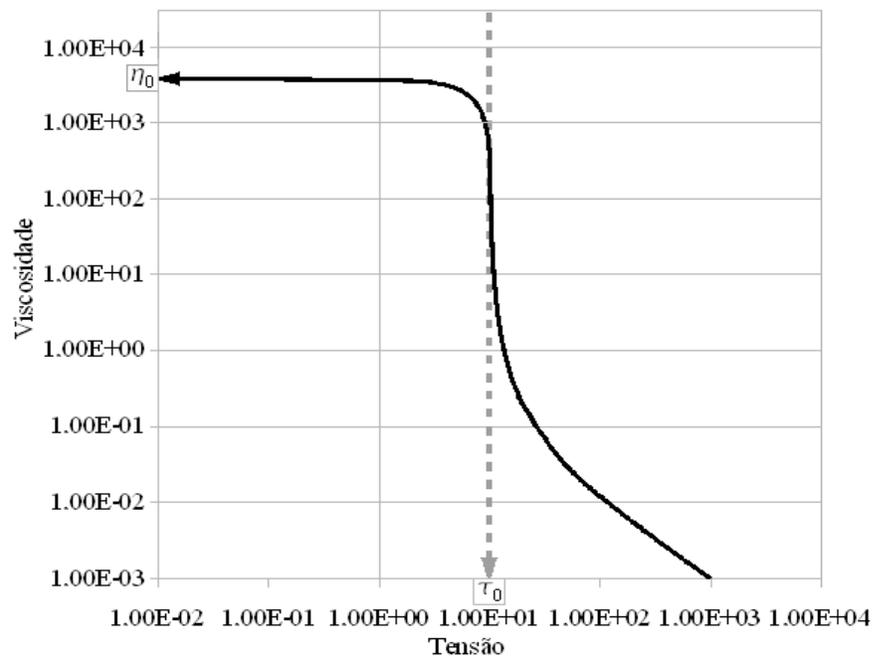
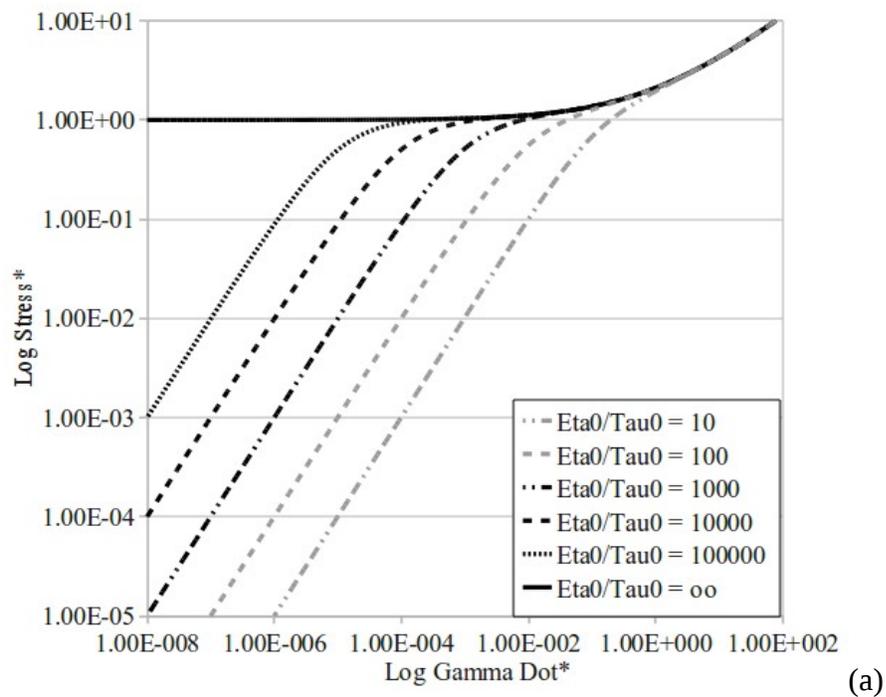


Figura 2.5 – Curva da viscosidade *versus* tensão cisalhante para a função SMD.

A Fig.2.6 mostra as curvas da função SMD para diferentes valores da relação  $\eta_0/\tau_0$ , responsável pela regularização do modelo. De modo semelhante à função de Papanastasiou-modificada, quando a relação  $\eta_0/\tau_0 \rightarrow \infty$ , o modelo de Herschel-Bukley clássico é recuperado.



(a)

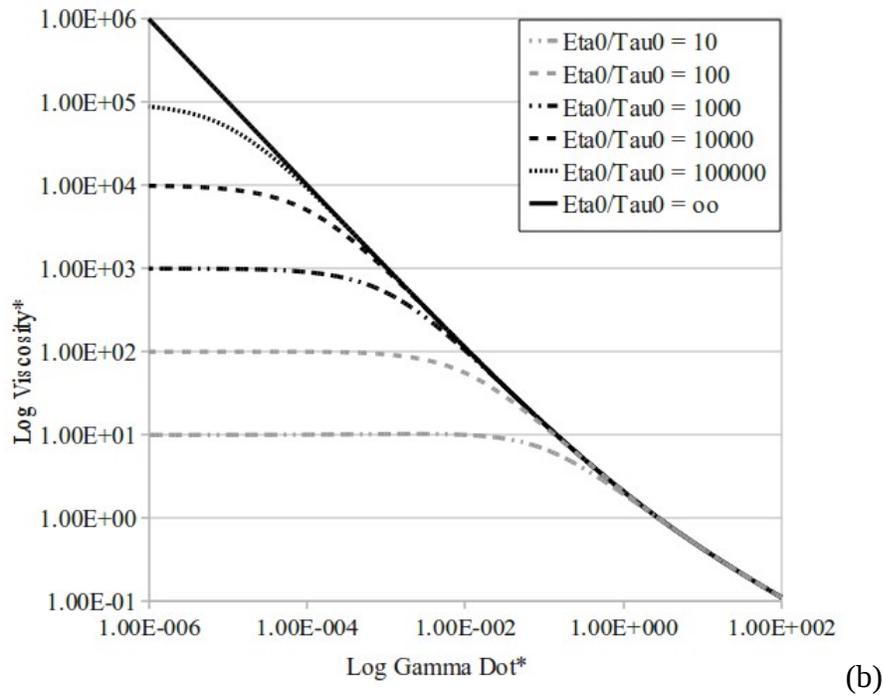
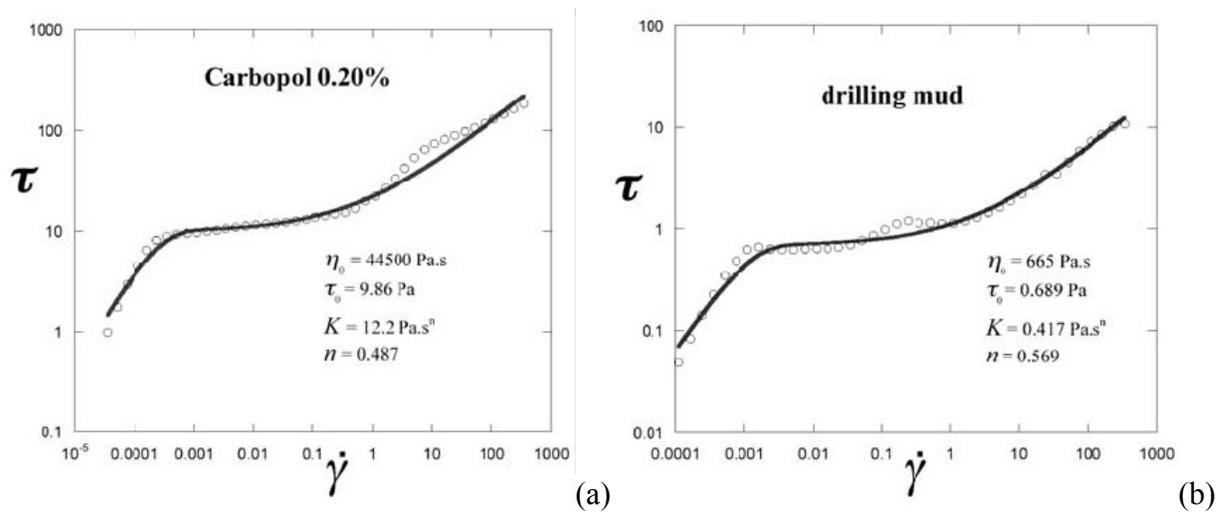


Figura 2.6 – Curvas da função SMD para diferentes relações  $\eta_0/\tau_0$ . (a) Curva de escoamento; (b) Viscosidade *versus* taxa de cisalhamento.

A Fig. 2.7 mostra algumas curvas de escoamento de materiais viscoplásticos reais descritos pelo modelo SMD, exibindo todos o mesmo comportamento qualitativo.



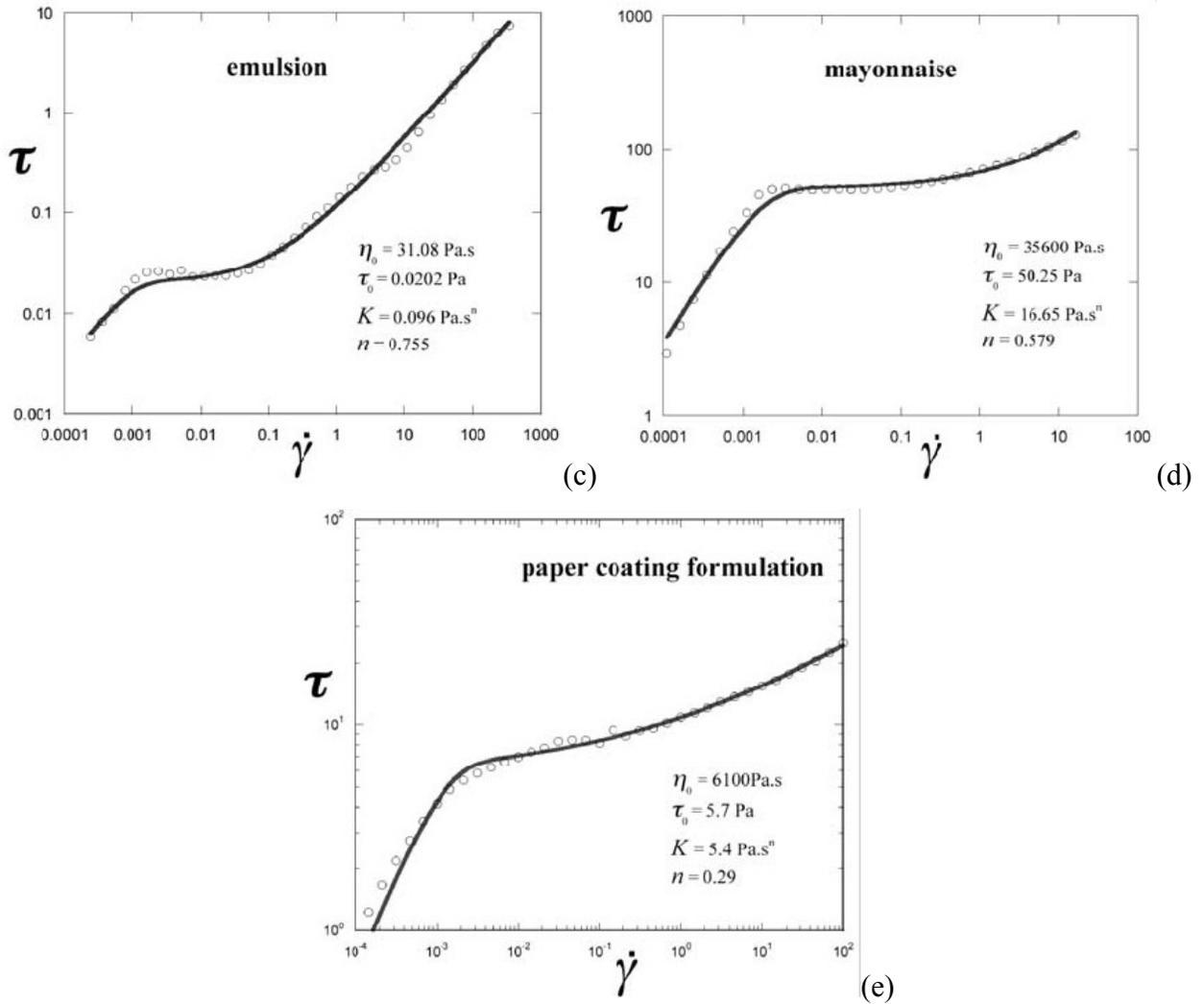


Figura 2.7. Curvas de escoamento de materiais reais. (a) Solução de água e carbopol a 0.2%; (b) Lama de perfuração; (c) Emulsão de água e óleo; (d) Maionese comercial; (e) Formulação de papel. [Souza Mendes e Dutra, 2004]

### 3. MODELAGEM DE ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 Definições preliminares

Nas aplicações de engenharia, muitas vezes é necessário recorrer a métodos numéricos para obter soluções quantitativas para problemas não-lineares na mecânica do contínuo. No entanto, independentemente das hipóteses iniciais e dos métodos utilizados para formular o problema, quando do emprego de métodos numéricos na avaliação dos resultados, o contínuo é aproximado por um modelo discreto no processo de solução. Esta observação sugere uma alternativa lógica para a abordagem clássica, ou seja, representar o meio contínuo por um modelo discreto desde o início. Uma dessas abordagens é referida como o método dos elementos finitos. A capacidade de representar domínios com geometrias irregulares através de um conjunto de elementos finitos faz deste método uma ferramenta valiosa para a solução de problemas de contorno, de valor inicial e de autovalores. As funções de aproximação são construídas utilizando idéias da teoria de interpolação, sendo assim também chamadas de funções de interpolação. [Reddy e Gartling, 1994; Oden, 1972].

Os problemas aqui abordados são definidos em um domínio aberto limitado  $\Omega \subset \mathcal{R}^{nsd}$ , onde  $nsd$  é o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com uma fronteira  $\Gamma$  poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\Gamma_g$  é a porção da fronteira  $\Gamma$  na qual são impostas as condições de contorno essenciais (ou de Dirichlet) e  $\Gamma_h$  a porção na qual são prescritas as condições de contorno de naturais (ou de Neumann). Sobre o domínio fechado  $(\bar{\Omega})$  realiza-se uma partição  $\Omega^h$  de elementos finitos, de domínio  $K$ , na forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \cup_{K_i \in \Omega^h} K_i \\ K_i \cap K_j &= \emptyset, \quad \forall i \neq j; K_i, K_j \in \Omega^h \end{aligned} \quad (3.2)$$

A aproximação de elementos finitos  $U^h$  de uma variável genérica  $U$  pode ser representada pela expansão

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (3.3)$$

onde  $N_A$  é a função de base associada ao nó  $A$  da discretização  $\Omega^h$  e  $d_A$  é o coeficiente a ser determinado. Para os espaços polinomiais, adota-se a seguinte notação,

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{se } K \text{ for um triângulo ou tetraedro} \\ Q_m(K), & \text{se } K \text{ for um quadrilátero ou hexaedro} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde  $m$  é o grau de interpolação de elementos finitos dos tipos  $P_m$  e  $Q_m$ , assumindo valores maiores ou iguais a 0 [Ciarlet, 1978].

Sobre os espaços de funções tem-se, conforme Ciarlet, 1978,

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{q \mid \int_{\Omega} q^2 d\Omega < \infty\} \\ L_0^2(\Omega) &= \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\Omega = 0\} \\ H_1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega), i=1, nsd\} \\ H_1^0(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \partial v / \partial x_i \in L^2(\Omega) \mid v=0 \text{ sobre } \Gamma_{g_i}, i=1, nsd\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $L^2(\Omega)$  define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis sobre o domínio  $\Omega$ ,  $L_0^2(\Omega)$  define o espaço de Hilbert das funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio  $\Omega$ ,  $H^1(\Omega)$  define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio  $\Omega$  e  $H_0^1(\Omega)$  define o espaço de Sobolev das funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio  $\Omega$  que se anulam sobre o contorno  $\Gamma_g$ .

Por fim,  $\|\cdot\|$  representa a norma das funções  $L^2$  em  $\Omega$  e  $\|\cdot\|_{0,K}$  denota a norma de  $L^2$  no domínio de cada elemento  $K$ .

### 3.2 Formulação Forte

A modelagem mecânica dos escoamentos tratados nesta Dissertação é obtida através das equações de conservação de massa (Eq. (2.5)) e equação de balanço de *momentum* (Eq. (2.15)), para um fluido Newtoniano generalizado escoando em regime laminar e permanente. Assim, monta-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}
 \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p &= \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} - 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Introduzindo-se  $L_c$  como um comprimento característico,  $u_c$  como uma velocidade característica,  $\dot{\gamma}_1$  como a taxa de cisalhamento no início da região *power-law* da função SMD e  $\eta_c$  uma viscosidade característica da dada por  $\eta_c = \tau_0 / \dot{\gamma}_1$ , obtém-se:

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L_c}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\dot{\gamma}_1 L_c}, \quad p^* = \frac{p}{\tau_0}, \quad \boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_0}, \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1}, \quad \eta^*(\dot{\gamma}^*) = \frac{\eta(\dot{\gamma}^*)}{\eta_c} \tag{3.7}$$

Substituindo as Eq. (3.7) nas Eq. (3.6), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{(\dot{\gamma}_1 L_c)^2}{L_c} (\nabla \mathbf{u}^*)\mathbf{u}^* - \frac{\tau_0}{L_c} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^* + \frac{\tau_0}{L_c} \nabla p^* &= \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
 \tau_0 \boldsymbol{\tau}^* - \frac{\eta_c (\dot{\gamma}_1 L_c)}{L_c} 2\eta^*(\dot{\gamma}^*) \mathbf{D}^*(\mathbf{u}^*) &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \frac{(\dot{\gamma}_1 L_c)}{L_c} \operatorname{div}^* \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\
 (\dot{\gamma}_1 L_c) \mathbf{u}^* &= (\dot{\gamma}_1 L_c) \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g \\
 \tau_0 (-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \tau_0 \mathbf{t}_h^* && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aplicando à Eq. (3.8) as definições do número de Reynolds reológico e o número de Froude, dados, respectivamente, por

$$\text{Re}_{RH} = \frac{\rho(\dot{\gamma}_1 L_c)^2}{\tau_0} \text{ ou } \frac{\rho \tau_0^{(2-n)/n} L_c^2}{K^{2/n}}, \quad \text{Fr} = \frac{u_c}{\sqrt{L_c g}} \quad (3.9)$$

a forma adimensional da Eq. (3.6) é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{RH} (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* - \text{div}^* \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^*) + \nabla^* p^* &= \text{Re}_{RH} U^{*2} \text{Fr}^{-2} & \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau}^* - 2\eta^*(\dot{\gamma}) \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) &= 0 & \text{em } \Omega \\ \text{div} \mathbf{u}^* &= 0 & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* & \text{sobre } \Gamma_g \\ (-p^* \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}^*) \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h^* & \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.10)$$

Souza Mendes et al., 2007b, introduzem uma propriedade reológica adimensional baseada na observação experimental do comportamento da função viscosidade SMD. Quando  $\tau \approx \tau_0$ , há a ocorrência de um salto abrupto de diversas ordens de grandeza entre as taxas de cisalhamento  $\dot{\gamma}_0$  e  $\dot{\gamma}_1$ . Define-se assim o número de salto adimensional,  $J$ , uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento que ocorre quando  $\tau = \tau_0$ , dado como:

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{\eta_0 \tau_0^{(n-1)/n}}{K^{1/n}} - 1 \quad (3.11)$$

Quando  $n=1$ , o parâmetro  $J$  torna-se independente de  $\tau_0$ , ficando reduzido a  $J=(\eta_0/K)-1$ ; ou seja, a relação entre  $\eta_0$  e o índice de consistência  $K$  é dada apenas por  $J+1$ . A utilização de números de salto reais nas simulações foi negligenciada apenas objetivando uma análise da sensibilidade de sua influência na morfologia das zonas rígidas e para permitir a comparação com as simulações de escoamentos de fluidos de Bingham dos trabalhos de Mitsoulis e Zisis, 2001, e Neofytou, 2005, mostradas na Seção 4.2. Nas demais simulações, o valor de  $J$  adotado é equivalente ao de fluidos de interesse industrial, da ordem de  $10^4$ .

A partir das adimensionalizações apresentadas nas Eq.(3.7) e Eq.(3.11), pode-se escrever também a função SMD (Eq.(2.28)) na forma adimensional como

$$\boldsymbol{\tau}^* = (1 - \exp(-(J+1)\dot{\gamma}^*)) (1 + \dot{\gamma}^{*n}) \quad (3.12)$$

Pode-se relacionar os adimensionais utilizados para caracterizar os resultados obtidos nesta Dissertação com os já encontrados na literatura de viscoplasticidade. A fim de desacoplar os parâmetros reológicos dos parâmetros cinemáticos, é proposta uma modificação no número de Reynolds clássico, dada na Eq. (3.9). Este grupo adimensional, assim como o número de salto  $J$ , é função apenas das propriedades reológicas do material. Para considerar os efeitos cinemáticos, introduz-se a vazão adimensional  $U^*$ , dada pela relação

$$U^* = \frac{u_c}{\dot{\gamma}_1 L_c} \quad (3.13)$$

onde  $u_c$  é uma velocidade característica, tomada nesta Dissertação como a velocidade do plano superior da cavidade.

Pode-se estabelecer uma relação entre a vazão adimensional  $U^*$  e os números adimensionais de Bingham e de Herschel-Bulkley, dados respectivamente por

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c} = \frac{\tau_0}{K \left( \frac{u_c}{L_c} \right)} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K \dot{\gamma}_c^n} = \frac{\tau_0}{K \left( \frac{u_c}{L_c} \right)^n} \quad (3.14)$$

substituindo  $u_c/L_c$  por  $\dot{\gamma}_1 U^*$  (Eq. (3.13)) na Eq. (3.14) e considerando  $\dot{\gamma}_1 = (\tau_0/K)^{(1/n)}$ ,

$$\text{Bn} = \frac{\tau_0}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)} = \frac{1}{U^*} \quad \text{e} \quad \text{HB} = \frac{\tau_0}{K (\dot{\gamma}_1 U^*)^n} = \frac{1}{U^{*n}} \quad (3.15)$$

De maneira análoga, a expressão para o número de Reynolds *power-law*, definida em Jay et al., 2001, como

$$\text{Re}_{PL} = \frac{\rho u_c^{2-n} L_c^n}{K} \quad (3.16)$$

pode ser relacionada com a vazão adimensional e o número de Reynolds reológico – que pode

inclusive ser interpretado como uma adimensionalização da massa específica (Santos et al., 2010) – pela expressão:

$$\text{Re}_{PL} = \text{Re}_{RH} U^{*(2-n)} = \frac{\rho \tau_0^{(2-n)/n} L_c^2}{K^{2/n}} U^{*(2-n)} \quad (3.17)$$

A motivação principal para a utilização dos parâmetros adimensionais introduzidos nesta Dissertação –  $U^*$  e  $\text{Re}_{RH}$  – é que para uma geometria fixa,  $\text{Re}_{RH}$  depende apenas das propriedades reológicas do fluido, enquanto  $\text{Re}_{PL}$  e o número de HB dependem simultaneamente das propriedades do fluido e do escoamento. Assim, não é possível separar os efeitos reológicos e cinemáticos do problema usando estes adimensionais. Pode-se imaginar um simples experimento para uma geometria fixa, por exemplo a cavidade analisada nesta dissertação, e um fluido fixo. Se a velocidade característica, isto é, a velocidade do plano superior da cavidade for variada,  $\text{Re}_{PL}$  e o número de HB irão variar. Empregando os parâmetros adimensionais propostos,  $\text{Re}_{RH}$  permanece constante enquanto apenas  $U^*$  é modificado. Assim, os parâmetros empregados para caracterizar a reologia do escoamento de fluidos SMD são o número de Reynolds reológico,  $\text{Re}_{RH}$ , o número de salto,  $J$ , e o índice de *power-law*,  $n$ ; a cinemática do escoamento é caracterizada exclusivamente pela vazão adimensional,  $U^*$ .

### 3.3 Formulação de Galerkin

Nesta seção será introduzida a aproximação de Galerkin do problema dado pelas Eq. (3.6). Inicialmente, faz-se a construção dos espaços de dimensão finita  $V^h$ ,  $V_g^h$ ,  $P^h$ , e  $\Sigma^h$  para os campos de velocidade,  $\mathbf{u}$ , pressão,  $p$ , e tensão extra,  $\boldsymbol{\tau}$ . A partir da discretização  $\Omega^h$  do domínio  $\Omega$ , tem-se:

$$\begin{aligned} V^h &\subset V \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in V^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in V) \\ V_g^h &\subset V_g \quad (\text{isto é, se } \mathbf{v}^h \in V_g^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in V_g) \\ P^h &\subset P \quad (\text{isto é, se } p^h \in P^h, \text{ então } p^h \in P) \\ \Sigma^h &\subset \Sigma \quad (\text{isto é, se } \boldsymbol{\tau}^h \in \Sigma^h, \text{ então } \boldsymbol{\tau}^h \in \Sigma) \end{aligned} \quad (3.18)$$

O método de Galerkin, também chamado de Bubnov-Galerkin, caracteriza-se pela escolha das funções teste e peso pertencentes ao mesmos sub-espacos de elementos finitos. Para toda aproximação de variável  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h$ , constrói-se uma aproximação da função teste,  $\mathbf{w}^h \in \mathbf{V}_g^h$ , na forma:

$$\mathbf{w}^h = \mathbf{u}^h + \mathbf{g}^h \quad (3.19)$$

onde  $\mathbf{g}^h$  é uma função conhecida e satisfaz a condição de contorno essencial do problema,

$$\mathbf{g}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_g, \mathbf{x} \in \Gamma_g \quad (3.20)$$

com  $\mathbf{V}_g^h$  e  $\mathbf{V}^h$  são compostos pela mesma classe de funções à exceção da contribuição da função  $\mathbf{g}^h$  sobre a fronteira  $\Gamma_g$ . Assim,  $\mathbf{u}^h$  representa a parte incógnita de  $\mathbf{w}^h$ .

Os subespaços usuais na dinâmica dos fluidos empregados para a aproximação dos campos de velocidade ( $\mathbf{V}^h$ ), pressão ( $P^h$ ) e tensão ( $\Sigma^h$ ) são dados por [Ciarlet, 1978]

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^h &= \{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \Omega^h \} \\ \mathbf{V}_g^h &= \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_K \in R_k(K)^N, K \in \Omega^h, \mathbf{v} = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g \} \\ P^h &= \{ p \in C^0(\Omega) \cap L_2^0(\Omega) \mid p|_K \in R_l(K), K \in \Omega^h \} \\ \Sigma^h &= \{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{N \times N} \cap L_2(\Omega)^{N \times N} \mid S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, N, \mathbf{S}|_K \in R_m(K)^{N \times N}, K \in \Omega^h \} \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde  $R_k$ ,  $R_l$  e  $R_m$  denotam, respectivamente, polinômios de ordem  $k$ ,  $l$  e  $m$ .

A forma fraca das Eq. (3.6) pode ser obtida integrando o produto interno da Eq. (3.6)<sub>1</sub> com uma variação do campo de velocidade  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , da Eq. (3.6)<sub>2</sub> com uma variação de tensão  $\mathbf{S} \in \Sigma$  e da Eq. (3.6)<sub>3</sub> com uma variação de pressão  $q \in P$ . A seguir, as equações são integradas por partes visando diminuir sua ordem de diferenciação. Através desta integração, as condições de contorno naturais passam a ser implícitas na formulação do problema, fazendo parte das equações variacionais de sua forma fraca.

A aproximação de Galerkin para o problema definido pelas Eq. (2.28) e Eq. (3.6) pode ser escrita como: *dadas as funções de força de corpo  $\mathbf{f}$  e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann  $\mathbf{u}_g$  e  $\mathbf{t}_n$ , respectivamente, encontrar o conjunto  $(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \Sigma^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h$  tal que:*

$$B_G(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = F_G(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} B_G(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) &= \int_{\Omega} \rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ &+ [2(1 - \exp(-\eta_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} + K (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2})]^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega + \epsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

com  $\epsilon \ll 1$ , e

$$F_G(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad (3.24)$$

### 3.4 Método de Galerkin-Mínimos Quadrados

A formulação de Galerkin para o problema de definido pela Eq. (3.22) apresenta dificuldades devido ao caráter da formulação. Os sub-espços de tensão, velocidade e pressão devem ser compatibilizados, sob pena de gerar oscilações espúrias e o trancamento (locking) do campo de velocidade. Assim, combinações arbitrárias desses sub-espços – algumas desejáveis do ponto de vista de implementação computacional – não são permitidas na aproximação da Eq. (3.22). A estabilidade de métodos de elementos finitos para este problema foi estabelecida a partir da introdução da condição de Babuška-Brezzi, ou condição LBB [Oden e Carey, 1983; Babuška, 1973; Brezzi, 1974]. Esta condição, uma vez satisfeita, estabelece se uma dada combinação dos sub-espços de tensão, velocidade e pressão irá gerar aproximações estáveis.

Uma das metodologias empregadas para superar as dificuldades acima descritas é a de Galerkin mínimos-quadrados ou Galerkin least squares – GLS. Este método, mantém a estrutura da formulação clássica de Galerkin adicionando termos que conferem a estabilidade desejada, sem, contudo, ser inconsistente. Como não necessita satisfazer a condição LBB, elementos com interpolações de igual ordem para tensão, velocidade e pressão podem ser empregados.

A aproximação de Galerkin mínimos-quadrados para o problema definido pelas Eq. (2.28) e Eq. (3.6) pode ser escrita como: *dadas as funções de força de corpo  $\mathbf{f}$  e as condições de contorno de Dirichlet e Neumann  $\mathbf{u}_g$  e  $\mathbf{t}_h$ , respectivamente, encontrar o conjunto  $(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h$  tal que:*

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h \times P^h \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) &= \int_{\Omega} \rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega \\ &+ [2(1 - \exp(-\eta_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} + K (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2})]^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega + \delta \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \epsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega \\ &+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} (\rho (\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}) \cdot (\alpha (\operatorname{Re}_K) (\rho (\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h)) d\Omega \\ &+ 2(1 - \exp(-\eta_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} + K (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2}) \beta \\ &\cdot \int_{\Omega} ([2(1 - \exp(-\eta_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{-1/2} + K (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2})]^{-1} \boldsymbol{\tau}^h - \mathbf{D}(\mathbf{u}^h)) \\ &\cdot ([2(1 - \exp(-\eta_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{-1/2} (2\operatorname{tr} \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2})]^{-1} \mathbf{S}^h - \mathbf{D}(\mathbf{v}^h)) d\Omega \end{aligned} \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} F(\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\ &+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \mathbf{f} \cdot (\alpha (\operatorname{Re}_K) (\rho (\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S})) d\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

com  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\beta$  um valor arbitrário maior que zero [Behr et al., 1993]; o número de Reynolds de malha  $\operatorname{Re}_K$  e os parâmetros de estabilidade  $\alpha(\operatorname{Re}_K)$  e  $\delta$  são definidos como em Franca e Frey, 1992, e Behr et al., 1993,

$$\begin{aligned}
\text{Re}_K &= \frac{\rho h_K |\mathbf{u}^h|_p m_k}{4(1 - \exp(-\eta_0 (2\text{tr } \mathbf{D}^2)^{1/2} / \tau_0)) (\tau_0 (2\text{tr } \mathbf{D}^2)^{-1/2} + K (2\text{tr } \mathbf{D}^2)^{(n-1)/2})} \\
\alpha(\text{Re}_K) &= \frac{h_K}{2|\mathbf{u}^h|_p} \xi(\text{Re}_K) \\
\xi(\text{Re}_K) &= \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 < \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K > 1 \end{cases} \\
|\mathbf{u}^h|_p &= \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^N |u_i^h|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i^h|, & p = \infty \end{cases} \\
m_k &= \min \{1/3, 2C_k\} \\
C_k &= \sum_{K \in \Omega^h} h_K^2 \|\text{div } \mathbf{S}^h\|_{0,K}^2 \geq \|\mathbf{S}^h\|_K^2 \quad \forall \mathbf{S}^h \in \Sigma^h \\
\delta &= \lambda |\mathbf{u}|_p h_K \xi(\text{Re}_K)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro positivo e  $h_K$  é o comprimento de malha do elemento.

Observações:

1. Fazendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  iguais a zero na formulação GLS definida pelas Eqs. (3.25)-(3.27), recupera-se a aproximação clássica de Galerkin.
2. A expressão do número de Reynolds de malha encontrada em Johnson, 1987, foi modificada com a inclusão do parâmetro  $m_K$  na Eq. (3.28), de modo a considerar também o grau de interpolação empregado. Assim, as regiões difusivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por  $\text{Re}_K < 1$ , enquanto as advectivo-dominadas por  $\text{Re}_K > 1$ , independente do elemento considerado [Franca e Frey, 1992].

### 3.5 Problema Matricial

A discretização das Eq. (3.25)-(3.28) é obtida expandindo as aproximações de elementos finitos para  $\boldsymbol{\tau}^h$ ,  $\mathbf{u}^h$ ,  $p^h$  e  $\mathbf{S}^h$ ,  $\mathbf{v}^h$ ,  $q^h$  como uma combinação das suas respectivas funções de formas e graus de liberdade, gerando um sistema de equações discretas não-lineares. As funções de aproximação são dadas por

$$\begin{aligned}
\tau_{ij}^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{B} \in \Omega^h} N_{\hat{B}}(\mathbf{x}) \tau_{ij\hat{B}} \quad , \quad S_{ij}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{A} \in \Omega^h} N_{\hat{A}}(\mathbf{x}) S_{ij\hat{A}} \\
p^h(\mathbf{x}) &= \sum_{\hat{B} \in \Omega^h} N_{\hat{B}}(\mathbf{x}) q_{\hat{B}} \quad , \quad q^h(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{A} \in \Omega^h} N_{\hat{A}}(\mathbf{x}) q_{\hat{A}} \\
u_i^h(\mathbf{x}) &= \sum_{B \in \Omega^h} N_B(\mathbf{x}) v_{iB} \quad , \quad v_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{A \in \Omega^h} N_A(\mathbf{x}) v_{iA}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

e são substituídas na formulação GLS. Nas Eq (3.29),  $N_{\hat{A}}(\mathbf{x})$  e  $N_{\hat{B}}(\mathbf{x})$  ,  $N_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$  e  $N_{\tilde{B}}(\mathbf{x})$  e  $N_A(\mathbf{x})$  e  $N_B(\mathbf{x})$  são polinômios para a tensão-extra, pressão e velocidade, respectivamente. As integrais no  $L^2$  normais da formulação das Eq. (3.25)-(3.28) são aproximadas via quadratura Gaussiana. O resultante sistema algébrico pode ser escrito na forma residual como

$$[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] = [\mathbf{0}] \tag{3.30}$$

onde  $[\mathbf{U}_k]$  é o vetor dos graus de liberdade  $[\boldsymbol{\tau}]$ ,  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\mathbf{p}]$  avaliados em todos os pontos nodais

$$[\mathbf{U}_k] = \left[ [\boldsymbol{\tau}_{12}] \quad [\boldsymbol{\tau}_{11}] \quad [\boldsymbol{\tau}_{22}] \quad [\mathbf{u}_1] \quad [\mathbf{u}_2] \quad [\mathbf{p}] \right]^T \tag{3.31}$$

e  $[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)]$  é dado pelo conjunto de matrizes

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] &= [(1+\beta)\mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma})) + (1-\beta)\mathbf{H} + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma}))][\boldsymbol{\tau}] \\
&\quad + [\mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \beta\mathbf{K} - (1+\beta)\mathbf{H}^T - \mathbf{G}^T][\mathbf{u}] \\
&\quad + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P}][\mathbf{p}] - [\mathbf{F} + \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma}))]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde  $[\mathbf{H}]$  e  $[\mathbf{H}^T]$  são as matrizes da ligação entre  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\mathbf{u}$ ,  $[\mathbf{E}]$  é a matriz dos termos  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $[\mathbf{N}]$  é matriz dos termos advectivos,  $[\mathbf{K}]$  é as matrizes dos termos difusivos,  $[\mathbf{G}]$  e  $[\mathbf{G}^T]$  são as matrizes dos termos de pressão e continuidade,  $[\mathbf{F}]$  é a matriz dos termos forças de campo na equação do movimento. As matrizes com subscripto  $\alpha$  denotam os termos GLS para a equação do movimento,  $[\mathbf{M}]$  é a matriz dos termos  $\delta$  e  $[\mathbf{P}]$  é a matriz dos termos  $\varepsilon$ .

A fim de obter a solução do conjunto de equações não-lineares definido pela Eq. (3.32) empregou-se um algoritmo de quasi-Newton, com um método de continuação atuando sobre o termo de aceleração convectiva. Este algoritmo requer uma estimativa inicial  $\mathbf{U}_{k=0}$  e, a cada iteração, é resolvido o seguinte sistema linear:

$$[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)][\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = -[\mathbf{R}(\mathbf{U}_k)] \quad (3.33)$$

onde  $[\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)]$  é definido por

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}(\mathbf{U}_k)] = & [(1+\beta)\mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma})) + (1-\beta)\mathbf{H} + \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma}))] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))][\boldsymbol{\tau}] \\ & + [\mathbf{M} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}^h \eta(\dot{\gamma})) + \beta \mathbf{K} - (1+\beta)\mathbf{H}^T - \mathbf{G}^T] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))][\mathbf{u}] \\ & + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})) + \mathbf{P}] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{G}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))][\mathbf{p}] + [\partial_{\mathbf{u}}(\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}, \eta(\dot{\gamma})))] \end{aligned} \quad (3.34)$$

e  $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$  por

$$[\Delta \mathbf{U}_{k+1}] = [\mathbf{U}_{k+1}] - [\mathbf{U}_k] \quad (3.35)$$

O algoritmo de solução é descrito como:

I. Estima-se o vetor  $[\mathbf{U}_{k=0}]$  – nas simulações desta dissertação, campos de tensão, velocidade e pressão nulos são utilizados – e define-se o critério de convergência e o número de iterações para a atualização da matriz jacobiana.

II. Resolve-se o vetor incremental  $[\Delta \mathbf{U}_{k+1}]$  através do sistema dado pela Eq. (3.33).

III. Calcula-se o vetor  $[\mathbf{U}_{k+1}^h]$  pela Eq. (3.35).

IV. Se  $|\mathbf{R}(\mathbf{U}_{k+1})|_\infty > 10^{-7}$ , critério de erro empregado nesta dissertação,  $k=k+1$ , retornando-se ao passo II; caso contrário, a solução é armazenada e o algoritmo é finalizado.

### 3.6 O Elemento Quadrangular Bi-linear

Segundo Hughes, 1986, o domínio de um elemento quadrilátero é definido pela localização dos seus quatro pontos nodais,  $\mathbf{x}_a$ ,  $a=1,\dots,4$  no plano  $\mathcal{R}^2$ . Assumimos que os pontos nodais são numerados em ordem correspondente ao sentido anti-horário do elemento. Busca-se uma mudança de coordenadas a qual mapeie o quadrilátero dado através de um quadrilátero bi-unitário, como mostrado na Fig. 3.1. As coordenadas de um ponto no quadrilátero bi-unitário  $\xi=(\xi,\eta)$  são relacionadas com as coordenadas de um ponto  $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$  no domínio do problema através de mapeamentos do tipo

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{1a}^e \\ x_2(\xi, \eta) &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) x_{2a}^e \end{aligned} \quad (3.36)$$

com  $\xi$  e  $\eta$  também referidos na literatura como coordenadas naturais. Uma representação sucinta das relações acima pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta) \mathbf{x}_a^e \quad (3.37)$$

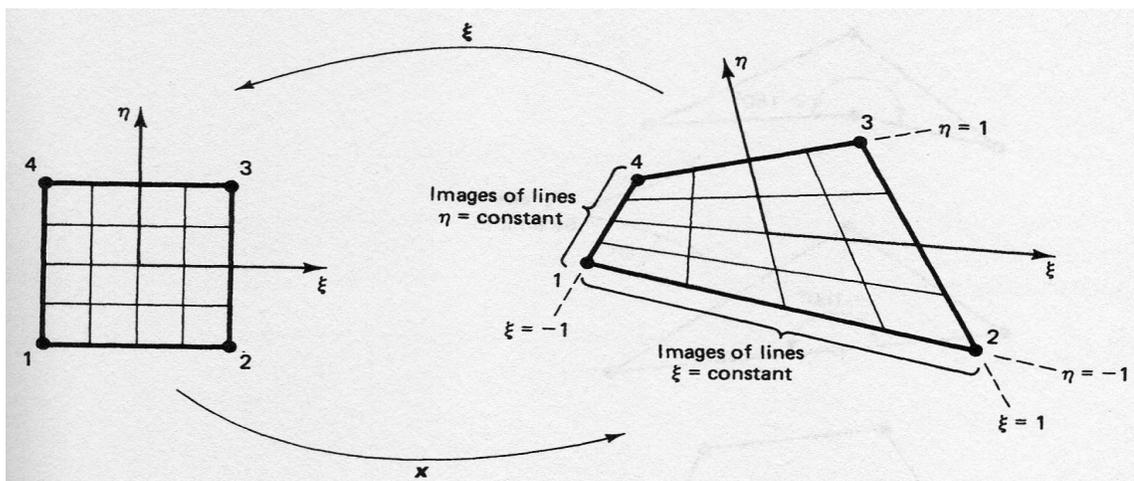


Figura 3.1 Quadrilátero bi-unitário no domínio  $\xi$  e  $\eta$  e quadrilátero no domínio do problema ( $x_1$  e  $x_2$ ) – ordenação nodal local [Hughes, 1987].

As funções  $N_a$  são obtidas assumindo as seguintes expansões bilineares, onde

$$\begin{aligned} x_1(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta \\ x_2(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros a serem determinados. Estabelecendo que as Eq. (3.38) satisfazem as respectivas condições

$$\begin{aligned} x_1(\xi_a, \eta_a) &= x_{1_a} \\ x_2(\xi_a, \eta_a) &= x_{2_a} \end{aligned} \quad (3.39)$$

os coeficientes  $\xi_a$  e  $\eta_a$  são definidos na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Coordenadas nodais no espaço  $\xi$

a	$\xi_a$	$\eta_a$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1

Resolvendo o sistema para determinar os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\begin{bmatrix} x_{1_1}^e \\ x_{1_2}^e \\ x_{1_3}^e \\ x_{1_4}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_{2_1}^e \\ x_{2_2}^e \\ x_{2_3}^e \\ x_{2_4}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

e substituindo os resultados nas Eq. (3.38) e comparando com as Eq. (3.36), obtém-se a equação para a função de forma  $N_a(\xi)$ , dada por

$$N_a(\xi) = N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta) \quad (3.41)$$

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das simulações numéricas realizadas através do código de elementos finitos NNFEM em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional (LAMAC) do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Sua validação para a formulação multi campos é encontrada nos trabalhos de Zinani, 2006, Zinani e Frey, 2006, Zinani e Frey, 2008, e Frey et al., 2010.

Os resultados estão divididos nas seguintes seções:

- Um critério alternativo para a determinação das zonas rígidas. Neste item apresenta-se uma metodologia alternativa para a determinação das zonas rígidas em escoamentos viscoplásticos, baseada na taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita na curva SMD,  $\dot{\gamma}_0$ .
- Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada - validação. Neste item apresenta-se a validação do modelo SMD através da reprodução de resultados encontrados na literatura para o fluido de Bingham.
- Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada. Neste item apresentam-se os resultados obtidos e uma investigação das características das soluções para os campos de velocidade e tensão através da variação dos parâmetros do modelo SMD para a geometria da cavidade forçada.

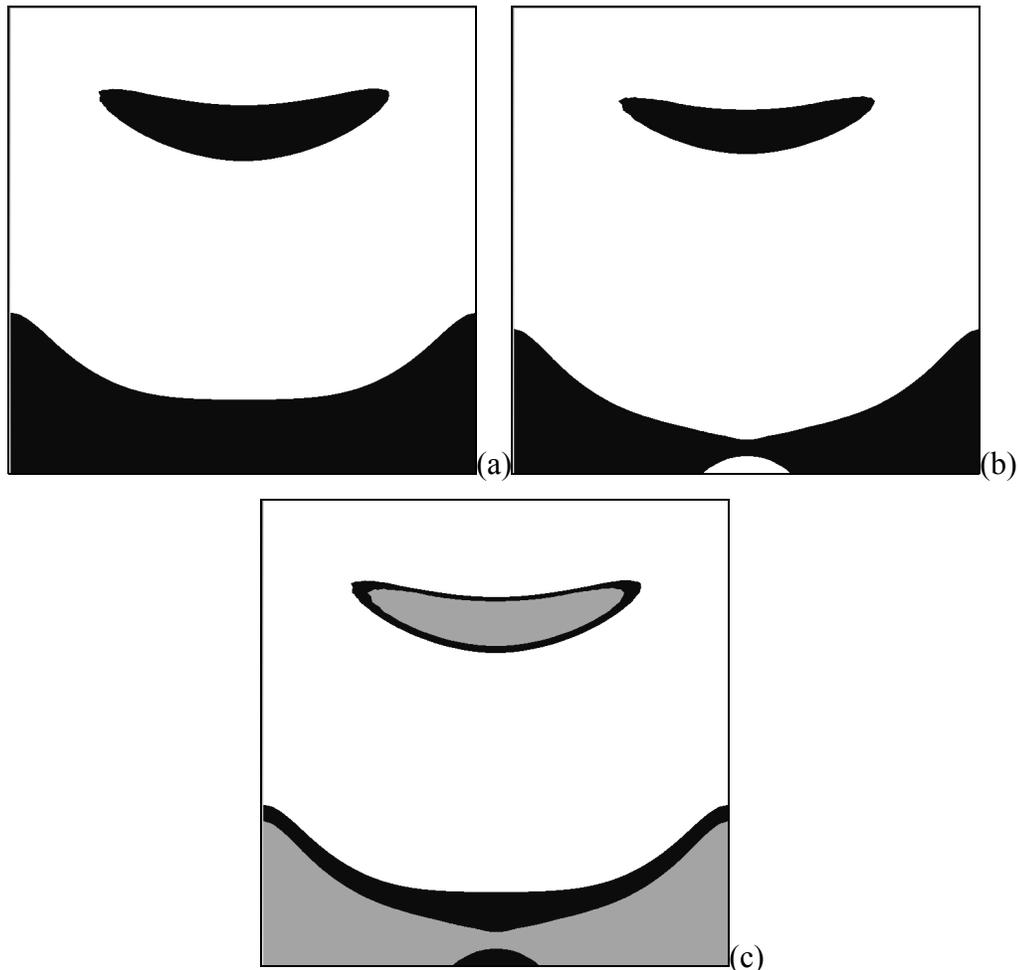
### 4.1 Um novo critério para a determinação das zonas rígidas

A determinação das zonas rígidas de escoamentos viscoplásticos pode ser obtida através de diferentes combinações dos parâmetros do fluido. Diversos trabalhos encontrados na literatura como Papanastasiou e Boudouvis, 1997, Burgos e Alexandrou, 1999, Burgos et al, 1999, Mitsoulis e Zisis, 2001, Alexandrou et al, 2001, Rudert e Schwarze, 2009, utilizam como critério para a definição das zonas rígidas a tensão limite de escoamento,  $\tau_0$ . Ou seja, as regiões do escoamento que apresentarem  $|\boldsymbol{\tau}| > \tau_0$ .

Entretanto, esta abordagem pode levar a alguns erros, uma vez que quando  $|\boldsymbol{\tau}| \approx \tau_0$  há um salto abrupto de diversas ordens de grandeza na taxa de cisalhamento, propiciando assim que as

flutuações da tensão em torno de  $\tau_0$  influenciem na determinação das zonas rígidas. Nesta Dissertação, empregou-se outra metodologia, definindo as zonas rígidas como as regiões do escoamento onde a taxa de cisalhamento é menor ou igual a taxa de cisalhamento no fim da região que apresenta viscosidade finita na curva SMD (Fig. 2.4),  $\dot{\gamma}_0$ , dada pela razão entre  $\tau_0$  e  $\eta_0$ .

A Fig. 4.1 mostra a diferença da utilização dos dois diferentes critérios,  $|\tau| > \tau_0$  e  $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0$ , para a determinação das zonas rígidas no escoamento em uma cavidade forçada (Fig. 4.2). Observa-se que a predição de zonas rígidas (regiões negras nas figuras) pelo critério usual é maior que pelo critério proposto nesta Dissertação, uma vez que devido à regularização do modelo,  $\tau$  é igual a  $\tau_0$  para um valor de  $\dot{\gamma}$  maior que  $\dot{\gamma}_0$ . Para números de salto (Eq. (2.32)) pequenos,  $\dot{\gamma}_0$  é da ordem de  $\dot{\gamma}_1$ , reduzindo o platô da curva de tensão em  $|\tau| \approx \tau_0$  e fazendo com que a diferença entre o critério clássico e o critério proposto nesta Dissertação seja pequena.



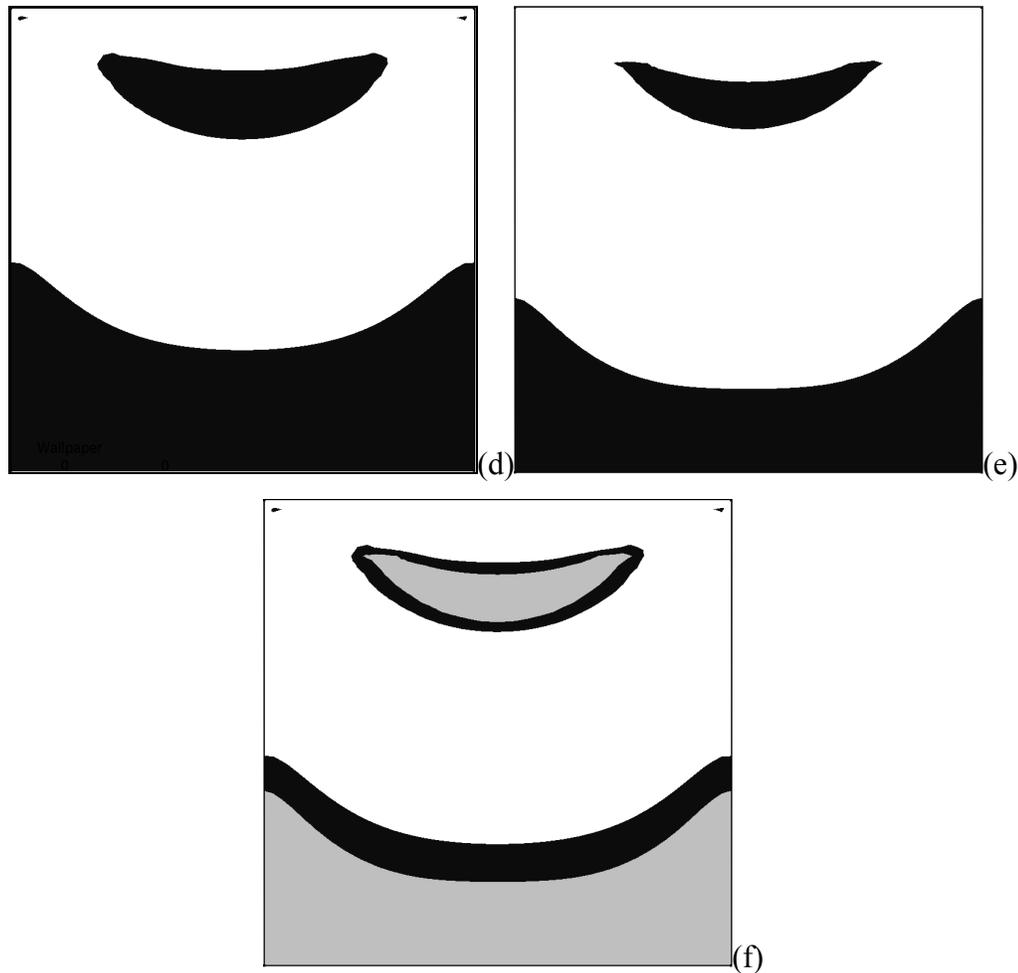


Figura 4.1 – Morfologia das zonas rígidas para escoamentos sem inércia com  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=1.0$  para (a),(b) e (c);  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.2$  e  $U^*=0.01$  para (d),(e) e (f): (a) Critério de  $\tau$ ; (b) Critério de  $\dot{\gamma}$ ; (c) Critérios de  $\tau$  (regiões pretas) e  $\dot{\gamma}$  (regiões cinza); (d) Critério de  $\tau$ ; (e) Critério de  $\dot{\gamma}$ ; (f) Critérios de  $\tau$  (regiões pretas) e  $\dot{\gamma}$  (regiões cinza).

#### 4.2 Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada – validação

A fim de validar a implementação computacional da função viscosidade SMD definida na Eq. (3.11), foram realizadas simulações de escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada bi-unitária, descrita pela Fig. 4.2. As condições de contorno empregadas nas paredes laterais e inferior são não-deslizamento e impermeabilidade; no plano superior, velocidade horizontal prescrita e velocidade vertical igual a 0.

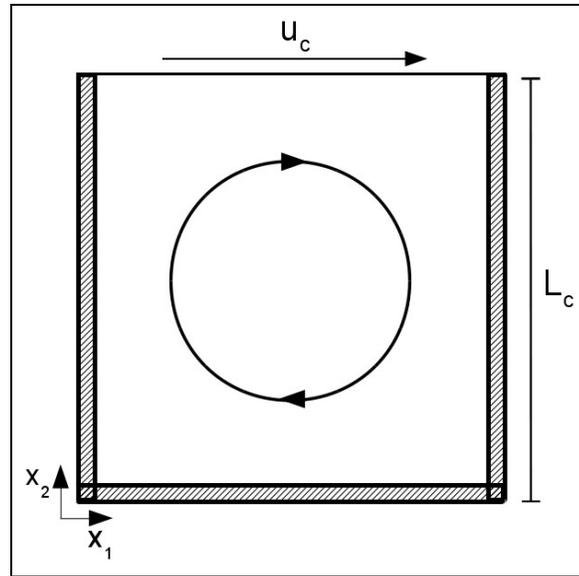


Figura 4.2 – Descrição do problema da cavidade.

O domínio computacional foi discretizado através de cinco malhas diferentes com 10, 20, 50, 100 e 200 elementos nas direções  $x_1$  e  $x_2$ . Assim, realizou teste de independência de malha baseado no máximo erro relativo no perfil do módulo da tensão em  $x_2^*=0.5$  entre duas discretizações subsequentes (Fig. 4.3). Considerando o erro máximo como 1%, a malha selecionada foi de 2500 elementos. Entretanto, a posição do olho do vórtice principal da cavidade é determinada através do nó da malha que apresenta o menor valor para a função linha de corrente

$$-\nabla^2 \phi = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (4.1)$$

definida em Frey et al, 2000. Assim, é necessário uma suficiente resolução de malha para uma maior exatidão no resultado. Considerando-se também o tempo computacional, optou-se por uma malha de 10000 (ou 100x100) elementos e 10201 nós (Fig. 4.4(b)) para as comparações com a literatura e uma malha de 2500 (ou 50x50) elementos e 2601 nós (Fig. 4.4(a)) para as demais simulações. O tipo de elemento utilizado é bilinear para tensão, velocidade e pressão (Q1/Q1/Q1).

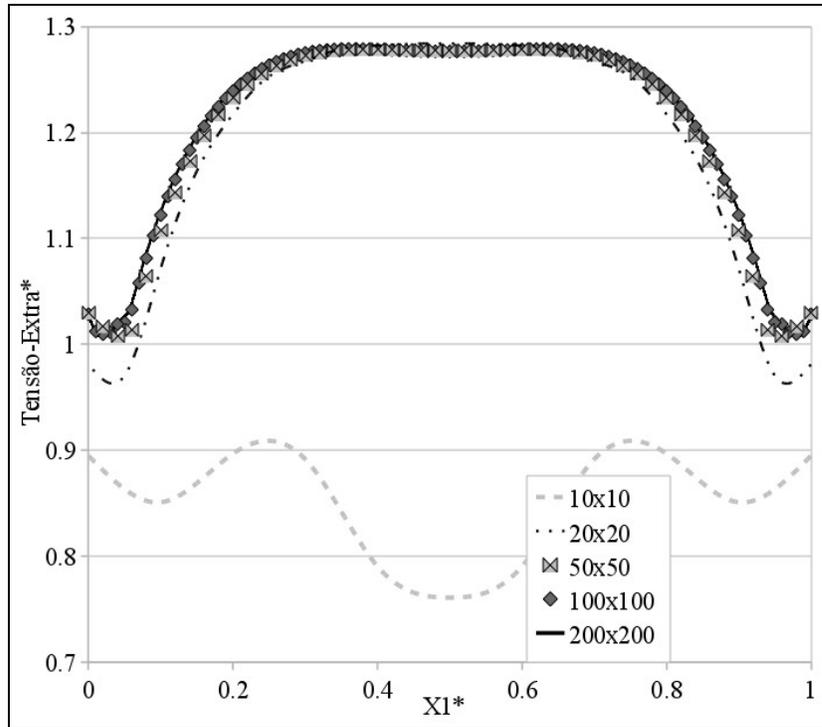
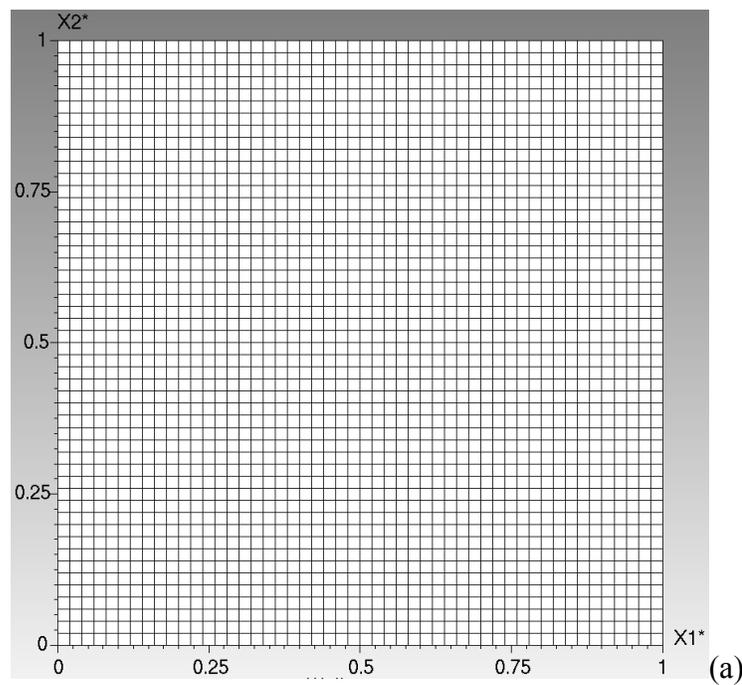


Figura 4.3 – Módulo da tensão na posição  $x_2^*=0.5$ : teste de independência de malha através de simulações sem inércia com  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$ .



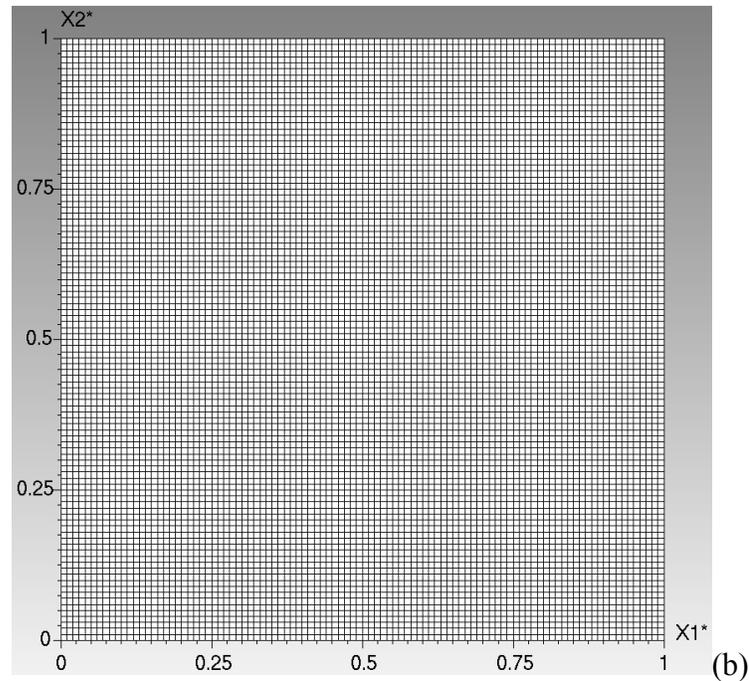
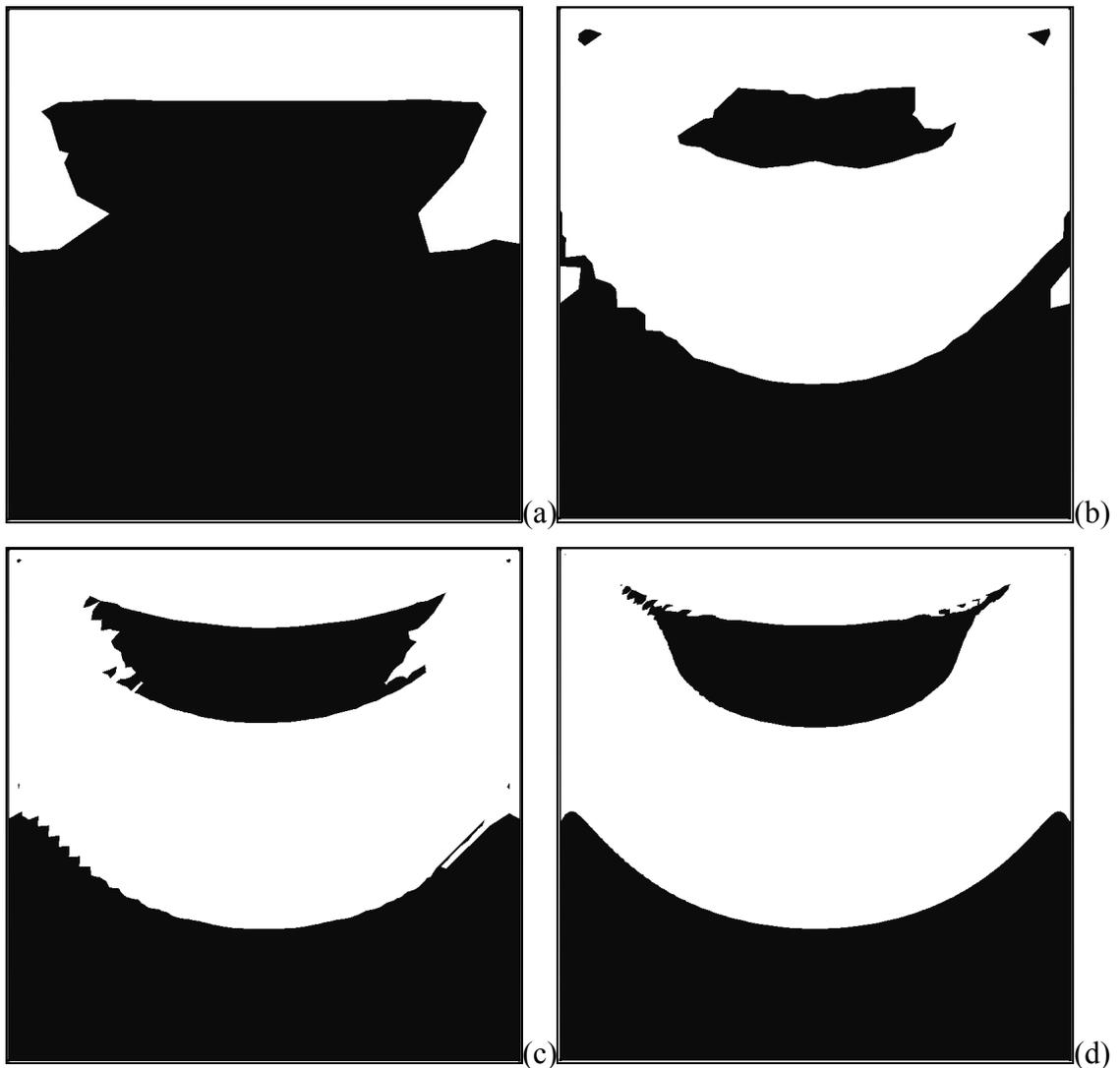


Figura 4.4 – Discretizações do domínio empregadas: (a) 2500 elementos bilineares Q1/Q1/Q1; (b) 10000 elementos bilineares Q1/Q1/Q1.

Na Fig. 4.5 é mostrada a diferença entre a morfologia das zonas rígidas para os resultados obtidos através das diferentes discretizações. A proximidade entre os perfis de tensão do teste de independência de malha é retratada aqui pela semelhança qualitativa no formato das zonas rígidas, principalmente para as malhas de maior refinamento. Justifica-se, assim, o emprego da malha de 2500 elementos para a obtenção dos resultados da Seção 4.3, uma vez que apresenta uma qualitativa boa concordância com as malhas mais refinadas e baixo consumo de esforço computacional quando comparada com as malhas de 10000 e 40000 elementos. Porém, segundo Mitsoulis e Zisis, 2001, quando da utilização de modelos regularizados por Papanastasiou – ou nesta Dissertação, o próprio modelo SMD – pode-se fazer duas relevantes considerações. A primeira, com respeito à dependência dos resultados da discretização utilizada – como pode ser observado comparando as Fig. 4.5c e Fig. 4.5d. A segunda, a respeito do parâmetro de regularização, a razão  $\eta_0/\tau_0=(J+1)$  do modelo SMD. Como observado também no trabalho de Burgos e Alexandrou, 1999, valores altos para a regularização combinados com erros numéricos locais  $\epsilon$  na taxa de deformação fazem com que o termo regularizador  $\exp(-m(\dot{\gamma}\pm\epsilon))$  deixe de ser uma função suave (Fig 4.6), provocando um comportamento de *zig-zag* na interface entre as zonas rígidas e as zonas em escoamento. O refinamento da malha afeta de maneira tênue os

resultados, apenas diminuindo a amplitude do serrilhado (Fig. 4.5c-4.5e). A Fig. 4.6 traz uma representação do termo  $\exp(-m(\dot{\gamma} \pm \epsilon))$  em função da taxa de deformação quando da presença de perturbações causadas por erros numéricos  $\epsilon$  em comparação com a curva teórica – sem perturbações – para valores de regularização igual a 10 e 1000  $\text{s}^{-1}$ . Na Fig. 4.7 pode-se observar a influência das perturbações numéricas na função SMD, fazendo com que a curva apresente picos que ultrapassam a tensão limite de escoamento para valores de taxa de cisalhamento aquém da região do platô de  $|\tau|=\tau_0$ .



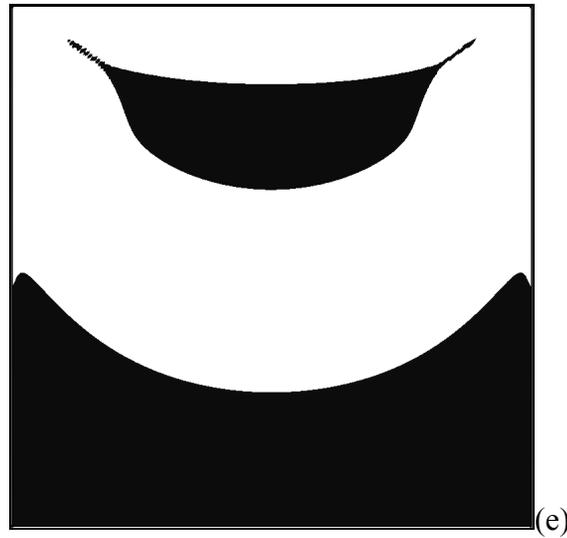
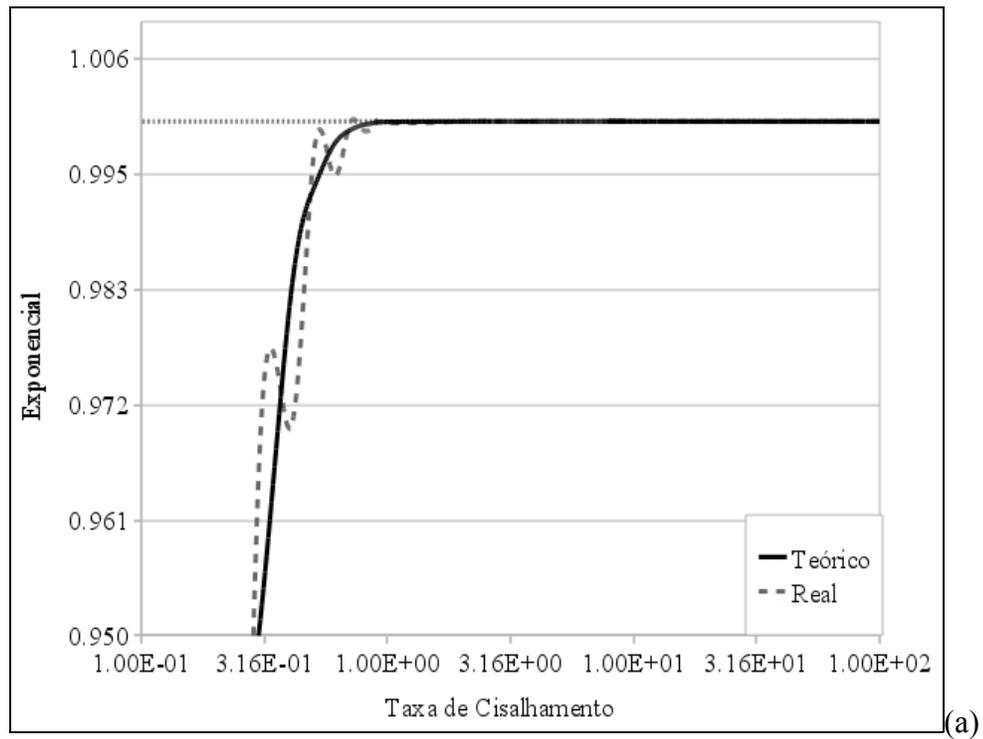


Figura 4.5 – Resultados para as zonas rígidas obtidos para escoamento sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$  empregando diferentes discretizações: (a) 100 elementos; (b) 400 elementos; (c) 2500 elementos; (d) 10000 elementos; (e) 40000 elementos.



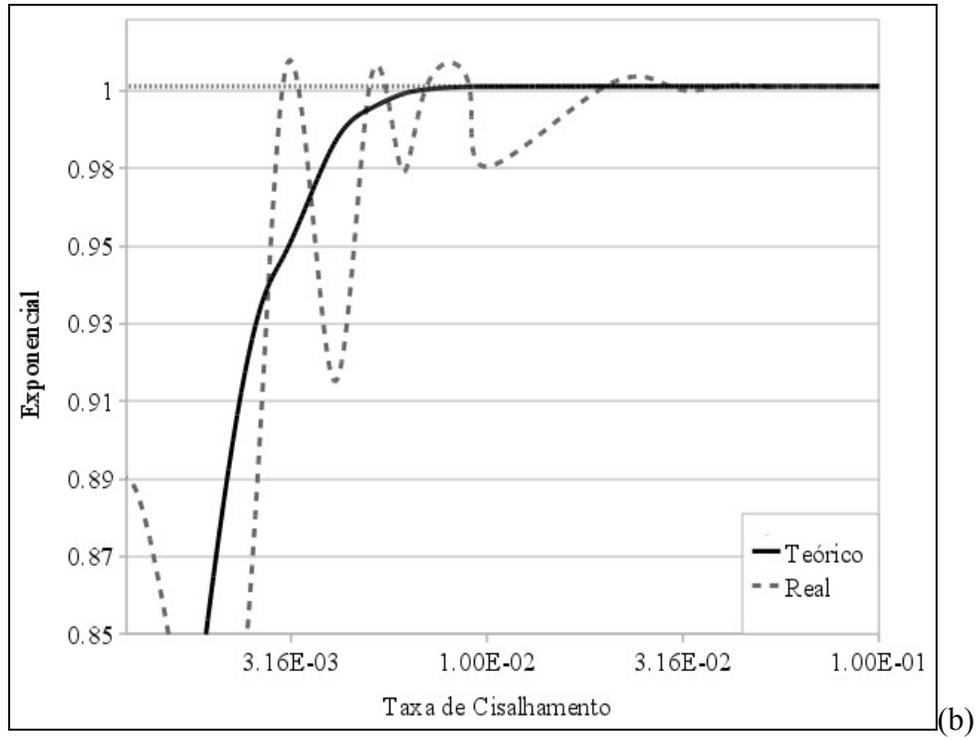
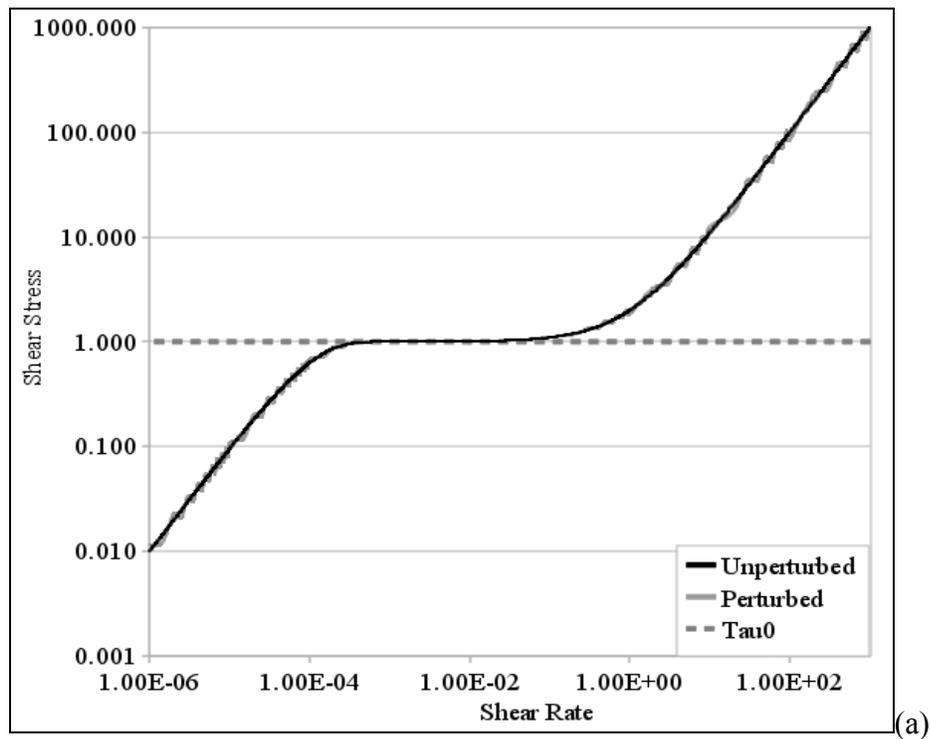


Figura 4.6 – Curvas teóricas e reais para o termo regularizador do modelo SMD.

(a)  $J=9$ ; (b)  $J=999$ .



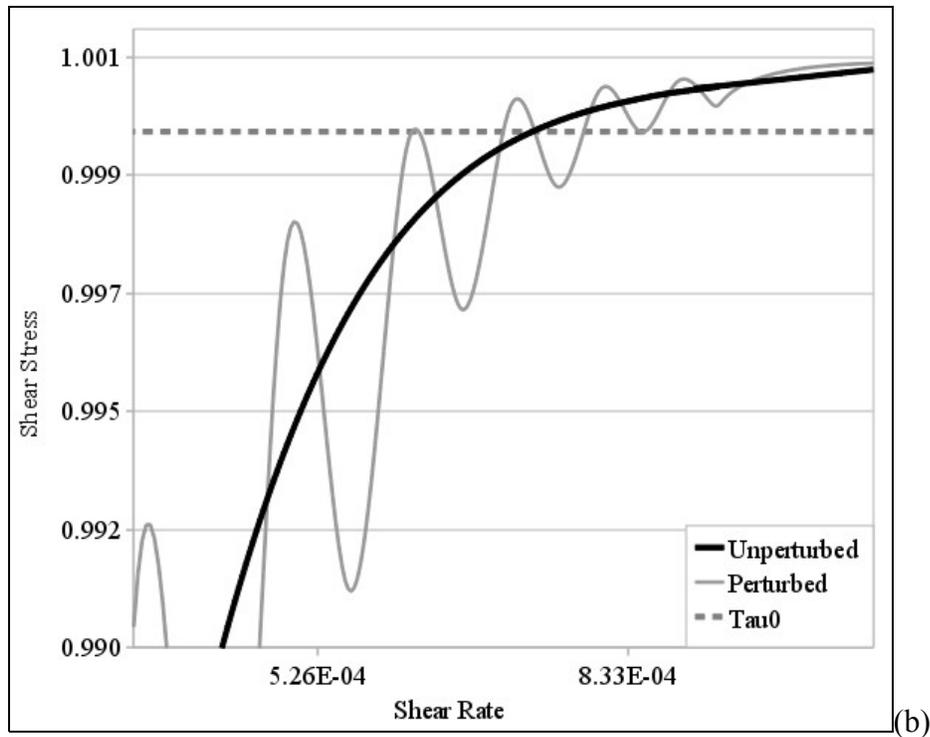


Figura 4.7 – Curvas teóricas e reais para a função SMD sob influência de perturbações na taxa de cisalhamento para  $J=10^4$ . (a) Curva de escoamento; (b) Detalhe da região do platô.

Nas Fig. 4.8(a) e 4.8(b) são apresentados os perfis de velocidade horizontal e vertical em  $x_1^*=0.5$  e  $x_2^*=0.5$ , respectivamente, em uma comparação com o resultado para  $Bn=0.01$  e  $Re=100$  encontrado em Neofytou, 2005. Para reproduzir estes parâmetros, as propriedades do fluido SMD empregadas foram  $\tau_0=10^{-4}$  Pa,  $K=0.01$  Pa.s<sup>n</sup>,  $n=1.0$  e  $u_c=1.0$  m/s ( $Re_{RH}=1$ ,  $J=9$  e  $U^*=100$ ) para obtenção de  $Re_{PL}=100$  e  $Bn=(U^*)^{-1}=0.01$ . Para que a regularização empregada neste caso reproduzisse a utilizada por Neofytou ( $m=1000s$ ), utilizou-se  $\eta_0=0.1$ Pa.s, uma vez que a regularização do modelo SMD é dada pela relação  $\eta_0/\tau_0$ .

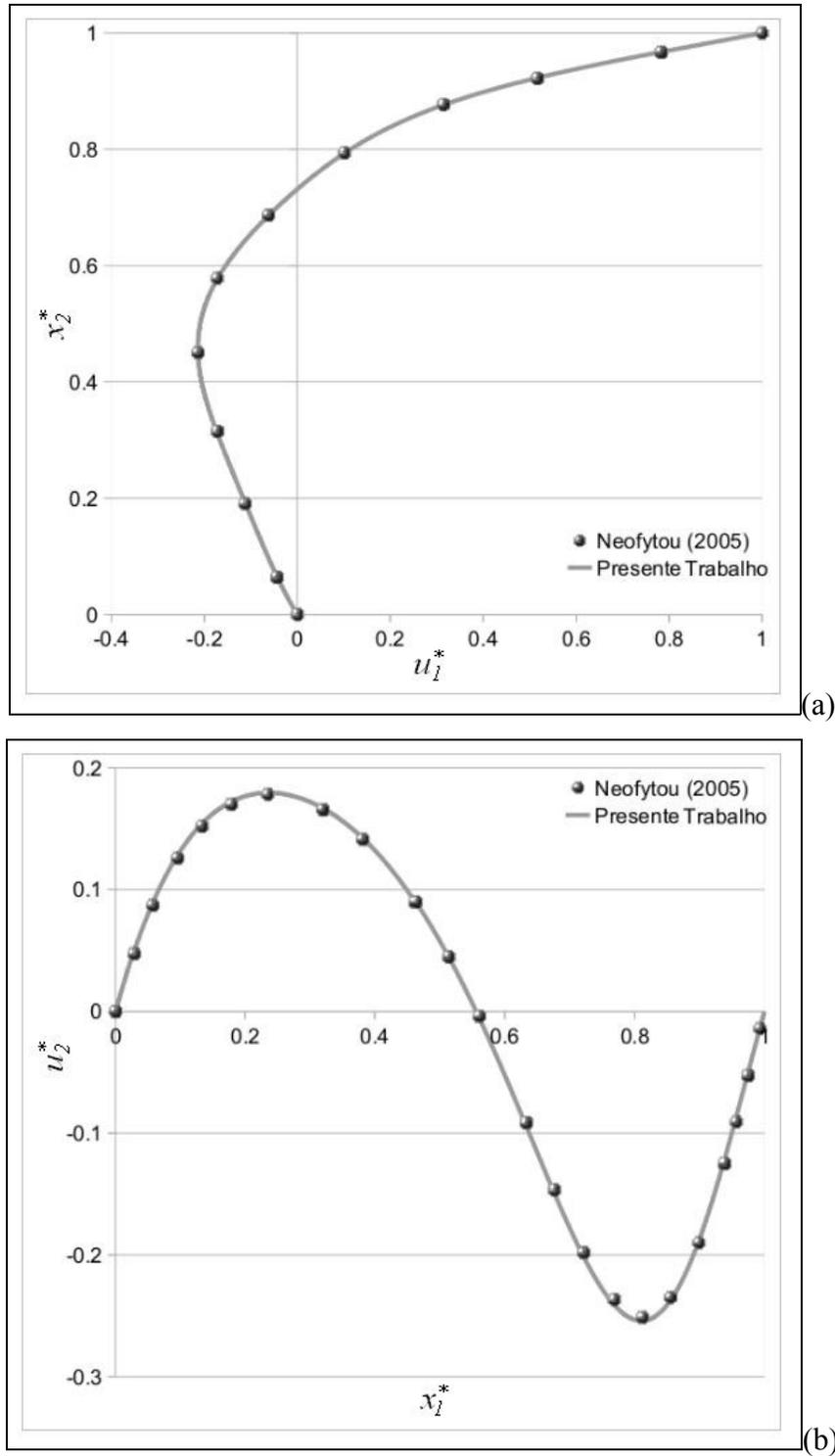
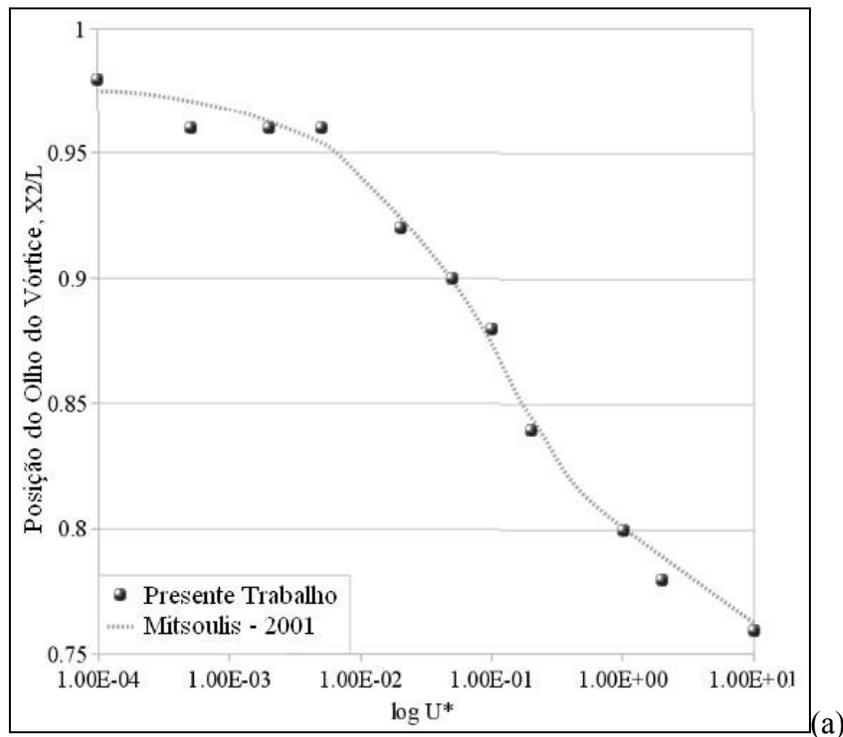


Figura 4.8 – Comparação com os resultados de Neofytou, 2005, para  $Re_{pL}=100$  e  $Bn=0.01$  ( $Re_{RH}=1$ ,  $J=9$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=100$ ): (a) Perfil de velocidade horizontal em  $x_1^*=0.5$ ; (b) Perfil de velocidade vertical em  $x_2^*=0.5$ .

Na Fig. 4.9 é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos nesta Dissertação com o modelo SMD e aqueles obtidos com o modelo de Bingham por Mitsoulis, 2001. A equivalência entre os dois modelos foi obtida utilizando-se  $n=1.0$ ,  $\eta_0=1000$  Pa.s,  $\tau_0=1.0$  Pa e  $u_c=1.0$  m/s; já o parâmetro  $K$  foi variado entre 0.0001 e 10 Pa.s<sup>n</sup>. Uma vez que os escoamentos são considerados sem inércia, apresentam simetria em torno de  $x_1^*=0.5$  (Fig. 4.10); desta maneira, a posição do olho do vórtice apenas é alterada ao longo da direção  $x_2$  da cavidade. Na Fig. 4.9(a) é apresentada a relação entre a posição do olho do vórtice na direção  $x_2$  e a variação de  $U^*$ . Verifica-se que com o aumento da vazão adimensional  $U^*$  ocorre o deslocamento do olho do vórtice para o centro da cavidade, dado o aumento da difusão de *momentum*. Na Fig. 4.9(b) é apresentada a relação entre a intensidade de vorticidade e o aumento de  $U^*$ . Considerando o aumento dos gradientes de velocidade relacionados também com o aumento da difusão de *momentum*, observa-se o aumento do valor da função linha de corrente no olho do vórtice da cavidade com a variação de  $U^*$  de  $10^{-4}$  a  $10^1$ .



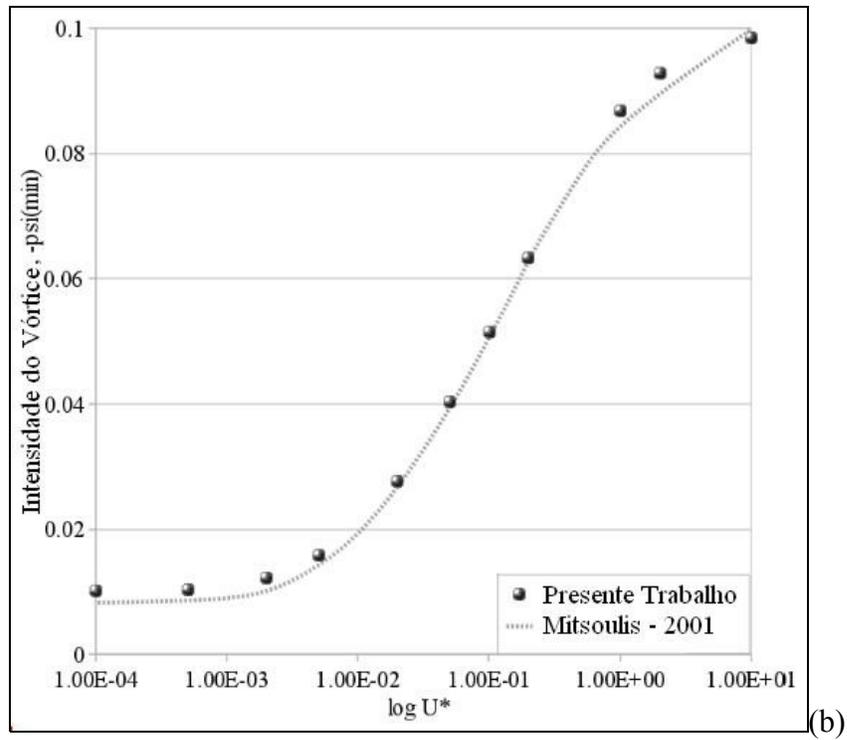
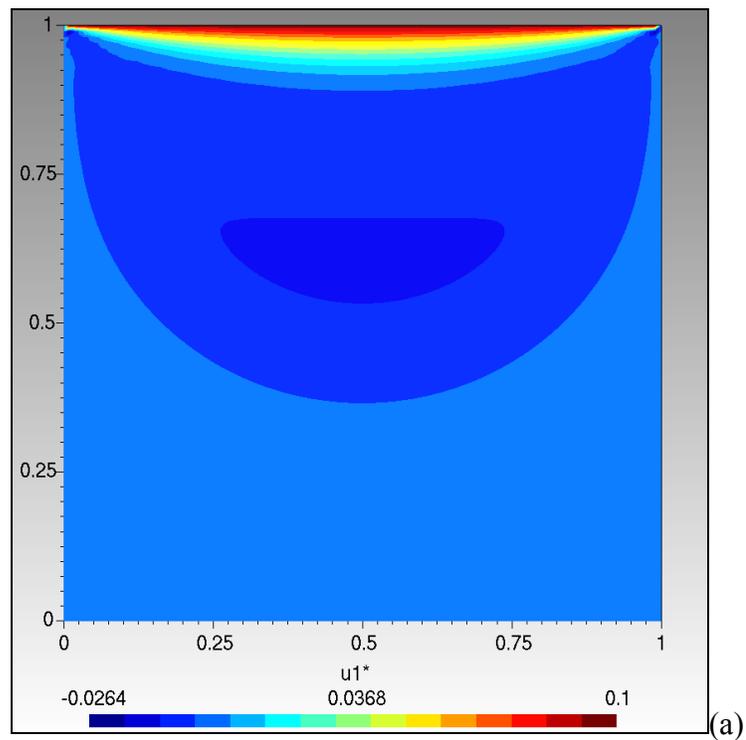
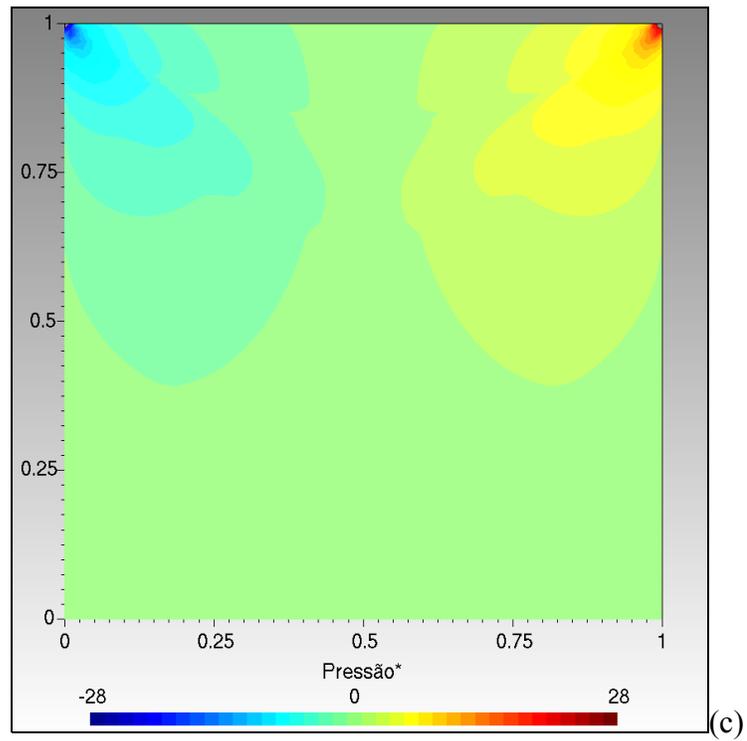
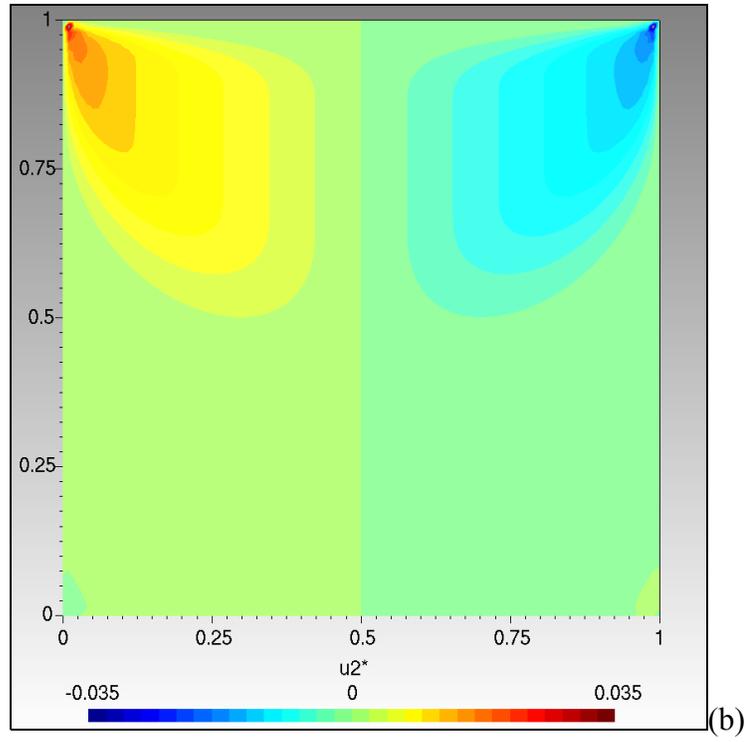


Figura 4.9 – Comparação com os resultados de Mitsoulis, 2001, empregando  $n=1.0$ ,  $\eta_0=1000$  Pa.s,  $\tau_0=1.0$  Pa e  $u_c=1.0$  m/s, variando  $U^*$  através do índice de consistência: (a) Posição do olho do vórtice em  $x_2^*$ ; (b) Valor da função linha de corrente no olho do vórtice.





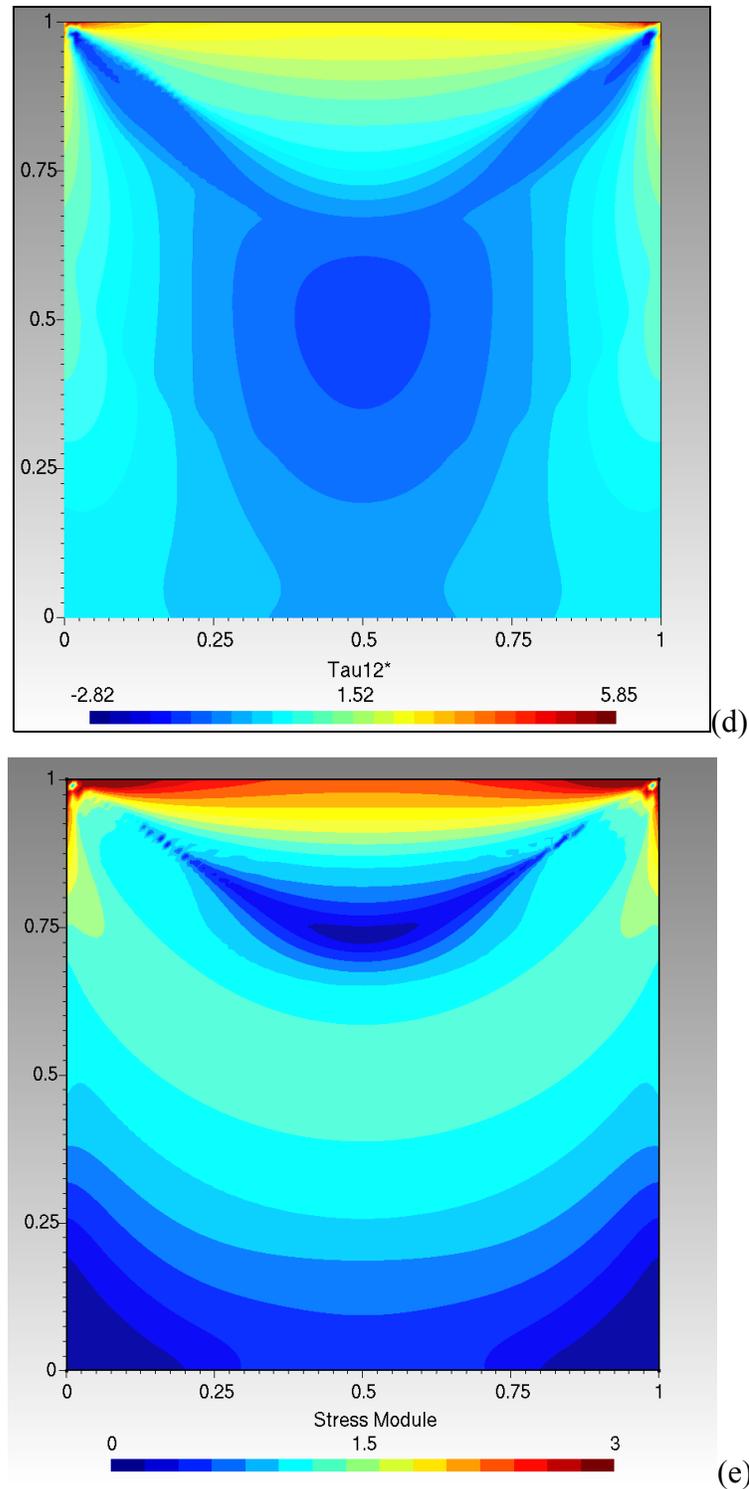
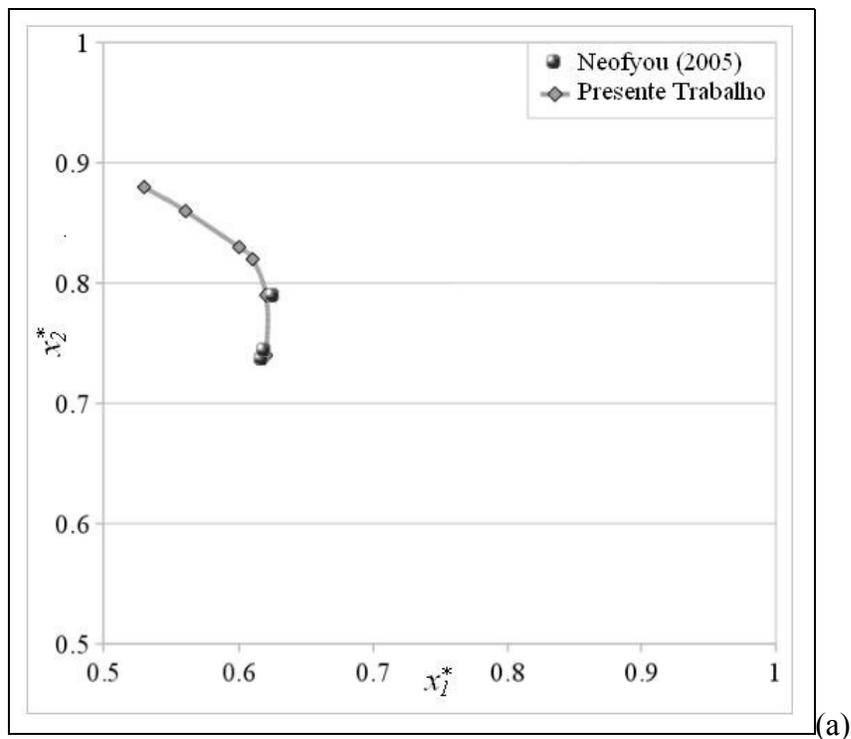


Figura 4.10 – Resultados para escoamento sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$  obtidos com uma malha de 10000 elementos Q1/Q1/Q1: (a) campo de velocidade  $u_1^*$ ; (b) campo de velocidade  $u_2^*$ ; (c) campo de pressão; (d) tensão de cisalhamento; (e) módulo da tensão.

Uma pertinente com respeito à Fig. 4.10 é a suavidade dos campos de tensão-extra, velocidade e pressão, evidenciando a estabilidade proveniente do método de elementos finitos empregado.

Com base nos dados retirados do trabalho de Neofytou, 2005, para simulações de fluidos de Bingham com inércia, pode-se traçar a trajetória do vórtice com a variação de  $U^*$  e comparar com os resultados obtidos nesta Dissertação, como mostrado na Fig. 4.11 A fim de possibilitar a comparação, foram utilizados os adimensionais variando  $Re_{RH}$  entre 1 e 1000,  $J$  entre 99 e 9999,  $n=1.0$  e  $U^*$  entre 0.1 e 10. De modo análogo ao caso sem inércia apresentado na Fig. 4.9, observa-se o deslocamento do olho do vórtice para o centro da cavidade e em direção à  $x_2^*=0.5$  com o aumento da vazão adimensional  $U^*$ . Novamente, este comportamento é resultante do aumento da difusão de *momentum* no interior da cavidade.



(a)

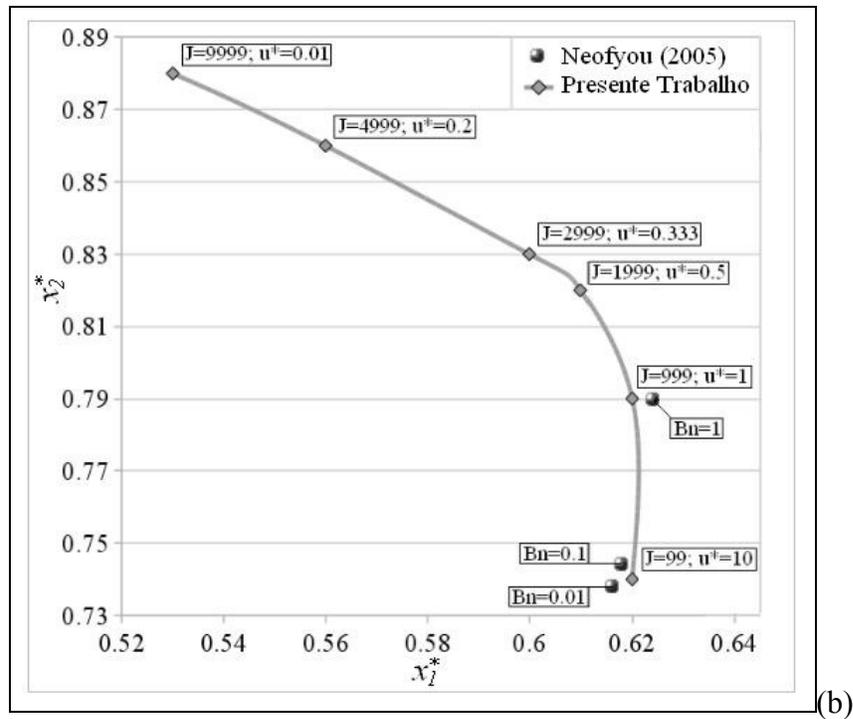
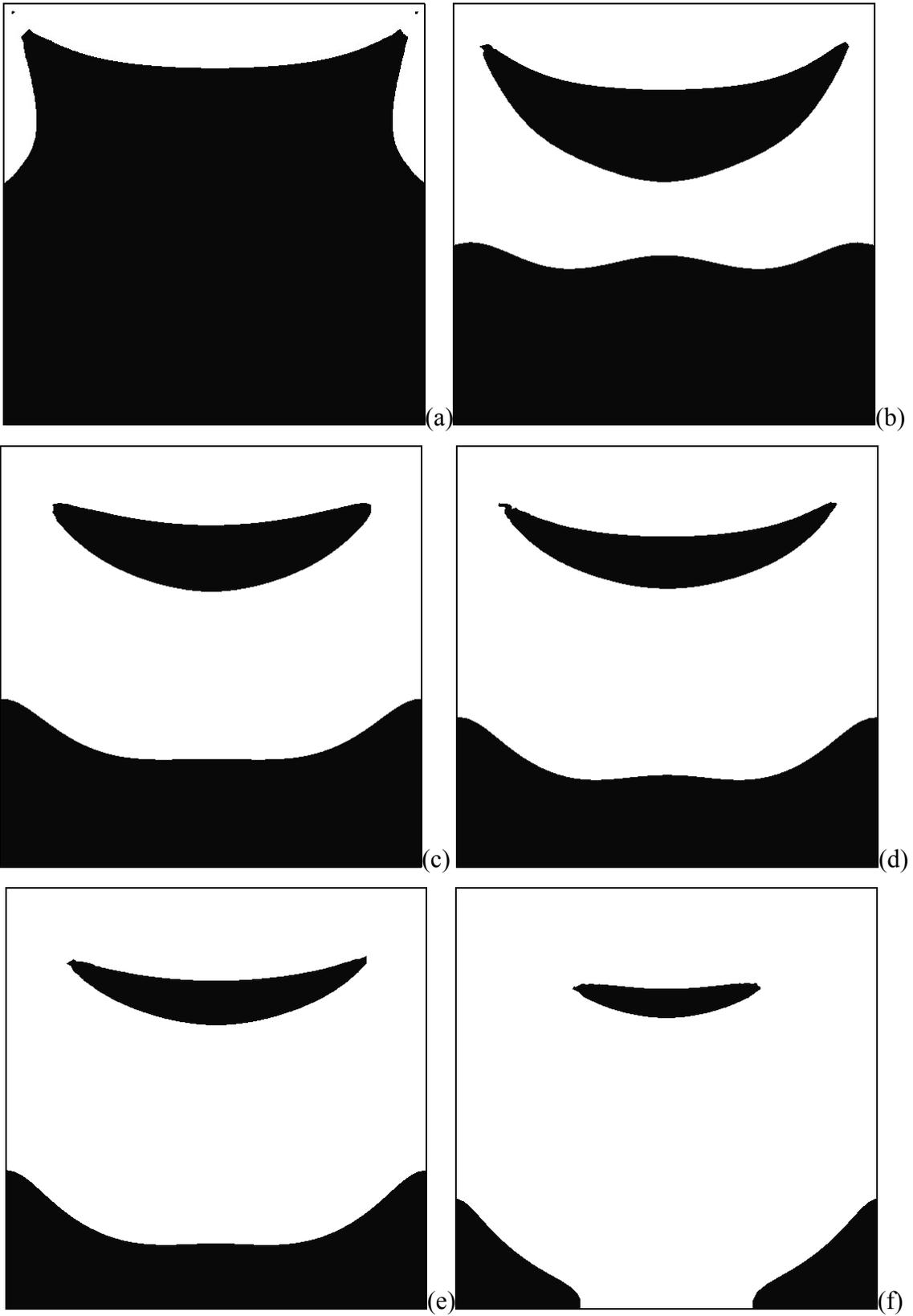


Figura 4.11 – Comparação com os resultados de Neofyout, 2005, para escoamentos com inércia,  $Re_{PL}=100$  – Trajetória do olho do vórtice dada a variação de  $U^*$  ( $Bn^{-1}$ ): (a) Vista do quadrante superior direito da cavidade; (b) Imagem ampliada da região de interesse.

### 4.3 Escoamentos de fluidos SMD em uma cavidade forçada

Neste item são apresentados os resultados obtidos pela formulação GLS definida pelas Eq. (3.18)-(3.21) para escoamentos de fluidos SMD (Eq. 2.28) empregando a geometria da cavidade forçada – descrita no item 4.1, Fig. 4.2. Realizou-se uma investigação para determinar de que maneira parâmetros como a vazão adimensional  $U^*$ , o expoente *power-law*  $n$ , o número de salto  $J$  e o número de Reynolds reológico,  $Re_{RH}$ , influenciam nas soluções para os campos de velocidade e tensão de fluidos SMD.

A Fig. 4.12 apresenta o efeito da variação de  $U^*$  na morfologia das zonas rígidas de escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ , índice de *power-law* igual a 0.5 e  $J=10$ . Como pode ser visto, para valores baixos de  $U^*$ , as regiões rígidas (áreas negras nas figuras) são maiores, localizadas próximas à parede inferior – onde o fluido pode ser considerado praticamente estagnado – e dentro do vórtice localizado próximo à tampa da cavidade – onde o fluido escoava em movimento de corpo rígido. À medida que  $U^*$  aumenta, as zonas rígidas diminuem e tendem a desaparecer.



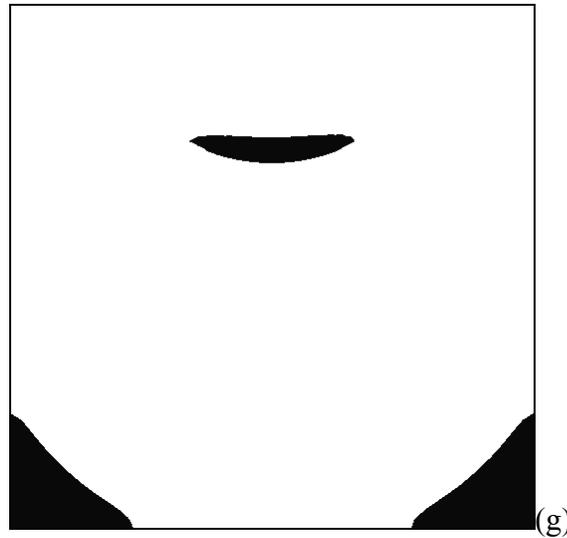
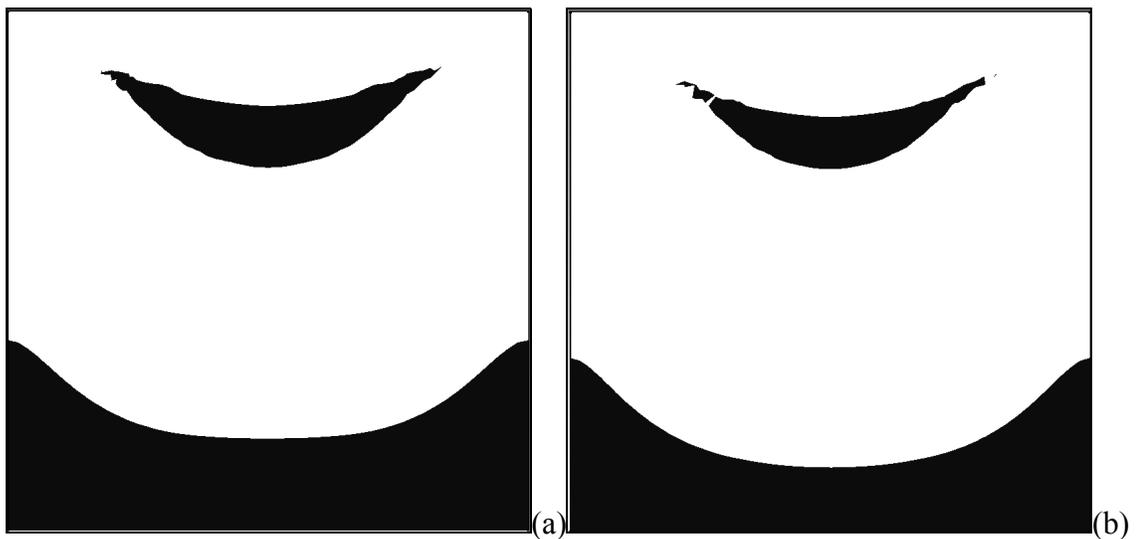


Figura 4.12 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.1$ ; (b)  $U^*=0.5$ ; (c)  $U^*=0.75$ ; (d)  $U^*=1.5$ ; (e)  $U^*=2$ , (f)  $U^*=5$ ; (g)  $U^*=10$ .

A Fig. 4.13 apresenta o efeito da variação de  $U^*$  na morfologia das zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=1$ , índice de *power-law* igual a 0.5 e  $J=10^4$ . De maneira análoga à figura anterior, as regiões rígidas diminuem de magnitude à medida que  $U^*$  aumenta, porém de uma forma mais tênue. Como o número de salto é maior, regiões do fluido com menores taxas de cisalhamento passam a escoar mesmo para vazões pequenas, como pode ser observado na comparando, por exemplo, as Fig. 4.12b e 4.13d.



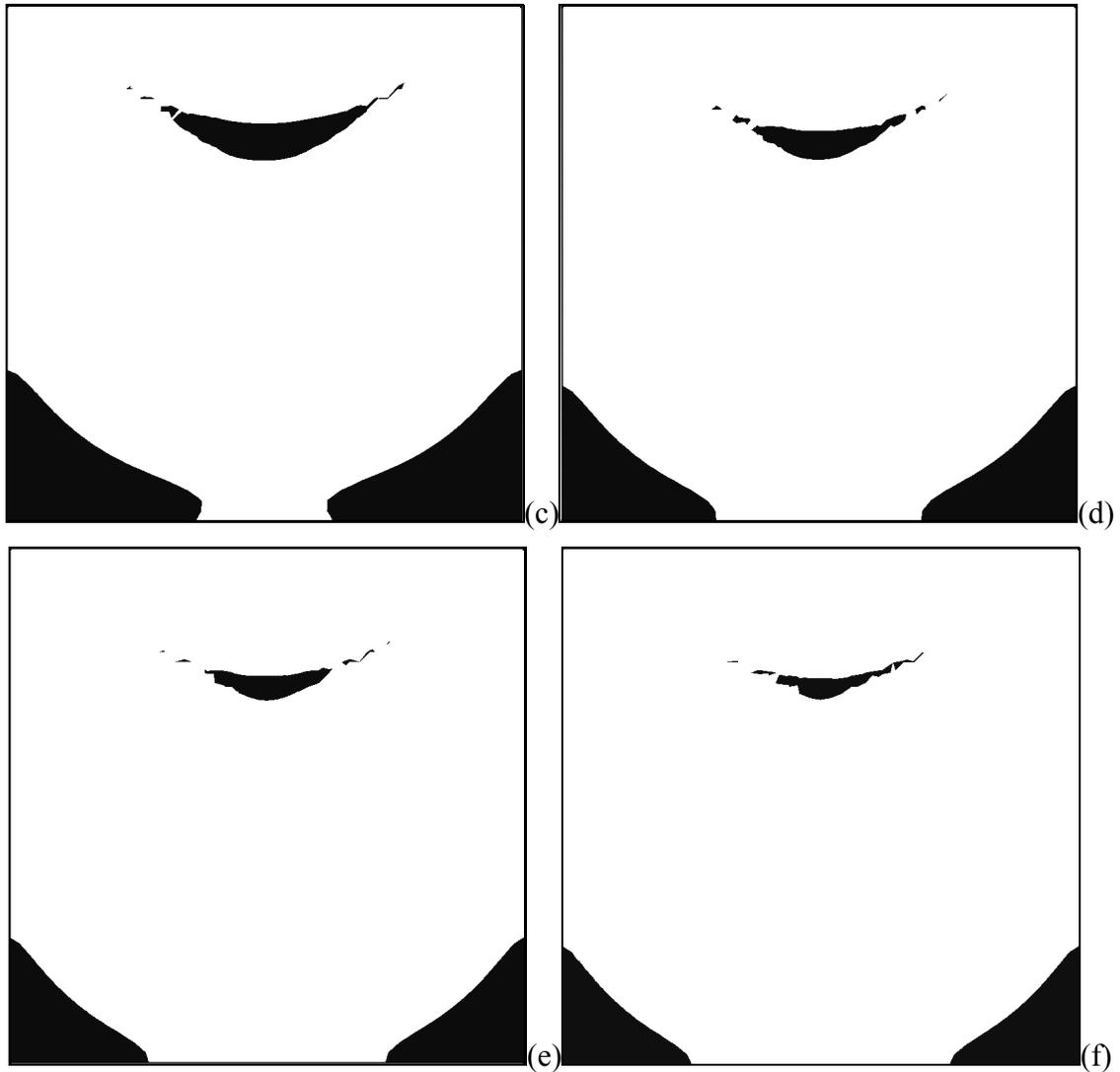
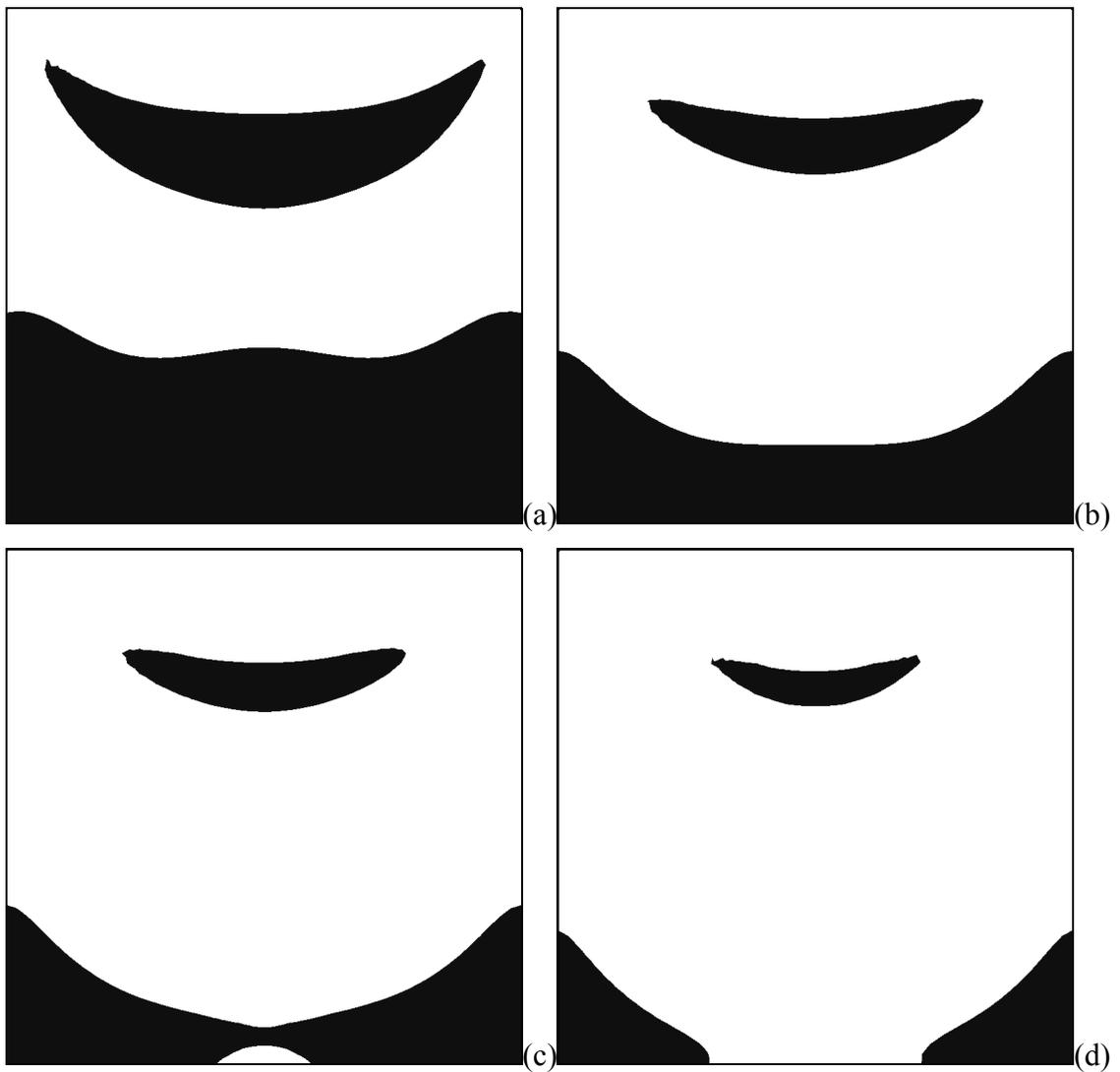


Figura 4.13 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.05$ ; (b)  $U^*=0.1$ ; (c)  $U^*=0.25$ ; (d)  $U^*=0.5$ ; (e)  $U^*=0.75$ ; (f)  $U^*=1.0$ .

Nas Fig. 4.14-4.16 é mostrada a influência no número de salto  $J$  na morfologia das zonas rígidas de escoamentos sem inércia. Nas três figuras,  $U^*$  foi mantido igual a 1.0 e  $Re_{RH}=0$  enquanto  $J$  foi variado entre 1 e  $10^6$ , com o índice de *power-law*  $n$  assumindo os valores de 0.5 (Fig. 4.14), 1.0 (Fig. 4.15) e 1.5 (Fig. 4.16). Observa-se que o tamanho das zonas rígidas decresce quando o número de salto  $J$  é aumentado, corroborando o comportamento descrito pelas curvas mostradas na *flow chart* do modelo SMD (Fig. 2.6), onde números de salto grandes possuem baixos valores para a taxa de deformação  $\dot{\gamma}_0$ , ou seja, diminuindo o limite de escoamento. Como observado nas Fig. 4.6 e Fig. 4.7, valores altos para  $J$  apresentam um serrilhado no

contorno das zonas rígidas, decorrente da existência de flutuações na taxa de deformação nestes locais. A Fig. 4.16 mostra que para fluidos viscoplásticos com índice de *power law* maior que 1.0, o efeito do número de salto  $J$  é atenuado pela dilatância do material, uma vez que o nível de tensões do fluido aumenta juntamente com a viscosidade.



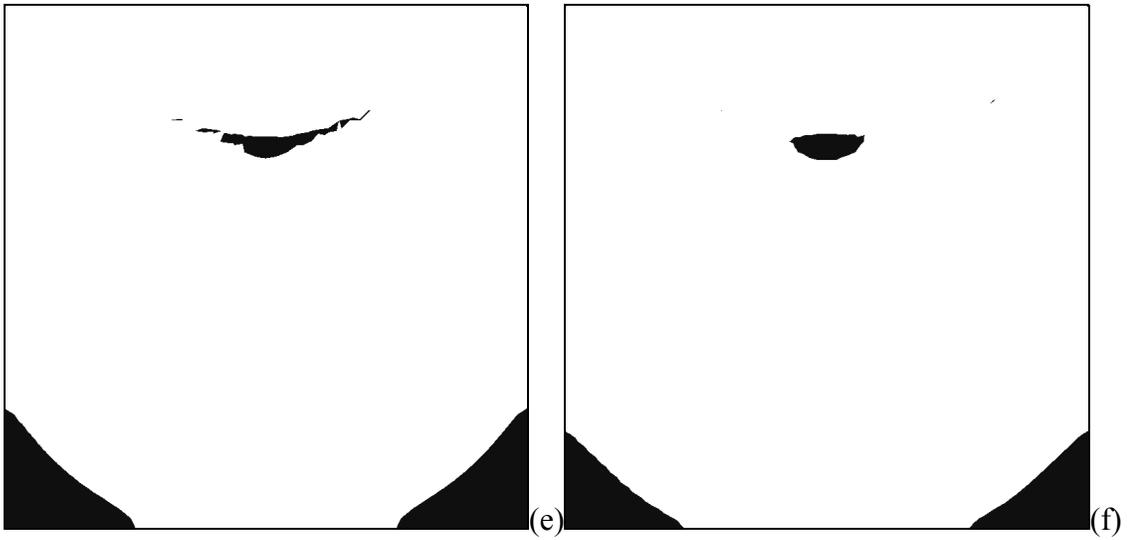
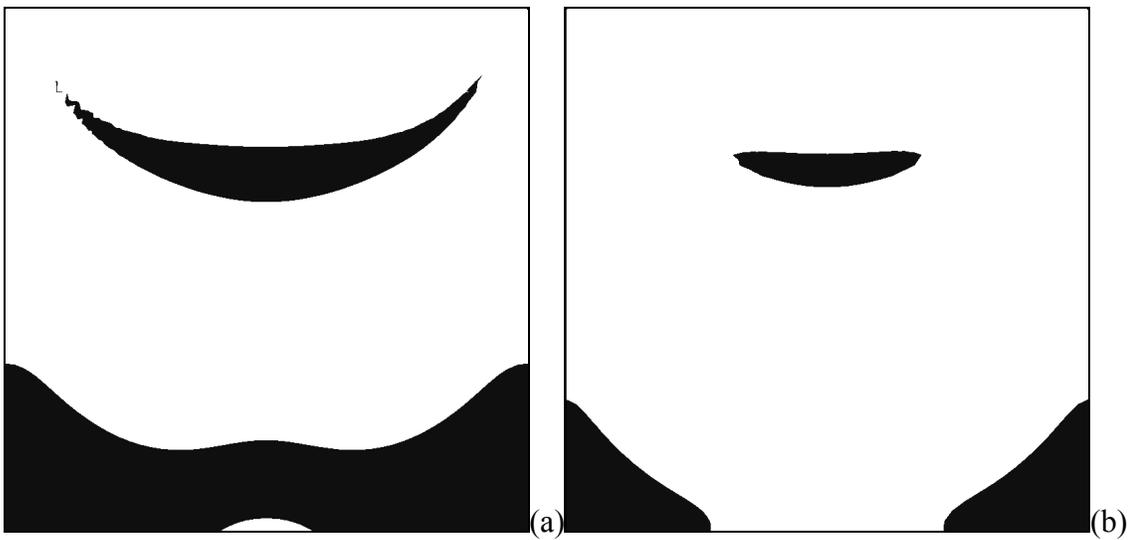


Figura 4.14 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=5$ ; (c)  $J=10$ , (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ .



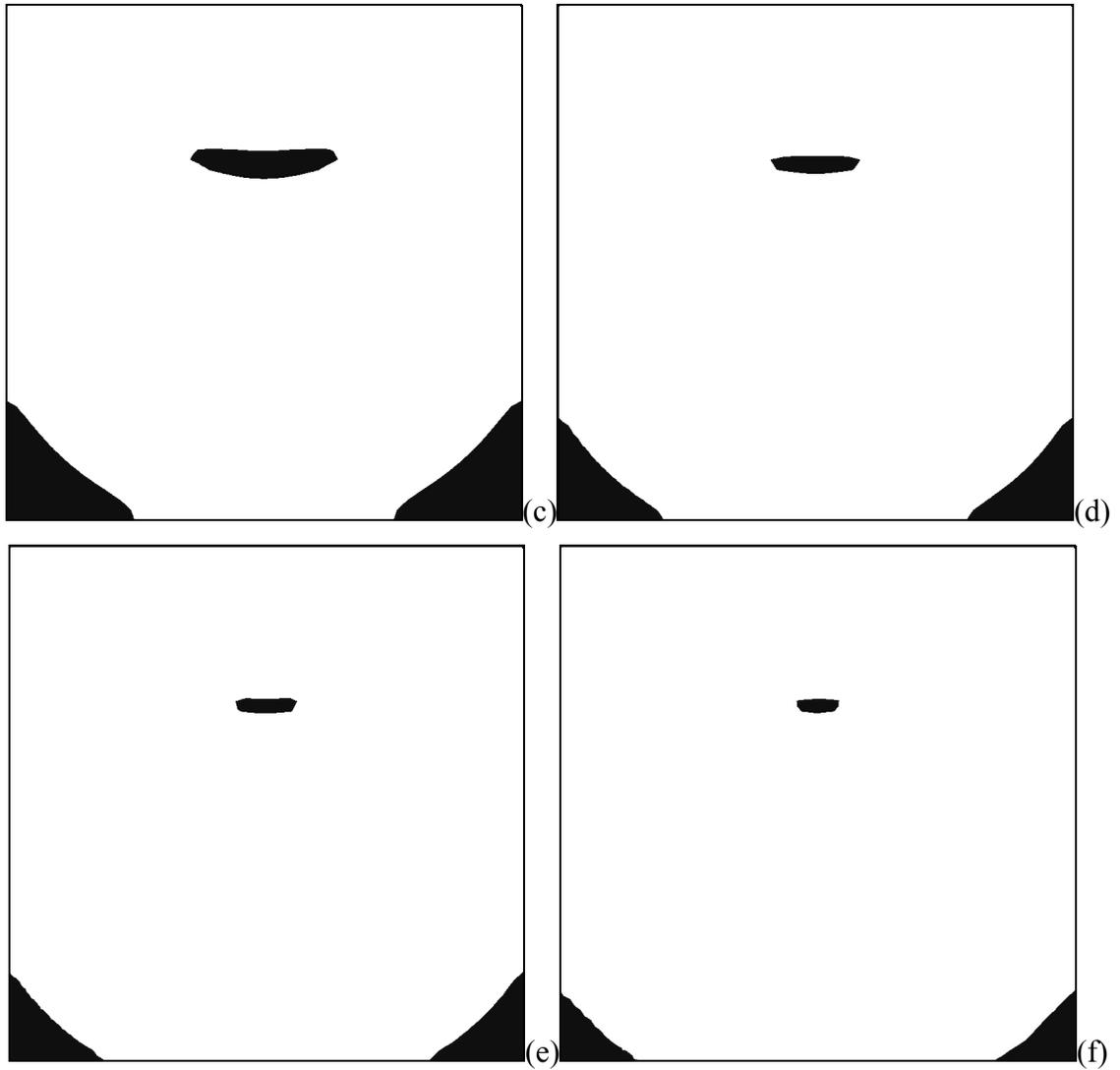


Figura 4.15 – Zonas ríidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=2.5$ ; (c)  $J=5$ ; (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ .

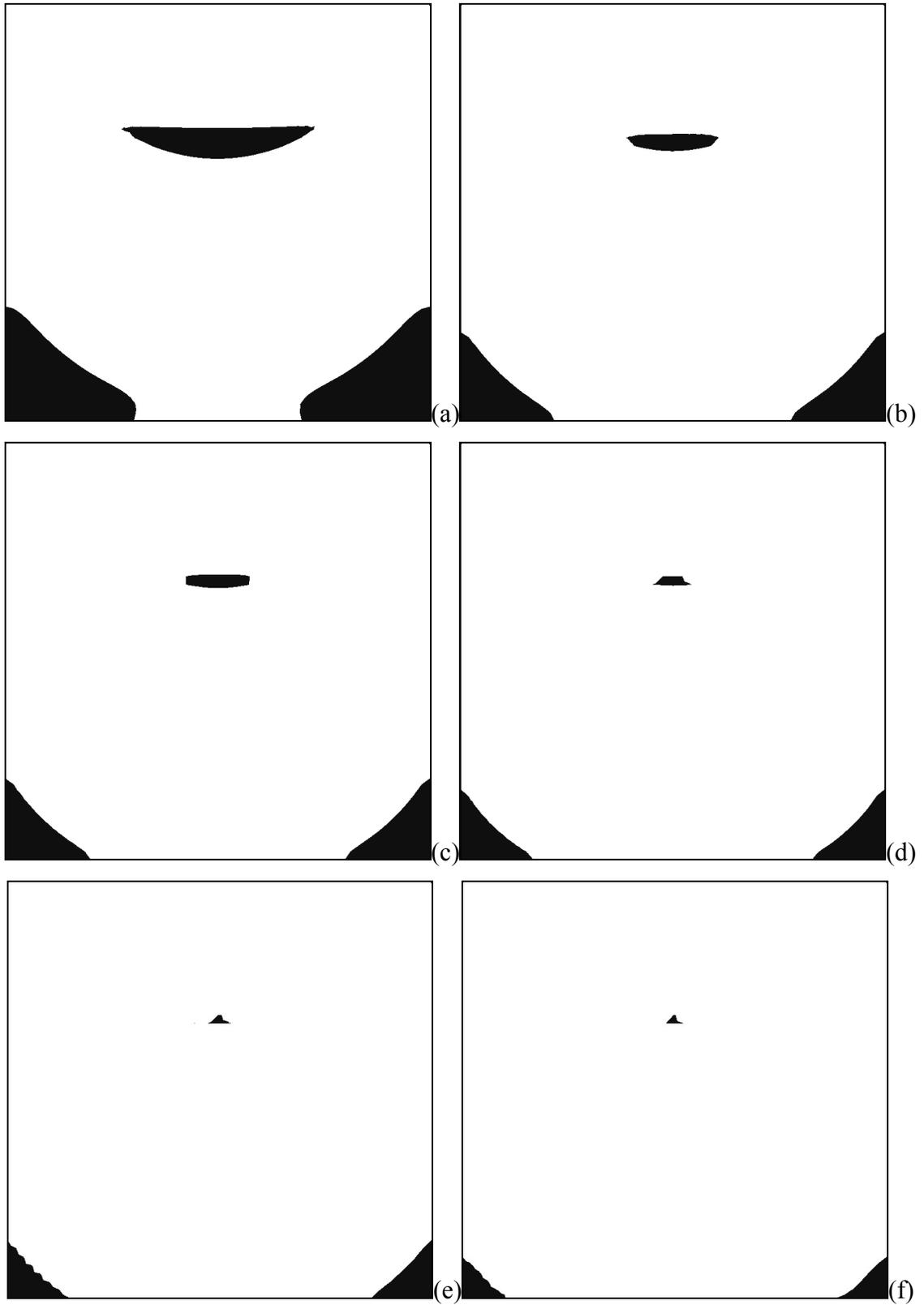
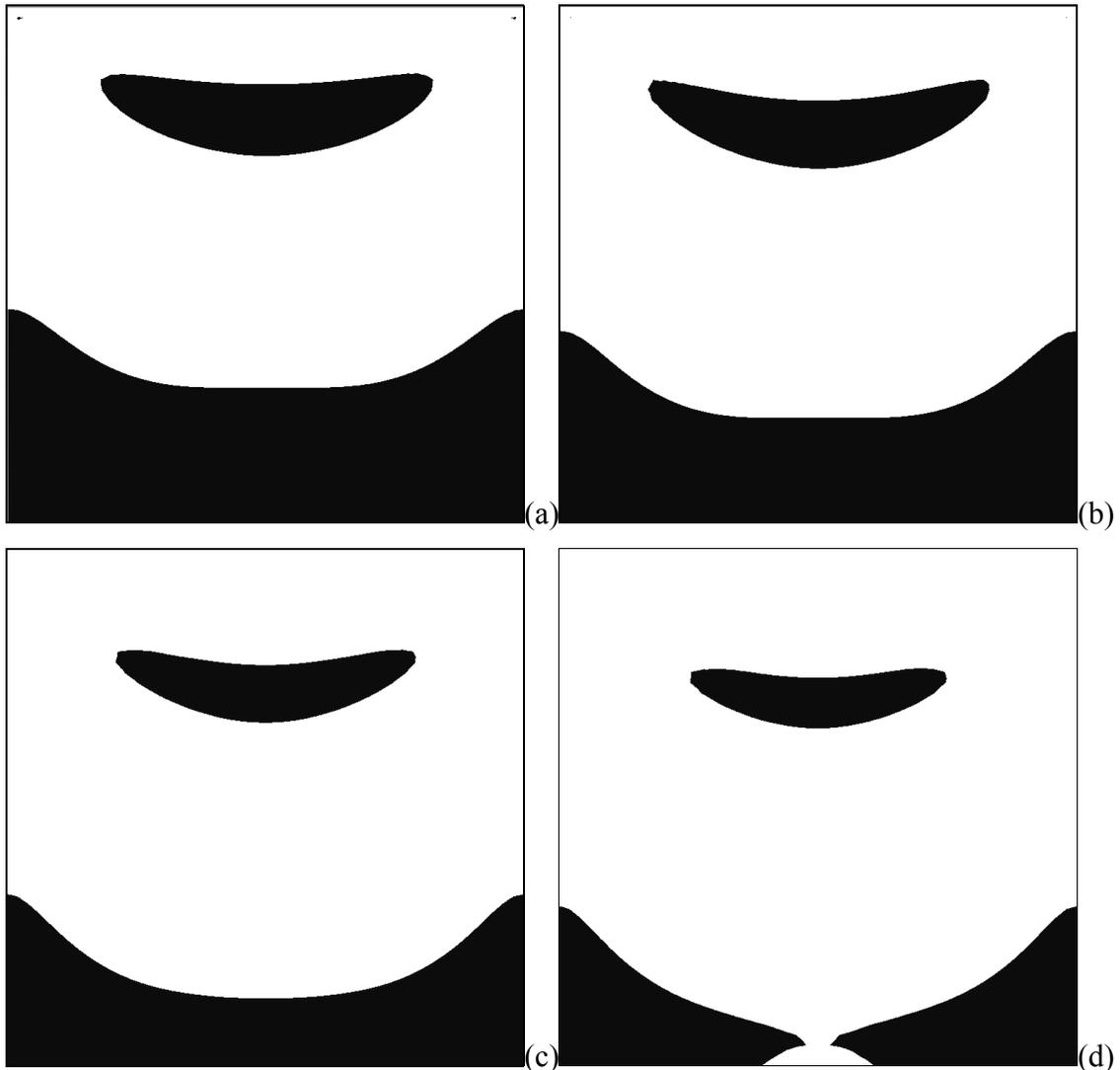


Figura 4.16 – Zonas ríidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $n=1.5$  e  $U^*=1$ : (a)  $J=1$ , (b)  $J=2.5$ ; (c)  $J=10$ , (d)  $J=10^2$ , (e)  $J=10^4$ ; (f)  $J=10^6$ .

O efeito do índice de *power-law*  $n$  é avaliado com mais detalhe nas Fig. 4.17 e Fig. 4.19 para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$ ,  $U^*=1.0$  e na Fig.4.18 para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $U^*=1.0$ . Este parâmetro, como citado anteriormente, controla o comportamento da viscosidade determinando a inclinação da curva da viscosidade no gráfico log-log da viscosidade versus a taxa de deformação (Fig. 2.5). Para os dois conjuntos de casos simulados, o índice de *power-law* foi variado entre 0.2 e 1.4. Na Fig. 4.17, quando do aumento de  $n$ , observa-se um decréscimo da zonas rígida junto à parede inferior da cavidade até um valor próximo a  $n=0.8$ , quando esta divide-se em duas porções, restringindo-se às quinas inferiores, onde também decrescem. A zona rígida situada no interior do vórtice central decresce monotonicamente. Na Fig. 4.18, o mesmo comportamento é observado, entretanto o valor crítico para o colapso da zona rígida na parede inferior da cavidade é próximo a  $n=0.2$ .



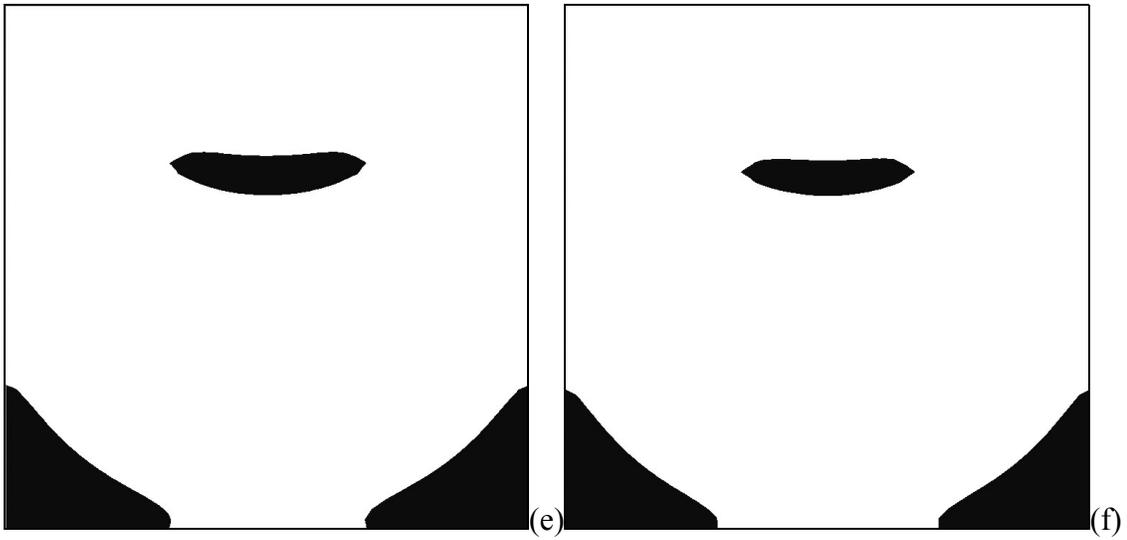
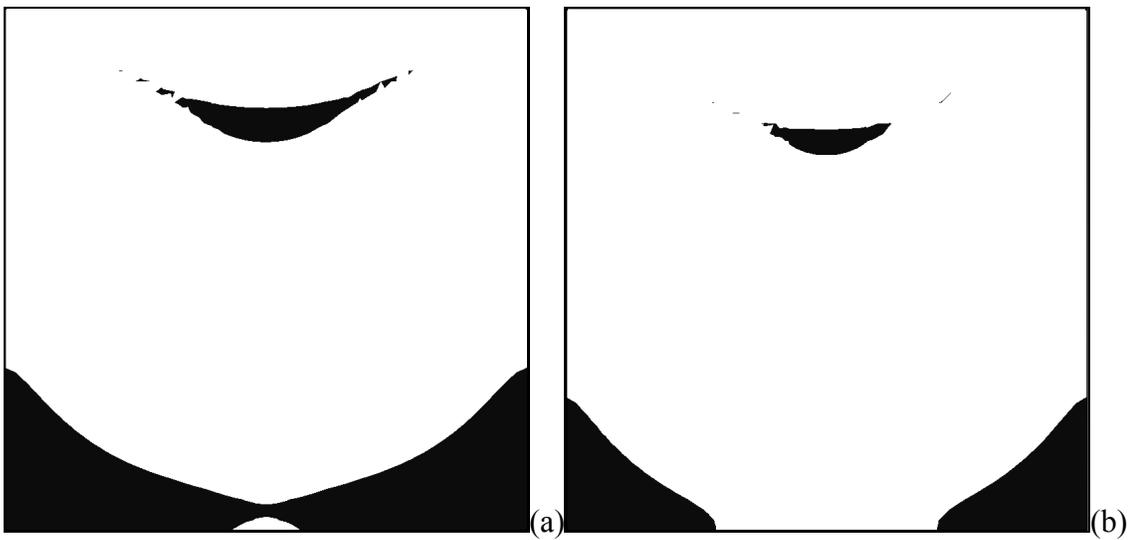


Figura 4.17 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $n=0.2$ ; (b)  $n=0.35$ ; (c)  $n=0.6$ ; (d)  $n=0.8$ ; (e)  $n=1.2$ , (f)  $n=1.4$ .



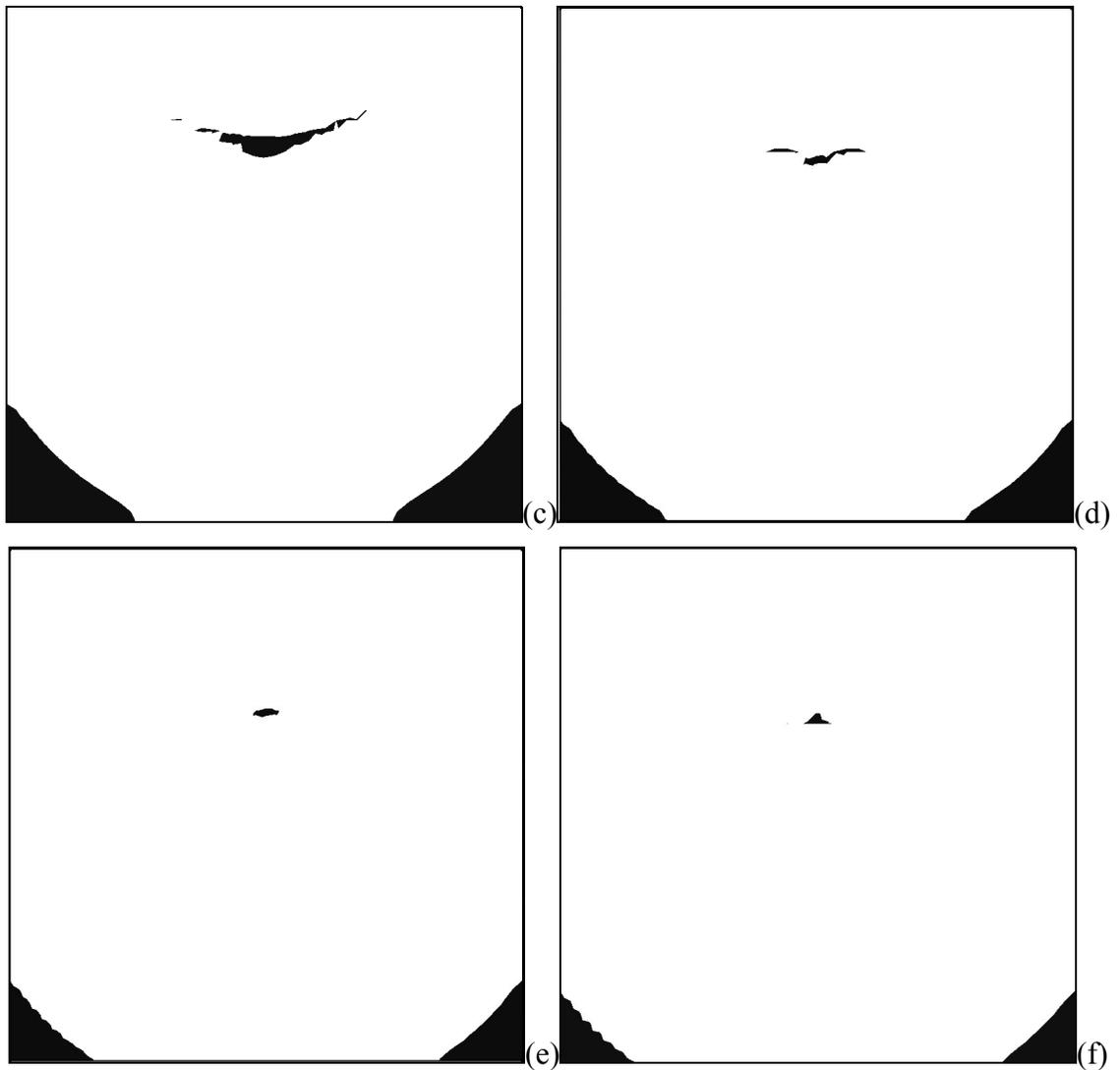


Figura 4.18 – Zonas rígidas para escoamentos sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$  e  $U^*=1.0$ : (a)  $n=0.2$ ; (b)  $n=0.35$ ; (c)  $n=0.5$ ; (d)  $n=0.8$ ; (e)  $n=1.2$ ; (f)  $n=1.4$ .

Como pode ser observado na Fig. 4.19, o aumento do índice de *power-law* provoca um aumento no nível das tensões internas do fluido, afastando os perfis do módulo da tensão-extra da tensão limite de escoamento,  $\tau_0$ , e, conseqüentemente, determinando a diminuição das zonas rígidas.

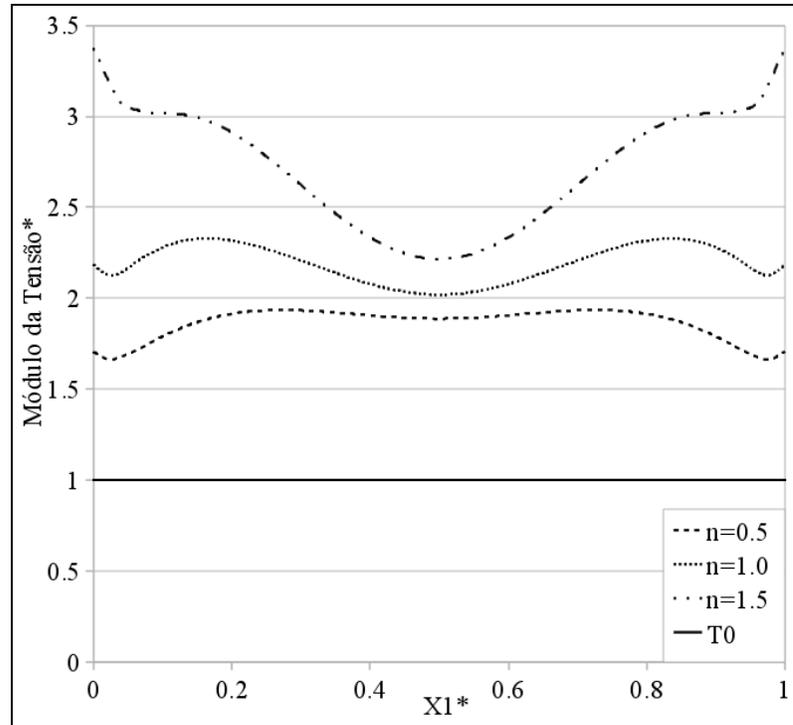
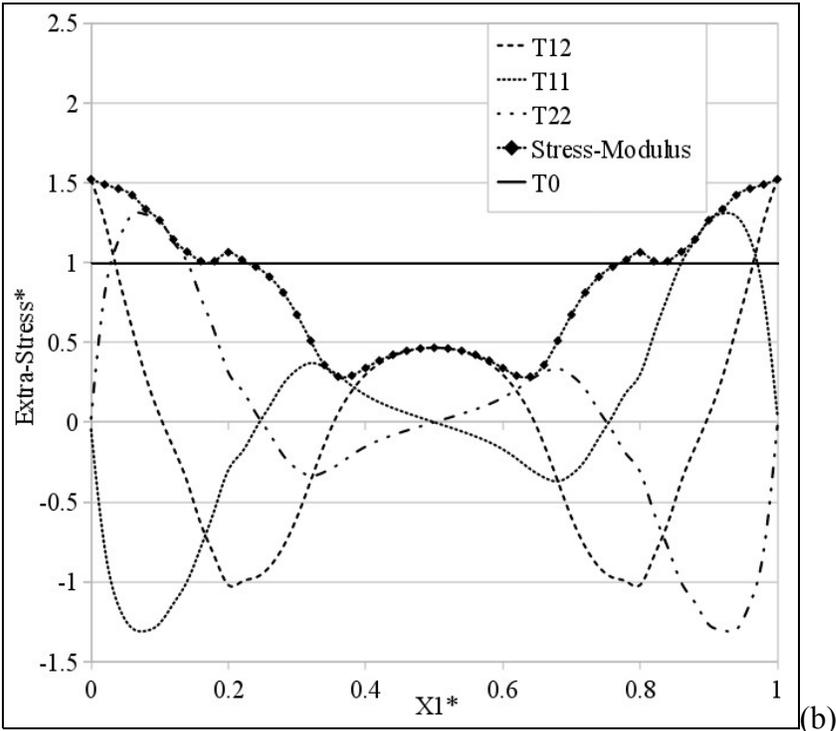
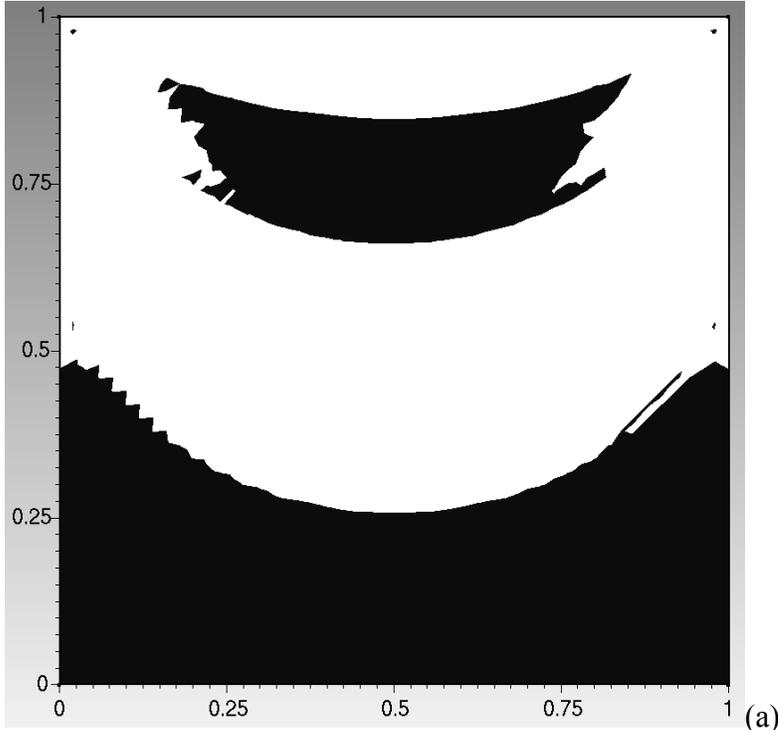


Figura 4.19 – Perfis do módulo da tensão-extra em  $x_2^*=0.5$  para escoamentos sem inércia, com  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10$ ,  $U^*=1.0$ ;  $n=0.5$ , 1.0 e 1.5.

A Fig. 4.20(a) mostra as zonas rígidas para o escoamento sem inércia de fluido SMD com  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$ , utilizando para a determinação das zonas rígidas o critério de  $|\tau| > \tau_0$ . Este caso é mostrado também na Fig. 4.13(b) empregando o critério proposto nesta Dissertação. Nas Fig. 4.20(b) e Fig. 4.20(c) são mostrados os perfis das tensões normais, cisalhante e o módulo da tensão-extra para as posições  $x_2^*=0.78$  e  $x_2^*=0.90$ , respectivamente. Como o escoamento é simétrico, as curvas do módulo da tensão-extra e da tensão cisalhante são simétricas em relação à posição  $x_1^*=0.5$ . Já as curvas para as tensões normais  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$  são inversas entre si, uma vez que para escoamentos inelásticos,  $\tau_{11}=-\tau_{22}$ ; este fator, somado ao caráter simétrico do problema, faz com que os perfis de  $\tau_{11}$  entre  $x_1^*=0$  e 0.5 e de  $\tau_{22}$  entre  $x_1^*=0.5$  e 1.0 sejam simétricos em relação à  $x_1^*=0.5$  e vice-versa.



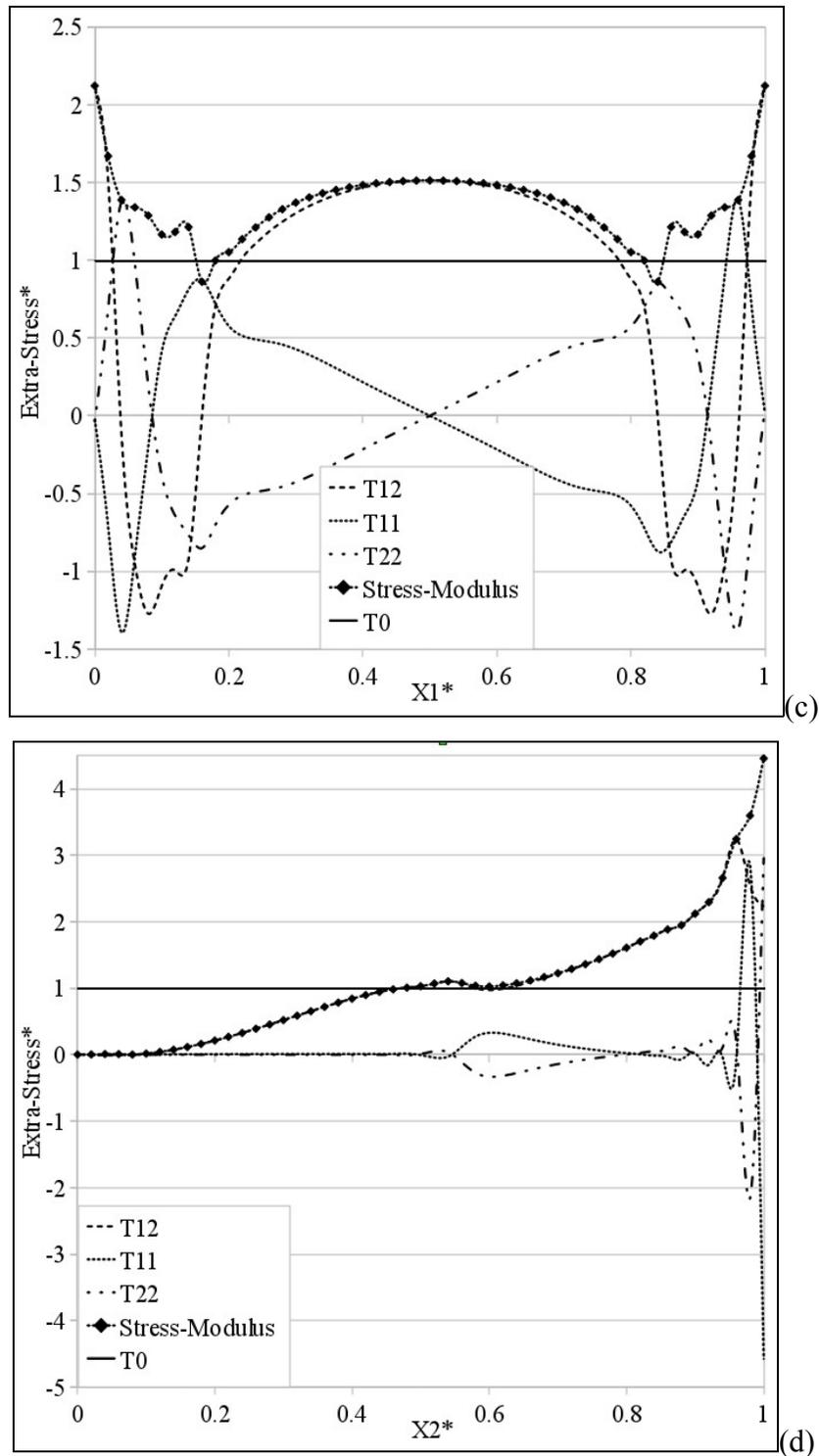
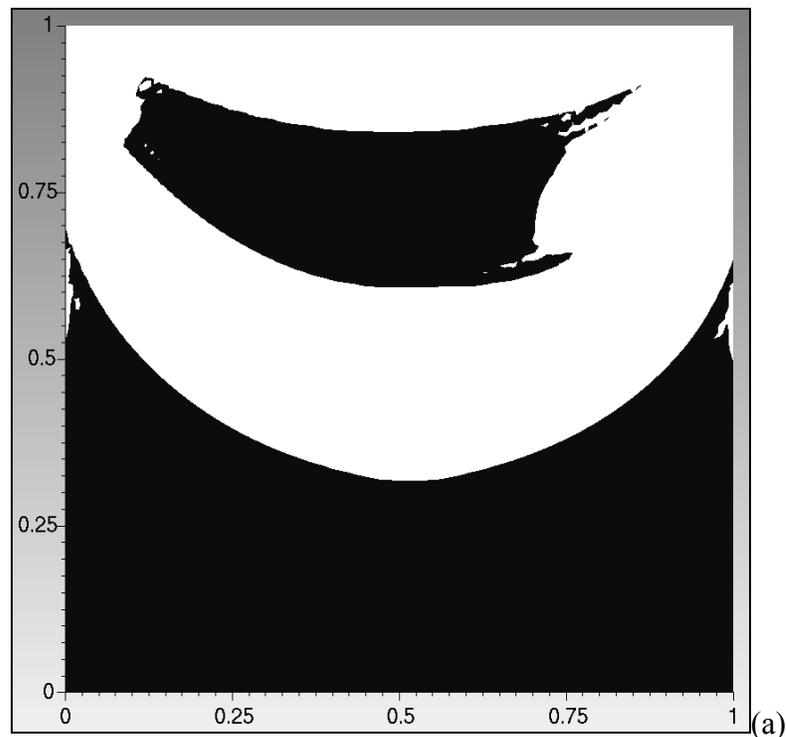


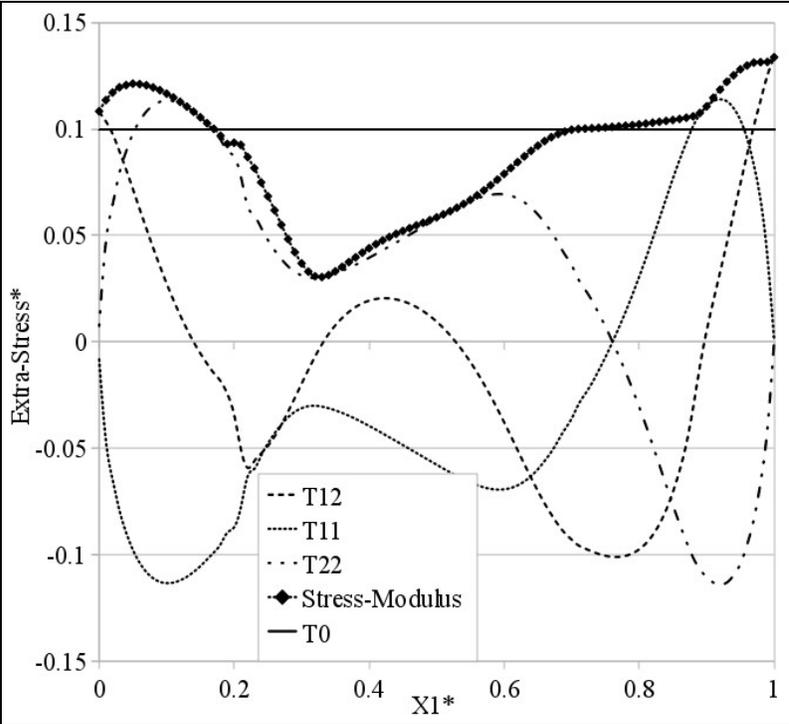
Figura 4.20 – Escoamento de fluido SMD sem inércia,  $Re_{RH}=0$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$ :

(a) Zonas rígidas através do critério de  $|\tau| > \tau_0$  ; (b) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.78$ ; (c) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.90$ ; (d) perfis de tensão-extra em  $x_1^*=1.0$ .

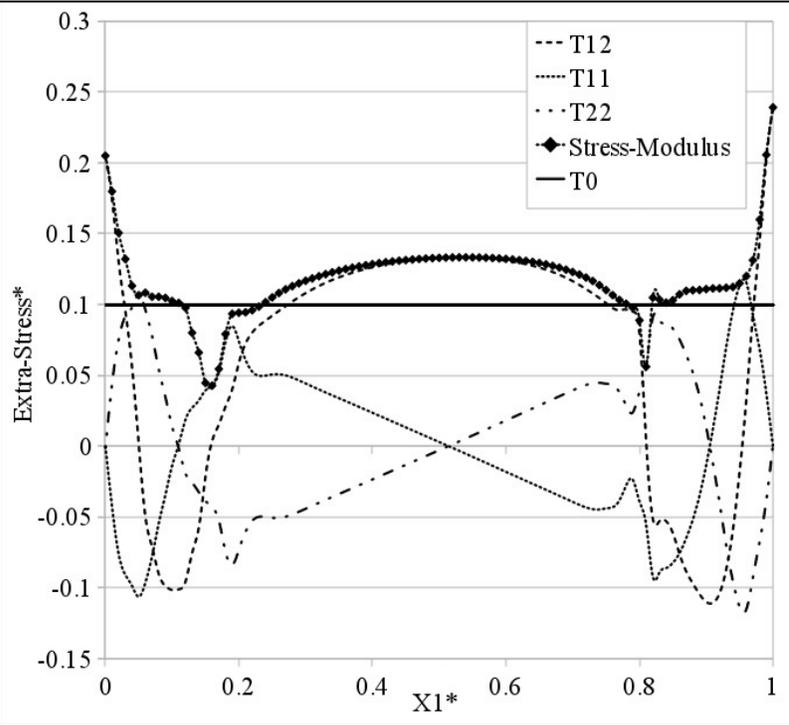
Há coerência quando comparadas as posições  $x_1^*$  nas quais ocorrem as intersecções das curvas do módulo da tensão e a tensão limite de escoamento nas Fig. 4.20(b) e Fig. 4.20(c) e a morfologia da zonas rígidas da Fig. 4.20(a). Pode-se fazer a mesma análise para a Fig. 4.20(d), que mostra os perfis de tensão-extra junto à parede direita da cavidade  $-x_1^*=1.0$ .

A Fig. 4.21(a) mostra as zonas rígidas para o escoamento com inércia de fluido SMD com  $Re_{RH}=1000$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=0.1$ , utilizando para a determinação das zonas rígidas o critério de  $|\tau| > \tau_0$ . Nas Fig. 4.21(b) e Fig. 4.21(c) são mostrados os perfis das tensões normais, cisalhante e o módulo da tensão-extra para as posições  $x_2^*=0.74$  e  $x_2^*=0.88$ , respectivamente. Como o escoamento não é simétrico devido à influência da inércia, não há simetria nos perfis de tensão-extra. As curvas para as tensões normais  $\tau_{11}$  e  $\tau_{22}$ , da mesma maneira que para o caso sem inércia, são inversas entre si. Novamente, há coerência quando comparadas as posições  $x_1^*$  nas quais ocorrem as intersecções das curvas do módulo da tensão e a tensão limite de escoamento nas Fig. 4.21(b) e Fig. 4.21(c) e a morfologia da zonas rígidas da Fig. 4.21(a). Pode-se fazer a mesma análise para a Fig. 4.21(e), que mostra os perfis de tensão-extra junto à parede direita da cavidade  $-x_1^*=1.0$ , captando inclusive a descontinuidade na zona rígida presente entre  $x_2^*=0.5$  e  $0.65$ .





(b)



(c)

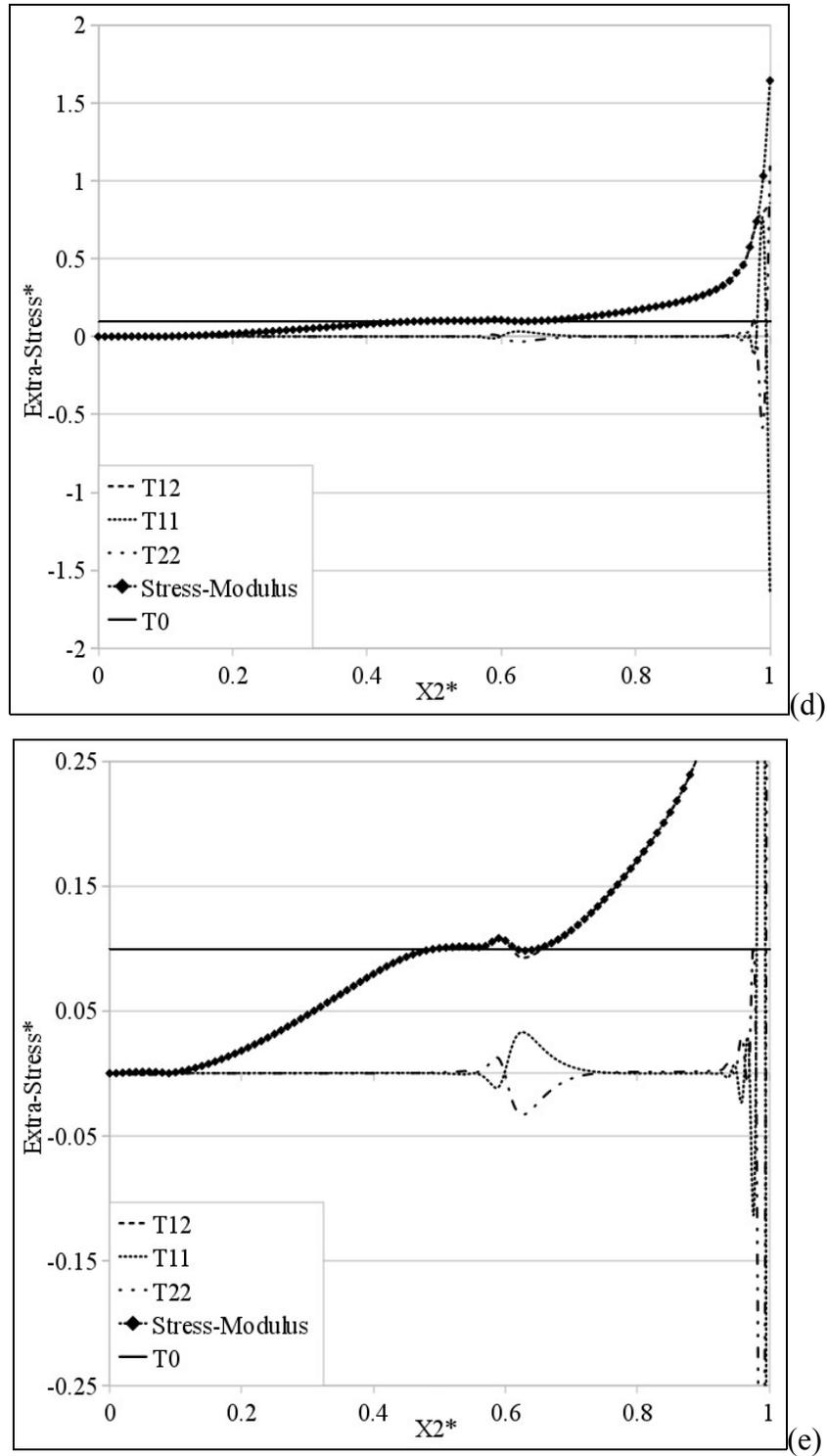
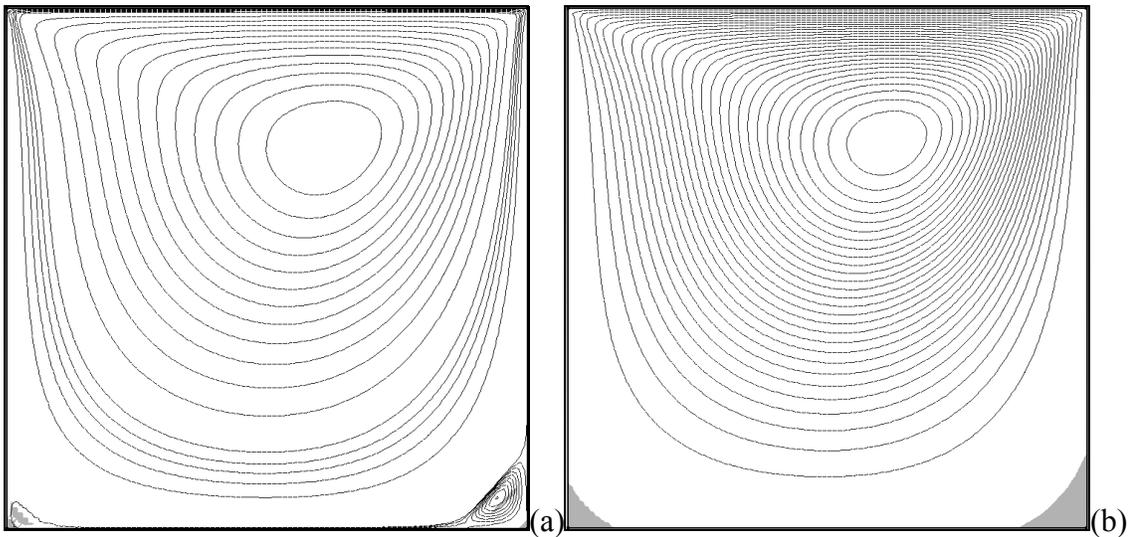


Figura 4.21 – Escoamento de fluido SMD com inércia,  $Re_{RH}=1000$ ,  $J=10^4$ ,  $n=1.0$  e  $U^*=0.1$ :  
 (a) Zonas rígidas através do critério de  $|\tau| > \tau_0$  ; (b) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.74$ ; (c) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=0.88$ ; (d) perfis de tensão-extra em  $x_2^*=1.0$ , (e) detalhe dos perfis de tensão-extra em  $x_2^*=1.0$ .

Na Fig. 4.22 são apresentadas as linhas de corrente e a morfologia das zonas rígidas para os escoamentos simulados a fim de realizar a comparação mostrada na Fig. 4.11. Uma vez que havia a necessidade de manter a relação entre  $\eta_0$  e  $\tau_0$  fixa de tal modo que a regularização do modelo SMD fosse equivalente àquela empregada por Neofytou, 2005, o número de salto  $J$  foi variado – entre 99 e 9999 – juntamente com a vazão adimensional  $U^*$  – entre 0.1 e 10. Assim, o efeito conjunto da variação simultânea destes dois parâmetros está presente na cinemática dos escoamentos.

Assim, para avaliar a influência da vazão adimensional  $U^*$  de maneira isolada na dinâmica do escoamento de fluidos SMD com inércia, realizaram-se as simulações cujos resultados são apresentados na Fig. 4.23. Pode-se observar o desaparecimento da zona rígida próxima ao olho do vórtice principal bem como a ruptura e sub-sequente diminuição da zona rígida da parede inferior da cavidade, dado o aumento da quantidade de *momentum* no interior da geometria com o aumento da vazão adimensional. As linhas de corrente evidenciam o deslocamento do olho do vórtice da linha de simetria para a direção positiva do eixo  $x_1$ .



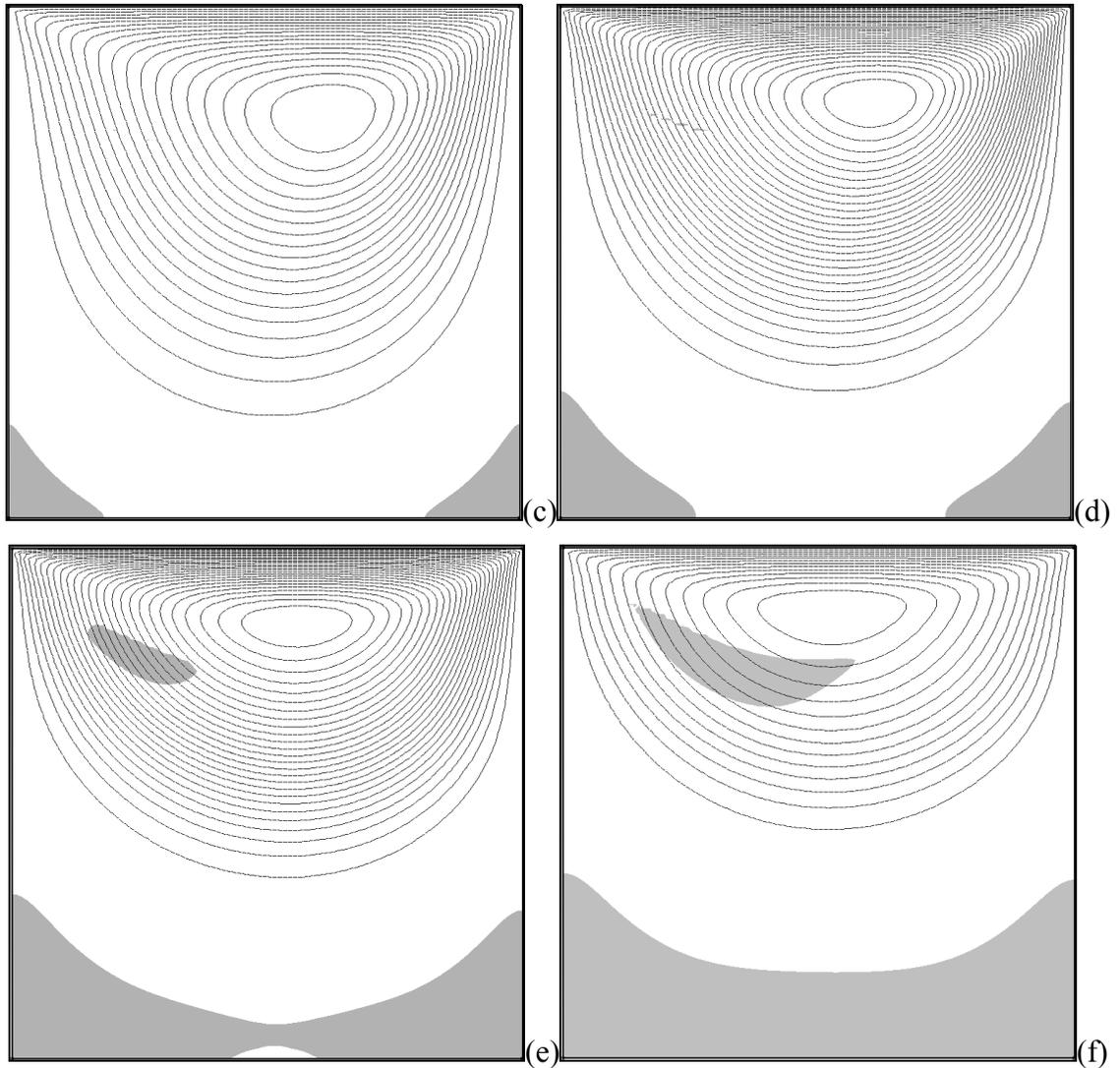


Figura 4.22 – Linhas de corrente e zonas rígidas para escoamentos com inércia para  $Re_{RH}=9999$  e  $n=1.0$ : (a)  $J=99$  e  $U^*=10$ ; (b)  $J=999$  e  $U^*=1$ ; (c)  $J=1999$  e  $U^*=0.5$ ; (d)  $J=2999$  e  $U^*=0.333$ ; (e)  $J=4999$  e  $U^*=0.2$ ; (f)  $J=9999$  e  $U^*=0.1$ .

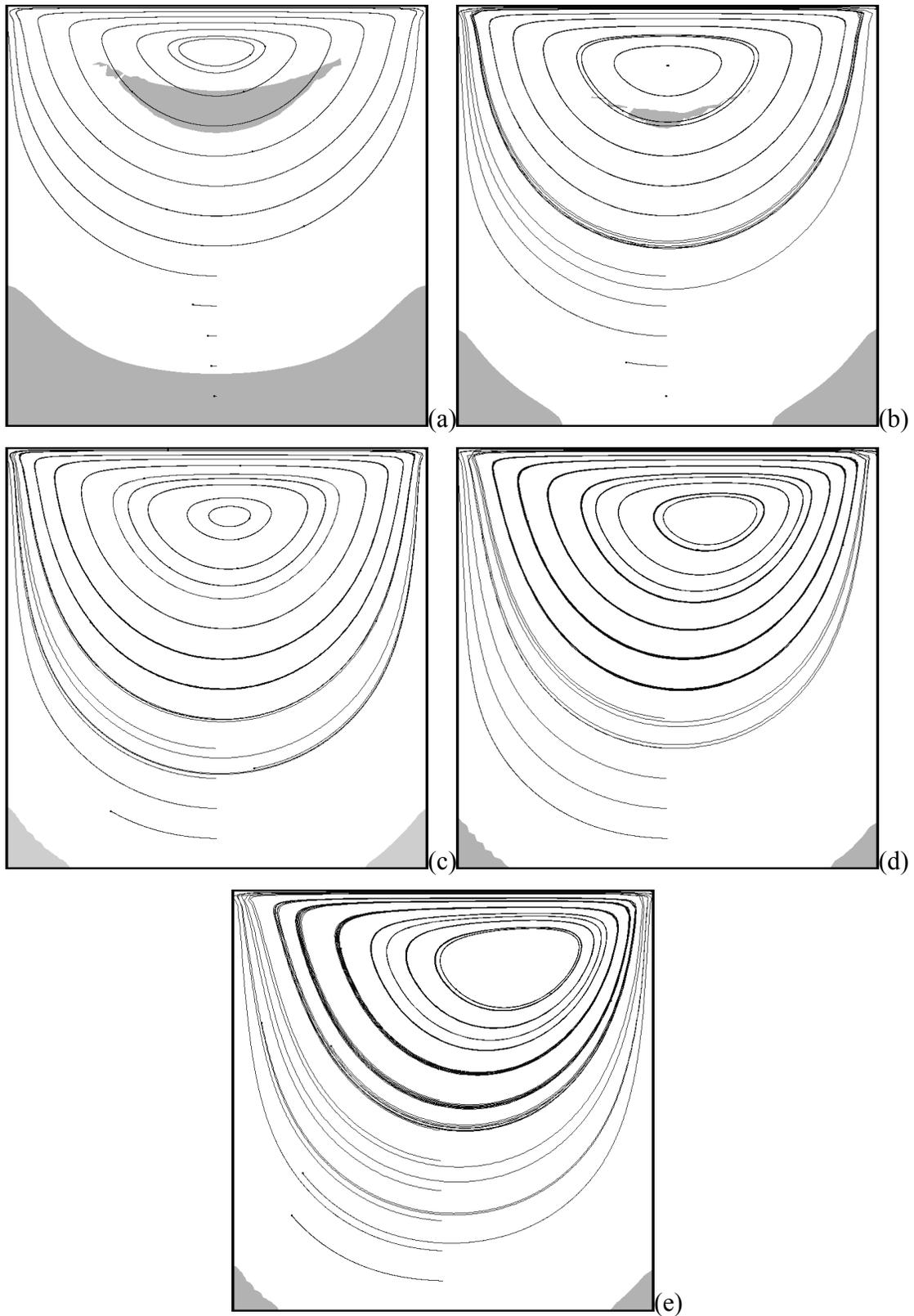


Figura 4.23 – Linhas de corrente e zonas rígidas para escoamentos com inércia para  $Re_{RH}=1.0$ ,  $J=10^4$  e  $n=0.5$ : (a)  $U^*=0.1$ ; (b) e  $U^*=1.0$ ; (c)  $U^*=5.0$ ; (d)  $U^*=10.0$ ; (e)  $U^*=15.0$ .

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Nesta Dissertação, objetivou-se realizar a modelagem mecânica e simulação através de um método multi-campos de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) de escoamentos de fluidos viscoplásticos SMD em uma cavidade forçada.

O Capítulo 1 inicia apresentando uma motivação para o estudo do escoamento de fluidos não-Newtonianos, especificamente de materiais que apresentam uma tensão limite de escoamento. A complexidade de uma correta modelagem do comportamento reológico desses materiais fez com diversos modelos fossem propostos ao longo dos anos, dentre eles, o modelo SMD. As simulações apresentadas nesta Dissertação foram realizadas a partir de um método de Galerkin mínimos-quadrados, uma alternativa ao método clássico de Galerkin que permite que as aproximações das diferentes variáveis do problema sejam de igual ordem, uma vez que não há necessidade de satisfazer as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de elementos finitos. Apresentou-se também os principais trabalhos realizados atualmente através de uma revisão de artigos de interesse sobre a aproximação numérica de escoamentos de fluidos viscoplásticos.

O Capítulo 2 introduz as equações de conservação de massa e de *momentum* nas quais se baseia o modelo mecânico utilizado nesta Dissertação. É definido o modelo de fluido Newtoniano generalizado (GNL), onde a viscosidade Newtoniana é generalizada de modo a permitir que a viscosidade do fluido passe a depender da taxa de cisalhamento. A seguir, há uma breve revisão dos modelos de viscoplasticidade mais empregados na literatura, como Bingham, Herschel-Bulkley, Carreau, Bingham e Herschel-Bulkley regularizados por Papanastasiou e bi-viscosidade. Por fim, o modelo SMD proposto por Souza Mendes e Dutra – utilizado nas simulações desta Dissertação – é apresentado, explicitando suas características.

O Capítulo 3 aborda detalhadamente a aproximação numérica do modelo mecânico introduzido no Capítulo 2, realizada através de um método de Galerkin mínimos quadrados (GLS). A partir da definição dos subespaços de elementos finitos para tensão-extra, velocidade e pressão, introduz-se a formulação de Galerkin clássica, onde através da adição de termos estabilizadores malha-dependentes, obtemos a formulação GLS. Uma vez que estes termos são adicionados em forma residual, a solução exata do problema também os satisfaz, preservando a consistência do método.

A análise dos resultados numéricos obtidos nesta Dissertação a partir das simulações realizadas é apresentado no Capítulo 4. Primeiramente, a capacidade do modelo SMD reproduzir o modelo de Bingham foi avaliada para a cavidade forçada, encontrando boa concordância com os resultados encontrados na literatura, tanto para perfis de velocidade  $u_1$  e  $u_2$ , como para a posição do olho do vórtice principal para os casos sem inércia e com inércia. Em seguida, é apresentada uma nova metodologia para a determinação das zonas de alta viscosidade – chamadas simplesmente de zonas rígidas nesta Dissertação – baseada no critério de uma taxa de deformação mínima para o escoamento. Na terceira parte, são realizadas simulações numéricas a fim de verificar a sensibilidade da dinâmica de escoamentos de fluidos SMD à variação de parâmetros como o número de salto  $J$ , o índice de *power-law*  $n$  e a vazão adimensional  $U^*$ . Todos os resultados mostraram-se coerentes e fisicamente realistas, mostrando mais uma vez a credibilidade do código de elementos finitos empregado para estas simulações – NNFEM, em desenvolvimento no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Aplicada e Computacional do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

## 5.1 Comentários Finais

- A formulação multi-campos de elementos finitos baseada no método de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) mostrou-se bastante estável na aproximação de escoamentos de fluidos não-Newtonianos viscoplásticos. A metodologia GLS permite o emprego da mesma interpolação de baixa ordem – elemento quadrangular bi-linear – para a aproximação dos campos de tensão-extra, velocidade e pressão, violando as condições de compatibilidade entre os sub-espacos de tensão-extra-velocidade e velocidade-pressão – condição de Babuška-Brezzi. Outro ponto de destaque é a extensão natural para casos tridimensionais, uma vez que não necessita satisfazer novas condições de compatibilidade – no método de Galerkin clássico, uma combinação específica de elementos para problemas bidimensionais não necessariamente satisfaz as condições para problemas tridimensionais.
- Pode-se verificar uma forte influência da vazão adimensional  $U^*$  na diminuição das zonas rígidas no escoamento de fluidos viscoplásticos, onde a atuação deste número adimensional é mais efetiva para número de salto  $J$  da ordem de  $10^1$  e mais tênue para  $J$

da ordem de  $10^4$ .

- Analisando-se a influência do próprio número de salto  $J$  para os três índices de *power-law*  $n$  simulados (0.5, 1.0 e 1.5), observa-se a diminuição das regiões rígidas do escoamento com o crescimento de  $J$ , uma vez que diminui o valor da taxa de cisalhamento limite de escoamento, propiciando regiões do fluido com baixas taxas de cisalhamento passem a escoar. Verificou-se que para  $n=1.5$ , a diminuição das regiões rígidas com aumento de  $J$  é mais tênue.
- Para um mesmo número de salto  $J$ , o aumento do índice de *power-law*  $n$  acarreta uma diminuição das regiões rígidas, uma vez que este parâmetro eleva o nível de tensões ao qual o material é submetido. Da mesma forma que para a vazão adimensional  $U^*$ , a atuação do índice  $n$  é mais efetiva para número de salto  $J$  da ordem de  $10^1$  e mais tênue para  $J$  da ordem de  $10^4$ .
- O emprego dos parâmetros adimensionais introduzidos nesta Dissertação justifica-se pois, para uma geometria fixa, o número de Reynolds  $Re_{RH}$  e o número de salto  $J$  dependem apenas das propriedades reológicas do fluido, enquanto outros parâmetros encontrados na literatura como o número de  $Bn$ ,  $HB$  e  $Re_{PL}$  dependem simultaneamente das propriedades do fluido e do escoamento. Assim, os efeitos cinemáticos são introduzidos apenas pelo adimensional  $U^*$ .

## 5.2 Perspectivas Futuras

Complementando os aspectos abordados nesta Dissertação, visando a continuidade dos estudos na área de fluidos não-Newtonianos, cita-se os itens a seguir como perspectivas de futuros trabalhos:

- Influência da razão de aspecto na morfologia das zonas rígidas e na dinâmica do escoamento em cavidades forçadas, como mostrado na Fig. 5.1.

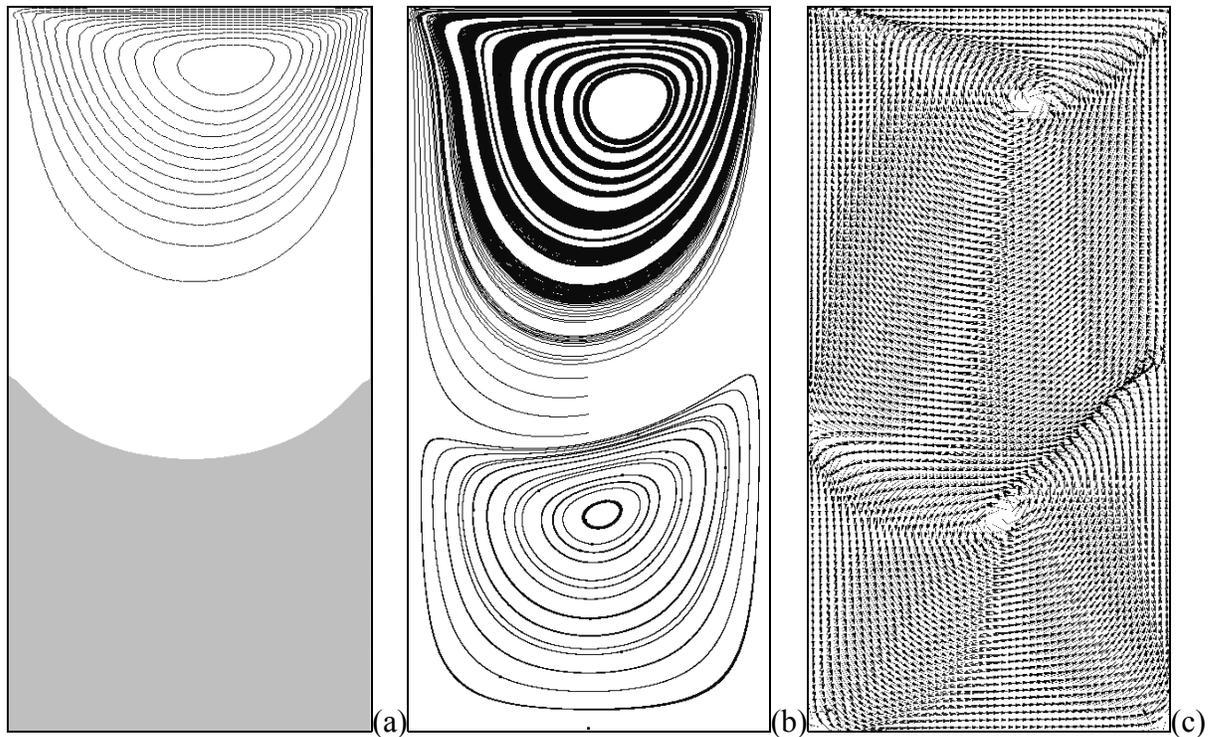


Figura 5.1 – Cavity forçada com razão de aspecto 2:1, casos com inércia. (a) Zonas rígidas e linhas de corrente para fluido SMD com  $Re_{RH}=1.41$ ,  $J=10^4$ ,  $n=0.5$  e  $U^*=5.0$ ; (b) Linhas de corrente para escoamento de fluido Newtoniano com  $Re=100$ ; (c) Vetores velocidade para escoamento de fluido Newtoniano com  $Re=100$ .

- Simulação de escoamentos tridimensionais através da extensão do método de Galerkin mínimos-quadrados apresentado nesta Dissertação para problemas no  $\mathcal{R}^3$ .
- Estudo e caracterização das zonas de escoamentos complexos.
- Consideração de efeitos tixotrópicos na dinâmica de escoamento de fluidos não-Newtonianos através da introdução de um parâmetro de estruturação que adiciona elasticidade ao modelo SMD dependente da taxa de cisalhamento, proposto em Souza Mendes, 2009.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdali, S.S., Mitsoulis, E., Markatos, N.C., 1992. "Entry and exit flows of Bingham fluids", **Journal of Rheology**, vol 36(2), pp. 389-407.

Alexandrou, A. N., McGilvrey, T. M., and Burgos, G., 2001. "Steady Herschel-Bulkley fluid in tree-dimensional expansions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 100, pp. 77-96.

Ancey , Chochard, 2008. "The dam-break problem for Herschel–Bulkley viscoplastic fluids down steep flumes", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 158, pp. 18-35.

Astarita G., Marrucci G., 1974. "**Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics**" McGraw-Hill, London.

Babuška, I., 1973. "The finite element method with lagrangian multipliers", **Numer. Math.**, vol. 20, pp. 179-192.

Balmforth, N. J., Forterre Y., Pouliquen O., 2008. "The viscoplastic Stokes layer", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol 158, pp.43-56.

Behr, A. M., Franca, L. P., Tezduyar, T. E., 1993. "Stabilized finite element methods for the velocity – pressure – stress formulation of incompressible flows", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 104, pp. 31-48.

Bird, R.B, Armstrong, R.C., Hassager, O., 1987. "**Dynamics of Polymeric Liquids**", vol. 1, John Wiley & Sons, USA

Brezzi, F., 1974. "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", **RAIRO Ser. Rouge** 8, pp. 129-151.

Burgos, G. R., Alexandrou, A. N., 1999. "Flow development of Herschel–Bulkley fluids in a sudden three-dimensional square expansion ", **Journal of Rheology**, vol 43 (3), pp. 485-498.

Burgos, G. R., Alexandrou, A. N., and Entov, V., 1999. "On the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids", **Journal of Rheology**, vol. 43 (3), pp. 463-483.

Ciarlet, P.G., 1976. "**The finite element method for elliptic problems**", North-Holland, Amsterdam.

Franca, L.P., and Frey, S., 1992. "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 99, pp. 209-233.

Frey, S., Silveira, F.S., Zinani, F., 2010. "Stabilized mixed approximations for inertial

viscoplastic fluid flows”, **Mechanics Research Communications**, vol. 37, pp. 145-152.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M., 1986. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 59, pp. 85-99.

Hughes , T.J.R., 1987. “**The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

Johnson, C., 1987. "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.

Jay, P., Magnin, A., and Piau, J. M., 2001. "Viscoplastic Fluid Flow Through a Sudden Axisymmetric Expansion ", **AIChE Journal**, vol. 47, pp. 2155-2166.

Mitsoulis, E., Zisis, T., 2001. “Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 101, pp. 173-180.

Mistoulis E., Huilgol, R.R., 2004. “Entry flows of Bingham plastics in expansions”, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol 122, pp. 45-54.

Mitsoulis, E., Marangoudakis, S., Spyratos, M., Zisis, T., Malamataris, N.A., 2006. “Pressure-Driven Flows of Bingham Plastics over a Square Cavity”, **Journal of Fluids Engineering**, vol 128, pp. 993-1003.

Mitsoulis E., 2008.”Numerical simulation of calendaring viscoplastic fluids”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 154, pp. 77-88.

Naccache M. F. , Barbosa R. S. , 2007. “Creeping flow of viscoplastic materials through a planar expansion followed by a contraction”, **Mechanics Research Communications**, vol. 34 , pp. 423-431.

Neofytou, P, 2005. “A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows”, **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 36, pp. 664-680.

Oden, J.T., 1972. “**Finite elements of nonlinear continua**”, McGraw-Hill, New York.

Oden, J.T., 1983. “**Variational methods in theoretical mechanics**”, Springer-Verlag, Berlin.

Papanastasiou, T.C., 1987. "Flows of Materials with Yield", **Journal of Rheology**, vol. 31 (5), pp. 385-404.

Papanastasiou, T.C., Boudouvis, A.G., 1997. “Flows of viscoplastic materials: models and computations”. **Computers & Structures**, vol 64, pp. 677-694

Rafiee, A., 2008, "Modelling of generalized Newtonian lid-driven cavity flow using an SPH method", ANZIAM Journal, vol. 49, pp. 411-422.

Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994. **"The finite element method in heat transfer and fluid dynamics"**, CRC Press Inc., USA.

Rudert, A., Schwarze, R., 2009. "Experimental and numerical investigation of a viscoplastic Carbopol gel injected into a prototype 3D mold cavity ", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 161, pp. 60-68.

Santos, D.D., Frey, S.L., Naccache, M.F., Souza Mendes, P.R., 2010. "Numerical approximations for SMD flows in a lid-driven cavity", **Em preparação**.

Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., 2004. "Viscosity Function for Yield-Stress Liquids", **Applied Rheology**, vol. 14, pp. 296-302.

Souza Mendes, P.R. et al., 2007a. "Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 145, pp.30-40.

Souza Mendes, P.R., Naccache, M. F., Varges, P.R., and Marchesini, F.H., 2007b. "Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions – contractions", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 142, pp. 207-217.

Souza Mendes, P.R., 2009. "Modeling the thixotropic behavior of structured fluids", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 164, pp. 66-75.

Vradis, G.C., Ötügen, M.V., 1997, "The axisymmetric sudden expansion of a non-Newtonian viscoplastic fluid", **Journal of Fluids Engineering**, vol. 119, pp. 193-200.

Zinani, F.S.F. *Desenvolvimento e Implementação Computacional de Formulações Galerkin Mínimos-Quadrados para escoamentos Não-Newtonianos Sensíveis à Cinemática*, 2006. Tese (Doutoramento em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Zinani, F.; Frey, S., 2006. "Galerkin Least-Squares Finite Element Approximations for Isochoric Flows of Viscoplastic Liquids". **Journal of Fluids Engineering** - Transactions of the Asme, Estados Unidos, v. 128, n. 4, p. 856-863.

Zinani e Frey, 2008, "Galerkin Least-Squares Multifield Approximations for Flows of Inelastic Non-Newtonian Fluids ", **Journal of Fluids Engineering**, vol. 130, pp. 1-14.

Zisis and Mitsoulis, 2002. "Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates", **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 105, pp.1-20.