

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **SIMULAÇÃO DA FADIGA DO CONCRETO SIMPLES**

**Gedyson de Oliveira Lima**

Porto Alegre  
2023

GEDYSON DE OLIVEIRA LIMA

## **SIMULAÇÃO DA FADIGA DO CONCRETO SIMPLES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Porto Alegre  
2023

### CIP - Catalogação na Publicação

Lima, Gedyson  
Simulação da Fadiga do Concreto Simples / Gedyson  
Lima. -- 2023.  
112 f.  
Orientador: Eduardo Bittencourt.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do  
Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,  
BR-RS, 2023.

1. Fadiga. 2. Modelos de zona coesiva. 3.  
Crescimento de trincas. 4. Concreto. I. Bittencourt,  
Eduardo, orient. II. Título.

**GEDYSON DE OLIVEIRA LIMA**

## **SIMULAÇÃO DA FADIGA DO CONCRETO SIMPLES**

Esta dissertação de mestrado foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA, na área de concentração Estruturas, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 28 de setembro de 2023

Prof. Dr. Eduardo Bittencourt  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Orientador

Nilo Consoli  
Ph.D. pela Concordia University, Canadá  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

### **BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Inácio Benvegnu Morsch (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

**Prof. Americo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães Bitencourt Júnior (USP)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

Para Luana e Tito.

## **AGRADECIMENTOS**

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

À Universidade Federal do Rio Grande do Sul, por prezar pela qualidade do ensino. Ao Prof. Dr. Eduardo Bittencourt, por sua orientação, sempre disposto a instigar a curiosidade e a busca por respostas, contribuindo com seu grande conhecimento em questionamentos fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

À banca examinadora, professores Americo Campos Filho, Inácio Morsch e Luís Antônio Guimarães Bitencourt Júnior por terem aceitado participar da avaliação do trabalho, suas contribuições são de grande valor.

À minha esposa pela compreensão e apoio incondicional.

A Deus.

Epígrafe.

*O temor do Senhor é o princípio do conhecimento.*

*Provérbios 1.7*

## RESUMO

LIMA, G. O. **Simulação da fadiga do concreto simples**. 2023. 111p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Nas últimas décadas foram desenvolvidos e implementados vários modelos numéricos para simular a fadiga no concreto. Os modelos de zonas coesivas podem prever a relação tensão-separação que existe no processo de fratura, assim como o acúmulo de dano devido a cargas cíclicas. Apesar de avanços na busca para se descrever um modelo que possa descrever o comportamento e os aspectos fenomenológicos da fadiga do concreto, ainda há muito o que se desenvolver. Na presente dissertação busca-se formular um modelo coesivo capaz de simular o processo de fadiga do concreto. Este modelo possui diversos parâmetros capazes de prever o comportamento em condições de cargas cíclicas através do método dos elementos finitos em conjunto com uma formulação de zona coesiva cíclica irreversível. O processo de fissuração é representado de maneira discreta através do uso de elementos de interface considerando o restante do material linear-elástico sob a hipótese do estado plano de deformações. São simulados o comportamento de vigas de concreto simples submetidas a flexão em três pontos considerando carregamento estático e cíclico, de amplitude constante e crescente. São avaliados a sensibilidade do modelo em relação a variação dos parâmetros do modelo de zona coesiva e das funções de dano e sua influência no comportamento tanto do crescimento de trinca bem como a influência na vida em fadiga dos mesmos. Curvas de Wöhler são analisadas para descrever o comportamento do concreto submetido a diferentes níveis de tensões. Os resultados das simulações numéricas são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura. De maneira geral os resultados obtidos demonstraram a validade do modelo na simulação comportamento estático e cíclico dos elementos, assim como foi capaz de capturar a evolução da zona de processo de fratura e da propagação de trincas do concreto.

**Palavras-chave:** *crescimento de trincas, modelo de zona coesiva, fadiga, concreto.*

## ABSTRACT

LIMA, G. O. **Simulação da fadiga do concreto simples**. 2023. 111p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

In recent decades, several numerical models have been developed and implemented to simulate fatigue in concrete. Cohesive zone models can predict the traction-separation relationship in the fracture process and damage accumulation due to cyclic loading. Despite advances in the search for a model that can describe the behavior and phenomenological aspects of concrete fatigue, there is still much to be developed. In the present dissertation, we seek to formulate a cohesive model capable of simulating the concrete fatigue process. This model has several parameters capable of predicting behavior under cyclic loading conditions through the finite element method in conjunction with an irreversible cyclic cohesive zone formulation. The cracking process is represented in a discrete way through the use of interface elements, considering the rest of the material as linear-elastic under the assumption of plane strain. The behavior of plain concrete beams subjected to bending at three points considering static and cyclic loading of constant and increasing amplitude are simulated. The sensitivity of the model is evaluated in relation to the variation of the parameters of the cohesive zone model and the damage functions and its influence on the behavior of both crack growth and the influence on their fatigue life. Wöhler curves are analyzed to describe the behavior of concrete subjected to different stress levels. The results of numerical simulations are compared with experimental results available in the literature. In general, the results obtained demonstrate the validity of the model in simulating the static and cyclic behavior of the elements, as well as being able to capture the evolution of the fracture process zone and the crack growth of concrete.

**Keywords:** *crack growth, cohesive zone model, fatigue, concrete.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Diagramas S-N para concretos submetidos a carregamentos cíclicos de amplitude constante em flexão com $R = 0$ (a) série 1, (b) série 2 (c) séries 1 e 2 combinadas (d) comparação entre vários casos. (fonte: Oh (1986, p. 276))	30
Figura 2.2 – Curvas S-N para concreto submetido a flexão e compressão alternadas. (fonte: Cornelissen (1984, p. 12))	31
Figura 2.3 – (a) Curvas S-N do CEB-FIP, (b) Comparação das curvas S-N de 3 códigos europeus. (fonte: Kachkouch <i>et al.</i> (2022, p. 7))	32
Figura 2.4 – Aproximações para curvas de Wöhler propostas por Cornelissen (1984) e Zhang e Wu (1997). (fonte: autor)	32
Figura 2.5 – $\log\left(\frac{da}{dN}\right)$ vs. $\log(\Delta K)$ para diferentes valores de $R$ . (fonte: Baluch, Qureshy e Azad (1989, p. 87))	34
Figura 2.6 – Obtenção dos parâmetros $C_1$ e $m$ da lei de Paris modificada. (fonte: Carpinteri, Spagnoli e Vantadori (2010, p. 982))	35
Figura 2.7 – Quatro estágios de um modelo coesivo. (fonte: Roesler <i>et al.</i> (2007))	37
Figura 2.8 – Relação constitutiva pós-pico baseada em um critério de energia. (fonte: Gylltoft (1983, p. 71))	38
Figura 2.9 – Relação constitutiva pós-pico baseada em um critério de energia. (fonte: Hordijk (1991, p. 88))	39
Figura 2.10 – Comparação dos resultados de deflexão vs número de ciclos obtidos (linha tracejada) com resultados experimentais (linha cheia). (fonte: Hordijk e Reinhardt (1991))	39
Figura 2.11 – Comparação dos resultados de carga vs. deflexão. (fonte: Hordijk e Reinhardt (1991, p. 550))	40
Figura 2.12 – <i>Continuous function model</i> modificado. (fonte: Toumi e Bascoul (2002, p. 1307))	40
Figura 2.13 – Comparação numérica e experimental dos diagramas carga vs deflexão para carregamento quase-estático (fonte: Toumi e Bascoul (2002))	41

Figura 3.1 – Corpo homogêneo com zona coesiva. (fonte: o autor) . . . . .	47
Figura 3.2 – Tensões na seção transversal na interface com a zona coesiva e forças de corpo em uma das partes do volume. (fonte: o autor) . . . . .	48
Figura 3.3 – Relação monotônica tensão-separação sob: (a) carregamento normal puro e (b) carregamento de cisalhamento puro (tangencial: $i=r$ e transversal: $i=s$ ). (fonte: Moresco (2022, p. 66)) . . . . .	51
Figura 3.4 – Lei de descarga até a origem com redução da tensão coesiva sem deslocamento residual. (fonte: Moresco (2022, p. 69)) . . . . .	54
Figura 3.5 – Lei de carga/descarga com deslocamento residual: (a) carregamento normal puro e (b) carregamento de corte puro ( $i = r, s$ ) (fonte: Moresco (2022, p. 70))	55
Figura 3.6 – Lei de tensão-separação normal, linha cheia; e lei de contato de acordo com a formulação do parâmetro de penalidade para separação normal negativa para $A = [30, 20, 10]$ , linha tracejada. (fonte: autor) . . . . .	56
Figura 3.7 – TSEs exponenciais com densidade de energia de fratura normalizada constante $\Gamma_0$ e variação dos parâmetros de forma $\varepsilon$ e $\omega$ (fonte: Roth, Hütter e Kuna (2014, p. 04)) . . . . .	57
Figura 3.8 – Elemento de interface coesiva. (fonte: o autor) . . . . .	59
Figura 3.9 – Coordenadas naturais do elemento de interface coesiva. (fonte: o autor) . . . . .	60
Figura 3.10 – Algoritmo do METAFOR. (fonte: o autor) . . . . .	62
Figura 4.1 – Layout das vigas analisadas por Bazant e Xu (1991). . . . .	64
Figura 4.2 – Malha de elementos finitos utilizada na análise paramétrica quase-estática. . . . .	64
Figura 4.3 – Curvas $P$ versus CMOD numérico e experimental de Bazant e Xu (1991) para a viga pequena. . . . .	66
Figura 4.4 – Discretização das malhas das vigas de Bazant e Xu (1991) . . . . .	67
Figura 4.5 – Comparação das curvas $P$ versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga pequena com $T_{n,max,0} = 1.4f_{ct}$ , $\varepsilon = 0.1$ e $\omega = 0.42$ . . . . .	68

Figura 4.6 – Comparação das curvas $P$ versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga média com $T_{n,0} = 1.25f_{ct}$ , $\varepsilon = 0.1$ e $\omega = 0.42$ .	69
Figura 4.7 – Comparação das curvas $P$ versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga grande com $T_{n,max,0} = 1.1f_{ct}$ , $\varepsilon = 0.1$ e $\omega = 0.42$ .	70
Figura 4.8 – Discretização das malhas das vigas de Baktheer e Becks (2021)	71
Figura 4.9 – Comparação entre curvas $P$ versus CMOD numérico e experimental de Baktheer e Becks (2021) para a viga pequena com $T_{n,max,0} = f_{ct}$ , $\varepsilon = 0.45$ e $\omega = 0.15$ .	72
Figura 4.10 – Comparação entre curvas $P$ versus CMOD numérico e experimental de Baktheer e Becks (2021) para a viga grande com $T_{n,max,0} = 0.9f_{ct}$ , $\varepsilon = 0.45$ e $\omega = 0.15$ .	73
Figura 4.11 – Função Carga-tempo $P(t)$ para carregamento com amplitude de carga constante e período $\Delta t$ (duração de um ciclo de carga).	74
Figura 4.12 – Influência da variação do comprimento coesivo acumulado e da tensão coesiva máxima na vida em fadiga.	75
Figura 4.13 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\delta_{\Sigma}/\delta_0$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$ , $C_f = 0,60$ e $\rho = 1$ .	76
Figura 4.14 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\delta_{\Sigma}/\delta_0$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1,4$ , $C_f = 0,60$ e $\rho = 1$ .	76
Figura 4.15 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\delta_{\Sigma}/\delta_0$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$ , $C_f = 0,60$ e $\rho = 1$ .	77
Figura 4.16 – Influência da variação do limite de resistência à fadiga e tensão coesiva máxima.	78
Figura 4.17 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $C_f$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$ , $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $\rho = 1$ .	79

Figura 4.18 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $C_f$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$ , $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $\rho = 1$ . . . . .	80
Figura 4.19 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $C_f$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$ , $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $\rho = 1$ . . . . .	80
Figura 4.20 – Influência da variação do expoente de dano e tensão coesiva máxima. . . . .	81
Figura 4.21 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\rho$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ . . . . .	82
Figura 4.22 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\rho$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ . . . . .	82
Figura 4.23 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de $\rho$ com $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ . . . . .	83
Figura 4.24 – Crescimento de trinca <i>vs</i> número de ciclos para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) com variação de $C_f$ , $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ . . . . .	84
Figura 4.25 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) <i>vs</i> número de ciclos para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) com variação de $\rho$ , $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bažant (2015a). . . . .	86
Figura 4.26 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) <i>vs</i> número de ciclos para a viga media de Bazant e Xu (1991) com variação de $\rho$ , $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.25$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bažant (2015a). . . . .	87
Figura 4.27 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) <i>vs</i> número de ciclos para a viga grande de Bazant e Xu (1991) com variação de $\rho$ , $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.1$ e $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ e $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bažant (2015a). . . . .	88
Figura 4.28 – Função de evolução de carga apresentada por Baktheer e Becks (2021). . . . .	90
Figura 4.29 – Evolução da variável dano $D$ em função da vida em fadiga para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	91
Figura 4.30 – Influência de $\rho$ no comportamento do crescimento de trinca <i>versus</i> número de ciclos para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	92

Figura 4.31 – Comparação do comportamento Carga <i>versus</i> CTOD para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021) . . . . .	93
Figura 4.32 – Função de evolução de carga apresentada por Baktheer e Becks (2021). . .	94
Figura 4.33 – Comparação dos resultados numéricos da vida em fadiga com as curvas de Wöhler para concreto obtidas a partir das relações descritas por <i>fib</i> Model Code 2010 (2013), Cornelissen (1984) e Zhang e Wu (1997). . . . .	96
Figura 4.34 – Influência da variação do comprimento coesivo acumulado nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	97
Figura 4.35 – Influência da variação do expoente de dano nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	99
Figura 4.36 – Influência da variação do limite de resistência à fadiga nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	100
Figura 4.37 – Comparação dos resultados numéricos da vida em fadiga com os experimentais e curvas de Wöhler para concreto sob tensões de tração para as vigas de Baktheer e Becks (2021). . . . .	101

## LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1 – Parâmetros da zona coesiva utilizados na análise paramétrica para carregamento monotônica. . . . .	65
Quadro 4.2 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas com $f_c = 32,8 \text{ MPa}$ , $f_{ct} = 2,86 \text{ MPa}$ , $E = 27120 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,3$ . . . . .	66
Quadro 4.3 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas com $E = 34468 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,2$ . . . . .	70
Quadro 4.4 – Parâmetros da zona coesiva utilizados na análise paramétrica para carregamento monotônico das vigas de Baktheer e Becks (2021). . . . .	71
Quadro 4.5 – Resumo das propriedades da zona coesiva utilizados para a variação do comprimento coesivo acumulado $\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0}$ da vida em fadiga com $C_f = 0.6$ e $\rho = 1$ . . . . .	74
Quadro 4.6 – Resultados das simulações da vida em fadiga com variação de $\delta_\Sigma$ para $C_f = 0,6$ e $\rho = 1$ . . . . .	75
Quadro 4.7 – Resultado das simulações da vida em fadiga com variação de $C_f$ para $\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0} = 70$ e $\rho = 1$ . . . . .	78
Quadro 4.8 – Resultado das simulações da vida em fadiga com variação de $\rho$ para $\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0} = 70$ e $C_f = 0.6$ . . . . .	81
Quadro 4.9 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para variação de $C_f$ das vigas pequena, média e grande e $\delta_\Sigma/\delta_0=70$ e $\rho = 1$ de Bazant e Xu (1991). . . . .	84
Quadro 4.10 – Resultado das simulações com a implementação do parâmetro $\rho$ , com $C_f = 0.6$ , para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) e comparação com o modelo de microplano M7. . . . .	85
Quadro 4.11 – Resultado com a implementação de $\rho$ , com $C_f = 0.6$ , para as vigas média e grande de Bazant e Xu (1991) e comparação com o modelo M7. . . . .	87
Quadro 4.12 – Resumo das propriedades coesivas utilizados para a vida em fadiga com carregamento de amplitude variável para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	89

Quadro 4.13 – Resultado das simulações com variação do parâmetro $\rho$ para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	90
Quadro 4.14 – Influência do modelo de carga/descarga na viga em fadiga para viga pequena de Baktheer e Becks (2021). . . . .	91
Quadro 4.15 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para o cálculo das curvas de Wöhler das vigas de Bazant e Xu (1991) e Baktheer e Becks (2021). . . . .	95
Quadro 4.16 – Vida em fadiga para a variação de $\delta_{\Sigma}/\delta_0$ da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com $C_f = 0.8$ e $\rho = 1.4$ . . . . .	97
Quadro 4.17 – Vida em fadiga para a variação de $\rho$ da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com $\delta_{\Sigma}/\delta_0 = 10$ e $C_f = 0.6$ . . . . .	98
Quadro 4.18 – Vida em fadiga para a variação de $C_f$ da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com $\delta_{\Sigma}/\delta_0 = 4$ e $\rho = 1.4$ . . . . .	99
Quadro 4.19 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para o cálculo das curvas de Wöhler das vigas pequena e grande de Baktheer e Becks (2021). . . . .	100

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CZM	<i>Cohesive Zone Model</i>
CCZM	<i>Cyclic Cohesive Zone Model</i>
CMOD	<i>Crack Mouth Opening Displacement</i>
DCB	<i>Double cantilever beam</i>
DL	<i>Damage locus</i>
EL	<i>Endurance locus</i>
EPD	<i>Estado Plano de Deformações</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FCG	<i>Fatigue Crack Growth</i>
FCM	<i>Fictitious Crack Model</i>
PTV	<i>Princípio dos Trabalhos Virtuais</i>
TCZM	<i>Triaxial Cohesive Zone Model</i>
TSE	<i>Traction-separation envelope</i>
TSL	<i>Traction-separation law</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Expoente de resistência de Roth <i>et al.</i> (2014)
$a_0$	Tamanho inicial da trinca
$B$	Espessura do espécime
$D$	Dano acumulado
$D_c$	Dano cíclico por fadiga
$D_m$	Dano monotônico
$\bar{D}$	Variável de dano fundamental de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\mathcal{D}$	Densidade de dissipação de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\frac{da}{dN}$	Taxa de crescimento da trinca por fadiga
$\delta$	Separação coesiva resultante
$\delta_0$	Separação coesiva característica
$\delta_\Sigma$	Separação coesiva acumulada de Roe & Siegmund (2003)
$\delta_{acc}$	Somatório da separação coesiva de Roe & Siegmund (2003)
$\delta_c$	Separação coesiva crítica
$\delta_i$	Separação coesiva na direção $i$ ( $i = n, s, r$ )
$\Delta\delta$	Incremento da separação de Roe & Siegmund (2003)
$\Delta a$	Propagação da trinca
$\Delta\bar{D}$	Incremento da variável de dano fundamental de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\Delta D_c$	Incremento de dano cíclico de Roe & Siegmund (2003)
$\Delta D_m$	Incremento de dano monotônico de Roe & Siegmund (2003)
$\Delta K$	Variação do fator de intensidade de tensões
$\Delta\lambda$	Incremento da separação efetiva de Roth <i>et al.</i> (2014)
$E$	Módulo de elasticidade
$\varepsilon_{pl}$	Deformação plástica acumulada

$\varepsilon$	Fator de forma de Roth <i>et al.</i> (2014)
$F(\bar{D})$	Função de evolução de dano de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\phi$	Energia coesiva
$\phi_i$	Energia coesiva na direção $i$ ( $i = n, r, s$ )
$\phi_0$	Energia coesiva característica
$G$	Taxa de liberação de energia
$G(\bar{D})$	Função de evolução de dano de Roth <i>et al.</i> (2014)
$G_c$	Taxa de liberação de energia crítica
$\Gamma$	Função de potencial coesivo de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\Gamma_0$	Densidade de energia de fratura normalizada de Roth <i>et al.</i> (2014)
$J$	Energia da integral- $J$
$K_{max}$	Fator de intensidade de tensões máximo
$K_{min}$	Fator de intensidade de tensões mínimo
$\kappa$	Parâmetro da descarga de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\lambda$	Separação coesiva efetiva normalizada de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\lambda^e$	Separação de resistência a fadiga normalizada de Roth <i>et al.</i> (2014)
$\eta$	Triaxialidade da tensão local
$\rho$	Expoente de dano de Roth <i>et al.</i> (2014)
$q$	Razão entre energias coesivas de Roe & Siegmund (2003)
$\sigma_e$	Tensão efetiva ou equivalente
$\sigma_H$	Tensão hidrostática
$\sigma_0$	Tensão de escoamento
$T$	Período
$T$	Tensão coesiva na direção $i$ ( $i = n, r, s$ )
$\bar{T}$	Tensão coesiva resultante
$T_f$	Limite de resistência à fadiga

$T_{max}$	Tensão coesiva máxima característica
$T_{n,max,0}$	Tensão coesiva máxima característica inicial
$\omega$	Fator de forma do CCZM de Roth <i>et al.</i> (2014)

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1	BREVE HISTÓRICO DA FADIGA	25
1.2	OBJETIVOS	27
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	28
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>29</b>
2.1	MÉTODOS EMPÍRICOS	29
2.2	LEI DE PARIS	33
2.3	MODELOS DE ZONA COESIVA	36
2.4	OUTROS MODELOS DE ANÁLISE DE FADIGA NO CONCRETO	42
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>45</b>
3.1	EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	45
3.1.1	Notação básica	45
3.1.2	Cinemática	46
3.1.3	Cinética	46
3.1.4	Equações de Equilíbrio	47
3.2	IMPLEMENTAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	49
3.3	O MODELO COESIVO CÍCLICO DE ROE E SIEGMUND (2003)	50
3.3.1	Modelo monotônico	50
3.3.2	Modelo de dano	52
3.3.3	Modelo de carga/descarga	53

3.4	MODELO DE ZONA COESIVA CÍCLICA DE ROTH, HÜTTER E KUNA (2014) . . . . .	55
3.4.1	Equacionamento do modelo . . . . .	55
3.5	MODELO PARA EVOLUÇÃO DO DANO . . . . .	58
3.6	APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS . . . . .	59
3.7	METAFOR . . . . .	61
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES . . . . .</b>	<b>63</b>
4.1	SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO QUASE-ESTÁTICO DE VIGAS DE CONCRETO . . . . .	63
4.1.1	Análise estática preliminar dos modelos coesivos . . . . .	63
4.1.2	Concreto de Resistência Normal . . . . .	66
4.1.3	Concreto de Alta Resistência . . . . .	70
4.2	ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA CARREGAMENTO CÍCLICO . . . . .	73
4.2.1	Comprimento coesivo acumulado . . . . .	73
4.2.2	Limite de resistência à fadiga . . . . .	78
4.2.3	Expoente de dano . . . . .	79
4.3	CRESCIMENTO DE TRINCAS POR FADIGA . . . . .	83
4.4	SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE FADIGA DE VI- GAS DE CONCRETO COM CARREGAMENTO DE AMPLI- TUDE VARIÁVEL . . . . .	89
4.4.1	Vida em fadiga e crescimento de trinca . . . . .	89
4.4.2	Influência do modelo de carga/descarga . . . . .	91
4.5	CURVAS DE WÖHLER . . . . .	94
4.5.1	Análise paramétrica para avaliação das curvas de Wöhler . . . . .	96
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>102</b>

**REFERÊNCIAS . . . . . 105**

# 1 INTRODUÇÃO

Estruturas como turbinas eólicas, pontes, lajes ferroviárias, plataformas *offshore* e pavimentos de concreto são continuamente submetidas a cargas cíclicas e dinâmicas durante a fase de construção e de serviço que podem ocasionar o crescimento de trincas e a falha dos seus materiais constituintes. Por exemplo, pontes rodoviárias e ferroviárias estão sujeitas a milhões de ciclos de carga de baixa amplitude alternando com cargas de pico. Sob ações sísmicas as estruturas de concreto são sujeitas a carregamentos com vários blocos de carregamento de amplitude constante. As estruturas *offshore* são expostas às ações aleatórias do vento e de correntes marítimas, conforme Baktheer, Hegger e Chudoba (2019), Golewski (2021) e Kachkouch *et al.* (2022) .

Poucos casos de falha no concreto devido à fadiga são relatados. No entanto, possivelmente inúmeros casos de fadiga não sejam identificados porque os padrões de fissuras resultantes de carga estática e de fadiga não são distinguidos claramente. Roggendorf e Goralski (2014) relataram que os danos por fadiga muitas vezes só se tornam visíveis após um longo período de exposição ou ciclos de carga elevados no final da vida útil, por isso não se pode excluir que os casos de danos devidos à fadiga do concreto aumentem futuramente. Por outro lado, o pouco conhecimento do comportamento à fadiga do concreto em comparação com a evolução da capacidade resistente dos elementos estruturais podem ser um fator de risco para danos por fadiga no concreto resultantes do carregamento cíclico.

Apesar de as falhas em serviço das estruturas de concreto serem raras, o comportamento à fadiga destas estruturas deve ser considerado. Por exemplo, o dano acumulado por fadiga pode levar ao aumento da fissuração, com conseqüente perda de rigidez e resistência dos elementos de concreto sob cargas de serviço, o que pode causar a falha. Em pontes de concreto a fadiga é um mecanismo de degradação relevante que deve ser considerado, conforme Deng e Matsumoto (2018) e Wu *et al.* (2022). Lotsberg (2013) reportou que várias estruturas de ligação em turbinas eólicas tinham sofrido recalques, levando a fissuras devido à fadiga. Wei, Makhloof e Ren (2023) mostrou que fundações de concreto de turbinas eólicas são suscetíveis à falha por fadiga. Em pavimentos de concreto a fadiga pode ser um parâmetro que determina a sua vida útil, como mostrado por Hung, Komatsu e Maekawa (2020) e Nguyen e Maekawa (2020).

Os principais códigos de projeto que consideram a fadiga no concreto são o *fib* Model Code 2010 (2013), DNV-OS-H101 (2011), Eurocode 2 (2007) e ACI PRC-215-21 (2022). Entretanto, o comportamento da fadiga no concreto tem sido cada vez mais investigado para fornecer novas diretrizes aos códigos existentes pelos diversos modelos fenomenológicos e matemáticos que

consideram a amplitude e o tipo de carregamento e outros fatores como umidade, corrosão e temperatura, como mostram Scheiden e Oneschkow (2019), Børshheim (2020), Baktheer e Chudoba (2021) e Baktheer, Hegger e Chudoba (2023). No Brasil, embora a ABNT NBR 6118 (2014) proponha a verificação da fadiga para estruturas gerais, o foco é na fadiga das armaduras de aço carecendo de uma abordagem para o concreto somente.

Quanto à falha sob cargas cíclicas, as estruturas de concreto, assim como as estruturas metálicas apresentam falha por fadiga relacionada ao crescimento de fissuras sob cargas menores do que as admissíveis. No entanto, os processos físicos que ocorrem na fratura do concreto são muito diferentes daqueles que ocorrem em materiais homogêneos como os metais. Sobretudo, devido ao fato de que a escala da zona de processo de fratura (ZPF) é muito maior para concreto do que para a maioria dos materiais, conforme Bažant e Planas (2019).

Como o concreto é um material heterogêneo de comportamento quase-frágil, ele está sujeito a apresentar falhas em sua matriz estrutural, devido à formação de microfissuras e vazios originados no processo de hidratação. Este comportamento quase-frágil é caracterizado por um ramo pós-pico de formato descendente na curva tensão-deformação do concreto. Este ramo ocorre devido a fenômenos que dissipam energia na região da ponta da fissura, tal como ocorre na dissipação plástica. Esta região é uma zona com dimensões consideráveis, o que limita o uso da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) na análise das fissuras no concreto.

Embora hajam limitações, diversos autores, como Bazant e Xu (1991) Bazant e Schell (1993), Slowik, Plizzari e Saouma (1996), entre outros, apresentam modelos que introduzem os conceitos da mecânica da fratura linear elástica por meio da Lei de Paris para detalhar o comportamento em fadiga em diversos elementos de concreto. Entretanto, a literatura mostra que tais modelos apresentam grande variabilidade nos resultados mesmo para as situações específicas para os quais foram formulados.

Uma forma alternativa para se analisar elementos de concreto em fadiga baseia-se na adoção de formulações empíricas desenvolvidas a partir da produção de curvas  $S - N$ . No entanto, esta abordagem acaba apresentando diversas limitações na aplicabilidade de seus resultados, devido à sua natureza fundamentalmente empírica. Pois, a utilização destas curvas somente é válida para as condições de carregamento e de contorno similares àquelas utilizadas em seu desenvolvimento.

Outra forma alternativa aos modelos anteriores é a utilização dos modelos de zona coesiva para o estudo da vida em fadiga e do crescimento de trinca. Tais modelos derivam, em geral, no modelo coesivo apresentado por Barenblatt (1962) em que se considera a existência de tensões coesivas que podem transmitir esforços na zona à frente da ponta de uma trinca. Para uma análise específica do concreto o *continuous function model* proposto por Hordijk (1991) é o modelo mais conhecido na literatura. Entretanto, este modelo possui suas limitações, principalmente pelo

fato de que o processo de degradação do material está intimamente relacionado com a relação constitutiva de amolecimento.

Assim, este trabalho se propõe a avaliar a utilização de um modelo coesivo cíclico irreversível para a simulação de elementos de concreto, bem como a determinação dos parâmetros necessários para tal.

## 1.1 BREVE HISTÓRICO DA FADIGA

A fadiga é a fratura no tempo para um material submetido a tensões cíclicas que estão abaixo da tensão de falha do material. Este fenômeno começou a ser investigado em países que começaram seu processo de industrialização em meados do séc. XIX como a Alemanha, o Reino Unido, a França e os Estados Unidos. Na entrada do séc. XX, sobretudo no período entre guerras, o número de artigos, livros e conferências aumentaram consideravelmente e códigos de projeto e modelos de previsão da vida em fadiga foram elaborados devido a muitos casos catastróficos reportados. Por exemplo, em 1919 um tanque de ferro-fundido de aproximadamente 5 metros de altura e 27 metros de diâmetro se rompe derramando cerca 7,5 milhões de melaço em Boston. Em 1954 dois aviões *Comet* caíram um próximo a Elba na Itália e o outro próximo a Nápoles também na Itália. O *Comet* foi o primeiro avião a jato comercial, sendo projetado em 1948 e colocado em operação em 1952. As quedas ocorreram por propagação de trincas que se originaram nas proximidades dos cantos das janelas quadradas do avião que se propagavam por fadiga causada pela pressurização/despressurização da cabine. A partir daí os aviões pressurizados usariam janelas com cantos arredondados.

No entanto, o princípio do estudo da fadiga se deu a partir da publicação de Albert (1837) que produziu os primeiros resultados de testes de fadiga conhecidos em correntes utilizadas nas minas de Clausthal na Alemanha. Na mesma época na Inglaterra, Rankine (1843) e York (1843) examinaram a resistência à fadiga em eixos ferroviários em resposta a muitos acidentes em ferrovias devido à fadiga. Por exemplo, o trágico acidente em Versailles na França em 1842 que ocorreu devido ao colapso do eixo de uma locomotiva resultando na morte de 60 pessoas.

Posteriormente surgiram métodos empíricos para a previsão da vida em fadiga. Wöhler (1860) conduziu testes de fadiga nos quais eixos ferroviários eram submetidos a uma série de casos de carregamento como flexão, torção e cargas axiais. O autor alemão concluiu que a vida em fadiga aumentava com a diminuição da amplitude das tensões aplicadas e que para um determinado nível de tensões a vida em fadiga aparentemente era infinita. Outro fator observado foi que a vida em fadiga era menor quando havia a presença de entalhes. No entanto, esta caracterização da vida em fadiga somente é válida para casos de carregamento com amplitude constante. Basquin

(1910) forneceu valores numéricos com suas equações que relacionam a amplitude de tensão com a vida em fadiga a partir das curvas de Wöhler. Posteriormente, Palmgren (1924) e mais tarde Miner *et al.* (1945) forneceram uma regra que permitia estimar a vida em fadiga para casos em que vários blocos de amplitude de tensão eram aplicados durante a vida de uma peça conhecida como regra de Palmgren-Miner.

Posteriormente, surgiram os métodos para avaliação da vida em fadiga baseado na Mecânica da Fratura como a Lei de Paris que foi desenvolvida por Paris e Erdogan (1963) a partir da observação de resultados experimentais em chapas metálicas. A Lei de Paris afirma que a taxa de crescimento de trincas por fadiga é proporcional à variação da amplitude de tensão elevada a uma potência e multiplicada por uma constante, ambas específicas para cada material. Esta lei é baseada nas hipóteses de carregamento com amplitude constante e da validade da MFLE (mecânica da fratura linear elástica). Na mesma época Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) desenvolveram o conceito Modelos de Zona Coesiva (inglês *cohesive zone model*, CZM). Needleman (1987), utilizou um CZM para descrever a separação desde a evolução da descolagem inicial até a separação completa e o subsequente crescimento de vazios dentro de uma estrutura unificada. Needleman (1992) propôs um modelo coesivo que correlaciona o processo de separação do material nos modos I e II sob carregamento monotônico através de um potencial de origem interatômico. O autor introduziu molas entre os elementos finitos para representar a interface coesiva. Posteriormente, Tvergaard e Hutchinson (1992) analisaram iniciação do crescimento de trincas e sua resistência resultante para um sólido elasto-plástico por meio de uma lei tensão-separação específica no plano da fissura para caracterizar o processo de fratura na CZM. Xu e Needleman (1994) simularam o crescimento rápido de trincas em elementos de materiais frágeis considerando a bifurcação das trincas, o efeito dinâmico e as dimensões da malha. Ortiz e Pandolfi (1999) desenvolveram um elemento coesivo tridimensional de deformação finita e uma classe de leis coesivas irreversíveis que permitem o rastreamento de trincas com crescimento dinâmico. Estes desenvolvimentos serviram de base para modelos coesivos aplicados à fadiga como Roe e Siegmund (2003) e Roth, Hütter e Kuna (2014).

Kachanov (1958) introduziu a mecânica do dano contínuo que depois que serviu de base para o estudo da fadiga. Por exemplo, o modelo constitutivo de dano proposto por Lemaitre e Chaboche (1994), que descreve o comportamento mecânico de materiais sob a influência de danos progressivos em condições de carregamento cíclico. Para o concreto, o modelo de dano isotrópico dependente da taxa da resposta ao carregamento foi proposto por Cervera, Oliver e Manzoli (1996). Outra abordagem baseada em modelos contínuos é o modelo de banda fissurada introduzido por Bažant e Oh (1983), no qual o dano relativo ao trecho de amolecimento é espalhado em uma faixa contínua de material, chamada de banda de fissura, na qual fissuras coesivas se desenvolvem dentro do elemento. Um outro modelo, mais recente, é o chamado modelo de microplano. Conforme Caner e Bažant (2013), o modelo constitutivo microplano é

definido por uma relação entre as tensões e deformações que atuam em um plano genérico de orientação qualquer no material, denominado microplano. Este modelo serviu de base para o modelo proposto por Kirane e Bažant (2015a) que relaciona a evolução do dano com a medida cumulativa da deformação volumétrica no concreto, de modo a prever a vida em fadiga.

Mais recentemente, uma abordagem baseada em *machine learning* tem sido muito utilizada para a previsão do comportamento de estruturas sob fadiga, por exemplo Pujol e Pinto (2011), Xiao, Amirkhanian e Juang (2009) e Le, Nguyen e Le (2021). Existem diversas técnicas utilizadas na abordagem *machine learning*. No entanto, os modelos de fadiga são construídos utilizando o conceito de redes neurais (inglês, *neural network*), como ANN (*artificial neural network*) e CNN (*convolutional neural network*). A ideia é alimentar as redes com dados de entrada, em seguida estes dados serão pré-processados, seguido de treinamento, avaliação e implantação do modelo. Alguns destes métodos serão discutidos com mais detalhes no capítulo 2 e com ênfase para a aplicação ao concreto simples.

## 1.2 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é formular um modelo coesivo capaz de simular a ruptura do concreto por fadiga bem como entender como os parâmetros do modelo modificam o comportamento do concreto.

Foram desenvolvidas cinco aplicações que compõe os objetivos secundários deste trabalho. Na aplicação 01 foram realizadas uma série simulações visando-se caracterizar a influência dos parâmetros coesivos na resposta da estrutura e determinou-se os parâmetros necessários para a simulação do comportamento estático de vigas de concreto submetidos a flexão em três pontos.

Na aplicação 02 realizou-se uma análise de sensibilidade, similar a apresentada na aplicação 01, para a determinação da influência dos parâmetros da função de dano no comportamento em fadiga de vigas de concreto submetidas a carregamento cíclico de amplitude constante. Analisou-se critérios como vida em fadiga e crescimento de trinca, além da propagação da zona de processo de fratura. Na aplicação 03, utilizou-se os resultados da aplicação 01 para a determinação dos parâmetros ideais para a simulação de vigas de concreto sob carregamento de amplitude constante.

Na aplicação 04 verificaram-se os parâmetros necessários para a simulação de fadiga em vigas de concreto sob carregamento de amplitude variável, além da análise da viga em fadiga e dos parâmetros de crescimento de trinca, também foi avaliado o processo de degradação da rigidez ao longo do processo de carregamento. Finalmente, na aplicação 05 as curvas de Wöhler foram

obtidas com o propósito de se determinar quais parâmetros são necessários para se alcançar uma vida em fadiga que melhor se ajusta aos modelos experimentais estudados por diversos autores.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A presente dissertação enquadra-se na linha de pesquisa “Modelos para a simulação em mecânica da fratura e fadiga” desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e possui 4 capítulos, conclusão e referências bibliográficas, conforme descrito abaixo:

1. Capítulo 1 – Introdução: introdução e justificativa do tema proposto, bem como os objetivos para o desenvolvimento do trabalho, além de sua organização;
2. Capítulo 2 – Fundamentação Teórica: descrição dos diferentes métodos utilizados na literatura para a análise da vida em fadiga de estruturas de concreto;
3. Capítulo 3 – Metodologia: descrição dos procedimentos utilizados para o cumprimento dos objetivos propostos neste trabalho;
4. Capítulo 4 – Aplicações: apresentação dos exemplos de aplicação utilizando-se das ferramentas descritas no Capítulo 3, bem como uma análise dos resultados e discussões;
5. Conclusão;
6. Referências Bibliográficas.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados alguns métodos de análise de fadiga do concreto que se relacionam com o propósito deste trabalho: métodos empíricos, Lei de Paris, modelos coesivos, modelos de dano contínuo e abordagens do tipo *machine learning*

### 2.1 MÉTODOS EMPÍRICOS

Uma das principais formas de caracterização do comportamento em fadiga de elementos de concretos apresentada na literatura consiste na realização de ensaios experimentais para elaboração de curvas S–N, também chamadas de curvas de Wöhler, onde o comportamento em fadiga do material é representado pela tensão máxima aplicada (S) vs. o número de ciclos até a ruptura (N, também denominado de "vida em fadiga"). Esta abordagem permite a obtenção de uma estimativa da vida útil da estrutura para um dado carregamento cíclico de amplitude constante. Oh (1986) realizou uma série de ensaios de fadiga e comparou com curvas S-N teóricas. A Figura 2.1 apresenta um conjunto de exemplos de diagramas S-N obtidos para o concreto apresentados pelo autor, onde a tensão máxima aplicada  $f_r^{max}$  é ponderada pela resistência a tração na flexão do concreto  $f_r'$ , também chamado de módulo de ruptura, em todos os casos os diagramas foram obtidos para uma razão entre o carregamento mínimo e máximo nula ( $R = f_r^{max} / f_r^{min} = 0$ ).

Alguns materiais apresentam um comportamento diferente daquele apresentado na Figura 2.1, de modo que estes apresentam um determinado nível de tensão para o qual, se este valor não for ultrapassado, o número de ciclos para a ruptura torna-se infinito, sendo este limite denominado limite de resistência a fadiga.

Para o concreto, resultados apresentados por Hatt (1925) e Crepps (1923) a partir de ensaios em barras prismáticas fixadas em um lado e submetidas a um carregamento na extremidade livre com  $R = -1$  indicaram limite de resistência a fadiga no concreto na ordem de 55% da tensão estática de ruptura. Segundo Cornelissen (1984), Williams (1943) realizou procedimento similar aos de Hatt e Crepps em vigas de concreto leve. No entanto, diferentemente daqueles autores, os resultados obtidos por ele não apontaram um limite de resistência definido. A Figura 2.2 apresentam os diagramas S-N obtidos pelos autores.

Ramakrishnan, Wu e Hosalli (1989) apresentaram resultados similares aqueles obtidos por Hatt e Crepps ao analisar o comportamento de vigas de concreto simples e vigas de concreto reforçado

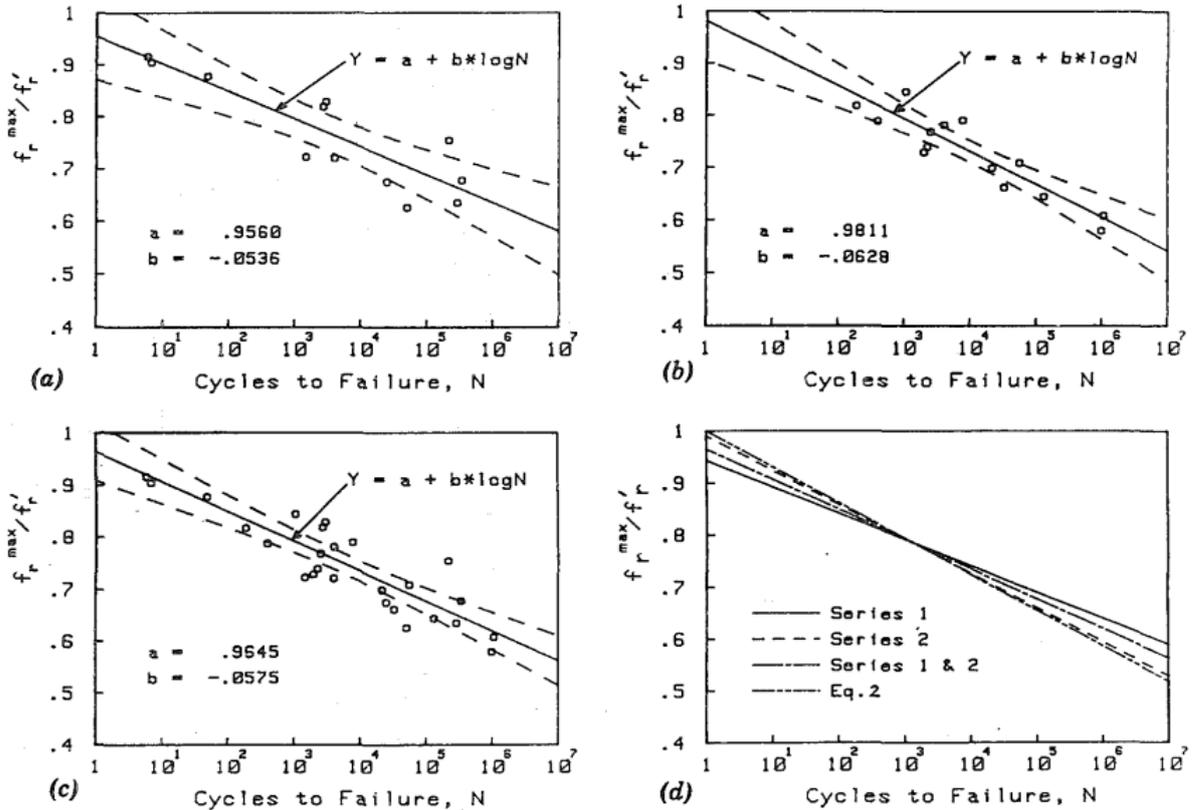


Figura 2.1 – Diagramas S-N para concretos submetidos a carregamentos cíclicos de amplitude constante em flexão com  $R = 0$  (a) série 1, (b) série 2 (c) séries 1 e 2 combinadas (d) comparação entre vários casos. (fonte: Oh (1986, p. 276))

com fibras, de modo que, segundo os autores o limite de resistência para o concreto simples seria na ordem de 50 a 55% da resistência à flexão estática para vida em fadiga da ordem de  $N = 10^6$ . No entanto, ao se adicionar as fibras ao concreto de forma adequada, pode se alcançar um limite de resistência de 90 a 95%. Oh (1986) e Mohammadi (2002) concluíram que para  $10^6 \leq N \leq 10^7$  o limite de resistência à fadiga encontrado era em torno de 54 a 58% da resistência à flexão estática. Na mesma direção, Goel e Singh (2014) encontraram um limite de resistência à fadiga de 63% em relação à resistência à flexão estática para o concreto auto adensável simples para  $N = 10^6$ . Slowik, Plizzari e Saouma (1996) sugerem que o limite de resistência à fadiga pode ser dependente da escala.

Alternativamente a sua representação gráfica, os diagramas S-N podem ser descritos como uma função do logaritmo do número de ciclos através do uso de modelos de regressão; onde, para uma viga com carregamento cíclico e  $R = 0$ , os diagramas S-N podem ser descritos através da Equação (2.1):

$$\frac{f_r^{\max}}{f_r'} = a + b \log(N) \quad (2.1)$$

onde,  $a$  e  $b$  correspondem a constantes empíricas que devem ser determinadas através algum método de regressão linear dos dados experimentais. Com base nesta metodologia, diversos

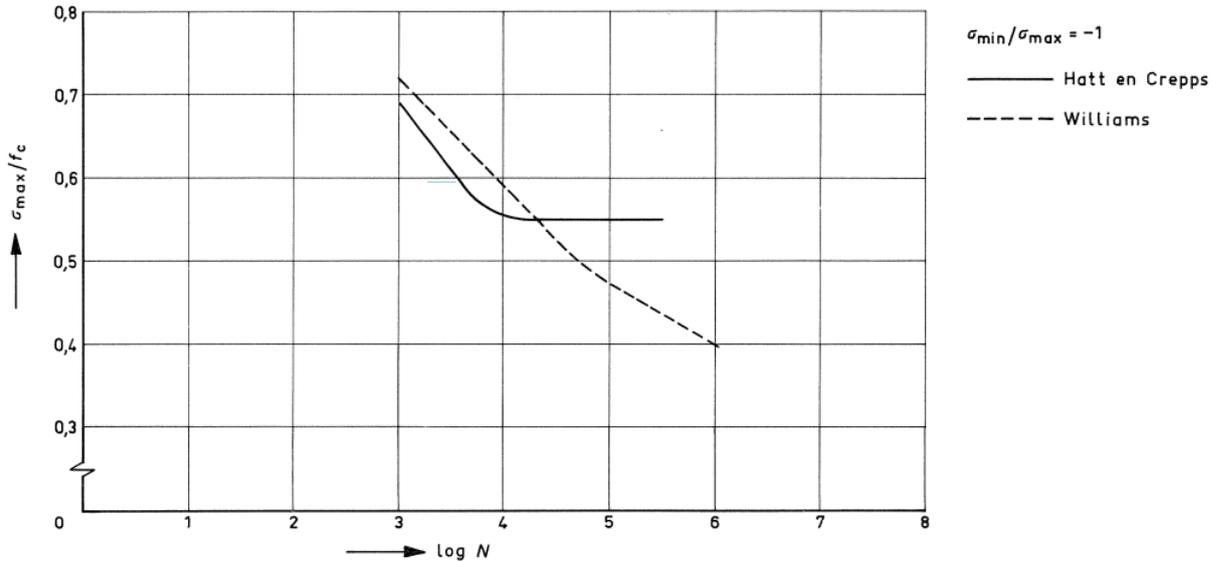


Figura 2.2 – Curvas S-N para concreto submetido a flexão e compressão alternadas. (fonte: Cornelissen (1984, p. 12))

autores propuseram diferentes formulações para a caracterização do comportamento a fadiga do concreto.

Hsu (1981) realizou uma série de ensaios de fadiga em compressão simples introduzindo a frequência de carregamento como variável. A partir destes resultados, o autor estabeleceu dois modelos de fadiga distintos que foram classificados em função do espectro de carregamento a que as estruturas são solicitadas, sendo estes em baixo ciclo ( $N < 10^3$ ) e alto ciclo ( $N > 10^3$ ).

Apesar dos modelos apresentados por Hsu (1981) terem sido desenvolvidos sob carregamento cíclico de compressão, o autor afirma que estes podem ser aplicados para carregamentos de flexão de maneira satisfatória.

De modo a determinar a influência da inversão de carregamento no processo de fadiga, Cornelissen (1984) realizou uma série de experimentos em vigas prismáticas de concreto sob duas situações de carregamento distintas. Onde o primeiro caso, denominado pelo autor de tensão de tração pulsante, a fibra inferior mais externa da viga é solicitada apenas por tensões de tração. Já para o segundo caso, denominado de tensão de tração-compressão, a fibra inferior mais externa é submetida a inversões de tensão. Cornelissen (1984) concluiu que o aumento da tensão inferior provoca a diminuição da vida em fadiga dos elementos. Com isto, o autor concluiu que o processo de inversão de tensões é mais nocivo quanto maior for a tensão de compressão na fibra mais externa inferior da peça.

Kachkouch *et al.* (2022) declararam que para concretos de classe até C80, algumas equações foram desenvolvidas em normas para estimar a vida em fadiga. Essas equações descrevem o

comportamento em fadiga pela relação entre a tensão aplicada e o número de ciclos até a falha. Conforme mostrado na Figura 2.3, três curvas S-N para  $S_{max} = 1$  e  $S_{max} = 0,2$  de códigos conhecidos, quais sejam, *fib* Model Code 2010 (2013), DNV-OS-H101 (2011) e Eurocode 2 (2007), são projetadas para efeito de comparação. Observa-se que a norma DNV-OS-H101 subestima a vida em fadiga em relação aos demais códigos.

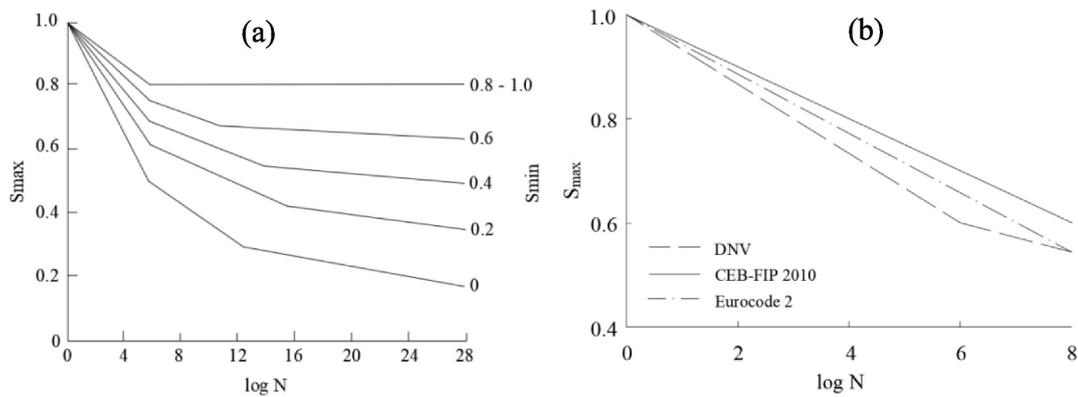


Figura 2.3 – (a) Curvas S-N do CEB-FIP , (b) Comparação das curvas S-N de 3 códigos europeus. (fonte: Kachkouch *et al.* (2022, p. 7))

Na mesma direção, Cornelissen e Reinhardt (1984) propõem uma aproximação das curvas de Wöhler para o concreto simples dependente das amplitudes de tensão máxima e mínima. Por outro lado, Zhang e Wu (1997) forneceram uma aproximação que leva em consideração não somente os níveis máximos e mínimos de tensão, mas a frequência do carregamento e parâmetros do material. A Figura 2.4 mostra a plotagem das duas curvas.

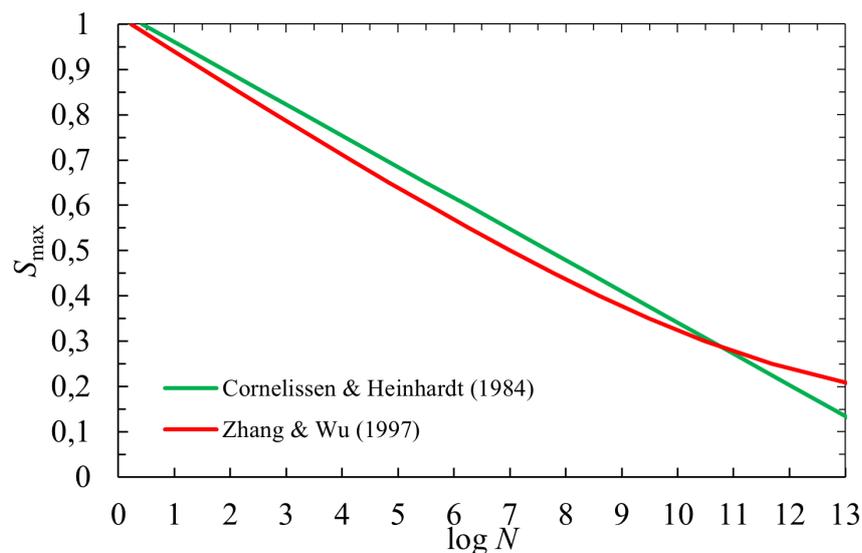


Figura 2.4 – Aproximações para curvas de Wöhler propostas por Cornelissen (1984) e Zhang e Wu (1997). (fonte: autor)

## 2.2 LEI DE PARIS

Desenvolvida por Paris e Erdogan (1963) a partir da observação de resultados experimentais em chapas metálicas, a Lei de Paris afirma que o processo de propagação estável de trincas por fadiga pode ser descrito através da Equação (2.2):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (2.2)$$

onde  $C$  e  $m$  são constantes determinadas experimentalmente e  $\Delta K$  corresponde a variação do fator de intensidade de tensões.

Um dos primeiros trabalhos que avaliou a aplicabilidade da lei de Paris para descrever o comportamento do crescimento de trinca do concreto foi apresentado por Baluch, Qureshy e Azad (1989). Eles analisaram o comportamento de vigas de concreto para três situações de carregamento, com  $R$  variando entre 0,1, 0,2 e 0,3, e dois diferentes comprimentos de trinca inicial  $a_0$ . Neste trabalho o comprimento de trinca é medido indiretamente através de uma série de curvas de carga *vs.* CMOD (deslocamento da abertura da boca de trinca, em inglês *crack mouth opening displacement*), onde para cada comprimento de trinca  $a$  obtém-se uma abertura CMOD correspondente, de modo que estes valores podem ser utilizado para a obtenção de um diagrama de flexibilidade *vs.* comprimento de trinca.

Os autores perceberam que, de fato, a relação  $\frac{da}{dN}$  é proporcional a variação do fator de intensidade de tensões  $\Delta K$  conforme pode ser observado pela Figura 2.5. A partir destes resultados os autores concluem também que para o concreto há uma aparente dependência entre  $C$  e  $R$ .

Conforme demonstrado pelos autores, a lei de Paris pode ser aplicada a análise de fadiga de elementos de concreto. No entanto, a sua forma original possui aplicabilidade restrita devido a presença dos diversos mecanismos de transferência de tensão presentes na zona de processo de fratura que não é levada em consideração na formulação. A partir desta constatação, diversos autores propuseram modificações na lei de Paris de modo que seus resultados sejam mais adequados para a análise de fadiga do concreto.

Bazant e Xu (1991) apresentaram um modelo de lei de Paris incorporando o modelo de efeito escala, de modo que a lei de Paris, considerando o efeito escala, possa ser escrita como:

$$\frac{da}{dN} = C \left( \frac{\Delta K_I}{K_{IC}} \right)^m \quad (2.3)$$

em que  $K_{IC} = K_f \left( \frac{\beta}{1 + \beta} \right)^{1/2}$ .

onde  $K_{IC}$  equivale ao fator de intensidade de tensão crítico, ou resistência à fratura, dependente da escala;  $K_f$  equivale à resistência à fratura de um elemento de dimensões infinitas e  $\beta$  representa

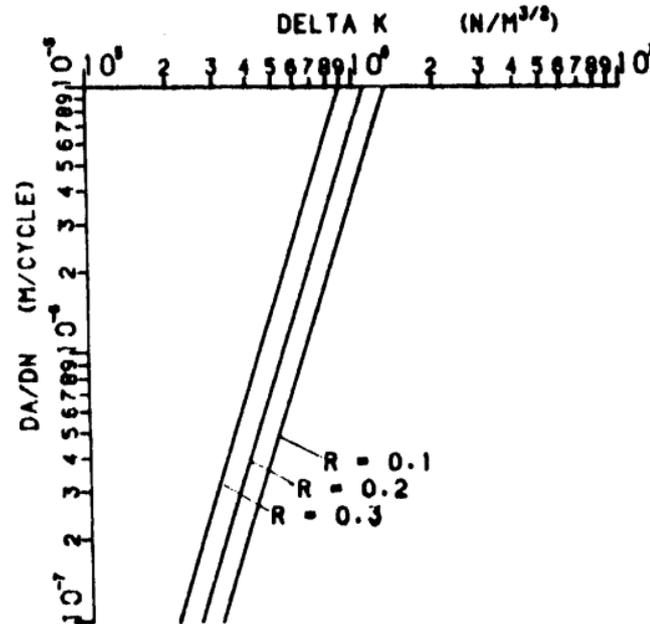


Figura 2.5 –  $\log\left(\frac{da}{dN}\right)$  vs.  $\log(\Delta K)$  para diferentes valores de  $R$ .  
(fonte: Baluch, Qureshy e Azad (1989, p. 87))

a razão entre a altura da viga  $D$  e o parâmetro empírico  $D_0$ , que segundo os autores, representa o valor de transição entre o trecho de validade da mecânica da fratura linear elástica e o comportamento governado por resistência.

Uma das conclusões obtidas por Bazant e Xu (1991) ao aplicar a versão modificada da lei de Paris para os resultados experimentais de vigas geometricamente semelhantes de diferentes alturas submetidas a carregamento cíclico de amplitude constante em flexão de três pontos, foi que o parâmetro empírico  $D_0$ , para o qual os resultados cíclicos melhor se ajustam é da ordem de 10 vezes maior que aqueles obtidos para o carregamento estático. Segundo os autores estes resultados indicariam que a ZPF para o processo de carregamento cíclico é mais alongada quando comparada com aquela observada em carregamentos estáticos.

Neste modelo proposto por Bazant e Xu (1991) o efeito de escala é incorporado apenas como consequência da utilização da mecânica da fratura linear elástica, desprezando assim efeitos de origem microestrutural. No entanto, conforme pode ser observado em Bazant e Planas (2019), este é apenas um dos seis fenômenos presentes no concreto que levam ao surgimento de efeitos de escala, sendo os demais: efeito de parede ou efeito de camada limite (*boundary layer effect*); fenômenos de difusão; calor de hidratação; efeito escala estatístico (sendo ressaltado pelo autor o efeito de escala estatístico de Weibull (1939); e a natureza fractal da formação de novas trincas de superfície.

Carpinteri, Spagnoli e Vantadori (2010) propõem uma modificação para a lei de Paris onde o

efeito de escala da estrutura seria incorporado através de conceitos de geometria multifractal, isto é, considerando-se que a dimensão do fractal varia com a dimensão da estrutura em análise, resultando na expressão modificada:

$$\frac{da}{dN} = C_1(a)(\Delta K_I)^m \quad (2.4)$$

onde  $C_1(a)$  é uma expressão que depende de  $a$ , sendo  $a = \xi D_i$ , onde  $\xi$  equivale ao comprimento relativo da trinca;  $D_i$  equivale a altura da viga e também de  $C$  (Equação 2.3) e outros parâmetros de ajuste. A Figura 2.6 mostra a taxa de crescimento da trinca em função do fator de intensidade de tensões para a obtenção dos parâmetros  $C_1$  e  $m$  da lei de Paris modificada.

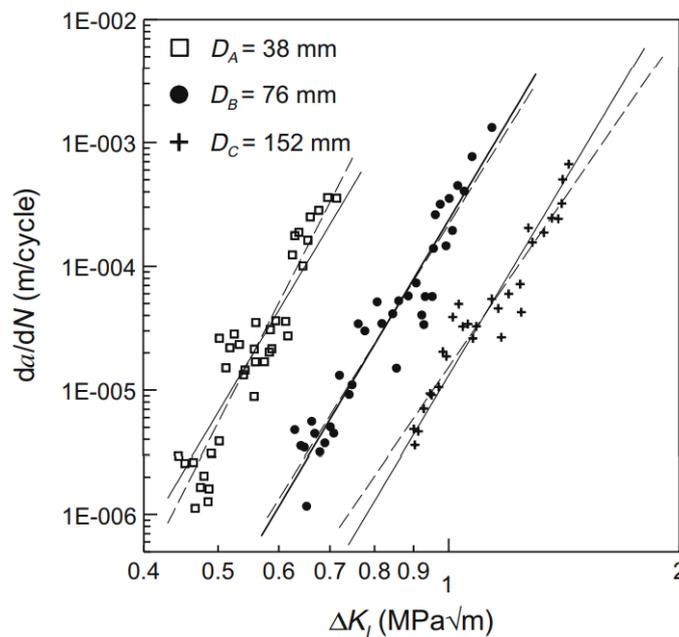


Figura 2.6 – Obtenção dos parâmetros  $C_1$  e  $m$  da lei de Paris modificada.  
(fonte: Carpinteri, Spagnoli e Vantadori (2010, p. 982))

A partir do trabalho de Le, Manning e Labuz (2014), onde os autores desenvolvem um modelo de efeito escala em fadiga para rochas e outros materiais quase-frágeis, Kirane e Bažant (2015b) propõem uma versão modificada da Lei de Paris a partir da incorporação da energia de fratura em fadiga. Em sua forma final, a lei proposta é expressa conforme a Equação (2.5):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \left( \frac{D + D_0^m}{D + D_0^c} \right)^{m/2} \quad (2.5)$$

onde  $C$  é uma constante empírica determinada experimentalmente e que, diferentemente dos casos anteriores, é uma função da energia de fratura em fadiga do concreto;  $D_0^m$  equivale a altura que determina o ponto de transição entre comportamento dúctil e frágil da estrutura sob carregamento monotônico;  $D_0^c$  equivale a dimensão que determina o ponto de transição entre comportamento dúctil e frágil da estrutura sob carregamento cíclico.

A partir deste modelo, Kirane e Bažant (2015b) conduziram uma série de análises tanto experimentais quanto numéricas em uma série de três vigas geometricamente semelhantes com diferentes alturas submetidas a carregamento cíclico de amplitude constante sob flexão de três pontos. Nestas análises os autores concluíram que o tamanho da ZPF durante o carregamento cíclico é menor que aquele observado para o carregamento monotônico, diferentemente da hipótese inicialmente proposta por Bazant e Xu (1991) onde a ZPF cíclica seria maior que a estática, esta diferença seria na ordem de 50%, ou seja, a ZPF cíclica é da ordem da metade daquela observada em carregamento estático. Outra conclusão obtida pelos autores é que o tamanho da ZPF não se mantém constante ao longo da vida em fadiga do concreto, de modo que há o aumento da mesma até dimensões que se aproximam daqueles observados para carregamentos estáticos.

Além das formulações que incorporam o efeito de escala na lei de Paris, outros autores buscaram incorporar diferentes situações de carregamento não previstos originalmente pela lei de Paris.

Slowik, Plizzari e Saouma (1996) analisaram o comportamento do concreto quando submetido à fadiga de baixo ciclo através de uma série de ensaios de separação em cunha (*wedge splitting test*, WST), onde foram avaliadas não apenas a escala dos corpos de prova, como também a resposta do material a aumentos súbitos de carregamento e o efeito que a história de carregamento possui sobre a degradação das propriedades do material. Desta forma, os autores propuseram o modelo descrito pela Equação (2.6):

$$\frac{da}{dN} = C \frac{K_{I_{max}}^m - \Delta K_I^n}{(K_{IC} - K_{I_{sup}})^p} + F(a, \Delta\sigma) \quad (2.6)$$

onde  $K_{I_{sup}}$  equivale ao máximo fator de intensidade de tensão ao qual a estrutura já foi submetido;  $K_{I_{max}}$  equivale ao fator de intensidade de tensão correspondente a tensão máxima aplicada;  $F(a, \Delta\sigma)$  equivale a uma função que correlaciona a brusca variação de tensão aplicada com o aumento de trinca;  $m$ ,  $n$  e  $p$  são parâmetros do material e independem de efeitos de escala, de modo que a incorporação destes efeitos é dada por  $K_{IC}$  e pela constante  $C$ . Segundo os autores, esta constante está relacionada com o tamanho da ZPF, sendo descrita pela Equação (2.7):

$$C = \left( -2 + 25 \frac{L}{l_{ch}} \right) 10^{-3} \quad (2.7)$$

em que  $l_{ch} = \frac{EG_F}{f_t^2}$  representa o comprimento característico da estrutura;  $E$  equivale ao módulo de elasticidade do material;  $G_F$  representa a energia de fratura característica do material.

### 2.3 MODELOS DE ZONA COESIVA

Estes modelos baseiam-se na adaptação do modelo de zona coesivas, originalmente propostos por Dugdale (1960) e Barenblatt (1962). A propagação somente ocorre se as tensões ultrapassarem

as tensões máximas  $f'_t$  e a trinca atingir uma abertura crítica na qual as tensões coesivas se anulam. Roesler *et al.* (2007) apresenta uma caracterização dos modelos coesivos utilizados para o concreto em quatro zonas específicas, conforme apresentado pela Figura 2.7.

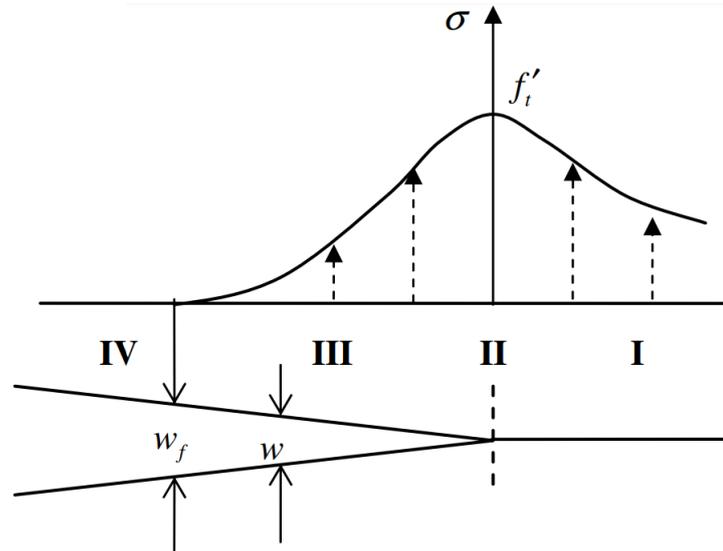


Figura 2.7 – Quatro estágios de um modelo coesivo. (fonte: Roesler *et al.* (2007))

No primeiro estágio o material encontra-se sem separação, neste trecho o material é governado por suas relações lineares elásticas correspondentes. Já para o segundo estágio atinge-se o critério de tensão previamente estabelecido, neste ponto há a mudança entre as relações constitutivas. No terceiro estágio, o material passa a ser governado pelas relações constitutivas pós-tensão de pico. Por fim, no quarto estágio caracteriza a ruptura do material.

Na literatura pode-se encontrar diversas formas de se representar a lei constitutiva pós-pico, estudos específicos para concreto usualmente utilizam leis constitutivas lineares (HILLERBORG; MODÉER; PETERSSON, 1976), bilinear (PETERSSON, 1981); (ROESLER *et al.*, 2007) e exponencial (GOPALARATNAM; SHAH, 1985). No entanto todos estes estudos utilizam esta abordagem para análise estática.

No estudo do comportamento em fadiga do concreto esta abordagem foi utilizada inicialmente por Gylltoft (1983). Neste trabalho, o autor propõe uma relação coesiva baseada em um critério energético onde a energia de fratura é consumida em parcelas ao longo do processo de carregamento e descarregamento, conforme exemplificado pela Figura 2.8.

Segundo Gylltoft (1983), durante o processo de carga e descarga a área  $A_1$  é fornecida à ZPF para dissipação de fenômenos nela presentes e é numericamente igual a área  $A_2$ , de modo que para cada ciclo completado subtrai-se da energia de fratura total ( $G_F$ ) representada pela área total abaixo da curva original, até que toda a energia disponível seja consumida e ocorra a

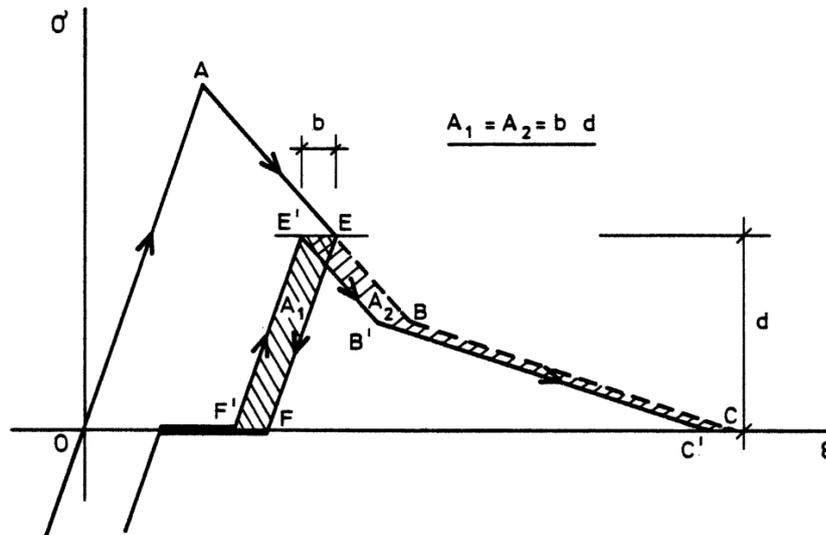


Figura 2.8 – Relação constitutiva pós-pico baseada em um critério de energia. (fonte: Gylltoft (1983, p. 71))

ruptura. Hordijk (1991) aponta que esta abordagem possui duas consequências diretas: a curva de amolecimento não assume uma forma única e que efeitos friccionais presentes na interface não são considerados.

Baseando-se em resultados experimentais de tração direta em elementos de concreto, Hordijk (1991) propõe um método para descrever o comportamento cíclico pós-pico do concreto conhecido como *continuous function model*, cuja forma geral da relação constitutiva de amolecimento pode ser observada pela Figura 2.9.

Diferente do modelo de Gylltoft (1983), observa-se uma relação não linear na descarga/recarga, bem como uma perda de resistência  $\Delta\sigma$  neste processo.

Hordijk e Reinhardt (1991) apresentaram uma implementação em elementos finitos do *continuous function model* utilizada para a análise do comportamento em fadiga de uma viga em concreto submetido a carregamento cíclico de amplitude constante variando entre 0 e 95% da carga de ruptura estática ( $F_{max}$ ) do elemento.

De maneira geral, os resultados apresentados por Hordijk e Reinhardt (1991) apresentaram boa concordância com os resultados experimentais de deslocamento, conforme apresentado na Figura 2.10.

Outra conclusão obtida pelos autores através da utilização deste modelo é que, para o caso analisado, a curva carga vs. deflexão estática do material poderia ser utilizada como critério de ruptura para o comportamento em fadiga, uma vez que a última configuração válida para o modelo se dá internamente a curva estática, conforme pode ser observado pela Figura 2.11.

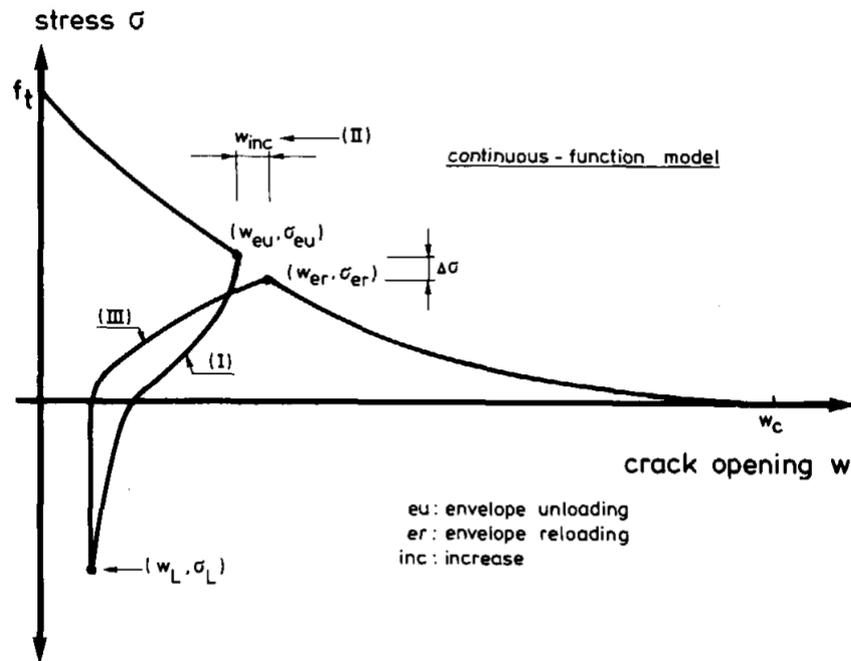


Figura 2.9 – Relação constitutiva pós-pico baseada em um critério de energia. (fonte: Hordijk (1991, p. 88))

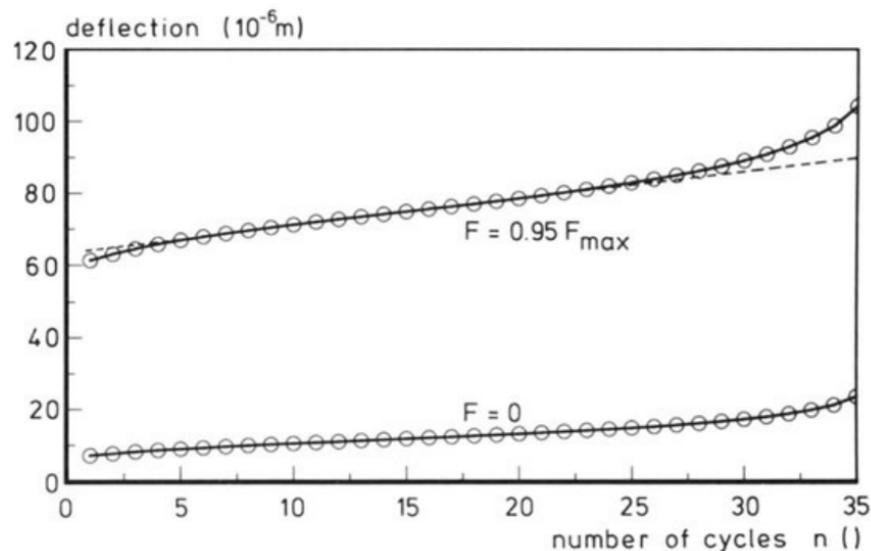


Figura 2.10 – Comparação dos resultados de deflexão vs número de ciclos obtidos (linha tracejada) com resultados experimentais (linha cheia). (fonte: Hordijk e Reinhardt (1991))

No entanto, através de uma série de investigações experimentais, Kolluru *et al.* (2000) concluíram que a utilização de um critério de ruptura para a fadiga do concreto baseado em deflexões não é adequado. Segundo o autor, apesar da dispersão apresentada pelos resultados, comparações entre deflexões na ruptura sob carregamento estático e cíclico tendem a ser significativamente maiores para estes em relação àqueles. Kolluru *et al.* (2000) sugerem que o monitoramento da variação de rigidez ao longo do processo de carregamento cíclico possa ser uma abordagem mais indicada.

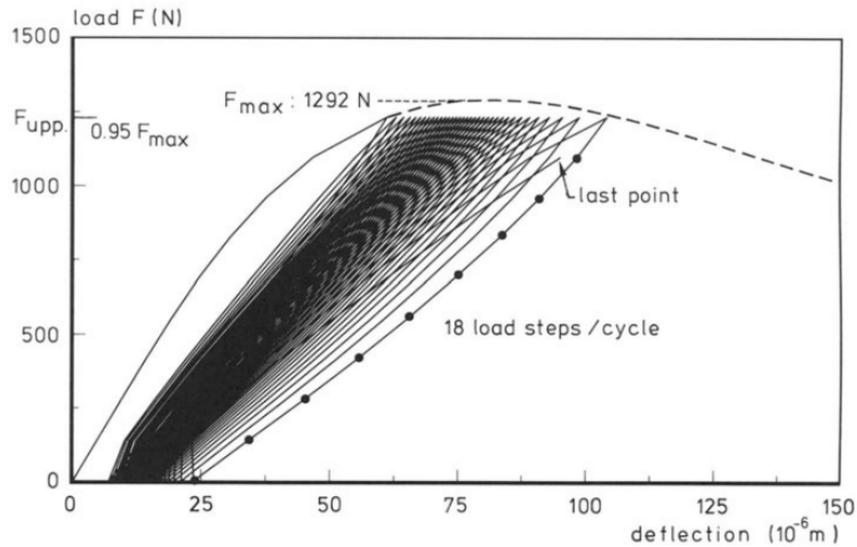


Figura 2.11 – Comparação dos resultados de carga vs. deflexão. (fonte: Hordijk e Reinhardt (1991, p. 550))

Toumi e Bascoul (2002) modificaram o *continuous function model* a partir da substituição das equações de descarga e recarga não-lineares apresentados por Hordijk (1991) por relações lineares, conforme observado na Figura 2.12, mantendo-se a envoltória de amolecimento original.

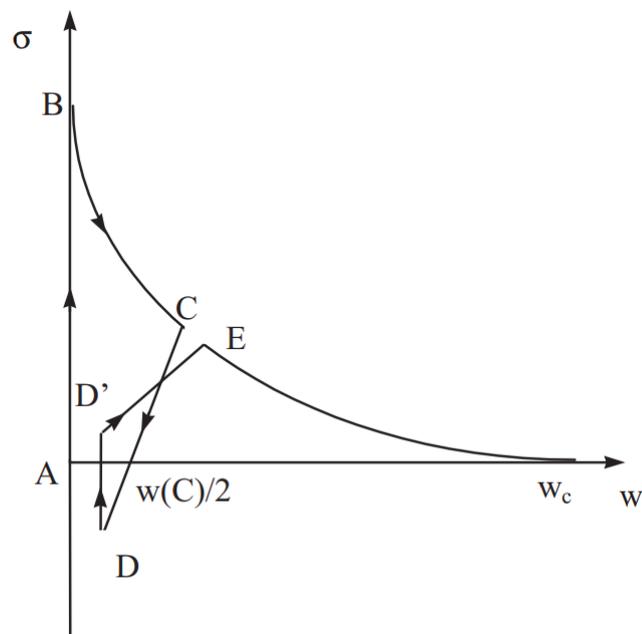


Figura 2.12 – *Continuous function model* modificado. (fonte: Toumi e Bascoul (2002, p. 1307))

Na Figura 2.12 é mostrado que retorno do ponto  $D'$  para o ponto  $E$  da envoltória passa a ser dado pela Equação (2.8):

$$\sigma = [1 - \mu] \sigma(C) \frac{w}{w(E)} \quad (2.8)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de degradação que, segundo Hordijk (1991), seria independente do estado de tensão prévio a descarga de  $\sigma(C)$ .

Toumi e Bascoul (2002) aplicaram a versão modificada do *continuous function model* na análise do comportamento de vigas em condições de carregamento estático e cíclico de amplitude constante, conforme apresentado na Figura 2.13. De maneira geral, os resultados de fadiga apresentaram comportamento próximo aquele observado experimentalmente, com uma clara tendência a superestimar o comprimento de trinca durante o processo de propagação estável, este fenômeno tende a desaparecer próximo a ruptura do material.

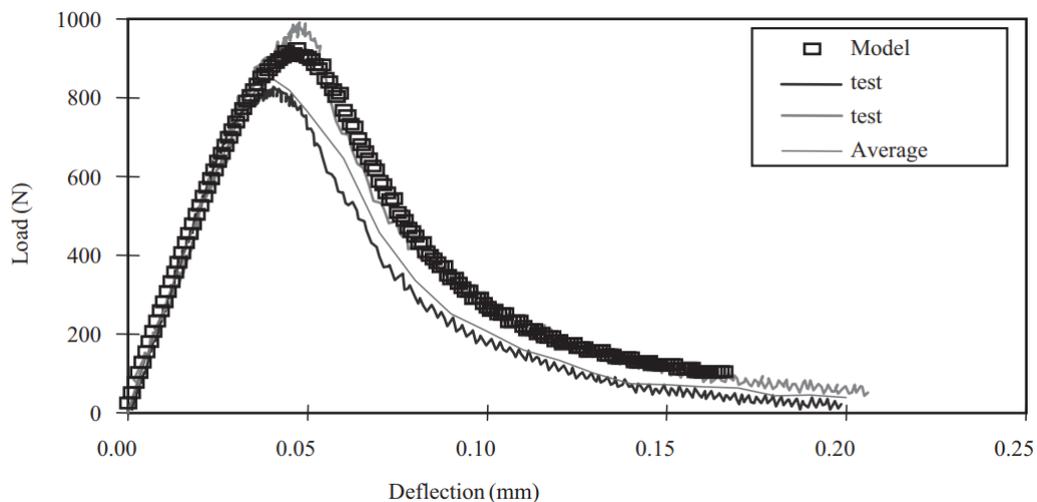


Figura 2.13 – Comparação numérica e experimental dos diagramas carga vs deflexão para carregamento quase-estático (fonte: Toumi e Bascoul (2002))

Devidos às suas semelhanças metodológicas, modelos como os de Gylltoft (1983) e Hordijk (1991), e por consequência o modelo de Toumi e Bascoul (2002), são classificados por Kuna e Roth (2015) como modelos histeréticos e são considerados como precursores dos modelos de zona coesivos cíclicos (em inglês CCZM) irreversíveis propostos inicialmente por Nguyen *et al.* (2001) e Yang, Mall e Ravi-Chandar (2001).

Os CCZM diferenciam-se dos modelos ditos histeréticos na forma como a degradação das propriedades do material é incorporada no processo de simulação. Ao invés de associar o processo de degradação dentro da formulação da relação constitutiva pós-pico os modelos cíclicos adotam uma formulação onde o dano é analisado como uma variável à parte e independente da relação constitutiva.

A partir desta abordagem, Roe e Siegmund (2003) propuseram um CCZM irreversível a partir do modelo coesivo monotônico de Needleman (1992) onde as tensões coesivas são corrigidas a cada ciclo por uma variável de dano escalar de modo análogo ao utilizado por Toumi e Bascoul

(2002), conforme a Equação (2.9):

$$\sigma(E) = [1 - \mu]\sigma(C) \quad (2.9)$$

onde,  $\mu$  corresponde ao dano. No entanto, ao invés de considerar um parâmetro de degradação fixo, Roe e Siegmund (2003) propõem uma formulação de incremento de dano cíclico seguindo-se as recomendações de Lemaitre (2012). Mais detalhes sobre esta formulação será fornecida no Capítulo 3.

Roth, Hütter e Kuna (2014) apresentaram um CCZM que utiliza potencial coesivo para se obter a lei tração-separação (TSL). O modelo faz uso de uma aproximação generalizada baseada na relação exponencial de Xu e Needleman (1994), que serviu também de base para o modelo de Roe e Siegmund (2003), para descrever a TSL, no qual dois parâmetros são utilizados para ajustar esta lei. Este modelo considera a dissipação energética como medida do dano, uma abordagem semelhante a de De-Andrés, Pérez e Ortiz (1999) e Ortiz e Pandolfi (1999). O modelo proposto por Roth, Hütter e Kuna (2014) também será detalhado no Capítulo 3.

## 2.4 OUTROS MODELOS DE ANÁLISE DE FADIGA NO CONCRETO

Uma outra possibilidade de modelo de fadiga para aplicação no concreto são os chamados modelos de banda fissurada (*crack band model*) proposto por Bažant e Oh (1983). Uma limitação dos modelos de zona coesiva é que ele não descreve o comportamento tensorial completo na ZPF. No modelo de banda fissurada, o dano relativo ao trecho de amolecimento é espalhado em uma faixa contínua de material, chamada de banda de fissura, na qual fissuras coesivas se desenvolvem dentro do elemento. A largura da banda é assumida como uma propriedade do material. Neste modelo os parâmetros do material são ajustados em função da inclinação do trecho de amolecimento de modo que a mesma quantidade de energia é dissipada na falha dos elementos finitos independentes do seu tamanho.

A largura da ZPF pode ser simulada pela banda de fissura. Assim como uma largura de referência pode servir como um comprimento característico do material, representando um limitador de localização, que funciona como uma técnica para se evitar o aparecimento de oscilações espúrias na malha dos resultados numéricos. No entanto, este modelo apresenta desvantagens, afetando a objetividade da malha, na medida que a diminuição do comprimento dos elementos da malha causa um comportamento mais frágil do material. A solução deste problema consiste em limitar o tamanho da malha em função das propriedades constitutivas do material, tais como energia de fratura, o módulo de elasticidade e a tensão de tração, bem como da largura da banda fissurada. Para uma banda de fissura de largura muito pequena este modelo pode ser aproximado a um modelo de trinca coesivo.

Os modelos de dano contínuo são uma outra abordagem para avaliar o comportamento mecânico devido aos danos progressivos causados pela fadiga. Estes modelos incorporam uma variável de dano para representar a degradação das propriedades do material devido ao dano progressivo no material. A diferença básica em relação a outros modelos é a forma como são abordadas as trincas nos materiais. Por exemplo, no modelo de zonas coesivas a trinca é representada como uma interface coesiva explícita, enquanto nos modelos de dano contínuo estas trincas são representadas como um dano progressivo distribuído internamente em todo o material.

Estes modelos derivam dos modelos de dano de Kachanov (1958) e Lemaitre e Chaboche (1978) e são utilizados dependendo do tipo de material e do comportamento do dano observado experimentalmente. Para o concreto, Mazars (1986) aplicou a teoria de dano contínuo para um modelo baseado em um potencial termodinâmico. Neste modelo, o autor introduziu duas variáveis de dano, uma em tração e outra em compressão para decrever o comportamento do material devido a efeitos direcionais, como o fechamento de fissuras. Na mesma direção Cervera, Oliver e Manzoli (1996) formularam um modelo que também incorpora duas variáveis de dano. Uma representa o dano à tração, enquanto a outra representa o dano à compressão. Posteriormente, Cervera *et al.* (2010) introduziu uma técnica capaz de rastrear trincas para danos localizados em materiais quase frágeis. A técnica permite prever onde se originam e a trajetória da propagação de fissuras.

Um outro modelo é o chamado modelo de microplano. Conforme Bažant e Oh (1985) e mais recentemente Caner e Bažant (2013) desenvolveram o modelo constitutivo de microplano que é definido por uma relação entre as tensões e deformações que atuam em um plano genérico de orientação qualquer no material, denominado microplano. Este modelo pode ser utilizado em várias aplicações, por exemplo, para prever o crescimento de trincas por fadiga e o comportamento triaxial do concreto danificado, conforme Kirane e Bažant (2015a) e para a avaliação do efeito escala na Lei de Paris, conforme Kirane e Bažant (2015b).

Novas tendências utilizando modelos baseado em *machine learning* como as redes neurais têm sido desenvolvidos para prever o comportamento à fadiga de diversos tipos de materiais, inclusive o concreto. A idéia fundamental das redes neurais é a exploração de grandes conjuntos de dados experimentais para descrever e prever a fadiga. O funcionamento destas redes é semelhante ao cérebro humano em que a máquina aprende a prever e analisar padrões e comportamentos a partir de um complexo conjunto de dados de entrada. As técnicas mais comuns de redes neurais utilizados nos modelos de fadiga são as Redes Neurais Artificiais (inglês *Artificial Neural Networks*, ANN) e as Redes Neurais de Convolução ((inglês *Convolutional Neural Networks*, CNN).

Este novo paradigma é uma ferramenta promissora na previsão dos resultados de fadiga em estruturas de concreto. Uma combinação entre os modelos baseados em *machine learning*, os

modelos computacionais existentes e os programas experimentais são uma tendência para a solução de problemas de fadiga.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão abordadas as bases teóricas do modelo numérico utilizado para o desenvolvimento das aplicações propostas. Para tal, este capítulo encontra-se dividido em quatro seções apresentados na seguinte ordem: a implementação do princípio dos trabalhos virtuais; o modelo coesivo cíclico de Roe e Siegmund (2003); o modelo coesivo cíclico de Roth, Hütter e Kuna (2014); a proposta de um modelo de evolução de dano baseado nos modelos descritos; e, finalmente, um resumo dos procedimento de implementação em elementos finitos na plataforma METAFOR.

#### 3.1 EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

##### 3.1.1 Notação básica

As quantidades físicas utilizadas nesta seção são representadas por tensores em diferentes direções mutuamente independentes. A notação dos tensores pode ser simbólica ou indicial. Na notação indicial os tensores são representados, conforme as Equações (3.1) e (3.2):

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 T_i \vec{e}_i \quad (3.1)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad (3.2)$$

onde,  $\vec{e}_i$  são os vetores ortonormais da base cartesiana, no qual cada índice representa uma direção com valores  $i, j = \{1, 2, 3\}$ ; o símbolo  $\otimes$  indica produto tensorial;  $\sigma$  é o tensor tensão de Cauchy que pode ser expresso simplesmente por  $\sigma_{ij}$ . O número de índices livres indica o nível tensorial de uma equação tensorial.

De acordo com a notação de Einstein, o símbolo de somatório pode ser omitido e o tensor de tensões de Cauchy, por exemplo, pode ser escrita de forma simbólica

$$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

ou em notação indicial

$$T_i = \sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 + \sigma_{3i}n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}n_j = \sigma_{ji}n_j \quad (3.4)$$

que descreve três equações, pois contém um índice livre  $i$ . O último termo da Equação (3.4) denota a notação de Einstein.

### 3.1.2 Cinemática

A formulação lagrangeana é utilizada para descrever a posição das partículas em função da configuração do sistema que é tomada como referência ou no seu estado inicial ( $t = t_0$ ). O movimento do corpo é definido pela posição de cada partícula como uma função do tempo. A continuidade é expressa pela continuidade espacial e temporal de todos os pontos desde a posição inicial ( $X_i$ ) até sua posição atual ( $x_i$ ), conforme a (3.5).

$$x_i = x_i(X_i, t) \quad (3.5)$$

Para um ponto material em seu estado inicial e atual, ou seja, nos tempos  $t = t_0$  e  $t > 0$ , o vetor deslocamento resulta da diferença das posições nas duas configurações:

$$u_i(X_i, t) = x_i(X_i, t) - X_i \quad (3.6)$$

O gradiente de deformação  $F_{ij}$  representa uma relação entre a configuração inicial e a atual:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.7)$$

Este tensor leva um elemento de linha infinitesimal da configuração inicial para a atual:

$$dx_i = F_{ij}dX_j \quad (3.8)$$

O determinante do gradiente de deformação é chamado de jacobiano:

$$j = \det(F_{ij}) \quad (3.9)$$

Ele permite a conversão de vetores normais de superfície diferencial e elementos de volume diferencial da configuração de referência para a configuração atual:

$$da_i = jF_{ji}^{-1}dA_j \quad (3.10)$$

$$dv = jdV \quad (3.11)$$

### 3.1.3 Cinética

O equilíbrio de forças sobre um elemento de superfície da seção transversal de um corpo na configuração atual é dado por:

$$d\vec{f} = \vec{T}da = \sigma \cdot \vec{n}da \quad (3.12)$$

O mesmo vetor de força interna diferencial  $d\vec{f}$  também pode ser relacionado a um elemento de superfície da configuração inicial:

$$d\vec{f} = \underbrace{\sigma \cdot j\mathbf{F}^{-T}}_{\Pi} \cdot \vec{N}dA = \Pi \cdot \vec{N}dA = \vec{t}dA \quad (3.13)$$

onde,  $\Pi$  é o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchoff. Ele relaciona o vetor tensão atual, representado por  $\vec{T}$ , com um elemento de superfície da configuração inicial.

### 3.1.4 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio a seguir são caracterizadas pelas leis de conservação. As equações de equilíbrio consideradas são as leis de conservação de massa, momento linear, momento angular e energia. Embora na mecânica da fratura possa se considerar os problemas como termomecânicos, os processos apresentados nos modelos mecânicos deste trabalho são considerados adiabáticos, e, portanto, o balanço de entropia não é considerado.

Seja um corpo homogêneo de volume  $v$  tendo duas partes separadas por uma zona coesiva ( $\Gamma^{ZC}$ ), um local onde atuam as restrições e deslocamentos prescritos ( $\Gamma^F$ ) e um local onde atuam forças prescritas ( $\Gamma^U$ ), conforme a Figura 3.1. A zona coesiva é considerada como uma heterogeneidade entre as partes do corpo de volume  $v$  e tratada de forma independente, de acordo com a Figura 3.2.

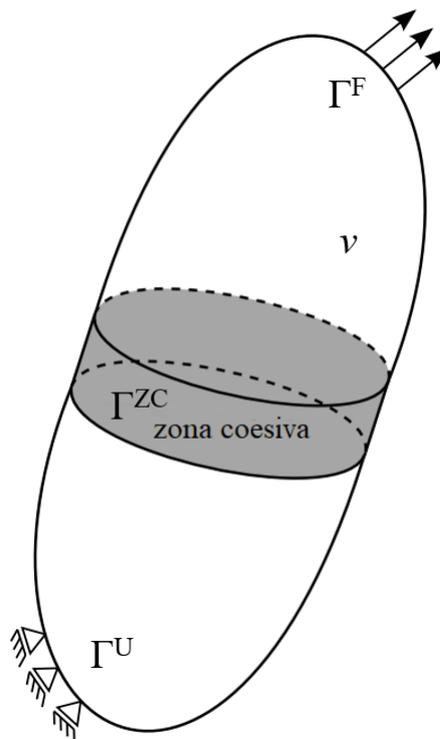


Figura 3.1 – Corpo homogêneo com zona coesiva. (fonte: o autor)

#### **Conservação da massa**

Como não há variação da massa no tempo, então  $\dot{m} = 0$ . Assim, a massa  $m$  de um corpo com volume atual  $v$  e densidade  $\rho$  em descrição Lagrangiana é dada por:

$$m = \int_v \rho \, dv = \int_V \rho_0 \, dV = \text{const.} \quad (3.14)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade e  $V$  é o volume na configuração inicial.



### 3.2 IMPLEMENTAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

A equação fundamental do PTV utiliza a conservação do momento linear descrita pela Equação (3.17) considerando deslocamentos virtuais arbitrários ( $\delta U_i$ ,  $\delta \delta_i$ ). Para a representação do estado de equilíbrio do problema se faz necessária a inclusão de uma parcela de trabalho interno referente aos elementos de interface coesiva, desta forma, o PTV é dado

$$\int_v \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i - \rho \ddot{U}_i \right) \delta U_i dv + \underbrace{\int_{\Gamma^{ZC}} T_i \delta \delta_i d\Gamma^{ZC}}_{\text{elem. da ZC}} = 0 \quad (3.19)$$

Rearranjando os termos da primeira integral e isolando o seu primeiro termo no lado esquerdo resulta:

$$\int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta U_i dv = \int_v \rho (\ddot{U}_i - B_i) \delta U_i dv + \int_{\Gamma^{ZC}} T_i \delta \delta_i d\Gamma^{ZC} \quad (3.20)$$

Utilizando o teorema de Green e a integração por partes, tem-se:

$$\int_v \frac{\partial F}{\partial x_j} G dv = - \int_v F \frac{\partial G}{\partial x_j} dv + \int_a F G n_j da \quad (3.21)$$

onde  $F = \delta U_i$  e  $G = \sigma_{ij}$ . A equação resulta em

$$\int_v \sigma_{ij} \frac{\partial \delta U_i}{\partial x_j} dv = - \int_v \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta U_i dv + \int_{\Gamma^F} \delta U_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma^F \quad (3.22)$$

Substituindo o termo negativo pelo resultado da Equação (3.20) a expressão resulta em

$$\underbrace{\int_v \sigma_{ij} \frac{\partial \delta U_i}{\partial x_j} dv}_{\text{TV de deformação}} + \underbrace{\int_v \rho \ddot{U}_i \delta U_i dv}_{\text{TV da aceleração}} + \underbrace{\int_{\Gamma^{ZC}} T_i \delta \delta_i d\Gamma^{ZC}}_{\text{TV dos el. da ZC}} = \underbrace{\int_v \rho B_i \delta U_i dv + \int_{\Gamma^F} \overbrace{\sigma_{ij} n_j}^{=F_i} \delta U_i d\Gamma^F}_{\text{TV das ações externas}} \quad (3.23)$$

onde  $v$  representa o volume do corpo;  $\Gamma^F$  a superfície do corpo onde atuam as forças externas aplicadas e  $\Gamma^{ZC}$  a superfície da zona coesiva;  $\sigma_{ij}$  são as tensões de Cauchy,  $U_i$  os deslocamentos virtuais nodais ao longo do corpo,  $\rho$  a densidade do material,  $T_i$  vetores tensão na interface da trinca,  $\delta_i$  a abertura da zona coesiva,  $B_i$  as forças de volume e  $\sigma_{ij} n_j = F_i$  as forças aplicadas no contorno do corpo.

Considerando uma solução em elementos finitos, onde o domínio é dividido em elementos e nós, considera-se  $U_i$  como os deslocamentos nodais e a Equação (3.23) pode ser transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias a partir da eliminação dos deslocamentos virtuais nodais. Então, esta passa ser escrita sob a forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0 \quad (3.24)$$

onde  $\mathbf{M}$  representa a matriz de massa consistente,  $\ddot{\mathbf{U}}$  as acelerações nos nós,  $\mathbf{F}^{\text{int}}$  as forças internas e  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  forças externas nodais. Para o caso em estudo, as forças devidas aos elementos

coesivos passam a ser contabilizadas como uma parcela do vetor de forças internas. Em todas as aplicações realizadas são desprezados os efeitos inerciais devido ao carregamento cíclico tornando o problema em quase-estático, no qual  $\ddot{\mathbf{U}} = 0$ . Portanto, o sistema a ser resolvidos reduz-se a  $\mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$ . Devido este sistema ser não linear, o mesmo pode ser resolvido empregando-se o Método de Newton-Raphson.

Neste trabalho os elementos coesivos que foram adotados baseiam-se nos trabalhos de Roe e Siegmund (2003) e Roth, Hütter e Kuna (2014).

### 3.3 O MODELO COESIVO CÍCLICO DE ROE E SIEGMUND (2003)

Este modelo pode ser separado em duas partes: o modelo monotônico e o cíclico.

#### 3.3.1 Modelo monotônico

Consiste no modelo originalmente formulado por Xu e Needleman (1993). A lei coesiva, desenvolvida para descrever a separação de materiais  $\delta_i$  ( $i = n, r, s$ ) sob carregamento monotônico, é dada por uma função potencial,  $\phi$ , que é fundamentada por potenciais interatômicos. O potencial,  $\phi$ , depende do valor atual dos componentes de separação normal, tangencial e transversal,  $\delta_n$ ,  $\delta_r$  e  $\delta_s$ . As derivadas do potencial em relação a estas componentes fornecem as tensões coesivas, de acordo com a (3.25), ou seja, as derivadas do potencial em relação as separações  $\delta_n$ ,  $\delta_r$  e  $\delta_s$  fornecem as tensões coesivas normal, tangencial e transversal,  $T_n$ ,  $T_r$  e  $T_s$ , respectivamente, conforme as Equações (3.26), (3.27) e (3.28), (também denominado do inglês *traction-separation envelope*, TSE)

$$T_i = \frac{\partial \phi}{\partial \delta_i} \quad (3.25)$$

$$T_n = T_{n,max,0} \exp \left( 1 - \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \frac{\delta_n}{\delta_0} \left\{ (1 - q) + q \left[ \exp \left( -\frac{(\delta_r^2 + \delta_s^2)}{\delta_0^2} \right) \right] \right\} \quad (3.26)$$

$$T_r = 2qT_{n,max} \exp \left( 1 + \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \frac{\delta_r}{\delta_0} \exp \left( 1 - \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \exp \left( -\frac{(\delta_r^2 + \delta_s^2)}{\delta_0^2} \right) \quad (3.27)$$

$$T_s = 2qT_{n,max} \exp \left( 1 + \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \frac{\delta_s}{\delta_0} \exp \left( 1 - \frac{\delta_n}{\delta_0} \right) \exp \left( -\frac{(\delta_r^2 + \delta_s^2)}{\delta_0^2} \right) \quad (3.28)$$

No caso de aplicações bidimensionais, a separação transversal é considerada nula ( $\delta_s = 0$ ) e, por consequência, a tração transversal também será nula ( $T_s = 0$ ).

Neste modelo, dois parâmetros são importantes para descrever as relações constitutivas. Um dos parâmetros do material são as tensões coesivas iniciais sob carregamento monotônico, a saber, a máxima tensão inicial normal  $T_{n,max,0}$  alcançada sob carregamento normal puro e a resistência

coesiva ao cisalhamento inicial sob carregamento monotônico, que são os valores máximo para as tensões iniciais tangencial e transversal,  $T_{r,max,0}$  e  $T_{s,max,0}$ , a serem alcançadas sob separação por cisalhamento puro. As tensões iniciais tangencial e transversal,  $T_{r,max,0}$  e  $T_{s,max,0}$ , se relacionam com a tensão inicial normal,  $T_{n,max,0}$ , conforme descrito na Equação (3.29).

$$T_{i,max,0} = \sqrt{2 \exp(1)} q T_{n,max,0} \quad i = r, s \quad (3.29)$$

O segundo parâmetro do material, o comprimento coesivo,  $\delta_0$ , é a separação coesiva necessária para atingir a resistência coesiva em abertura normal. As energias de superfície coesiva normal  $\phi_{n,0}$ , tangencial  $\phi_{r,0}$  e transversal  $\phi_{s,0}$  sob carregamento monotônico, são definidas pelas Equações (3.30), (3.31) e (3.32), respectivamente.

$$\phi_{n,0} = T_{n,max,0} \delta_0 \exp(1) \quad (3.30)$$

$$\phi_{r,0} = \sqrt{\frac{\exp(1)}{2}} T_{r,max,0} \delta_0 \quad (3.31)$$

$$\phi_{s,0} = \sqrt{\frac{\exp(1)}{2}} T_{s,max,0} \delta_0 \quad (3.32)$$

O parâmetro  $q$  é a razão  $\phi_{i,0}/\phi_{n,0}$  ( $i = r, s$ ). As relações de tração-separação das Equações (3.25), (3.26) e (3.27) são representados na Figura 3.3 para separação normal e cisalhamento puro. Sob separação normal crescente, a tração normal aumenta até que a separação seja igual a  $\delta_0$ , e subsequentemente diminui até quase zero em uma separação normal de  $\delta_n = 5\delta_0$ . Sob separação por cisalhamento puro, a tração de cisalhamento de pico ocorre em uma separação por cisalhamento de  $\delta_i = (\sqrt{2}/2)\delta_0$  ( $i = r, s$ ) e, posteriormente, a tração de cisalhamento diminui com o aumento da separação de cisalhamento, atingindo aproximadamente zero em  $\delta_i = 3\delta_0$  ( $i = r, s$ ).

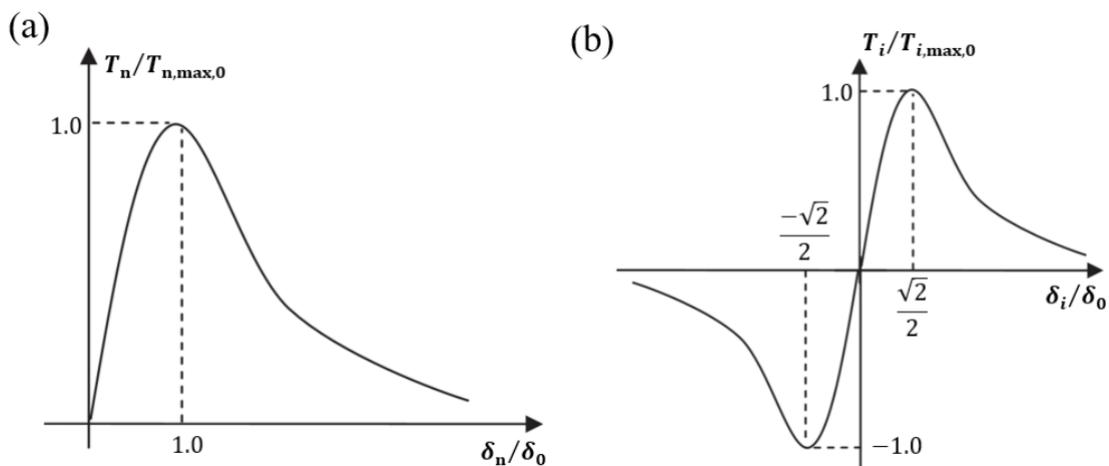


Figura 3.3 – Relação monotônica tensão-separação sob: (a) carregamento normal puro e (b) carregamento de cisalhamento puro (tangencial:  $i=r$  e transversal:  $i=s$ ). (fonte: Moresco (2022, p. 66))

### 3.3.2 Modelo de dano

De modo a incorporar os efeitos da degradação das propriedades coesivas devido o processo de carregamento cíclico, Roe e Siegmund (2003) introduzem uma variável escalar de dano  $D$  que é utilizada para atualizar as propriedades coesivas, conforme a (3.33):

$$T_{i,max} = (1 - D)T_{i,max,0}, \quad i = n, r, s \quad (3.33)$$

Para o cálculo do dano atual, a evolução do dano é descrita da forma  $\dot{D} = \dot{D}(T_i, \delta_i, D)$ . Para carregamento cíclico, a equação de evolução do dano caracteriza a falha da zona coesiva devido ao ciclo em cargas subcríticas. O modelo proposto por Roe e Siegmund (2003), que é baseado nas recomendações de Lemaitre (2012), incorpora algumas características das leis típicas de evolução do dano:

- O dano só começa a se acumular se uma medida de deformação, acumulada ou corrente, for maior que uma magnitude crítica;
- O incremento de dano está relacionado ao incremento de separação ponderado pelo nível de carga atual;
- Existe um limite de resistência que é um nível de resistência abaixo do qual o carregamento cíclico pode prosseguir infinitamente sem falha.

Com base nestes três requisitos, o cálculo de incrementos de dano cíclico  $\Delta D_c$  é obtido segundo a Equação (3.34):

$$\Delta D_c = \frac{\langle \Delta \delta \rangle}{\delta_\Sigma} \left[ \frac{\bar{T}}{T_{n,max}} - \frac{T_f}{T_{n,max,0}} \right] H(\delta_{acc} - \delta_0), \quad \Delta D_c \geq 0 \quad (3.34)$$

sendo que  $H$  representa uma função de *Heaviside* controlada pela separação coesiva total acumulada,  $\delta_{acc}$ , dada pela Equação (3.35):

$$\delta_{acc} = \int_t |\Delta \delta| dt \quad (3.35)$$

$\Delta \delta$  representa o incremento de abertura, dado por  $\Delta \delta = \delta_t - \delta_{t-\Delta t}$  ( $t$  indica o tempo atual e  $\Delta t$  um incremento temporal). Os autores adicionam dois novos parâmetros do material, sendo estes: o comprimento coesivo acumulado  $\delta_\Sigma$ , sendo este um fator de ponderação do dano; e o parâmetro  $C_f$  dado pela Equação (3.36), que corresponde a razão entre a tensão limite de resistência a fadiga,  $T_f$ , e a tensão coesiva máxima inicial do material,  $T_{n,max,0}$ .

$$C_f = \frac{T_f}{T_{n,max,0}} \quad (3.36)$$

A tensão coesiva resultante  $\bar{T}$  é obtida pela Equação (3.37), em que o termo  $2 \exp(1)q^2$  tem a função de ponderar as tensões cisalhantes em relação a tensão normal.

$$\bar{T} = \sqrt{\frac{T_n^2 + T_r^2 + T_s^2}{2 \exp(1)q^2}} \quad (3.37)$$

Adicionalmente ao incremento de dano devido o carregamento cíclico, Roe e Siegmund (2003) propõem a Equação (3.38) de modo a incorporar o processo de acumulação de dano devido ao carregamento monotônico.

$$\Delta D_m = \frac{\delta_t - \delta_{t-\Delta t}}{4\delta_0}, \quad \text{se } \delta_{t-\Delta t} > \delta_0 \quad (3.38)$$

De modo que as condições  $D_m = 0$  para  $\delta = \delta_0$  e  $D_m = 1$  para  $\delta = 5\delta_0$  encontram-se satisfeitas. Desta forma o acúmulo de dano considerado é o maior entre o incremento de dano cíclico e o incremento de dano monotônico a partir da Equação (3.39).

$$D = \int_t \max(\Delta D_m, \Delta D_c) dt \quad (3.39)$$

### 3.3.3 Modelo de carga/descarga

Para o desenvolvimento das aplicações propostas neste trabalho foram utilizados dois modelos de carga/descarga distintos. O primeiro processo utilizado neste trabalho segue a Equação (3.40), segundo Wang e Siegmund (2005). Neste modelo a descarga ocorre seguindo a rigidez  $T_{i,prev}/\delta_{i,prev}$  que em uma situação de descarga plena tanto as tensões coesivas quanto as aberturas retornam para a origem, desta forma não são introduzidos os deslocamentos residuais.

$$T_i = \delta_i \frac{T_{i,prev}}{\delta_{i,prev}}, \quad i = n, r, s \quad (3.40)$$

$$T_n = T_{n,prev} + \frac{T_{n,max} \exp(1)}{\delta_0} (\delta_n - \delta_{n,prev}) \quad (3.41)$$

A Figura 3.4 apresenta uma aplicação deste processo de carga/descarga, no qual os ciclos sucessivos alteram a inclinação da reta e modificam a curva de comportamento.

O segundo modelo utilizado neste trabalho segue as Equações (3.42) e (3.43), segundo Siegmund (2004), neste modelo ocorre o acúmulo de separação residual a cada ciclo de carga/descarga realizado.

$$T_n = T_{n,prev} + \frac{T_{n,max} \exp(1)}{\delta_0} (\delta_n - \delta_{n,prev}) \quad (3.42)$$

$$T_i = T_{i,prev} + \sqrt{2 \exp(1)} \frac{T_{i,max}}{\delta_0} (\delta_i - \delta_{i,prev}), \quad i = r, s \quad (3.43)$$

A Figura 3.5 mostra uma representação deste processo.

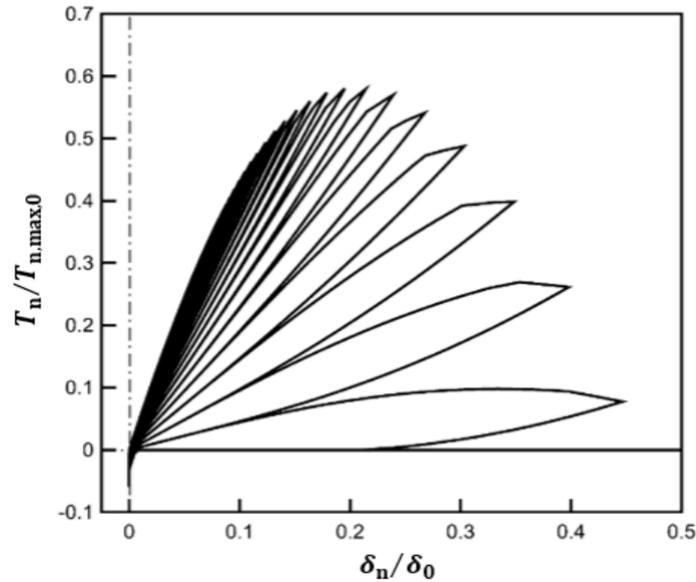


Figura 3.4 – Lei de descarga até a origem com redução da tensão coesiva sem deslocamento residual. (fonte: Moresco (2022, p. 69))

Durante o processo de descarga da superfície coesiva, o valor de abertura normal pode atingir valores nulos ou negativos,  $\delta_n$ , caracterizando o contato entre as faces do elemento coesivo com a consequente possibilidade de interpenetração dos elementos. Para estes casos Wang e Siegmund (2005) propõem uma modificação para a Equação (3.25) através da inserção de um coeficiente de penalidade adimensional  $A = 30$ , conforme a Equação (3.44):

$$T_{n,comp} = AT_n(\delta_n, \delta_r, \delta_s) \quad (3.44)$$

Este coeficiente de penalidade é um parâmetro que determina a resposta elástica entre as superfícies em contato. Um valor mais alto de coeficiente de penalidade resulta em uma resposta de contato mais rígida, enquanto um valor mais baixo torna o contato mais flexível. A Figura 3.6 mostra o comportamento da lei de contato para os valores de  $A = [30, 20, 10]$ . observam-se valores maiores de separação negativa quanto menor este coeficiente.

Uma vez que ocorra a falha da interface, isto é  $D = 1$  as tensões coesivas deixam de existir e o problema se reduz a uma condição de contato entre as interfaces, dado pela Equação (3.44).

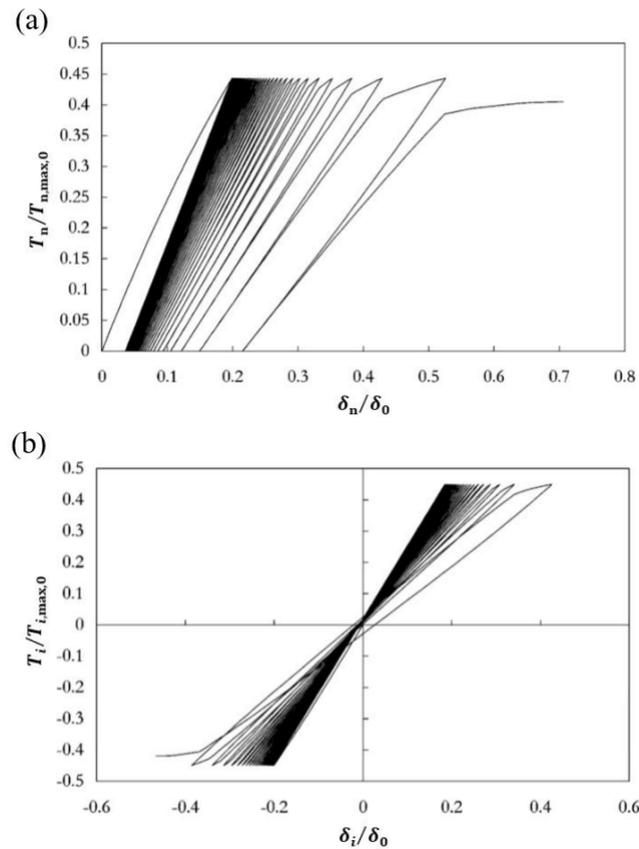


Figura 3.5 – Lei de carga/descarga com deslocamento residual: (a) carregamento normal puro e (b) carregamento de corte puro ( $i = r, s$ ) (fonte: Moresco (2022, p. 70))

### 3.4 MODELO DE ZONA COESIVA CÍCLICA DE ROTH, HÜTTER E KUNA (2014)

#### 3.4.1 Equacionamento do modelo

Este modelo lança mão de um potencial coesivo,  $\Gamma$ , para se obter as coordenadas de tração por diferenciação parcial em relação às coordenadas de separação, conforme a Equação (3.45):

$$\frac{T_i}{T_{max}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \left( \frac{\delta_i}{\delta_0} \right)} \quad i = n, r, s \quad (3.45)$$

A lei coesiva proposta introduz as quantidades efetivas normalizadas de tensão efetiva,  $\tau$ , e separação efetiva,  $\lambda$ , conforme as Equações (3.46) e (3.47):

$$\tau = \frac{1}{T_{max}} \sqrt{T_n^2 + T_r^2 + T_s^2} \quad (3.46)$$

$$\lambda = \frac{1}{\delta_0} \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_r^2 + \delta_s^2} \quad (3.47)$$

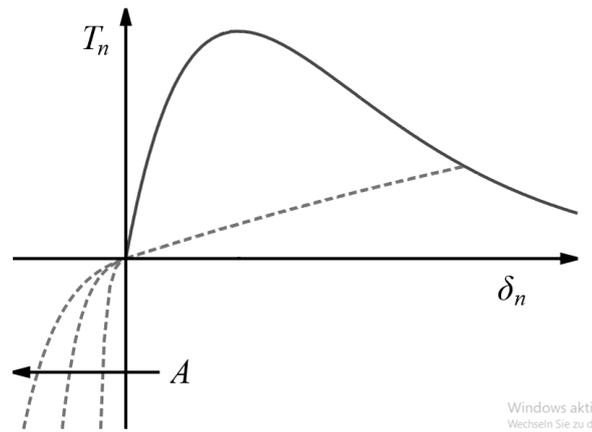


Figura 3.6 – Lei de tensão-separação normal, linha cheia; e lei de contato de acordo com a formulação do parâmetro de penalidade para separação normal negativa para  $A = [30, 20, 10]$ , linha tracejada. (fonte: autor)

onde,  $T_{max}$  e  $\delta_0$  são a tensão coesiva e o comprimento coesivo correspondente, respectivamente. Os colchetes de MacAuley são introduzidos para assegurar contribuições positivas de separação normal, conforme a Equação (3.48). Nos casos em que há compressão,  $\delta_n < 0$ , a separação é penalizada por um aumento da rigidez numa formulação de contato em que não há problema de convergência.

$$\langle \delta_n \rangle = \frac{1}{2} \left[ \delta_n + |\delta_n| \right] = \begin{cases} \delta_n, & \forall \delta_n \geq 0. \\ 0, & \forall \delta_n < 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Este modelo se baseia também na relação exponencial de Xu e Needleman (1993) vista nas Equações a (3.26) a (3.28) porém, são introduzidos dois parâmetros de forma,  $\varepsilon$  e  $\omega$ , conforme a Equação (3.49).

$$\tau_{TSE} = \begin{cases} \lambda \exp(1 - \lambda), & \forall \lambda < 1 \\ 1 - \left[ 1 - \left[ \lambda \exp(1 - \lambda) \right]^\varepsilon \right]^\omega, & \forall \lambda \geq 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

Com estes parâmetros a forma do trecho pós-pico pode ser variada. Para  $\omega > 1$ , existe a possibilidade de se estabelecer um platô com  $\tau \approx 1$ . O segundo parâmetro de forma,  $\varepsilon$ , influencia a inclinação do trecho pós-pico. Variando-se simultaneamente os dois parâmetros de forma, pode-se obter envoltórias com formas diferentes e mesma área, isto é, mesma densidade de energia de fratura normalizada  $\Gamma_0$ , conforme a Figura 3.7. A envoltória exponencial de Xu e Needleman (1993) é obtida para  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 1$  com  $\Gamma_0 = e = 2.71828$ .

O trecho ascendente anterior à tensão coesiva se refere ao comportamento reversível do material associado a uma densidade de energia reversível,  $\Gamma_{rev}$ , e, portanto, não depende de  $\varepsilon$  e nem de  $\omega$ . O dano é iniciado no pico da envoltória e se propaga com o aumento da separação  $\lambda$ . O trecho pós-pico, chamado de *damage locus*, DL, é caracterizado por uma redução da capacidade de mobilizar esforços de tração à medida que o dano aumenta estando associado a uma densidade

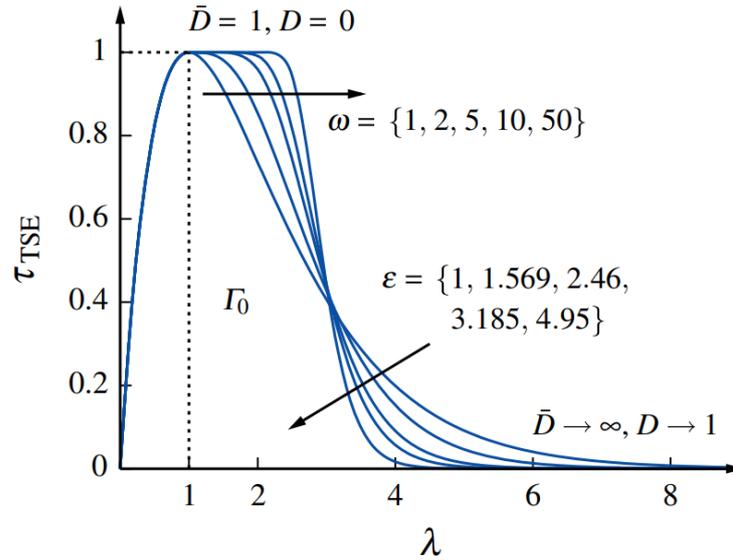


Figura 3.7 – TSEs exponenciais com densidade de energia de fratura normalizada constante  $\Gamma_0$  e variação dos parâmetros de forma  $\varepsilon$  e  $\omega$  (fonte: Roth, Hütter e Kuna (2014, p. 04))

de energia irreversível,  $\Gamma_{DL}$ . Portanto, a área sob a curva da TSE é a densidade de energia de fratura normalizada,  $\Gamma_0$ , sendo mantida constante ao se variar os parâmetros de forma. Assim, a densidade de energia de fratura normalizada pode ser decomposta em uma parte reversível,  $\Gamma_{rev}$  e outra irreversível,  $\Gamma_{DL}$ , conforme a Equação (3.50).

$$\Gamma_0 = \Gamma_{rev} + \Gamma_{DL} \quad (3.50)$$

A densidade de energia reversível é obtida pela Equação (3.51):

$$\Gamma_{rev} = \int_{\lambda=0}^1 \tau_{TSE}(\lambda) d\lambda = e - 2 \approx 0,71828 \quad (3.51)$$

e a densidade de energia pós-pico,  $\Gamma_{DL}$ , que depende de  $\varepsilon$  e  $\omega$ , é obtida pela Equação (3.52):

$$\Gamma_{DL}(\varepsilon, \omega) = \int_{\lambda=1}^{\infty} \tau_{TSE}(\lambda) d\lambda \quad (3.52)$$

Conforme descrito, o modelo coesivo descrito resulta no modelo coesivo de Xu e Needleman (1993) para  $\varepsilon = \omega = 1$ . Supondo apenas o modo I de ruptura ( $T_r = T_s = 0$  e  $\delta_r = \delta_s = 0$ ), substituindo as Equações (3.46) e (3.47) na Equação (3.49), resulta:

$$T_n = T_{max} \frac{\delta_n}{\delta_0} \exp\left(1 - \frac{\delta_n}{\delta_0}\right) = T_{max} \frac{\delta_n}{\delta_0} \exp(1) \exp\left(-\frac{\delta_n}{\delta_0}\right) \quad (3.53)$$

Lembrando também que no caso de Xu e Needleman (1993) vale a relação (3.30)

$$\phi_n = T_{max} \delta_0 \exp(1) \quad (3.54)$$

onde,  $\phi_n$  é a energia de superfície coesiva normal (ou energia de fratura normal). Substituindo  $T_{max}$  na Equação (3.53) resulta:

$$T_n = \phi_n \frac{\delta_n}{\delta_0^2} \exp\left(-\frac{\delta_n}{\delta_0}\right) \quad (3.55)$$

que é a expressão usual de Xu e Needleman (1993) para casos em que ocorre somente modo I, casos que serão tratados neste trabalho.

A Equação (3.53) será sempre empregada para  $\delta_n \leq \delta_0$ , porém para  $\delta_n > \delta_0$ , pode-se empregar a generalização proposta na segunda parte da Equação (3.49) resultando na tensão coesiva:

$$T_n = T_{max} \left[ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\delta_n}{\delta_0} \exp\left(1 - \frac{\delta_n}{\delta_0}\right) \right)^\varepsilon \right]^\omega \right] \quad (3.56)$$

Importante salientar que para  $\varepsilon \neq 1$  e  $\omega \neq 1$  não vale mais a Equação (3.54). Neste trabalho serão exploradas a Equação (3.55) ou Xu e Needleman (1993) original, bem como a Equação (3.56). Como somente o Modo I será considerado neste trabalho, a energia da superfície coesiva,  $\phi_n$ , se identifica com a energia de fratura  $G_f$ .

Roth, Hütter e Kuna (2014) também definiram o potencial  $\Gamma$  (ver Equação (3.45), que permite obter de forma independente as diferentes componentes de tensões coesivas ( $T_n$ ,  $T_r$  e  $T_s$ ). Este potencial envolve as funções de LAMBERT cuja solução envolve métodos iterativos. Como no presente trabalho somente a componente  $T_n$  é empregada (Equações (3.53) e (3.56)), não há necessidade de se introduzir estas funções, o que torna a solução numérica muito mais simples e rápida.

### 3.5 MODELO PARA EVOLUÇÃO DO DANO

Modelos recentes de evolução de dano em modelos coesivos (por exemplo, Xu e Yuan (2009b), Li e Yuan (2013) e Roth, Hütter e Kuna (2014)) empregam uma abordagem de lei de potência paramétrica, conforme a equação genérica de evolução de dano

$$\Delta D = \left[ f\left(\frac{\lambda}{D}\right) \right]^\rho \langle f(\Delta\lambda) \rangle \geq 0 \quad (3.57)$$

O expoente de dano  $\rho$  controla a influência do estado atual no avanço do dano. Os colchetes de MACAULAY garantem a positividade de  $\Delta D$  e restringem a evolução do dano em descarga. A função  $f\left(\frac{\lambda}{D}\right)$  deve ser tal que somente após certo limite de tensão seja ativada. Assim, neste trabalho, postula-se uma lei na qual  $f\left(\frac{\lambda}{D}\right)$  e  $\langle f(\Delta\lambda) \rangle$  venham da lei desenvolvida por Roe e

Siegmund (2003) resultando na lei

$$\Delta D_c = \frac{\langle \Delta \delta \rangle}{\delta_\Sigma} \left[ \frac{\bar{T}}{T_{n,max}} - C_f \right]^p H(\delta_{acc} - \delta_0) \quad (3.58)$$

onde  $C_f$ ,  $\delta_\Sigma$  e  $\delta_{acc}$  são variáveis já discutidas no item 3.3.2

### 3.6 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A determinação do equacionamento que define as tensões  $T_i$  na interface foi apresentada nas seções anteriores. A obtenção destas tensões é o principal objeto de estudo deste método discreto de análise de fratura, pois a partir dele será definido em que situação ocorrerá a variação das tensões na interface que determinarão a perda de coesão entre os elementos da malha de elementos finitos.

O trabalho de abertura de um elemento de interface, conforme descrito pela Equação (3.19) é dado por:

$$\mathcal{W}^{int} = \int_{\Gamma^{zc}} T_i \delta \delta_i d\Gamma \quad (3.59)$$

O elemento de interface bidimensional presente entre duas faces de elementos finitos adjacentes é formado por quatro nós, conforme a Figura 3.8. Na configuração de referência os nós 1 e 4 possuem as mesmas coordenadas, assim como os nós 2 e 3.

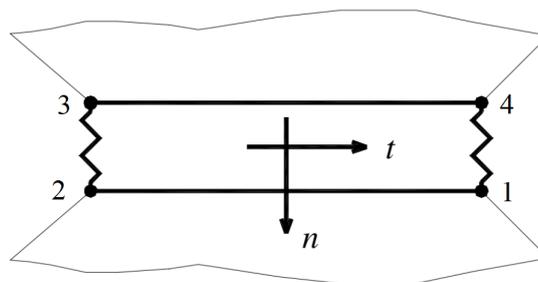


Figura 3.8 – Elemento de interface coesiva. (fonte: o autor)

No sistema de coordenadas naturais  $\xi$  e  $\eta$ , o elemento de interface coesiva pode ser representado pela Figura 3.9.

As funções de forma para descrever a abertura do elemento considerado é dado pelas seguintes equações:

$$\phi^1 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.60)$$

$$\phi^2 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.61)$$

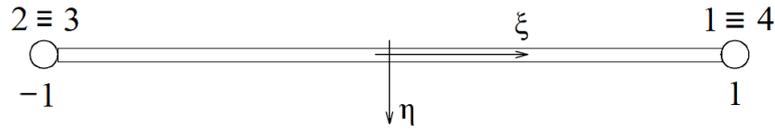


Figura 3.9 – Coordenadas naturais do elemento de interface coesiva.  
(fonte: o autor)

$$\phi^3 = -\frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.62)$$

$$\phi^4 = -\frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.63)$$

Estas funções de interpolação são lineares e consideram o elemento como unidimensional.

Como os pares de nós 1 e 4, assim como os nós 2 e 3, são coincidentes, é válida a seguinte relação:  $\phi_1 = -\phi_4$  e  $\phi_2 = -\phi_3$ .

Os valores dos deslocamentos relativos entre os nós da interface que correspondem à abertura ou deslocamento da interface são dados por

$$\delta_i = \sum_{N=1}^4 \Phi^N U_i^N \quad (3.64)$$

onde  $N$  é o número do nó da interface,  $\Phi^N = \begin{pmatrix} \phi^N & 0 \\ 0 & \phi^N \end{pmatrix}$  é a matriz das funções de forma e

$U_i^N = \begin{Bmatrix} U_n^N \\ U_{r/s}^N \end{Bmatrix}$  são as separações dos nós da interface nas direções normal e tangencial. Assim, a Equação (3.64) pode ser descrita da seguinte forma:

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} \delta_n = \phi^1 U_n^1 + \phi^2 U_n^2 + \phi^3 U_n^3 + \phi^4 U_n^4 \\ \delta_{r/s} = \phi^1 U_{r/s}^1 + \phi^2 U_{r/s}^2 + \phi^3 U_{r/s}^3 + \phi^4 U_{r/s}^4 \end{Bmatrix} \quad (3.65)$$

O comportamento da interface para diferentes deslocamentos nodais é definido pela forma como estes nós se deslocam. Em seguida, obtidos os  $\delta_i$  determinam-se as tensões na interface  $T_i$ . As forças nodais internas no nó  $n$ ,  $F_i^{\text{int},n}$  podem ser integradas numericamente, conforme a seguinte expressão:

$$F_i^{\text{int},n} = \int_{\Gamma^{\text{ZC}}} T_i \Phi^n d\Gamma = \sum_{PG=1}^{NPG} T_i(\xi_{PG}) \Phi^n(\xi_{PG}) W(\xi_{PG}) J \quad (3.66)$$

onde  $\Gamma^{\text{ZC}}$  é a superfície do elemento de interface,  $NPG$  é o número de pontos de Gauss avaliados com respectivo valor  $\xi_{PG}$  e peso  $W$ . Considerando a interface definida apenas por dois nós, 1 e 2 ou 3 e 4, o Jacobiano  $J$  pode ser calculado pelas Equações (3.67) e (3.68):

$$J = \det \mathcal{F} \quad (3.67)$$

$$\mathcal{F} = \left( \frac{\partial \phi^1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi^2}{\partial \xi} \right) \begin{Bmatrix} x_L^1 \\ x_L^2 \end{Bmatrix} = 0, 5l_i \quad (3.68)$$

onde  $x_L^1$  e  $x_L^2$  são as coordenadas dos nós do elemento e  $l_i$  é o comprimento da interface.

A Equação (3.66) pode ser escrita na forma vetorial, conforme a (3.69):

$$F_i^{\text{int},T} = \{F_{n,1} \quad F_{r/s,1} \quad F_{n,2} \quad F_{r/s,2} \quad F_{n,3} \quad F_{r/s,3} \quad F_{n,4} \quad F_{r/s,4}\} \quad (3.69)$$

Como os nós 1 e 4, assim como 2 e 3, são coincidentes, ocorre a seguinte particularidade:  $F_{n,1} = -F_{n,4}$ ,  $F_{r/s,1} = -F_{r/s,4}$ ,  $F_{n,2} = -F_{n,3}$  e  $F_{r/s,2} = -F_{r/s,3}$ . Essas forças são responsáveis pela compatibilidade nodal dos elementos finitos, pois não existem nós comuns a mais de um elemento.

### 3.7 METAFOR

Uma síntese do processo de resolução dos problemas dentro do algoritmo do METAFOR é apresentada na Figura 3.10.

Primeiramente, a leitura do arquivo de entrada de dados é realizada, onde são fornecidos a caracterização da estrutura, os carregamentos, as propriedades dos materiais e as opções da análise. A partir desses dados os vetores e matrizes do problema são construídos. O processo é resolvido de forma incremental, tal que em cada passo de tempo o vetor de forças externas é atualizado.

Em seguida, pelo método iterativo de Newton-Raphson o cálculo do vetor dos incrementos de deslocamentos e posterior atualização do vetor de deslocamentos é realizado, assim como a atualização do vetor das forças internas e a atualização da matriz de rigidez tangente da estrutura.

Finalmente, é verificado se as forças internas equilibram as forças externas. Em caso negativo, um novo incremento de deslocamento é sugerido e o processo repetido, em caso positivo, o vetor de forças externas é atualizado para o próximo incremento de tempo, e o processo se reinicia novamente. A cada passo que convergem, os dados da estrutura são salvos em arquivos de saída.

Salienta-se que toda não-linearidade é concentrada na zona coesiva e restrita aos elementos coesivos. O volume do concreto e os elementos volumétricos que o representam são considerados elástico-lineares. Pois, nas demais regiões as tensões resultantes devido às cargas aplicadas são muito inferiores às tensões coesivas.

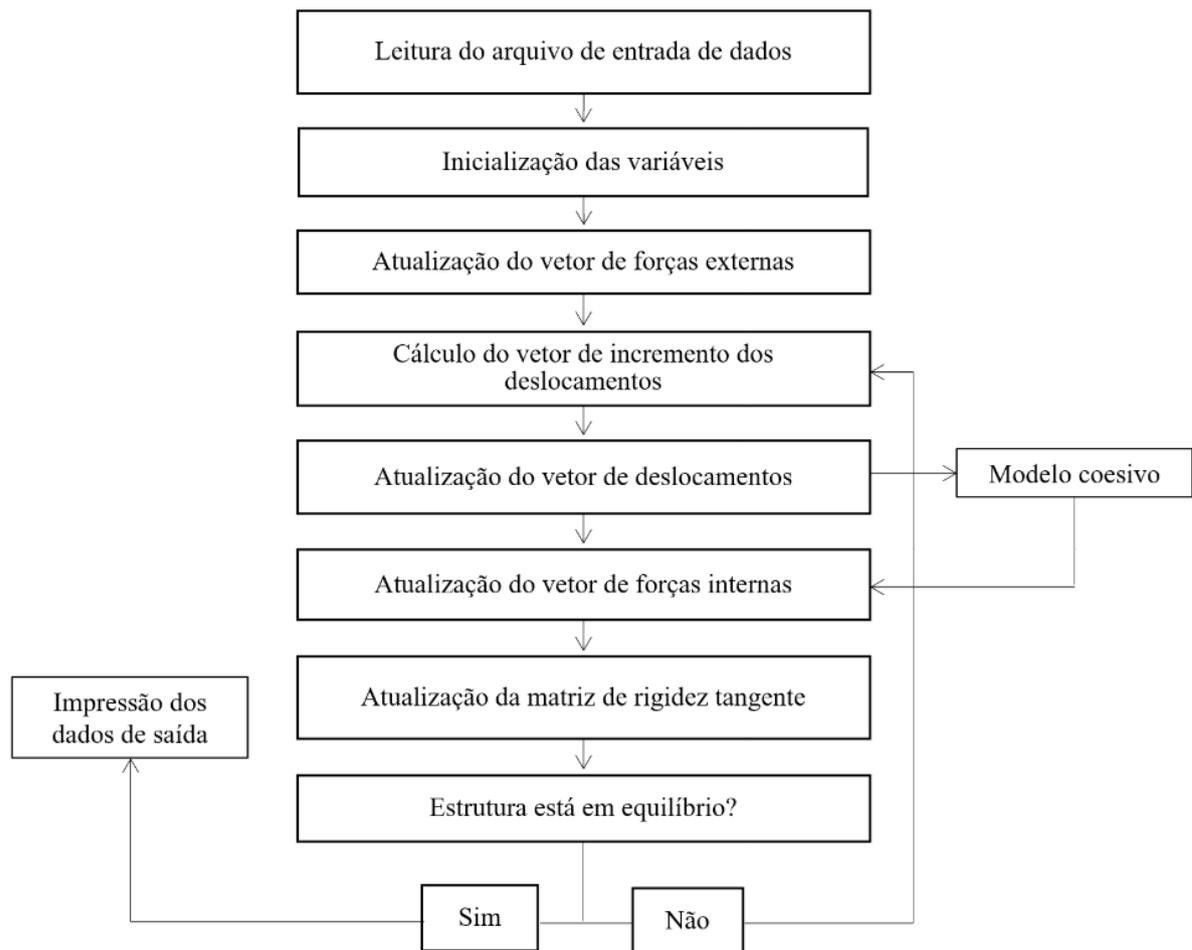


Figura 3.10 – Algoritmo do METAFOR. (fonte: o autor)

## 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados resultados de simulações numéricas obtidos através da metodologia descrita no Capítulo 3 e que foi implementada na plataforma de elementos finitos METAFOR. Também é discutida a influência dos parâmetros da zona coesiva e da geometria dos elementos no comportamento a fadiga de elementos submetidos a carregamento cíclicos de amplitude constante e em blocos de amplitude crescente. Os resultados obtidos foram comparados com valores experimentais presentes na literatura. Primeiramente são discutidas as soluções estáticas e posteriormente as cíclicas.

### 4.1 SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO QUASE-ESTÁTICO DE VIGAS DE CONCRETO

Esta aplicação tem como objetivo avaliar os modelos de zona coesiva descrito no Capítulo 3 quanto ao potencial de representar o comportamento estático do concreto e, a partir dos resultados obtidos, simular o comportamento  $P$  versus CMOD de vigas de concreto de resistência normal apresentadas por Bazant e Xu (1991) e de alta resistência apresentadas por Baktheer e Becks (2021). Para o concreto de resistência normal, os resultados serão comparados com os resultados numéricos obtidos por Kirane e Bažant (2015a) que aplicou o modelo de microplano M7 proposto por Caner e Bažant (2013) nas vigas apresentadas por Bazant e Xu (1991).

#### 4.1.1 Análise estática preliminar dos modelos coesivos

Para a avaliação do comportamento estático do concreto, utiliza-se uma viga de concreto submetida à flexão em três pontos, conforme apresentada por Bazant e Xu (1991), representada pela Figura 4.1, que ilustra o modelo analisado.

A Figura 4.2 apresenta a malha de elementos finitos utilizada no desenvolvimento desta aplicação. Foram utilizados 25 elementos coesivos na linha vertical acima do entalhe que tem largura de 2.54 mm. O restante da estrutura foi representado por 1040 elementos retangulares bilineares em estado plano de deformação (EPD)<sup>1</sup> com diferentes graus de refinamento em função da região onde estes elementos se encontram na estrutura. O carregamento é aplicado no centro do vão sob a forma de deslocamento prescrito, pois para este problema estático a aplicação de

<sup>1</sup> Este problema foi analisado também em estado plano de tensão (EPT) sem maiores diferenças nos resultados. Por ser mais simples, a solução em EPD foi adotada.

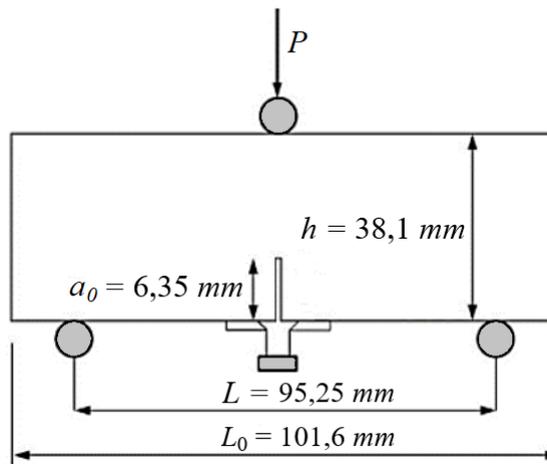


Figura 4.1 – Layout das vigas analisadas por Bazant e Xu (1991).

deslocamentos prescritos não oferece instabilidades numéricas. As propriedades elásticas do material foram adotadas como sendo  $E = 27120 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0.30$ .

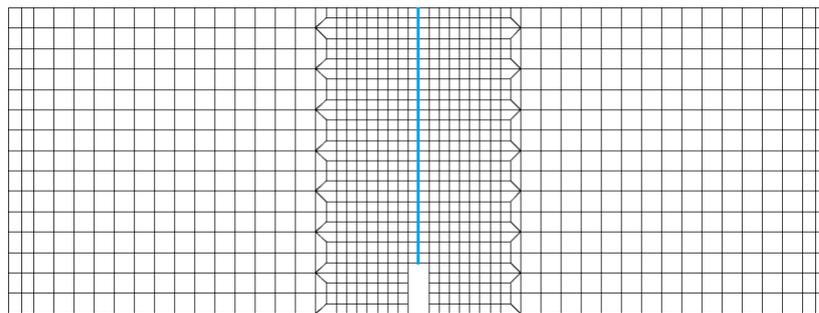


Figura 4.2 – Malha de elementos finitos utilizada na análise paramétrica quase-estática.

O modelo coesivo proposto por Xu e Needleman (1994) para uma lei coesiva exponencial é considerado um modelo de referência e um dos precursores dos potenciais de zona coesiva. Por esta razão, neste trabalho, empregou-se suas mesmas propriedades como opção inicial de modelo coesivo para ajuste do problema estático.

Os valores da tensão coesiva inicial máxima,  $T_{n,max,0}$ , analisados são múltiplos da resistência a tração do concreto ( $f_{ct} = 2.86 \text{ MPa}$ ). Liu, Xiang e Yuan (2009) recomenda que  $T_{n,max,0}$  esteja entre  $2f_{ct}$  e  $4f_{ct}$ . No presente trabalho, foi definido inicialmente como  $f_{ct}$ ,  $1,5f_{ct}$  e  $2f_{ct}$ , sendo que  $T_{n,max,0} = 1,4f_{ct}$  apresentou melhor ajuste com a curva experimental, como mostra a Figura 4.3. O comprimento coesivo é determinado a partir da energia de superfície coesiva  $\phi_{n,0}$  apresenta na Equação (3.30). Em teoria, a energia de superfície coesiva  $\phi_f$  é igual à taxa de liberação de energia ou energia de fratura  $G_f$ . Na presente análise numérica, a energia coesiva ajustada

às características dos resultados experimentais é  $G_f = 53,2 \text{ N/m}$ , seguindo as recomendações de Bažant e Planas (2019). Neste trabalho o autor fornece uma metodologia para se calcular a energia de fratura do material tomando a área sob a curva tensão-separação. Em todos os demais casos o mesmo procedimento foi empregado. O Quadro 4.1 mostra os valores de  $T_{n,max,0}$ ,  $\delta_0$  bem como os parâmetros adimensionais  $\varepsilon$  e  $\omega$  empregados.

Quadro 4.1 – Parâmetros da zona coesiva utilizados na análise paramétrica para carregamento monotônica.

Esp.	$T_{n,max,0}$ (MPa)	$\delta_0$ (mm)	$\varepsilon$	$\omega$
V1	$1.0f_c = 2,86$	0,006843	1	1
V2	$1.5f_c = 4,29$	0,004562	1	1
V3	$2.0f_c = 5,72$	0,003422	1	1
V4	$1.4f_c = 4,00$	0,004888	0,1	0,42

A Figura 4.3 apresenta as curvas  $P$  versus CMOD para os espécimes V1 a V3 variando-se a tensão normal máxima. CMOD (*crack mouth opening displacement*) é o deslocamento na abertura da boca da trinca, localizado na parte inferior da viga ou no início da trinca. Inicialmente percebe-se que o aumento da tensão normal máxima gera um acréscimo na carga máxima suportada pela estrutura bem como um aumento na rigidez das peças no trecho anterior a carga de pico. No que diz respeito ao amolecimento da estrutura pós-pico, o aumento da tensão normal máxima torna o processo mais “frágil”, de modo que a capacidade de suporte de carga da estrutura reduz-se de maneira mais abrupta. Portanto, não é possível o ajuste das curvas estáticas através do modelo coesivo da Equação (3.26) por ser excessivamente rígida. Esta rigidez é ligada ao acoplamento de propriedades coesivas através da Equação (3.30), o que impede uma maior liberdade na escolha das propriedades.

Deve-se aqui chamar a atenção para o fato de que o modelo de Xu e Needleman (1993) é equivalente ao de Roth, Hütter e Kuna (2014) para  $\varepsilon = \omega = 1$  (ver Equação (3.49)). Logo, este último apresenta possibilidades de ajuste bem mais amplas que o modelo original. Neste caso foi possível ajustar a curva experimental para valores de  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$  de forma bastante eficaz. Portanto, optou-se por empregar em todas as simulações o modelo coesivo de Roth, Hütter e Kuna (2014).

Apenas variações de  $T_{n,max,0}$  proporcionaram variações da rigidez do comportamento estático das peças, sendo que estas variações de  $T_{n,max,0}$  são acompanhadas por mudanças na carga de pico e conserva a forma do trecho de amolecimento pós-pico, o que corresponde a uma facilidade inerente ao modelo coesivo e está relacionado ao acoplamento entre a tensão coesiva  $T_{n,max,0}$ , a separação correspondente,  $\delta_0$  e a energia coesiva,  $\phi$ .

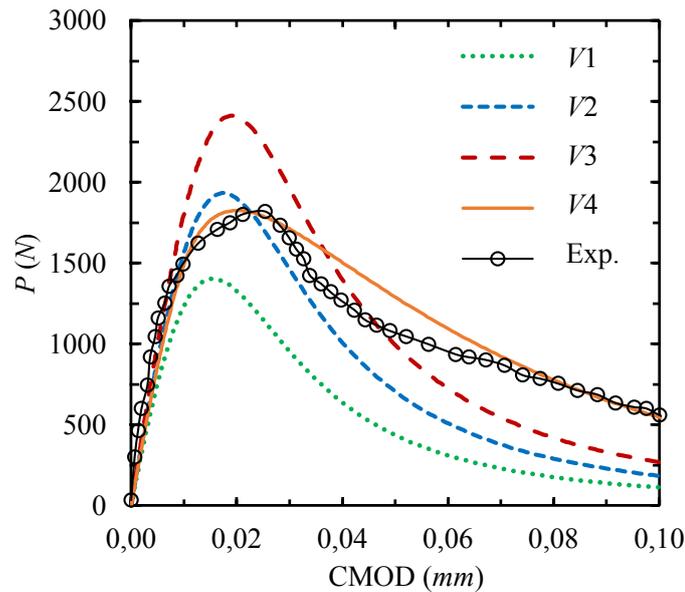


Figura 4.3 – Curvas  $P$  versus CMOD numérico e experimental de Bazant e Xu (1991) para a viga pequena.

#### 4.1.2 Concreto de Resistência Normal

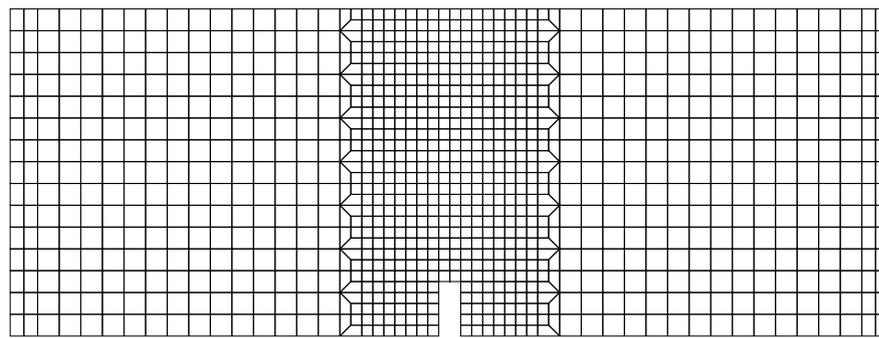
Para a avaliação de um concreto de resistência normal utilizam-se as vigas analisadas por Bazant e Xu (1991). O Quadro 4.3 apresenta um resumo das propriedades geométricas e as propriedades do material para as vigas analisadas e a Figura 4.4 apresenta as malhas utilizadas.

Quadro 4.2 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas com  $f_c = 32,8 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 2,86 \text{ MPa}$ ,  $E = 27120 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0,3$ .

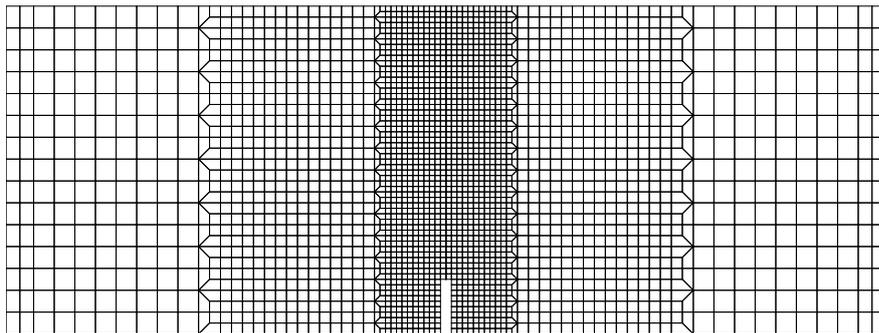
Autor	Tamanho	$d$ (mm)	$L$ (mm)	$a_0$ (mm)
Bazant e Xu (1991)	Pequena	38,1	95,25	6,35
	Média	76,2	190,5	12,7
	Grande	152,4	381,0	25,4

A Figura 4.5 apresenta o resultado obtido para a viga pequena de Bazant e Xu (1991). Os melhores resultados foram obtidos utilizando-se tensão coesiva inicial normal igual à  $T_{n,max,0} = 1.4f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ .

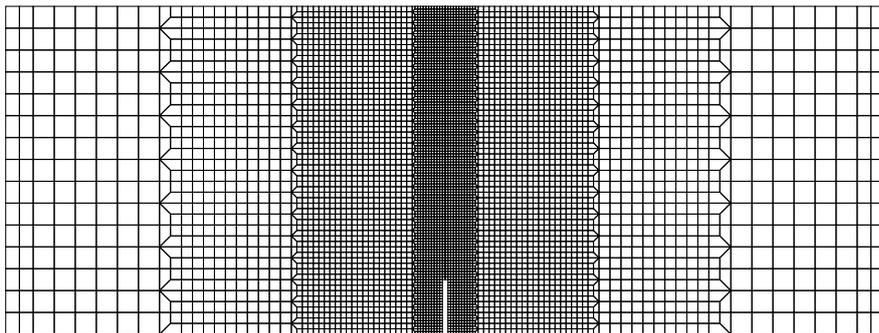
Duas medidas de correlação são utilizadas para comparação com os resultados experimentais. A primeira é o coeficiente de correlação de Pearson (em inglês, *Pearson correlation coefficient*, PCC). O coeficiente de Pearson é uma medida adimensional da correlação linear entre duas variáveis. Ele varia de -1 a 1, onde -1 indica uma correlação negativa perfeita, 1 indica uma correlação positiva perfeita e 0 indica nenhuma correlação, sendo dado pela Equação 4.1. A segunda medida é o erro quadrático médio (em inglês, *root mean square error*, RMSE), que é uma medida de quão bem um modelo se ajusta aos dados. Ele calcula a raiz quadrada da



(a) Pequena



(b) Média



(c) Grande

Figura 4.4 – Discretização das malhas das vigas de Bazant e Xu (1991)

média dos quadrados das diferenças entre os valores numéricos e os valores experimentais, nesse caso medida em  $N$ . Quanto menor o RMSE, melhor o ajuste do modelo aos dados, conforme a Equação 4.2.

$$PCC = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^2 \sum(Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (4.1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum(X_i - Y_i)^2}{n}} \quad (4.2)$$

onde,  $X_i$  e  $Y_i$  são os valores da carga  $P$  do modelo experimental e o numérico, respectivamente, em cada ponto  $i$  observado;  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  representam as médias dos conjuntos de dados experimental e numérico, respectivamente.

Para a viga pequena  $PCC = 0,98$  e  $RMSE = 110,7 N$ , ou seja, existe uma correlação positiva

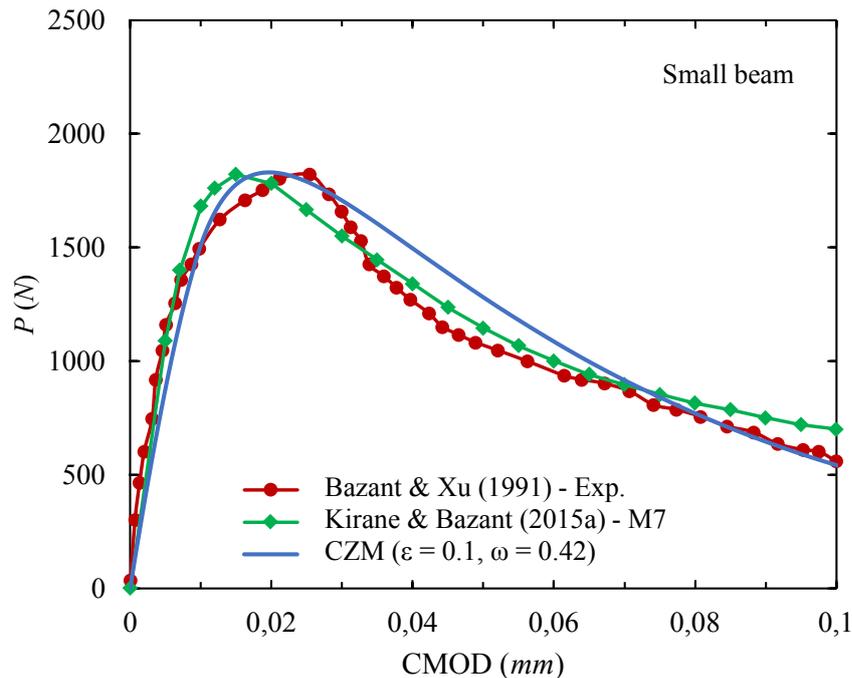


Figura 4.5 – Comparação das curvas  $P$  versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga pequena com  $T_{n,max,0} = 1.4f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ .

quase perfeita e um bom ajuste do modelo quanto à ordem de grandeza das cargas. Percebe-se também que o trecho inicial elástico apresenta boa correlação com o observado experimentalmente, bem como uma boa aproximação da carga de pico. Neste caso, o modelo de microplano M7 utilizado por Kirane e Bažant (2015a) apresenta  $PCC = 0,98$ , mostrando correlação semelhante a do presente modelo e  $RMSE = 84,5 N$ , ou seja, o modelo M7 se ajustar um pouco melhor aos experimentos para a viga pequena.

A Figura 4.6 apresenta o resultado obtido para a viga média de Bazant e Xu (1991). Os melhores resultados foram obtidos utilizando-se tensão coesiva inicial normal igual à  $T_{n,max,0} = 1.25f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ . Nota-se uma boa aproximação do comportamento numérico com aquele observado experimentalmente, tanto para o trecho linear inicial quanto para o comportamento de amolecimento, assim como uma boa aproximação da carga máxima. Para a viga média os parâmetros de correlação numérica são  $PCC = 0,98$  e  $RMSE = 148,7 N$ , ou seja, existe uma correlação positiva quase perfeita e um bom ajuste do modelo quanto à ordem de grandeza das cargas. Neste caso, em comparação como o modelo de microplano M7 utilizado por Kirane e Bažant (2015a), as medidas de correlação são  $PCC = 0,91$  e  $RMSE = 352,6 N$ , ou seja, o presente modelo apresenta melhor correlação e melhor ajuste com os experimentos para a viga média.

A Figura 4.7 apresenta o resultado para a viga grande de Bazant e Xu (1991). Foram utilizados a

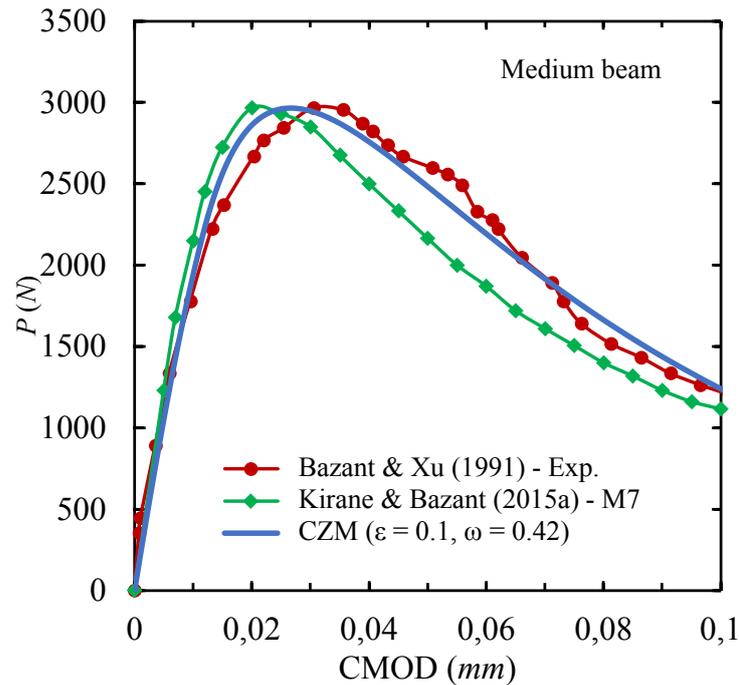


Figura 4.6 – Comparação das curvas  $P$  versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga média com  $T_{n,0} = 1.25f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ .

tensão coesiva inicial normal igual a  $T_{n,max,0} = 1.1f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ . Nota-se que existe uma boa concordância entre o comportamento numérico e o experimental. Em comparação como o modelo de microplano M7 utilizado por Kirane e Bažant (2015a), para o trecho linear inicial os dois modelos apresentam comportamento muito similar, para o trecho de amolecimento, observa-se novamente uma superestimação das cargas, porém o presente modelo apresenta uma melhor aproximação da carga máxima. Numericamente os parâmetros de correlação numérica são  $PCC = 0,95$  e  $RMSE = 401,9 N$ , ou seja, existe uma correlação positiva quase perfeita e um bom ajuste do modelo quanto à ordem de grandeza das cargas. Neste caso, em comparação como o modelo de microplano M7 utilizado por Kirane e Bažant (2015a), as medidas de correlação são  $PCC = 0,95$  e  $RMSE = 382,6 N$ , ou seja, o presente modelo apresenta correlação e ajuste similar aos do modelo M7 em relação aos experimentos para a viga grande.

De maneira geral, a forma do comportamento é similar àquela observada experimentalmente. No entanto, para estes casos específicos observou-se valores um pouco maiores de abertura em todos os pontos da simulação e além disto, a área da curva é maior na região pós carga de pico em relação àquela observada experimentalmente.

Em todas as situações analisadas se observa que o modelo coesivo adotado apresenta poucas limitações no ajuste do comportamento estático em função do ajuste que os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\omega$  permitem.

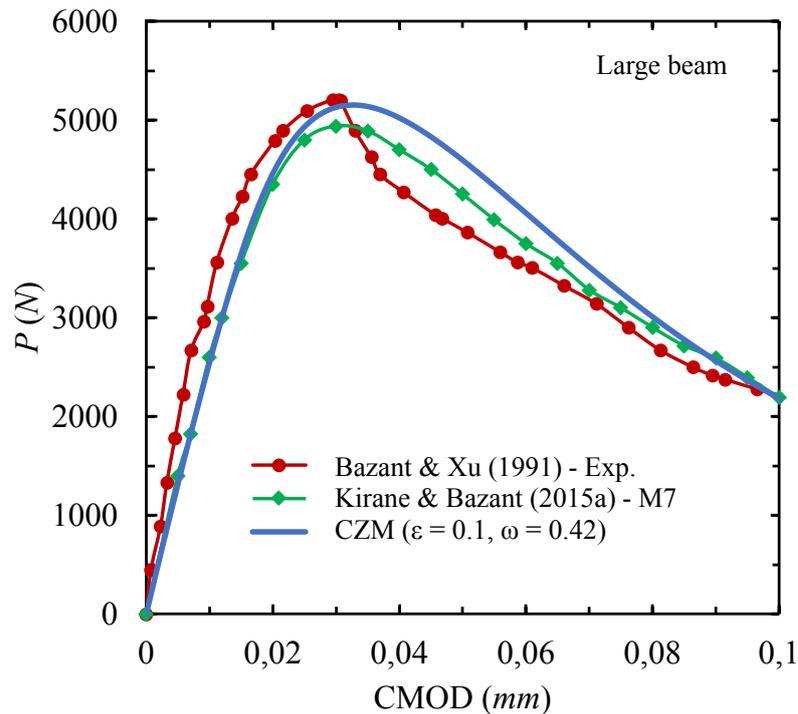


Figura 4.7 – Comparação das curvas  $P$  versus CMOD entre o presente modelo numérico, o programa experimental de Bazant e Xu (1991) e o modelo M7 de Kirane e Bažant (2015a) para a viga grande com  $T_{n,max,0} = 1.1f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.1$  e  $\omega = 0.42$ .

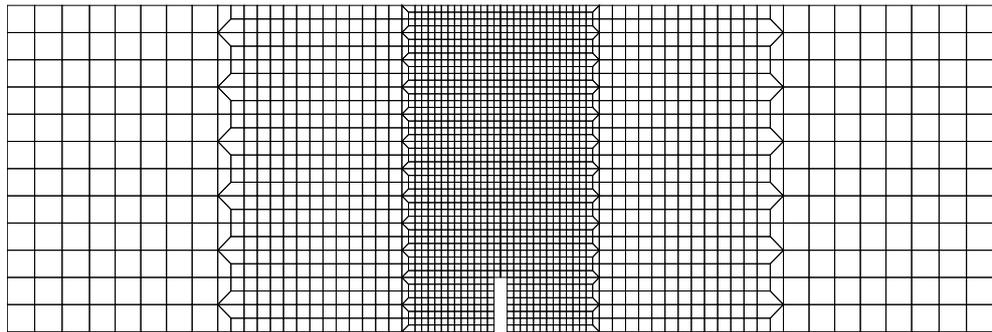
#### 4.1.3 Concreto de Alta Resistência

Como nas vigas precedentes, a zona coesiva é representada como uma linha de elementos coesivos distribuídos em uma única linha ao longo da altura não trincada no centro do vão das peças. O restante da estrutura é modelado utilizando elementos retangulares lineares elásticos em estado plano de deformação com diferentes graus de refinamento. O carregamento é aplicado sob a forma de deslocamento prescrito no centro do vão. O Quadro 4.3 apresenta um resumo das propriedades geométricas e as propriedades do material para as vigas analisadas e a Figura 4.8 apresenta as malhas utilizadas.

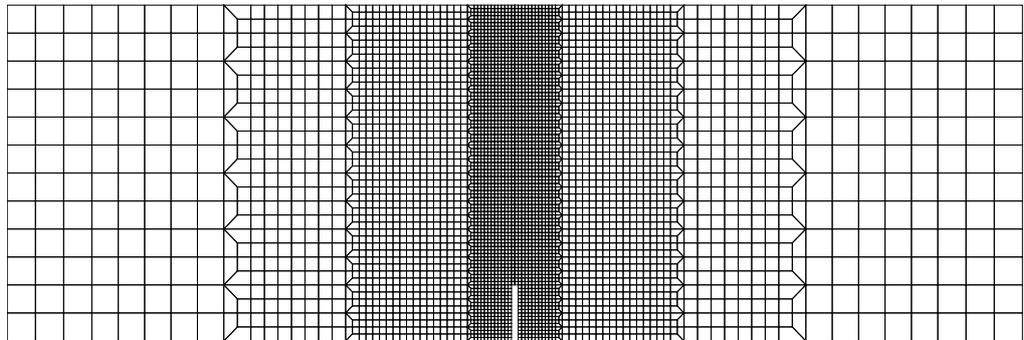
Quadro 4.3 – Propriedades geométricas das vigas utilizadas com  $E = 34468 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0,2$ .

Autor	Tamanho	$d$ (mm)	$S$ (mm)	$a_0$ (mm)
Baktheer e Becks (2021)	Pequena	200	500	16.67
	Grande	400	1000	33.33

Para a viga pequena, os melhores resultados da análise monotônica foram obtidos ajustando-se a tensão coesiva normal inicial para  $T_{n,max,0} = f_{ct}$  (segundo os autores,  $f_{ct} = 4.19 \text{ MPa}$  e energia de fratura corresponde a  $G_f = 120.11 \text{ N/m}$ , os quais foram obtidos pela média de três ensaios),



(a) Pequena



(b) Grande

Figura 4.8 – Discretização das malhas das vigas de Baktheer e Becks (2021)

comprimento coesivo  $\delta_0 = 0,01030 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon = 0.45$  e  $\omega = 0.15$ . Para a viga grande, a tensão coesiva normal inicial corresponde a  $T_{n,max,0} = 0.9f_{ct}$  (segundo os autores,  $f_{ct} = 3.26 \text{ MPa}$  e a energia de fratura corresponde a  $G_f = 239.65 \text{ N/m}$ , os quais foram obtidos pela média de dois ensaios), comprimento coesivo  $\delta_0 = 0,03049 \text{ mm}$ ,  $\varepsilon = 0.45$  e  $\omega = 0.15$ . O Quadro 4.4 mostra os valores de  $T_{n,max,0}$ ,  $\delta_0$  bem como os parâmetros adimensionais  $\varepsilon$  e  $\omega$  empregados para as vigas de Baktheer e Becks (2021)

Quadro 4.4 – Parâmetros da zona coesiva utilizados na análise paramétrica para carregamento monotônico das vigas de Baktheer e Becks (2021).

Viga	$T_{n,max,0}$ (MPa)	$\delta_0$ (mm)	$\varepsilon$	$\omega$
Pequena	$f_{ct} = 4,29$	0,01030	0,45	0,15
Grande	$0,9f_{ct} = 2,934$	0,03049	0,45	0,15

A Figura 4.9 apresenta a curva  $P$  versus CTOD para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021). Nesse caso, CTOD (*crack tip opening displacement*) é o deslocamento na abertura da

ponta da trinca, diferentemente do CMOD. Para a viga pequena os parâmetros de correlação numérica são  $PCC = 0,97$  e  $RMSE = 337,4 N$ , ou seja, existe uma correlação positiva com a médias dos experimentos quase perfeita e um bom ajuste do modelo quanto à ordem de grandeza das cargas.

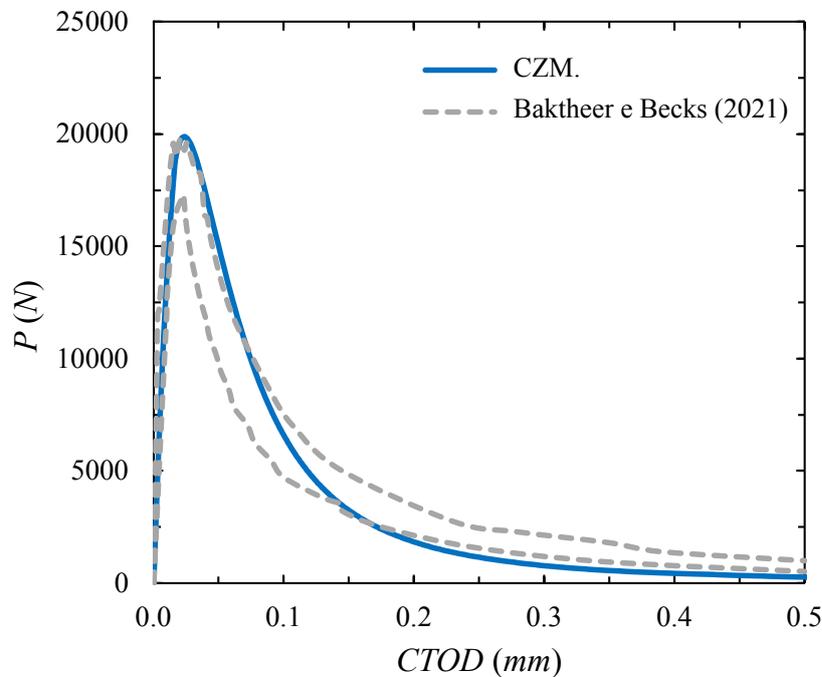


Figura 4.9 – Comparação entre curvas  $P$  versus CMOD numérico e experimental de Baktheer e Becks (2021) para a viga pequena com  $T_{n,max0} = f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.45$  e  $\omega = 0.15$ .

A Figura 4.10 apresenta o resultado obtido para a viga grande de Baktheer e Becks (2021) a partir da metodologia apresentada. Semelhantemente à viga menor, percebe-se uma boa correlação entre os resultados obtidos com a média dos resultados experimentais. Os parâmetros de correlação numérica são  $PCC = 0,98$  e  $RMSE = 167,3 N$ , ou seja, existe uma correlação positiva com a médias dos experimentos quase perfeita e um bom ajuste do modelo quanto à ordem de grandeza das cargas.

Em todas as situações analisadas fica claro que, apesar do comportamento aproximado da curva carga *versus* abertura, o modelo coesivo adotado é eficiente no ajuste do comportamento estático. Conforme apresentado no item anterior, variações dos parâmetros de forma  $\varepsilon$  e  $\omega$  permitem ajustar os ramos de amolecimento de forma independente dos valores de  $T_{n,max,0}$ .

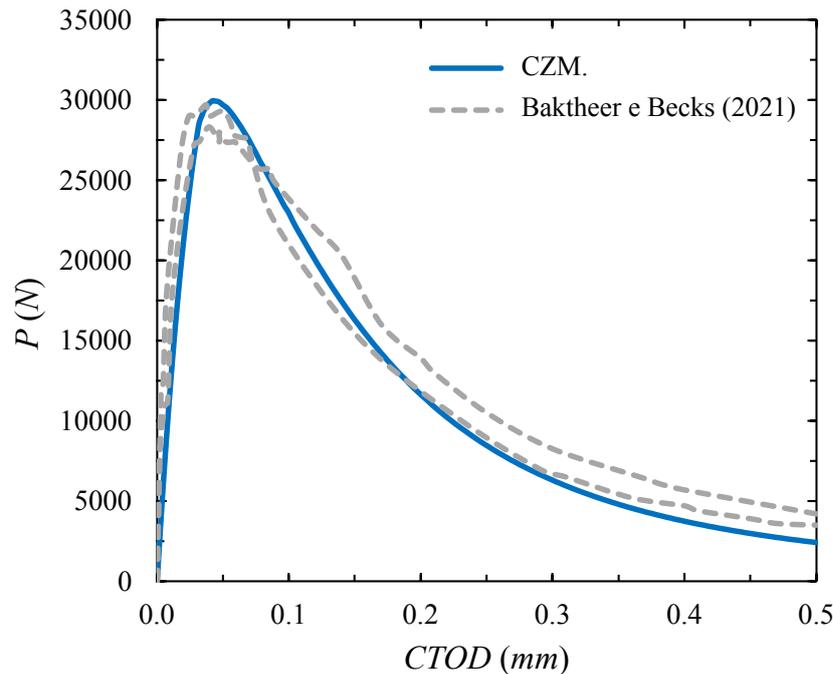


Figura 4.10 – Comparação entre curvas  $P$  versus CMOD numérico e experimental de Baktheer e Becks (2021) para a viga grande com  $T_{n,max,0} = 0.9f_{ct}$ ,  $\varepsilon = 0.45$  e  $\omega = 0.15$ .

## 4.2 ANÁLISE PARAMÉTRICA PARA CARREGAMENTO CÍCLICO

Nesta seção buscou-se avaliar a sensibilidade do modelo de zona coesiva a partir dos parâmetros que constituem as funções de dano cíclico e monotônico,  $\delta_{\Sigma}$ ,  $C_f$  e  $\rho$ . As configurações geométricas e as propriedades dos materiais, bem como a malha de elementos finitos, utilizadas nesta aplicação são as mesmas apresentadas no item 4.1. Nesta aplicação utiliza-se o modelo de descarga em direção à origem. Variou-se apenas um parâmetro enquanto os demais foram mantidos constantes para cada grupo de análise.

O carregamento foi aplicado sob a forma de carga,  $P$ , prescrita a partir de uma função senoidal com frequência de  $0,04 \text{ Hz}$  ( $\Delta t = 25 \text{ s}$ ) onde a carga mínima  $P_{min}$  igual a zero e a carga máxima  $P_{max}$  igual a 80% da carga de pico obtida em um ensaio monotônico, conforme dados experimentais fornecidos por Bazant e Xu (1991). As características de um ciclo de tensão são ilustradas na Figura 4.11.

### 4.2.1 Comprimento coesivo acumulado

Nesta seção é analisado o efeito do  $\delta_{\Sigma}$  (Equação (3.58)) na vida em fadiga. O Quadro 4.5 resume os valores investigados. A Figura 4.12 apresenta o resultado do número de ciclos até a ruptura,  $N$ , versus a razão entre o comprimento coesivo característico,  $\delta_0$ , e o comprimento coesivo acumulado,  $\delta_{\Sigma}$ , e o Quadro 4.6 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

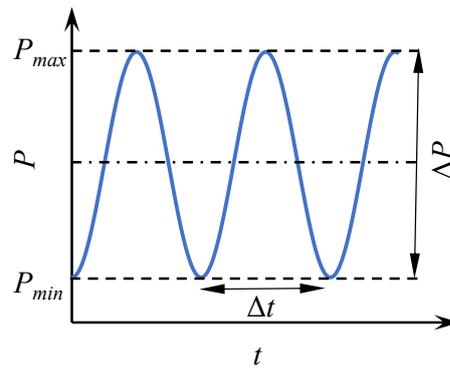


Figura 4.11 – Função Carga-tempo  $P(t)$  para carregamento com amplitude de carga constante e período  $\Delta t$  (duração de um ciclo de carga).

Quadro 4.5 – Resumo das propriedades da zona coesiva utilizados para a variação do comprimento coesivo acumulado  $\frac{\delta_{\Sigma}}{\delta_0}$  da vida em fadiga com  $C_f = 0.6$  e  $\rho = 1$ .

$\frac{T_{n,max,0}}{f_{ct}}$	$\delta_0(m)$	$\delta_{\Sigma}(m)$	$\frac{\delta_{\Sigma}}{\delta_0}$
1.2	5.703E-06	5.703E-05	10
1.2	5.703E-06	1.996E-04	35
1.2	5.703E-06	3.992E-04	70
1.2	5.703E-06	5.703E-04	100
1.4	4.888E-06	4.888E-05	10
1.4	4.888E-06	1.711E-04	35
1.4	4.888E-06	3.422E-04	70
1.4	4.888E-06	4.888E-04	100
1.6	4.277E-06	4.277E-05	10
1.6	4.277E-06	1.497E-04	35
1.6	4.277E-06	2.994E-04	70
1.6	4.277E-06	4.277E-04	100

Conforme evidenciado pela Figura 4.12, nota-se que a vida em fadiga da estrutura possui influência de todos os parâmetros analisados, não apenas daqueles pertencentes às funções de dano. Por exemplo, a tensão coesiva,  $T_{n,max,0}$ , é o parâmetro de maior influência no aumento na vida útil em fadiga da estrutura dentre os parâmetros analisados e, ao se comparar os pontos de mesma relação  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  constata-se que esta variação é não linear. O aumento de  $\delta_{\Sigma}$  também aumenta a vida em fadiga. A justificativa para este aumento está no fato de que para maiores valores de comprimento coesivo acumulado, um valor maior de abertura acumulada  $\langle \Delta \delta \rangle$  tem que ser atingida para produzir o mesmo dano. A variação de  $\delta_{\Sigma}$  produz variações lineares na vida em fadiga, dentro de um mesmo conjunto de parâmetros, cuja a inclinação da reta sendo em algum grau relacionada com a variação de  $T_{n,max,0}$ .

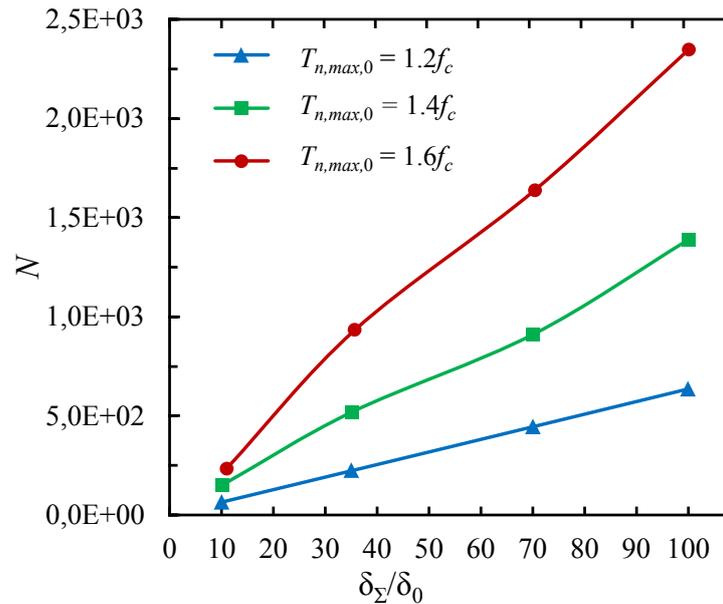


Figura 4.12 – Influência da variação do comprimento coesivo acumulado e da tensão coesiva máxima na vida em fadiga.

Quadro 4.6 – Resultados das simulações da vida em fadiga com variação de  $\delta_{\Sigma}$  para  $C_f = 0,6$  e  $\rho = 1$ .

$\frac{T_{n,max,0}}{f_{ct}}$	$\frac{\delta_0}{\delta_{\Sigma}}$	$N$ (ciclos)
1.2	10	66
1.2	35	224
1.2	70	446
1.2	100	637
1.4	10	150
1.4	35	518
1.4	70	910
1.4	100	1388
1.6	10	234
1.6	35	934
1.6	70	1639
1.6	100	2349

Para a análise do crescimento de trinca, utilizam-se dois parâmetros distintos, sendo estes: o comprimento de zona coesiva ativada; e o tamanho de trinca. Considera-se que um elemento coesivo se encontra ativado quando, para qualquer um dos pontos de Gauss, a condição  $D > 0$  esteja satisfeita, de modo que o comprimento de zona coesiva ativada será o somatório dos elementos coesivos ativados. Portanto, a zona coesiva ativada pode ser tomada como sendo a zona de processo de fratura do concreto. Analogamente, o comprimento de trinca poderá ser entendido como sendo o somatório dos elementos para os quais  $D = 1$ . Nas Figuras 4.13 a 4.15 são apresentados os resultados do crescimento de trinca *versus* o número de ciclos, onde a zona coesiva ativada é representada por linhas cheias e o comprimento de trinca por linhas tracejadas.

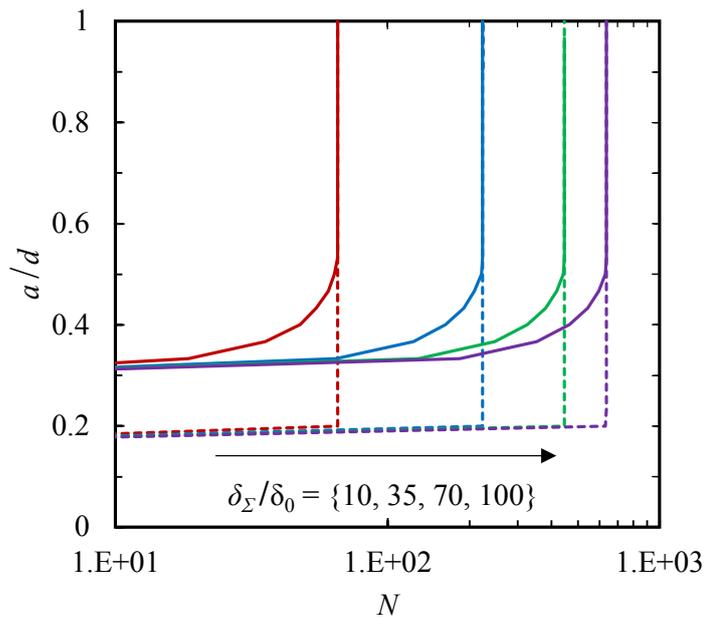


Figura 4.13 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$ ,  $C_f = 0,60$  e  $\rho = 1$ .

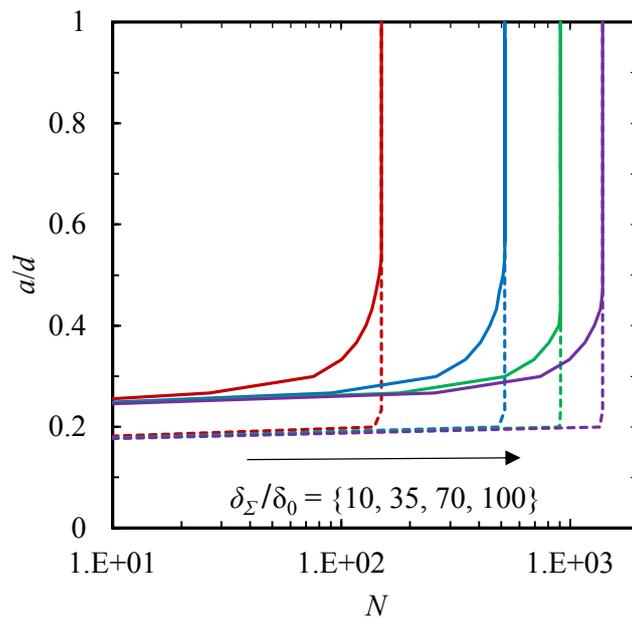


Figura 4.14 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1,4$ ,  $C_f = 0,60$  e  $\rho = 1$ .

A partir das Figuras 4.13 a 4.15 percebe-se que, dentro de um mesmo conjunto de parâmetros um aumento do comprimento coesivo acumulado, apesar de produzir um significativo aumento da vida em fadiga, não altera de forma significativa o padrão de propagação das trincas, dado pela relação  $a/d$ , em que  $a$  é o comprimento efetivo da trinca (nesse caso a trinca inicial  $a_0$

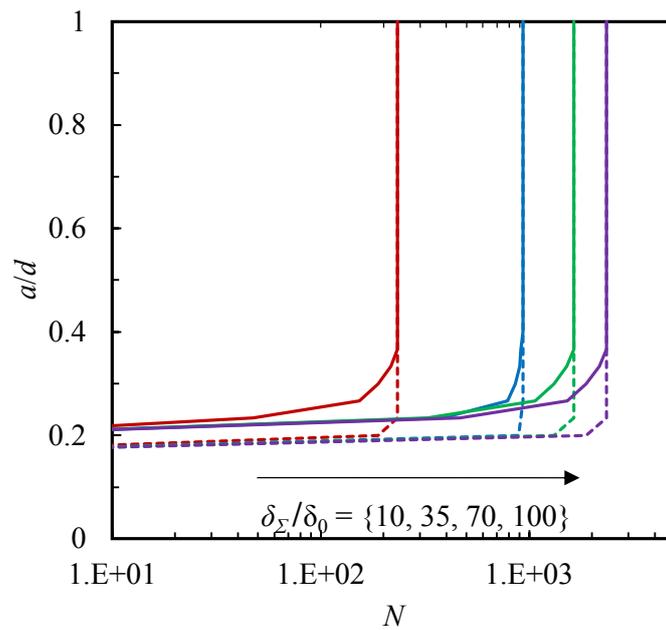


Figura 4.15 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$ ,  $C_f = 0,60$  e  $\rho = 1$ .

mais o número de elementos coesivos ativados) e do tamanho da ZPF (região entre as linhas cheia e tracejada), para uma mesma tensão coesiva, de modo que se observa essencialmente o mesmo comportamento evolutivo, ou seja, existe um aumento da zona coesiva com o aumento do número de ciclos. Isso está de acordo com conclusões de Kirane e Bažant (2015a). No entanto, a trinca sempre acaba se propagando de forma abrupta.

Percebe-se que a tensão normal máxima possui clara influência na propagação da zona de processo inicial. Ao se comparar as Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 fica evidente que quanto maior o valor de  $T_{n,max,0}$  menor é o tamanho da zona de processo. Existe, portanto, uma tendência da zona de processo de coincidir com o tamanho da trinca, o que é um comportamento também esperado nos casos monotônicos e o presente trabalho mostra que isto ocorre também nos casos de fadiga, ou seja, existe uma fragilização do material com o aumento de  $T_{n,max,0}$ . Para todos os casos analisados percebe-se que a propagação da trinca torna-se instável para uma zona de processo equivalente à  $a/d \approx 0,45, 0,4$  e  $0,35$ , para as tensões  $T_{n,max,0} = 1.2f_c, 1.4f_c$  e  $1.6f_c$ , respectivamente.

Alguns autores utilizaram o modelo coesivo proposto por Roe e Siegmund (2003) para simular a fadiga no concreto adotando diversos valores de  $\delta_{\Sigma}$ . Por exemplo, Xu e Yuan (2009a) utilizaram  $\delta_{\Sigma} = 4\delta_0$ , Zhang *et al.* (2022) utilizaram  $\delta_{\Sigma} = 5\delta_0$  e Zhang, Wang e Yan (2023) utilizaram  $\delta_{\Sigma} = 30\delta_0$ . Chen *et al.* (2023) propuseram um critério para estimar os valores do comprimento coesivo acumulado,  $\delta_{\Sigma}$  que é função de um parâmetro do material e da razão de carga  $R$ . Os

autores realizaram uma série de simulações para um aço de alta resistência com diferentes cenários de carregamento. No entanto, definir que valores de  $\delta_\Sigma$  seriam adequados para o concreto a partir da relação proposta por Chen *et al.* (2023) foge do escopo desta aplicação.

#### 4.2.2 Limite de resistência à fadiga

A Figura 4.16 apresenta o resultado do número de ciclos até a ruptura versus a variação do limite de resistência a fadiga ( $C_f$ ) e o Quadro 4.8 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

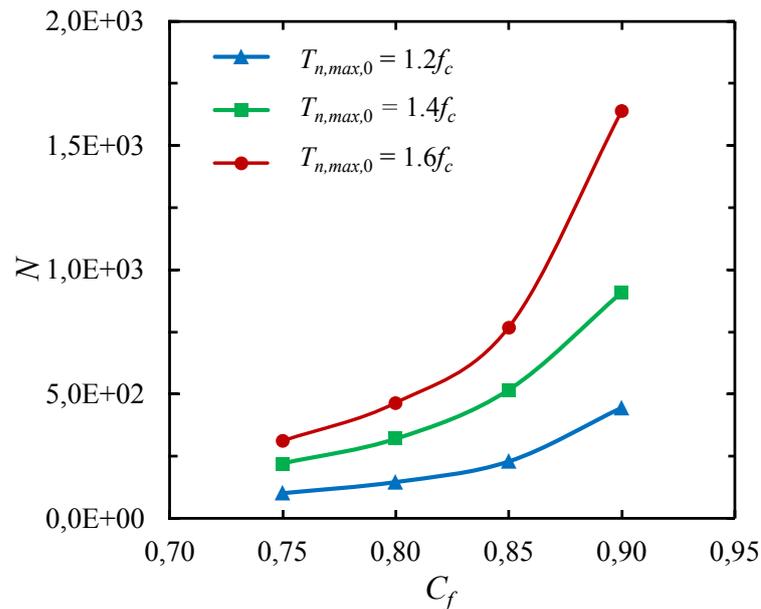


Figura 4.16 – Influência da variação do limite de resistência à fadiga e tensão coesiva máxima.

Quadro 4.7 – Resultado das simulações da vida em fadiga com variação de  $C_f$  para  $\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0} = 70$  e  $\rho = 1$ .

$\frac{T_{n,max,0}}{f_{ct}}$	$C_f$	$N$ (ciclos)
1.2	0.75	102
1.2	0.80	147
1.2	0.85	230
1.2	0.90	446
1.4	0.75	222
1.4	0.80	321
1.4	0.85	518
1.4	0.90	910
1.6	0.75	311
1.6	0.80	464
1.6	0.85	768
1.6	0.90	1639

A partir dos resultados expostos percebe-se que a influência do limite de resistência novamente está fortemente relacionada com os valores de  $T_{n,max,0}$ . Como esperado, percebe-se que o aumento de  $C_f$  resulta em um acréscimo de dano menor por ciclo para um mesmo valor de  $T_{n,max,0}$ .

Diferentemente do  $\delta_\Sigma$ , o efeito do  $C_f$  na vida é não linear. Nas Figuras 4.17 a 4.19 são apresentados o efeito da variação do limite de resistência a fadiga no processo de crescimento de trinca. A zona coesiva ativada é representada por linhas cheias e o comprimento de trinca por linhas tracejadas.

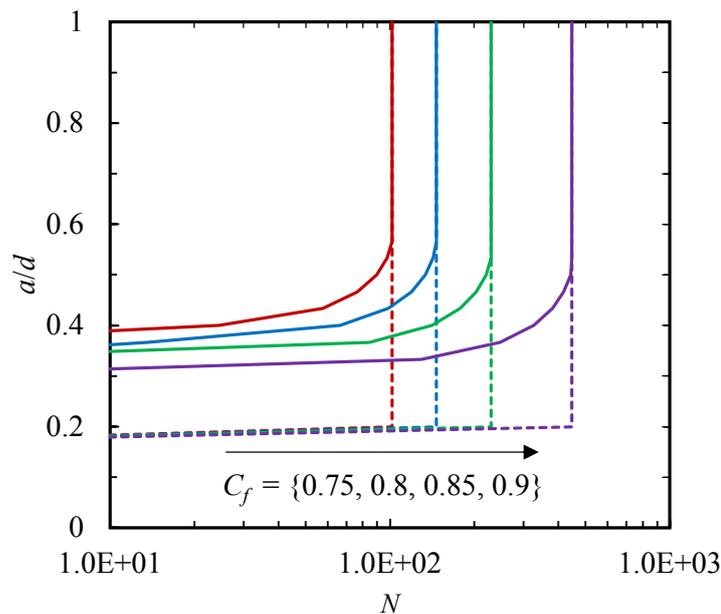


Figura 4.17 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $C_f$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$ ,  $\delta_\Sigma/\delta_0=70$  e  $\rho = 1$ .

Nota-se que assim como  $T_{n,max,0}$ , a variação de  $C_f$  possui influência no tamanho da zona de processo inicial da estrutura, de modo que quanto maior o valor de  $C_f$ , menor o tamanho da zona de processo. Observa-se também que nos três casos de  $T_{n,max,0}$  a redução do tamanho da zona de processo em relação ao tamanho de trinca representa um aumento na fragilidade do material, uma vez que a propagação instável passa a ocorrer para menores valores da relação  $a/d$ .

### 4.2.3 Exponente de dano

A Figura 4.20 apresenta o resultado do número de ciclos até a ruptura versus a variação do expoente de dano  $\rho$  e o Quadro 4.10 apresenta um resumo dos resultados obtidos.

A partir dos resultados expostos percebe-se que a influência do expoente de dano também está fortemente relacionada com os valores de  $T_{n,max,0}$ . Nota-se que o aumento de  $\rho$  resulta em um

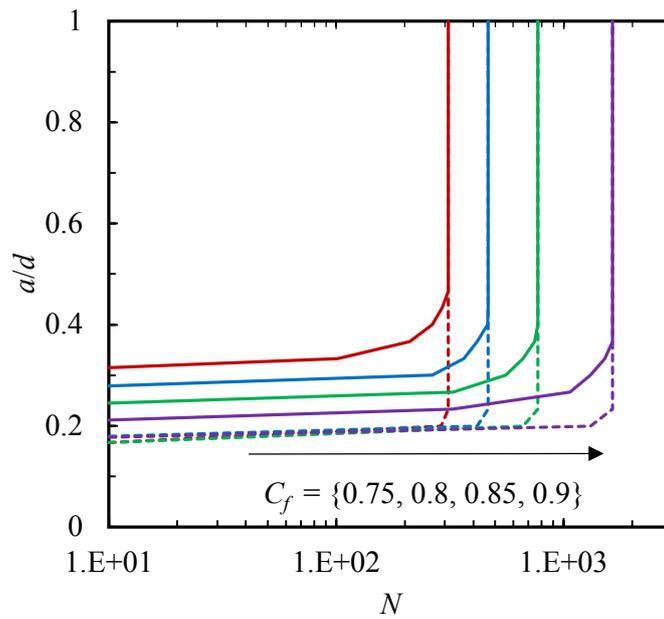


Figura 4.18 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $C_f$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$ ,  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$  e  $\rho = 1$ .

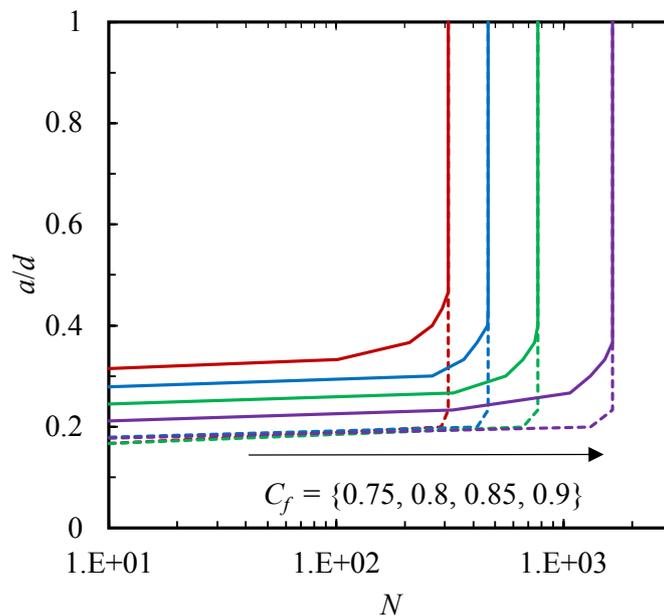


Figura 4.19 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $C_f$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$ ,  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$  e  $\rho = 1$ .

acréscimo de dano menor por ciclo para um mesmo valor de  $T_{n,max,0}$ . O efeito do  $\rho$ , assim como  $C_f$ , na vida em fadiga é não linear.

Nas Figuras 4.21 a 4.23 são apresentados o efeito do expoente de dano no processo de crescimento

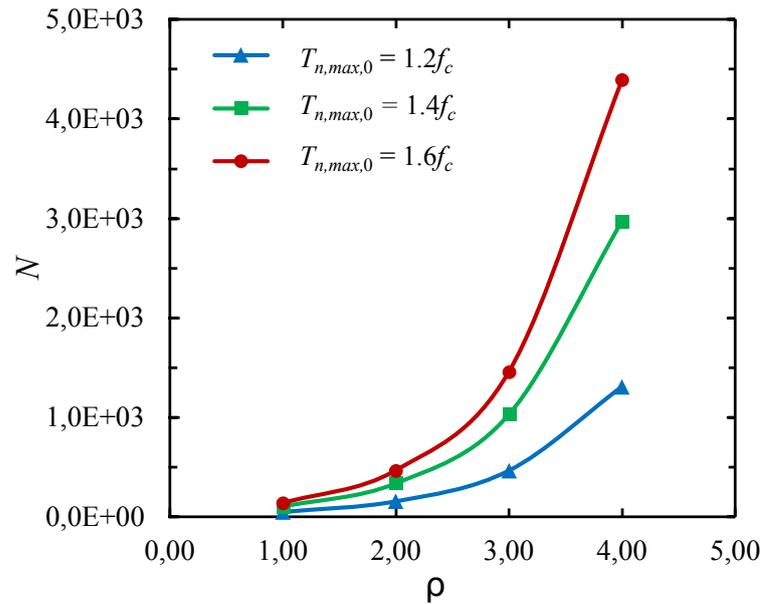


Figura 4.20 – Influência da variação do expoente de dano e tensão coesiva máxima.

Quadro 4.8 – Resultado das simulações da vida em fadiga com variação de  $\rho$  para  $\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0} = 70$  e  $C_f = 0.6$ .

$\frac{T_{n,max,0}}{f_{ct}}$	$\rho$	$N$ (ciclos)
1.2	1.0	50
1.2	2.0	157
1.2	3.0	466
1.2	4.0	1310
1.4	1.0	104
1.4	2.0	338
1.4	3.0	1033
1.4	4.0	2979
1.6	1.0	311
1.6	2.0	464
1.6	3.0	768
1.6	4.0	4399

de trinca. A zona coesiva ativada é representada por linhas cheias e o comprimento de trinca por linhas tracejadas.

Percebe-se que a tensão normal máxima possui clara influência na propagação da zona de processo inicial, como observado nos itens 4.2.1 e 4.2.2. Ao se comparar as Figuras 4.21, 4.22 e 4.23 fica evidente que quanto maior o valor de  $T_{n,max,0}$  menor é o tamanho da zona de processo.

Nota-se que a variação de  $\rho$  não influencia o tamanho da ZPF. Observa-se também que nos três

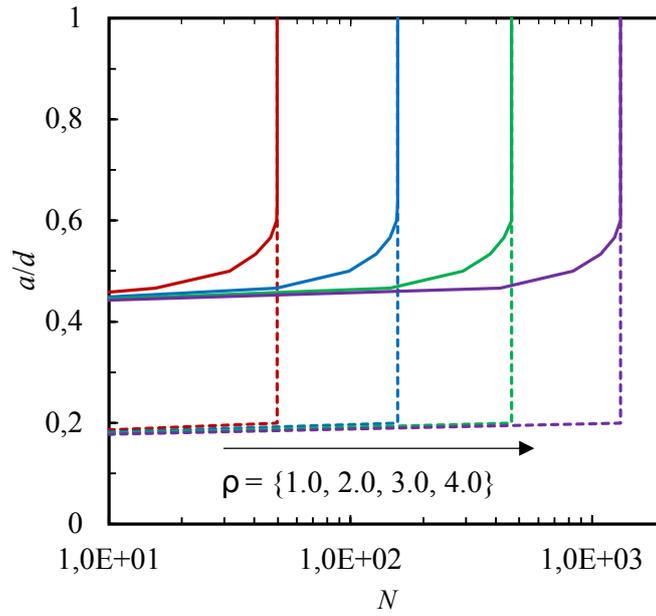


Figura 4.21 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\rho$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.2$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ .

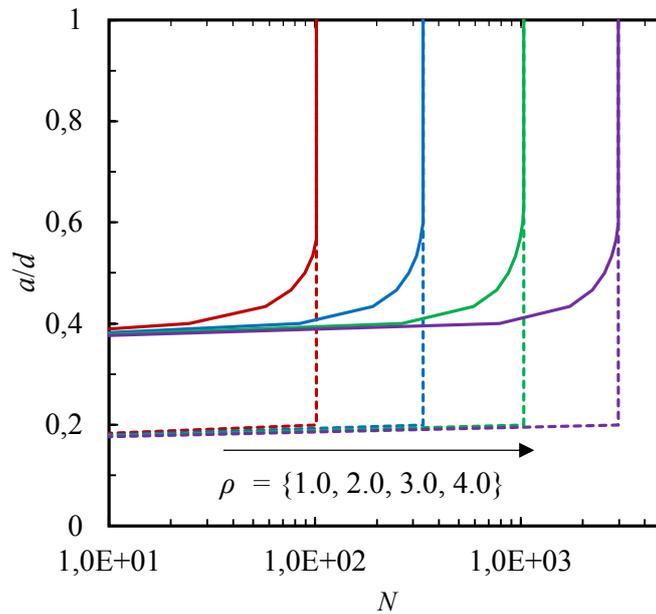


Figura 4.22 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\rho$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ .

casos de  $T_{n,max,0}$  a redução do tamanho da zona de processo em relação ao tamanho da trinca novamente representa um aumento na fragilidade do material.

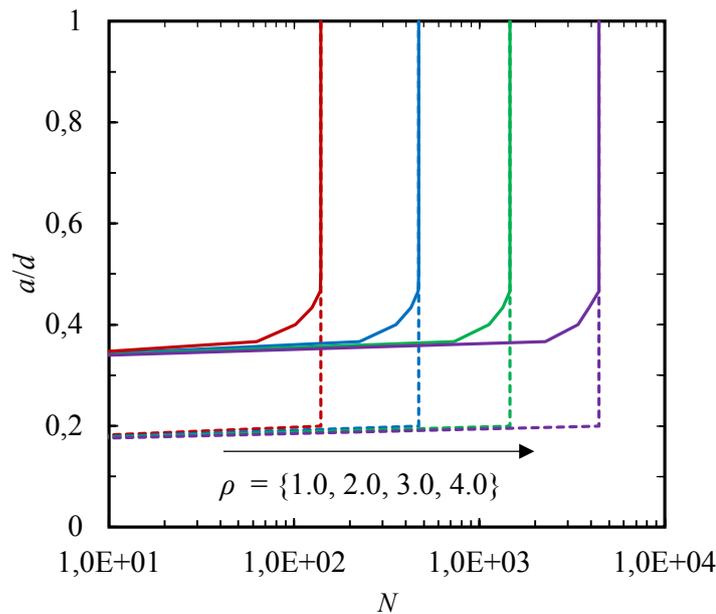


Figura 4.23 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) para a variação de  $\rho$  com  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.6$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$ .

### 4.3 CRESCIMENTO DE TRINCAS POR FADIGA

Nesta seção busca-se a simulação das vigas apresentadas por Bazant e Xu (1991) a partir dos parâmetros coesivos obtidos no item 4.1, assim como as malhas de elementos finitos, as propriedades elásticas do material e o carregamento. O carregamento é aplicado sob a condição de força prescrita através da função senoidal, conforme a seção 4.2. Analogamente ao item anterior, adota-se um modelo de descarga para a origem.

A partir dos parâmetros obtidos para a simulação estática que melhor se ajusta ao resultado experimental, foi realizado um conjunto de simulações para determinar qual o valor de limite de resistência a fadiga que melhor se ajusta ao comportamento a fadiga. O Quadro 4.9 mostra as propriedades utilizadas na simulação de fadiga e seus respectivos ciclos de falha em comparação com uma faixa dos resultados experimentais disponíveis para a viga pequena e a Figura 4.24 apresenta a evolução dos parâmetros de crescimento de trinca utilizados neste trabalho.

Conforme resultados mostrados no Quadro 4.9, percebe-se que é possível obter boa correlação entre os parâmetros do modelo de zona coesiva obtidos para uma análise estática e a vida útil em fadiga utilizando-se o limite de resistência entre  $C_f = 0.89$  e  $C_f = 0.9$ . Além disto, os resultados evidenciam uma elevada sensibilidade da função de dano em relação a este limite, visto que uma variação de 12.5% deste provocou uma variação de aproximadamente 3 vezes na vida em fadiga da peça estrutural.

Quadro 4.9 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para variação de  $C_f$  das vigas pequena, média e grande e  $\delta_\Sigma/\delta_0=70$  e  $\rho = 1$  de Bazant e Xu (1991).

Viga	$T_{n,max,0}$	$\delta_0$ (m)	$C_f$	N	
				Num.	Exp.
Pequena	$1.4f_{ct}$	4.8879E-06	0.80	321	
			0.85	518	
			0.88	667	939-974
			0.89	878	
			0.90	1030	

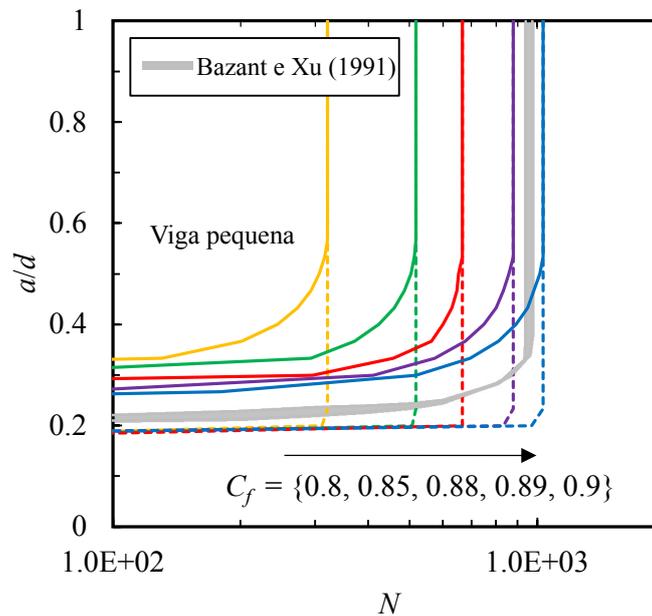


Figura 4.24 – Crescimento de trinca vs número de ciclos para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) com variação de  $C_f$ ,  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$  e  $\delta_\Sigma/\delta_0=70$ .

Quando se analisa a curva de crescimento de trinca, a conclusão apresentada é que o processo de ruptura se dá todo dentro de um único ciclo sem que haja a propagação ao longo do processo. No entanto, ao se analisar a zona de processo de fratura percebe-se que há um processo de evolução de dano ao longo da aplicação do carregamento e que esta se propagada através da peça de maneira semelhante àquela apresentada pelos resultados experimentais disponíveis. No entanto, este comportamento encontra-se deslocado verticalmente devido ao tamanho inicial da zona de processo. Desta forma, pode-se afirmar que o modelo é capaz de capturar aproximadamente o processo de degradação do material devido ao carregamento cíclico, em termos da evolução da zona de processo.

Desta forma, fica demonstrado que o modelo de dano originalmente utilizado por Roe e Siegmund (2003), ou  $\rho = 1$ , apresenta limitações para as análises em questão, visto que ele necessita de

valores para o limite de resistência à fadiga maiores que os valores de referência encontrados na literatura, o que justifica o uso da relação mais geral (3.58). De modo a caracterizar a influência do  $\rho$ , empregam-se os mesmos parâmetros coesivos para obter os resultados apresentados no Quadro 4.9 fixando-se o valor de  $C_f = 0,60$  e utilizando  $\rho = [2.5, 2.7, 2.9, 3.0, 3.1]$ .

Adicionalmente se faz uma comparação com os resultados da simulação com o modelo de microplano M7 realizada por Kirane e Bažant (2015a) para as mesmas vigas do programa experimental de Bazant e Xu (1991). O Quadro 4.10 apresenta um resumo dos resultados obtidos para estas simulações.

Quadro 4.10 – Resultado das simulações com a implementação do parâmetro  $\rho$ , com  $C_f = 0.6$ , para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) e comparação com o modelo de microplano M7.

$\rho$	N		
	Num.	Exp.	M7
2.5	571		
2.7	713		
2.9	889	939-974	848
3.0	986		
3.1	1100		

A partir dos resultados obtidos percebe-se que, o melhor resultado das simulações é obtido para  $2.9 \leq \rho \leq 3.1$ . Nota-se também que  $\rho$ , assim como  $C_f$ , é bem sensível a variações, visto que uma mudança de 2,5 para 3.1 causou um aumento da vida em fadiga de 93%.

Nota-se que, para todos os valores de  $\rho$  utilizados obteve-se um comportamento análogo ao encontrados nas análises anteriores, isto é, a ZPF comporta-se de maneira análoga ao crescimento de trinca experimental deslocado verticalmente em relação aos resultados experimentais e a propagação de trinca não se manifesta ao longo do carregamento, de modo que o processo de ruptura ocorre de maneira frágil durante o último ciclo. A Figura 4.25 apresenta os resultados obtidos dos parâmetros de crescimento de trinca utilizados neste trabalho *versus* o número de ciclos aplicados.

Destaca-se que, de maneira esperada, a inclusão do parâmetro  $\rho$  não possui influência sobre o tamanho da ZPF. Conforme a definição apresentada anteriormente, um elemento coesivo é incluído na zona de processo sempre que a condição  $D > 0$  for atendida. A partir da função de dano de Roe e Siegmund (2003), para que isto seja verdadeiro basta que a função de Heavyside seja satisfeita e que

$$\left[ \frac{\bar{T}}{T_{n,max}} - C_f \right] > 0 \quad (4.3)$$

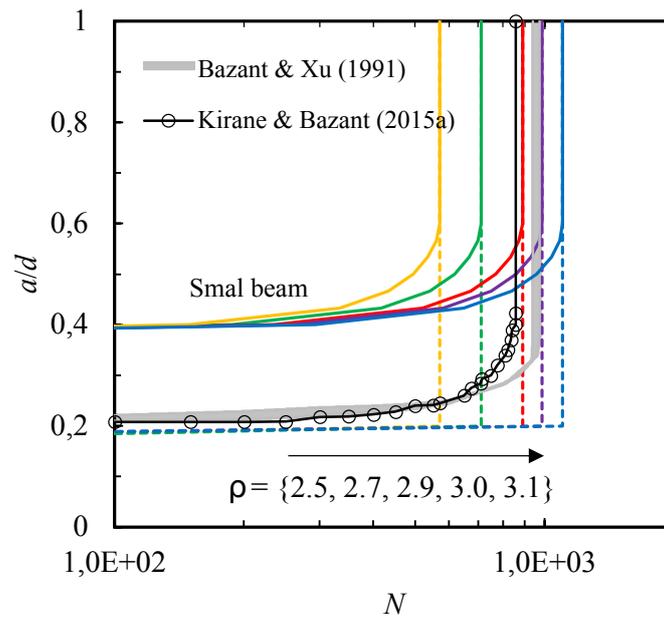


Figura 4.25 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) vs número de ciclos para a viga pequena de Bazant e Xu (1991) com variação de  $\rho$ ,  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.4$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$  e  $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bažant (2015a).

Uma vez que, a condição anterior seja satisfeita, é correto afirmar que no caso da inclusão de  $\rho$ , tem-se

$$\left[ \frac{\bar{T}}{T_{n,max}} - C_f \right]^{\rho} > 0 \quad (4.4)$$

Com isto o único parâmetro da função de dano que possui influência sobre o tamanho da zona de processo no início do carregamento continua sendo  $C_f$ , uma vez que  $T_{n,max,0}$  é um parâmetro que também pertence à função coesiva e por isso está atrelado ao ajuste do comportamento estático.

O Quadro 4.11 apresenta um resumo das simulações das vigas média e grande para a variação de  $\rho$ . Analogamente ao utilizado para a viga pequena, adotou-se um valor único de  $C_f = 0.6$  para todos os casos analisados. Os valores de  $\rho$  encontrados que apresentam melhor correlação para a vida em fadiga das estruturas variam entre  $3.1 \leq \rho \leq 3.3$  para a viga média e  $3.0 \leq \rho \leq 3.1$  para a viga grande. Nota-se um padrão bastante similar aquele verificado para a viga pequena, de modo que se verifica a mesma sensibilidade, em termos gerais, dos resultados de vida em fadiga para os três casos analisados.

Nas Figuras 4.26 e 4.27 apresentam a influência do parâmetro  $\rho$  nos parâmetros de crescimento de trinca para as vigas média e grande apresentadas por Bazant e Xu (1991). Observa-se, de maneira geral, o mesmo comportamento apresentado pela viga pequena em relação aos parâmetros de

Quadro 4.11 – Resultado com a implementação de  $\rho$ , com  $C_f = 0.6$ , para as vigas média e grande de Bazant e Xu (1991) e comparação com o modelo M7.

Viga	$\rho$	N		
		Num.	Exp.	M7
Média	3.0	813	850-1286	768
	3.1	906		
	3.2	1010		
	3.3	1135		
Grande	2.8	731	882-1083	755
	2.9	826		
	3.0	921		
	3.1	1050		

crescimento de trinca. Outra observação se refere ao fato de que o parâmetro  $\rho$  não tem variação significativa em relação ao tamanho da viga, ou seja, não é dependente do tamanho. O melhor valor para representar a vida em fadiga das três vigas a ser adotado pode ser  $\rho \approx 3,1$ .

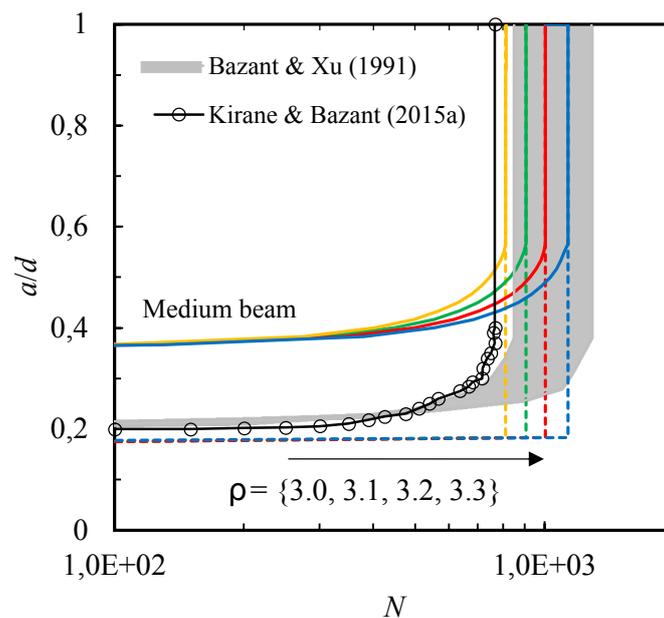


Figura 4.26 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) vs número de ciclos para a viga média de Bazant e Xu (1991) com variação de  $\rho$ ,  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.25$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$  e  $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bazant (2015a).

Nota-se que o tamanho da zona de processo inicial apresentada pela viga grande é menor do que o da viga média, que por sua vez, é menor que o da viga pequena. Este fato é resultado direto do ajuste estático, onde  $T_{n,max,0}$  é decrescente com o aumento da viga.

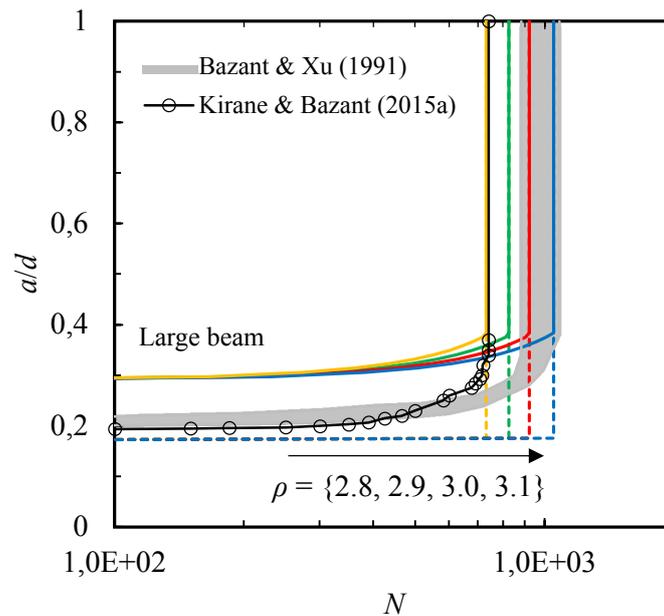


Figura 4.27 – Zona coesiva ativada (linhas cheias) e comprimento de trinca (linhas tracejadas) vs número de ciclos para a viga grande de Bazant e Xu (1991) com variação de  $\rho$ ,  $T_{n,max,0}/f_{ct} = 1.1$  e  $\delta_{\Sigma}/\delta_0=70$  e  $C_f = 0.6$ . Comparação com o modelo de microplano M7 usado por Kirane e Bažant (2015a).

Finalmente, chama-se atenção que para diferentes valores de  $C_f$  e  $\rho$ , é possível obter um ajuste da propagação em fadiga (ver curvas das Figuras 4.24 e 4.25). No entanto, estas curvas apresentam tamanhos de zona de processo distintas, sendo bem maior nos casos da Figura 4.25. Logo, a medição experimental do tamanho da ZPF, poderia ser uma forma de determinação dos parâmetros de dano de fadiga. Slowik, Plizzari e Saouma (1996) observaram uma tendência de limites de resistências menores para peças maiores. Nos presentes casos foi admitido constante, mas as medições do tamanho da ZPF nos experimentos poderiam servir para definir estas variações do  $C_f$  com o aumento das peças. O resultado disso, conforme visto na subseção 4.2.2, seria um aumento da zona coesiva com o aumento das peças durante a propagação por fadiga. No presente resultado,  $C_f$  foi admitido constante. No entanto, uma vez que seja possível medir o tamanho da zona coesiva a partir de experimentos, tal medida poderia ser empregada como uma forma de determinação de  $C_f$ .

#### 4.4 SIMULAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE FADIGA DE VIGAS DE CONCRETO COM CARREGAMENTO DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Nesta seção busca-se a simulação da viga pequena apresentada por Baktheer e Becks (2021) a partir dos parâmetros coesivos apresentados no Quadro 4.12. As malhas de elementos finitos e as propriedades elásticas do material são os apresentados na seção 4.1.

Quadro 4.12 – Resumo das propriedades coesivas utilizados para a vida em fadiga com carregamento de amplitude variável para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

$T_{n,max,0}$ (MPa)	$\delta_0$ (m)	$\frac{\delta_\Sigma}{\delta_0}$	$C_f$
$f_{ct} = 4.19$	1.47898E-05	70	0.6

Neste item o carregamento é aplicado sob a condição de força prescrita através de uma função senoidal de frequência 1hz, sob a forma:

$$F(t) = F_{min} + A(N)[0.5(1 - \cos 2\pi t)] \quad (4.5)$$

onde,  $A(N) = F_{max}(N) - F_{min}$ , representa a amplitude do carregamento aplicado;  $F_{min} = 1.865 \text{ kN}$  é a amplitude mínima constante e  $F_{max}(N)$  a variação da amplitude máxima em função do número de ciclos  $N$  dada por.

$$F_{max}(N) = F_{max,0} + \frac{N}{n}A_0 \quad (4.6)$$

onde  $F_{max,0} = 9.325 \text{ kN}$  é a amplitude máxima inicial;  $N$  é o número de ciclos completados;  $n = 10$  é o número de ciclos entre as variações de  $F_{max}$  e  $A_0 = 0.9325 \text{ kN}$  é a variação adicional da amplitude máxima a cada 10 ciclos. Para simular o resultado experimental encontrou-se um valor de  $\rho = 1.4$ . A Figura 4.28 apresenta a evolução do carregamento para 100 ciclos.

##### 4.4.1 Vida em fadiga e crescimento de trinca

Os parâmetros coesivos utilizados são aqueles apresentados no Quadro 4.12. O Quadro 4.13 apresenta os resultados obtidos para a variação do parâmetro  $\rho$ .

A partir dos resultados apresentados no Quadro 4.13 nota-se que o parâmetro  $\rho$  influencia de modo diferente daquele observado para os casos anteriores. De fato, a variação do novo parâmetro proporciona um aumento na vida em fadiga da estrutura analisada. No entanto, devido à forma da função de carregamento supracitada, este aumento na vida em fadiga foi acompanhado pelo aumento da carga máxima aplicada e como consequência, a vida em fadiga da estrutura é menos sensível a variações do parâmetro  $\rho$ . Para algumas variações o aumento da vida em fadiga é insignificante, por exemplo, de  $\rho = 1.2$  para  $\rho = 1.3$ , que produziu um ganho de apenas dois

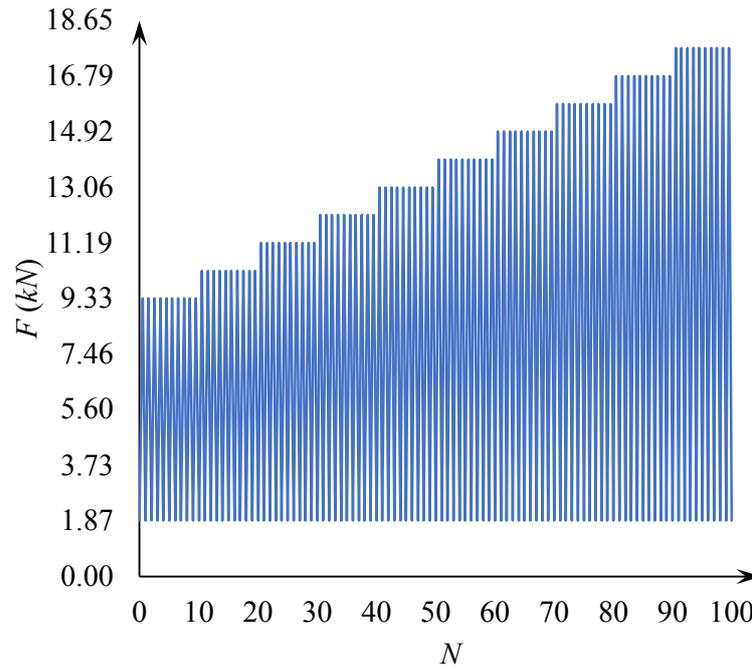


Figura 4.28 – Função de evolução de carga apresentada por Baktheer e Becks (2021).

Quadro 4.13 – Resultado das simulações com variação do parâmetro  $\rho$  para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

$\rho$	Num.		Exp.	
	$N$	$P_{max}$ (kN)	$N$	$P_{max}$ (kN)
1.2	79	15.9		
1.3	81	16.8		
1.4	81	16.8	86	16.8
1.5	87	16.8		
1.6	91	17.7		

ciclos, ou é inexistente, por exemplo, de  $\rho = 1.3$  para  $\rho = 1.4$  em que não houve ganho em dois valores consecutivos.

Este comportamento se origina na forma como a contabilização do dano é feita, conforme descrito pela Equação 3.39, uma vez que, o incremento de dano em ciclos subsequentes é feito a partir da escolha do maior valor entre o incremento cíclico (Equação 3.34), e o dano monotônico (Equação 3.38). Devido a variação da amplitude do carregamento, o incremento do dano monotônico durante o processo de recarga dentro do último ciclo é maior do que o apresentado pela função de dano cíclico, ocasionando assim a ruptura da interface. A Figura 4.29 apresenta a evolução do dano dentro do primeiro elemento coesivo (localizado imediatamente após a ponta da trinca pré-existente) em função da vida em fadiga para os valores de  $\rho$  analisados.

Do ponto de vista da propagação de trincas e da zona de processo, conforme apresentado na

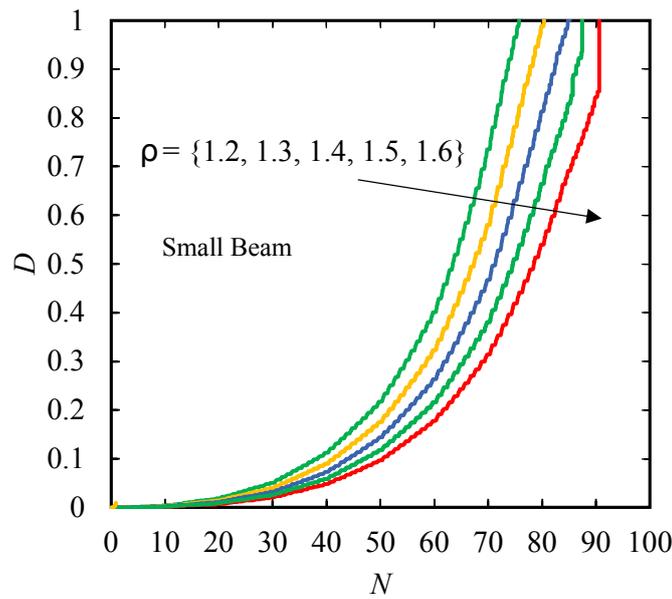


Figura 4.29 – Evolução da variável dano  $D$  em função da vida em fadiga para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

Figura 4.30, os resultados obtidos demonstraram um comportamento análogo aquele apresentado na seção 4.3, isto é, o processo de ruptura se dá de maneira frágil com a falha dos elementos ocorrendo dentro de um mesmo ciclo, no entanto, percebe-se que a evolução da zona coesiva ativada se dá de maneira diferente do que para os casos de amplitude constante. Nota-se que há a formação da zona de processo para os ciclos iniciais e o seu desenvolvimento se dá à medida que a carga máxima aumenta em cada patamar de carga crescente.

#### 4.4.2 Influência do modelo de carga/descarga

Nos casos considerados nos exemplos de fadiga até aqui, sempre se considerou descarga na origem. Nesta seção o efeito da descarga paralela é investigado. O Quadro 4.14 apresenta os resultados de viga em fadiga considerando ambos os processos de carga e descarga. As propriedades coesivas utilizadas são as mesmas obtidas na seção 4.1 adotando-se  $C_f = 0.6$  e  $\rho = 1.4$ . Percebe-se que existe um aumento da vida em fadiga no caso de descarga paralela.

Quadro 4.14 – Influência do modelo de carga/descarga na viga em fadiga para viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

$T_{n,max,0}$	$\delta_0$ (m)	$\frac{\delta_{\Sigma}}{\delta_0}$	$\rho$	Modelo	N	
					Num.	Exp.
$f_{ct}$	1.47898E-05	70	1.4	Origem	86	86
				Paralelo	> 100	

A Figura 4.31 compara o comportamento Carga *versus* CTOD para ambos os casos. Percebe-se que o comportamento experimental possui similaridades com ambos os modelos utilizados.

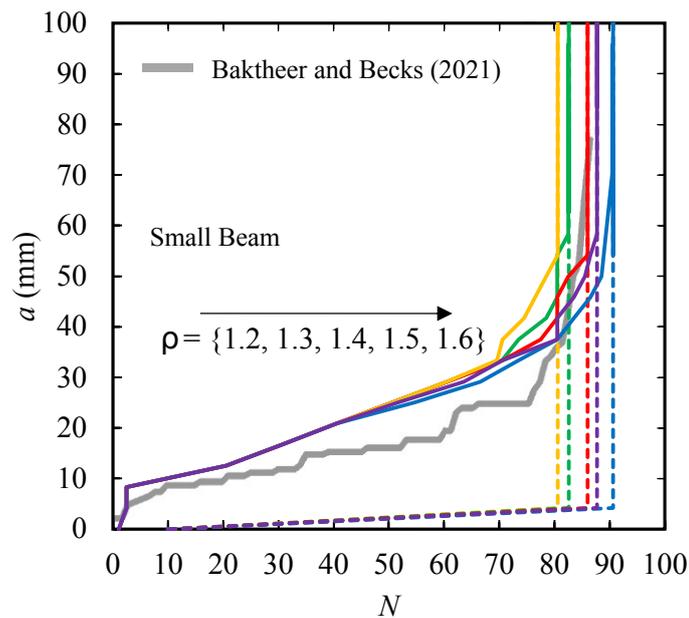


Figura 4.30 – Influência de  $\rho$  no comportamento do crescimento de trinca *versus* número de ciclos para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

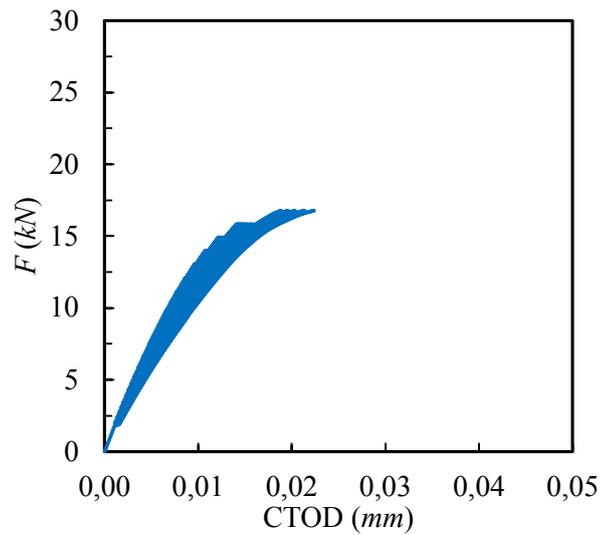
Experimentalmente percebe-se que a abertura para a carga mínima aplicada aumenta durante o processo de carregamento e ao se comparar com os resultados numéricos, este comportamento só pode ser reproduzido a partir do modelo de descarga paralela. No entanto, nota-se que os valores obtidos na ruptura para este modelo são menores que aqueles observados experimentalmente, o que indica que o processo de carga/descarga paralelo não representa melhor o comportamento da degradação do material.

Analogamente, percebe-se que durante a vida em fadiga experimental há uma variação da rigidez ao longo do processo devido a degradação das propriedades. Este comportamento encontra-se claramente demonstrado utilizando-se a descarga em relação a origem. Na Figura 4.32 é apresentado um comparativo da degradação da rigidez dos elementos entre os modelos carga e descarga em análise e o comportamento experimental apresentado por Baktheer e Becks (2021). A degradação da rigidez apresentada é obtida a partir da Equação (4.7).

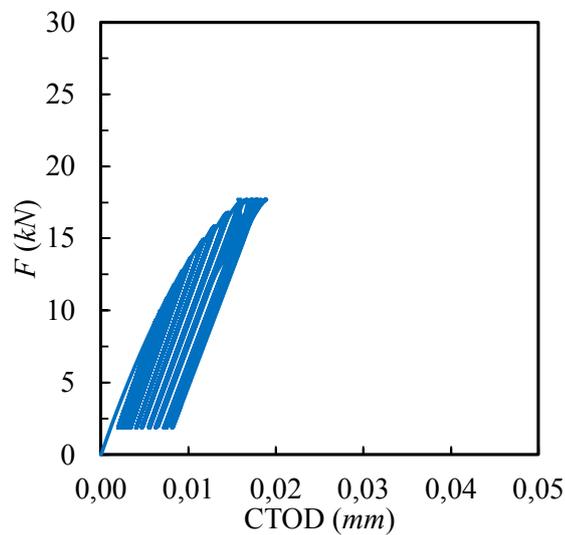
$$s = \frac{E_i}{E_0} \quad (4.7)$$

onde  $E_0$  é a rigidez elástica inicial e  $E_i$  é a rigidez de descarga atual em cada ponto da curva carga-CTOD.

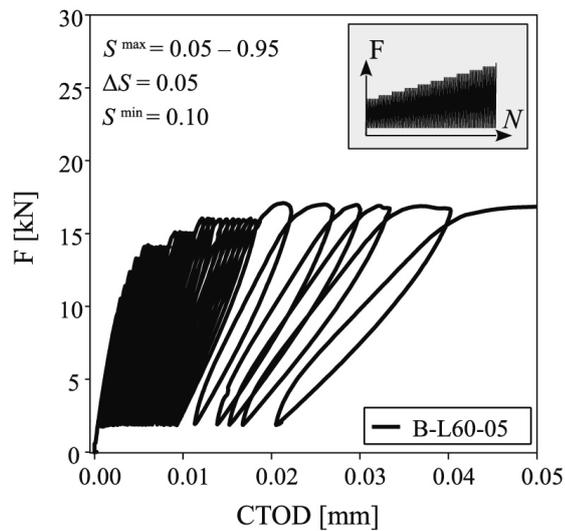
A partir da Figura 4.32, fica evidenciado que o modelo com retorno para a origem é o que apresenta comportamento mais aproximado dos resultados experimentais em relação a degradação da rigidez.



(a) Origem



(b) Paralelo



(c) Experimental (fonte: (BAKTHEER; BECKS, 2021))

Figura 4.31 – Comparação do comportamento Carga *versus* CTOD para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021)

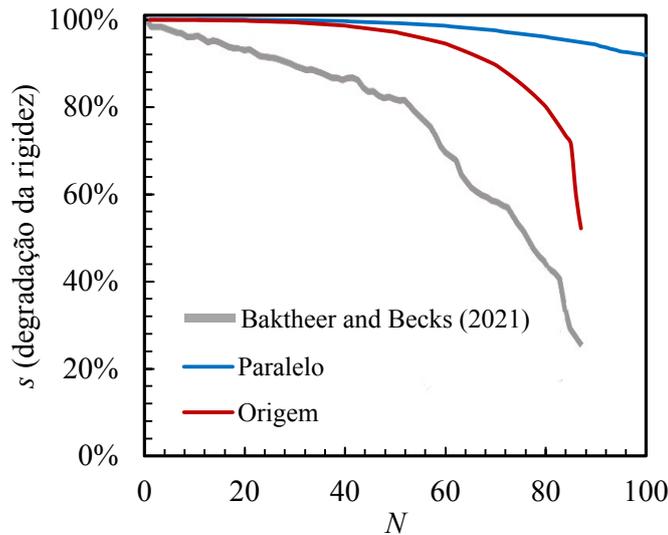


Figura 4.32 – Função de evolução de carga apresentada por Baktheer e Becks (2021).

Estes resultados parecem indicar que para a correta representação deste comportamento se faz necessário um modelo onde seja possível o acúmulo de deslocamento residual na descarga de modo que seja possível a mudança de rigidez ao longo do processo. Pode-se concluir através da comparação com experimentos que o processo de descarga ideal é um meio termo entre os dois modelos mostrados nas Figuras 3.4 e 3.5.

#### 4.5 CURVAS DE WÖHLER

Nesta seção, são determinados os tempos de vida em fadiga  $N$  para as amplitudes de tensões apresentados por Baktheer e Becks (2021). As vigas analisadas são submetidas a duas amplitudes de tensões, em que  $S_{max} = \frac{T_{n,max}}{T_{n,max,0}} = 0.85$  e  $0.70$ , ambos com tensão mínima  $S_{min} = \frac{T_{n,min}}{T_{n,max,0}} = 0.05$ .

Para se obter os valores de forças aplicadas, tomou-se os valores de  $P$  máximos das curvas nas Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.9 e 4.10 multiplicando-se as mesmas por 0.85 e 0.7 para se obter  $S_{max}$  e por 0.05 para se obter  $S_{min}$ .

Para uma visão geral do efeito das propriedades coesivas adotadas no presente trabalho são apresentadas as curvas S-N de todos os casos estudados. O Quadro 4.15 traz um resumo do número de ciclos para os dois níveis de carga descritos.

O *fib* Model Code 2010 (2013) possui uma relação baseada em testes para as curvas de Wöhler

Quadro 4.15 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para o cálculo das curvas de Wöhler das vigas de Bazant e Xu (1991) e Baktheer e Becks (2021).

Autor	Viga	$S_{max}$	$S_{min}$	$\rho$	$N$
Baktheer e Becks (2021)	Pequena	0.85	0.05	1.4	41
		0.70	0.05	1.4	155
	Grande	0.85	0.05	1.4	55
		0.70	0.05	1.4	338
Bazant e Xu (1991)	Pequena	0.85	0.05	3.0	713
		0.70	0.05	3.0	3099
	Média	0.85	0.05	3.0	617
		0.70	0.05	3.0	2429
	Grande	0.85	0.05	3.0	281
		0.70	0.05	3.0	1313

de peças submetidas à flexão para o número de ciclos até a falha definido por

$$\log N_f = 12(1 - S_{max}) \quad (4.8)$$

Esta relação não leva em conta o nível mínimo de tensão  $S_{min}$ , embora a relação geral descrita no código para outros tipos de cargas, como compressão, o considere. Entretanto, uma outra relação proposta por Cornelissen (1984) leva em conta este efeito do nível mínimo de tensão. Esta relação foi baseada a partir de resultados de testes de vigas sob flexão resultando em

$$\log N_f = 14.81 - 14.52S_{max} + 2.79S_{min} \quad (4.9)$$

Uma outra relação que leva em conta não só  $S_{min}$ , mas também a frequência do carregamento e um parâmetro do material foi proposta por Zhang e Wu (1997) para uma série de testes realizados com vários níveis de tensão, situações de carregamento e materiais. A relação para a previsão da vida em fadiga é dada por

$$\log N_f = \frac{1 - S_{max}/C}{\beta(1 - S_{min}/S_{max})} \quad (4.10)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro do material para o concreto normal que vale  $\beta = 0.0807$  e  $C$  é o coeficiente de frequência do carregamento dado por  $C_f = ab^{-\log f} + c$ , onde  $f$  é a frequência em Hz,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros do material, os quais  $a = 0.249$ ,  $b = 0.920$  e  $c = 0.796$ .

A Figura 4.33 mostra as curvas obtidas para os casos analisados e são comparadas com as curvas de Wöhler obtidas a partir das relações introduzidas nas Equações (4.8), (4.9) e (4.10). Os resultados para  $S_{max} = 0.85$  estão dentro das faixas dos modelos, mas não para  $S_{max} = 0.70$ . Para entender melhor esta diferença, abaixo é feita uma análise paramétrica baseada nas curvas de Wöhler.

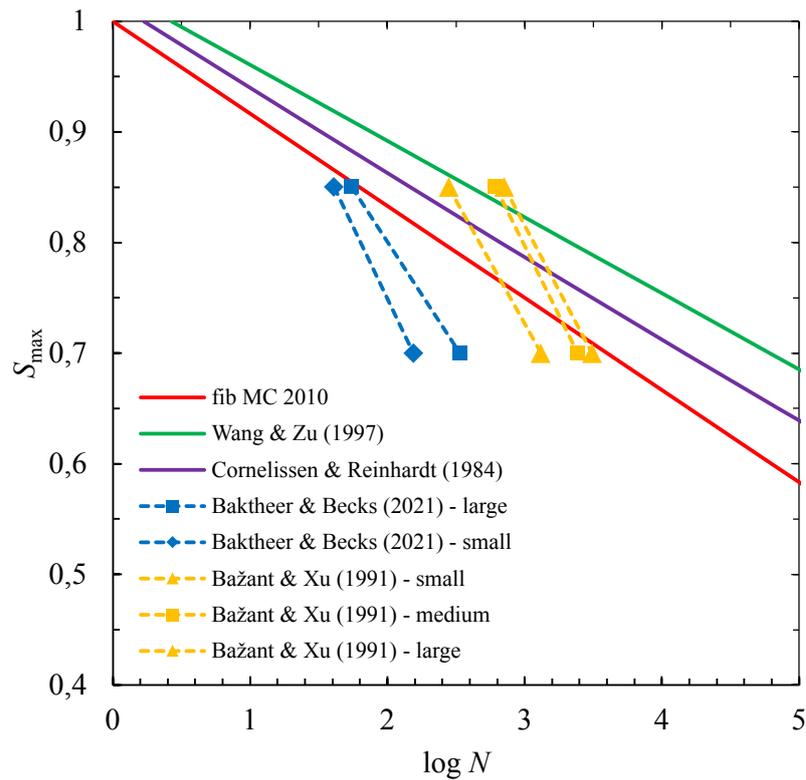


Figura 4.33 – Comparação dos resultados numéricos da vida em fadiga com as curvas de Wöhler para concreto obtidas a partir das relações descritas por *fib* Model Code 2010 (2013), Cornelissen (1984) e Zhang e Wu (1997).

#### 4.5.1 Análise paramétrica para avaliação das curvas de Wöhler

Uma avaliação da sensibilidade do modelo de zona coesiva para as curvas de Wöhler se faz necessária para a avaliação das curvas de Wöhler a partir dos parâmetros que constituem as funções de dano cíclico,  $\delta_{\Sigma}$ ,  $C_f$  e  $\rho$ . As configurações geométricas e as propriedades dos materiais, bem como a malha de elementos finitos, utilizadas nesta aplicação são as mesmas da viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

A análise paramétrica foi efetuada de modo análogo aquele realizado para o carregamento cíclico no item 4.2, isto é, variou-se apenas um parâmetro enquanto os demais foram mantidos constantes para cada grupo de análise.

O carregamento foi aplicado sob a forma de carga prescrita a partir de uma função senoidal com frequência de 5 Hz na qual foram aplicadas duas amplitudes de tensões, em que  $S_{max} = \frac{T_{n,max}}{T_{n,max,0}} = 0,85$  e  $0,70$ , ambos com tensão mínima  $S_{min} = \frac{T_{n,min}}{T_{n,max,0}} = 0,05$ . Para efeito de comparação, as curvas de Wöhler de *fib* Model Code 2010 (2013), Cornelissen (1984) e Zhang e Wu (1997) são novamente plotadas juntamente com os resultados das análises paramétricas.

### Comprimento coesivo acumulado

Os parâmetros coesivos para esta análise foram ajustados para produzir uma vida em fadiga próxima aos resultados da envoltória das três relações de referência introduzidas. Para a variação de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0 = [4, 5, 6, 7]$  foram mantidos constantes  $C_f = 0.8$  e  $\rho = 1.4$ . O Quadro 4.16 mostra um resumo dos resultados desta análise.

Quadro 4.16 – Vida em fadiga para a variação de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com  $C_f = 0.8$  e  $\rho = 1.4$ .

$S_{max}$	$S_{min}$	$\delta_{\Sigma}/\delta_0$			
		4	5	6	7
		$N$			
0.85	0.05	117	143	172	217
0.70	0.05	1106	1379	1533	1927

A partir da Figura 4.34 percebe-se que com o aumento de  $\delta_{\Sigma}/\delta_0$  em uma unidade, há pouco aumento da vida em fadiga, o que mostra pouca sensibilidade do modelo em fadiga quanto ao comprimento coesivo acumulado.

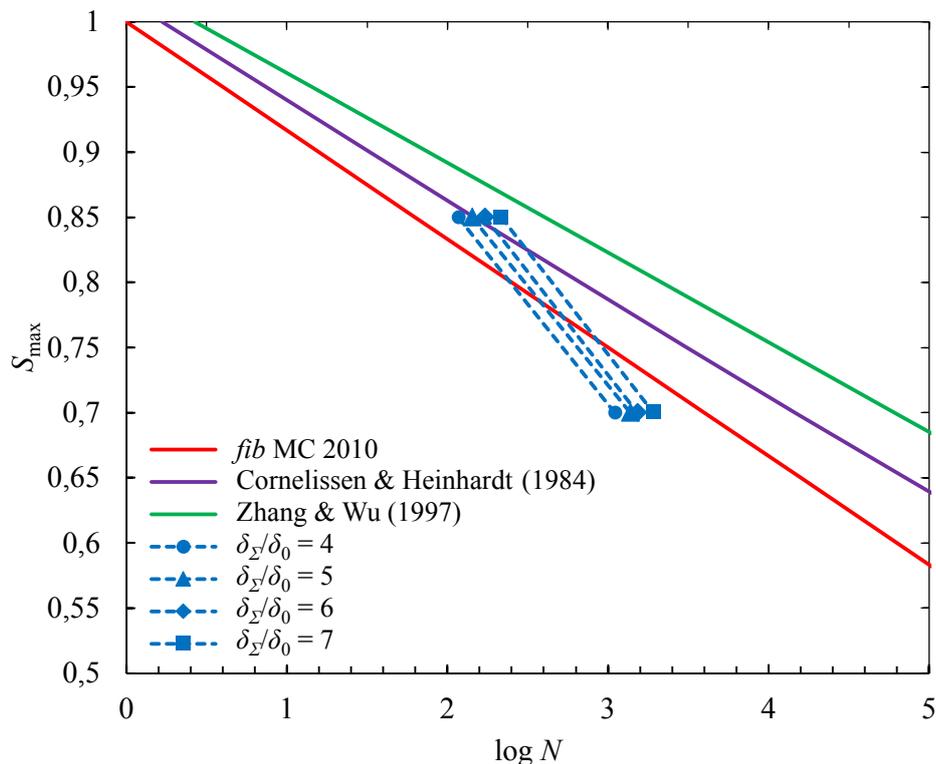


Figura 4.34 – Influência da variação do comprimento coesivo acumulado nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

Para um nível de tensão  $S_{max} = 0.85$  os valores da vida em fadiga tendem a convergir para os

valores da envoltória de cuvas de Wöhler. No entanto, para um nível de tensão  $S_{max} = 0.70$  os valores não acompanham os resultados da envoltória. Nesse caso, a variação do comprimento coesivo acumulado não altera significativamente a inclinação das curvas.

### ***Expoente de dano***

Assim como no item anterior, os parâmetros coesivos para esta análise foram ajustados para produzir uma vida em fadiga próxima aos resultados da envoltória das três relações de referência introduzidas. Para a variação de  $\rho = [1.5, 2.0, 2.5, 3.0]$  foram mantidos constantes  $C_f = 0.6$  e  $\delta_\Sigma/\delta_0 = 10$ . O Quadro 4.17 mostra um resumo dos resultados desta análise.

Quadro 4.17 – Vida em fadiga para a variação de  $\rho$  da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com  $\delta_\Sigma/\delta_0 = 10$  e  $C_f = 0.6$ .

$S_{max}$	$S_{min}$	$\rho$			
		1.5	2.0	2.5	3.0
		$N$			
0.85	0.05	63	118	224	338
0.70	0.05	257	551	1127	2269

A Figura 4.35 mostra que um aumento do comprimento coesivo acumulado, o aumento da vida em fadiga em relação ao  $\rho$  anterior é maior, o que mostra uma sensibilidade do modelo para a vida em fadiga maior do que comprimento coesivo acumulado. Embora a forma das curvas não seja alterada significativamente.

Para um nível de tensão  $S_{max} = 0.85$  os valores da vida em fadiga tendem a convergir para os valores da envoltória de cuvas de Wöhler. No entanto, para um nível de tensão  $S_{max} = 0.70$  os valores se distanciam dos resultados da envoltória. Nesse caso, o aumento do expoente de dano não produz o resultado esperado para a inclinação das curvas.

### ***Coefficiente de resistência à fadiga***

Para esta análise os parâmetros coesivos também foram ajustados para produzir uma vida em fadiga próxima aos resultados da envoltória das três relações de referência introduzidas. Para a variação de  $C_f = [0.6, 0.7, 0.8, 0.9]$  foram mantidos constantes  $\rho = 0.6$  e  $\delta_\Sigma/\delta_0 = 4$ . O Quadro 4.18 mostra um resumo dos resultados desta análise.

A partir da Figura 4.36 pode se ver que a medida que se aumenta o limite de resistência à fadiga, a vida em fadiga é mais acentuada, o que mostra uma sensibilidade do modelo para a vida em fadiga consideravelmente maior do que aquela vista para o comprimento coesivo acumulado e para o expoente de dano.

Para um nível de tensão  $S_{max} = 0.85$  os valores da vida em fadiga tendem a convergir para os

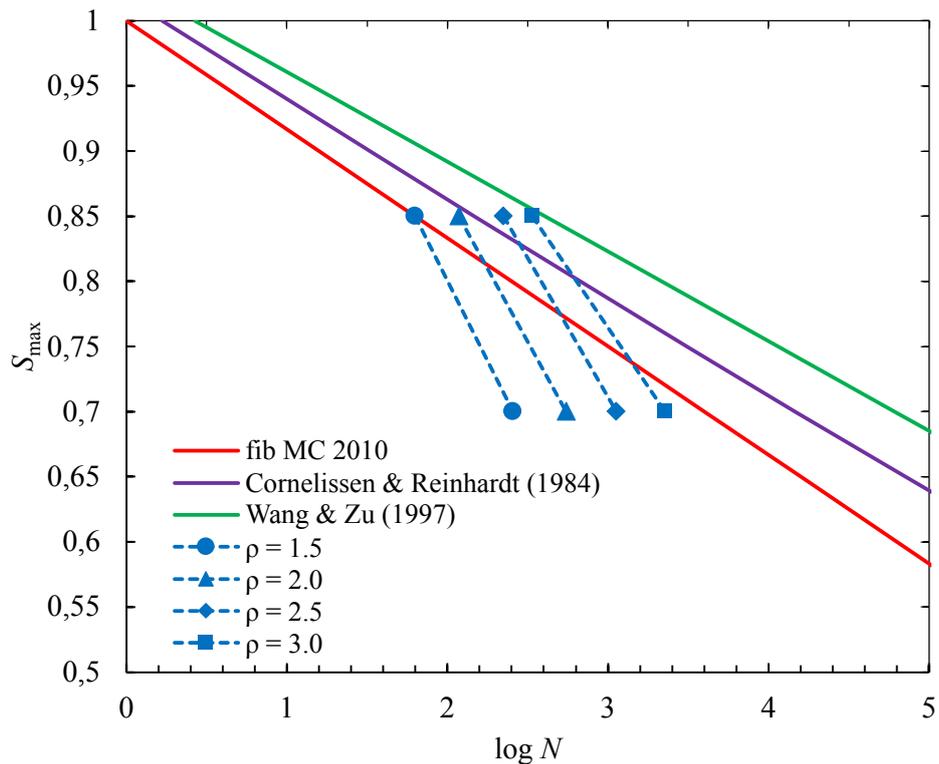


Figura 4.35 – Influência da variação do expoente de dano nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

Quadro 4.18 – Vida em fadiga para a variação de  $C_f$  da viga pequena de Baktheer e Becks (2021), com  $\delta_\Sigma/\delta_0 = 4$  e  $\rho = 1.4$ .

$S_{max}$	$S_{min}$	$C_f$		
		0.6	0.7	0.8
$N$				
0.85	0.05	24	49	117
0.70	0.05	94	234	1101

valores da envoltória de curvas de Wöhler. No entanto, para um nível de tensão  $S_{max} = 0.70$  os valores se distanciam dos resultados da envoltória. Nesse caso, o limite de resistência à fadiga possui uma relação mais satisfatória do que os demais parâmetros em relação ao resultado esperado para a inclinação das curvas, ou seja, a inclinação tende a se aproximar mais dos valores de inclinação teóricos com o aumento do  $C_f$ .

Conforme visto, não foi possível ajustar as curvas teóricas de Wöhler aos resultados do modelo em termos de inclinação. Uma possibilidade de ajuste seria empregar valores de  $\rho$  variáveis com o nível de carga. Assim, este fator deixaria de ser uma propriedade do material puramente. Já foi possível observar nos exemplos testados que em Bazant e Xu (1991) este valor permanece constante com o tamanho e vale em torno de 3. Já no caso de Baktheer e Becks (2021) este valor é bem menor, sendo a carga crescente.

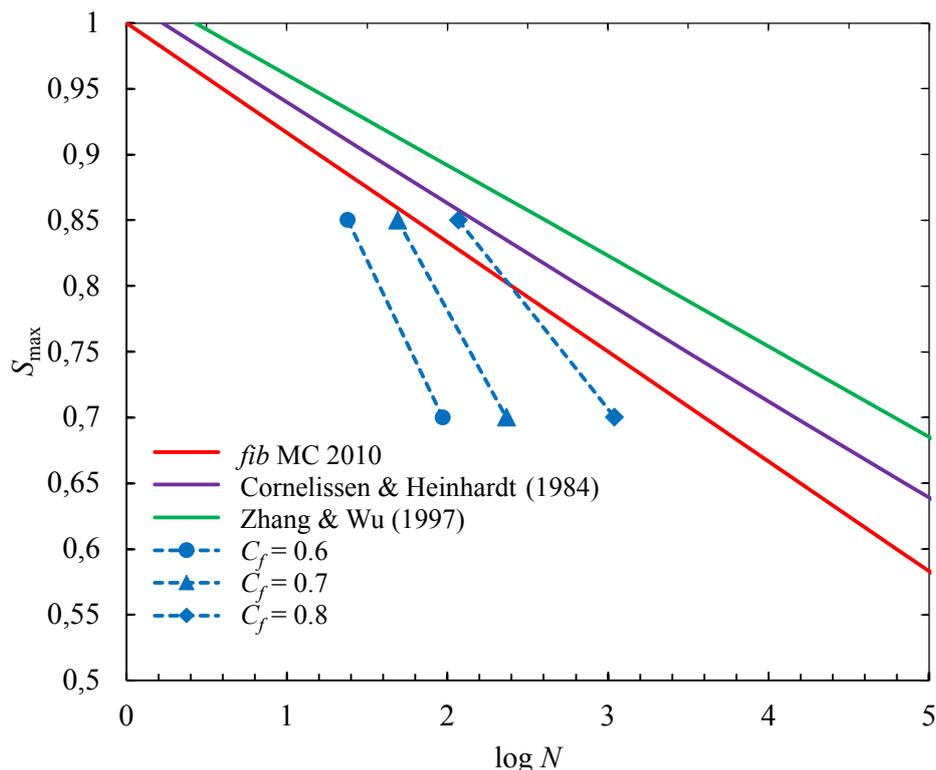


Figura 4.36 – Influência da variação do limite de resistência à fadiga nas curvas de Wöhler para a viga pequena de Baktheer e Becks (2021).

Foram feitos alguns estudos neste sentido, sendo possível obter um bom ajuste das curvas de vida com os casos teóricos, considerando o exemplo de Baktheer e Becks (2021) para cargas cíclicas não crescentes. O Quadro 4.19 mostra os valores de  $\rho$  empregados (com  $\delta_{\Sigma} = 70\delta_0$  para Bazant e Xu (1991),  $\delta_{\Sigma} = 10\delta_0$  para Baktheer e Becks (2021) e  $C_f = 0.6$  para ambos os casos).

Quadro 4.19 – Resumo das propriedades e resultados das simulações da vida em fadiga para o cálculo das curvas de Wöhler das vigas pequena e grande de Baktheer e Becks (2021).

Viga	$S_{\max}$	$S_{\min}$	$\rho$	N	
				Num.	Exp.(média)
Pequena	0.70	0.05	5.7	69032	37290
	0.85	0.05	3.4	430	228
Grande	0.70	0.05	5.7	>100000	2288828
	0.85	0.05	3.4	893	22034

A Figura 4.37 mostra estes resultados junto às curvas teóricas de Wöhler e os resultados experimentais de Baktheer e Becks (2021)

As curvas de Wöhler representadas nesta seção foram calculadas para um número de ciclos da

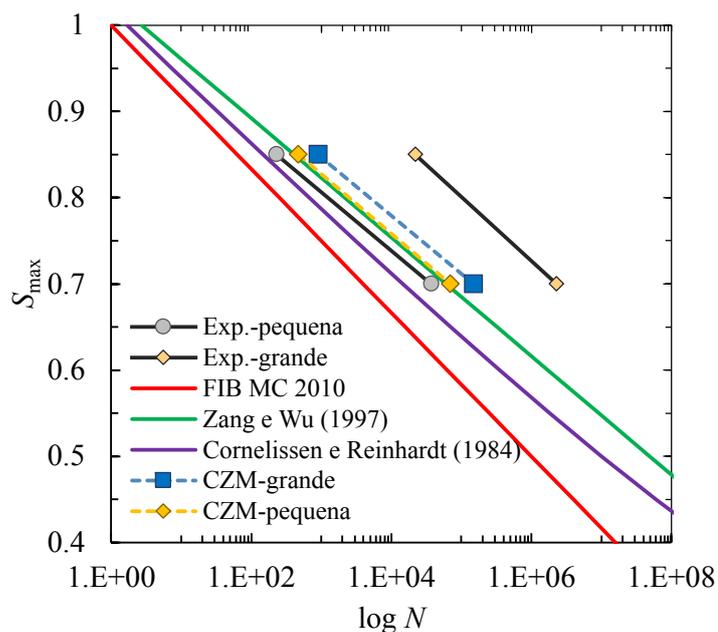


Figura 4.37 – Comparação dos resultados numéricos da vida em fadiga com os experimentais e curvas de Wöhler para concreto sob tensões de tração para as vigas de Baktheer e Becks (2021).

ordem de  $10^3$  e  $10^5$  com custo computacional razoável. Por exemplo, o tempo de computação necessário para a simulação do comportamento de fadiga para 10 ciclos de carregamento com 20 incrementos em cada ciclo foi de 25 segundos usando um computador com 16 GB de memória.

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou a utilização de um modelo de interfaces coesivas com formulação de dano irreversível no processo de simulação da vida útil em fadigas de vigas de concreto simples submetidos a modo I de ruptura e em estado plano de deformações a partir de ensaios experimentais de flexão em três pontos disponíveis na literatura. As análises basearam-se em um conjunto de ferramentas implementadas na plataforma de elementos finitos METAFOR por autores como Moresco (2022).

Em relação à resposta estática, pode-se concluir que:

- No uso do modelo coesivo clássico de Xu e Needleman (1993) o aumento da tensão coesiva normal máxima, proporciona um aumento da carga máxima suportada pela estrutura, assim como, uma variação na rigidez do comportamento inicial. Além disso, torna o comportamento pós-tensão de pico do material mais frágil, isto é, provoca uma redução mais pronunciada da carga suportada após o ponto de máximo, de modo que a área total do gráfico se mantém aproximadamente constante;
- A introdução de dois parâmetros de forma baseados no modelo de Roth, Hütter e Kuna (2014),  $\varepsilon$  e  $\omega$  permite que se ajuste a carga máxima sem perda da qualidade do ajuste nos ramos pré e pós-pico.
- De maneira geral, o modelo utilizado foi capaz de simular de maneira satisfatória o comportamento das vigas de Bazant e Xu (1991) e Baktheer e Becks (2021).

Em relação à resposta em fadiga, pode-se concluir que:

- Aumentam a vida em fadiga: valores maiores de tensão coesiva máxima,  $T_{n,max,0}$ ; do comprimento coesivo acumulado  $\delta_{\Sigma}$ ; do limite de resistência à fadiga,  $C_f$  e do expoente de dano  $\rho$ . O aumento na vida é linear com  $\delta_{\Sigma}$  e não linear com  $C_f$  e  $\rho$ ;
- $T_{n,max,0}$ , em particular, tem importância dominante na vida em fadiga; apesar de maiores valores de  $T_{n,max,0}$  aumentarem a vida, também torna o colapso mais frágil, ou seja, ocorre para valores menores de trinca;
- O tamanho da zona de processo durante a propagação aumenta em relação ao tamanho da trinca com a diminuição de  $T_{n0}$  e  $C_f$ ;

- Acima de certos valores os resultados podem ficar extremamente sensíveis ao valor de  $C_f$  empregando a formulação original de Roe e Siegmund (2003). Além disso, parâmetros necessários para a simulação do comportamento em fadiga das vigas apresentadas por Bazant e Xu (1991) levaram a valores exagerados de  $C_f$ , quando comparados com a literatura;
- Para corrigir a questão acima foi introduzido um novo parâmetro,  $\rho$ , que remete à teoria de Roth, Hütter e Kuna (2014). Valores maiores de  $\rho$  aumentam a vida em fadiga sem alterar o tamanho da zona de processo em relação ao tamanho da trinca;
- O modelo modificado com a introdução do parâmetro  $\rho$  foi capaz de capturar a evolução da zona de processo de fratura de maneira similar àquela apresentada pelo comportamento experimental de crescimento de trinca tanto em Bazant e Xu (1991) como em Baktheer e Becks (2021). No entanto, devido à ausência de parâmetros experimentais não é possível confirmar a precisão destas predições;
- Na aplicação realizada para as vigas de Baktheer e Becks (2021), concluiu-se que o modelo é capaz de fornecer boas estimativas para a vida em fadiga de elementos submetidos a carregamento cíclico de amplitude crescente a partir da função de dano modificada apresentada na aplicação realizada para as vigas de Bazant e Xu (1991). Percebe-se que para estes casos a sensibilidade do modelo a variação do parâmetro  $\rho$  é significativamente menor que a apresentada para os casos de carregamento com amplitude constante;
- Estabeleceu-se que a função de carga/descarga não produz mudanças significativas na vida em fadiga dos elementos e que nenhum dos modelos foi capaz de reproduzir a rigidez observada experimentalmente em Baktheer e Becks (2021). Sendo o modelo com descarga para origem aqueles que melhor se aproximou do comportamento, mas possivelmente um modelo misto seria mais adequado.
- Foi possível ajustar curvas experimentais usando múltiplas combinações de  $C_f$  e  $\rho$ , ou seja, não foi possível encontrar um conjunto único de parâmetros para um dado material. No entanto, como  $C_f$  modifica o tamanho da zona de processo, experimentos podem ser empregados para definir este valor;
- Não foi possível ajustar curvas teóricas de Wöhler com parâmetros constantes para o material. É possível que as propriedades do modelo também possam ser dependentes da carga. Por exemplo, resultados preliminares indicam que  $\rho$  possa ser crescente com a diminuição da carga.

De maneira geral o modelo utilizado é capaz de simular de maneira satisfatória o comportamento estático e a vida em fadiga de elementos de concreto simples com diferentes dimensões, situações de carregamento e propriedades do material. O modelo numérico apresenta boa capacidade de

ajuste com a resposta experimental da estrutura devido à presença dos diferentes parâmetros. Finalmente, o modelo foi capaz de ajustar a curva experimental de propagação *versus*  $N$  entre as curvas numéricas de propagação de trinca e propagação da zona de processo. Tal resultado parece ser bastante satisfatório, pois em geral a propagação de trincas em experimentos é medido apenas de forma indireta, pela perda da rigidez.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

A partir das simplificações e restrições metodológicas utilizadas para a realização deste trabalho, diversas análises complementares podem ser realizadas tais como:

- Estudos experimentais relacionando  $C_f$  e o tamanho da zona coesiva;
- Realização de uma maior série de análises e experimentos de modo a incluir um espectro maior de propriedades do material e níveis de carregamento;
- Adoção de uma relação de carga-descarga onde sejam considerados os efeitos do acúmulo de deformação devido o carregamento mínimo, mas onde seja possível a variação de rigidez devido o processo de dano;
- Consideração de efeitos aleatórios nas propriedades do material e, em especial, no carregamento;
- Inclusão de análises onde consideram-se situações de fadiga distintas ao carregamento de flexão em três pontos, como por exemplo tração direta e compressão simples;
- Incorporação de características microestruturais do concreto na determinação dos parâmetros coesivos;
- Expansão do escopo de modo a incluir os modos II e misto de ruptura.

## REFERÊNCIAS

ALBERT, W. A. J. Uber treibseile am harz. archiv fur mineralogie, georgnosie. **Bergbau und Huttenkunde**, v. 10, p. 215, 1837. Citado na página 25.

BAKTHEER, A.; BECKS, H. Fracture mechanics based interpretation of the load sequence effect in the flexural fatigue behavior of concrete using digital image correlation. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 307, p. 124817, 2021. Citado 25 vezes nas páginas 11, 12, 13, 14, 15, 63, 70, 71, 72, 73, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102 e 103.

BAKTHEER, A.; CHUDOBA, R. Experimental and theoretical evidence for the load sequence effect in the compressive fatigue behavior of concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 54, n. 2, p. 82, 2021. Citado na página 24.

BAKTHEER, A.; HEGGER, J.; CHUDOBA, R. Enhanced assessment rule for concrete fatigue under compression considering the nonlinear effect of loading sequence. **International Journal of Fatigue**, Elsevier, v. 126, p. 130–142, 2019. Citado na página 23.

\_\_\_\_\_. Effect of loading sequence in compressive fatigue of concrete: Experimental and theoretical evidence. In: SPRINGER. **International Symposium of the International Federation for Structural Concrete**. [S.l.], 2023. p. 369–376. Citado na página 24.

BALUCH, M.; QURESHY, A.; AZAD, A. Fatigue crack propagation in plain concrete. In: **Fracture of concrete and rock**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 80–87. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 34.

BARENBLATT, G. I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in applied mechanics**, Elsevier, v. 7, p. 55–129, 1962. Citado 3 vezes nas páginas 24, 26 e 36.

BASQUIN, O. The exponential law of endurance tests, astm (1910). **Copyright of Key Engineering Materials is the property of Trans Tech Publications, Ltd and its content may not be copied or emailed to multiple sites or posted to a listserv without the copyright holder's express written permission. However, users may print, download, or email articles for individual use**, p. 625–630, 1910. Citado na página 26.

BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Matériaux et construction**, Springer, v. 16, p. 155–177, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 42.

\_\_\_\_\_. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 111, n. 4, p. 559–582, 1985. Citado na página 43.

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J. **Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**. [S.l.]: Routledge, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 24, 34 e 65.

BAZANT, Z. P.; SCHELL, W. F. Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect. **ACI Materials Journal**, American Concrete Institute, v. 90, p. 472–472, 1993. Citado na página 24.

BAZANT, Z. P.; XU, K. Size effect in fatigue fracture of concrete. **ACI Materials Journal**, American Concrete Institute, v. 88, n. 4, p. 390–399, 1991. Citado 28 vezes nas páginas 10, 11, 12, 14, 15, 24, 33, 34, 36, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 73, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 95, 99, 100, 102 e 103.

BØRSHEIM, H. **Concrete fatigue of onshore wind turbine foundations**. Dissertação (Mestrado) — University of Stavanger, Norway, 2020. Citado na página 24.

CANER, F. C.; BAŽANT, Z. P. Microplane model m7 for plain concrete. i: Formulation. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 139, n. 12, p. 1714–1723, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 26, 43 e 63.

CARPINTERI, A.; SPAGNOLI, A.; VANTADORI, S. A multifractal analysis of fatigue crack growth and its application to concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 77, n. 6, p. 974–984, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 9, 34 e 35.

CERVERA, M.; OLIVER, J.; MANZOLI, O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. **Earthquake engineering & structural dynamics**, Wiley Online Library, v. 25, n. 9, p. 987–1010, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 43.

CERVERA, M.; PELÀ, L.; CLEMENTE, R.; ROCA, P. A crack-tracking technique for localized damage in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 77, n. 13, p. 2431–2450, 2010. Citado na página 43.

CHEN, C.-J.; SU, M.-N.; WANG, Y.-H.; ZHU, R.-H. Experimental and numerical investigations of crack growth of hot-rolled steel q420c using cohesive zone model. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 127, p. 104036, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 78.

CORNELISSEN, H. Fatigue failure of concrete in tension. **HERON**, 29 (4), 1984, Delft University of Technology, 1984. Citado 7 vezes nas páginas 9, 13, 29, 31, 32, 95 e 96.

CORNELISSEN, H.; REINHARDT, H. Uniaxial tensile fatigue failure of concrete under constant-amplitude and programme loading. **Magazine of concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 36, n. 129, p. 216–226, 1984. Citado na página 32.

CREPPS, R. Fatigue of mortar. In: **Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1923. p. 329–340. Citado na página 29.

DE-ANDRÉS, A.; PÉREZ, J.; ORTIZ, M. Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 36, n. 15, p. 2231–2258, 1999. Citado na página 42.

DENG, P.; MATSUMOTO, T. Determination of dominant degradation mechanisms of rc bridge deck slabs under cyclic moving loads. **International journal of fatigue**, Elsevier, v. 112, p. 328–340, 2018. Citado na página 23.

DNV, G. Dnv-os-h101: marine operations. **General, Offshore Standard**, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 32.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 100–104, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 36.

FIB, F. internationale du beton. **Fib Model Code for Concrete Structures 2010**. [S.l.]: Ernst & Sohn, a Wiley brand, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 13, 23, 32, 94 e 96.

GOEL, S.; SINGH, S. Fatigue performance of plain and steel fibre reinforced self compacting concrete using s–n relationship. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 74, p. 65–73, 2014. Citado na página 30.

GOLEWSKI, G. L. On the special construction and materials conditions reducing the negative impact of vibrations on concrete structures. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier, v. 45, p. 4344–4348, 2021. Citado na página 23.

GOPALARATNAM, V.; SHAH, S. P. Softening response of plain concrete in direct tension. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1985. v. 82, n. 3, p. 310–323. Citado na página 37.

GYLLTOFT, K. **Fracture mechanics models for fatigue in concrete structures**. Tese (Doutorado) — Luleå tekniska universitet, 1983. Citado 4 vezes nas páginas 9, 37, 38 e 41.

HATT, W. Fatigue of concrete. In: **Highway Research Board Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1925. v. 4. Citado na página 29.

HENDY, C.; SMITH, D.; (ORGANIZATION), E. E. **Designers' Guide to EN 1992-2: Eurocode 2: Design of Concrete Structures : Part 2: Concrete Bridges**. Thomas Telford, 2007. (Designers' Guide to EN 1992-2: Eurocode 2 : Design of Concrete Structures. Concrete Bridges). ISBN 9780727731593. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2SRSAAMAAMAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 32.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 6, n. 6, p. 773–781, 1976. Citado na página 37.

HORDIJK, D. Local approach to fatigue of concrete, doctor dissertation. **Delft University of Technology**, 1991. Citado 6 vezes nas páginas 9, 24, 38, 39, 40 e 41.

HORDIJK, D. A.; REINHARDT, H. W. Growth of discrete cracks in concrete under fatigue loading. In: **Toughening mechanisms in quasi-brittle materials**. [S.l.]: Springer, 1991. p. 541–554. Citado 4 vezes nas páginas 9, 38, 39 e 40.

HSU, T. T. Fatigue of plain concrete. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1981. v. 78, n. 4, p. 292–305. Citado na página 31.

HUNG, N. H. Q.; KOMATSU, S.; MAEKAWA, K. High-cycle fatigue interaction between soil foundation and concrete slab under moving wheel-type loads. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 209, p. 109931, 2020. Citado na página 23.

KACHANOV, L. Rupture time under creep conditions. **Izv. Akad. Nauk SSSR**, v. 8, p. 26–31, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 43.

KACHKOUCH, F. Z.; NOBERTO, C. C.; BABADOPULOS, L. F. d. A. L.; MELO, A. R. S.; MACHADO, A. M. L.; SEBAIBI, N.; BOUKHELF, F.; MENDILI, Y. E. Fatigue behavior of concrete: A literature review on the main relevant parameters. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 338, p. 127510, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 9, 23, 31 e 32.

KIRANE, K.; BAŽANT, Z. P. Microplane damage model for fatigue of quasibrittle materials: Sub-critical crack growth, lifetime and residual strength. **International Journal of Fatigue**, Elsevier, v. 70, p. 93–105, 2015. Citado 14 vezes nas páginas 10, 11, 12, 27, 43, 63, 68, 69, 70, 77, 85, 86, 87 e 88.

\_\_\_\_\_. Size effect in paris law for quasibrittle materials analyzed by the microplane constitutive model m7. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 68, p. 60–64, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 43.

KOLLURU, S. V.; O'NEIL, E. F.; POPOVICS, J. S.; SHAH, S. P. Crack propagation in flexural fatigue of concrete. **Journal of Engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 9, p. 891–898, 2000. Citado na página 39.

KUNA, M.; ROTH, S. General remarks on cyclic cohesive zone models. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 196, n. 1, p. 147–167, 2015. Citado na página 41.

LE, J.-L.; MANNING, J.; LABUZ, J. F. Scaling of fatigue crack growth in rock. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, Elsevier, v. 72, p. 71–79, 2014. Citado na página 35.

LE, T.-T.; NGUYEN, V.-H.; LE, M. V. Development of deep learning model for the recognition of cracks on concrete surfaces. **Applied computational intelligence and soft computing**, Hindawi Limited, v. 2021, p. 1–10, 2021. Citado na página 27.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 52.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. **J Méc Appl**, v. 2, n. 3, 1978. Citado na página 43.

\_\_\_\_\_. **Mechanics of solid materials**. [S.l.]: Cambridge university press, 1994. Citado na página 26.

LI, H.; YUAN, H. Cohesive zone modelling of low cycle fatigue cracks in cracked and notched specimens. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, Wiley Online Library, v. 36, n. 12, p. 1246–1257, 2013. Citado na página 58.

LIU, J.; XIANG, C.; YUAN, H. Prediction of 3d small fatigue crack propagation in shot-peened specimens. **Computational materials science**, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 566–571, 2009. Citado na página 64.

LOTSBERG, I. Structural mechanics for design of grouted connections in monopile wind turbine structures. **Marine Structures**, Elsevier, v. 32, p. 113–135, 2013. Citado na página 23.

MAZARS, J. A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. **Engineering fracture mechanics**, Elsevier, v. 25, n. 5-6, p. 729–737, 1986. Citado na página 43.

MINER, M. *et al.* Cumulative fatigue damage. **Journal of applied mechanics**, v. 12, n. 3, p. A159–A164, 1945. Citado na página 26.

MOHAMMADI, Y. Behaviour of steel fibre reinforced concrete in flexural fatigue. **India: University of Roorkee**, 2002. Citado na página 30.

- MORESCO, R. L. Fratura e fadiga elasto-plástica considerando um modelo coesivo. 2022. Citado 5 vezes nas páginas 10, 51, 54, 55 e 102.
- NEEDLEMAN, A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. 1987. Citado na página 26.
- \_\_\_\_\_. Micromechanical modelling of interfacial decohesion. **Ultramicroscopy**, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 203–214, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 41.
- NGUYEN, H. Q. H.; MAEKAWA, K. Multi-scale simulation for fatigue life evaluation of concrete pavement subjected to moving load under dry and wet conditions. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, v. 18, n. 3, p. 95–115, 2020. Citado na página 23.
- NGUYEN, O.; REPETTO, E.; ORTIZ, M.; RADOVITZKY, R. A cohesive model of fatigue crack growth. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 110, n. 4, p. 351–369, 2001. Citado na página 41.
- OH, B. H. Fatigue analysis of plain concrete in flexure. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 112, n. 2, p. 273–288, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 9, 29 e 30.
- ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 44, n. 9, p. 1267–1282, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 42.
- PALMGREN, A. Die lev/bensdauer von kugellagern. **VDI. Z.**, v. 68, p. 339–341, 1924. Citado na página 26.
- PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. 1963. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 33.
- PETERSSON, P.-E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. [S.l.], 1981. Citado na página 37.
- PRC-215-21. Concrete structure design for fatigue loading—report. **ACI Materials Journal**, ACI, 2022. Citado na página 23.
- PUJOL, J. C. F.; PINTO, J. M. A. A neural network approach to fatigue life prediction. **International Journal of Fatigue**, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 313–322, 2011. Citado na página 27.
- RAMAKRISHNAN, V.; WU, G. Y.; HOSALLI, G. Flexural fatigue strength, endurance limit and impact strength of fiber reinforced concretes. **Transportation Research Record**, v. 1226, p. 17–24, 1989. Citado na página 29.
- RANKINE, W. J. M. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles; and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. In: THOMAS TELFORD-ICE VIRTUAL LIBRARY. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**. [S.l.], 1843. v. 2, n. 1843, p. 105–107. Citado na página 25.

ROE, K.; SIEGMUND, T. An irreversible cohesive zone model for interface fatigue crack growth simulation. **Engineering fracture mechanics**, Elsevier, v. 70, n. 2, p. 209–232, 2003. Citado 12 vezes nas páginas 26, 41, 42, 45, 50, 52, 53, 59, 77, 84, 85 e 103.

ROESLER, J.; PAULINO, G. H.; PARK, K.; GAEDICKE, C. Concrete fracture prediction using bilinear softening. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 300–312, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 37.

ROGGENDORF, T.; GORALSKI, C. Ermüdungsverhalten von beton unter zyklischer beanspruchung aus dem betrieb von windenergieanlagen. **Beton-und Stahlbetonbau**, Wiley Online Library, v. 109, n. 11, p. 824–828, 2014. Citado na página 23.

ROTH, S.; HÜTTER, G.; KUNA, M. Simulation of fatigue crack growth with a cyclic cohesive zone model. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 188, n. 1, p. 23–45, 2014. Citado 10 vezes nas páginas 10, 26, 42, 45, 50, 57, 58, 65, 102 e 103.

SCHEIDEN, T.; ONESCHKOW, N. Influence of coarse aggregate type on the damage mechanism in high-strength concrete under compressive fatigue loading. **Structural Concrete**, Wiley Online Library, v. 20, n. 4, p. 1212–1219, 2019. Citado na página 24.

SIEGMUND, T. A numerical study of transient fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. **International Journal of Fatigue**, Elsevier, v. 26, n. 9, p. 929–939, 2004. Citado na página 53.

SLOWIK, V.; PLIZZARI, G. A.; SAOUMA, V. E. Fracture of concrete under variable amplitude fatigue loading. **Materials Journal**, v. 93, n. 3, p. 272–283, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 24, 30, 36 e 88.

TÉCNICAS, A. B. de N. **ABNT NBR 6118:2014 Projeto de estruturas de concreto - procedimento**. [S.l.]: ABNT, 2014. Citado na página 24.

TOUMI, A.; BASCOUL, A. Mode I crack propagation in concrete under fatigue: microscopic observations and modelling. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, Wiley Online Library, v. 26, n. 13, p. 1299–1312, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 9, 40, 41 e 42.

TVERGAARD, V.; HUTCHINSON, J. W. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 40, n. 6, p. 1377–1397, 1992. Citado na página 26.

WANG, B.; SIEGMUND, T. A numerical analysis of constraint effects in fatigue crack growth by use of an irreversible cohesive zone model. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 132, n. 2, p. 175–196, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

WEI, X.; MAKHLOOF, D.; REN, X. Analytical models of concrete fatigue: A state-of-the-art review. **CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 134, n. 1, 2023. Citado na página 23.

WEIBULL, W. A statistical theory of strength of materials. **IVB-Handl.**, 1939. Citado na página 34.

WILLIAMS, H. A. Fatigue tests of lightweight aggregate concrete beams. In: **Journal Proceedings**. [S.l.: s.n.], 1943. v. 39, p. 441–448. Citado na página 29.

WÖHLER, A. Versuche zur ermittlung der auf die eisenbahnwagenachsen einwirkenden kräfte und die widerstandsfähigkeit der wagen-achsen. **Zeitschrift für Bauwesen**, v. 10, n. 1860, p. 583–614, 1860. Citado na página 25.

WU, Y.; YU, T.; ZHANG, L.; WANG, Y.; CHEN, B. Research on the residual bearing capacity of a rib beam bridge carriageway slab based on fatigue cumulative damage. **Symmetry**, MDPI, v. 14, n. 5, p. 894, 2022. Citado na página 23.

XIAO, F.; AMIRKHANIAN, S.; JUANG, C. H. Prediction of fatigue life of rubberized asphalt concrete mixtures containing reclaimed asphalt pavement using artificial neural networks. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 21, n. 6, p. 253–261, 2009. Citado na página 27.

XU, X.-P.; NEEDLEMAN, A. Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. **Modelling and Simulation in Materials Science and engineering**, IOP Publishing, v. 1, n. 2, p. 111, 1993. Citado 6 vezes nas páginas 50, 56, 57, 58, 65 e 102.

\_\_\_\_\_. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 42, n. 9, p. 1397–1434, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 26, 42 e 64.

XU, Y.; YUAN, H. Computational analysis of mixed-mode fatigue crack growth in quasi-brittle materials using extended finite element methods. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 76, n. 2, p. 165–181, 2009. Citado na página 77.

\_\_\_\_\_. On damage accumulations in the cyclic cohesive zone model for x fem analysis of mixed-mode fatigue crack growth. **Computational Materials Science**, Elsevier, v. 46, n. 3, p. 579–585, 2009. Citado na página 58.

YANG, B.; MALL, S.; RAVI-CHANDAR, K. A cohesive zone model for fatigue crack growth in quasibrittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 38, n. 22-23, p. 3927–3944, 2001. Citado na página 41.

YORK, J. O. Account of a series of experiments on the comparative strength of solid and hollow axles. In: THOMAS TELFORD-ICE VIRTUAL LIBRARY. **Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers**. [S.l.], 1843. v. 2, n. 1843, p. 89–91. Citado na página 25.

ZHANG, B.; WU, K. Residual fatigue strength and stiffness of ordinary concrete under bending. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 27, n. 1, p. 115–126, 1997. Citado 5 vezes nas páginas 9, 13, 32, 95 e 96.

ZHANG, J.; ZHU, S.; CAI, C.; WANG, M.; ZHAO, H. Cohesive zone modeling of fatigue crack propagation in slab track interface under cyclic temperature load. **Engineering Failure Analysis**, Elsevier, v. 134, p. 106028, 2022. Citado na página 77.

ZHANG, Y.; WANG, L.; YAN, M. Experimental study on fatigue behavior of notched concrete beams with cfrp external bonding. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 275, p. 115250, 2023. Citado na página 77.