

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise dinâmica de lajes nervuradas bidirecionais: estudo experimental e
numérico**

Yuri Claudio Vieira da Costa

Porto Alegre
2023

YURI CLAUDIO VIEIRA DA COSTA

**ANÁLISE DINÂMICA DE LAJES NERVURADAS BIDIRECIONAIS: ESTUDO
EXPERIMENTAL E NUMÉRICO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em
Engenharia na modalidade Acadêmico.

Porto Alegre
2023

CIP - Catalogação na Publicação

Costa, Yuri Claudio Vieira da
Análise dinâmica de lajes nervuradas bidirecionais:
estudo experimental e numérico / Yuri Claudio Vieira
da Costa. -- 2023.
158 f.
Orientadora: Letícia Fleck Fadel Miguel.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2023.

1. Laje nervurada. 2. Analogia de grelhas. 3.
Método dos Elementos Finitos. I. Miguel, Letícia Fleck
Fadel, orient. II. Título.

YURI CLAUDIO VIEIRA DA COSTA

**ANÁLISE DINÂMICA DE LAJES NERVURADAS BIDIRECIONAIS: ESTUDO
EXPERIMENTAL E NUMÉRICO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul,
Como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em
Engenharia na modalidade Acadêmico.

Prof^a. Leticia Fleck Fadel Miguel
Dr^a. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Orientadora

Prof. Nilo Cesar Consoli
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. Américo Campos Filho (PPGEC / UFRGS)
Dr. pela Universidade de São Paulo, USP

Prof. João Batista Marques de Sousa Junior (DEECC / UFC)
Dr. pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio

Prof^a. Tereza Denyse Pereira de Araújo (DEECC/ UFC)
Dr^a. pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio

Porto Alegre
2023

*Dedico este trabalho a minha esposa e filhos
por todas as alegrias.*

AGRADECIMENTOS

À Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade de participar do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC).

Ao Instituto Federal do Ceará (IFCE), pelo incentivo a qualificação.

A todos os docentes, servidores e discentes do PPGEC, pela troca de conhecimentos.

Ao laboratorista Claudemir Nascimento do IFCE, pela disponibilidade e amizade.

À professora Letícia Fleck Fadel Miguel, orientadora desta tese, pela atenção, dedicação, paciência e confiança.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Generalidades.....	19
1.2	Justificativa	21
1.3	Objetivos	22
1.3.1	Objetivo geral	22
1.3.2	Objetivos específicos	22
1.4	Delimitação do tema	22
1.5	Metodologia	23
1.6	Estrutura da tese	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	Conceitos sobre laje nervurada	25
2.2	Estudos envolvendo análise dinâmica em lajes nervuradas.....	27
2.3	Estudos sobre lajes nervuradas em escala reduzida.....	30
2.4	Modelos teóricos de lajes nervuradas	36
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	39
3.1	Metodologias de análise.....	39
3.1.1	Análise pela teoria das placas.....	39
3.1.2	Análises baseadas no método da rigidez	43
3.1.3	Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF)	49
3.2	Frequência fundamental de pisos.....	52
3.3	Modelo simplificado para flecha imediata devido ao efeito da fissuração.....	53
3.4	Técnicas de análise dinâmica experimental.....	55
3.4.1	Excitação da laje	55
3.4.2	Aquisição de sinais	56
3.4.3	Processamento de sinais	57
3.4.4	Cálculo da frequência natural e amortecimento da estrutura	58
4	MATERIAIS E MÉTODOS	60
4.1	Materiais e métodos do estudo computacional	60
4.1.1	Validação do algoritmo grelhas.....	60
4.1.2	Modelos propostos.....	66
4.1.3	Modelo 1.....	67

4.1.4	Modelo 2.....	67
4.1.5	Análise dos modelos propostos	69
4.1.6	Laje nervurada bidirecional analisada por Lago (2019).....	69
4.2	Materiais e métodos utilizados no estudo experimental	70
4.2.1	Lajes experimentais	70
4.2.2	Concreto	72
4.2.3	Armadura.....	73
4.2.4	Momentos estimados	73
4.2.5	Cargas necessárias para obter os momentos estimados.....	74
4.2.6	Lajes e vigas de suporte.....	76
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO DO ESTUDO EXPERIMENTAL	82
5.1	Análise estática experimental	82
5.1.1	Deformação da laje L1	82
5.1.2	Deformação da laje L2	84
5.1.3	Deformação da laje L3	86
5.1.4	Comparação da deformação entre as lajes.....	88
5.2	Análise estática computacional.....	90
5.2.1	Calibração do modelo 1	95
5.2.2	Configuração das condições de apoio para o modelo 1.....	95
5.2.3	Parâmetros de análise do modelo 1	98
5.2.4	Análise numérica do modelo 1	99
5.2.5	Calibração do modelo 2.....	116
5.2.6	Configuração das condições de apoio para o modelo 2.....	118
5.2.7	Contribuição da resistência do concreto na tração para o modelo 2	119
5.2.8	Influência da resistência do concreto à compressão para o modelo 2	125
5.2.9	Análise das tensões na armadura para o modelo 2	126
5.3	Análise dinâmica.....	128
5.3.1	Análise das frequências experimentais.....	128
5.3.2	Carga dinâmica.....	131
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO	134
6.1.1	Variação da espessura da mesa.....	134
6.1.2	Variação da altura da nervura.....	137
6.1.3	Variação da relação entre vãos	139
6.1.4	Variação do momento de inércia à flexão	141

6.1.5	Varição do momento de inércia à torção	143
6.1.6	Varição da altura da viga na borda da laje.....	146
7	CONCLUSÕES.....	148
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	151
	APÊNDICE A – ROTINA PARA CÁLCULO DOS MOMENTOS CARACTERÍSTICO E DE RUPTURA EM LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON.....	156
	APÊNDICE B – PLANILHA DE NIVELAMENTO GEOMÉTRIO.....	157

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Lajes nervuradas com nervuras em uma e duas direções.	19
Figura 2 - Demonstração de laje nervurada convencional.	25
Figura 3 - Tipos de laje nervurada.	26
Figura 4 - Laje com nervura curva.	26
Figura 5 - Laje em modelo reduzido analisada por Selistre (2000).	32
Figura 6 - Laje em modelo reduzido analisada por Schwetz (2005).	33
Figura 7 - Modelos analisados por Dias (2003).	37
Figura 8 - Processo da espessura equivalente.	39
Figura 9 - Seção T para o cálculo da altura equivalente.	41
Figura 10 - Eixos locais e graus de liberdade de uma barra de grelha isolada.	44
Figura 11 - Matriz de rigidez do elemento de barras.	44
Figura 12 - Sistema com múltiplos graus de liberdade.	50
Figura 13 - MPU6050 e placa com circuito.	56
Figura 14 - Oscilação simples em função do decremento logarítmico.	58
Figura 15 - Laje nervurada analisada por Carvalho e Pinheiro (2009). Unidades em cm.	61
Figura 16 – Modos de vibração da laje analisada por Carvalho e Pinheiro (2009).	62
Figura 17 - Malha gerada pelo algoritmo grelhas, com numeração dos nós e graus de liberdade.	63
Figura 18 - Forma modal e frequência natural obtidas no programa <i>SAP2000</i> e no algoritmo grelhas.	64
Figura 19 - Consideração dos apoios.	65
Figura 20 - Modelo 1.	67
Figura 21 - Modelo 2.	68
Figura 22 – Detalhes da geometria e armadura das lajes.	71
Figura 23 – Suporte para carga sobre a laje.	76
Figura 24 – Dimensões da viga de suporte.	77
Figura 25 – Compactação da areia do suporte da laje.	77
Figura 26 – Nivelamento da areia de suporte da laje.	78
Figura 27 – Lona plástica recobrindo a areia e a viga.	78
Figura 28 – Guia para posicionamento das nervuras.	79
Figura 29 – Concretagem das lajes.	80
Figura 30 – Lajes concretadas.	80

Figura 31 – Vista inferior da laje.....	81
Figura 32 – Localização dos pontos cotados.....	81
Figura 33 – Comportamento da laje L1 para os ciclos de carga.....	83
Figura 34 – Comparação do efeito do carregamento na laje L1.....	84
Figura 35 – Comportamento da laje L2 para os ciclos de carga.....	85
Figura 36 – Comparação do efeito do carregamento na laje L2.....	86
Figura 37 – Comportamento da laje L3 para os ciclos de carga.....	87
Figura 38 – Comparação do efeito do carregamento na laje L3.....	87
Figura 39 – Comparação das lajes no primeiro ciclo de cargas.....	88
Figura 40 – Comparação das lajes no segundo ciclo de cargas.....	89
Figura 41 – Comparação das lajes no terceiro ciclo de cargas.....	89
Figura 42 – Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão.....	91
Figura 43 – Diagrama tensão-deformação simplificado para o aço.....	91
Figura 44 – Diagrama tensão-deformação do concreto gerado pelo programa <i>SAP2000</i>	92
Figura 45 – Diagrama tensão-deformação (modelo de fissuração).....	93
Figura 46 – Diagrama tensão-deformação do concreto adaptado por Schwetz (2011).....	93
Figura 47 – Diagrama tensão-deformação na tração adotado por Schwetz (2011).....	94
Figura 48 – Eixos adotados nas análises.....	95
Figura 49 – Diagrama do momento fletor.....	96
Figura 50 – Eixos adotados nas análises.....	96
Figura 51 – Eixos adotados nas análises.....	97
Figura 52 – Laje com borda simplesmente apoiada.....	97
Figura 53 – Influência da rigidez à torção.....	98
Figura 54 – Diagrama do momento fletor de uma laje nervurada.....	99
Figura 55 – Definição das barras: interna e borda.....	100
Figura 56 – Comparação (L1; 1º ciclo; e linear).....	101
Figura 57 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).....	101
Figura 58 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).....	102
Figura 59 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).....	102
Figura 60 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).....	103
Figura 61 – Comparação (L1; 2º ciclo; linear).....	104
Figura 62 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).....	104
Figura 63 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).....	105
Figura 64 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).....	105

Figura 65 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).	106
Figura 66 – Comparação (L1; 3º ciclo; linear).	107
Figura 67 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).	107
Figura 68 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).	108
Figura 69 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=3 e Ma = máximo).	108
Figura 70 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).	109
Figura 71 – Comparação (L2; 1º ciclo; linear).	110
Figura 72 – Comparação (L2; 1º ciclo; não linear; e Ma = máximo).	111
Figura 73 – Comparação (L2; 2º ciclo; linear).	111
Figura 74 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).	112
Figura 75 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).	112
Figura 76 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).	113
Figura 77 – Comparação (L3; 1º ciclo; linear).	114
Figura 78 – Comparação (L3; 2º ciclo; linear).	114
Figura 79 – Comparação (L3; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).	115
Figura 80 – Comparação (L3; 2º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).	115
Figura 81 – Malha da mesa do modelo 2.	116
Figura 82 – Malha da nervura do modelo 2.	117
Figura 83 – Orientação de eixos no programa <i>SAP2000</i> para o elemento <i>de</i> área.	117
Figura 84 – Análise das condições de contorno.	118
Figura 85 – Comparação dos resultados dos deslocamentos para a laje L1 com diferentes condições de contorno.	119
Figura 86 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L1	122
Figura 87 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L3.	123
Figura 88 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L2.	124
Figura 89 – Análise da resistência à compressão do concreto.	126
Figura 90 – Relação entre tensão de tração no aço e a carga aplicada.	127
Figura 91 – Aceleração obtida do ensaio experimental.	132
Figura 92 – Força que simula a ação de uma sequência de pulos.	133
Figura 93 – Aceleração do modelo 2.	133
Figura 94 - Deslocamento x espessura da mesa.	135

Figura 95 - Frequência x espessura da mesa.	135
Figura 96 - Massa modal x espessura da mesa.	136
Figura 97 - Rigidez modal x espessura da mesa.	136
Figura 98 - Deslocamento x altura da nervura.	137
Figura 99 - Frequência x altura da nervura.	137
Figura 100 - Massa modal x altura da nervura.	138
Figura 101 - Rigidez modal x altura da nervura.	139
Figura 102 - Deslocamento x relação entre vãos.	139
Figura 103 - Frequência x relação entre vãos.	140
Figura 104 - Massa modal x relação entre vãos.	140
Figura 105 - Rigidez modal x relação entre vãos.	141
Figura 106 - Deslocamento x fator multiplicador da inércia.	142
Figura 107 - Frequência x fator multiplicador da inércia.	142
Figura 108 - Massa modal x fator multiplicador da inércia.	143
Figura 109 - Rigidez modal x fator multiplicador da inércia.	143
Figura 110 - Deslocamento x fator multiplicador da inércia à torção.	144
Figura 111 - Frequência x fator multiplicador da inércia à torção.	144
Figura 112 - Massa modal x fator multiplicador da inércia à torção.	145
Figura 113 - Rigidez modal x fator multiplicador da inércia à torção.	145
Figura 114 - Parâmetros normalizados x altura da viga de borda.	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Frequências naturais das lajes bidirecionais: método experimental (f_n); método da altura equivalente (f_a, h_e); método considerando a nervura das lajes (f_a); e modelagem computacional via MEF (f_1).....	28
Tabela 2 – Taxa de amortecimento estrutural em função da utilização da estrutura.....	52
Tabela 3 - Taxa de amortecimento para pisos onde se pratica esporte e dança.	52
Tabela 4 - Frequências críticas para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas.....	53
Tabela 5 - Parâmetros da laje de validação.	60
Tabela 6 - Comparação dos resultados: deslocamentos e frequências.	61
Tabela 7 - Comparação entre características modais.....	63
Tabela 8 - Laje com quatro bordas engastadas.....	65
Tabela 9 - Laje com uma borda engastada e três apoiadas.....	66
Tabela 10 - Parâmetros adotados por Lago (2019).	69
Tabela 11 - Comparação de resultados.....	70
Tabela 12 – Proporções entre dimensões das lajes nervuradas.	71
Tabela 13 – Traço do concreto utilizado nos modelos experimentais.....	73
Tabela 14 - Ensaio de resistência à compressão.....	73
Tabela 15 - Momentos estimados para as lajes experimentais.....	74
Tabela 16 - Carregamento sobre a laje para obter os momentos de referência.	75
Tabela 17 – Tensão máxima de tração no concreto.....	120
Tabela 18 – Frequência experimental obtida utilizando o MPU-6050.....	129
Tabela 19 – Frequência experimental obtida utilizando o sensor acelerômetro embarcado no celular M51.....	130
Tabela 20 – Comparação entre as frequências experimentais.	130
Tabela 21 – Frequências naturais obtidas pelos modelos computacionais.....	131
Tabela 22 – Dados da função.	133
Tabela 23 - Parâmetros modais em função da viga de apoio.	146

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas e Técnicas
AISC	<i>American Institute of Steel Construction</i>
BDTD	Biblioteca digital Brasileira de Teses e Dissertações
DMP	Digital Motion Processor
ELS-VE	Estado Limite de Vibrações Excessivas
EPS	<i>Expanded Polystyrene</i>
MDOF	<i>MultiDegree of Freedom</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira

LISTA DE SÍMBOLOS

$h_e (exp)$	Altura equivalente
α	Coefficiente que relaciona carga e tamanho do vão
D_e	Rigidez equivalente
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante
ν	Coefficiente de Poisson
I	Momento de inércia da seção T em relação ao centroide
S	Largura da mesa considerada
I_e	Inércia equivalente
h_f	Espessura da mesa
b	Largura da nervura
$w(x,y,t)$	Deslocamentos
$p(x,y)$	Carga na placa por unidade de área
ρ	Densidade do material
h	Espessura da placa
D	Rigidez à flexão
E	Módulo de elasticidade longitudinal
$W(x,y)$	Descreve o modo da vibração
ω	Frequência natural da placa
a	Comprimento da placa
$[K]$	Matriz de rigidez global
$\{u\}$	Vetor deslocamento da estrutura
$\{p\}$	Vetor força aplicado na estrutura
A_i	Área da seção considerada;
d_i	Distância do Centro de Gravidade (CG) da seção até o CG da peça considerada
b_i	Dimensões da seção transversal
h_i	Dimensões da seção transversal
e	Menor dimensão da seção transversal
f	Maior dimensão da seção transversal
$[K^e]$	Matriz de rigidez dos elementos
$[B]$	Matriz deformação-deslocamento
$[D]$	Matriz constitutiva

$\{\ddot{x}\}$	Vetor aceleração
$\{\dot{x}\}$	Vetor velocidade
$\{x\}$	Vetor deslocamento
$\{P\}$	Vetor força externa
$[M]$	Matriz de massa do sistema
$[C]$	Matriz de amortecimento viscoso do sistema
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema
α	Fator que relaciona resistência
I_c	Momento de inércia à flexão
y_t	Distância entre a fibra mais tracionada e o centro de gravidade da seção
f_{ct}	Resistência à tração direta do concreto
b e h	Dimensões da seção transversal
I_{II}	Momento de inercia da seção fissurada
M_a	Momento fletor na seção crítica
M_r	Momento de fissuração
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante do concreto
σ_c	Tensão de compressão no concreto;
f_{ck}	Resistência característica à compressão do concreto
ε_c	Deformação específica do concreto
x_i	Valor individual
\bar{x}	Média dos valores
n	Número de valores
$F(t)$	Função da força do carregamento dinâmico no tempo
CD	Coefficiente de defasagem
K_p	Coefficiente de impacto
P	Peso da pessoa
T	Tempo da atividade
T_c	Período de contato
t	Tempo

RESUMO

COSTA, Y.C.V. Análise dinâmica de lajes nervuradas bidirecionais: estudo experimental e numérico. 2023. (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

As lajes nervuradas são recorrentemente adotadas em projetos por diversos motivos. No âmbito arquitetônico possibilitam ambientes amplos e com maior dinâmica para os *layouts*. No tocante ao canteiro de obras utilizam tecnologia acessível e de fácil execução. No domínio do projeto estrutural são lajes otimizadas. As lajes nervuradas possuem muitas variações, podendo ser moldadas *in loco* ou com nervuras pré-moldadas, concretadas com fôrmas recuperáveis ou perdidas e as nervuras podem ser em uma ou duas direções. O seu comportamento estrutural pode ser compreendido como intermediário entre a placa (laje maciça) e a grelha (grelha de vigas), havendo, por isso, várias formas de idealizar este comportamento. Destacam-se três procedimentos normalmente utilizados na análise dessas lajes: metodologia de dimensionamento da laje maciça considerando as propriedades da seção da nervura (análise pela teoria de placas); analogia de grelhas; e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Essas metodologias por adotarem simplificações diferentes podem gerar análises com resultados diferentes, tanto na análise estática quanto na análise dinâmica. O interesse na análise dinâmica dessas lajes surge pelo fato de que elas possibilitam a construção de grandes vãos e algumas análises mostraram que nessa situação podem apresentar frequência fundamental com valores próximos a frequências de atividades humanas, necessitando assim de uma análise dinâmica com acurácia. Aprimorar o entendimento sobre o comportamento dessas lajes e gerar contribuições na forma como são modeladas (analogia de grelhas e MEF) é o objetivo deste trabalho. Para tal, comparam-se resultados dos modelos computacionais com dados experimentais. Os resultados mostram que alguns parâmetros desconsiderados ou reduzidos nas análises, como a resistência à tração no concreto e a constante de torção, modificam significativamente o comportamento do modelo computacional.

Palavras-chaves: Laje nervurada. Analogia de grelhas. Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

COSTA, Y.C.V. Análise dinâmica de lajes nervuradas bidirecionais: estudo experimental e numérico. 2023. (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

The ribbed slabs are recurrently adopted in projects for several reasons. In the architectural scope, they allow for spacious environments with greater dynamics for layouts. With regard to the construction site, they use affordable and easy-to-execute technology. In the field of structural design are optimized slabs. The ribbed slabs have many variations, and can be cast in situ or with precast ribs, concreted with recoverable or lost formwork, and the ribs can be in one or two directions. Its structural behavior can be understood as intermediate between the plate (solid slab) and the grid (beam grid), due to this fact, there are several ways to idealize its behavior. Three procedures normally used in the analysis of these slabs stand out: solid slab design methodology considering the properties of the rib section (analysis using plate theory); grid analogy; and the Finite Element Method (FEM). These methodologies, by adopting different simplifications, can generate analyzes with different results, both in static and dynamic analysis. The interest in the dynamic analysis of these slabs arises from the fact that they allow the construction of large spans and some analyzes have shown that in this situation they can present fundamental frequency with values close to the frequencies of human activities, thus requiring an accurate dynamic analysis. Improving the understanding of the behavior of these slabs and generating contributions in the way they are modeled in the grid analogy and using the FEM is the objective of this work. The results show that some parameters that are neglected in some analyzes, such as torsional constant and tensile strength in concrete, significantly modify the behavior of the computational model.

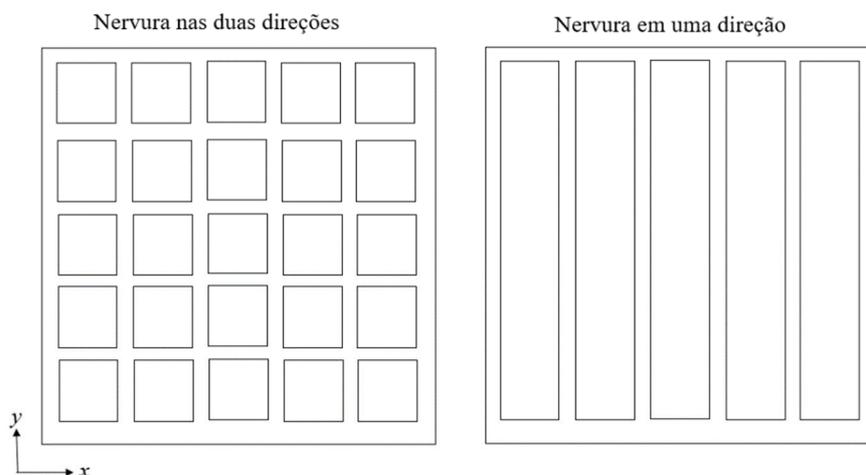
Key-words: Ribbed slab. Grid Analogy Method. Finite Element Method.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

A laje nervurada tem seu emprego difundido em vários países, e no Brasil sua utilização é recorrente. Devido a sua geometria pode ser considerada uma estrutura otimizada, pois reduz a quantidade de concreto sem função estrutural, permitindo vencer grandes vãos e promovendo maior área útil sem a interferência de pilares. Nessas lajes, há uma redução no volume de concreto na região de tração para momentos positivos, concentrando as armaduras positivas nas nervuras. Essas lajes podem ser: moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas; concretada com fôrmas recuperáveis ou perdidas; e com nervuras em uma ou duas direções (Figura 1). Este trabalho apresenta foco nas lajes nervuradas moldadas no local com nervuras nas duas direções.

Figura 1 - Lajes nervuradas com nervuras em uma e duas direções.



Fonte: O autor.

Em edifícios altos, o volume de concreto das lajes pode chegar a 60% do volume total de concreto utilizado na estrutura (DIAS, 2003). Em geral, os maiores custos com concreto nas obras verticais são nas lajes. Reduzir o seu volume é essencial para uma construção otimizada. Alguns fabricantes informam que a redução do volume de concreto da laje nervurada pode chegar até 40% se comparado com a laje maciça. Desta forma, a utilização da laje nervurada traz significativa economia para a obra, pois além de racionalizar o concreto e o aço utilizados na laje, reduz a carga total destinada a pilares e fundações.

O dimensionamento das lajes nervuradas é normalmente realizado considerando a análise estática, porém dependendo da finalidade de uso da laje, a análise dinâmica também é

requerida. Na análise dinâmica de lajes, um dos principais pontos a ser verificado é a frequência fundamental, pois a NBR 6118 (ABNT, 2014) utiliza esse parâmetro na verificação do Estado Limite de Vibrações Excessivas (ELS-VE) e guias internacionais utilizam a frequência fundamental da laje como base para suas formulações.

Essas análises visam garantir a segurança e evitar que os usuários das edificações sintam desconforto devido à percepção das vibrações nas lajes. Estudos mostram que as lajes nervuradas podem apresentar frequência fundamental com valores que requerem atenção. Lago (2019) obteve, em um estudo experimental em lajes nervuradas, frequências entre 7 e 8 Hz para um conjunto de 5 lajes com vãos entre 8 e 12,5 m; Leite (2012) estudou as lajes nervuradas com relação às respostas estática e dinâmica, através de análises numérico-computacionais utilizando elemento finito de casca no *software ANSYS*. O autor obteve em várias análises frequências naturais abaixo de 8 Hz; Costa (2012) realizou um estudo numérico computacional sobre o comportamento estático e dinâmico de lajes nervuradas, utilizando elementos sólidos no *software SAP 2000*, por meio do MEF, e obteve em algumas análises frequência fundamental abaixo da frequência crítica para ginásio de esportes (9,6 Hz).

Na obtenção dos esforços necessários ao dimensionamento de lajes nervuradas, destacam-se três metodologias: processo de resolução de placas elásticas, considerando as propriedades da seção da nervura; analogia de grelhas; e o MEF. Os resultados dessas análises dependem da forma que a estrutura é idealizada e das simplificações adotadas nesses modelos. A partir dessas três metodologias, vários autores propuseram modelos para analisar as lajes nervuradas. Porém, quando comparados com dados experimentais, esses modelos nem sempre fornecem resultados acurados.

Lago (2019) em seus estudos sobre lajes nervuradas, utilizando três modelos teóricos, obteve diferentes níveis de precisão em suas análises para as frequências naturais em comparação com valores experimentais obtidos em edificações. Segundo Recalde *et al.* (2015), lajes nervuradas analisadas por modelos numéricos computacionais normalmente utilizam métodos simplificados para a geometria da seção (lajes maciças ou grelha) e para as propriedades mecânicas do material (regime elástico linear) e as respostas desses modelos diferem de ensaios experimentais.

Ensaio experimentais permitem ter uma visão realista sobre uma estrutura que se deseja analisar e os resultados obtidos nessas análises podem ser utilizados para propor melhorias em modelos teórico-numéricos. Com relação às lajes nervuradas, como os modelos teórico-numéricos adotam diferentes níveis de simplificações, os resultados podem não

apresentar o mesmo nível de precisão. Assim, as análises experimentais remetem a resultados para fins de comparação e calibração desses modelos.

Destaca-se que realizar ensaios em um ambiente de canteiro de obras não é uma tarefa simples, pois diversas situações podem comprometer a aquisição dos dados e influenciar na resposta experimental. Por isso, neste trabalho, optou-se por utilizar um ambiente controlado para construção das lajes e realização dos ensaios.

Neste estudo não se busca questionar a formulação dos modelos, mas verificar a adequação das simplificações utilizadas nas análises. Pretende-se analisar as lajes nervuradas de concreto armado construídas em um ambiente controlado e comparar os resultados obtidos dos modelos teórico-numéricos como os resultados experimentais, de forma a verificar a adequação desses modelos. Podendo os resultados servirem para propor alinhamentos nos modelos teóricos.

1.2 Justificativa

As lajes nervuradas bidirecionais de concreto armado são utilizadas em diversos projetos. Entre os motivos de sua utilização está a sua capacidade de vencer grandes vãos. Algumas análises mostraram que nessa situação as lajes nervuradas podem apresentar frequências fundamentais com valores próximos às frequências de atividades humanas, por isso sua estimativa em fase de projeto é importante. Destaca-se que para realizar a análise dinâmica de pisos, as normas brasileiras e guias internacionais utilizam a frequência fundamental da laje como base para suas formulações. Assim, diminuir as incertezas na obtenção das frequências naturais é de significativa importância.

O dimensionamento das lajes nervuradas depende de vários fatores, entre eles da metodologia de análise e do nível de simplificação adotado. Os valores obtidos nessas análises, em alguns casos, podem ser diferentes de valores obtidos em ensaios experimentais, o que requer maior esclarecimento.

Devido ao fato dos modelos teórico-numéricos, em algumas situações, poderem apresentar resultados diferentes de valores experimentais, surge a importância deste trabalho. Verificar a adequação entre os modelos teórico-numéricos e os dados experimentais. Destaca-se que estes modelos teórico-numéricos são os convencionalmente utilizados por engenheiros na análise de lajes nervuradas.

Por fim, contribuir de forma positiva na maneira como essas estruturas são analisadas e melhorar o entendimento, possibilitando que os modelos teórico-numéricos possam ser aprimorados.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é ampliar o conhecimento sobre lajes nervuradas bidirecionais de concreto armado e verificar quais configurações nos modelos teórico-numéricos geram melhor adequação às respostas experimentais.

1.3.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral os seguintes objetivos específicos são buscados:

- ✓ Ensaiar lajes nervuradas bidirecionais de concreto armado, considerando um progressivo estado de fissuração das lajes, obtendo as frequências naturais e os deslocamentos máximos;
- ✓ Comparar a resposta dos modelos teórico-numéricos com os valores experimentais, refutando ou confirmando os parâmetros adotados nos modelos;
- ✓ Com a calibração do modelo teórico-numérico, realizar ensaio de vibração forçada e comparar os resultados experimentais e computacionais; e
- ✓ Realizar estudo paramétrico computacional para determinar como as características da laje nervurada influenciam na frequência fundamental.

1.4 Delimitação do tema

Este estudo é delimitado à análise teórico-numérica e experimental sobre lajes nervuradas bidirecionais de concreto armado. Essa configuração foi escolhida por ser amplamente utilizada em edificações no Brasil. O estudo é focado na obtenção das frequências naturais e da flecha imediata. Os dados da análise numérica são obtidos conforme programas escolhidos para este estudo e os dados experimentais são obtidos com equipamentos adequados. A análise teórico-numérica não busca questionar as formulações e é limitada aos modelos escolhidos neste trabalho.

1.5 Metodologia

Este trabalho compreende a análise de laje nervurada com relação ao seu comportamento estático e dinâmico, buscando trazer contribuições para as práticas de engenharia e para pesquisadores do tema.

Inicialmente, três lajes nervuradas são dimensionadas e construídas. Os ensaios nas lajes são realizados 28 dias após a concretagem, pois o concreto atinge a resistência de projeto. Nos ensaios, as lajes são submetidas a ciclos controlados de carga, objetivando gerar um progressivo estágio de fissuração do concreto. Durante o ciclo de carga, os deslocamentos no centro das lajes (flecha imediata) são medidos e entre cada ciclo realizam-se ensaios de vibração livre nas lajes. Os dados são coletados com a utilização de acelerômetros e relógios comparadores. Por meio dos registros dos acelerogramas (aceleração ao longo do tempo) é realizada a transformação para o domínio da frequência para obter as frequências naturais das lajes.

Como já mencionado, os ensaios experimentais são executados em três lajes. A primeira é a laje de referência; a segunda sofre alteração da armadura de combate à flexão; e a terceira sofre alteração na inércia da seção transversal por meio do aumento na altura da nervura, a variação da altura da nervura é o parâmetro que reflete maior alteração na frequência fundamental. Com os resultados dos ensaios, é possível analisar a adequação aos modelos numéricos.

As lajes ensaiadas experimentalmente são analisadas utilizando os modelos teóricos comentados anteriormente. A análise via MEF é realizada utilizando o programa *SAP2000*. O estudo por analogia de grelhas é realizado utilizando uma rotina de autoria do autor deste trabalho, denominado algoritmo grelhas. Por fim, os resultados das análises numéricas e experimentais são comparados entre si para as frequências e flechas imediatas, confirmando ou refutando parâmetros adotados. Com os dados obtidos dos ensaios experimentais e com a calibração do modelo numérico, um ensaio de vibração forçada é realizado para verificar se o comportamento da estrutura é coerente.

Por fim, um estudo paramétrico é realizado objetivando analisar como as características geométricas modificam o valor da frequência fundamental.

1.6 Estrutura da tese

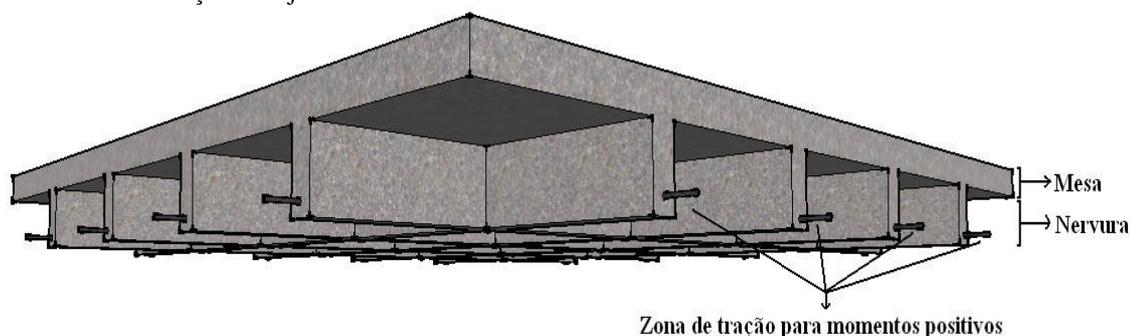
A tese é dividida em sete capítulos conforme descrição a seguir. O primeiro capítulo é a introdução onde estão descritas informações iniciais sobre a tese, compreendendo a contextualização do estudo, o objetivo geral e específicos, assim como a exposição da estrutura da tese. O segundo capítulo é a revisão bibliográfica, com informações gerais sobre as lajes nervuradas, bem como estudos sobre o tema. O terceiro capítulo é a fundamentação teórica, no qual são apresentados conceitos e formulações. No quarto capítulo, apresentam-se os materiais e métodos utilizados nas análises. O quinto capítulo apresenta o estudo experimental, bem como seus resultados. No sexto capítulo realiza-se o estudo numérico sobre as lajes nervuradas. No sétimo e último capítulo são apresentadas as principais conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Conceitos sobre laje nervurada

Na literatura há várias definições sobre lajes nervuradas, normalmente descrevendo o seu comportamento na região tracionada para momentos positivos, como a descrita na NBR 6118 (ABNT, 2014), que define as lajes nervuradas como estruturas moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas em que a região de tração para momentos positivos está localizada nas nervuras entre as quais pode ser alocado material sem função estrutural. Uma representação de laje nervurada pode ser visualizada na Figura 2.

Figura 2 - Demonstração de laje nervurada convencional.

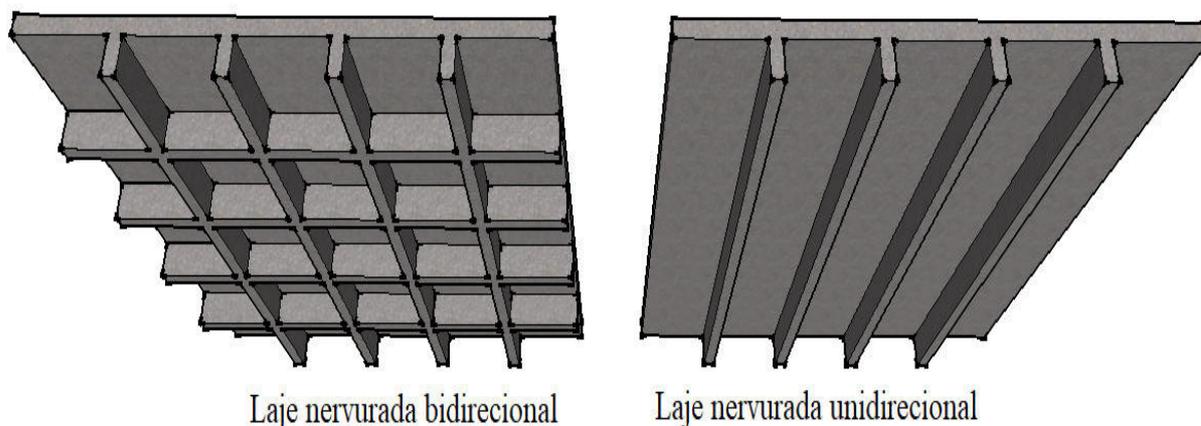


Fonte: Costa (2012).

A laje nervurada surge da concepção de que abaixo da linha neutra (zona tracionada) a resistência à tração do concreto é desprezada, sendo o concreto nessa região necessário somente para garantir o cobrimento da armadura tracionada e o trabalho monolítico da peça (STRAMANDINOLI, 2003). Essas lajes são estruturas otimizadas que visam reduzir o volume de material utilizado na sua construção e possibilitar a execução de grandes vãos. No Brasil há registros de sua utilização na década 50, no mundo são estruturas centenárias. Shtaerman e Iavinski (1960) apontam que um dos primeiros prédios a utilizar esse sistema de lajes foi um edifício de quatro pavimentos em Moscou, na Rússia, em 1908.

As lajes nervuradas podem ser concretadas com fôrmas recuperáveis ou perdidas. No Brasil, as fôrmas são disponibilizadas no mercado em diversas configurações de tamanhos. As fôrmas perdidas normalmente são de material cerâmico ou poliestireno. Essas lajes podem ter nervuras em uma ou duas direções (Figura 3). As lajes nervuradas são unidirecionais quando os esforços de flexão são considerados em uma direção e bidirecionais quando considerados em nas duas direções. O que define essa análise é a relação entre vãos.

Figura 3 - Tipos de laje nervurada.



Fonte: Costa (2012).

As lajes nervuradas podem ter a mesa e a nervura concretadas no local ou parte da nervura ser pré-moldada. As lajes nervuradas devem atender a critérios normativos da NBR 6118 (ABNT, 2014) que são limitadores das dimensões da seção da laje, como: a espessura da mesa deve ser igual ou superior a $1/15$ da distância entre nervuras e não pode ser inferior a 4 cm. Caso haja tubulação embutida de diâmetro máximo igual a 1 cm, a espessura mínima da mesa é 5 cm; e a espessura mínima das nervuras é 5 cm.

A laje nervurada é um conceito, assim há várias tipologias¹ disponíveis no mercado, como: laje nervurada com forma curva (Figura 4); laje nervurada com nervura invertida; laje nervurada com nervura dupla; laje nervurada com forma perdida em forma de tubo; e laje mista de aço e concreto com forma metálica incorporada. Apesar das diferentes concepções, a forma de idealizar essas lajes parte do mesmo princípio.

Figura 4 - Laje com nervura curva.



Fonte: Silva (2008).

¹ Por tipologia compreende-se as diferentes modalidades de lajes nervuradas disponíveis no mercado (BOCCHI JR; GIONGO, 2010).

Uma característica importante das lajes nervuradas é a sua elevada rigidez, devido a sua geometria, o que permite a construção de grandes vãos. Para Porto e Fernandes (2015), as lajes nervuradas podem vencer vãos da ordem de 7 até 15 metros. Para Park e Gamble (2000), são frequentemente utilizadas em situações que exigem vãos maiores que 10 m.

2.2 Estudos envolvendo análise dinâmica em lajes nervuradas

Para realizar a análise dinâmica de pisos, tanto nas normas brasileiras, NBR 6118 (ABNT, 2014) e NBR 8800 (ABNT, 2008), quanto em guias internacionais, Murray *et al.* (1997) e *PCI Design Handbook* (2004), um fator crucial é a determinação da frequência fundamental da laje, pois quase todas as formulações são baseadas nessa frequência. Por isso, existe necessidade da acurácia na sua determinação em fase de projeto. Fato esse que embasa a realização deste trabalho.

A precisão na obtenção da frequência fundamental de uma laje nervurada, como já comentado, depende do modelo teórico adotado e do nível de simplificação adotado no modelo. Basicamente a análise das lajes nervuradas pode ser realizada por analogia a análise de placas (laje maciça) ou por métodos numéricos baseados no método da rigidez (analogia de grelhas e MEF). O método por analogia a análise de placas permite a utilização de tabelas para realizar a estimativa da frequência da laje. O método da rigidez é realizado computacionalmente por meio das matrizes de rigidez e massa da estrutura. Os trabalhos apresentados a seguir, seguem esses modelos.

Lago (2019) realizou estudo experimental do comportamento dinâmico de lajes nervuradas executadas em edificações e comparou com modelos numéricos computacionais e analíticos. O autor analisou lajes nervuradas bidirecionais e lajes nervuradas unidirecionais (pré-moldadas), em um total de 26 de cada tipo. O autor comparou a frequência fundamental obtida de forma experimental com as frequências calculadas por três métodos: adotando a laje nervurada como laje maciça equivalente (isotropia), adotando no cálculo da altura equivalente o método de equivalência de inércia à flexão; aceitando a frequência da laje nervurada como a soma da frequência da mesa com a frequência das nervuras (ortotropia); e por meio de uma modelagem computacional utilizando elemento de casca no *software ANSYS*. Para as lajes pré-moldadas, os resultados das frequências naturais dos modelos numéricos computacionais foram compatíveis com os modelos analíticos, porém não foram totalmente compatíveis com os valores obtidos experimentalmente. Segundo o autor, a posição do impacto pode ter influenciado nos resultados, uma vez que a laje tem o comportamento unidirecional. Outro

ponto, o cálculo analítico não considera o material do enchimento das lajes. Segundo o autor, as lajes bidirecionais apresentaram resultados compatíveis para as frequências naturais obtidas experimentalmente com os modelos numéricos e analíticos. Porém, em alguns casos o erro entre o valor experimental e os modelos numéricos e analíticos foram superiores a 50% (Tabela 1).

Tabela 1 - Frequências naturais das lajes bidirecionais: método experimental (f_n); método da altura equivalente ($f_{a,he}$); método considerando a nervura das lajes (f_a); e modelagem computacional via MEF (f_1).

	Laje	f_n (Hz)	$f_{a,he}$ (Hz)	Erro %	f_a (Hz)	Erro %	f_1 (Hz)	Erro %
Edifício 1	LN01	28,52	49,92	75,0	32,14	12,7	49,15	72,3
	LN02	25,78	27,64	7,2	17,95	-30,4	24,59	-4,6
	LN03	32,29	33,28	3,1	21,79	-32,5	32,78	1,5
	LN04	31,64	22,77	-28,0	14,17	-55,2	25,96	-18,0
	LN05	39,19	48,23	23,1	31,32	-20,1	43,37	10,7
	LN06	31,70	48,14	51,9	31,43	-0,9	48,27	52,3
	LN07	24,22	26,61	9,9	17,45	-28,0	24,39	0,7
	LN08	29,95	30,13	0,6	19,67	-34,3	33,26	11,1
	LN09	44,53	61,25	37,5	38,75	-13,0	66,82	50,1
	LN10	32,42	32,31	-0,3	20,31	-37,4	34,36	6,0
Edifício 2	LN11	31,25	34,19	9,4	26,73	-14,5	34,07	9,0
	LN12	41,80	40,24	-3,7	31,32	-25,1	34,00	-18,7
	LN13	71,35	100,75	41,2	76,85	7,7	90,40	26,7
	LN14	38,15	55,97	46,7	42,67	11,8	42,10	10,4
	LN15	47,40	34,76	-26,7	26,81	-43,4	31,14	-34,3
	LN16	56,77	77,15	35,9	59,15	4,2	63,46	11,8
	LN17	113,02	149,49	32,3	123,32	9,1	133,19	17,8
	LN18	49,48	40,24	-18,7	31,32	-36,7	37,89	-23,4
	LN19	43,23	55,97	29,5	42,67	-1,3	42,10	-2,6
	LN20	47,40	84,93	79,2	64,97	37,1	66,74	40,8
	LN21	67,71	72,55	7,1	55,77	-17,6	63,46	-6,3
Edifício 3	LN22	7,82	6,55	-16,2	4,82	-38,4	6,33	-19,1
	LN23	7,82	8,14	4,1	6,05	-22,6	7,83	0,1
	LN24	7,04	5,90	-16,2	4,91	-30,3	7,10	0,9
	LN25	7,84	5,88	-25,0	4,89	-37,6	6,81	-13,1
	LN26	7,93	8,17	3,0	6,07	-23,5	7,86	-0,9

Fonte: Adaptado de Lago (2019).

Leite *et al.* (2010) em suas pesquisas sobre laje nervurada, utilizando análise numérico computacional no *software ANSYS*, apontaram que a viga de borda influencia diretamente nas frequências naturais da laje, mas não apresenta significativa interferência nas formas modais. Dois anos após essa pesquisa, Leite (2012) estudou sobre o comportamento

estático e dinâmico de lajes nervudas de concreto armado, seu estudo foi realizado por meio de métodos numéricos computacionais empregando o MEF, utilizando elemento de casca e viga no programa *ANSYS*. O autor conclui que deslocamentos, tensões, frequências naturais e acelerações de pico do sistema são influenciados pela excentricidade adotada na modelagem do modelo numérico entre a mesa e a nervura. O autor também conclui que a viga de borda influencia diretamente nas frequências naturais da laje e que pode amenizar os valores das acelerações de pico devido as ações dinâmicas. Nas análises, o autor obteve em alguns casos valores de frequências naturais abaixo do especificado pela norma brasileira e picos de acelerações superiores ao especificados por normas internacionais.

Costa (2012) realizou estudo paramétrico sobre vibrações de lajes nervuradas devido às ações humanas. As lajes foram analisadas pelo MEF utilizando o programa *SAP2000* através de modelagem com elementos sólidos. O autor observou que a viga de borda influencia na frequência fundamental da laje e concluiu que o carregamento dinâmico intenso deve ser considerado como tal no projeto de estruturas.

Costa e Araújo (2014) analisaram o comportamento de três lajes nervuradas submetidas à ações humanas rítmicas. As lajes foram modeladas utilizando o método dos elementos finitos no programa *SAP2000*. Os autores obtiveram deslocamentos inferiores aos estabelecidos por norma, porém com picos de aceleração que ultrapassaram os limites toleráveis.

Para analisar vibrações em lajes, Howard e Hansen (2002) elaboraram um modelo analítico. Os resultados foram comparados com modelos numéricos computacionais utilizando o MEF e com resultados experimentais. Os autores concluíram que o modelo analítico proposto é válido.

Silva (2008) analisou o comportamento estático e dinâmico da laje nervurada de concreto armado com base no sistema *Reduzcon*. A análise foi desenvolvida no âmbito numérico computacional utilizando o MEF no programa *ANSYS*. Na modelagem o autor utilizou elementos sólidos tridimensionais. O estudo foi desenvolvido com base na obtenção de deslocamentos, tensões e na análise do conforto humano devido a atividades humanas rítmicas. Na resposta dos modelos, em alguns casos, o autor obteve deslocamentos verticais com valores superiores aos recomendados pela norma brasileira. O autor também destaca que utilizando elemento sólido tridimensional obteve deslocamentos menores que os fornecidos pelo método de analogia por grelhas. Com relação ao conforto humano, o autor obteve vários picos de acelerações superiores aos recomendados em normas internacionais e manuais de projeto.

Apesar da laje nervurada ser amplamente utilizada, o modelo com as características analisadas neste trabalho apresenta poucas referências sobre a análise dinâmica. Com relação a estudos com valores experimentais, o volume de trabalhos é menor ainda. Foram consultadas várias bases de dados, como *Web of Science* e a Biblioteca digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

2.3 Estudos sobre lajes nervuradas em escala reduzida

A análise estática de laje nervurada é um tema recorrente em estudos acadêmicos, normalmente fundamentados na análise numérico computacional. Isso pode ser explicado em parte, pelo custo de realizar ensaios experimentais em laboratórios e pela necessidade de grandes espaços. Uma alternativa é utilizar modelos em escala reduzida nos ensaios, porém esta prática requer atenção, principalmente se o sistema analisado é de concreto armado.

Produzir estruturas de concreto armado em modelo reduzido é uma ação complexa, pois envolve utilizar agregado graúdo, agregado miúdo e cimento em escala reduzida. Além de ser necessário verificar as propriedades mecânicas, físicas e a aderência entre concreto e a armadura reduzida (NÓBREGA, 2004).

Dependendo do estudo, pode ser necessário substituir o material utilizado na análise em modelo reduzido, como é o caso da substituição do concreto pelo microconcreto. A limitação de utilizar o concreto comum nos modelos em escala reduzida está no tamanho do agregado graúdo. Por isso alguns autores optam por trabalhar com microconcreto ou limitam o tamanho máximo do agregado graúdo na mistura do concreto a ser utilizado no modelo reduzido. Para Harris e Sabnis (1999), quando o material da estrutura não pode ser utilizado no modelo reduzido esta é designada apropriadamente de “modelo”.

Segundo Harris e Sabnis (1999) um modelo estrutural é qualquer representação física de uma estrutura ou parte da estrutura. Normalmente os modelos são construídos em escala reduzida e aplicam-se bem a modelos de estruturas feitas de qualquer material. Existe vários tipos de modelos, entre eles os modelos dinâmicos, que são utilizados em estudo de vibração ou efeito da carga dinâmica sobre as estruturas.

Os modelos podem ser classificados de acordo com sua semelhança aos protótipos, em estruturais ou análogos. Os estruturais podem ter semelhança geométrica ou serem distorcidos, este último quando se utiliza mais de uma escala. Os modelos análogos não apresentam semelhança direta com o protótipo. Quando se emprega modelos é importante estabelecer as relações com seu protótipo (RIOS, 1994).

O modelo reduzido atenderá a sua finalidade na medida que os resultados das análises puderem ser representativos do comportamento da estrutura real. Para Kim e Choi (2016) a validação desses resultados pode ser realizada construindo um modelo em escala real, além do modelo em escala reduzida, para comparar e analisar os resultados com métodos experimentais idênticos.

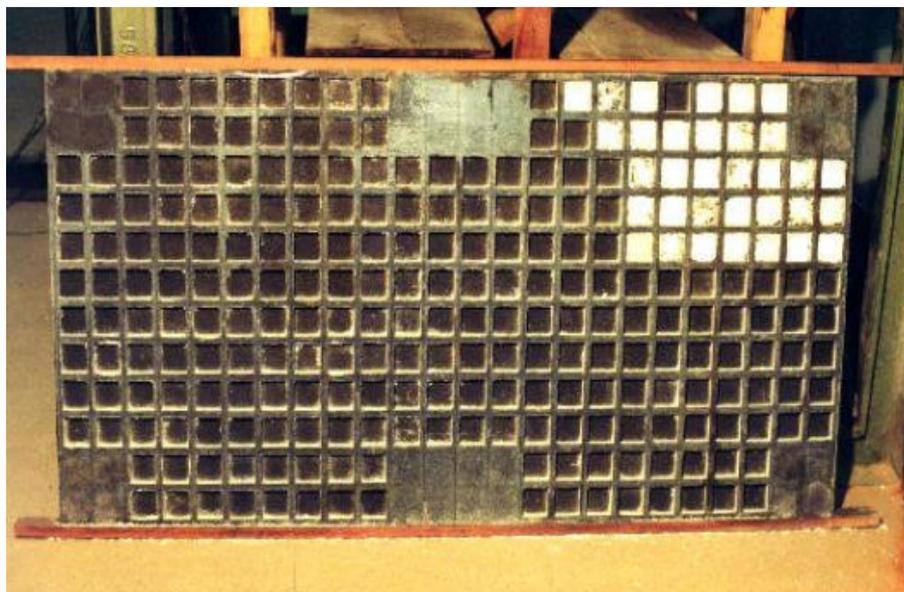
A construção de um modelo em escala real nem sempre é possível, desta forma alguns autores validam os resultados obtidos nos modelos reduzidos por meio de modelos numéricos, analíticos ou resultados obtidos por outros pesquisadores. Raia (2010) destaca que para os resultados dos ensaios de um modelo possam ser relacionados com um protótipo é necessário que haja semelhança geométrica.

Seguindo os princípios da análise dimensional, o modelo reduzido em escala permite analisar as estruturas em tamanho reduzido mantendo a relação com a estrutura em tamanho real. Nas engenharias seu estudo e aplicação são difundidos em diversas áreas, podendo esses modelos físicos serem utilizados em análises que seriam computacionalmente complexas ou com alto grau de incerteza. Segundo Rios (1994) a análise dimensional é baseada no fato de que todos os fenômenos físicos devem ser os mesmos para o protótipo e para o modelo.

Com relação a trabalhos em modelo reduzido de lajes nervuradas desenvolvidos no Brasil, destacam-se as pesquisas de Selistre (2000), Schwetz (2005), Dutra (2005) e Schwetz (2011). Apesar dos estudos não terem análise dinâmica, geraram contribuições sobre o tema. Os pesquisadores utilizaram em seus modelos microconcreto armado e adotaram a mesma escala de redução.

Selistre (2000) realizou uma análise estática em uma laje nervurada em escala de 1:7,5 (Figura 5) construída em microconcreto armado e comparou seus resultados com os obtidos no SAP90 utilizando elemento finito de placa e no programa TQS utilizando método das grelhas. Para a armadura no modelo reduzido, o autor utilizou arame de aço galvanizado, que possuem diâmetros comerciais próximos a redução de 1:7,5 dos diâmetros das barras de aço CA-50. A laje do modelo foi apoiada em pilares. Entre as conclusões, destacam-se, que o comportamento do modelo reduzido esteve dentro do esperado. Na fase elástica, o modelo numérico em elementos finitos foi o que melhor representou o comportamento da laje experimentada. Na fase fissurada, a análise por analogia de grelhas foi mais adequada. Em estágio evoluído de fissuração, nenhum modelo numérico conseguiu representar o comportamento da laje. O autor atribui as diferenças entre os valores experimentais e numéricos as simplificações realizadas nos modelos computacionais.

Figura 5 - Laje em modelo reduzido analisada por Selistre (2000).



Fonte: Selistre (2000).

Schwetz (2005) realizou um estudo teórico-experimental de uma laje nervurada em modelo reduzido (Figura 6). A autora comparou dados experimentais em modelo reduzido, na escala de 1:7,5 de uma laje nervurada bidirecional produzida com microconcreto armado, com os resultados de uma análise computacional da laje em escala natural utilizando o *software* TQS. A modelagem computacional utilizou o módulo de grelhas. O modelo reduzido foi submetido a carregamento linear e a carga uniformemente distribuída com o objetivo de obter os momentos fletores (por meio das deformações específicas com utilização de extensômetros eletrônicos) e deslocamentos verticais (por meio da utilização de deflectômetros). O modelo reduzido foi construído com vigas de borda e pilares. Para o microconcreto, foi utilizado cimento Portland de alta resistência inicial e areia. Para a armadura foi utilizado arame de aço galvanizado em diâmetros comerciais. A autora obteve no modelo reduzido comportamento elástico-linear, os momentos fletores foram compatíveis em distribuição e orientação, porém com valores inferiores ao obtido na análise computacional. Com relação aos deslocamentos, o modelo reduzido também apresentou valores inferiores aos obtidos no modelo de grelhas. A autora considera que a rigidez do modelo experimental foi maior em relação ao computacional devido a desconsideração da mesa da laje e dos momentos de torção nas barras da grelha da análise numérica. A pesquisadora também pondera que o efeito de escala do modelo pode ter colaborado para a diferença obtida entre o modelo reduzido e o computacional, sugerindo que maiores investigações devem ser realizadas para esclarecer esse aspecto.

Figura 6 - Laje em modelo reduzido analisada por Schwetz (2005).



Fonte: Schwetz (2005).

Dutra (2005) realizou pesquisa em lajes nervuradas em escala reduzida de 1:7,5. Na produção dos modelos foi utilizado microconcreto e arame de aço galvanizado. A pesquisa foi baseada na análise estática e o autor concluiu que o modelo reduzido apresentou comportamento apropriado nas análises e que os materiais, microconcreto e arame de aço galvanizado, mostraram-se adequados para utilização em modelos reduzidos.

Schwetz (2011), continuando seus estudos sobre lajes nervuradas, analisou a adequação dos métodos de cálculos utilizados no dimensionamento dessas lajes. A autora avaliou o comportamento de três lajes nervuradas de concreto armado em escala natural devido a carregamentos estáticos de serviço. A autora também analisou dados de um modelo reduzido de laje nervurada produzido com microconcreto armado em escala de 1:7,5. As lajes foram analisadas com relação as deformações e deslocamentos verticais. Os resultados experimentais foram comparados com valores obtidos por modelos computacionais, pela análise de grelhas (utilizando o *software* TQS) e pelo MEF (utilizando o *software* SAP2000). Neste último método, a autora adotou o elemento de casca para modelar a mesa, as nervuras e a vigas. Os resultados da autora apontaram para um comportamento semelhante entre as lajes experimentadas e os modelos numéricos. Com relação ao modelo reduzido, os deslocamentos da análise numérica apresentaram valores menores que os resultados experimentais no modelo reduzido. A autora aponta que pode ter ocorrido um cedimento global da estrutura. No modelo numérico de grelhas a autora sugere adotar as inercias reais e engastamento total entre os

elementos estruturais, e ressalta a importância de um maior conhecimento sobre a região maciça que algumas lajes possuem para que o modelo numérico represente adequadamente o comportamento da laje nervurada. No modelo em elementos finitos, a pesquisadora obteve picos elevados para os momentos negativos na região maciça adjacente a viga e considera uma modelagem onerosa para a utilização nos escritórios de projeto.

Com relação aos modelos reduzidos no estudo de lajes nervuradas utilizando concreto com limitação no tamanho do agregado graúdo, há o trabalho de Abdul-Wahab e Khalil (2000), que apresentaram os resultados de um estudo experimental de lajes nervuradas de concreto armado em oito modelos na escala 1:4, representando lajes de 6 m. O estudo não envolveu análise dinâmica. Foram utilizados nos experimentos cimento comum, agregado miúdo e agregado graúdo com tamanho máximo de 6,7 mm. A armadura para combater a flexão também possuía diâmetro convencional de 8 mm. Uma das análises buscava validade do conceito de espessura equivalente. Os autores concluíram que a abordagem de espessura equivalente leva à superestimativa da rigidez torcional e estimam que a rigidez na faixa fissurada é obtida assumindo uma redução para 25% da faixa de rigidez em regime não fissurado. Os autores concluíram que o comportamento da laje nervurada é significativamente diferente de sua laje maciça equivalente.

Farrar; Baker; Dove (1994) apresentaram os resultados de experimentos realizados em modelos reduzidos de estruturas de concreto com a finalidade de analisar os seus parâmetros dinâmicos: frequências, formas modais e amortecimento. Os autores concluíram que as frequências e as formas modais de uma estrutura podem ser previstas com acurácia utilizando ensaios em estruturas de modelo reduzido.

Utilizando concreto e aço convencionais, Kim e Choi (2016) realizaram estudo dinâmico em modelo reduzido na escala de 1:2 de uma estrutura mista de concreto armado e aço. Os autores comparam os resultados obtidos experimentalmente para as frequências e modos de vibração com os resultados numéricos utilizando o MEF. Os resultados experimentais e numéricos apresentaram boa aproximação e os autores concluem que os resultados numéricos seriam mais precisos se considerassem a rigidez da armadura do concreto armado.

Ji *et al.* (1985) realizaram estudos experimentais com lajes nervuradas utilizando modelo reduzido. O tamanho máximo do agregado foi limitado a 6,4 mm para manter a proporção aproximada de 1:3 entre a espessura da laje e o tamanho do agregado. Foram realizados diversos estudos, porém não foi possível tirar conclusões sobre as frequências das lajes experimentadas, pois foi observado que após o teste de resistência, os painéis foram danificados e a frequência obtida estava relacionada ao comportamento da parte e não de todo

o painel. Os autores indicam que o uso de uma viga nas bordas da laje nervurada é fortemente recomendado.

Grace e Kennedy (1990) analisaram a resposta dinâmica e o comportamento à fadiga de lajes nervuradas de concreto protendido. Na pesquisa foi utilizado um modelo reduzido na escala de 1:8. Os autores utilizaram uma solução para a resposta dinâmica obtida com base na teoria clássica da placa ortotrópica. Os resultados teóricos foram comparados com resultados numéricos computacionais utilizando SAP IV (programa de elementos finitos) e com resultados experimentais. O estudo mostrou que a protensão aumenta as frequências naturais das lajes evitando a ressonância sob carregamento de baixa frequência e aumenta a vida à fadiga das lajes.

Por diversos motivos, entre eles, limitação de espaço e redução de custos, alguns pesquisadores optam por adotarem em seus experimentos, estruturas com dimensões limitadas, sem adotar a teoria da similitude na redução dos modelos, como foi o estudo de Sartorti (2015).

Sartorti (2015) realizou um estudo experimental sobre o comportamento dinâmico de concreto leve estrutural e comparou com o concreto convencional. As lajes analisadas apresentavam dimensões de área inferiores a uma laje convencional (1,50 m x 1,80 m), o que gerou frequências naturais com valores elevados (58 Hz a 648 Hz para 12 modos de vibração). O autor obteve experimentalmente as frequências naturais e os seus respectivos modos de vibração. Entre as suas conclusões, o autor aponta que a diminuição da rigidez do material é mais significativa do que a redução da massa na redução da frequência natural da laje de concreto leve. O deslocamento, a velocidade e a aceleração do concreto leve são maiores que do concreto convencional, mas o amortecimento é praticamente igual.

Com relação aos modelos reduzidos, segundo Rios (1994), uma série de fatores influenciam na escolha da escala geométrica de um modelo como, experiência prévia com outros modelos, espaço disponível para realização das análises, razoabilidade dos valores de cargas a serem aplicadas no modelo reduzido e disponibilidade comercial dos arames que simulam as armaduras do concreto armado.

Neste trabalho, assim como na tese Sartorti (2015), utilizam-se lajes com dimensões limitadas, por questões de espaço e economia, porém sem adotar a teoria da similitude, que não é o foco desta pesquisa.

2.4 Modelos teóricos de lajes nervuradas

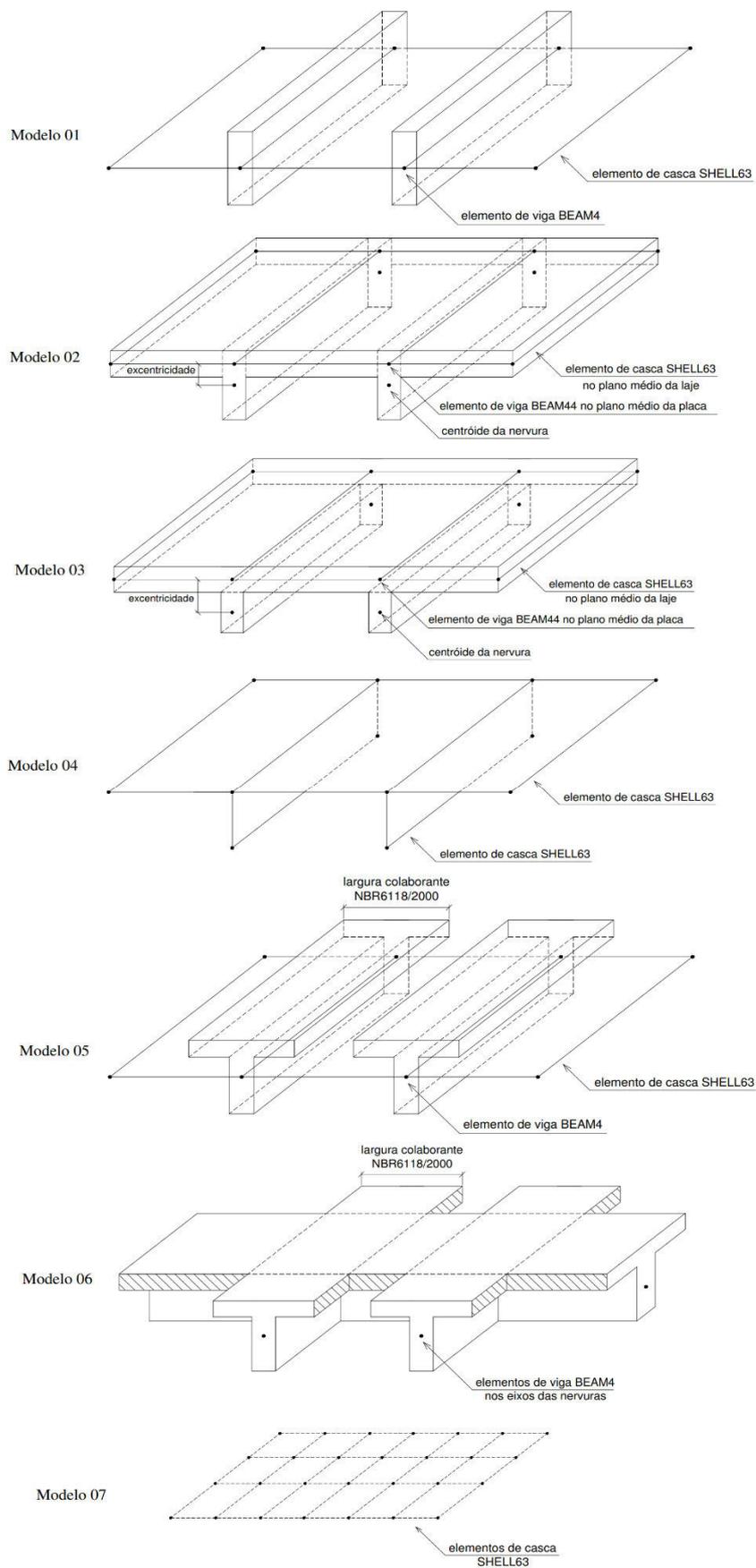
Neste tópico são apresentadas as principais formas de idealizar as lajes nervuradas propostas na literatura, quando se utiliza analogia de grelhas e via MEF. Os modelos por analogia de grelhas adotam mesa e nervura na seção do elemento linear, formando a seção tipo “T”. A adoção dessa seção é frequente nos estudos por analogia de grelhas e é adotada neste trabalho para representar um dos modelos. A modelagem via MEF oferece maior opção de possibilidades, uma vez que podem ser utilizados diversos elementos e combinações de elementos para simular a mesa e a nervura, como apresentado a seguir.

Dias (2003) em seus estudos, comparou várias modelagens de lajes nervuradas. Em suas análises foram verificados deslocamentos e esforços. O estudo teve como base a análise estática e os modelos foram analisados utilizando o MEF no programa *ANSYS*. Nas análises foram utilizados elementos de casca e de viga. O autor conclui sobre os sete modelos analisados (Figura 7) que: o modelo 01 não deve ser utilizado; os modelos 02 e 03, apresentaram bons resultados para altas excentricidades; os modelos 04 e 05 apresentaram os melhores resultados, simulando mesa e nervuras com elementos de casca e a nervura com elemento de viga e a mesa com elemento de casca, respectivamente; o modelo 06 apresentou bons resultados, porém mostrou ser um modelo mais rígido; o modelo 07, que simula a laje maciça equivalente, mostrou melhores resultados de deslocamentos para maiores espaçamentos entre as nervuras.

A maioria dos estudos relativos a lajes nervuradas segue a idealização de algum dos modelos estudados por Dias (2003), quando se realiza a análise utilizando o MEF. Como Salomão *et al.* (2015), que utilizaram elementos de casca para representar a mesa e elementos de vigas para representar as nervuras. Ou como Lago (2019), que adotou a mesa e a nervura como elemento de casca.

Donin (2007) analisou a laje nervurada utilizando o MEF em modelos tridimensionais e bidimensionais. O autor idealizou a laje nervurada em várias configurações utilizando elementos bidirecionais de casca e elementos sólidos. As análises foram realizadas no programa *ANSYS*. O estudo foi baseado na análise estática. O autor conclui que os modelo tridimensional é superior ao modelo bidimensional com relação ao cálculo dos momentos fletores.

Figura 7 - Modelos analisados por Dias (2003).



Fonte: Adaptado de Dias (2003).

Silva (2008), Costa (2012) e Andrade e Donin (2019) utilizaram elementos sólidos na análise dinâmica das lajes nervuradas, assim as excentricidades foram obtidas naturalmente entre os elementos estruturais. Schwetz (2011) comparou cinco modelagens de lajes nervuradas utilizando elementos de casca e elementos de viga. A autora obteve melhores resultados modelando a mesa e a nervura com elemento de casca e considerando a excentricidade entre os elementos.

Na análise por MEF, o modelo mais utilizado nos estudos de lajes nervuradas simula nervura e mesa com elemento de casca. Utiliza-se essa modelagem para representar um dos modelos analisados neste trabalho.

É notório que as pesquisas sobre o comportamento das lajes nervuradas são predominantemente focadas na análise estática e, quando não, são normalmente restritas a análise computacional. Trabalhos que utilizam técnicas experimentais trazem notória contribuição para pesquisadores do tema, podendo gerar inclusive base de dados para futuras pesquisas.

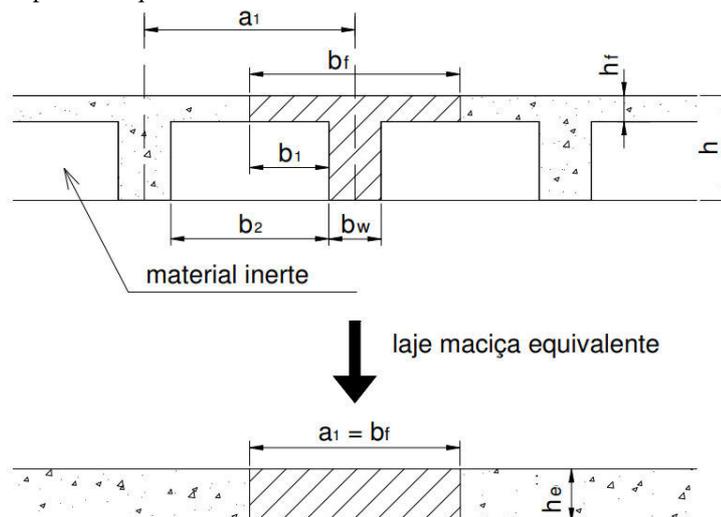
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Metodologias de análise

3.1.1 Análise pela teoria das placas

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), as determinações para estruturas de laje maciça (elemento de placa) podem ser consideradas para as lajes nervuradas bidirecionais, desde que obedecem às condições do item 13.2.4.2 da norma. É possível analisar as lajes nervuradas como lajes maciças de altura equivalente empregando a teoria das placas. Nessa análise é considerada a inércia da seção “T” na laje nervurada para obter uma espessura equivalente de laje maciça (Figura 8). Essa análise não considera o efeito da viga de borda.

Figura 8 - Processo da espessura equivalente.



Fonte: Dias (2003).

A altura equivalente ($h_{e(exp)}$) pode ser determinada experimentalmente a partir da flecha da laje nervurada calculada em ensaio (W_{exp}) (ARAÚJO, 2005).

$$W_{exp} = \frac{\alpha}{D_e} \quad (1)$$

α : coeficiente que relaciona carga e tamanho do vão; e

D_e : rigidez equivalente.

A rigidez equivalente (D_e) é dada pela Equação (2).

$$D_e = \frac{E_{cs} h_e (exp)^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson do concreto e E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto. Substituindo a Equação (2) na Equação (1).

$$W_{exp} = \frac{12(1 - \nu^2)\alpha}{E_{cs} h_e (exp)^3} \quad (3)$$

A flecha calculada de uma laje maciça de espessura 1 cm submetida ao mesmo carregamento da laje nervurada apresenta flecha (W_1).

$$W_1 = \frac{12(1 - \nu^2)\alpha}{E_{cs}} \quad (4)$$

Substituindo a Equação (4) na Equação (3) e isolando a altura equivalente, obtém-se a formulação da altura equivalente ($h_e (exp)$).

$$h_e (exp) = \left(\frac{W_1}{W_{exp}} \right)^{1/3} \quad (5)$$

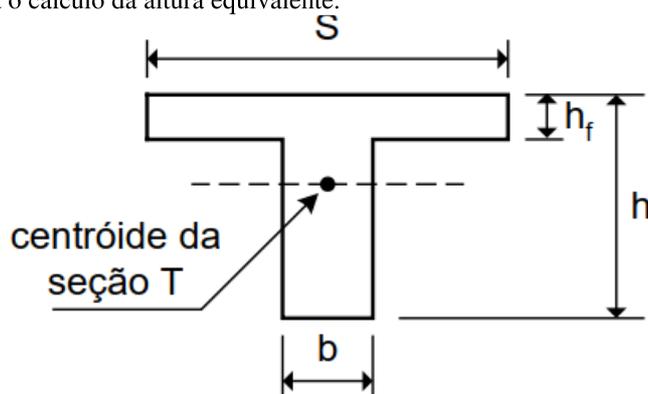
Segundo Araújo (2006), um método simplificado e usual para calcular a altura equivalente (h_e) é dado pela Equação (6), que é baseado no método de equivalência de inércia à flexão. Esse método é utilizado com frequência devido a sua simplicidade.

$$h_e = \left(\frac{12I}{S} \right)^{1/3} \quad (6)$$

I : momento de inércia da seção T em relação ao centroide (Figura 9); e

S : largura da mesa considerada.

Figura 9 - Seção T para o cálculo da altura equivalente.



Fonte: Araújo (2006).

A altura equivalente ainda pode ser calculada pelas Equações (7) e (8). A Equação (7) é simplificada e obtida pelo método da rigidez média da laje.

$$h_e = [(1 - \zeta)h^3 + \zeta h_f^3]^{1/3}; \zeta = \frac{(S-b)^2}{S^2} \quad (7)$$

$$h_e = [12(1 - \nu^2)I_e]^{1/3} \quad (8)$$

ν : coeficiente de Poisson;

I_e : inércia equivalente;

h_f : espessura da mesa;

S : largura da mesa; e

b : largura da nervura.

A altura equivalente pode ser utilizada para realizar a análise estática e dinâmica. Utilizando o cálculo da altura equivalente pelo método de equivalência de inércia à flexão, Lago (2019), em alguns casos, obteve boa aproximação entre os valores experimentais e dos modelos numéricos para a frequência fundamental. Com relação a análise estática, para Donin (2007), o cálculo da altura equivalente por meio da equivalência de momento de inércia à flexão gerou melhores resultados para os momentos fletores do que o método da rigidez média da laje, esse último também resulta em deslocamentos menores.

Para Stramandinoli (2003) a análise de laje nervurada por semelhança a análise de placas com rigidez à flexão equivalente pode não fornecer resultados condizentes com a realidade. Silva (2005) indica que o procedimento de analisar as lajes nervradas como placa

deve ser evitado. Bocchi Jr. (1995) e Silva (2005) indicam que modelar a laje pelo método das grelhas fornece resultados melhores que por placa equivalente.

A teoria clássica das placas é baseada em algumas suposições: o material é isotrópico, homogêneo e elástico linear; os deslocamentos são pequenos; a placa é fina; o plano médio permanece não tensionado; e são desprezadas as tensões normais que atuam perpendicular à superfície média. A equação diferencial não amortecida de placas tem a forma da Equação (9).

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, y, t) = p(x, y, t) \quad (9)$$

$w(x, y, t)$: deslocamentos;

$p(x, y)$: carga na placa por unidade de área;

ρ : densidade do material;

h : espessura da placa; e

D : rigidez a flexão.

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (10)$$

E : módulo de elasticidade longitudinal;

h : espessura da placa; e

ν : coeficiente de Poisson.

Para vibrações livres, a Equação (9) pode ser reescrita, satisfazendo as condições de contorno (VENTSEL; KRAUTHAMME, 2001).

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, y, t) = 0 \quad (11)$$

$$t = 0; w = w_0(x, y); \frac{\partial w}{\partial t} = v_0(x, y) \quad (12)$$

Onde $v_0(x, y)$ e $w_0(x, y)$ são, respectivamente, velocidade inicial e deflexão inicial. Utilizando o método analítico (Método de Fourier) para determinar as frequências naturais e modos de vibração, assume-se $w(x, y, t)$ como solução (VENTSEL; KRAUTHAMME, 2001).

$$w(x, y, t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))W(x, y) \quad (13)$$

$W(x, y)$: descreve o modo da vibração; e

ω : frequência natural da placa.

Substituindo a Equação (13) na Equação (11) é possível obter as frequências naturais e modos de vibração da placa. A solução desta equação pode ser apresentada na forma de uma série de Fourier. Exigindo que a função $W(x, y)$ satisfaça as condições de contorno e seja solução da equação. Para cada frequência ω_{mn} há uma correspondente função de forma $W_{mn}(x, y)$ (onde, $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 1, 2, 3, \dots$) (VENTSEL; KRAUTHAMME, 2001). As frequências naturais da placa podem ser calculadas pela Equação (14).

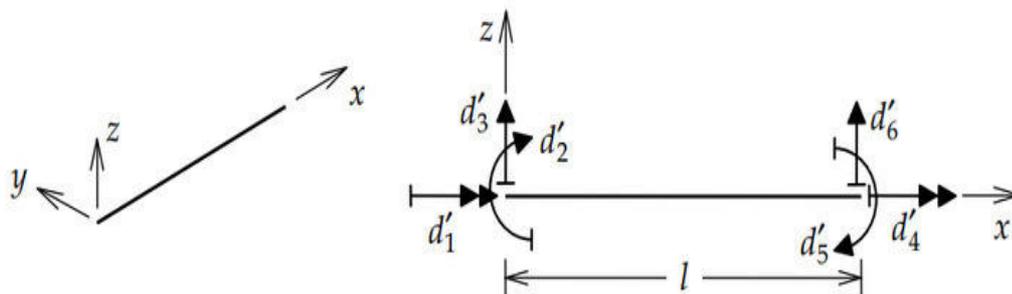
$$f_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{2\pi a^2} \left(\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)} \right)^{1/2} ; i, j = 1, 2 \dots \quad (14)$$

Onde λ é um fator adimensional e a é o comprimento da placa. Essa formulação foi utilizada por Lago (2019) para comparar com valores experimentais. A autora obteve erro no intervalo de 0,3% até 79,2% entre a frequência obtida experimentalmente e utilizando a Equação (14).

3.1.2 Análises baseadas no método da rigidez

A laje nervurada também pode ser analisada por analogia de grelhas e utilizando o MEF. Ambos os métodos só são viáveis com análise computacional devido ao grande número de equações a serem resolvidas. Na análise pelo método das grelhas são utilizados elementos de barra com dois nós, onde cada nó apresenta 3 graus de liberdade (deslocamento no eixo z , rotação nos eixos x e y) (Figura 10).

Figura 10 - Eixos locais e graus de liberdade de uma barra de grelha isolada.



Fonte: Martha (2010).

Em resumo, a análise estática consiste em montar a matriz de rigidez global da estrutura com base na matriz de rigidez dos elementos, aplicar as condições de contorno e resolver o sistema matricial:

$$[K]\{u\} = \{p\} \quad (15)$$

$[K]$: matriz de rigidez global;

$\{u\}$: vetor deslocamento da estrutura; e

$\{p\}$: vetor força aplicado na estrutura.

A base da matriz de rigidez global é a matriz de rigidez local $[k]$ de cada elemento que compõe a estrutura. A matriz de rigidez do elemento de barras de grelha é apresentada na Figura 11. Essa matriz considera o parâmetro de rigidez à flexão (EI) e parâmetro de rigidez à torção (GJ_t). l é o comprimento da barra.

Figura 11 - Matriz de rigidez do elemento de barras.

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \\ -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^3} & 0 & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de Martha (2010).

O momento de inércia à flexão (I) da seção transversal da barra pode ser obtido pela formulação:

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{b_i h_i^3}{12} + A_i d_i^2 \quad (16)$$

Onde:

I : momento de inércia à flexão da seção transversal;

A_i : área da seção considerada;

d_i : distância do Centro de Gravidade (CG) da seção até o CG da peça considerada;

b_i e h_i : dimensões da seção transversal.

Geralmente a rigidez à torção não é uma propriedade geométrica simples, como o caso do momento de inércia à flexão e não existe uma regra geral (HAMBLY, 1991). Para o cálculo do momento de inércia à torção da seção transversal (J), também chamado de rigidez à torção, Gere e Weaver (1981) sugerem a seguinte formulação para uma barra retangular:

$$J = \beta e^3 f \quad (17)$$

Onde:

e : menor dimensão da seção transversal; e

f : maior dimensão da seção transversal.

$$\beta = \left[\frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e}{f} \right) \left(1 - \frac{e^4}{12f^4} \right) \right] e^3 f \quad (18)$$

Em uma barra de seção transversal composta por mais de um retângulo, como a seção tipo “T”, adota-se a rigidez à torção como a somatória da contribuição da mesa e da nervura:

$$J = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} - \left(0,21 \frac{e_i}{f_i} \right) \left(1 - \frac{e_i^4}{12f_i^4} \right) \right] e_i^3 f_i \quad (19)$$

Kennedy e Bali (1979 *apud* STRAMANDINOLI, 2003) propuseram uma alteração na Equação (19) para o cálculo da rigidez à torção. A rigidez à torção da seção ortogonal deve ser considerada no cálculo da rigidez à torção da mesa, devido ao enrijecimento pela presença da nervura ortogonal. A rigidez à torção da mesa deve ser calculada pela Equação (20), e somada a rigidez à torção da nervura (Equação (17)):

$$J_{\text{mesa modificado}} = \frac{\beta e^3 f}{2} + \left(\frac{J_{\text{mesa ortogonal}} + J_{\text{nervura ortogonal}}}{J_{\text{mesa ortogonal}}} \right) \quad (20)$$

Onde:

$J_{\text{mesa ortogonal}}$: momento de inércia à torção na mesa da seção ortogonal; e

$J_{\text{nervura ortogonal}}$: momento de inércia à torção na nervura da seção ortogonal.

Assim, o cálculo do momento de inércia à torção da seção a ser considerada, apresenta a seguinte forma:

$$J = J_{\text{mesa modificado}} + J_{\text{nervura}} \quad (21)$$

O momento de inércia à torção da nervura (J_{nervura}) é obtido pela Equação (17). Neste trabalho, adota-se a rigidez à torção calculada pela Equação (21).

A rigidez à torção influencia diretamente no comportamento da laje nervurada. Para Stramandinoli (2003), na análise por analogia de grelhas para um dimensionamento elástico, o mais indicado é desprezar à rigidez a torção das nervuras (1% de J). Em situação de serviço, utilizar 15% da rigidez à torção das nervuras, conforme recomendação da norma, subestima a rigidez à torção da laje. Segundo a autora, utilizar a rigidez à torção integral forneceu resultados mais coerentes com os obtidos utilizando modelagem pelo MEF.

Bocchi Jr. (1995) adotou o valor de 20% do momento de inercia a torção em suas análises sobre lajes nervradas para simular a fissuração do concreto. Segundo o autor, essas lajes devem considerar a fissuração do concreto na determinação dos esforços e deslocamentos.

Para Schwetz (2011), a consideração total da inércia à torção indicou a melhor simulação do comportamento da laje nervurada em seus estudos. Porém, segundo a autora, o *software* comercial utilizado por ela, sugere desconsiderar a inércia à torção nas barras das grelhas.

O valor do módulo de elasticidade (E) pode ser obtido utilizando as formulações disponíveis na NBR 6118 (ABNT, 2014). Para a análise dinâmica, com relação ao observado em publicações, alguns trabalhos utilizam o módulo de elasticidade fornecido pela norma, outros optam por utilizar o módulo de elasticidade dinâmico. Neste trabalho é utilizado o módulo de elasticidade secante (E_c) do concreto, com base na resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}), o qual pode ser obtido pela Equação (22):

$$E_c = 0,86 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (22)$$

O módulo de deformação tangente (G) pode ser obtido pela Equação (23):

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (23)$$

O coeficiente de Poisson (ν) pode ser adotado com o valor de 0,2 conforme recomendação da NBR 6118 (ABNT, 2014) para o concreto. O que equivale a multiplicar o módulo de elasticidade por 0,42 ($G = 0,42 E_c$). Valor esse adotado neste trabalho.

Vários programas permitem analisar as lajes como grelhas, como por exemplo o programa CAD/TQS. Nele as barras horizontais simulam as vigas e lajes do pavimento, os pilares são representados por apoios. O sistema CAD/TQS também realiza análise dinâmica das lajes utilizando a modelagem de grelhas, podendo realizar a análise de vibração livre ou forçada.

Para realizar a análise dinâmica a matriz de massa da estrutura ($[M]$) deve ser conhecida. Essa matriz é gerada com base na matriz de massa de cada elemento. A matriz de massa adotada pode ser a concentrada, onde é adotado que toda a massa está concentrada nos nós onde os deslocamentos de translação são definidos. O método consiste em assumir que a massa de cada elemento é concentrada em seus nós. A massa total concentrada em cada nó da estrutura é a soma das contribuições de cada elemento ligado ao nó. Como há uma sobreposição de barras perpendiculares nos nós das grelhas, deve-se ter cuidado para não considerar a massa atribuída ao nó, com um valor equivocado.

Outro método que pode ser utilizado para calcular lajes nervuradas é o MEF. Muitos pesquisadores apontam como o método mais preciso na análise das lajes nervuradas, porém dependendo da configuração adotada na análise, o tempo gasto na modelagem e na análise podem ser demasiadamente elevados.

O MEF é uma análise numérica que fornece soluções aproximadas para equações diferenciais. Essas equações modelam problemas encontrados nas engenharias. O MEF consiste em reduzir os problemas definidos no espaço geométrico para encontrar uma solução em um número finito de pontos (PEPPER; HEINRICH, 2017). Esse método pode ser usado para analisar estruturas complexas podendo representar qualquer material (ZHU, 2018).

A formulação do MEF pode ser baseada no método dos deslocamentos, modelos de equilíbrio, métodos híbridos e mistos. O método dos deslocamentos é o mais simples e possibilita análise com base na matriz de rigidez (AZEVEDO, 2003). O MEF consiste em dividir a estrutura em pequenos elementos, que são conectados entre si por nós. Esse procedimento é nomeado de discretização e a união de todos os elementos é denominado de malha. Vários tipos de elementos podem ser utilizados, como elementos lineares, de superfície e sólidos. A escolha depende do nível de simplificação do problema, o que resulta também em diferentes níveis de aproximação.

Para cada elemento há um vetor que descreve todos os seus deslocamentos. Um elemento de viga em duas dimensões tem três graus de liberdade por nó e seis por elemento. Em um caso em três dimensões, há seis graus de liberdade por nó. Os nós de elementos sólidos possuem apenas três graus liberdade de translação, assim a rotação do elemento é capturada pela translação dos nós. Por meio de um vetor com forças e momentos nodais, e da matriz de rigidez global, é calculado o vetor de deslocamentos nodais.

Destaca-se que antes de obter a matriz de rigidez global, é montada a matriz de rigidez de cada elemento (Equação (24)), para que se alinhe com o sistema de coordenadas globais, pode-se realizar esse procedimento multiplicando a matriz de rigidez de cada elemento por uma matriz de rotação. Antes de realizar o cálculo dos deslocamentos, são definidas as cargas externas e as condições de contorno. Calculado os deslocamentos nodais encontram-se as deformações e tensões em toda a malha.

$$[K^e] = \int [B^t][D][B]d\Omega \quad (24)$$

$[K^e]$: matriz de rigidez dos elementos;

$[B]$: matriz deformação-deslocamento; e

$[D]$: matriz constitutiva.

As fases de análise são definidas da seguinte forma: definição do problema (propriedades do material, cargas e condições de contorno); discretização (dividir a estrutura em elementos e escolher o tipo de elemento); montar a matriz de rigidez do elemento; montar a matriz de rigidez global da estrutura baseado na conectividade dos elementos; com as forças externas e com as condições de contorno, obter os deslocamentos e calcular deformações e tensões; e por fim, analisar os resultados.

Esse método possibilita analisar as estruturas com diferentes tipos de elementos, isso gera a possibilidade de analisar uma mesma estrutura com diferentes modelagens. A estrutura ainda pode ser discretizada em diferentes malhas, porém quanto maior o nível de refinamento da malha, maior será o custo computacional. Normalmente, nas modelagens, buscam-se resultados precisos, com o menor custo computacional.

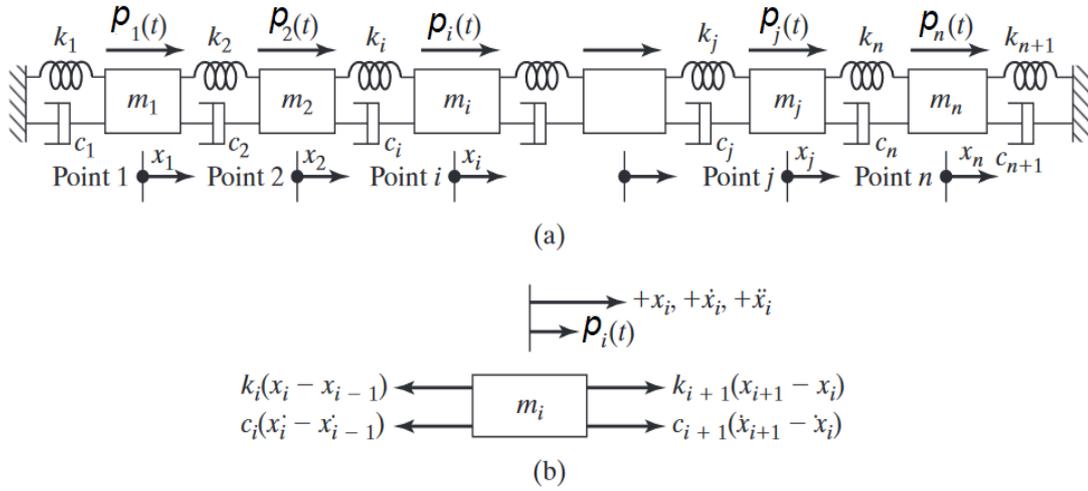
Para realizar a análise dinâmica, assim como no método das grelhas, a massa do sistema deve ser considerada e depende do tipo de elemento adotado na análise. As lajes nervuradas podem ser modeladas com diferentes combinações de elementos: elemento barra; elemento de área; e elemento sólido. O que permitiu vários estudos sobre como modelar essas lajes de forma realista.

Apesar das vantagens, esse método não era viável em muitos escritórios de cálculo estrutural na análise de lajes nervuradas. Para Stramandinoli (2003) e Schwetz (2011), o MEF na análise de lajes nervuradas mostrou-se trabalhoso, o que pode tornar difícil a sua utilização no cotidiano dos escritórios de projeto. Atualmente, devido a evolução dos computadores e do próprio MEF, sua utilização está mais acessível, visto que praticamente todos os autores referenciados neste trabalho utilizaram modelagem em MEF para desenvolver suas pesquisas.

3.1.3 Sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF)

Sistemas com múltiplos graus de liberdade (*MultiDegree of Freedom* – MDOF) (Figura 12) são sistemas em que as respostas dinâmicas podem ser expressas em função de um número de coordenadas de deslocamento (CLOUGH; PENZIEN, 2003). Diferentes métodos podem ser usados para aproximar um sistema contínuo em um sistema discreto com múltiplos graus de liberdade. Um método simples é substituir a massa distribuída por um número finito de massas concentradas (*lumped*). Quanto maior o número de massas concentradas utilizadas no modelo, maior será a precisão da análise (RAO, 2011).

Figura 12 - Sistema com múltiplos graus de liberdade.



Fonte: Adaptado de Rao (2011).

Matricialmente é possível escrever a equação do movimento para um sistema com múltiplos graus de liberdade pela Equação (25).

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{P\} \quad (25)$$

$\{\ddot{x}\}$: vetor aceleração;

$\{\dot{x}\}$: vetor velocidade;

$\{x\}$: vetor deslocamento;

$\{P\}$: vetor força externa;

$[M]$: matriz de massa do sistema;

$[C]$: matriz de amortecimento viscoso do sistema; e

$[K]$: matriz de rigidez do sistema.

$$\{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}; \{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{Bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (27)$$

As matrizes são quadradas e 'n' é o número de graus de liberdade da estrutura. Caso não tenha força externa aplicada na estrutura, a Equação (25) torna-se:

$$[M].\{\ddot{x}\} + [C].\{\dot{x}\} + [K].\{x\} = \{0\} \quad (28)$$

Caso o amortecimento não seja considerado, reescreve-se a Equação (29).

$$[M].\{\ddot{x}\} + [K].\{x\} = \{0\} \quad (29)$$

A obtenção das frequências naturais e modos de vibração requerem a solução da equação matricial abaixo, que depende da rigidez $[K]$ e massa $[M]$ da estrutura. Onde $\{\phi_n\}$ são os modos de vibração da estrutura.

$$[[K] - \omega_n^2[M]]\{\phi_n\} = \{0\} \quad (30)$$

A solução trivial é dada por $\{\hat{\phi}\} = \{0\}$, o que gera deslocamentos nulos. A solução não trivial é obtida pela Equação (31), fazendo o determinante igual a zero.

$$\det[[K] - \omega^2[M]] = \{0\} \quad (31)$$

A solução (autovalores) são as frequências circulares da estrutura ao quadrado. Substituindo esses valores na Equação (30), obtém-se os modos de vibração (autovetores) associados as frequências.

O amortecimento na vibração estrutural está ligado a dissipação de energia mecânica (BACHMANN *et al.*, 1995). Pode ser obtido em termos de taxas de contribuição. Normalmente utiliza-se a matriz de amortecimento de Rayleigh. Neste caso, a matriz de amortecimento $[C]$ de uma estrutura é uma combinação da taxa de contribuição da matriz de massa (α_0) e da taxa de contribuição da matriz de rigidez (α_1). A matriz de amortecimento de Rayleigh é apresentada na Equação (32).

$$[C] = \alpha_0[M] + \alpha_1[K] \quad (32)$$

Escreve-se a taxa de amortecimento do i-ésimo modo em função dos coeficientes (α_0 e α_1) e da frequência circular do i-ésimo modo.

$$\xi_i = \frac{\alpha_0}{2 \omega_i} + \frac{\alpha_1 \omega_i}{2} \quad (33)$$

Utilizando duas frequências naturais é possível calcular os valores de α_0 e α_1 . Com esse procedimento é possível calcular a taxa de amortecimento de qualquer modo. Na literatura, é possível obter os valores para a taxa de amortecimento de alguns pisos conforme apresentado por Murray *et al.* (1997) (Tabela 2) e por Bachmann *et al.* (1995) (Tabela 3).

Tabela 2 – Taxa de amortecimento estrutural em função da utilização da estrutura.

Destinação da estrutura	Taxa de amortecimento (ξ)
Escritórios, residências e igrejas	0,02 - 0,05*
Centro de compras (shopping center)	0,02
Passarelas internas	0,02
Passarelas externas	0,01

*0,02 para pisos com poucos componentes não estruturais (telhados, dutos, divisórias, etc.) como pode ocorrer em áreas de trabalho abertas e igrejas;

0,03 para pisos com componentes não estruturais e mobiliários, mas com poucas divisórias desmontáveis, típica de muitas áreas modulares de escritórios; e

0,05 para divisórias em contato com dois pisos entre andares subsequentes.

Fonte: Adaptado da Murray, Allen e Ungar (1997).

Tabela 3 - Taxa de amortecimento para pisos onde se pratica esporte e dança.

Tipo de construção	Taxa de amortecimento (ξ)		
	Mínimo	Médio	Máximo
Concreto armado	0,014	0,025	0,035
Concreto protendido	0,010	0,020	0,030
Compósitos	0,008	0,016	0,025
Aço	0,006	0,012	0,020

Fonte: Adaptado de Bachmann *et al.* (1995).

3.2 Frequência fundamental de pisos

A laje é a estrutura que está diretamente em contato com os usuários das edificações e sua frequência fundamental deve estar afastada da frequência das excitações que podem vir a ocorrer devido a sua utilização. A NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece valores para as frequências críticas de alguns casos de estruturas (Tabela 4), assim a frequência fundamental da laje deve exceder em 20% a frequência crítica fornecida pela referida norma ($f_l > 1,2 f_{crit}$). A recomendação objetiva garantir a estabilidade de desempenho no Estado Limite de Vibrações

Excessivas (ELS-VE). A norma tenta distanciar a frequência fundamental das estruturas das frequências de excitação.

Tabela 4 - Frequências críticas para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas.

Casos	f_{crit} (Hz)
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Sala de dança ou de concreto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concreto com cadeiras fixas	3,5

Fonte: NBR 6118 (ABNT, 2014).

A norma NBR 8800 (ABNT, 2008), projeto e execução de estruturas de aço e de estruturas mistas aço-concreto de edifícios, também apresenta informações sobre as frequências mínimas que os pisos devem apresentar. Com relação a guias internacionais, há o *steel design guide series 11 - floor vibrations due to human activity* de Murray *et al.* (1997), publicado pela *American Institute of Steel Construction (AISC)* que apresenta critérios para conforto humano baseados nas frequências naturais dos pisos.

Apesar de ser um guia para estruturas pré-moldadas e protendidas, o guia *PCI Design Handbook* (2004) estabelece duas frequências mínimas que o piso deve respeitar conforme sua utilização. Uma é devido as vibrações causadas pela caminhada e a outra com relação a excitação rítmica. A primeira é uma fórmula empírica (vibração causada por caminhada). A segunda fórmula é o critério de projeto para frequência natural mínima em lajes sujeitas à excitação rítmica e é baseado na resposta dinâmica do sistema de piso ao carregamento dinâmico.

3.3 Modelo simplificado para flecha imediata devido ao efeito da fissuração

O concreto em situação normal de utilização está sujeito à fissuração. Conforme o concreto fissura (estádio II), há uma redução da seção transversal da peça, e por consequência, uma redução do momento de inércia à flexão, o que gera uma redução na frequência natural da laje. O início da fissuração pode ser estimado por meio do momento de fissuração.

A análise no estágio I (sem fissura) considera a inércia bruta da seção da laje, a partir do início da fissura, a laje passa para o estágio II (com fissuração). O limite entre os estádios é determinado pelo momento de fissuração que é obtido aproximadamente pela Equação (34), segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014).

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (34)$$

α : fator que relaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, para seções “T” assume valor de 1,2;

I_c : momento de inércia à flexão da seção de concreto sem considerar a fissuração (seção bruta);

y_t : distância entre a fibra mais tracionada e o centro de gravidade da seção; e

f_{ct} : resistência à tração direta do concreto. Para concretos de classe até C50, a Equação (35) pode ser utilizada;

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (35)$$

No estágio I, o momento de inércia à flexão pode ser calculado pela Equação (16). Se devido aos esforços, o momento atuante superar o valor do momento de fissuração, deve-se corrigir a rigidez. A NBR 6118 (ABNT, 2014) estabelece o cálculo de uma rigidez equivalente por meio da Equação (36):

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^n I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^n \right] I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (36)$$

I_c : momento de inércia da seção bruta;

A : área da seção considerada;

d : distância do Centro de Gravidade (CG) da seção até o CG da peça considerada;

n : índice de valor igual a 3;

b e h : dimensões da seção transversal;

I_{II} : momento de inercia da seção fissurada, adotando $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}}$;

M_a : momento fletor na seção crítica;

M_r : momento de fissuração;

E_{cs} : módulo de elasticidade secante do concreto;

Segundo Carvalho e Filho (2013) a Equação (36) é uma adaptação do modelo proposto por Branson em 1968, que simula a inércia de uma peça de concreto simultaneamente

nos estádios I (não fissurado) e II (fissurado) e permite considerar essa situação adotando-se uma única inércia para a peça. O índice (n) assume valor igual a 4 em análises em uma seção da peça e 3 quando a análise é ao longo de toda a peça.

Segundo Junges (2011), adota-se o índice igual a 4, em uma seção individual de um elemento de pequena extensão, objetivando desconsiderar no cálculo da rigidez que parte da peça está no estádio I. Já o índice igual a 3, considera que o vão possui partes fissuradas e partes não fissuradas.

O índice com valor igual a 3 é a situação considerada pela NBR 6118 (ABNT, 2014) em seu item sobre flecha imediata em vigas de concreto armado. Há *softwares* que consideram em sua análise não linear de grelhas, o índice com valor igual a 4. O efeito da consideração do índice na resposta das lajes nervuradas é estudo neste trabalho.

3.4 Técnicas de análise dinâmica experimental

Neste tópico são apresentadas as formas de obter as frequências naturais e o fator de amortecimento das lajes por meio dos ensaios experimentais. Assim como os equipamentos e as análises necessárias nos sinais coletados.

3.4.1 Excitação da laje

Existem vários testes que podem ser utilizados para mesurar as características dinâmicas de pisos, como: teste do ambiente; teste do impacto de calcanhares; teste saco de areia; teste do impacto do martelo; e teste da vibração forçada.

O teste do ambiente registra os movimentos do piso que ocorrem naturalmente, não é um método normalmente utilizado, pois requer um longo período de registro e sistema de monitoramento preciso; O teste do impacto dos calcanhares é o mais amplamente utilizado e a sua metodologia é simples, uma pessoa fica em pé no centro da laje e quando solicitada levanta-se na ponta dos pés e repentinamente cai sobre os calcanhares, gerando assim um impacto que é monitorado; O teste do saco de areia não é normalmente utilizado, ele é similar ao teste do impacto dos calcanhares, mas evita que uma pessoa fique na laje, o teste consiste em soltar um saco contendo 1 kg de areia no centro da laje; O teste do impacto do martelo consiste em um martelo com um transdutor de carga, a saída do mesmo é registrada junto com a resposta do piso. Como o carregamento é monitorado, possibilita avaliar a rigidez da estrutura. É um teste comum na engenharia mecânica; O teste da vibração forçada mensura rigidez, modos de

vibração e forma modal. Esse ensaio envolve o uso de um gerador de vibrações no piso (ELLIS; ARMER, 2001).

3.4.2 Aquisição de sinais

Acelerômetros são sensores que medem a aceleração de um corpo vibrando. Esses dispositivos são amplamente utilizados para medições de vibração e também para registrar terremotos. A partir do registro do acelerômetro, a velocidade e os deslocamentos podem ser obtidos por integração (RAO, 2011). Segundo Sartorti (2015) os acelerômetros mais comuns são os piezoelétricos. Esses sensores possuem uma massa acoplada a cristais piezoelétricos e ao movimento da massa, os cristais possuem a propriedade de gerar sinais elétricos que podem ser compreendidos em forma de aceleração da estrutura.

Existem diversos tipos de acelerômetros, destacando-se os piezoresistivos, os capacitivos e o MEMS (*Micro-Electro-Mechanical Systems*). O que muda é a forma de mensurar a aceleração. Na escolha do acelerômetro para realizar uma medição deve-se observar a sensibilidade e a faixa de frequência que eles são capazes de registrar. Entre os acelerômetros disponíveis no mercado, o acelerômetro integrado ao MPU-6050 apresenta baixo custo e boa performance.

O MPU6050 possui um giroscópio e um acelerômetro MEMS na mesma matriz de silício e ambos mensuram nos 3 eixos (x , y e z). Esse equipamento ainda possui um *Digital Motion Processor* (DMP) integrado e mede 4 mm x 4 mm x 0,9 mm. O acelerômetro é programável pelo usuário nas escalas de $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$ e $\pm 16g$. O MPU6050 possui um filtro passa-baixa entre 5-260 Hz e uma taxa de saída de dados entre 4 – 1000 Hz (INVENSENSE, 2013).

Figura 13 - MPU6050 e placa com circuito.



Fonte: O autor.

O MPU6050 (Figura 13) é acoplado em uma placa que possui um circuito para seu funcionamento. Essa placa deve ser ligada a algum dispositivo para realizar as leituras dos dados, como por exemplo um Arduino².

Rocha Junior (2020) comparou o espectro de frequência gerado com a aquisição de sinal pelo MPU6050 com um sensor calibrado do laboratório da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Segundo o autor, o MPU6050 mostrou-se eficaz no estudo, conseguindo reproduzir um espectro de frequência semelhante ao sensor calibrado.

3.4.3 Processamento de sinais

Os dados do acelerômetro são coletados no domínio do tempo, porém sua análise é realizada no domínio da frequência. Esse procedimento é realizado por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT). Atualmente existem rotinas em várias linguagens de programação para a sua utilização. Na análise dos sinais alguns erros podem ocorrer como o *aliasing*, *leakage* e captação de ruídos.

Inman (2014) explica que o *aliasing* é causado pelo tempo de amostragem inadequado, causando a representação incorreta do sinal analógico pelo registro digital. Quando a taxa de amostragem for muito lenta a representação digital fará com que as frequências altas apareçam como frequências baixas. Para evitar esse problema o sinal deve ser amostrado a uma taxa de pelo menos duas vezes a frequência mais alta do sinal (teorema de amostragem). O *aliasing* pode ser evitado com um filtro passa-baixa, cortando frequências mais altas do que cerca da metade da frequência máxima de interesse, chamada de frequência de Nyquist. Já o *leakage* ocorre na hora de tornar o sinal finito (uma amostra), pode-se cortar o sinal em qualquer múltiplo seu período. Se o sinal for interrompido no meio do período faz com que frequências errôneas apareçam na representação digital. Esse problema pode ser corrigido pelo uso de uma função de janela, que força o sinal a ser zero fora do período de amostragem. Uma função de janela comum é a janela Hanning. O problema do ruído está associado ao fato de que o transdutor usado para medir a entrada e a saída durante um teste de vibração geralmente contém ruído.

O efeito do ruído pode ser amenizado realizando o ensaio mais de uma vez e adotando o valor médio. Deste modo, pode-se observar se há algum valor discrepante. Caso haja, o teste pode ser refeito ou o valor descartado. Para melhorar a qualidade dos dados

² Arduino é uma plataforma eletrônica de código aberto baseada em *software* e *hardware*.

coletados, filtros podem ser utilizados para permitir analisar faixas de frequência. Os filtros são analógicos ou digitais.

Filtros analógicos foram originalmente inventados para uso em receptores de rádio e sistemas de telefonia de longa distância. Os sinais de entrada, saída e internos estão na forma de sinais de tempo contínuo. Os filtros digitais evoluíram como uma extensão natural dos filtros analógicos e estão na forma de sinais de tempo discreto. Existem vários tipos de filtros, como: o passa-banda que seleciona bandas de frequências; e o passa-baixa que seleciona baixas frequências na faixa de 0 a ω (banda passante) e rejeitaria altas frequências na faixa de ω a infinito (banda de parada) (ANTONIOU, 2018).

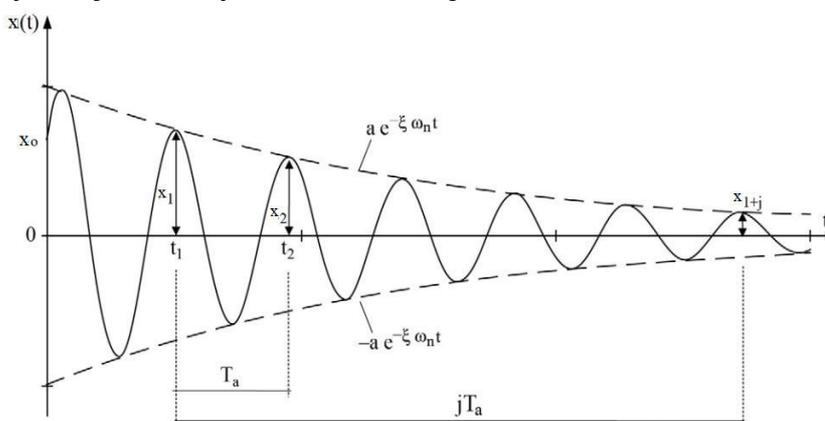
3.4.4 Cálculo da frequência natural e amortecimento da estrutura

A frequência fundamental de uma laje pode ser obtida por meio da análise de dados no domínio da frequência. Os dados coletados no domínio do tempo são transformados no domínio da frequência por meio da Transformada Rápida de Fourier (FFT). Neste trabalho, utiliza-se um algoritmo desenvolvido em linguagem de programação *Python* para o referido cálculo. O pico com frequência mais baixa representa a frequência fundamental da estrutura associada ao primeiro modo de vibração.

O amortecimento pode ser calculado pelo método do decremento logarítmico. Em vibração livre é mesurado o decremento logarítmico (δ_l).

$$\delta_l = \ln \frac{x_1}{x_2} \quad (37)$$

Figura 14 - Oscilação simples em função do decremento logarítmico.



Fonte: Adaptado de Soriano (2014).

Substituindo os valores de x_1 e x_2 pela solução da equação livre amortecida e considerando o fator de amortecimento $\xi < 0,1$. Obtém-se a Equação (38).

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{x_1}{x_{1+j}} \quad (38)$$

A Equação (38) pode ser escrita em função da aceleração.

$$\xi \cong \frac{1}{2\pi j} \ln \frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_{1+j}} \quad (39)$$

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Apresentam-se neste capítulo os materiais e métodos utilizados no estudo experimental e numérico. Construíram-se 3 lajes nervuradas para o estudo experimental: laje de referência; laje com aumento na armadura longitudinal de combate ao esforço de flexão; e laje com aumento da altura da nervura. Idealizaram-se 2 modelos computacionais, com base na literatura, para modelar as lajes: modelo utilizando elementos lineares por analogia de grelhas; e modelo utilizando elementos de casca modelados via MEF. Utiliza-se o algoritmo grelhas para analisar as lajes por analogia de grelhas e o programa *SAP2000* no modelo utilizando elementos de casca.

4.1 Materiais e métodos do estudo computacional

Apresentam-se as técnicas utilizadas na modelagem computacional dos dois modelos adotados neste trabalho. Inicialmente, mostra-se a validação do algoritmo grelhas, visando garantir que o mesmo forneça resultados confiáveis e, em seguida, os dois modelos propostos para realizar as análises computacionais das lajes.

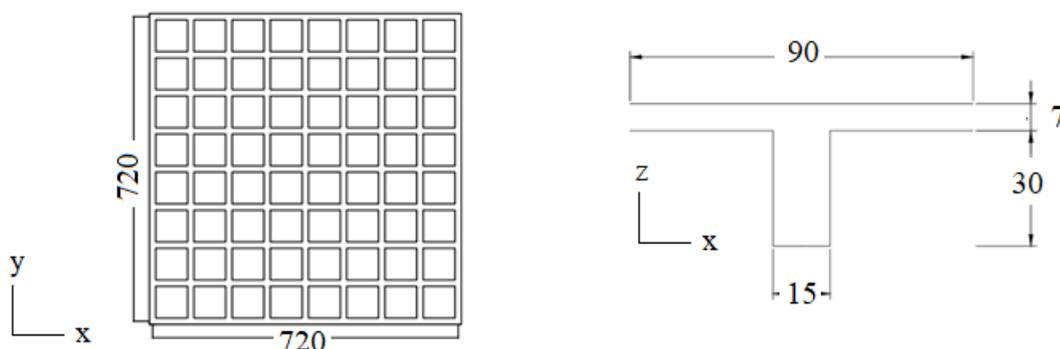
4.1.1 Validação do algoritmo grelhas

A laje nervurada proposta por Carvalho e Pinheiro (2009) (Figura 15) foi utilizada para validar a análise estática do algoritmo grelhas. Para validar a análise dinâmica, os resultados foram comparados com análises utilizando o *software SAP2000*. A laje em questão utiliza fôrmas reaproveitáveis e os apoios são considerados sem deslocamentos. As características da laje são apresentadas a seguir (Tabela 5).

Tabela 5 - Parâmetros da laje de validação.

Resistência do concreto (f_{ck})	Peso próprio (g_1)	Sobrecarga (g_1)	Carga acidental (q)
20 MPa	4 kN/m ²	1 kN/m ²	5 kN/m ²

Figura 15 - Laje nervurada analisada por Carvalho e Pinheiro (2009). Unidades em cm.



Fonte: Adaptado de Carvalho e Pinheiro (2009).

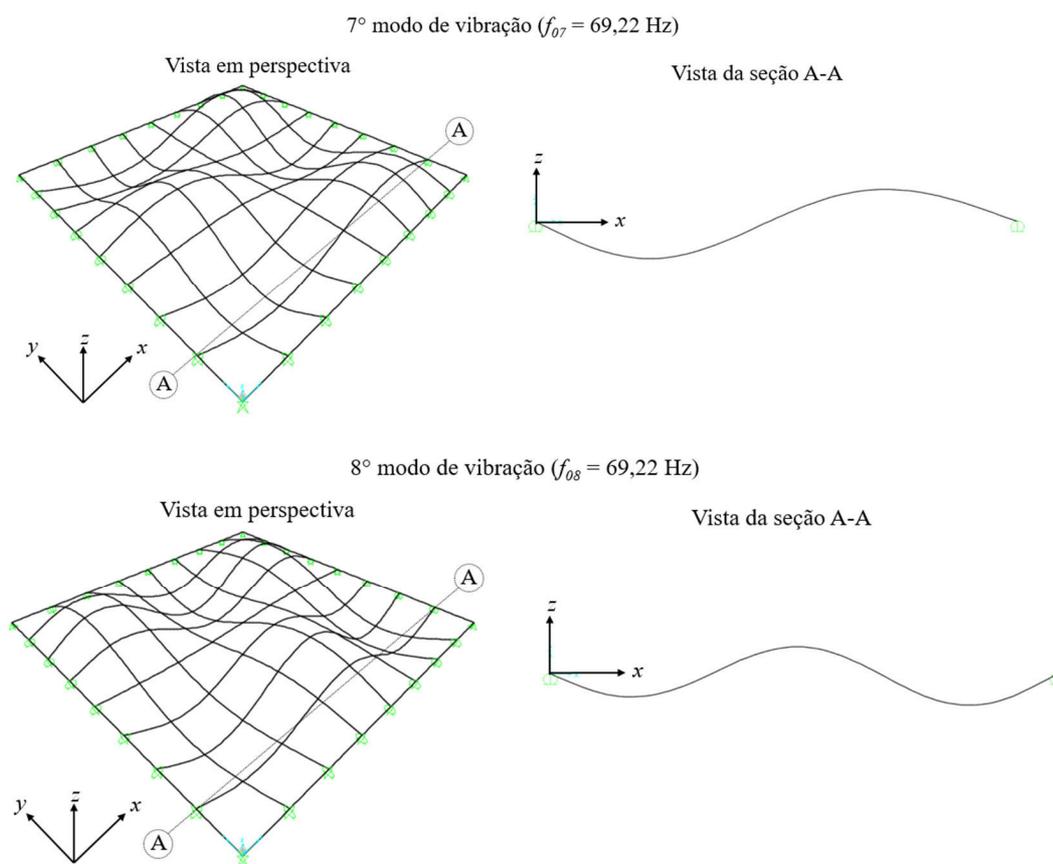
O algoritmo grelhas utiliza o elemento do modelo 1, descrito no item 4.1.3. Assim como o programa *SAP2000*. Nesta validação a inércia bruta da seção transversal é considerada (concreto não fissurado) e os elementos adotados nas análises são representados no centro de gravidade da seção transversal da laje. Os resultados mostram que o algoritmo grelhas fornece valores condizentes com as análises do programa *SAP2000* e com valores disponibilizados por Carvalho e Pinheiro (2009). Os cálculos dos módulos de elasticidade (E) e cisalhamento (G) são os preconizados pela norma brasileira, baseados na resistência do concreto e disponíveis em Carvalho e Pinheiro (2009). A validação é realizada para o deslocamento máximo (centro da laje) e frequências naturais (Tabela 6). Os resultados mostram que o algoritmo grelhas fornece valores consistentes.

Tabela 6 - Comparação dos resultados: deslocamentos e frequências.

Parâmetro	Carvalho e Pinheiro (2009)	<i>SAP2000</i>	Algoritmo grelhas	Diferença (%)
Deslocamento no centro da laje	6,38 mm	6,13 mm	6,13 mm	3,92% / 0%
1ª frequência natural	-	10,26 Hz	10,26 Hz	0,00%
2ª frequência natural	-	28,53 Hz	28,56 Hz	0,11%
3ª frequência natural	-	28,53 Hz	28,56 Hz	0,11%
4ª frequência natural	-	40,80 Hz	40,86 Hz	0,15%
5ª frequência natural	-	61,03 Hz	61,20 Hz	0,28%
6ª frequência natural	-	61,04 Hz	61,21 Hz	0,28%
7ª frequência natural	-	69,22 Hz	69,42 Hz	0,29%
8ª frequência natural	-	69,22 Hz	69,42 Hz	0,29%
9ª frequência natural	-	90,82 Hz	91,12 Hz	0,33%
10ª frequência natural	-	106,21 Hz	106,80 Hz	0,56%

A estrutura em análise trata-se de uma laje quadrada com as quatro bordas na mesma condição de contorno. Devido a tal fato, alguns modos de vibração são duplicados. Apresentam a mesma forma e frequência (ver Tabela 6), em orientação diferentes. Como pode ser visualizado na Figura 16, para o sétimo e oitavo modos de vibração obtidos utilizando o programa *SAP2000*.

Figura 16 – Modos de vibração da laje analisada por Carvalho e Pinheiro (2009).



Fonte: o autor

A Figura 17 mostra a malha gerada pelo algoritmo grelhas, com numeração dos nós e de seus graus de liberdade. Essas informações são utilizadas para montar a matriz de massa e a matriz de rigidez do sistema. Os três primeiros modos de vibração obtidos com o *SAP2000* e com o algoritmo grelhas são apresentados na Figura 18.

Figura 17 - Malha gerada pelo algoritmo grelhas, com numeração dos nós e graus de liberdade.



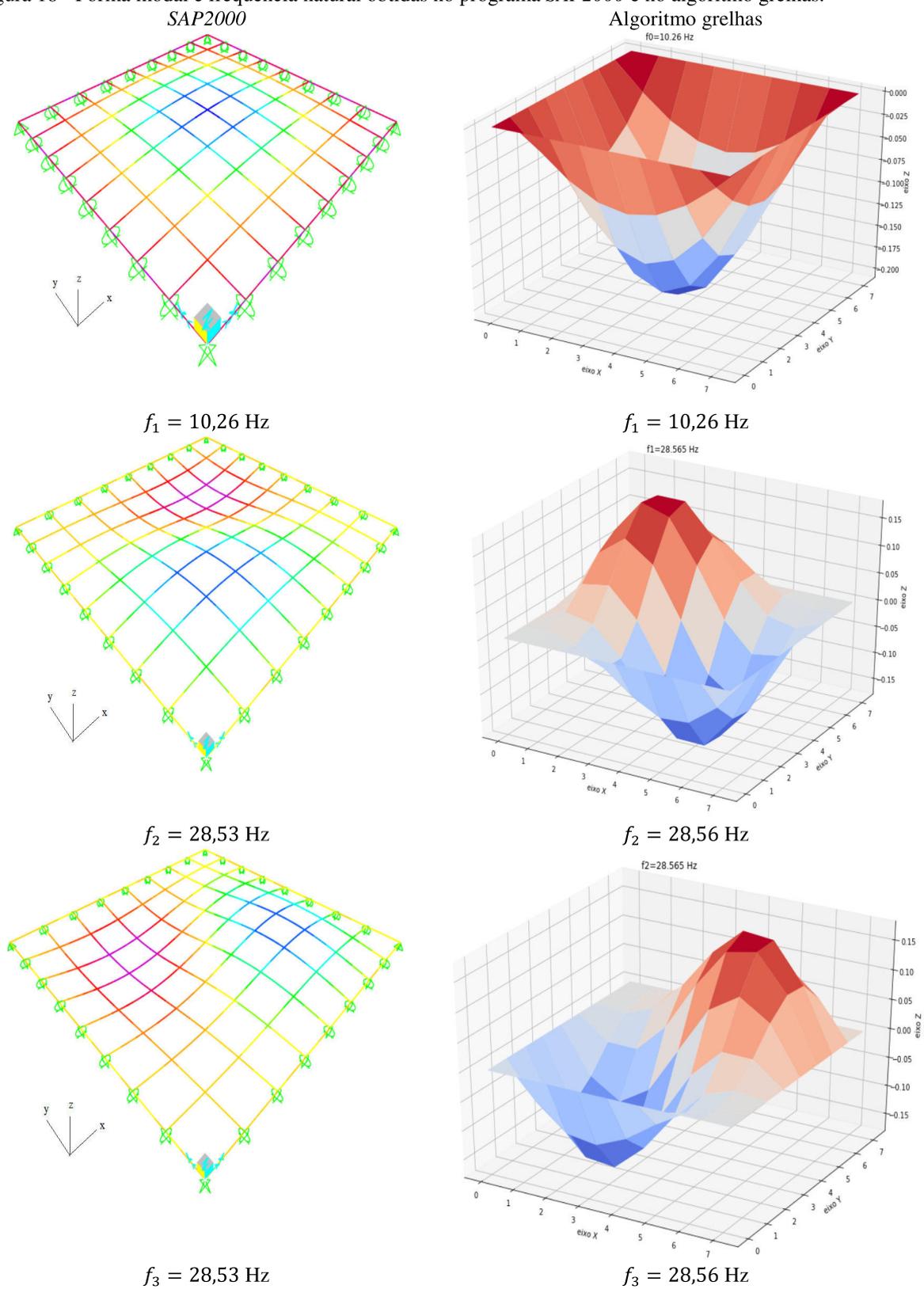
Fonte: o autor

Percebe-se que a forma modal é coincidente nos dois métodos, assim como os valores das frequências associadas a cada modo de vibração. A massa e a rigidez modal são comparadas até o terceiro modo de vibração entre o programa *SAP2000* e o algoritmo grelhas (Tabela 7). No caso do programa *SAP2000*, na saída dos dados, há uma normalização pela massa. Para efeito de comparação, no algoritmo grelhas, o procedimento também é realizado.

Tabela 7 - Comparação entre características modais.

Modo	SAP2000			Algoritmo grelhas		
	Rigidez	Frequência angular (rad/s)	Massa modal	Rigidez	Frequência angular (rad/s)	Massa modal
1	4152	64,44	1	4156	64,47	1
2	32135	179,26	1	32213	179,48	1
3	32135	179,26	1	32213	179,48	1

Figura 18 - Forma modal e frequência natural obtidas no programa SAP2000 e no algoritmo grelhas.

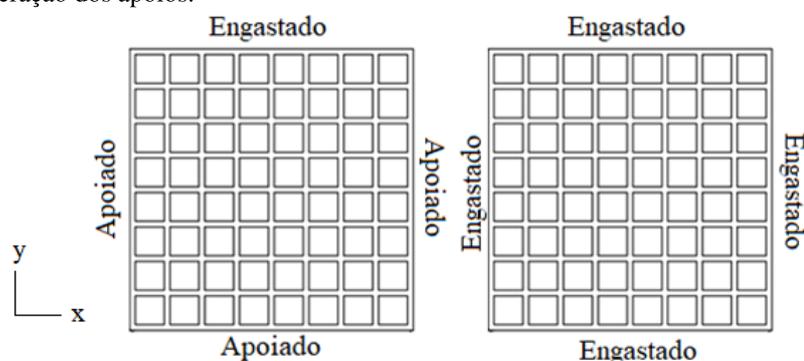


Fonte: o autor

Os valores obtidos nas análises para a rigidez modal são similares (Tabela 7), entre o programa *SAP2000* e o algoritmo grelhas. Para ratificar a validação, outras duas condições de apoios foram verificadas: considerando as quatro bordas da laje como engastadas; e considerando uma borda engastada e três apoiadas, conforme Figura 19. A Tabela 8 e a Tabela 9 apresentam as comparações dos resultados obtidos pelos programas.

Na prática da engenharia, as lajes nervuradas são dimensionadas para a configuração de apoiadas em todas as bordas. Essa premissa não é seguida nas duas últimas comparações (Tabela 8 e Tabela 9), pois busca-se somente verificar se o algoritmo grelhas está adequadamente implementado para diferentes condições de apoio.

Figura 19 - Consideração dos apoios.



Fonte: O autor.

Nessas novas condições, o algoritmo grelhas também fornece resultados coerentes com os obtidos no programa *SAP2000*, mostrando que a rotina está adequadamente implementada. Mais testes foram realizados, considerando diferentes configurações de lajes, os quais não são apresentados neste trabalho, e em todas as situações os resultados gerados são coincidentes para deslocamentos, rotações, momentos, frequências e modos de vibração. A laje com quatro bordas engastadas também apresenta modos de vibração duplicados (Tabela 8), pelo mesmo motivo já apresentado.

Tabela 8 - Laje com quatro bordas engastadas.

Parâmetros	<i>SAP2000</i>	Algoritmo grelhas	Diferença (%)
Deslocamento no centro da laje	1,45 mm	1,45 mm	0,00%
1ª frequência natural	21,73 Hz	21,76 Hz	0,14%
2ª frequência natural	44,78 Hz	44,93 Hz	0,33%
3ª frequência natural	44,78 Hz	44,93 Hz	0,33%
4ª frequência natural	60,62 Hz	60,84 Hz	0,36%
5ª frequência natural	82,64 Hz	83,13 Hz	0,59%

Tabela 9 - Laje com uma borda engastada e três apoiadas.

Parâmetros	SAP2000	Algoritmo grelhas	Diferença (%)
Deslocamento no centro da laje	3,71 mm	3,70 mm	0,16 %
1ª frequência natural	13,06 Hz	13,07 Hz	0,08 %
2ª frequência natural	29,74 Hz	29,78 Hz	0,13 %
3ª frequência natural	35,16 Hz	35,23 Hz	0,20 %
4ª frequência natural	45,73 Hz	45,83 Hz	0,22 %
5ª frequência natural	61,66 Hz	61,84 Hz	0,29 %

Em todas as análises apresentadas neste trabalho, não houve diferença significativa entre os valores obtidos pelo programa *SAP2000* e o algoritmo grelhas. Com relação aos valores disponibilizados por Carvalho e Pinheiro (2009), a diferença obtida foi de 3,92% em valores absolutos. Considerando o milímetro como a menor dimensão, a diferença entre os valores obtidos é nula. Para as frequências naturais, em todas as análises, a diferença obtida ficou abaixo de 0,56 %. Valor esse para o décimo modo de vibração. Para o primeiro modo de vibração a diferença máxima foi de 0,14%. Diante do exposto, o algoritmo grelhas não apresentou erros significativos em suas análises. Sua rotina, que utiliza o método da rigidez, fornece valores dentro do esperado. Desta forma, podendo ser utilizado neste trabalho.

4.1.2 Modelos propostos

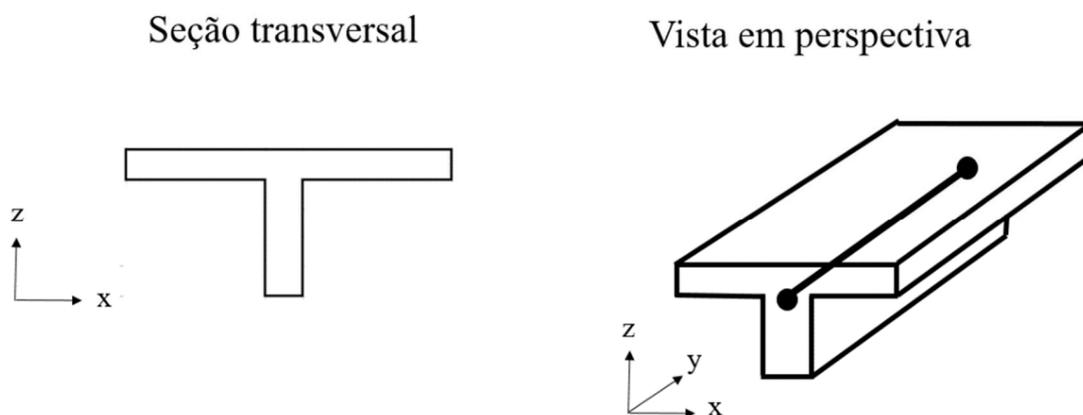
Existem diversas possibilidades de modelos computacionais, que variam do elemento utilizado até as configurações desse elemento. Análises realistas tendem a serem trabalhosas com relação a sua modelagem e acabam sendo inviáveis no cotidiano dos escritórios de cálculo. A solução ideal, ao escolher um modelo, é a que permite simplicidade de modelagem e que fornece análises satisfatórias. Assim, descarta-se o estudo utilizando elementos sólidos via MEF neste trabalho. Apesar desse elemento fornecer naturalmente as excentricidades existentes nas lajes.

Há diversos trabalhos na literatura sobre análise de laje nervurada com relação à análise estática, e com isso, diversos modelos propostos. Porém, na análise dinâmica outros fatores devem ser considerados além dos critérios determinados na análise estática, como por exemplo, a distribuição da massa do sistema. Esse fato restringe a utilização de alguns modelos que modificam a geometria original da laje. Neste trabalho são propostos modelos baseados nas principais modelagens utilizadas na literatura para realizar a análise dinâmica.

4.1.3 Modelo 1

Consiste em idealizar a laje com elementos lineares. A mesa e nervura são consideradas na mesma seção e analisadas em conjunto (Figura 20). Considera-se o elemento linear com três graus de liberdade por nó, sendo dois de rotação e um de translação, essa configuração é adotada no algoritmo grelhas.

Figura 20 - Modelo 1.



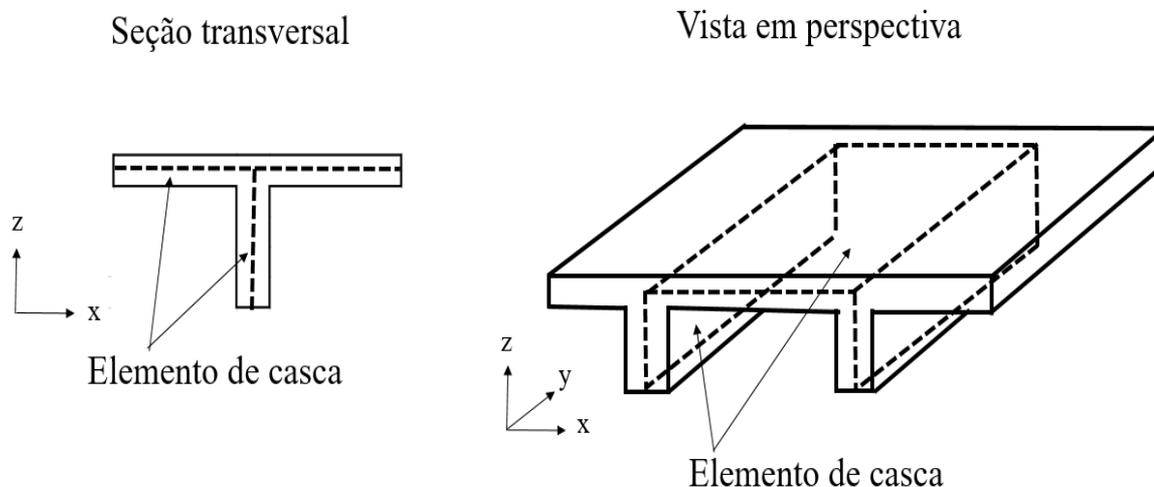
Fonte: o autor.

Conforme apresentado no item 4.1.1, o algoritmo grelhas e o programa *SAP2000* fornecem resultados similares nas análises de lajes utilizando elementos de grelha (modelo 1), possibilitando a utilização de ambos. Porém, optou-se por utilizar o algoritmo grelhas nas análises envolvendo o modelo 1, pois o algoritmo grelhas fornece maior agilidade na modelagem das lajes e na análise dos resultados. Utiliza-se o programa *SAP2000* na idealização do modelo 1 somente no item 4.1.6.

4.1.4 Modelo 2

Considera a mesa e a nervura com elemento de casca. A nervura prolonga-se até o centro geométrico da mesa, fazendo com que a altura da laje permaneça inalterada (Figura 21). Devido a essa configuração, a massa total da laje torna-se um pouco maior que a real, uma vez que a massa da nervura prolongada sobre a mesa é considerada duas vezes. Como esse valor é pequeno, se comparado com a massa total da laje, considera-se válido esse modelo. Na análise estática, o modelo 2 é o que melhor representa a laje nervurada nos estudos de Schwetz (2011) e Dias (2003).

Figura 21 - Modelo 2.



Fonte: O autor.

Neste modelo, utiliza-se o programa *SAP2000* e adotam-se nas análises o elemento *Shell* com 4 nós. Esse elemento pode ser utilizado para modelar placas, membranas e cascas. Utilizam-se dois elementos tipo *shell* nas análises: *Homogeneous Shell* e o *Layered Shell*. O primeiro na análise linear e o segundo na não linear. O *Homogeneous Shell* considera que o material que o compõe é homogêneo. O *Layered Shell* permite a criação de camadas ao longo da espessura, podendo ser configurado diferentes elementos por camada. Esse elemento possui um grau de liberdade de rotação a menos que *Homogeneous Shell*, que possui 3 graus de liberdade de translação e 3 de rotação. Outra diferença é que o *Layered Shell* utiliza a formulação de Mindlin/Reissner na determinação dos esforços e o *Homogeneous Shell* permite também a utilização da formulação de Kirchhoff.

O elemento *Layered Shell* permite construção em camadas, possibilitando a consideração da armadura no concreto. Assim, na região da nervura onde há armadura, a camada central dos elementos é constituída por aço e as camadas externas por concreto. Destaca-se que, neste trabalho, somente há armadura nas nervuras.

A vantagem de idealizar a laje nervurada com elemento de casca está no fato de possibilitar gerar naturalmente algumas excentricidades, como por exemplo, da laje com as vigas das bordas. A desvantagem é ser uma técnica mais trabalhosa de se modelar, caso seja comparado com a utilização de elementos lineares, como o modelo 1. Uma forma de inserir a geometria da laje do modelo 2 no programa *SAP2000* é utilizando o *template grid*. Esse procedimento, dependendo da configuração da laje, pode ser bastante trabalhoso.

4.1.5 Análise dos modelos propostos

Os modelos são comparados com dados disponíveis na literatura nesta seção. O objetivo é verificar se a resposta em frequência fornece valores coerentes. Neste item, não se busca determinar parâmetros de análises, o que é realizado somente no estudo experimental. Os dados de entrada são os fornecidos pelo autor do estudo em comparação. Desta forma, é possível verificar se a modelagem adotada neste trabalho está consistente.

4.1.6 Laje nervurada bidirecional analisada por Lago (2019)

Lago (2019) realizou ensaios experimentais em diversas lajes em sua dissertação, dentre as quais a laje LN14, a qual é analisada nesta seção. A laje apresenta engastamento nas quatro bordas e o concreto utilizado possui $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$. O material de preenchimento entre as nervuras é o poliestireno expandido. A laje possui dimensões em planta de 3,53 m x 3,38 m. As características da seção transversal da laje são apresentadas na Tabela 10.

Tabela 10 - Parâmetros adotados por Lago (2019).

Espaçamento entre eixos de nervuras	Largura da nervura	Altura da nervura	Espessura da mesa	Altura total da laje
59 cm	9 cm	12 cm	5 cm	17 cm

Fonte: Adaptado de Lago (2019).

Lago (2019) não apresenta em seu trabalho a armadura utilizada. A laje é analisada seguindo os modelos propostos e seus resultados são apresentados na Tabela 11. A frequência fundamental apresentada por Lago (2019) é um valor médio oriundo de 12 experimentações. Todos os modelos forneceram dados coerentes, principalmente se comparados com a resposta numérica de Lago (2019). Mostrando que os modelos podem ser utilizados no estudo experimental. Como a frequência experimental apresenta valor menor que os obtidos nos modelos, pode ser um indicativo que a laje apresenta algum grau de fissuração, o que não foi considerado nas análises numéricas.

Tabela 11 - Comparação de resultados.

Origem dos dados	Frequência fundamental	Diferença com relação ao valor experimental (%)
Valores experimentais obtidos por Lago (2019).	39,06 Hz; 37,50 Hz; 37,50 Hz; 38,09 Hz; 38,09 Hz; 38,09 Hz; 36,72 Hz; 39,06 Hz; 39,06 Hz; 39,06 Hz; 38,09 Hz; e 39,06 Hz (média 38,28 Hz)	-
Valor numérico obtido por Lago (2019) utilizando elemento de casca via MEF.	42,10 Hz	+9,9 %
Modelo 1 (Considerando 100% da inércia a torção)	40,40 Hz	+5,5 %
Modelo 2	41,24 Hz	+7,7 %

4.2 Materiais e métodos utilizados no estudo experimental

Apresenta-se o estudo experimental desenvolvido em três lajes nervuradas de concreto armado, com o objetivo de obter dados relativos a resposta estática e dinâmica das lajes, com a finalidade de verificar qual configuração dos modelos teóricos apresenta maior semelhança com os dados obtidos experimentalmente. As lajes diferem entre si, com relação a armadura utilizada e a altura da nervura. As dimensões e os materiais utilizados nas lajes, assim como os experimentos realizados, são apresentados a seguir.

Com o objetivo de construir estruturas flexíveis e minimizar a carga necessária para obter os estágios de deformação, optou-se por utilizar um concreto de baixa resistência e armaduras com menor área de seção transversal. Tal preocupação ocorre pelo fato de que estruturas em tamanho reduzido tendem a apresentar rigidez elevada.

4.2.1 Lajes experimentais

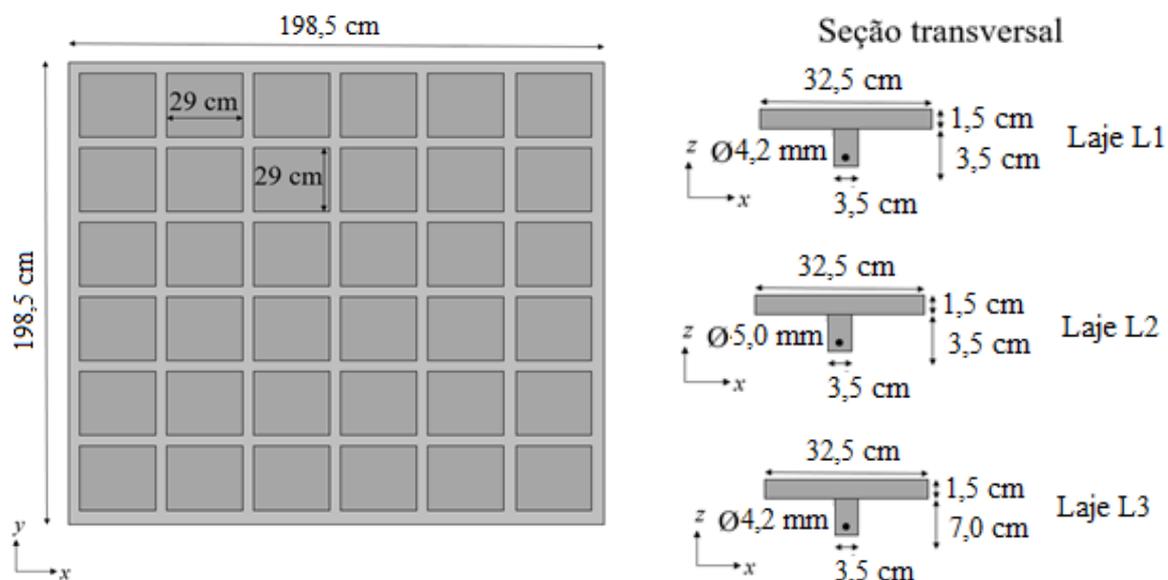
Três lajes nervuradas de concreto armado são construídas para o estudo de caso. A primeira laje é a referência, denominada neste trabalho de L1; a segunda sofre acréscimo da área de armadura para combater o esforço de flexão, denominada de L2; e a terceira sofre alteração do momento de inércia, por meio do aumento da altura da nervura, esse modelo é referenciado como L3. A Figura 22 mostra as características geométricas e as armaduras das lajes. Todas são armadas nas duas direções das nervuras e com cobrimento de 0,5 cm.

- Laje L1: laje quadrada com dimensões das arestas de 198,5 cm; 1,5 cm de espessura da mesa; 3,5 cm de altura da nervura; 3,5 cm de espessura da

nervura; e 32,5 cm de distância entre eixos das nervuras. A referida laje apresenta em cada nervura uma barra de aço CA-60 de 4,2 mm de diâmetro.

- Laje L2: mesmas dimensões da laje L1. Diferencia-se pela armadura utilizada, uma barra de aço CA-60 de 5,0 mm de diâmetro em cada nervura.
- Laje L3: excetuando-se a altura da nervura, que nesta laje é adotada com 7 cm, apresenta as mesmas dimensões e armaduras adotadas na laje L1.

Figura 22 – Detalhes da geometria e armadura das lajes.



Fonte: o autor.

Adotam-se as dimensões para as lajes experimentais dentro dos padrões comerciais dos principais fabricantes de formas para lajes nervuradas, conforme Tabela 12, que apresenta as proporções entre as dimensões da altura da mesa e a altura da nervura e entre a largura da nervura e a distância entre eixos das nervuras.

Tabela 12 – Proporções entre dimensões das lajes nervuradas.

	Comercial	Lajes experimentais
Relação entre altura da mesa e altura da laje	0,105 – 0,385	0,300 (L1 e L2); 0,176 (L3)
Relação entre largura da nervura e distância entre eixos da nervura	0,107 – 0,285	0,108 (L1, L2 e L3)

Por ser um modelo com dimensões reduzidas, por motivos já apresentados, as lajes em estudo, não seguem as dimensões mínimas estabelecidas pela NBR 6118 (ABNT, 2014),

uma vez que tornaria a laje extremamente rígida, necessitando de maior quantidade de carga para gerar diferentes estágios de fissuração nas lajes.

Algumas das especificações da 6118 (ABNT, 2014) são oriundas da NB-1/78, que segundo Bocchi Jr. (1995), recomendava dimensões mínimas em lajes nervuradas objetivando possibilitar o cálculo dos esforços pela teoria das placas. Segundo o autor, utilizando o cálculo de grelhas, tais dimensões poderiam ser alteradas, desde que realizadas as devidas verificações.

Construíram-se as lajes utilizando o material de enchimento EPS (*Expanded Polystyrene*), pois como os modelos apresentam dimensões limitadas, esse material permite fácil manipulação, adequando-se as dimensões de projeto. A utilização do EPS ainda permite não alterar significativamente o peso e a resistência das lajes analisadas.

Construíram-se as lajes apoiadas em vigas, não havendo ligação estrutural entre ambos. Para tal, na execução das lajes, uma lona plástica recobriu as vigas. Antes dos ensaios, verificou-se que não ocorreu ligação estrutural entre as lajes e as vigas, garantindo aos modelos a configuração de laje simplesmente apoiada. Na prática da engenharia, as lajes nervuradas são dimensionadas para a configuração de lajes simplesmente apoiadas, por isso, essa foi a configuração adotada nos experimentos.

Em um dimensionamento convencional, o primeiro passo é calcular as cargas que a laje estará submetida. Com essas, calcula-se os momentos e determina-se a armadura de combate a flexão. Neste trabalho, a sequência de procedimentos é o inverso do dimensionamento convencional. Inicialmente determina-se a armadura de combate à flexão e por meio das equações de equilíbrio de esforços, concreto à compressão e aço à tração, obtém-se o momento de cálculo. Para finalizar, utilizando o método das grelhas e considerando a análise linear, estima-se as cargas de projeto. O dimensionamento das lajes e os critérios adotados são apresentados a seguir.

4.2.2 Concreto

O cimento utilizado é o Cimento Portland tipo II com adição de Fíler, com classe de resistência à compressão de 32 MPa (CP-II-F 32). Como as dimensões das lajes são reduzidas, a dimensão do agregado graúdo é limitada a 6 mm, conforme recomendação da NBR 6118 (ABNT, 2014), a dimensão máxima do agregado graúdo não pode ultrapassar 1,2 vezes a espessura do cobrimento nominal adotado para o elemento estrutural.

Tabela 13 – Traço do concreto utilizado nos modelos experimentais.

Traço Cimento : Areia : Brita	Cimento (kg)	Areia úmida (L)	Brita (L)	Água (L)
1 : 4 : 4,5	50	72	81	22

As lajes foram concretadas simultaneamente, visando obter a mesma resistência com relação ao concreto nos três modelos. Durante a concretagem 5 corpos de prova foram moldados. O resultado do ensaio de resistência à compressão é apresentado na Tabela 14. A resistência média do concreto utilizado nas lajes é de 23,19 MPa.

Tabela 14 - Ensaio de resistência à compressão.

Corpo de prova	CP 1	CP 2	CP 3	CP 4	CP 5
Resistência à compressão (MPa)	22,62	22,28	23,86	23,40	23,78

4.2.3 Armadura

Utiliza-se o aço CA-60. Adotam-se nas lajes L1 e L3 a bitola de 4,2 mm. Na laje que sofre aumento da armadura de combate a flexão (L2), utiliza-se o diâmetro comercial 5,0 mm. Posicionam-se as armaduras nas nervuras. As lajes não possuem nenhuma armadura adicional.

4.2.4 Momentos estimados

Calculam-se três momentos para cada laje, a saber: momento de fissuração, momento fletor característico e o momento fletor de cálculo ou ruptura. O momento de fissuração é obtido pela Equação (34). O momento de cálculo é obtido pelo equilíbrio de esforços entre o concreto à compressão e o aço à tração. O momento característico é obtido dividindo-se o momento de ruptura pelo coeficiente de minoração no valor de 1,4. A Tabela 15

apresenta os valores dos referidos momentos para cada laje. Uma rotina em linguagem de programação *Python* pode ser visualizada no Apêndice A para o cálculo dos momentos característico e de ruptura. Não foram utilizados coeficientes de minoração de resistência nos cálculos. O domínio de deformação no estado limite último para as três lajes é o domínio 2, ruptura da laje com o aço atingindo o alongamento máximo convencional de 10‰ sem esmagamento do concreto na compressão.

Tabela 15 - Momentos estimados para as lajes experimentais.

Lajes	Momento de fissuração (N.m)	Momento característico (N.m)	Momento de cálculo (N.m)
L1	64,70	247,34	346,27
L2	64,70	344,56	482,39
L3	186,75	453,45	634,84

4.2.5 Cargas necessárias para obter os momentos estimados

Para estimar a carga a ser aplicada nas lajes para obter os momentos apresentados na Tabela 15, são realizadas análises utilizando o modelo de grelhas considerando a análise linear. Por meio de iterações, são determinadas as cargas que geram os momentos. Inicialmente, aplica-se a carga do peso próprio das lajes para verificar se o momento de fissuração foi atingido, em seguida são acrescentadas cargas sobre as lajes até serem obtidos os momentos especificados na Tabela 15. A análise desconsidera as armaduras, assim as lajes L1 e L2 são consideradas com o mesmo comportamento. Considera-se o momento de inércia à flexão integral e o peso específico aparente do concreto de 25 kN/m³, conforme NBR 6120 (ABNT, 2019).

Nas análises, o momento de fissuração não é alcançado com a aplicação do peso próprio das lajes, atribuindo a configuração inicial de estruturas não fissuradas (estádio I) após a retirada do escoramento, apesar que nas lajes L1 e L2, o peso próprio gera um momento próximo ao valor estimado para o momento de fissuração. A Tabela 16 apresenta a massa necessária a ser acrescentada sobre as lajes para se obter os momentos apresentados na Tabela 15.

Tabela 16 - Carregamento sobre a laje para obter os momentos de referência.

Lajes	Massa adicionada à laje para obter o momento de fissuração	Massa adicionada à laje para obter o momento característico	Massa adicionada à laje para obter o momento de cálculo
L1 / L2	46,83 kg	1.243,04 kg	1.891,00 kg
L3	491,28 kg	1.839,69 kg	2.756,78 kg

Para efeito de dimensionamento, estimam-se três estádios: estágio I, estágio II e estágio III. No estágio I, a peça não está fissurada. No estágio II, a peça está fissurada e o concreto não trabalha à tração (estado limite de serviço), considera-se nesse estágio o momento característico (também chamado de momento de serviço) atuando na estrutura. O estágio III é a iminência de ruptura (estado limite último), ou seja, esgotamento da capacidade de resistência dos materiais. Nesse estágio, considera-se atuando na estrutura o momento de cálculo (também chamado de momento de projeto).

Com base na Tabela 16, definiu-se as cargas necessárias para que as lajes atingissem diferentes estágios de fissuração. Assume-se que inicialmente todas estão no estágio I. As lajes L1 e L2 recebem 3 ciclos de carregamento e a laje L3 dois ciclos de carga.

Para as lajes L1 e L2, estimou-se a carga do primeiro ciclo de carregamento em 400 kg. Nessa situação, trabalha-se em condição de carga inferior a de serviço, porém com algumas partes das lajes trabalhando no estágio II. Estimou-se a carga do segundo ciclo de carregamento em 1.500 kg. Nessa condição, ultrapassa-se o momento de serviço das lajes, atingindo um alto nível de fissuração (assume-se que maior parte da laje está trabalhando no estágio II). O terceiro e último ciclo de cargas, gera um momento atuante maior que o valor de cálculo, assim estima-se a carga em 2.200 kg. Nessa condição as lajes L1 e L2 encontram-se com peças no estágio III, com iminência de ruptura.

A laje L3 recebe dois ciclos de carga, o primeiro de 600 kg e o segundo de 2.300 kg. O primeiro ciclo apresenta uma carga inferior a de serviço, porém que gera momentos maiores que o de fissuração. Assim, a laje trabalha nos estádios I e II. O segundo e último ciclo, objetiva que a laje trabalhe predominantemente no estágio II.

Por meio dos dados da Tabela 16, estimou-se a altura do suporte para carregamento das lajes em 70 cm, valor esse que permite uma coluna de água que gere a carga máxima estimada. Para o referido cálculo, dividiu-se a máxima massa que a laje deve suportar pelo produto da área da base da laje pela densidade da água. A Figura 23, mostra a estrutura de suporte da carga. Dois materiais foram utilizados para gerar carga nas lajes: areia média e água.

A carga de água foi medida por meio da coluna de água e a carga de areia por meio de uma balança calibrada.

Figura 23 – Suporte para carga sobre a laje.



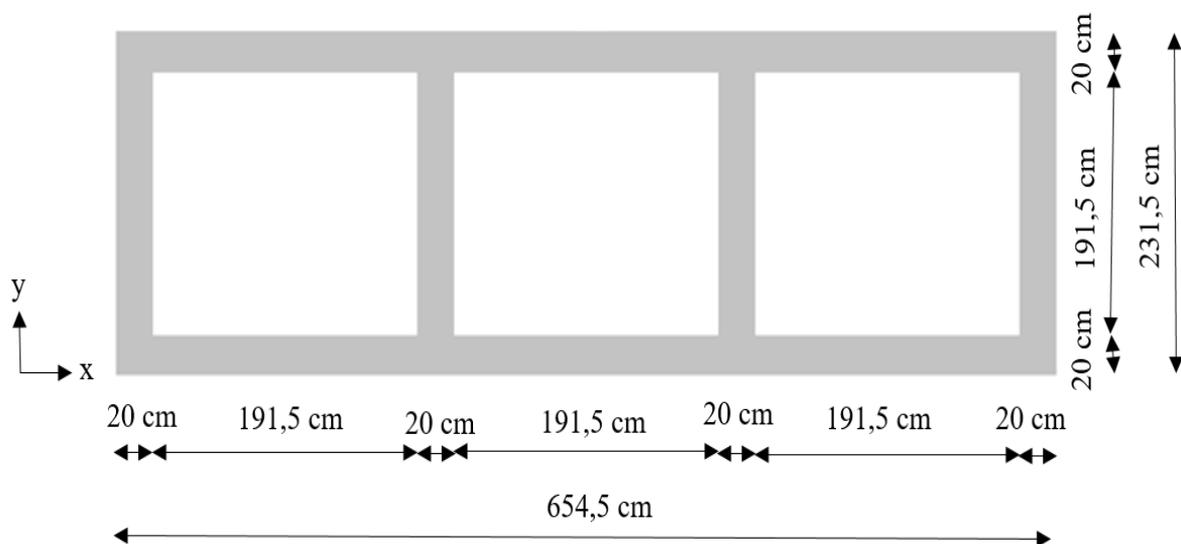
Fonte: o autor.

No que se refere a carga com areia, pesava-se um balde de 18 litros preenchido com areia e lançava-se de maneira uniforme sobre a laje. Para evitar erros de pesagem, calibrava-se a balança constantemente. Apesar de ser um procedimento mais trabalhoso, se comparado a carregar a laje com carga de água, tal procedimento não desperdiça água. Realizaram-se os dois primeiros ciclos de carga na laje L1 com carga de areia, todos os demais ensaios, inclusive nas outras lajes, efetivaram-se com carga de água.

4.2.6 Lajes e vigas de suporte

As lajes em estudo são construídas apoiadas sobre vigas de concreto armado e estas apoiadas diretamente sobre o solo. Para a construção do referido suporte, adota-se o seguinte traço: 1 saca de cimento; 4 latas de areia média; 5,5 latas de brita n° ¾; e 1,25 latas de água. Utilizou-se uma lata de 18 litros. Adotou-se o aço CA-50 de diâmetro 8 mm para a armadura longitudinal e estribos de aço CA-60 de diâmetro 5 mm. As dimensões são apresentadas na Figura 24.

Figura 24 – Dimensões da viga de suporte.



Fonte: o autor.

Preencheu-se o interior das vigas com areia média compactada (Figura 25), servindo de suporte para construção das lajes enquanto não atingem a resistência de projeto. Apesar de não convencional, essa alternativa de construção apresentou-se prática e de custo financeiro reduzido, evitando a aquisição de formas e escoras.

Figura 25 – Compactação da areia do suporte da laje.



Fonte: o autor.

Após compactação e nivelamento da areia (Figura 26), utilizou-se uma lona plástica para garantir o isolamento e a condição de laje simplesmente apoiada (Figura 27). Visa-se em tal procedimento garantir que as lajes não possuam ligação estrutural com as vigas de suporte e desta forma garantir a condição de apoio do primeiro gênero.

Figura 26 – Nivelamento da areia de suporte da laje.



Fonte: o autor.

Figura 27 – Lona plástica recobrindo a areia e a viga.



Fonte: o autor.

Uma guia foi instalada em cada vértice da viga para garantir a correta localização das nervuras, servindo para orientar a posição da primeira e da última peça de EPS (Figura 28). Utiliza-se uma ripa de madeira de espessura 3,5 cm (Figura 27) para garantir a correta posição do material de enchimento das lajes. Tal técnica demonstrou-se útil para a correta localização do EPS, pois devido seu peso reduzido, facilmente é deslocado.

Figura 28 – Guia para posicionamento das nervuras.



Fonte: o autor.

A armadura foi amarrada antes de posicionar entre os EPS, para garantir o correto espaçamento e evitar deslocamentos. Após todos esses procedimentos, a concretagem foi realizada simultaneamente nas três lajes, visando garantir a igualdade de resistência entre as mesmas (Figura 29). A vibração do concreto foi manual e cuidadosamente realizada, evitando a movimentação do EPS e garantindo o cobrimento das armaduras. A cura das lajes foi realizada por vinte e oito dias, com uma frequência de quatro a cinco vezes ao dia. Nos primeiros 7 dias, a frequência foi maior evitando que a superfície das lajes ficasse com o aspecto seco. As lajes concretadas pode ser visualizada na Figura 30.

Figura 29 – Concretagem das lajes.



Fonte: o autor.

Figura 30 – Lajes concretadas.



Fonte: o autor.

Após 28 dias de concretagem, iniciou-se a escavação para realizar a desforma das lajes. Por meio de um túnel, buscou-se chegar ao centro da laje, para então, iniciar a retirada da areia de suporte, partindo do centro das lajes para as extremidades. Após o túnel chegar ao centro da laje, a retirada da areia de suporte é relativamente simples, pois após a

descompactação, a mesma sai facilmente. A escavação do túnel, foi mais trabalhosa que o planejado, pois o solo apresentava elevada rigidez. A Figura 31, mostra a laje por vista inferior.

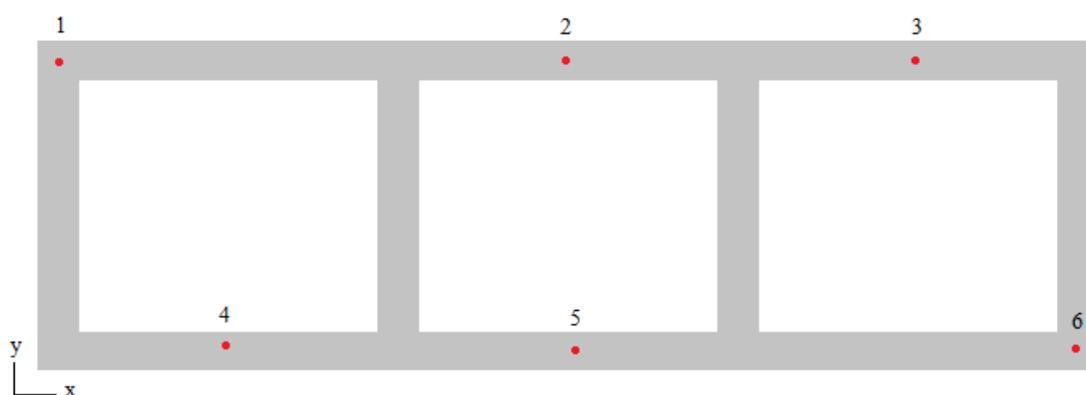
Figura 31 – Vista inferior da laje.



Fonte: o autor.

Realizou-se nivelamento geométrico de seis pontos da viga de apoio, para garantir que a mesma não sofresse deslocamento durante os ensaios. Seis pontos foram cotados antes da concretagem das lajes e, os mesmos pontos, foram cotados após a realização de todos os ensaios. O referencial de nível adotado é a calçada de uma edificação próxima as lajes. A Figura 32 mostra a localização dos pontos cotados e a caderneta de nivelamento pode ser visualizada no Apêndice B. A estrutura da viga não sofreu deslocamentos.

Figura 32 – Localização dos pontos cotados.



Fonte: o autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO DO ESTUDO EXPERIMENTAL

Na análise estática apresentam-se os resultados das deformações obtidas no centro das lajes (flecha imediata), assim como a comparação entre os valores obtidos. Em seguida, verificam-se as adequações dos modelos computacionais aos dados experimentais.

5.1 Análise estática experimental

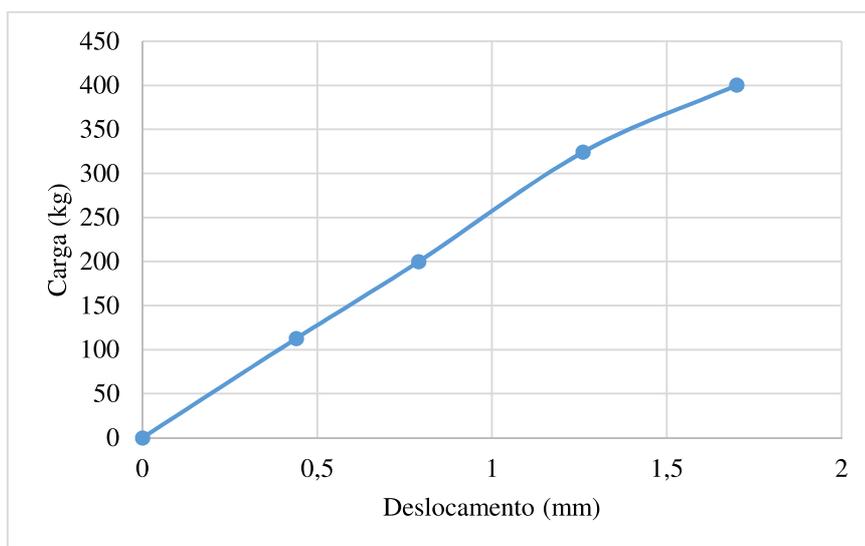
Submeteram-se as lajes a ciclos de carga e descarga, em cada ciclo de carga, registava-se a deflexão por meio de um relógio comparador posicionado no centro da estrutura. Após a descarga, registrava-se a aceleração em vibração livre das lajes. Para tal, aplicava-se um impacto com martelo de borracha. A flecha inicial devido ao peso próprio não é considerada e o gráfico é referente a um relógio comparador posicionado no centro da laje. As cargas aplicadas nas lajes seguem, aproximadamente, os valores especificados no item 4.2.5. Destaca-se que nos ensaios nenhuma das lajes sofreu ruptura, mesmos após o último ciclo de carga. Mostrando que a laje nervurada pode apresenta uma rigidez efetiva maior que a considerada no cálculo estrutural.

5.1.1 Deformação da laje L1

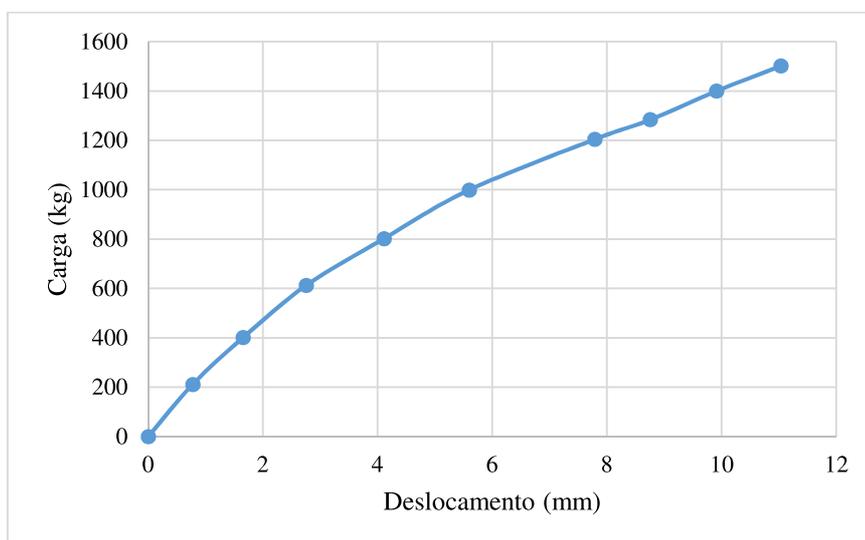
Iniciaram-se os ensaios com a laje L1, 3 ciclos de carga e descarga foram aplicados. Em todos os ciclos, carregou-se a laje L1 com areia média. Inicialmente, carregou-se a laje L1 até a massa de 400,55 kg, referente a uma carga intermediária entre o início da fissuração e a carga de serviço, conforme a análise linear prévia. A Figura 33, mostra o comportamento da laje para esse carregamento. Pelo gráfico, percebe-se que a estrutura apresenta um comportamento linear na maior parte do carregamento.

Em seguida, a laje L1 é novamente submetida a um ciclo de carga, agora com carregamento até 1.502,15 kg. Na Figura 33, evidencia-se o comportamento não linear da laje L1 para o carregamento aplicado. Indicando que a laje apresenta um estágio de fissuração e está atuando no estágio II.

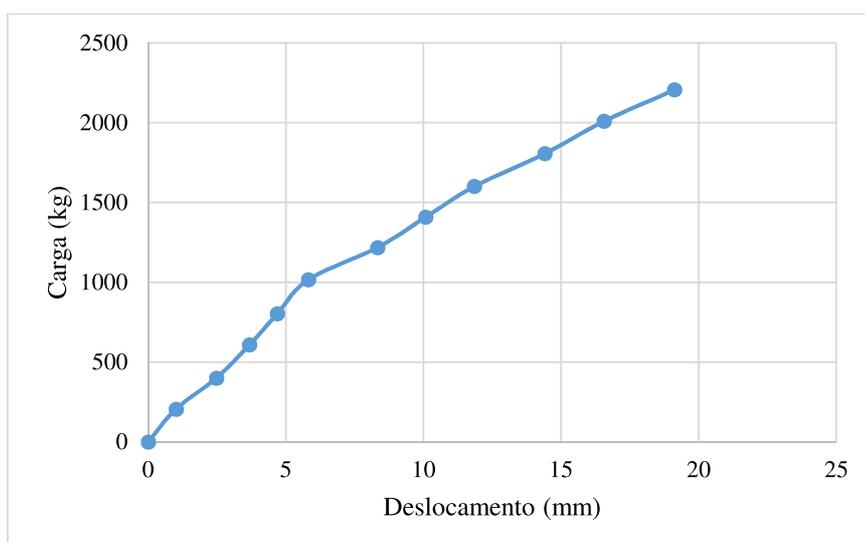
Figura 33 – Comportamento da laje L1 para os ciclos de carga.



Carga até
400,55 kg



Carga até
1.502,15 kg



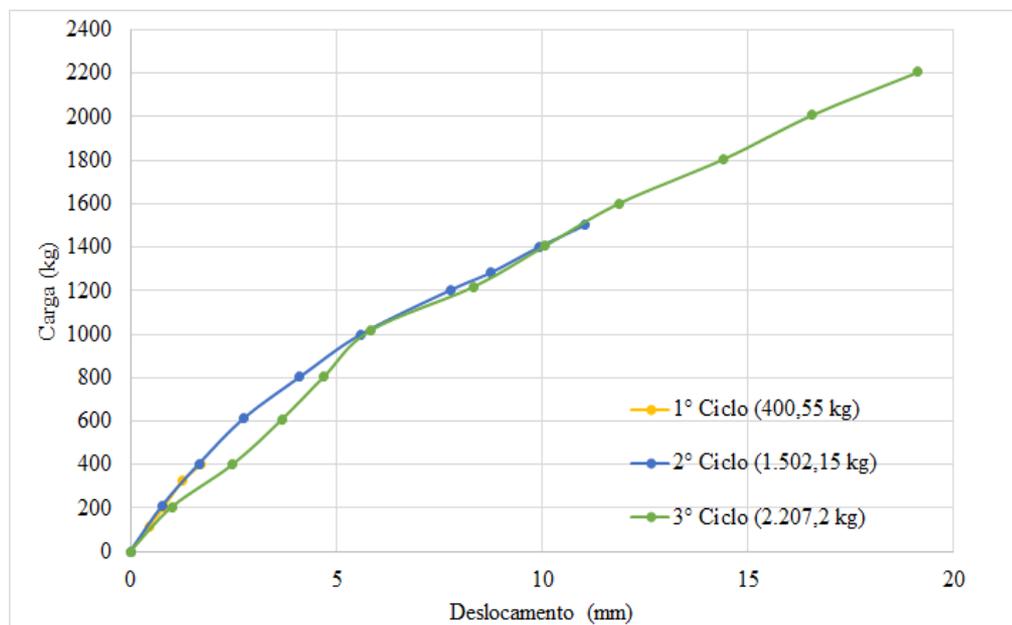
Carga até
2.207,2 kg.

Fonte: o autor.

Por fim, aplica-se o último ciclo de carga na laje L1 até 2.207,2 kg e o seu comportamento pode ser observado também na Figura 33. As deformações iniciais no último ciclo de carga, foram maiores que nos ciclos anteriores. Tal fato, pode ser explicado pelo grau de fissuração atingido pela laje.

Para ter uma visão geral do comportamento da laje L1, gera-se a Figura 34, que une os três gráficos da Figura 33. Percebe-se que nos dois primeiros ciclos de carga a laje L1 apresenta um trecho inicial linear, o que não é observado no último ciclo de carga. Somente a partir da carga de 1000 kg os gráficos do segundo e terceiro ciclos tomam valores próximos, possivelmente devido a fissuração que a laje L1 já apresentava no início do terceiro ciclo de carga.

Figura 34 – Comparação do efeito do carregamento na laje L1.



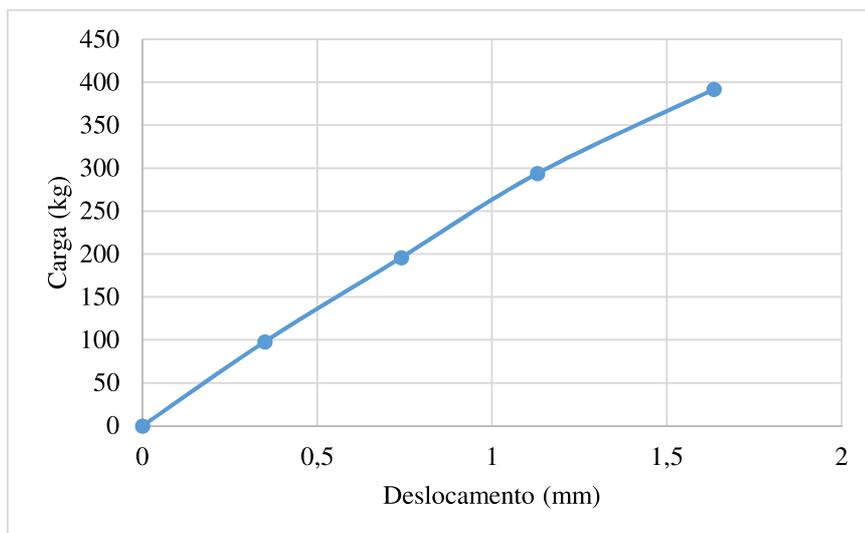
Fonte: o autor.

5.1.2 Deformação da laje L2

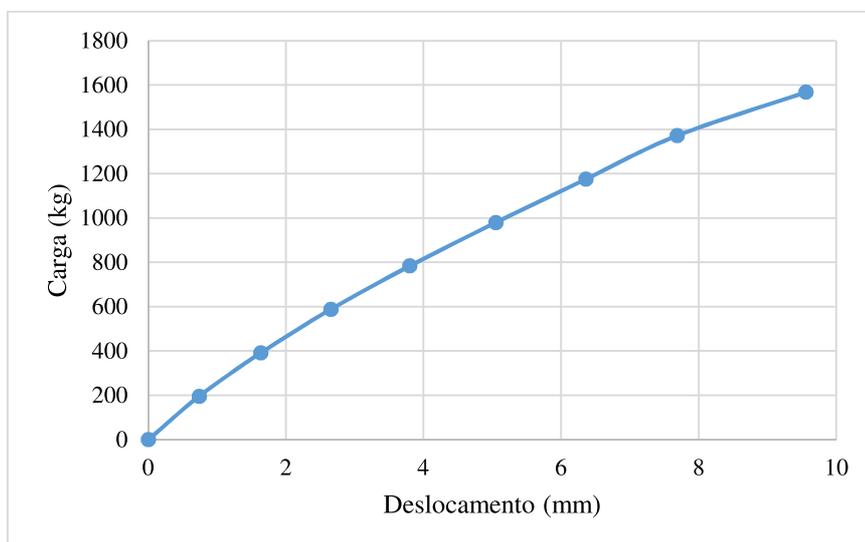
Submeteu-se a laje L2 aos mesmos ciclos de carga da laje L1. Todos os ensaios da laje L2 foram realizados com carga d'água, visando acelerar o procedimento de carga e descarga. No primeiro ciclo de carga, atingiu-se 392,04 kg, a Figura 35 mostra o comportamento da laje. Percebe-se pelo gráfico, o comportamento linear da estrutura.

No segundo ciclo de carga, atinge-se a carga de 1.568,2 kg e o gráfico desse carregamento também é apresentado na Figura 35. A estrutura apresenta um comportamento não linear, indicando algum grau de fissuração e está trabalhando no estágio II.

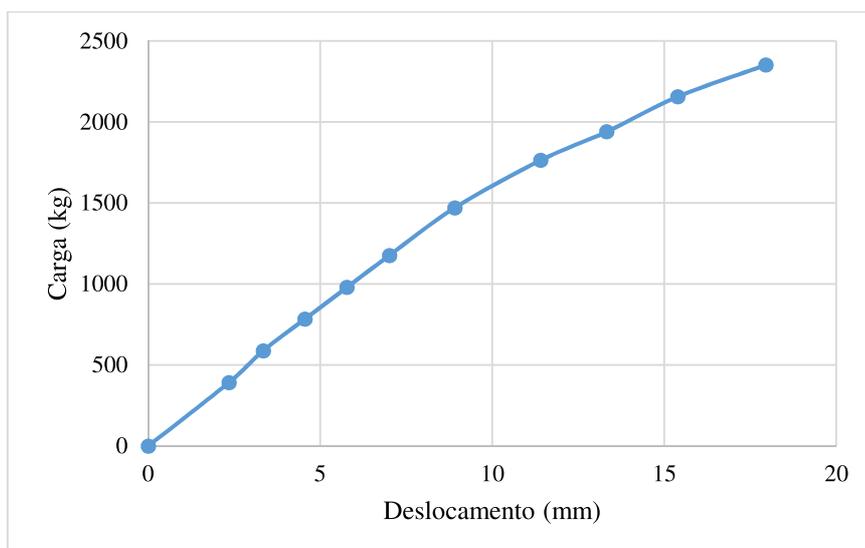
Figura 35 –Comportamento da laje L2 para os ciclos de carga.



Carga até
392,04 kg



Carga até
1.568,2 kg

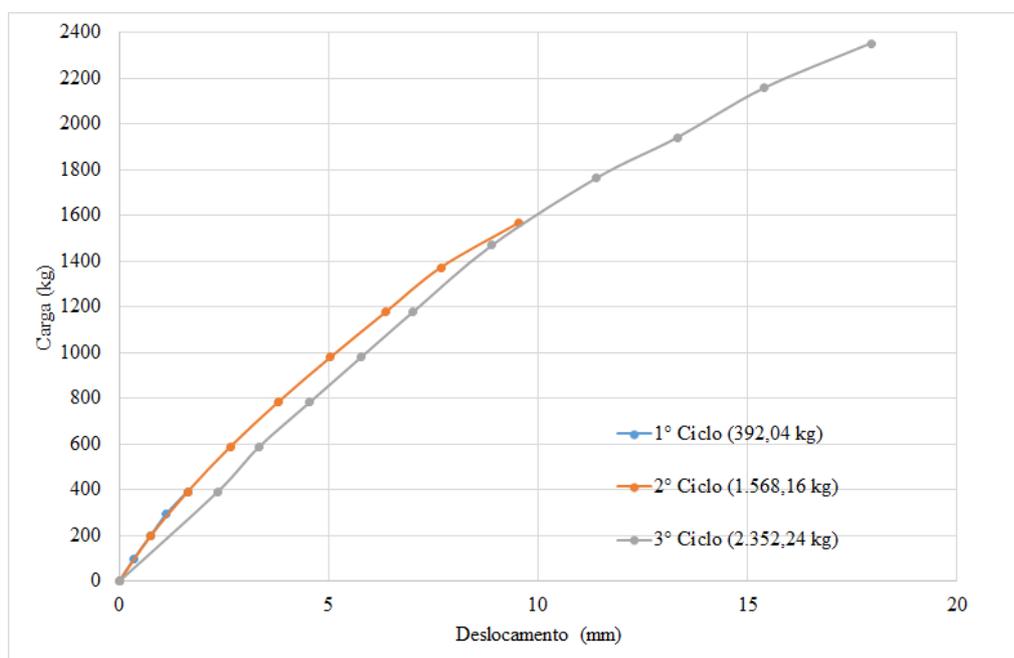


Carga até
2.352,2 kg.

Fonte: o autor.

Por fim, no último ciclo de carga na laje L2, aplica-se a carga de 2.352,2 kg. Assim como ocorreu na laje L1, a laje L2 apresenta deformações iniciais maiores, se comparado aos dois primeiros ciclos de carga. Podendo ser explicado pelo grau de fissuração atribuído a laje no segundo ciclo de carga. A Figura 36 compara os 3 gráficos apresentados na Figura 35. Percebe-se que após a carga de 1.500 kg, o gráfico do segundo e terceiro ciclos tomam valores próximos.

Figura 36 – Comparação do efeito do carregamento na laje L2.

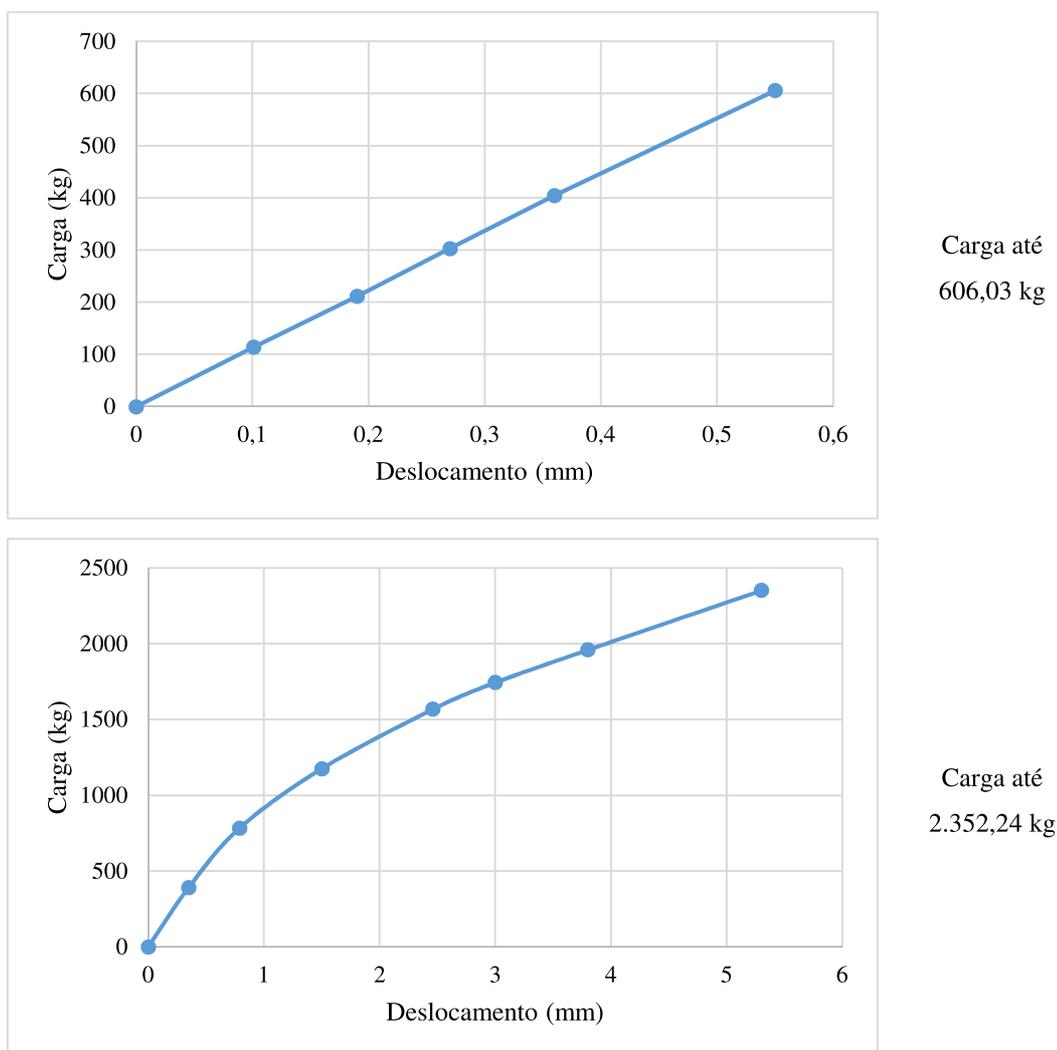


Fonte: o autor.

5.1.3 Deformação da laje L3

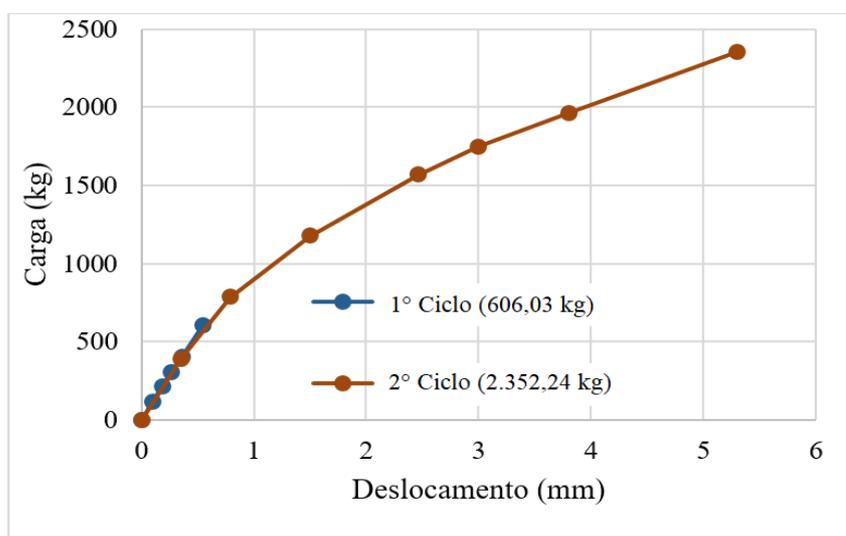
Aplicam-se dois ciclos de cargas na laje L3: primeiro ciclo de carga até 606,03 kg; e segundo ciclo de carga até 2.352,24 kg. Observa-se o comportamento da laje na Figura 37. Percebe-se que no primeiro ciclo de carga, a laje mantém um comportamento linear, indicando que a laje está no estágio I. No segundo ciclo de cargas, a laje apresenta comportamento não linear, indicando possível estágio de fissuração, ou seja, trabalhando no estágio II. Compara-se os dois ciclos por meio da Figura 38.

Figura 37 – Comportamento da laje L3 para os ciclos de carga.



Fonte: o autor.

Figura 38 – Comparação do efeito do carregamento na laje L3.



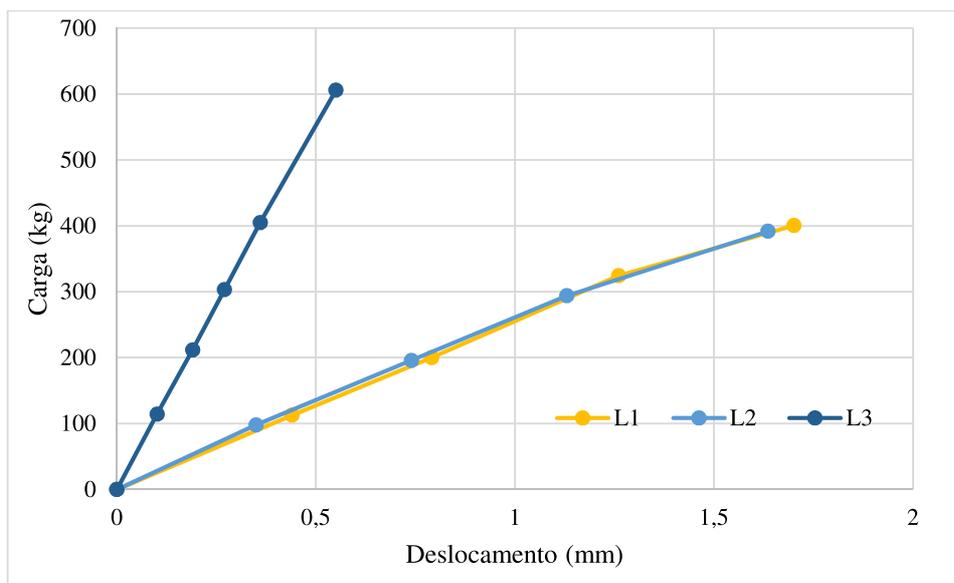
Fonte: o autor.

5.1.4 Comparação da deformação entre as lajes

Objetiva-se comparar o comportamento das três lajes. Para tanto, geram-se 3 gráficos apresentados a seguir. O primeiro compara as 3 lajes para o primeiro ciclo de carregamento; o segundo compara para o segundo ciclo de carregamento; e a terceira compara as lajes L1 e L2 para o terceiro ciclo de cargas, uma vez que a laje L3 não foi submetida a tal.

Apresenta-se na Figura 39 o comparativo para as 3 lajes, referente ao primeiro ciclo de cargas. As lajes L1 e L2 apresentam comportamento similar. Percebe-se uma sutil perda de linearidade nas lajes L1 e L2, a partir de, aproximadamente, 300 kg. Destaca-se que a deformação devido ao peso próprio não é mensurada, ou seja, consideram-se nos gráficos somente a deformação devido a carga aplicada sobre a laje.

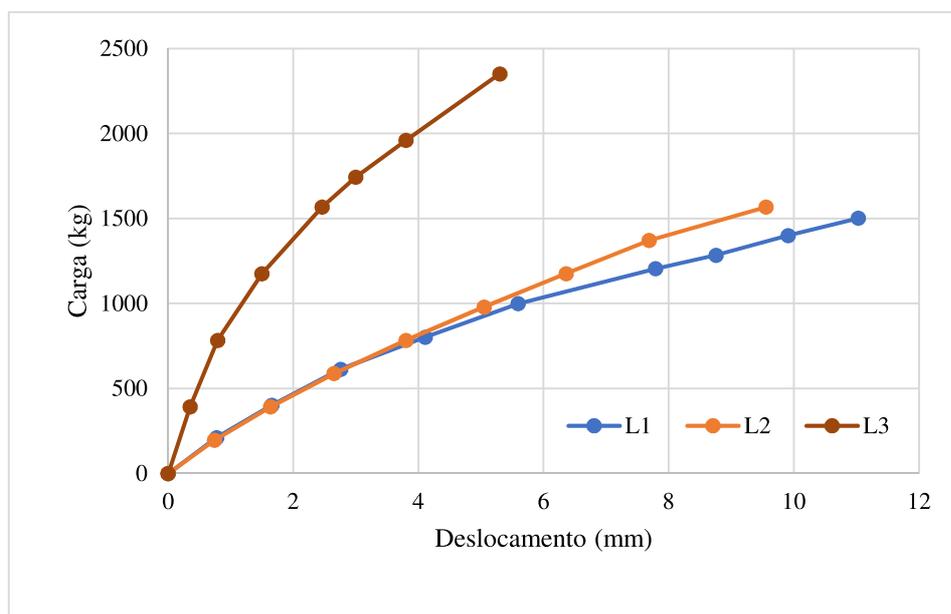
Figura 39 – Comparação das lajes no primeiro ciclo de cargas.



Fonte: o autor.

Apresenta-se na Figura 40 o segundo ciclo de cargas. Percebe-se o comportamento não linear das 3 lajes. Nota-se que, aproximadamente, entre as cargas de 800 kg e 1.000 kg, as lajes L1 e L2 apresentam-se com comportamento diferente frente ao deslocamento, provavelmente em decorrência da armadura. Mostra-se na laje L1, deslocamentos maiores.

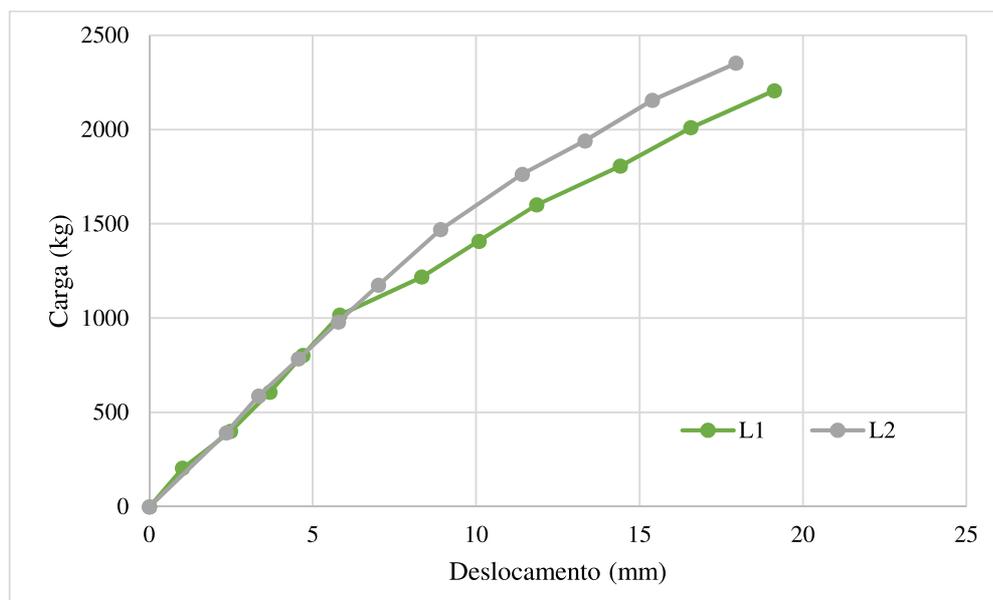
Figura 40 – Comparação das lajes no segundo ciclo de cargas.



Fonte: o autor.

Apresenta-se na Figura 41 a comparação das lajes L1 e L2 no terceiro ciclo de cargas. Nota-se um comportamento similar entre as lajes até aproximadamente a carga de 1.000 kg.

Figura 41 – Comparação das lajes no terceiro ciclo de cargas.



Fonte: o autor.

5.2 Análise estática computacional

Utilizam-se dois modelos numéricos nas análises. O primeiro utilizando modelo de grelhas (modelo 1) e o segundo é desenvolvido utilizando o MEF com elemento de casca (modelo 2). No modelo elaborado utilizando o MEF, a análise não linear é abordada por meio da consideração da curva que relaciona a tensão e a deformação do concreto e do aço. No modelo por analogia a grelhas, a não linearidade é adotada de forma simplificada, por meio da redução do momento de inércia à flexão e do momento de inércia à torção da seção transversal.

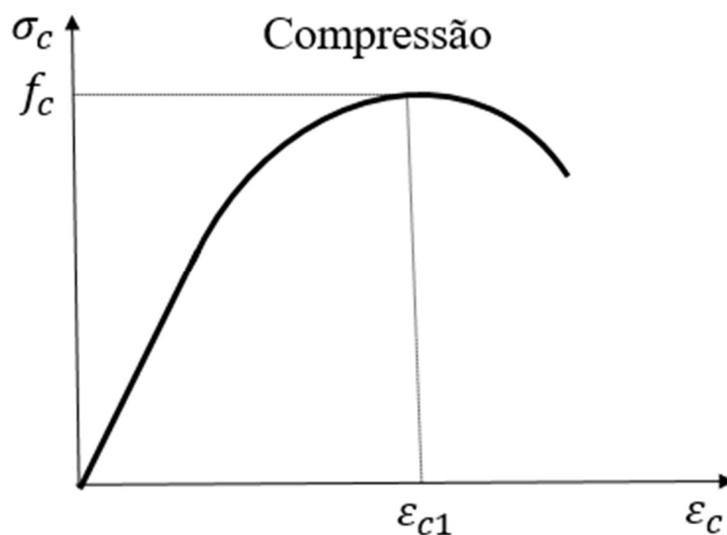
As cargas são aplicadas nos modelos computacionais como carregamentos distribuídos. No modelo 1, aplica-se o carregamento de forma linear sobre os elementos que formam as grelhas e no modelo 2, como carregamento uniformemente distribuído sobre a superfície.

Considera-se nos modelos lineares deste trabalho, que a configuração inicial dos materiais não é alterada durante a análise. A relação entre a tensão e a deformação permanecem constantes e o material está em regime elástico. Adota-se na análise não linear deste trabalho que as configurações dos materiais são alteradas durante o processo de análise, buscando simular o estágio fissurado do concreto.

O procedimento da análise não linear no modelo de grelhas consiste em particionar a carga aplicada na laje. Em cada fração de carga aplicada, realiza-se a análise para determinar se alguma seção da laje apresenta momento fletor superior ao momento de fissuração, em caso positivo, esse trecho recebe uma redução do momento de inercia da seção, com base na Equação (36). Segue-se o mesmo procedimento até a aplicação total da carga.

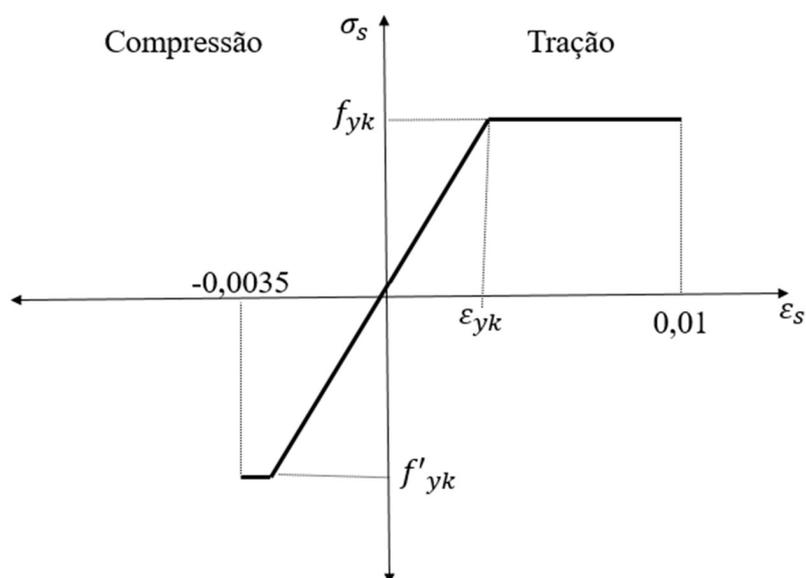
O modelo não linear utilizando o MEF considera a variação de tensão e deformação dos materiais constituintes da laje: concreto e aço. As Figura 42 e Figura 43, mostram o gráfico dessa relação para os dois materiais. Neste trabalho, a deformação do concreto é limitada a 0,0035 m/m na compressão. A deformação do aço é limitada a 0,01 m/m na tração e a 0,0035 m/m na compressão, valor esse, equiparado a deformação do concreto, pois considera-se o trabalho em conjunto do concreto e aço. Destaca-se que as lajes analisadas experimentalmente possuem somente armadura de combate à flexão, ou seja, armaduras tracionadas.

Figura 42 – Diagrama tensão-deformação do concreto à compressão.



Fonte: o autor.

Figura 43 – Diagrama tensão-deformação simplificado para o aço.



Fonte: o autor.

O diagrama tensão-deformação idealizado do concreto à compressão, previsto no item 8.2.10.1 da norma NBR 6118 (ABNT, 2014), pode ser utilizado nas análises no estado limite último. A construção do referido diagrama pode ser realizada por meio da Equação (40).

$$\sigma_c = f_{ck} \left[1 - \left[\left(1 - \frac{\varepsilon_c}{0,0035} \right)^2 \right] \right] \quad (40)$$

σ_c : tensão de compressão no concreto;

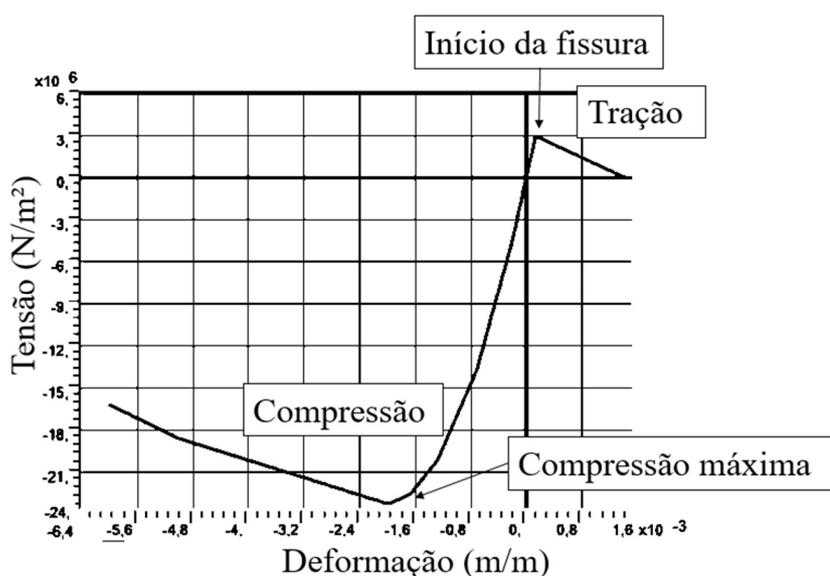
f_{ck} : resistência característica à compressão do concreto; e

ε_c : deformação específica do concreto.

O aço CA-60 não apresenta patamar de escoamento bem definido, porém a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) permite adotá-lo conforme diagrama idealizado apresentado na Figura 43. A mesma norma orienta que o aço trabalha de forma análoga, no que se refere a relação entre tensão e deformação, na tração e na compressão.

O *software SAP2000* permite que seja introduzido o diagrama tensão-deformação do material, mas também possui a opção de gerar um diagrama tensão-deformação padrão com base nos dados fornecidos de resistência do concreto à compressão e módulo de elasticidade do material (Figura 44). Na compressão, até a tensão máxima, o valor fornecido pelo programa iguala-se a Equação (40). Na tração, há um trecho inicial linear até o início da fissura, a partir de onde a tensão decai linearmente até zero.

Figura 44 – Diagrama tensão-deformação do concreto gerado pelo programa *SAP2000*.

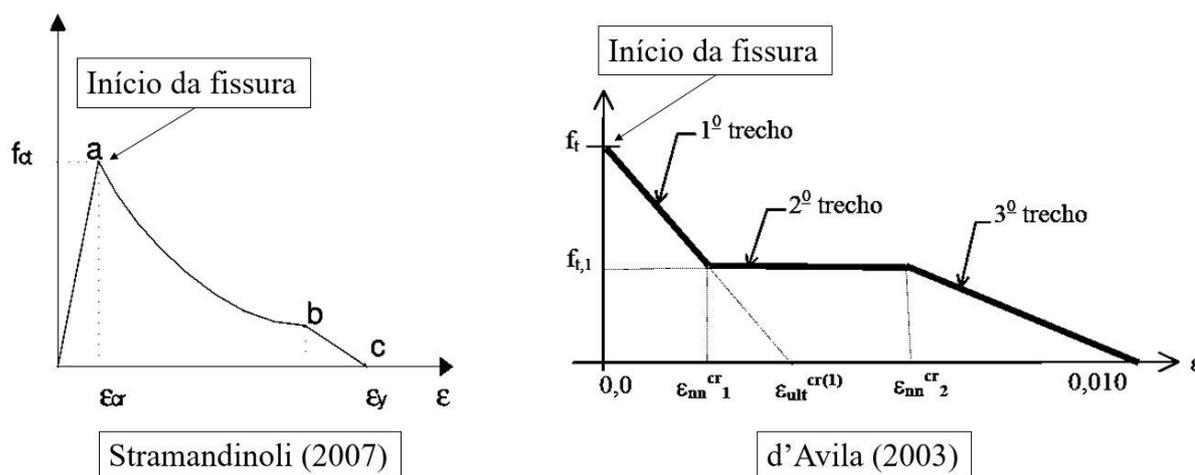


Fonte: o autor.

No ensaio de tração do concreto, o trecho após o início da fissura denomina-se ramo de amolecimento e pode ser descrito por uma curva exponencial. No concreto armado esse

trecho apresenta uma configuração diferente, pois a ligação do concreto à armadura permite que as regiões não fissuradas colaborem com a resistência. Tal efeito é denominado *tension-stiffening*. Na literatura há vários modelos que tentam simular esse ganho de resistência, como os modelos propostos por d'Avila (2003) e Stramandinoli (2007) (Figura 45).

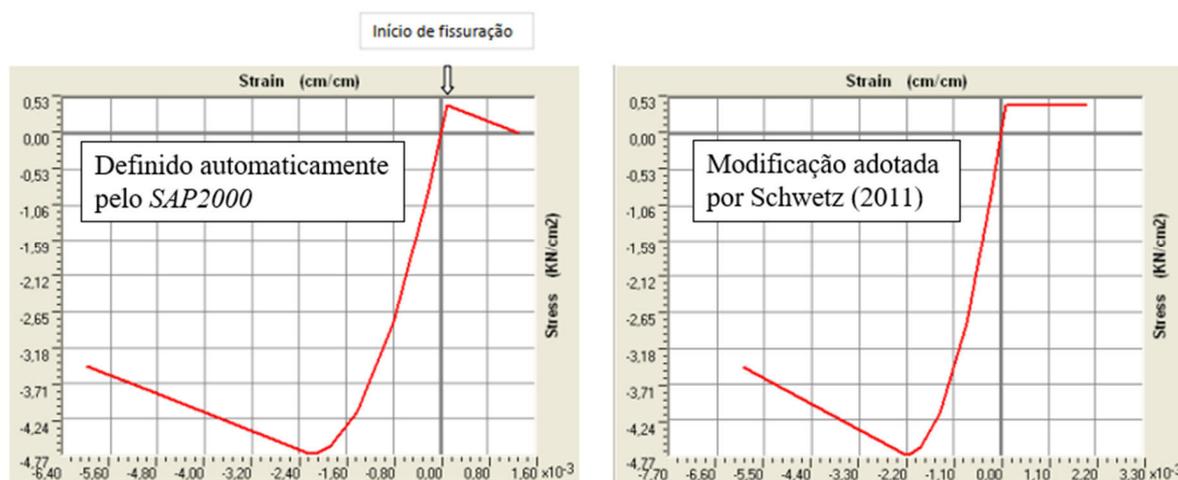
Figura 45 – Diagrama tensão-deformação (modelo de fissuração).



Fonte: adaptado de d'Avila (2003) e Stramandinoli (2007).

Após o máximo valor da resistência à tração (início da fissuração), a tensão diminui com o aumento da deformação, gerando um módulo de elasticidade tangente negativo e, no programa *SAP2000*, ocasionando a não convergência no processo iterativo (SCHWETZ, 2011). A solução encontrada por Schwetz (2011), no desenvolvimento de seu doutorado, foi transformar a parte descendente em horizontal, até a deformação específica de 0,2% (Figura 46).

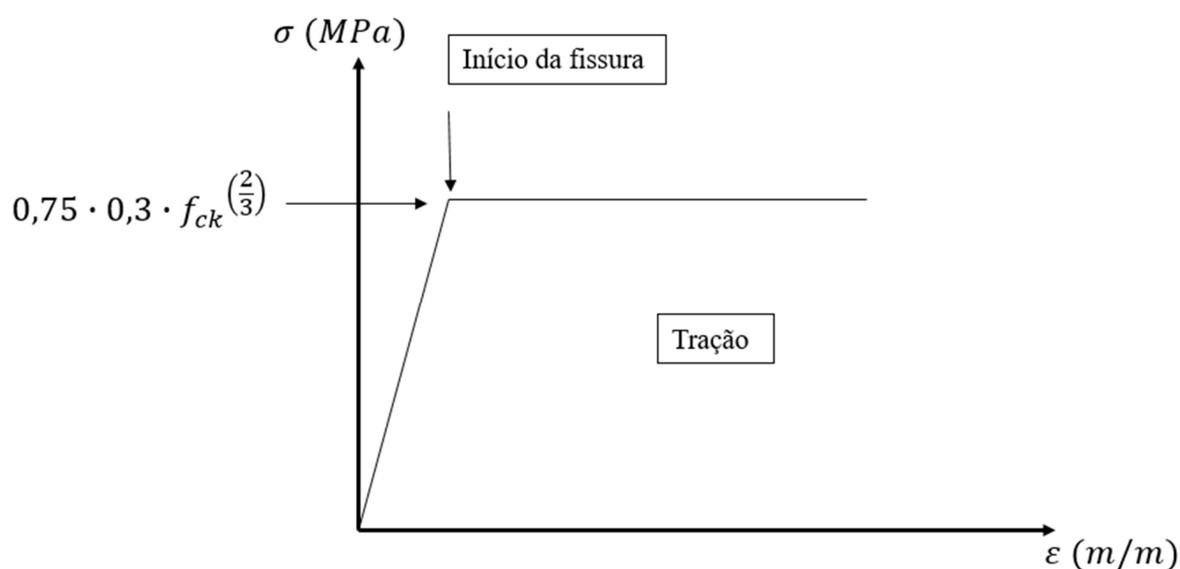
Figura 46 – Diagrama tensão-deformação do concreto adaptado por Schwetz (2011).



Fonte: adaptado de Schwetz (2011).

Desta forma, o programa converge, porém, a estrutura passa a apresentar uma rigidez maior que a real. Para contornar o problema e simular adequadamente o efeito *tension stiffening*, a autora realiza várias simulações para tentar determinar uma porcentagem de redução da tensão de início da fissuração no concreto. Após várias análises, a autora decidiu que considerar 75% da resistência máxima à tração seria adequado aos seus estudos. A Figura 47, representa o modelo adotado pela pesquisadora.

Figura 47 – Diagrama tensão-deformação na tração adotado por Schwetz (2011).



Fonte: o autor.

Neste trabalho, na análise não linear, observa-se o mesmo problema de convergência relatado por Schwetz (2011). Como nenhuma das tentativas de solucionar o problema foram eficazes. Optou-se, neste trabalho, por seguir a mesma alternativa seguida por Schwetz (2011). Apresenta-se tal estudo no item 5.2.7.

A geometria do modelo, as condições de apoio e as configurações de resistência são dados exigidos pelos programas computacionais ao realizarem uma análise numérica. Para que os resultados gerados sejam precisos é necessário que os dados de entrada também o sejam. Uma forma de obter esses dados é por meio de ensaios. Assim, no próximo tópico, busca-se determinar quais são os parâmetros de modelagem que melhor representam as lajes em estudo.

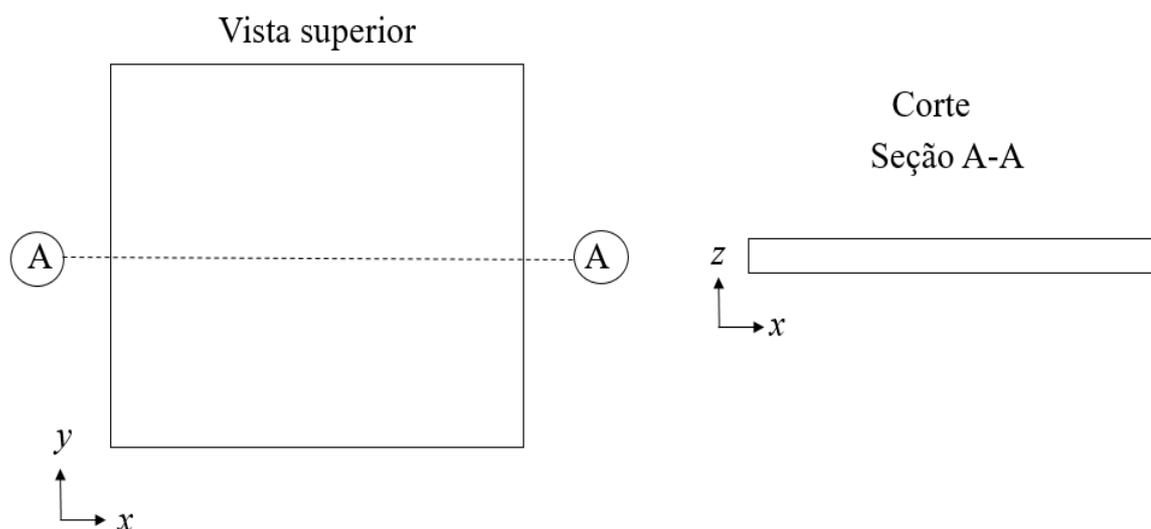
5.2.1 Calibração do modelo 1

Apresenta-se a calibração dos modelos numéricos com base nos dados obtidos experimentalmente. Inicia-se pela calibração do modelo por analogia de grelhas e pela determinação da configuração das condições de apoio.

5.2.2 Configuração das condições de apoio para o modelo 1

Construíram-se os modelos experimentais para a condição de apoio do primeiro gênero. Impedindo-se o deslocamento no eixo z . Para modelagem computacional, referenciam-se os eixos conforme apresentado na Figura 48.

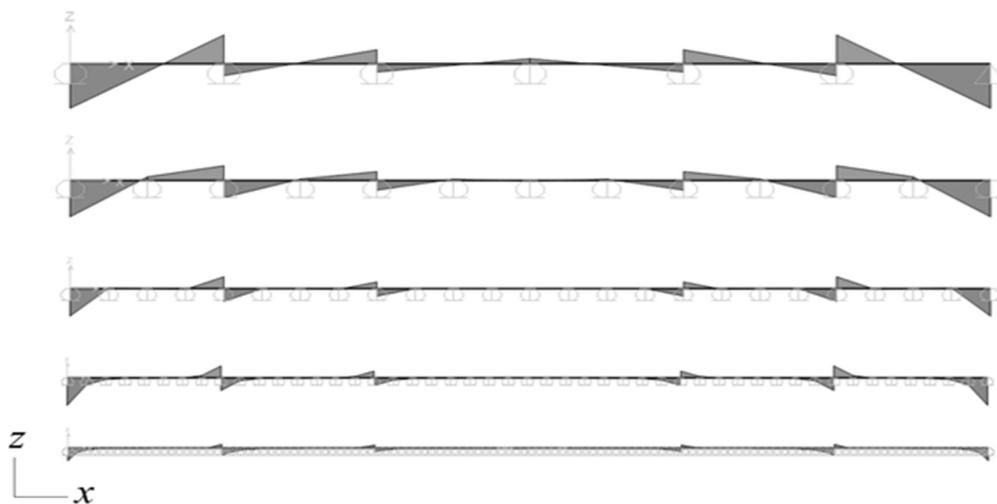
Figura 48 – Eixos adotados nas análises.



Fonte: o autor.

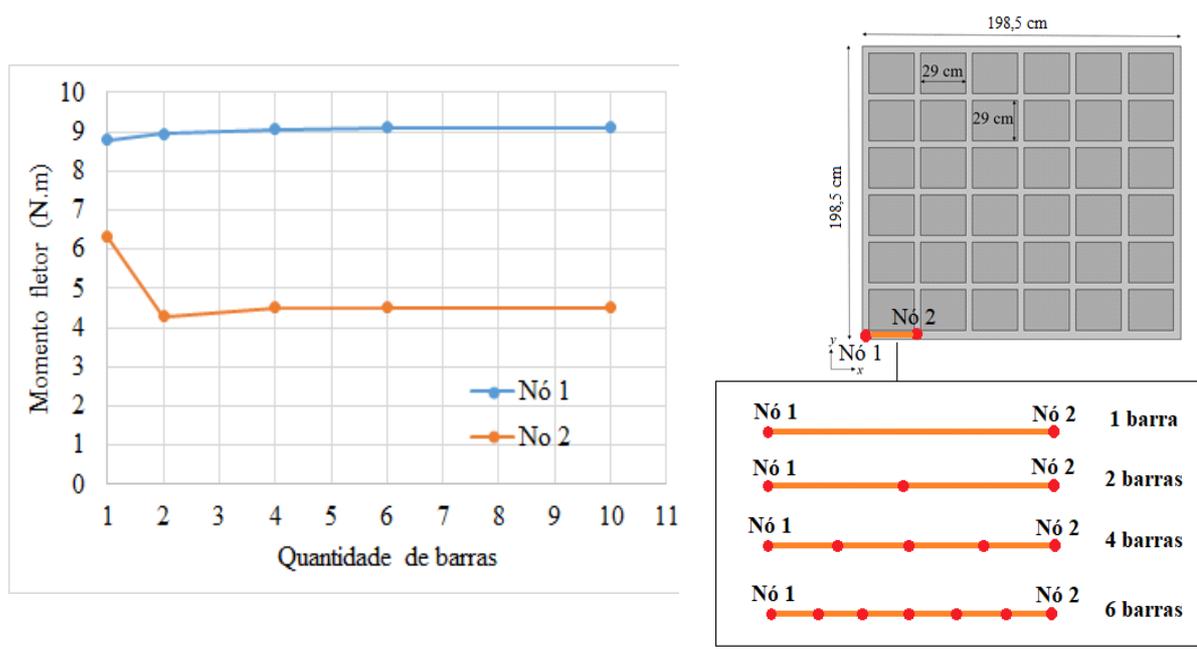
A laje experimental apresenta um apoio contínuo, realizou-se um estudo para verificar qual configuração melhor atenderia tal situação. Percebe-se que alterando a quantidade de apoios, altera-se o diagrama do momento fletor (Figura 49). O elemento linear que une os apoios, não podem rotacionar ao longo do seu eixo devido a viga de borda. Uma solução é particionar o elemento de borda e gerar vários apoios. Apresenta-se na Figura 50 um estudo de discretização para verificar a convergência dos resultados, conforme divide-se o elemento linear dos apoios. A partir de uma divisão em 6 elementos, há uma convergência nos resultados obtidos. Essa configuração pode ser visualizada na Figura 51.

Figura 49 – Diagrama do momento fletor.



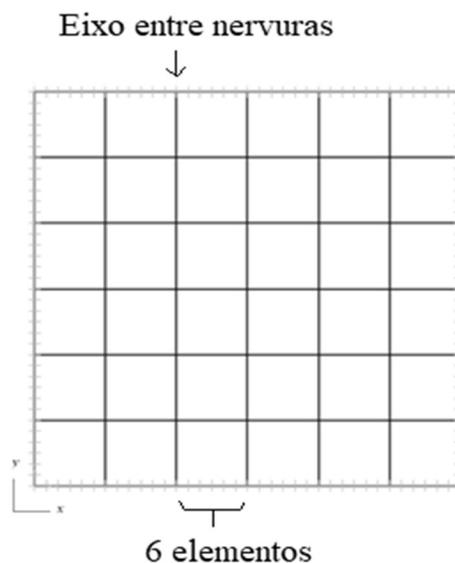
Fonte: o autor.

Figura 50 – Eixos adotados nas análises.



Fonte: o autor.

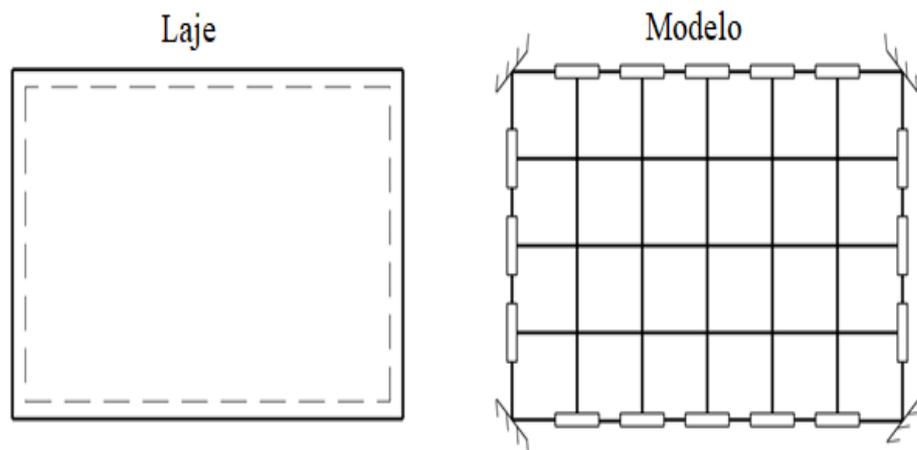
Figura 51 – Eixos adotados nas análises.



Fonte: o autor.

Outra solução é impedir a rotação que geram os momentos fletores nas bordas. Segundo Castro (2001), corresponde a adotar apoios cilíndricos nos nós dos apoios. Essa configuração pode ser observada na Figura 52. Essa solução gerou resultados condizentes com a solução da laje discretizada com 6 elementos de barra entre os eixos da nervura na região dos apoios (Figura 51). Comparou-se os resultados obtidos pelos dois modelos de configuração de apoio. A diferença máxima obtida foi de 0,93% para os deslocamentos no centro da laje e de 0,50% para a frequência. Assim, devido a sua facilidade de implementação, impedir a rotação nos apoios foi a solução adotada neste trabalho.

Figura 52 – Laje com borda simplesmente apoiada.



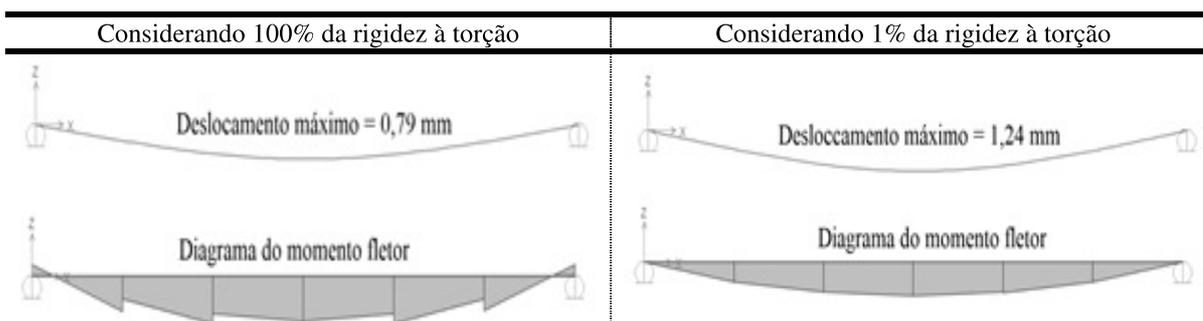
Fonte: Adaptado de Castro (2001).

5.2.3 Parâmetros de análise do modelo 1

Idealizou-se o modelo 1 por elementos de barras por analogia de grelhas, nessa situação, cada nó do elemento apresenta liberdade de rotação, gerando torção e flexão nos elementos de barra (rotação nos eixos x e y). Devido ao equilíbrio dos esforços, a torção influencia diretamente nos valores obtidos dos momentos fletores e deslocamentos.

Considerando a rigidez à torção com seu valor integral, o diagrama do momento fletor apresenta pontos de descontinuidade e apresenta deslocamentos menores, ao passo que a desconsideração da rigidez à torção gera um diagrama contínuo com máximo valor para o momento fletor no centro da laje. A flecha da laje também apresenta valores maiores (Figura 53).

Figura 53 – Influência da rigidez à torção.



Fonte: o autor.

Objetiva-se, com base nos dados experimentais, verificar qual consideração da rigidez à torção nos modelos numéricos fornece resultados condizentes com os valores obtidos experimentalmente.

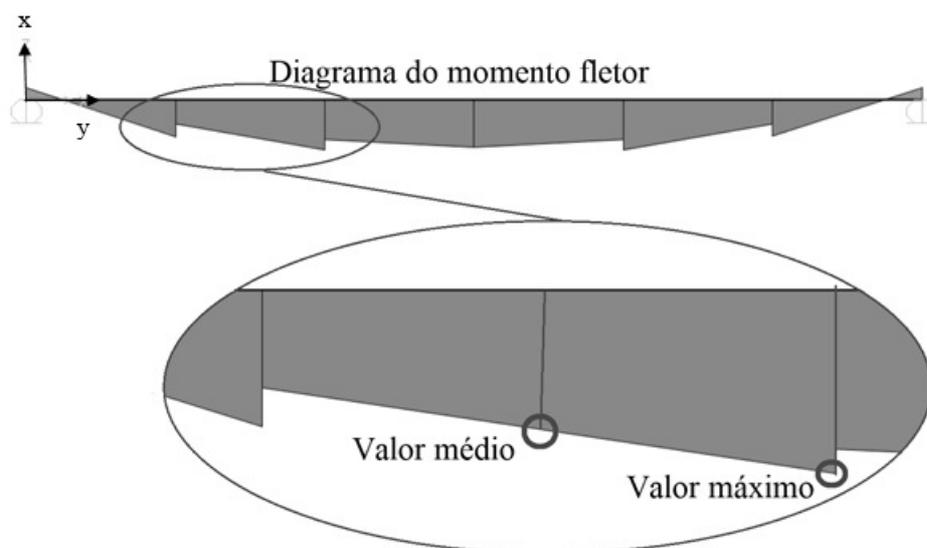
Para tal, realizou-se a análise linear e não linear. Na primeira, a carga é aplicada considerando que a rigidez da estrutura não é modificada. A análise não linear considerando a não linearidade física do concreto armado, a carga total é dividida em partes (recomenda-se pelo menos 10 partes) e a cada aplicação de carga, verificam-se os momentos fletores de serviço, caso sejam maiores que o momento de fissuração, corrige-se o momento de inércia utilizando na Equação (36). Trata-se de uma análise incremental.

Dentro do ciclo de carga, a rigidez à flexão não é alterada (análise linear), essa alteração ocorre entre os ciclos. Assim quanto maior a discretização da carga (maior número de ciclos), tende-se a melhor os resultados obtidos na análise. Neste trabalho o carregamento

aplicado foi dividido entre 10 e 20 partes iguais e o momento de inércia da seção de cada elemento é corrigido a cada aplicação de carga.

Na análise não linear, verificou-se qual o índice (n) da Equação (36) ($n=3$ ou $n=4$) apresenta melhor correlação com os dados experimentais e se o momento atuante obtido do diagrama do momento fletor deve ser adotado como o máximo valor ou o valor médio (Figura 54).

Figura 54 – Diagrama do momento fletor de uma laje nervurada.



Fonte: o autor.

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos.

5.2.4 Análise numérica do modelo 1

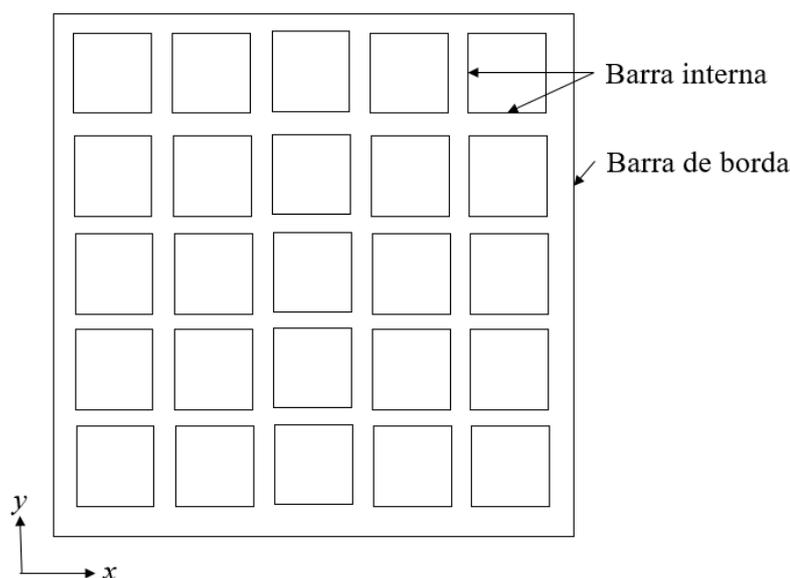
Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), análises não lineares são permitidas para verificações nos estados-limites últimos e de serviço e orienta que modelos de grelhas podem reduzir a rigidez à torção nas vigas, devido a fissuração, ao valor de 15% da rigidez elástica. Assim, para cada análise, são consideradas três configurações de rigidez à torção:

- Configuração 1 (C1): consideração de 100 % da rigidez à torção nas barras internas e de borda;
- Configuração 2 (C2): consideração de 100 % da rigidez à torção nas barras internas e 15% nas da borda; e

- Configuração 3 (C3): consideração de 15 % da rigidez à torção nas barras internas e de borda.

Apesar das lajes experimentais serem apoiadas sobre as vigas e sem ligação estrutural, considera-se que as nervuras localizadas na borda (barra de borda) (Figura 55) da laje façam essa função. A rigidez à torção é calculada pela Equação (21).

Figura 55 – Definição das barras: interna e borda.



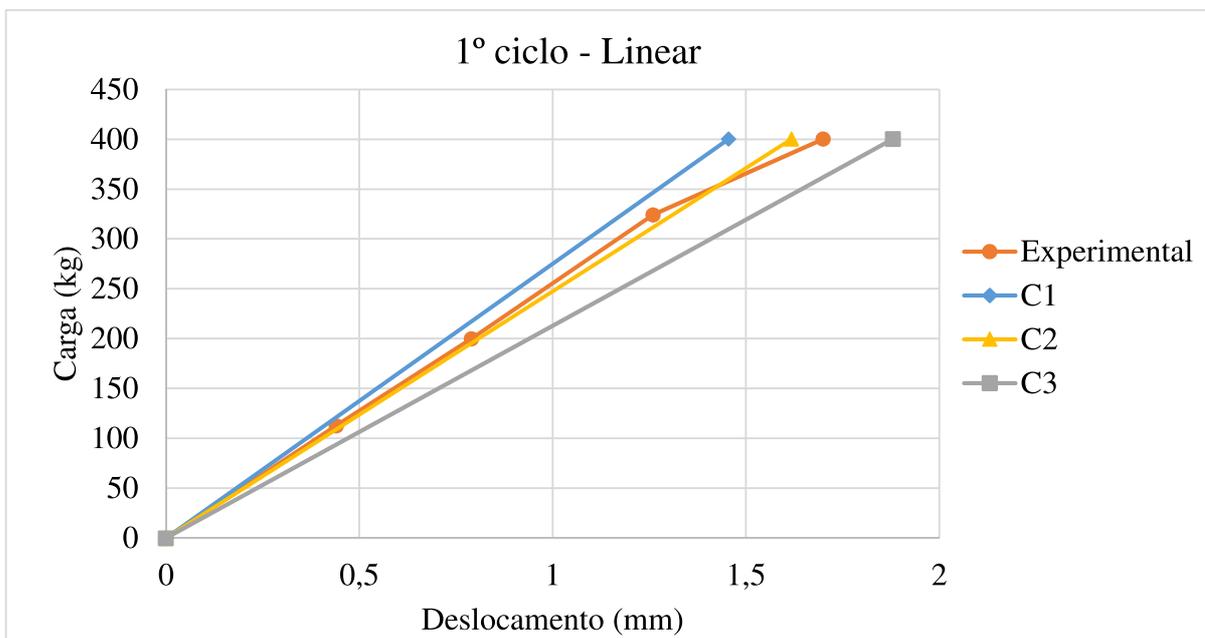
Fonte: o autor.

- Laje L1

Apresentam-se os resultados obtidos das análises considerando as diversas configurações de rigidez à torção (C1, C2 e C3), combinadas com a variação do índice ($n=3$ e $n=4$) e da forma de consideração do momento fletor na seção crítica (momento fletor com valor médio ou valor máximo) na Equação (36). A estrutura é analisada de forma linear, sem alteração do momento de inércia nas seções das barras, e de forma não linear, neste caso, há alteração do momento de inércia das seções, à medida que as barras atingem o momento de fissuração. O valor do momento de inércia é corrigido, como já comentado, utilizando a Equação (36).

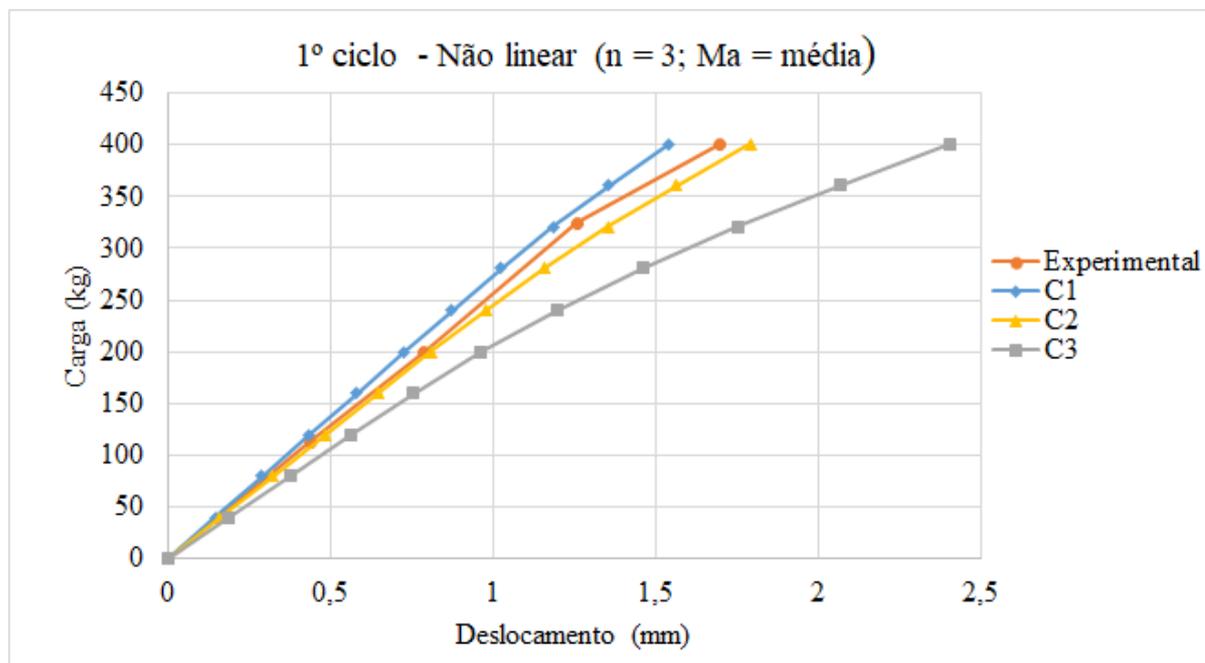
Realizou-se a análise não linear já no primeiro ciclo de carga, pois em uma análise preliminar computacional, verificou-se que o valor do momento de serviço supera o valor do momento de fissuração. Os valores dos deslocamentos são obtidos no centro da laje e apresentados da Figura 56 até a Figura 60.

Figura 56 – Comparação (L1; 1º ciclo; e linear).



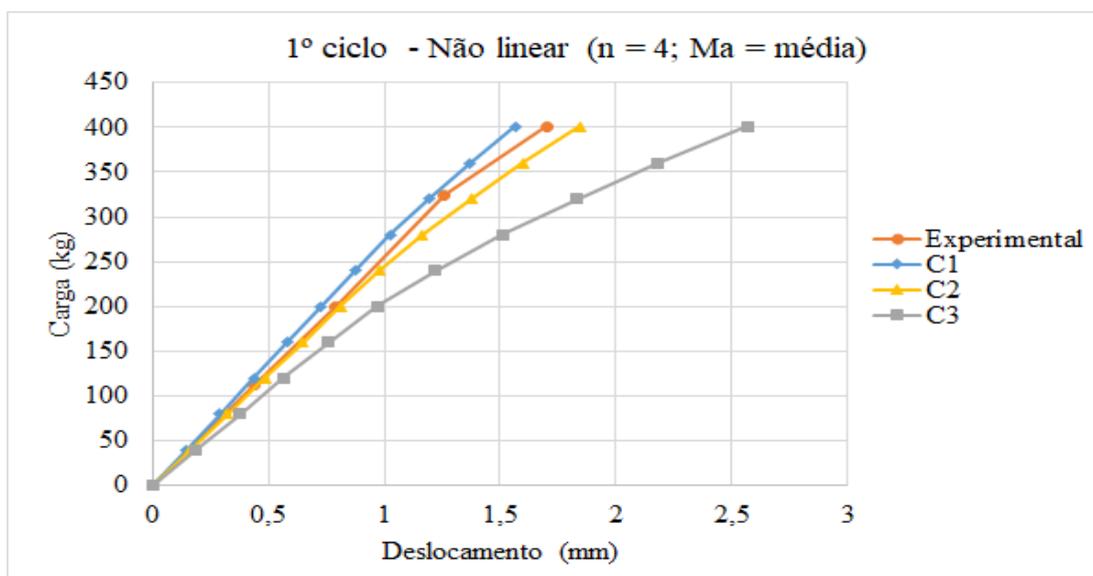
Fonte: o autor

Figura 57 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).



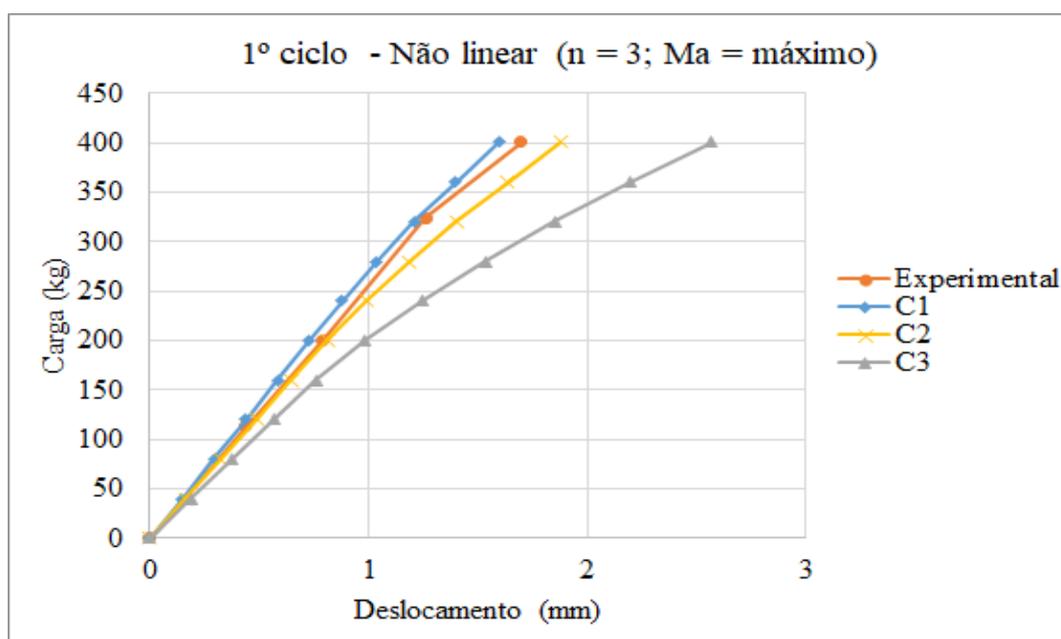
Fonte: O autor.

Figura 58 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).



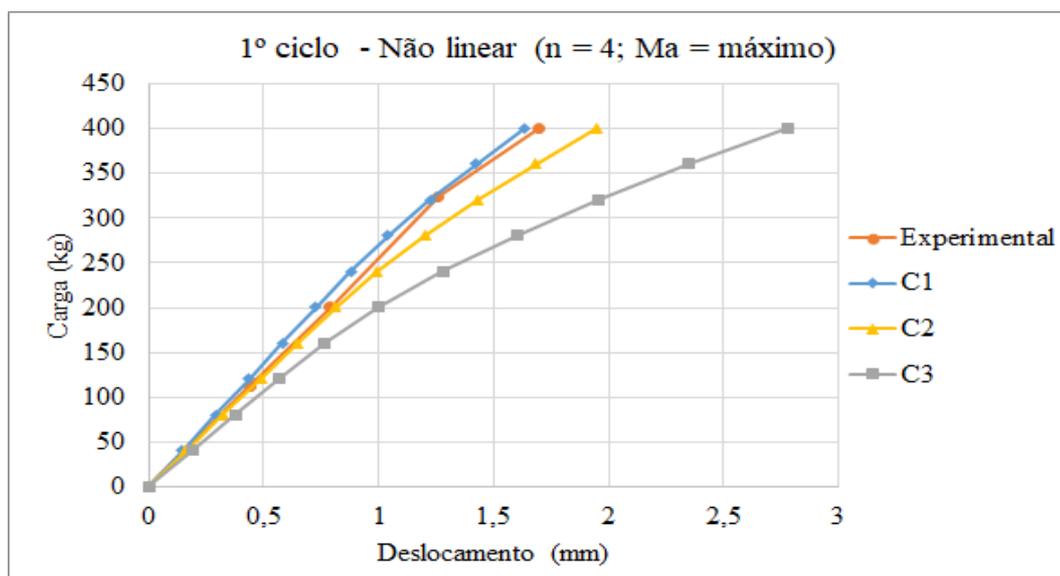
Fonte: o autor.

Figura 59 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).



Fonte: o autor

Figura 60 – Comparação (L1; 1º ciclo; não linear; n=4; e M_a = máximo).



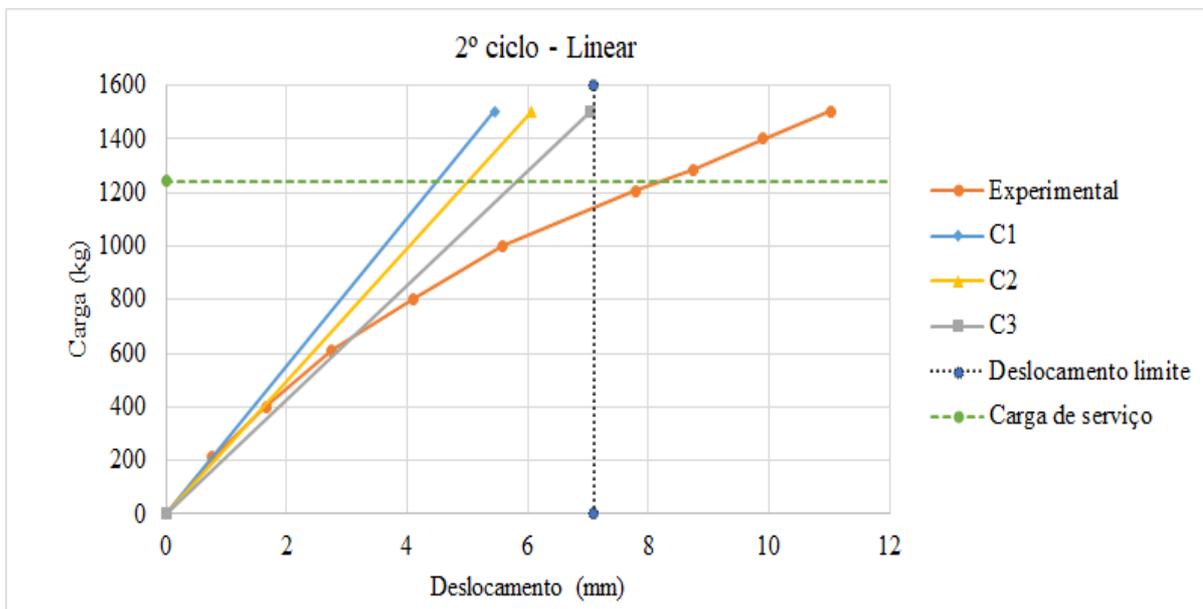
Fonte: o autor

A variação do índice ($n = 3$ e $n = 4$) e da escolha do momento fletor atuante ($M_a = \text{valor médio}$ e $M_a = \text{valor máximo}$) não alterou significativamente os resultados, uma vez que o momento de fissuração só foi atingido ao final do ciclo de cargas, ponto em que o comportamento da estrutura inicia o comportamento não linear.

Na análise não linear, os dados experimentais apresentam um comportamento intermediário entre o caso C1 e C2. O modelo com maior similaridade com os dados experimentais apresenta configuração C1, índice igual a 4 e adotando momento máximo na barra na equação da inércia equivalente. Na análise linear, a configuração C2 apresentou melhores aproximações com os dados experimentais. Destaca-se que o limite para deslocamentos visíveis em elementos estruturais não foi atingido no primeiro ciclo de cargas, limite esse normalizado na NBR 6118 (ABNT, 2014).

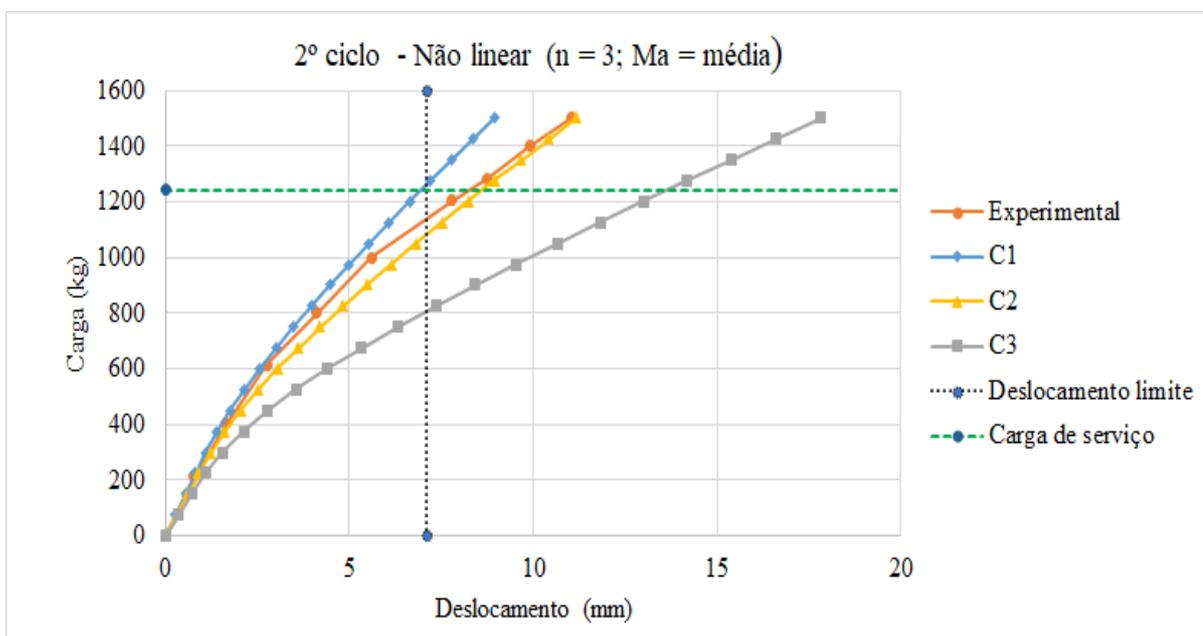
Realizou-se a mesma análise na laje L1 para o segundo ciclo de carga. Considerou-se que o primeiro ciclo de carga não gerou danos permanentes na laje, pois a frequência natural experimental praticamente não foi alterada entre o primeiro e o segundo ciclos de carga na laje L1. A frequência está diretamente relacionada com a rigidez, assim, se a frequência não foi alterada, adota-se que a rigidez também não. Desta forma, considera-se que a laje inicia o segundo ciclo de cargas na mesma configuração do primeiro ciclo. Os resultados são apresentados da Figura 61 até a Figura 65. Nos gráficos o deslocamento limite é apresentado para a aceitabilidade sensorial em razão da limitação visual e a carga de serviço é obtida da Tabela 16.

Figura 61 – Comparação (L1; 2º ciclo; linear).



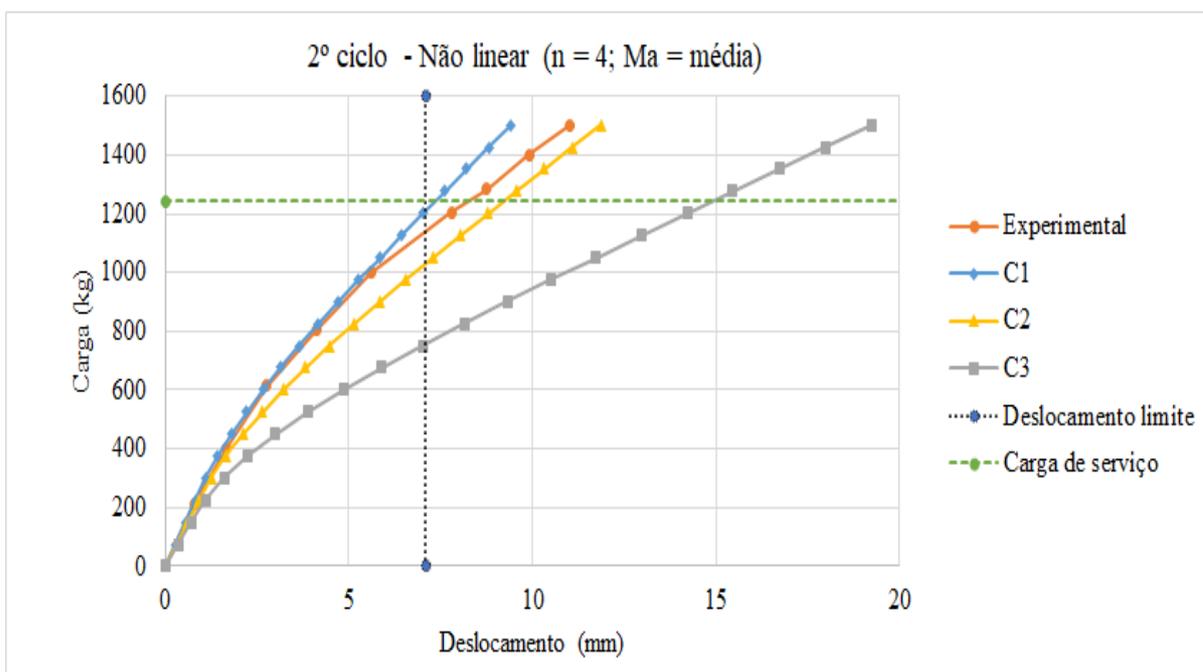
Fonte: o autor

Figura 62 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).



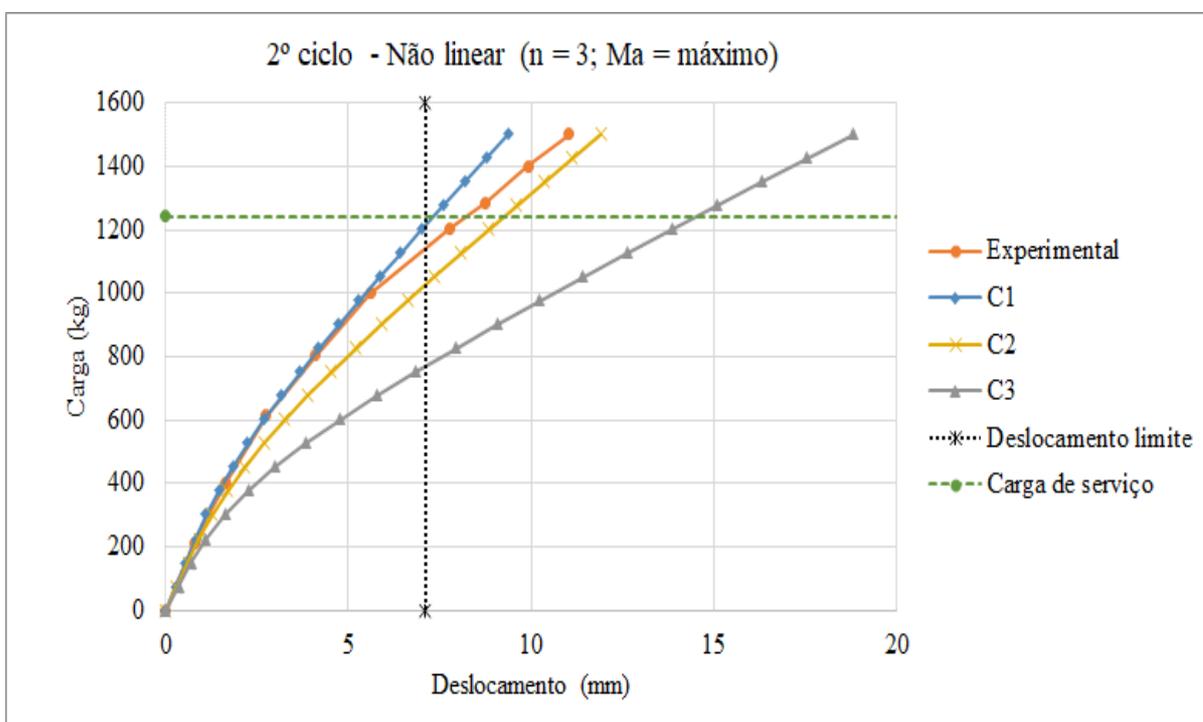
Fonte: o autor

Figura 63 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).



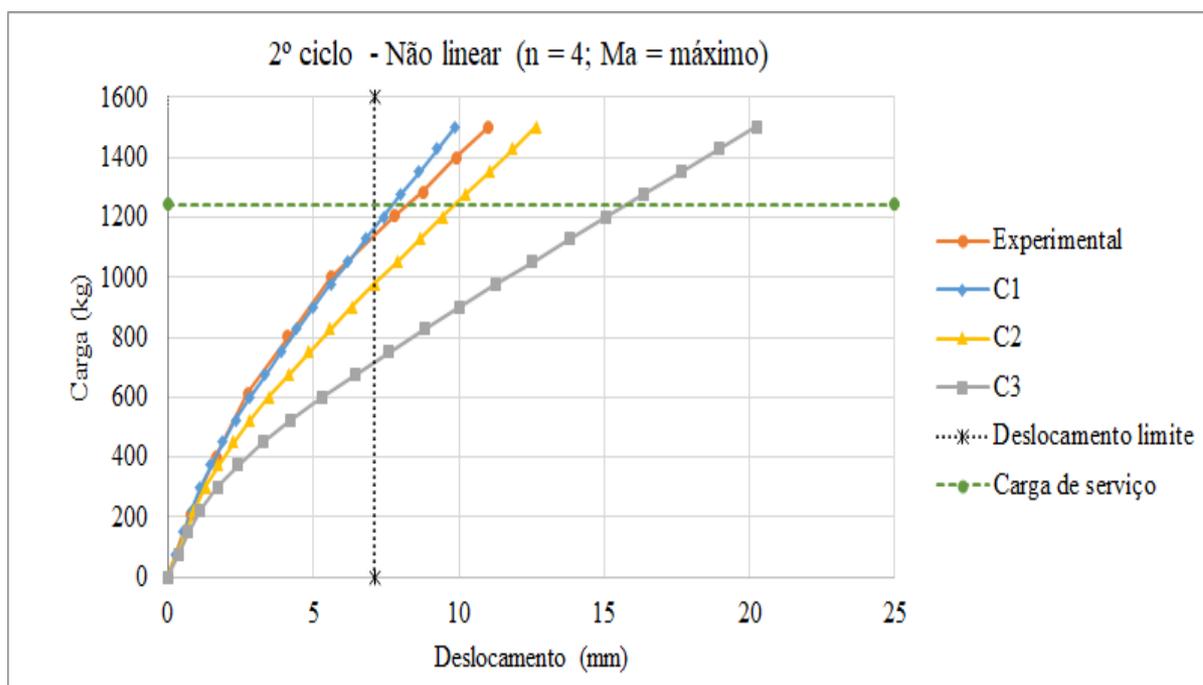
Fonte: o autor

Figura 64 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).



Fonte: o autor

Figura 65 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; $n=4$; e $Ma = \text{máximo}$).

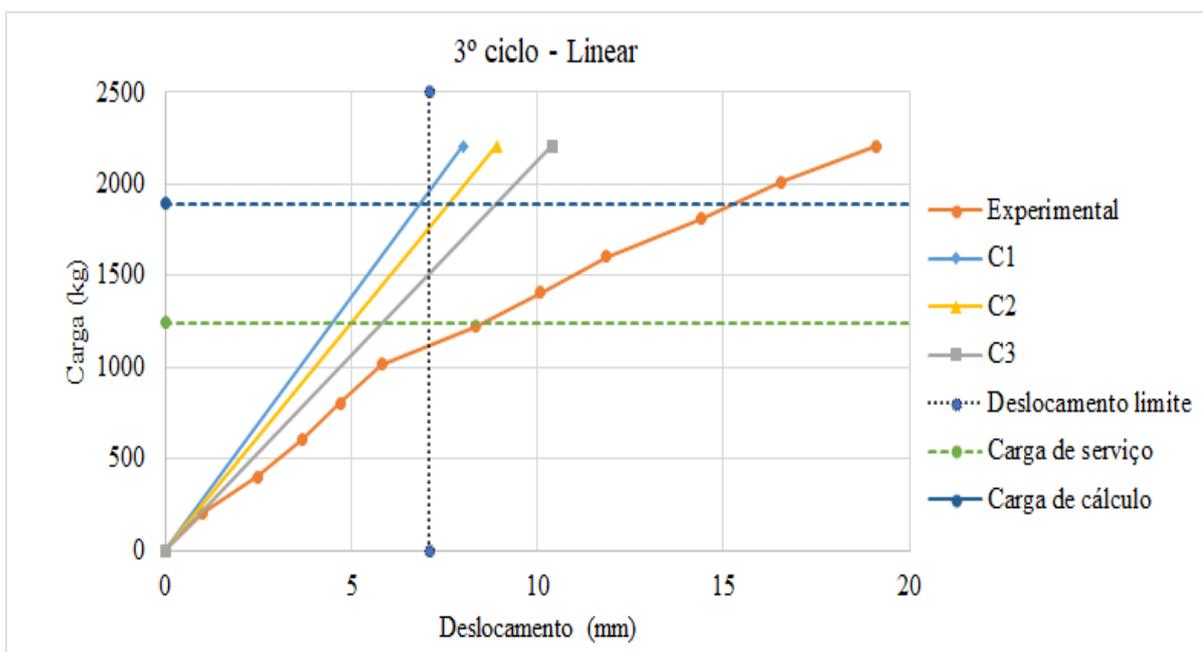


Fonte: o autor

A variação do índice (n) não alterou significativamente os resultados dos deslocamentos, assim como a variação da escolha do momento fletor de serviço, entre seu valor médio e máximo. Verifica-se que adotar o índice com valor igual a 3 e o momento de serviço em seu valor médio, gerou deslocamentos menores que a flecha imediata do modelo experimental.

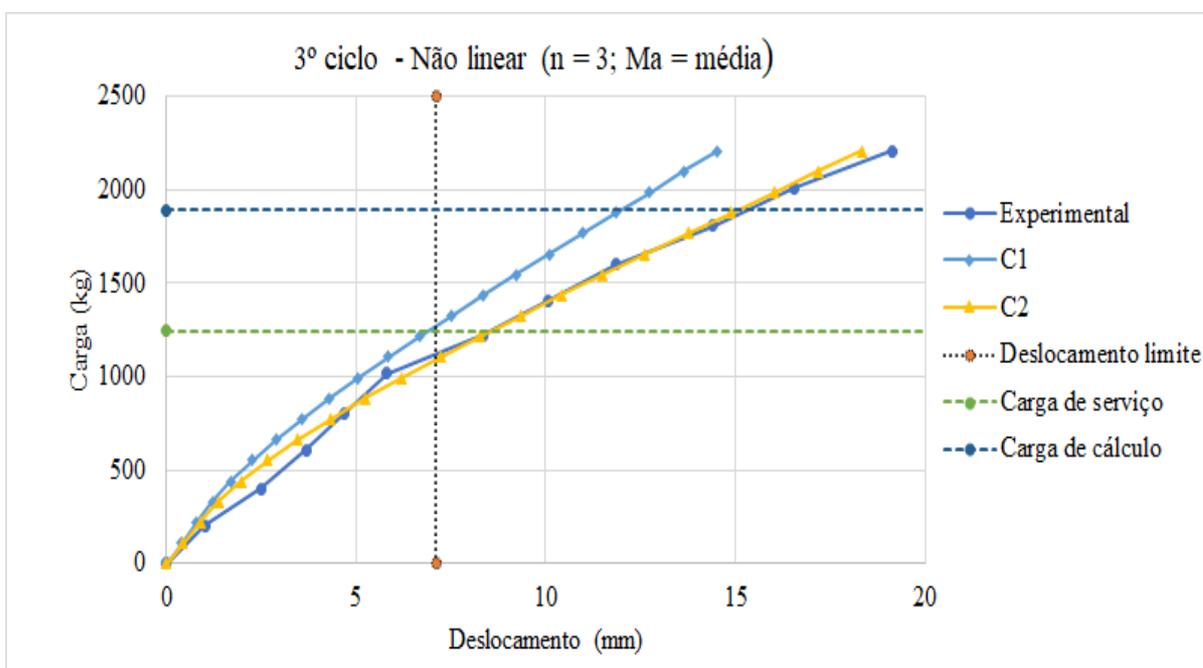
No geral, gerou-se os melhores resultados na configuração C1, para a análise não linear. Nessa configuração, com o índice igual a 4 e adotando o valor do momento de serviço em seu valor máximo, o modelo computacional conseguiu representar o comportamento da estrutura adequadamente até o limite dos deslocamentos para efeito visual. A análise linear, como esperado, não conseguiu representar o comportamento experimental para deslocamentos maiores. Os resultados da análise do terceiro ciclo de cargas são apresentados da Figura 66 a Figura 70.

Figura 66 – Comparação (L1; 3º ciclo; linear).



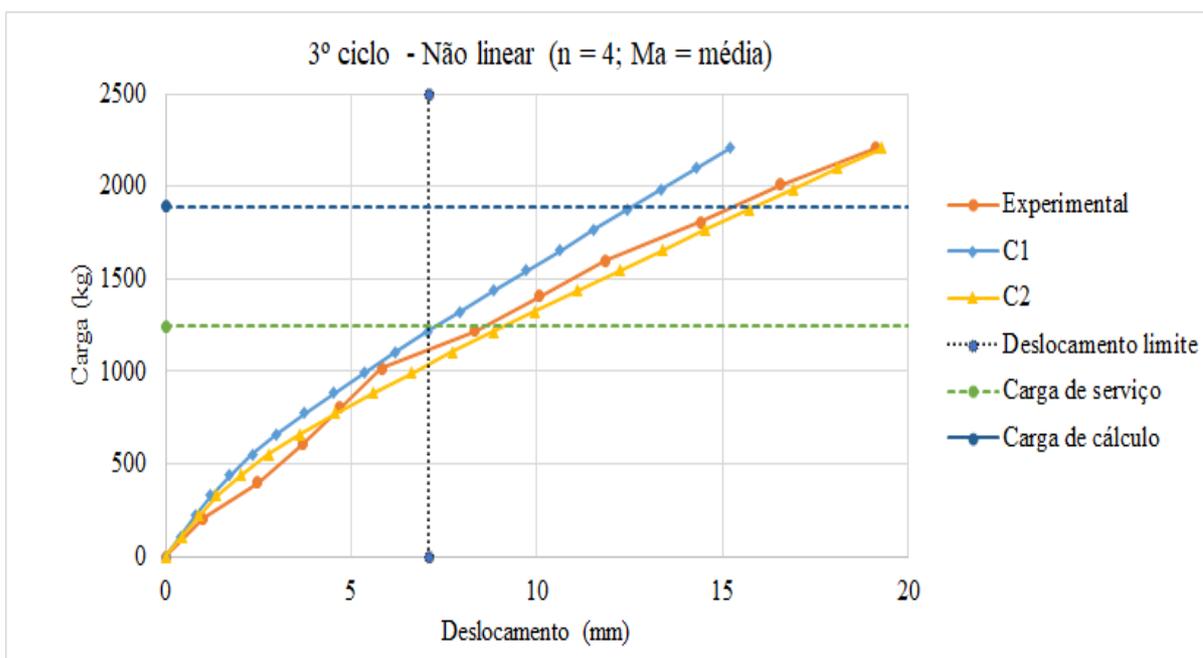
Fonte: o autor.

Figura 67 – Comparação (L1; 2º ciclo; não linear; n=3; e Ma = média).



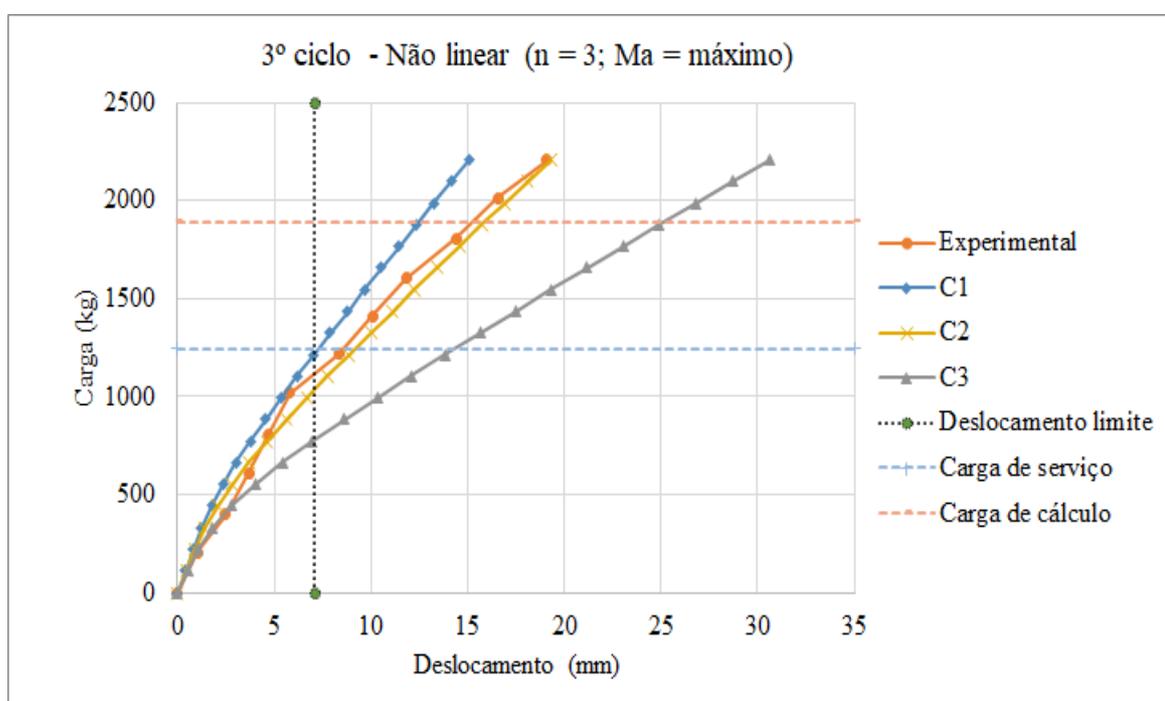
Fonte: o autor

Figura 68 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=4; e Ma = média).



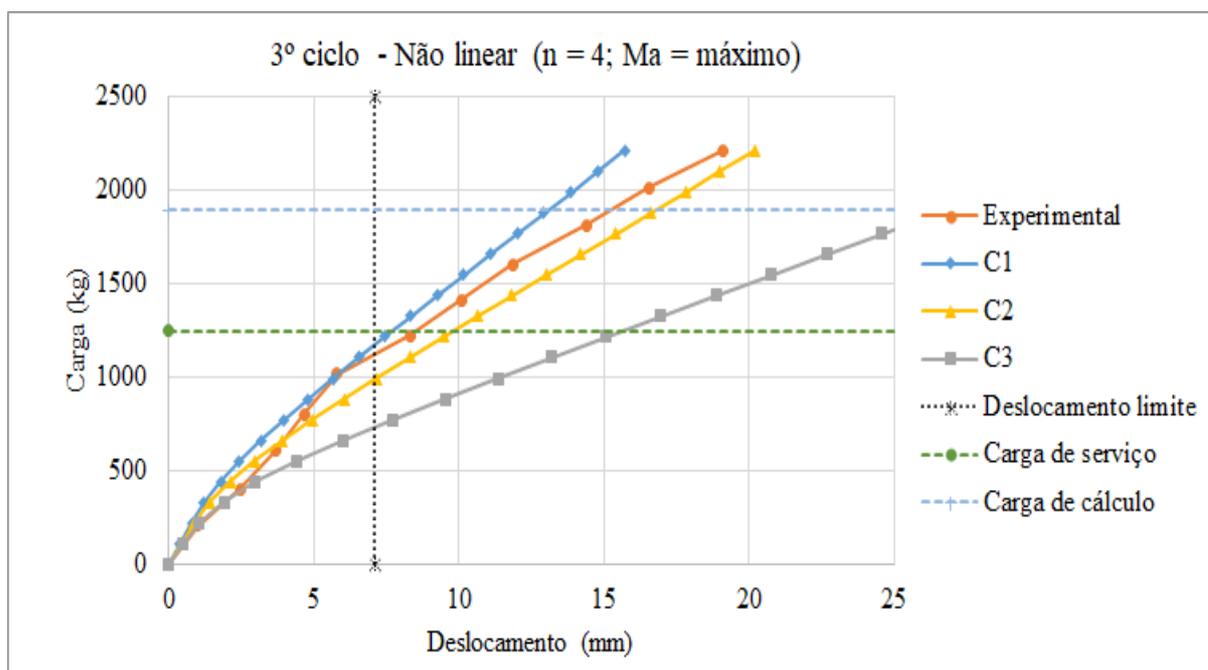
Fonte: o autor

Figura 69 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=3 e Ma = máximo).



Fonte: o autor.

Figura 70 – Comparação (L1; 3º ciclo; não linear; n=4; e Ma = máximo).



Fonte: o autor

No terceiro ciclo de carga, devido ao nível de fissuração da laje, o modelo C2 apresentou os melhores resultados em comparação com os dados experimentais. Assim como nas análises anteriores, a variação do expoente não gerou uma relação direta em aproximar os dados computacionais e experimentais, assim com a variação do momento fletor.

De uma maneira geral, para a análise não linear no estado limite de serviço, obteve-se resultados computacionais similares aos dados experimentais com a seguinte combinação: índice com valor 4; valor máximo do momento fletor; e considerar a rigidez à torção em seu valor integral. Destaca-se que neste trabalho adota-se o cálculo do momento de inércia à torção pela Equação (21).

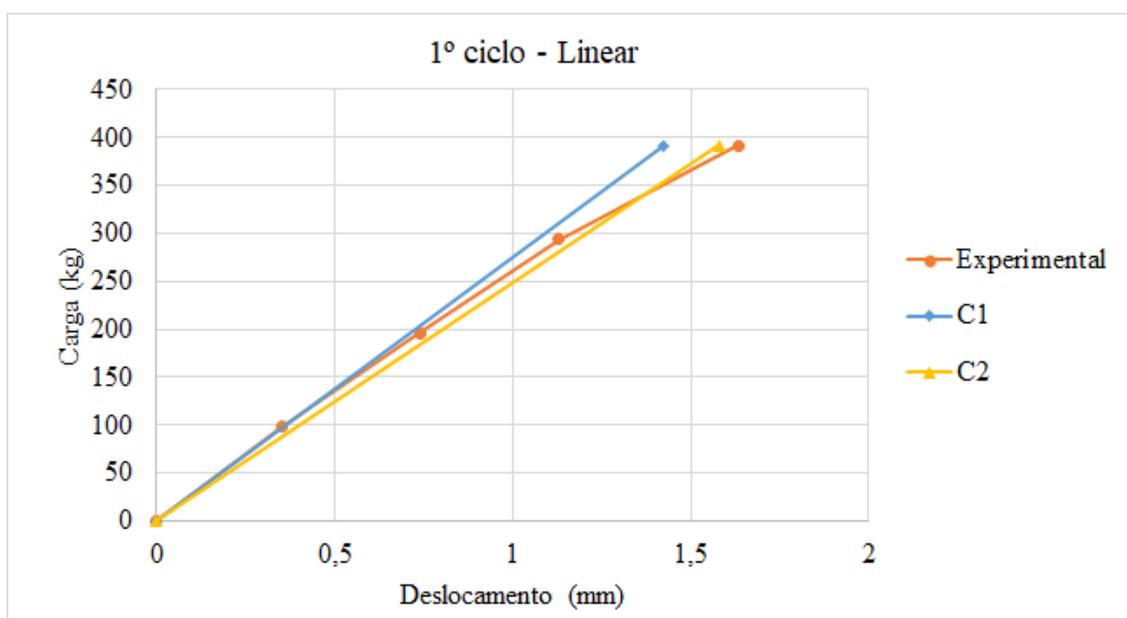
Para a análise linear, em situação de serviço, a consideração de 100 % da rigidez à torção nas barras internas e 15% nas da borda gerou similaridade com os dados experimentais para pequenas deformações, porém a medida que os deslocamentos aumentam essa configuração deixa de representar o comportamento da estrutura.

Para um elevado estado de fissuração (3º ciclo de carga), adotar a consideração de 100 % da rigidez à torção nas barras internas e 15% nas da borda gerou os melhores resultados, considerando a análise não linear simplificada. Pela análise dos gráficos, a análise não linear simplificada gerou os resultados mais próximos dos dados experimentais.

- Laje L2

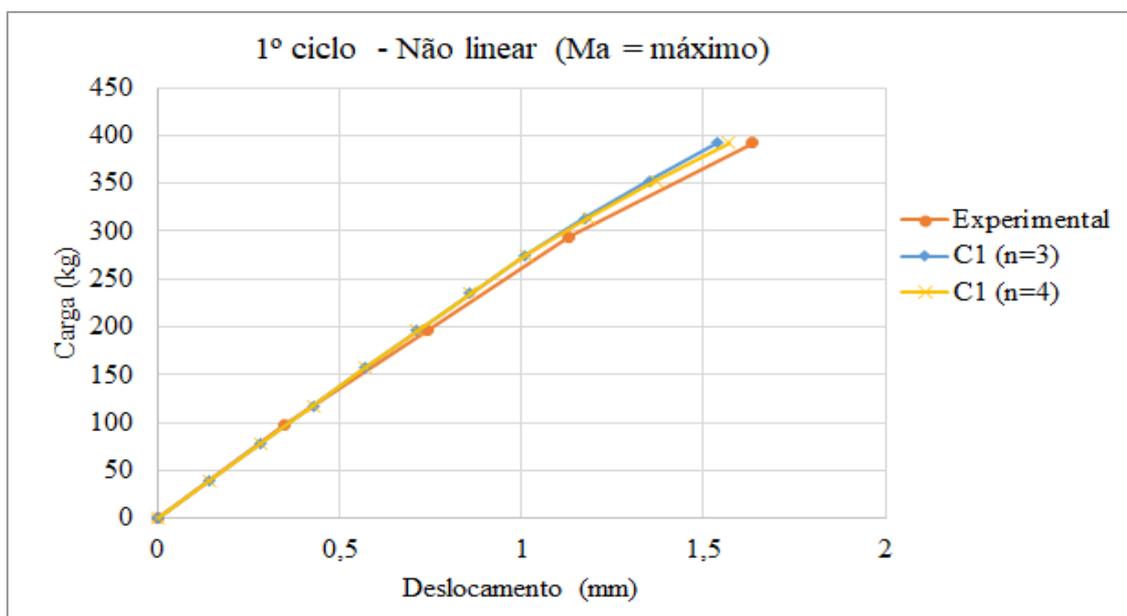
Despreza-se a adoção do momento de serviço em seu valor médio, uma vez que não gerou ganhos significativos nas análises. Descarta-se também o caso C3, considerar 15% da rigidez à torção na estrutura como um todo, pois não resultou em resultados coerentes com os dados experimentais. No primeiro e segundo ciclos de carga, também se despreza o caso C2, uma vez que ele só apresenta resultados coerentes no terceiro ciclo de carga, quando a estrutura está fissurada. Na análise linear, os casos C1 e C2 são analisados. Apresentam-se os resultados das análises da Figura 71 até a Figura 76.

Figura 71 – Comparação (L2; 1º ciclo; linear).



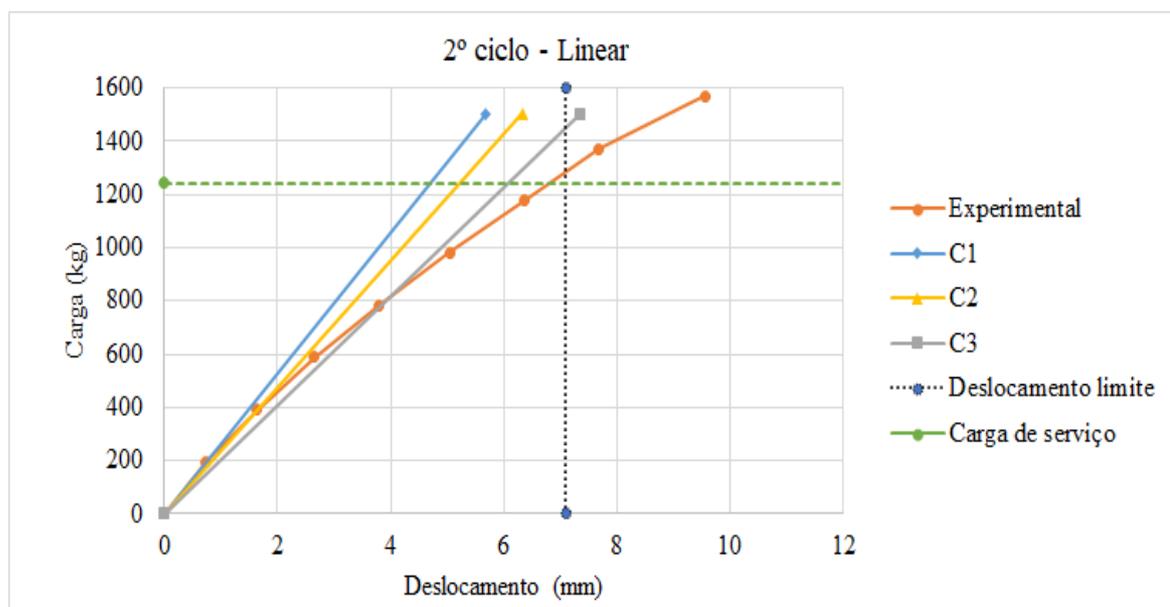
Fonte: o autor

Figura 72 – Comparação (L2; 1º ciclo; não linear; e $M_a = \text{máximo}$).



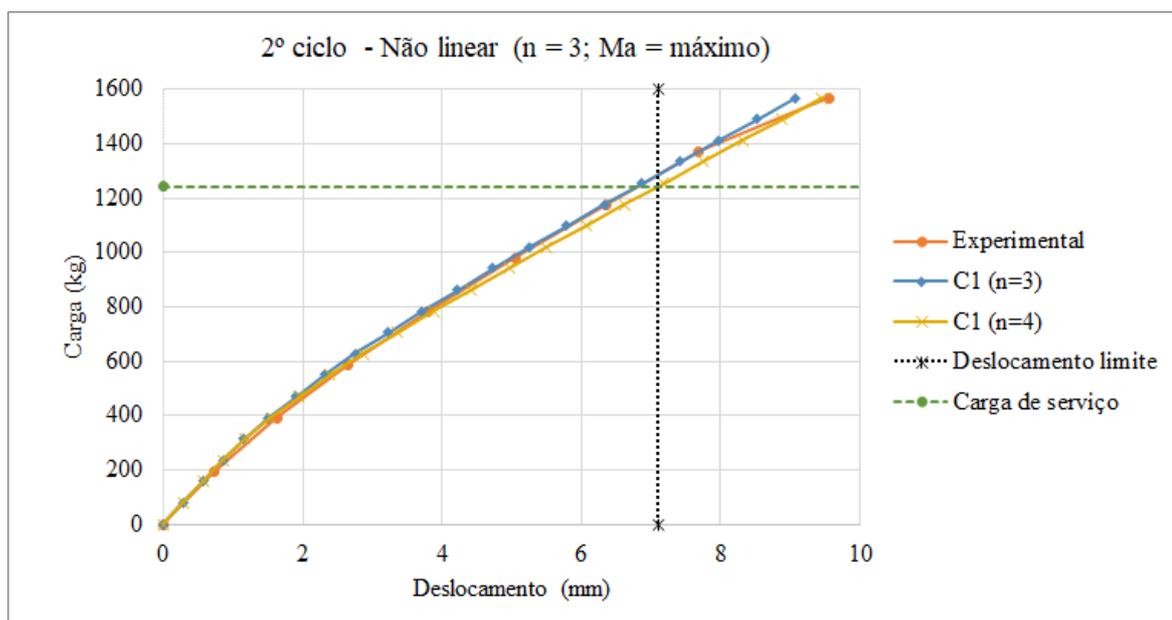
Fonte: o autor

Figura 73 – Comparação (L2; 2º ciclo; linear).



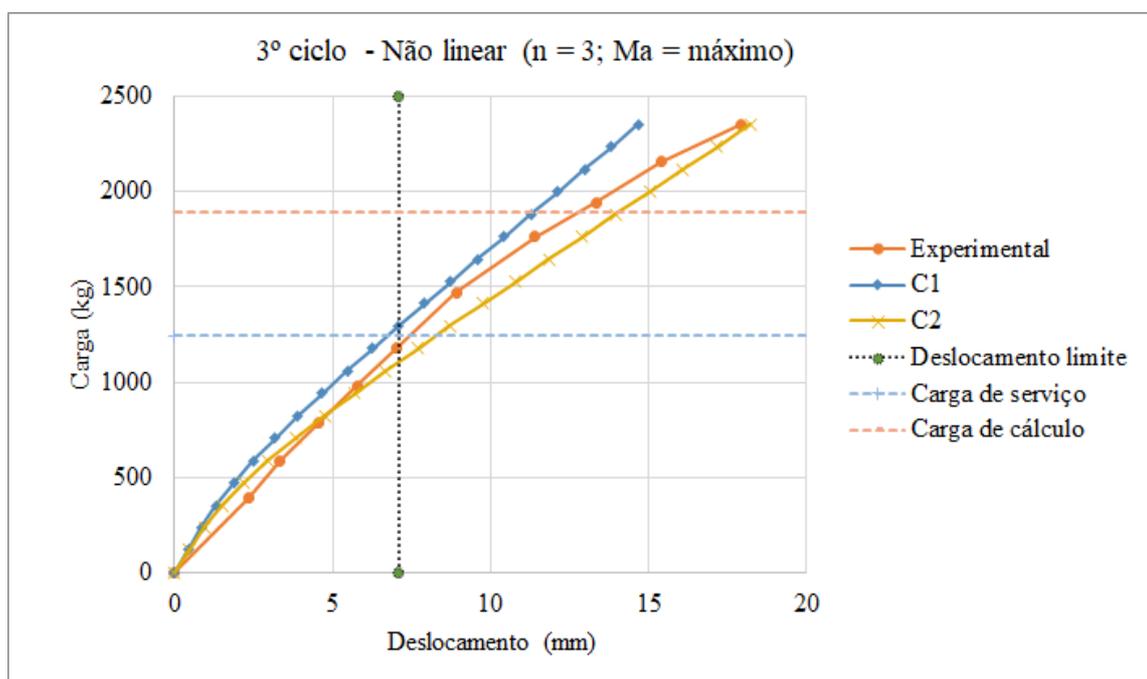
Fonte: o autor

Figura 74 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).



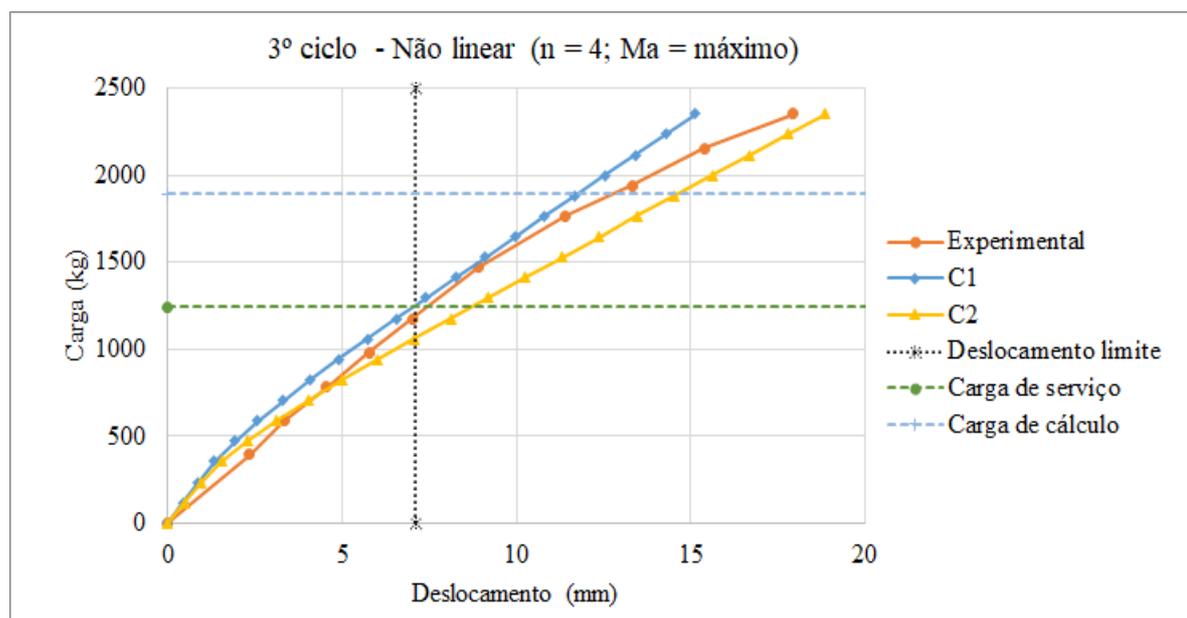
Fonte: o autor

Figura 75 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; n=3; e Ma = máximo).



Fonte: o autor

Figura 76 – Comparação (L2; 3º ciclo; não linear; $n=4$; e M_a = máximo).



Fonte: o autor

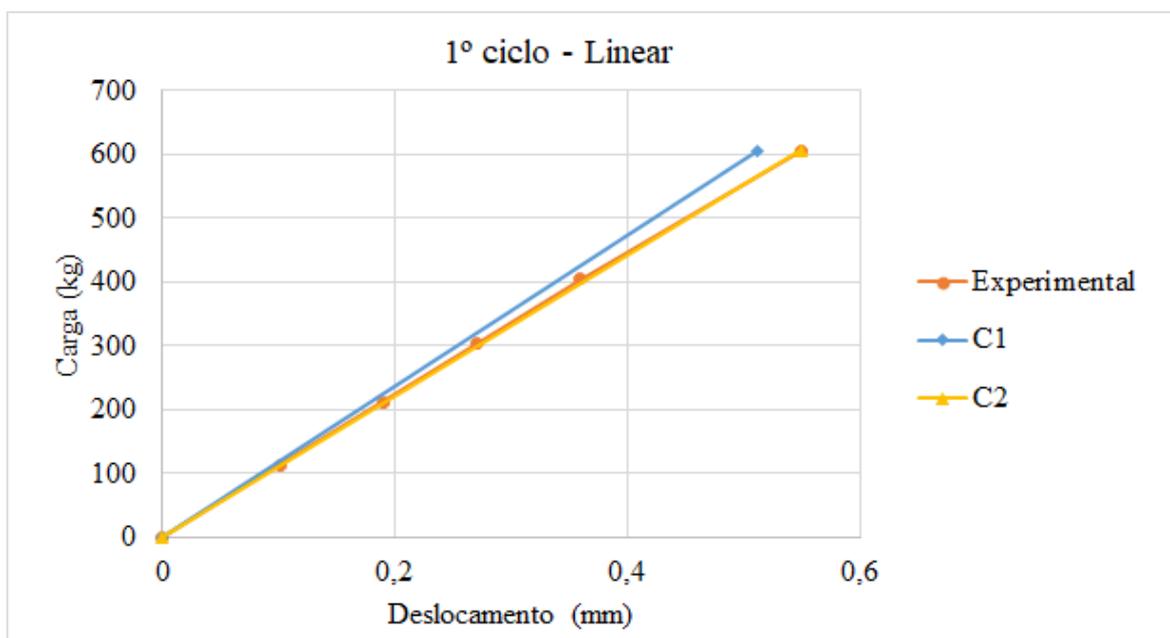
Para o primeiro e segundo ciclos de carga, a configuração C1 apresenta maior coerência com os dados experimentais. Já no terceiro ciclo, com o aumento da fissuração da laje, a configuração C2 melhor representa o comportamento da estrutura real. A análise linear, mesmo para deformações menores que o limitado por norma, gera resultados discrepantes dos dados experimentais. Somente no primeiro ciclo de cargas, a análise linear consegue representar o comportamento da laje experimental. Mais uma vez, a variação do índice (n) não gerou mudanças significativas na resposta da estrutura.

Todas as conclusões da laje L1 aplicam-se para a laje L2. Sugerindo-se na análise não linear no estado limite de serviço adotar o índice com valor 4, valor máximo do momento fletor e considerar a rigidez à torção em seu valor integral. Para um elevado estado de fissuração, considerar 15% da rigidez à torção nas bordas.

- Laje L3

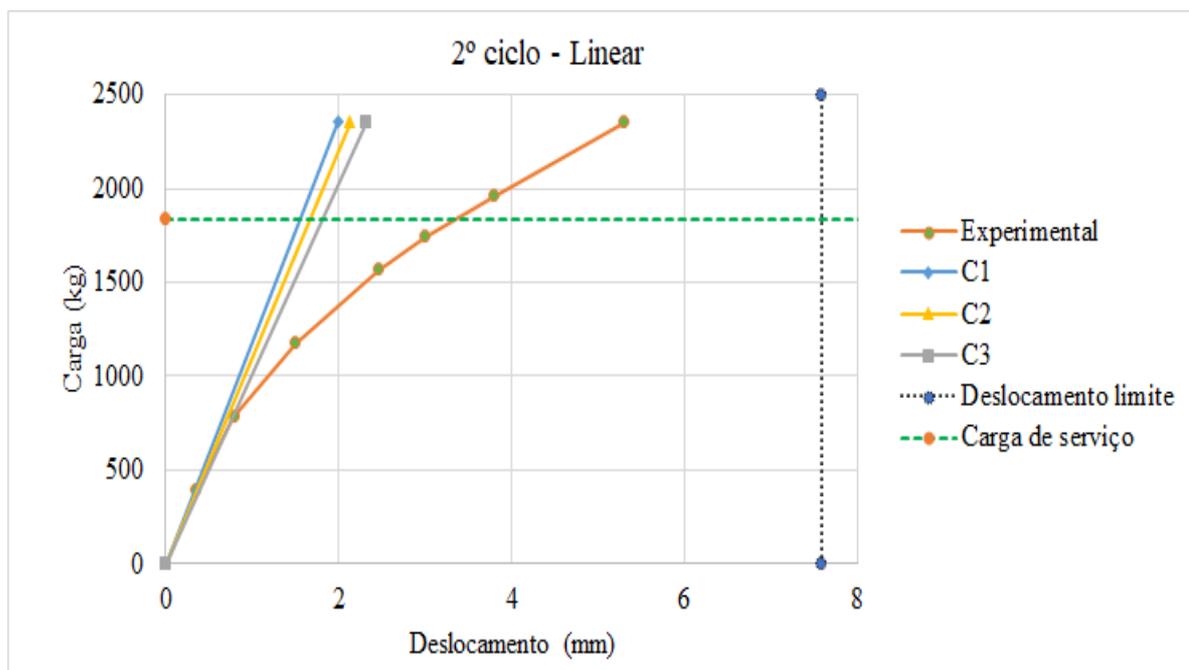
Para o primeiro ciclo de cargas, a laje L3 apresenta comportamento linear em todo o carregamento, ou seja, com base no modelo de grelhas, o momento de fissuração não é atingido. Assim, realiza-se somente a análise linear para o primeiro ciclo de carga. No segundo ciclo de cargas, analisam-se todas as configurações (C1, C2 e C3). Apresentam-se os resultados da Figura 77 até a Figura 80.

Figura 77 – Comparação (L3; 1º ciclo; linear).



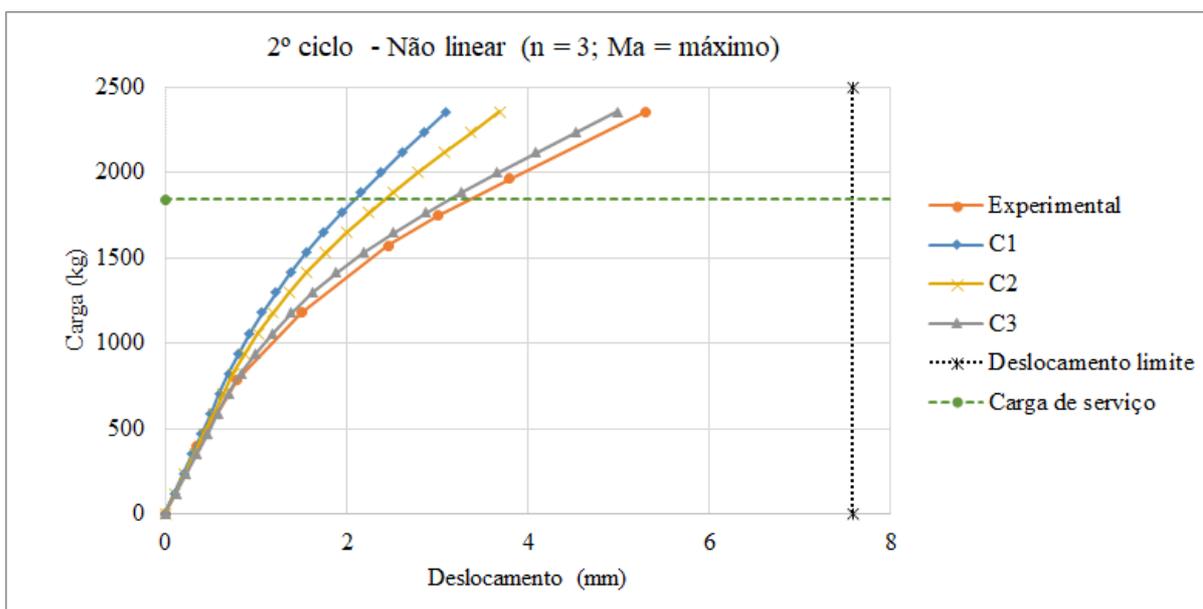
Fonte: o autor

Figura 78 – Comparação (L3; 2º ciclo; linear).



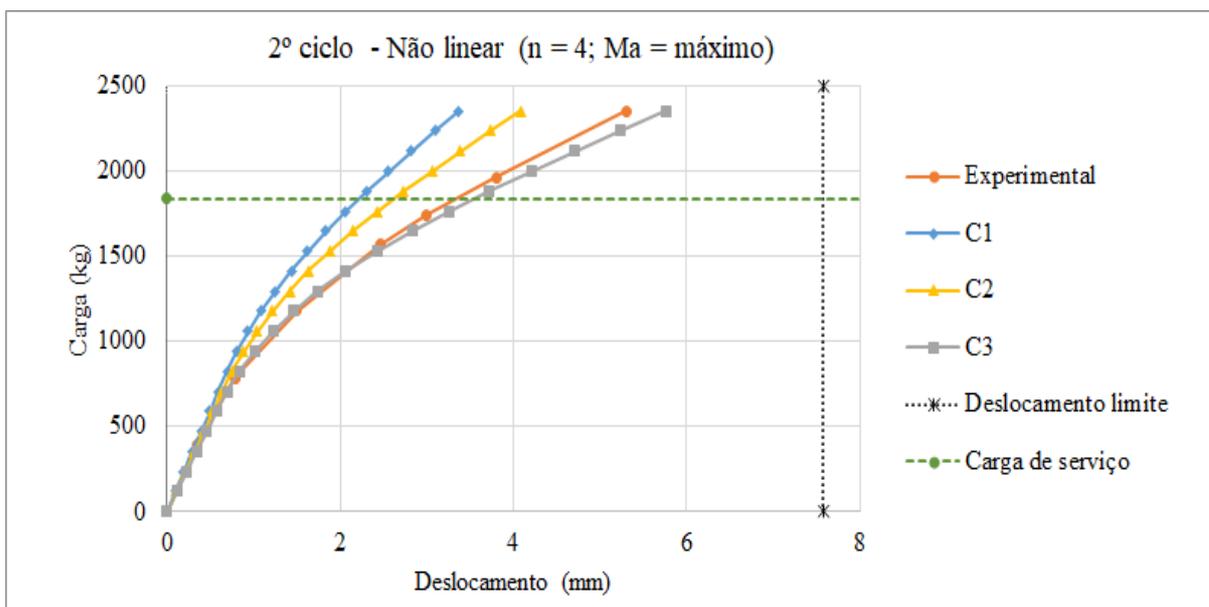
Fonte: o autor

Figura 79 – Comparação (L3; 2º ciclo; não linear; $n=3$; e $Ma = \text{máximo}$).



Fonte: o autor

Figura 80 – Comparação (L3; 2º ciclo; não linear; $n=4$; e $Ma = \text{máximo}$).



Fonte: o autor

A variação do índice, não gera grandes diferenças nos resultados obtidos da análise das lajes, porém recomenda-se adotar o índice com valor igual a 4, estando desta forma, a favor da segurança.

A análise linear apresenta coerência com os dados experimentais para pequenos deslocamentos, como é o caso do primeiro ciclo de cargas. No segundo ciclo de cargas, os

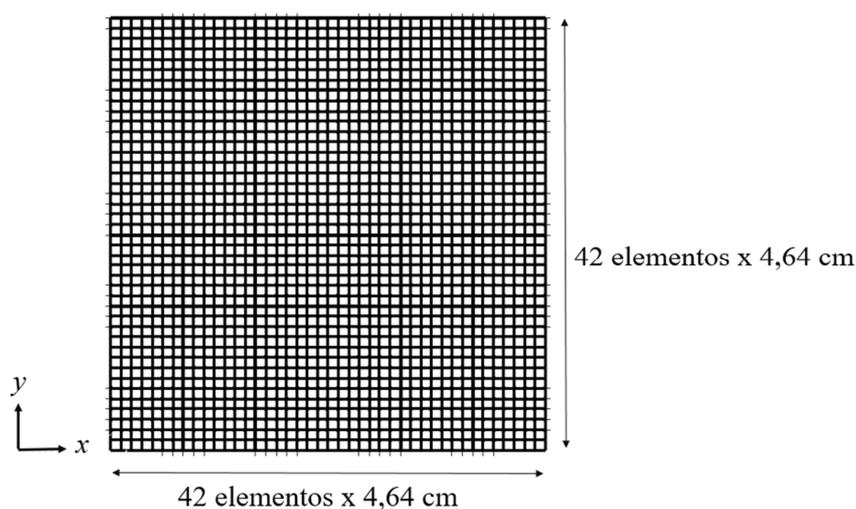
resultados não apresentam relação com os dados experimentais, mesmo para deslocamentos permitidos por norma.

Na análise não linear, o modelo C3 melhor representou o comportamento da laje experimental, isso mostra que o aumento da nervura gerou um comportamento diferente na laje. Com base nos dados experimentais, na situação com menor diferença entre a relação altura da nervura e altura da mesa, lajes L1 e L2, observa-se que a rigidez à torção deve ser considerada na representação da laje, ao passo que com o aumento dessa diferença (L3) a rigidez à torção pode ser desconsiderada. Esse fato pode explicar, em parte, o motivo pelo qual alguns autores chegaram a resultados tão diferentes com relação à consideração ou não da rigidez a torção nas análises por grelhas.

5.2.5 Calibração do modelo 2

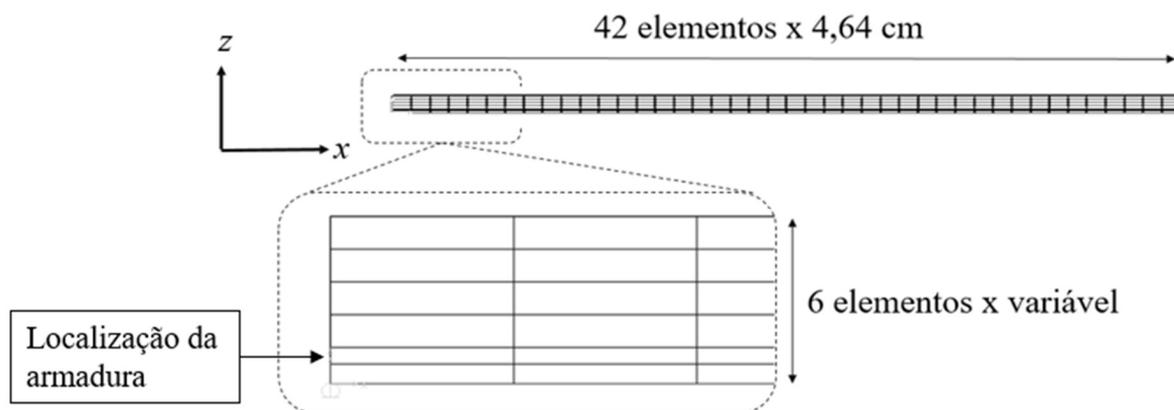
Calibra-se o modelo 2 com base no estudo experimental, visando obter a configuração que melhor representa o comportamento das estruturas experimentadas. Em um estudo de refinamento da malha, submeteu-se a laje L1 aos carregamentos do primeiro e segundo ciclos de carga. Analisou-se a convergência com relação aos deslocamentos no centro da laje. Com base no estudo, adotam-se 5.292 elementos na modelagem de cada laje, sendo 1.764 na mesa (Figura 81) e 3.528 nas nervuras. Cada nervura da laje possui 252 elementos (Figura 82), contabilizando 14 linhas de nervuras. O programa *SAP2000* gera a malha de forma automática, a critério do editor. Adota-se tal recurso neste trabalho.

Figura 81 – Malha da mesa do modelo 2.



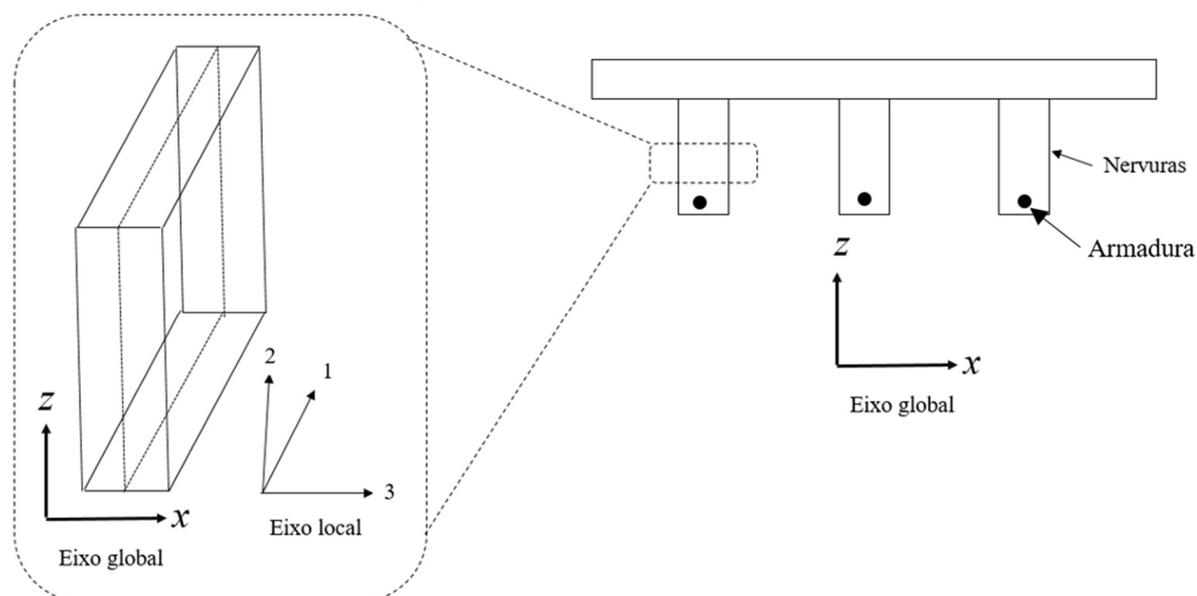
Fonte: O autor.

Figura 82 – Malha da nervura do modelo 2.



Fonte: O autor.

Na análise não linear, adota-se o elemento *Layered Shell*, que permite divisão em camadas ao longo da espessura, possibilitando modelar o concreto armado. Neste trabalho, adota-se a armadura no centro da espessura da nervura. No programa *SAP2000*, define-se cada camada a partir da espessura e da distância ao centro do elemento de área, considerando a espessura no sentido do eixo local 3 do elemento (Figura 83). Cada camada pode representar um material, para isto, basta determinar o diagrama tensão-deformação do mesmo. Para obter a espessura da camada de aço, basta dividir a área da seção transversal da armadura pela altura do elemento. Podem ser adotados até 5 pontos de integração para cada camada. Neste trabalho, adotam-se 3 pontos de Gauss para o concreto e 2 para a armadura.

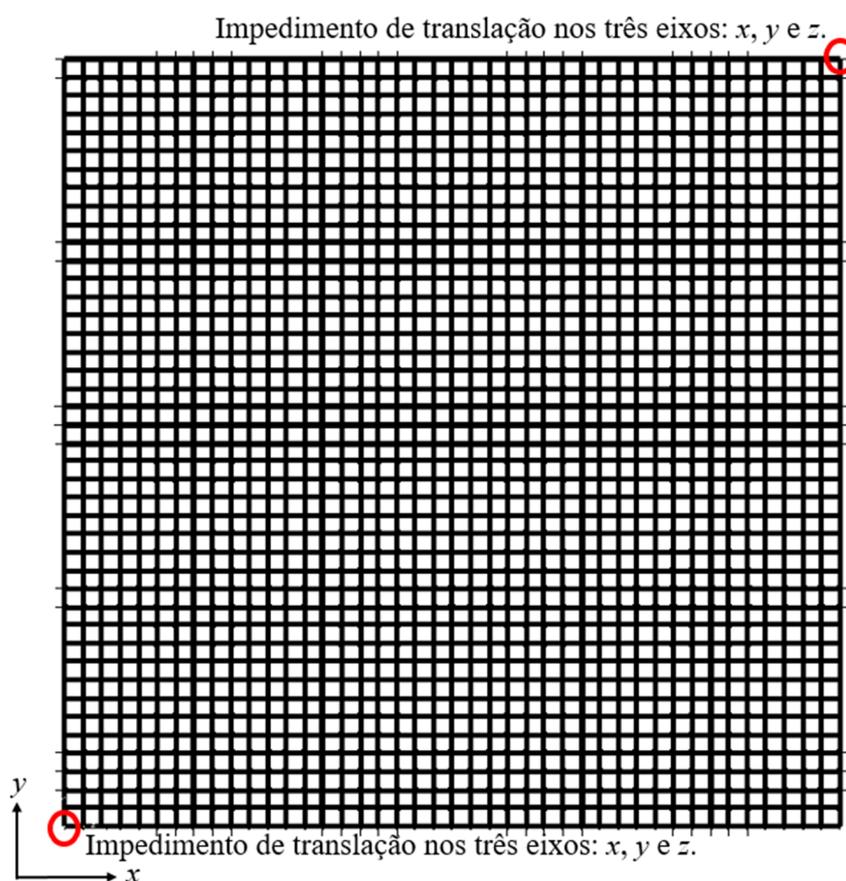
Figura 83 – Orientação de eixos no programa *SAP2000* para o elemento de área.

Fonte: O autor.

5.2.6 Configuração das condições de apoio para o modelo 2

Durante os ensaios, apoiou-se as lajes nas vigas de suporte. Não apresentando ligação estrutural entre as lajes e as vigas de apoio, configurando a condição de lajes simplesmente apoiadas. Na condição de simplesmente apoiada, a laje deve receber apoio do primeiro gênero impedido somente o deslocamento transversal, ou seja, no eixo z , porém essa situação, em uma modelagem tridimensional, pode acarretar erro na análise, uma vez que a estrutura poderia deslocar-se livremente no plano da laje. Para verificar tal situação, procedeu-se duas análises: adotar a condição de apoio com impedimento de deslocamento somente na direção z e limitando os graus de liberdade no plano da laje; e adotar a mesma condição anterior, mas com impedimento de translação nos eixos x e y em dois vértices (Figura 84). A última situação impediria a movimentação da laje no plano xy .

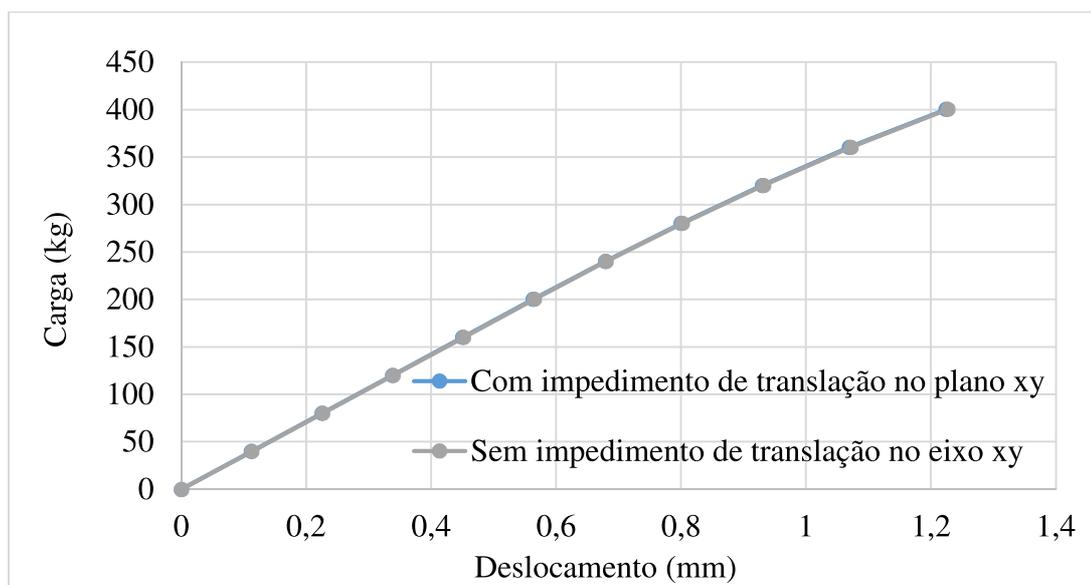
Figura 84 – Análise das condições de contorno.



Fonte: o autor.

O estudo desenvolveu-se utilizando o modelo 2 e considerando a não linearidade da relação entre tensão e deformação dos materiais. Os resultados dos deslocamentos obtidos no centro da laje são apresentados nas Figura 85. Observa-se plena coincidência entre os valores obtidos. Mostrando que ambas condições podem ser adotadas na análise para a condição pretendida neste trabalho.

Figura 85 – Comparação dos resultados dos deslocamentos para a laje L1 com diferentes condições de contorno.



Fonte: o autor.

5.2.7 Contribuição da resistência do concreto na tração para o modelo 2

Conforme apresentado no item 5.2, na análise do concreto à tração, após a fissuração do concreto, obtém-se um módulo de elasticidade tangente negativo e a não convergência no processo iterativo no programa *SAP2000*. Por tal motivo, adota-se a alternativa seguida por Schwetz (2011) em sua tese. Considerar, após a fissuração do concreto, um patamar horizontal no diagrama tensão-deformação até 0,2%. Neste trabalho, adota-se o valor 0,28%, valor relativo ao limite da deformação elástica do aço CA-60.

O objetivo desta seção é determinar a tensão de tração máxima que deve ser adotada para que o modelo numérico represente adequadamente o comportamento experimental da estrutura. Este procedimento apresenta limitações, pois são necessários dados experimentais na sua determinação. Não podendo ser aplicado em casos genéricos sem maiores estudos.

Busca-se determinar a contribuição do concreto na resistência à tração quando a laje é flexionada. Para tal, realizam-se simulações reduzindo a tensão de tração máxima

suportada pelo concreto. A resistência média à tração do concreto ($f_{ct,m}$) pode ser estimada pela Equação (41), disponível na NBR 6118 (ABNT, 2014).

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (41)$$

A simulação da redução da resistência média à tração do concreto varia conforme Tabela 17. Parte-se do valor integral da resistência oriunda da Equação (41), até a desconsideração de 70% da resistência à tração do concreto. Neste trabalho, utiliza-se o gerador automático do *SAP2000* para gerar o diagrama tensão-deformação do concreto, modificando-se a região tracionada, conforme Tabela 17.

Tabela 17 – Tensão máxima de tração no concreto.

Simulação	Tensão máxima de tração
100% de $f_{ct,m}$	$f_{ct,m}$
90% de $f_{ct,m}$	$0,9 \cdot f_{ct,m}$
80% de $f_{ct,m}$	$0,8 \cdot f_{ct,m}$
70% de $f_{ct,m}$	$0,7 \cdot f_{ct,m}$

Apresenta-se na Figura 86, o comportamento da laje L1 para o ensaio experimental e para a simulação computacional utilizando o modelo 2 na análise não linear. Comparam-se as respostas para os 3 ciclos de cargas: 400,55 kg; 1502,15 kg; e 2207,20 kg.

Nota-se para o primeiro ciclo de cargas que o modelo computacional considerando 100% da resistência média à tração para o concreto sugere comportamento linear. O modelo computacional que considera 70% da resistência à tração, apresenta a maior não linearidade para a relação carga e deslocamento. Em todas as simulações realizadas para o primeiro ciclo de cargas, obteve-se menores deslocamentos nos modelos computacionais em relação aos dados experimentais. Nota-se que modelo que apresentou menor diferença de valores obtidos para a relação carga e deslocamento, é o modelo que considera 70% da resistência média à tração do concreto.

Todas as simulações numéricas do segundo ciclo de cargas sugerem não linearidade do comportamento da laje L1 (Figura 86). Nesse ciclo, a consideração de 100% da resistência média à tração do concreto, gerou-se deslocamentos menores que os experimentais em todo carregamento proposto. Para a faixa de carregamento entre, aproximadamente, 600 kg e 1200

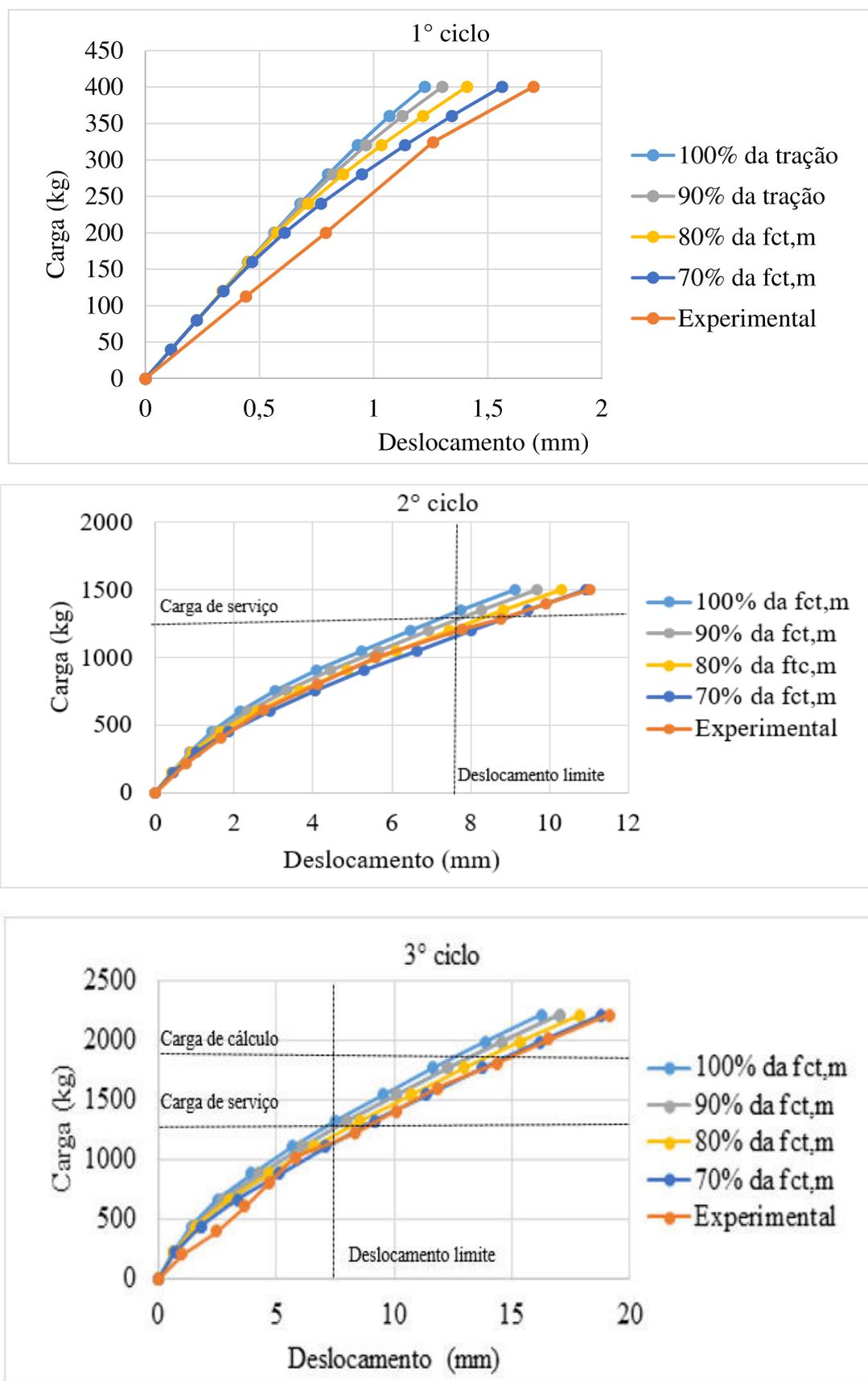
kg, a consideração de 80% da resistência média à tração do concreto apresentou maior proximidade de valores com a resposta experimental. Contudo, a simulação considerando 70% da resistência à tração do concreto, sugere melhor adequação aos dados experimentais, pois em nenhum momento os valores obtidos computacionalmente distanciam-se dos dados experimentais.

Para o último ciclo de cargas, o modelo considerando 70% da resistência à tração do concreto apresentou melhor ajuste aos dados experimentais. Desta forma, com base na análise dos três ciclos. A consideração da resistência à tração na ordem de 70% do valor obtido pela Equação (41), sugere a melhor adequação aos dados experimentais.

A laje L2 recebe o mesmo estudo realizado para a laje L1, os dados podem ser visualizados na Figura 88. Neste caso, realizou-se a redução da resistência à compressão do concreto até 70%.

Infere-se da Figura 88, que a consideração da resistência à compressão do concreto com valor de 70% da resistência obtida da Equação (41), representa a melhor aproximação entre os modelos computacionais e os dados experimentais para a laje L2. Destaca-se que na análise do 2º ciclo, a consideração de 80% da resistência, também geram resultados condizentes com os dados experimentais.

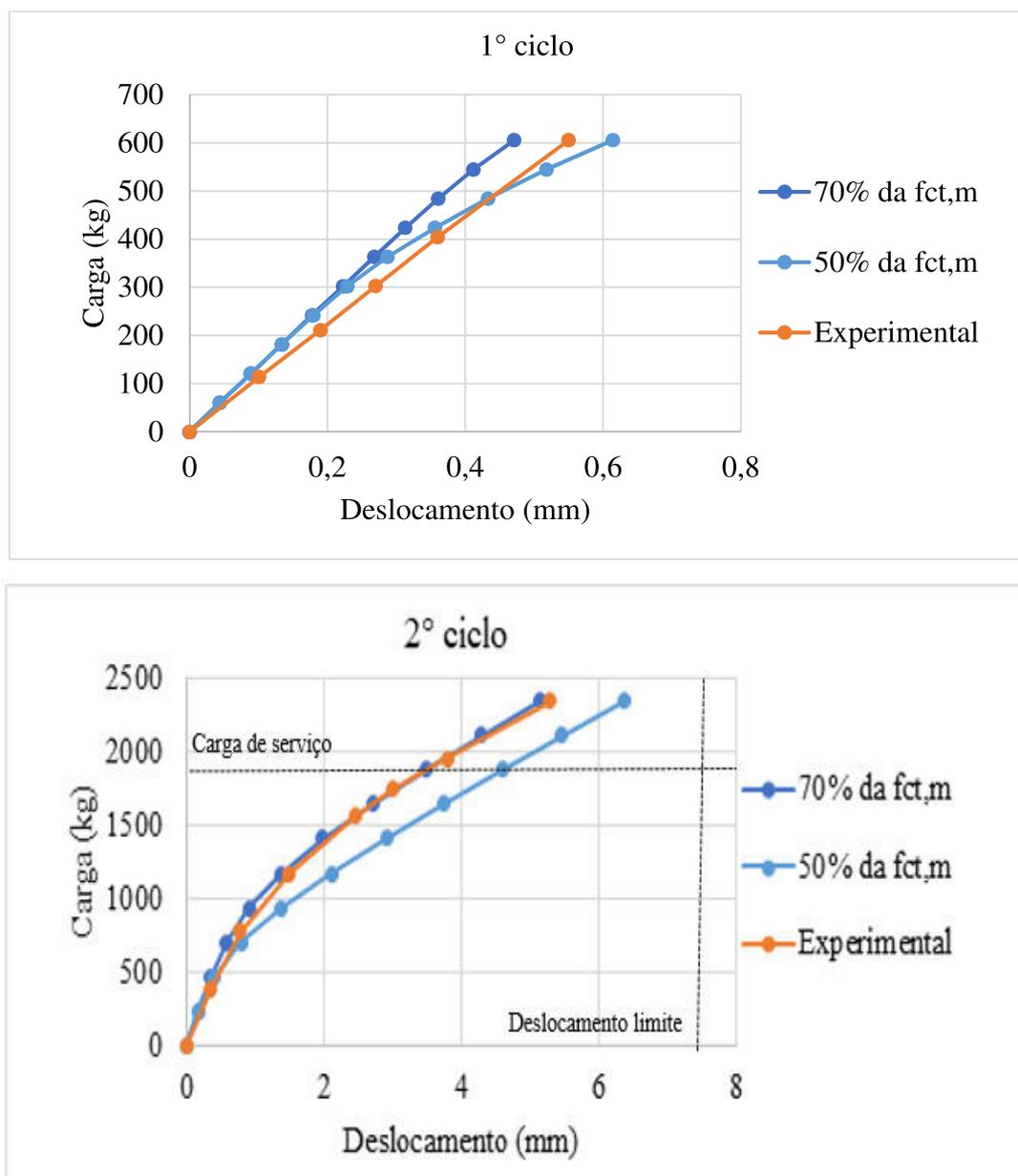
Figura 86 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L1



Fonte: o autor.

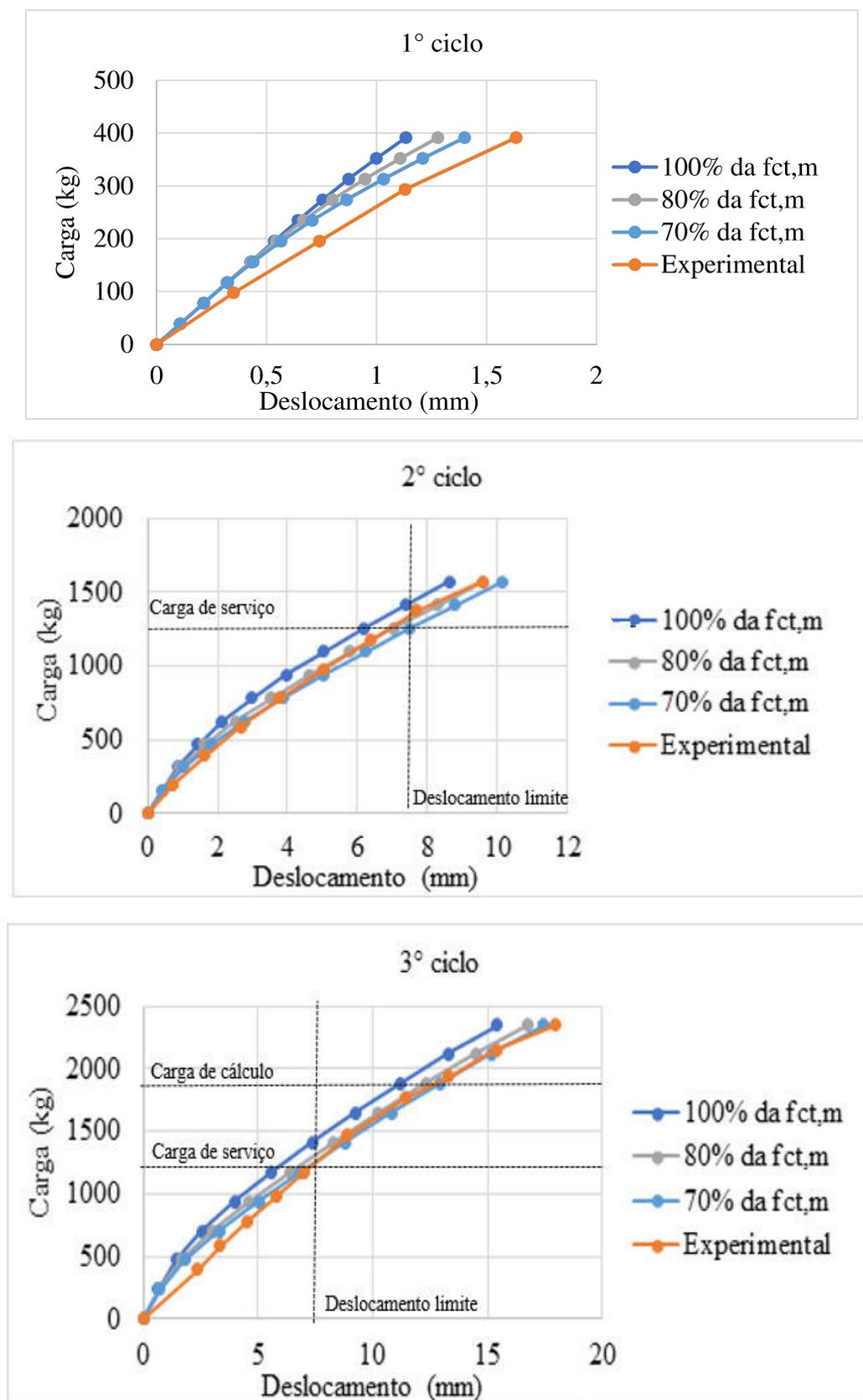
O estudo repete-se para a laje L3, os resultados são apresentados na Figura 87. Parte-se da consideração de 70% da resistência à tração para o concreto até uma redução de 50%. O valor de 70% é o que melhor representa o comportamento da laje L3. As análises sugerem que a resistência do concreto à tração nas análises das lajes nervuradas e de, aproximadamente, 70% do valor apresentado na Equação (41).

Figura 87 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L3.



Fonte: o autor.

Figura 88 – Análise da contribuição da resistência à tração na flexão do concreto para a laje L2.



Fonte: o autor.

5.2.8 Influência da resistência do concreto à compressão para o modelo 2

Adota-se a resistência característica do concreto à compressão como a média dos valores obtidos nos ensaios de compressão dos corpos de prova, após os mesmos atingirem a idade de 28 dias. Tais amostras foram obtidas no momento da concretagem das lajes. Como o concreto é um material não uniforme, apesar de assim o considerarmos, há pequenas variações nos resultados obtidos dos ensaios de ruptura das amostras. Quanto maior a quantidade de amostras, maior é o grau de precisão na representatividade do valor médio encontrado.

Observa-se que no primeiro ciclo de carregamento, que o modelo em elementos finitos utilizando elemento de casca, apresenta resultados de deformação inicial com valores levemente menores que os obtidos experimentalmente. Para verificar as contribuições da resistência do concreto à compressão nessa condição, seguiu-se o seguinte estudo, reduziu-se a resistência à compressão do concreto do valor obtido do desvio padrão da amostra. O desvio padrão indica o grau de dispersão de uma amostra e sua formulação pode ser visualizada na Equação (42).

$$\text{Desvio padrão} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (42)$$

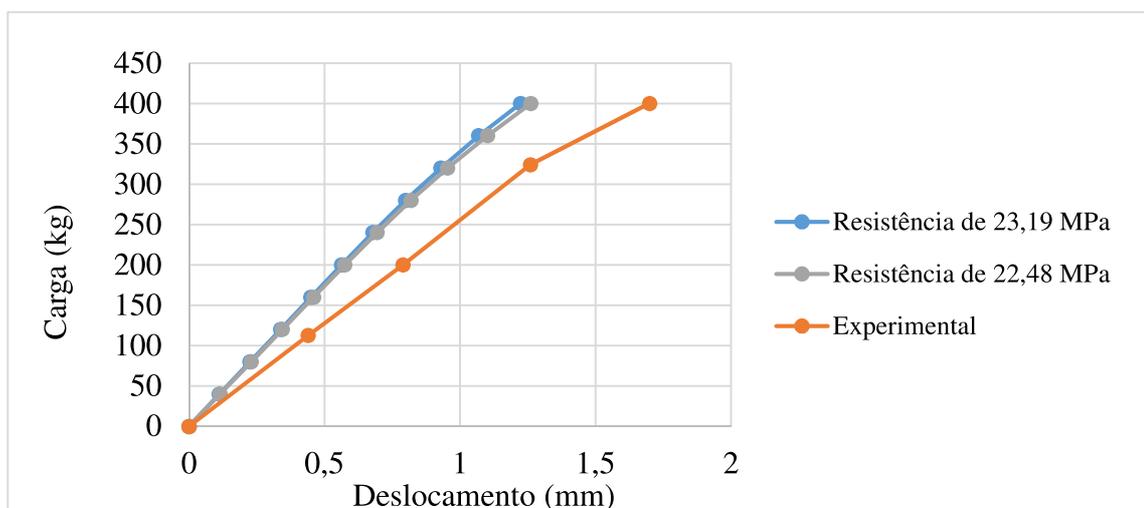
x_i : valor individual;

\bar{x} : média dos valores; e

n : número de valores.

Desta forma, assume-se o valor da resistência do concreto à compressão como 22,48 MPa. Apresenta-se na Figura 89, a comparação dos resultados obtidos para o deslocamento no centro da laje. Compara-se a resposta da laje L1, para o primeiro ciclo de carga, com as respostas da referida laje modelada com a resistência média à compressão de 23,19 MPa e com a redução proposta (22,48 MPa). Considera-se no estudo o modelo II com análise não linear.

Figura 89 – Análise da resistência à compressão do concreto.



Fonte: o autor.

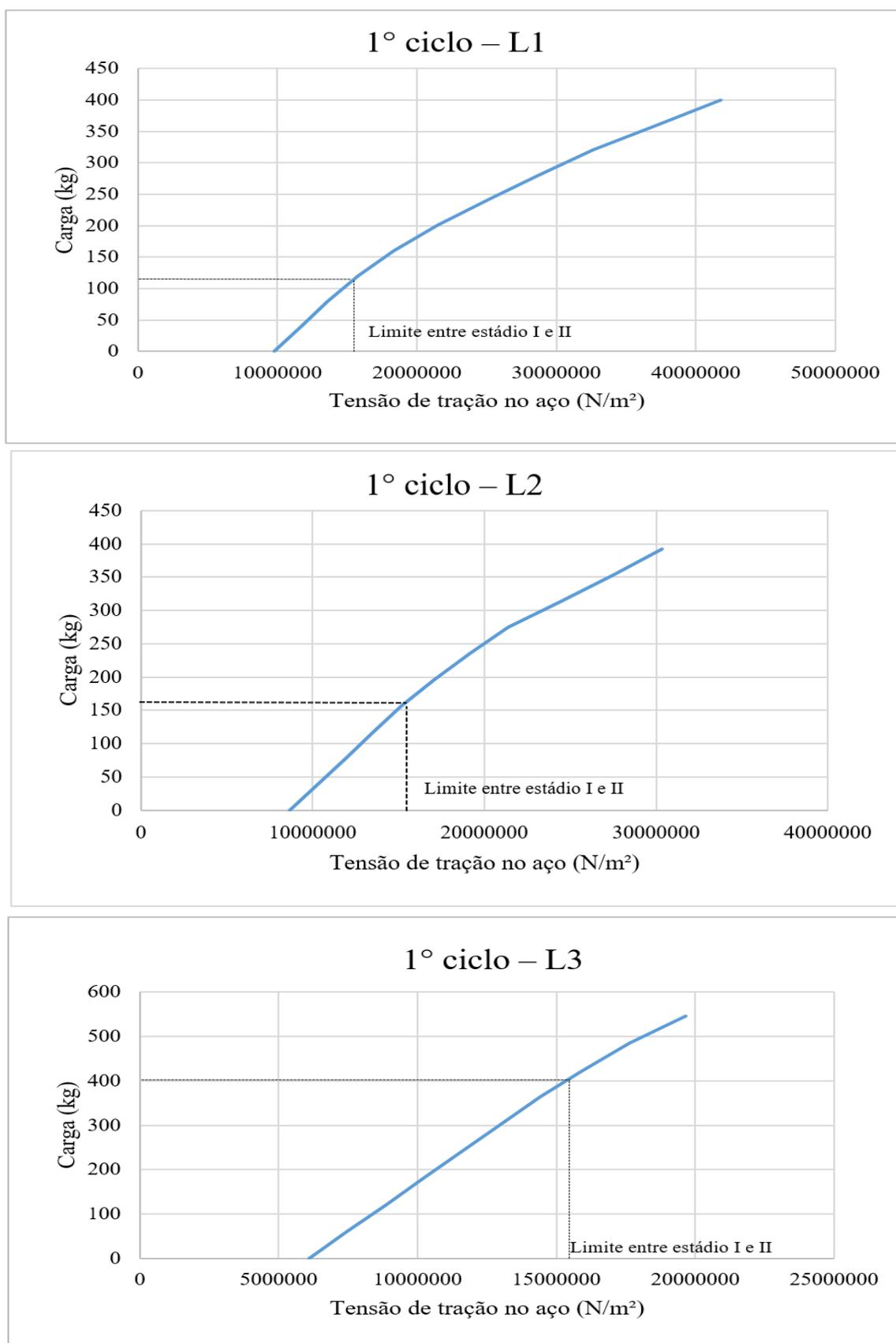
Percebe-se que a redução da resistência do concreto praticamente não modificou o deslocamento inicial do modelo computacional, ou seja, para as primeiras deformações a redução de resistência não alterou de forma significativa a deformação da laje. Adota-se assim, para o presente estudo, a resistência média à compressão do concreto como a média dos valores obtidos no ensaio de compressão.

5.2.9 Análise das tensões na armadura para o modelo 2

Com os modelos numéricos calibrados com os dados obtidos da análise estática, realiza-se o estudo das tensões. Apresentam-se as tensões desenvolvidas na armadura devido ao aumento de carga nas lajes. Apresenta-se na Figura 90, a relação entre a tensão de tração máxima obtida no aço e a carga aplicada.

Determina-se o ponto de início da fissuração no concreto, quando a deformação na barra de aço for igual a deformação gerada pela tensão máxima de tração do concreto. Uma vez que se considera o trabalho monolítico da estrutura. Obtém-se tais valores nas Figura 42 e Figura 43. Considera-se a tensão de tração máxima do concreto à compressão como 70% do valor calculado pela Equação (41). Assim, a tensão de tração no aço que determina o limite entre os estádios I e II é aproximadamente 15,46 MPa. Sugere-se no gráfico da Figura 90 que a fissuração inicia aproximadamente após a carga de 120 kg, 160 kg e 400 kg, respectivamente, para as lajes L1, L2 e L3. A tensão de tração no aço não inicia no zero do eixo, pois considera-se a deformação do peso próprio da laje.

Figura 90 – Relação entre tensão de tração no aço e a carga aplicada.



Fonte: o autor.

Comparando os resultados com os dados estimativos da Tabela 16, obteve-se uma boa aproximação da carga de início de fissura para a laje L3. No caso das lajes L1 e L2, os valores obtidos utilizando o MEF foram superiores aos obtidos na Tabela 16, estando mais coerente com os dados experimentais. Destaca-se que na elaboração da Tabela 16, adotou-se o modelo por analogia de grelhas linear, desconsiderando as armaduras.

5.3 Análise dinâmica

Apresentam-se os valores obtidos da análise experimental para as frequências naturais das 3 lajes e um estudo de vibração forçada desenvolvida na laje L2.

5.3.1 Análise das frequências experimentais

Analisou-se o comportamento dinâmico das lajes com relação as frequências naturais. Apresentam-se os valores das frequências naturais das 3 lajes, quando submetidas aos ciclos de cargas. Para realizar as medições, utilizou-se um acelerômetro MPU-6050 ligado a um Arduino. Arquivaram-se os dados coletados em uma planilha de dados. Os dados foram analisados em um algoritmo desenvolvido em Python. A partir da aceleração obtida nos ensaios, aplicou-se a FFT para obter o espectro de resposta e determinar a frequência fundamental das lajes, a partir de seis medições em cada ensaio, obteve-se a média das medições, que é considerada a frequência da laje. Para verificar a conformidade dos dados coletados, utilizou-se também um sensor de acelerômetro embarcado em um celular modelo M51, marca Samsung. Calibrou-se os acelerômetros antes de iniciar os ensaios.

Nos ensaios realizados, a diferença de valores das frequências obtidas com o MPU-6050 (Tabela 18) e o celular (Tabela 19) variou entre 0,03 Hz e 0,59 Hz. Já a diferença percentual entre os dois equipamentos de medição variou de 0,06% a 2,81% (Tabela 20). Considera-se que os equipamentos geraram valores concisos entre si e, desta forma, o acelerômetro MPU-6050 gera valores válidos para utilização neste trabalho.

A frequência natural obtida dos modelos numéricos calibrados (Tabela 21) é similar a frequência natural obtida das lajes experimentais (Tabela 18) para a estrutura antes da aplicação do primeiro ciclo de cargas, ou seja, da estrutura após a desforma. O que é a situação requerida nos projetos. Porém, nenhum dos modelos consegue representar adequadamente a situação da frequência fundamental após os ciclos de carga. Os modelos numéricos apresentaram frequências menores que os valores experimentais. A estrutura real recupera uma

certa rigidez após a retirada do carregamento, situação que não é simulada nos modelos computacionais, os quais representam a situação final do carregamento. Tal fato, explica a diferença entre os valores experimentais e computacionais.

Tabela 18 – Frequência experimental obtida utilizando o MPU-6050.

Laje	Situação	Frequência experimental (Hz)						Frequência média (Hz)	Desvio padrão
		1°	2°	3°	4°	5°	6°		
L1	Antes dos ciclos de carga	23,85	23,90	23,88	23,90	23,90	23,90	23,89	0,02
	Após 1° ciclo de carga	23,87	23,88	23,88	22,90	22,90	22,90	23,39	0,53
	Após 2° ciclo de carga	21,01	21,03	21,01	21,01	20,99	21,01	21,01	0,01
	Após 3° ciclo de carga	19,10	19,08	19,12	19,10	19,10	19,08	19,10	0,02
L2	Antes dos ciclos de carga	24,81	24,81	23,90	24,83	24,83	24,83	24,67	0,38
	Após 1° ciclo de carga	24,81	24,81	24,81	23,85	23,88	24,86	24,50	0,49
	Após 2° ciclo de carga	19,08	19,09	19,09	19,08	19,08	18,62	19,01	0,19
	Após 3° ciclo de carga	18,14	18,14	18,13	18,13	18,13	18,13	18,13	0,01
L3	Antes dos ciclos de carga	44,48	44,85	44,89	44,85	43,93	43,94	44,49	0,46
	Após 1° ciclo de carga	44,93	44,89	44,85	43,94	43,94	43,94	44,42	0,52
	Após 2° ciclo de carga	37,21	37,25	37,28	37,25	36,29	36,29	36,93	0,49

Tabela 19 – Frequência experimental obtida utilizando o sensor acelerômetro embarcado no celular M51.

Laje	Situação	Frequência experimental (Hz)						Frequência média (Hz)	Desvio padrão
		1°	2°	3°	4°	5°	6°		
L1	Antes dos ciclos de carga	23,74	23,76	23,66	23,39	23,78	-	23,67	0,16
	Após 1° ciclo de carga	23,40	23,40	23,41	23,01	23,81	23,80	23,47	0,30
	Após 2° ciclo de carga	20,62	20,62	20,62	20,22	20,22	20,22	20,42	0,22
	Após 3° ciclo de carga	19,02	19,01	19,01	19,43	18,60	18,61	18,95	0,31
L2	Após 2° ciclo de carga	18,99	19,01	19,18	19,03	19,42	19,00	19,11	0,17
L3	Antes dos ciclos de carga	44,45	44,85	44,05	44,45	44,85	44,45	44,52	0,30
	Após 1° ciclo de carga	44,45	44,45	44,84	44,85	43,66	43,26	44,25	0,65
	Após 2° ciclo de carga	36,9	36,9	36,48	37,28	37,28	38,47	37,22	0,68

Tabela 20 – Comparação entre as frequências experimentais.

Laje	Situação	Frequência média (Hz) MPU-6050	Frequência média (Hz) Celular M51	Diferença percentual (%)	Diferença (Hz)
L1	Antes dos ciclos de carga	23,89	23,67	0,93	0,22
	Após 1° ciclo de carga	23,39	23,47	-0,36	-0,08
	Após 2° ciclo de carga	21,01	20,42	2,81	0,59
	Após 3° ciclo de carga	19,10	18,95	0,79	0,15
L2	Após 2° ciclo de carga	19,01	19,11	-0,52	-0,10
L3	Antes dos ciclos de carga	44,49	44,52	-0,06	-0,03
	Após 1° ciclo de carga	44,42	44,25	0,37	0,16
	Após 2° ciclo de carga	36,93	37,22	-0,79	-0,29

Tabela 21 – Frequências naturais obtidas pelos modelos computacionais.

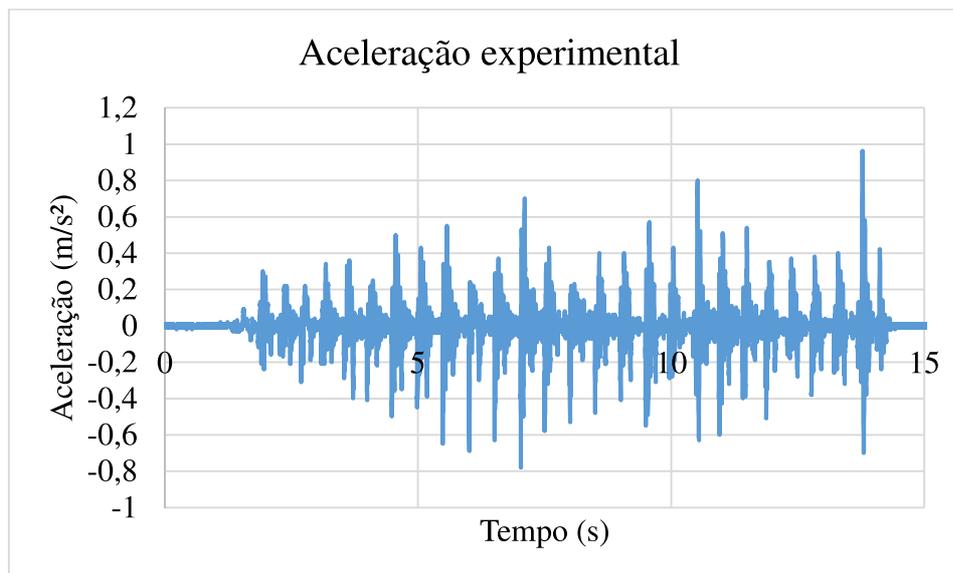
Lajes	Frequência (Antes 1° ciclo) (Hz)	Erro (%)	Frequência (Após 1 ° ciclo) (Hz)	Erro (%)	Frequência (Após 2 ° ciclo) (Hz)	Erro (%)	Frequência (Após 3 ° ciclo) (Hz)	Erro (%)
L1								
Modelo 1 (Linear)	24,17	1,26%	-	-	-	-	-	-
Modelo 1 (Não linear)	24,17	1,26%	20,11	14,02%	16,00	23,8%	15,84	17%
L2								
Modelo 1 (Linear)	24,17	2,03%	-	-	-	-	-	-
Modelo 1 (Não linear)	24,17	2,03%	20,69	15,55%	17,97	5,4%	16,97	6,4%
L3								
Modelo 1 (Linear)	46,41	4,32%	-	-	-	-	-	-
Modelo 1 (Não linear)	46,41	4,32%	46,41	-4,41%	22,10	40,1%	-	-
L1								
Modelo 2 (Linear)	24,94	4,61%	-	-	-	-	-	-
Modelo 2 (Não Linear)	26,14	9,51%	18,46	21,08%	13,78	34,4%	12,52	34%
L2								
Modelo 2 (Linear)	24,94	4,61%	-	-	-	-	-	-
Modelo 2 (Não Linear)	26,47	7,30%	19,85	18,98%	14,87	21,7%	13,77	24%
L3								
Modelo 2 (Linear)	43,13	3,06%	-	-	-	-	-	-
Modelo 2 (Não Linear)	44,53	0,09%	30,02	32,42%	19,53	47,1%	-	-

5.3.2 Carga dinâmica

Após o primeiro ciclo de cargas na laje L2, realizou-se um ensaio com carga dinâmica. Uma pessoa com peso de 70,45 kg, descalça, realizou uma sequência de pulos no centro da laje. Os dados da aceleração da laje foram registrados (Figura 91), com o objetivo de

comparar com a resposta computacional do modelo calibrado. Para tal, utilizou-se o modelo 2. Utilizou-se o fator de amortecimento da laje L2 obtido experimentalmente, utilizando o decremento logarítmico. O valor é estimado em 0,033 para o primeiro modo de vibração.

Figura 91 – Aceleração obtida do ensaio experimental.



Fonte: o autor.

A Figura 91 apresenta a função que simula a ação de pular sobre a laje. Essa carga é modelada segundo a função Hanning. Segundo Faisca (2003), a que melhor representou o carregamento experimental. A força é calculada pela formulação:

$$F(t) = CD \left\{ K_p P \left[0,5 - 0,5 \cos \left(\frac{2\pi}{T_c} t \right) \right] \right\} \quad \text{para } t \leq T_c \quad (43)$$

$$F(t) = 0 \quad \text{para } T_c \leq t \leq T \quad (44)$$

Onde:

$F(t)$: função da força do carregamento dinâmico no tempo (N);

CD : coeficiente de defasagem;

K_p : coeficiente de impacto;

P : peso da pessoa (N);

T : tempo da atividade (s);

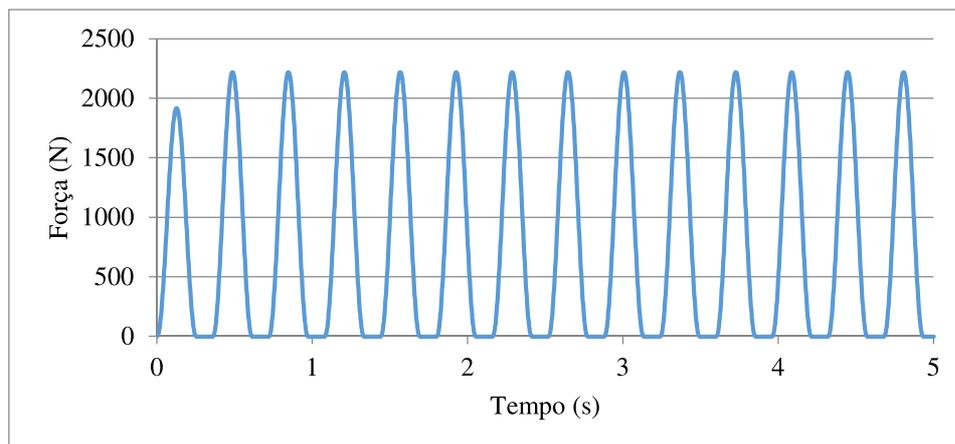
T_c : período de contato (s);

t : tempo (s)

Tabela 22 – Dados da função.

CD	K_p (s)	P (N)	T (s)	T_c (s)
1	2,78	70,45	5	0,25

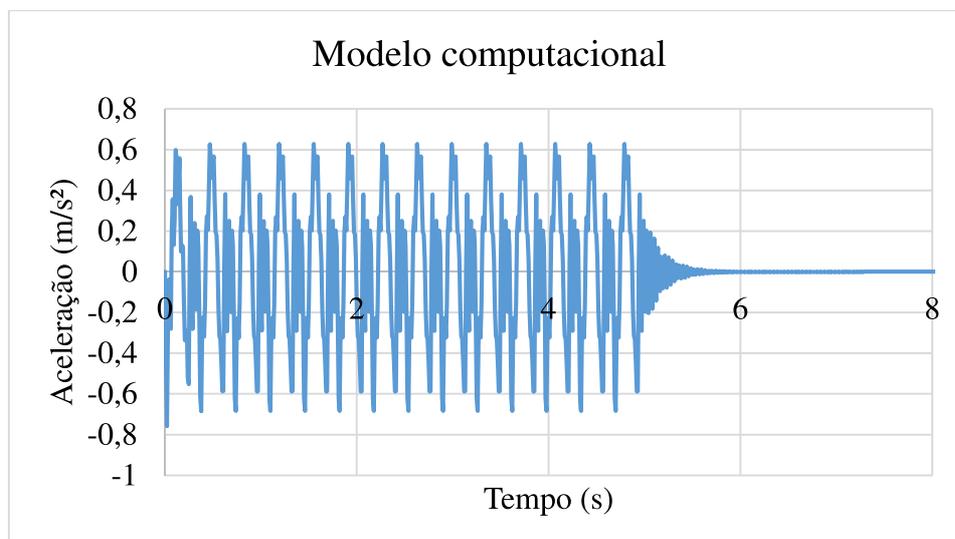
Figura 92 – Força que simula a ação de uma sequência de pulos.



Fonte: o autor.

Os resultados do modelo computacional podem ser observados na Figura 88. Percebe-se que o modelo computacional gerou picos de aceleração com valores próximos do medido experimentalmente ($0,6 \text{ m/s}^2$). Destaca-se que a função que representa o carregamento é nitidamente mais sincronizada que a situação real de ensaio, onde uma pessoa gera uma sequência de pulos, com intensidades diferentes.

Figura 93 – Aceleração do modelo 2



Fonte: o autor.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO DO ESTUDO PARAMÉTRICO

A análise das lajes nervuradas envolve uma série de parâmetros, como os apresentados no Capítulo 5. Alguns dos quais não há um consenso na literatura sobre os valores a serem adotados. Este estudo mostra o comportamento das lajes nervuradas com relação à variação de características de projeto. Para o estudo, utiliza-se o modelo 1. A laje modelo para o estudo paramétrico, apresenta as características listadas abaixo.

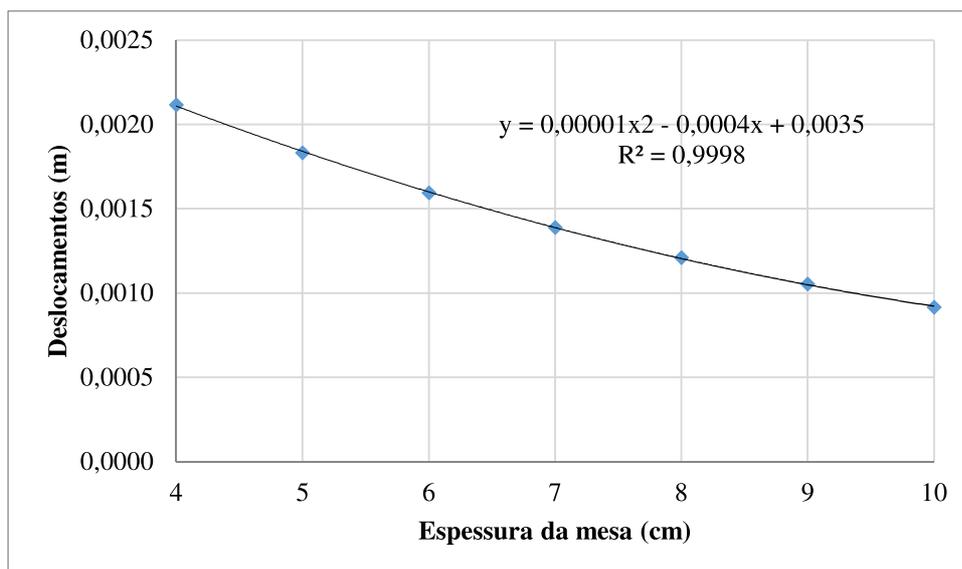
- Dimensões da laje: 3,66 m x 3,66 m;
- Condições dos apoios: 4 (quatro) bordas simplesmente apoiadas;
- Espaçamento entre eixos de nervuras: 61 cm;
- Largura da nervura: 7 cm;
- Altura da nervura: 21 cm;
- Espessura da mesa: 4 cm;
- Altura total da laje: 25 cm;
- Resistência do concreto: $f_{ck} = 25$ MPa;
- Módulo de elasticidade: 24,080 MPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,2; e
- Carga aplicada: 5000 N por nó de ligação entre elementos (carga estimada).

Nos gráficos dos estudos paramétricos são apresentadas funções que simulam a relação entre os eixos das abscissas e ordenadas. Assim como o coeficiente de determinação (R^2), que indica quanto que a relação pode ser descrita pela função adotada. Quanto mais próximo o coeficiente de determinação está do valor 1 (um), mais precisa é a equação apresentada.

6.1.1 Variação da espessura da mesa

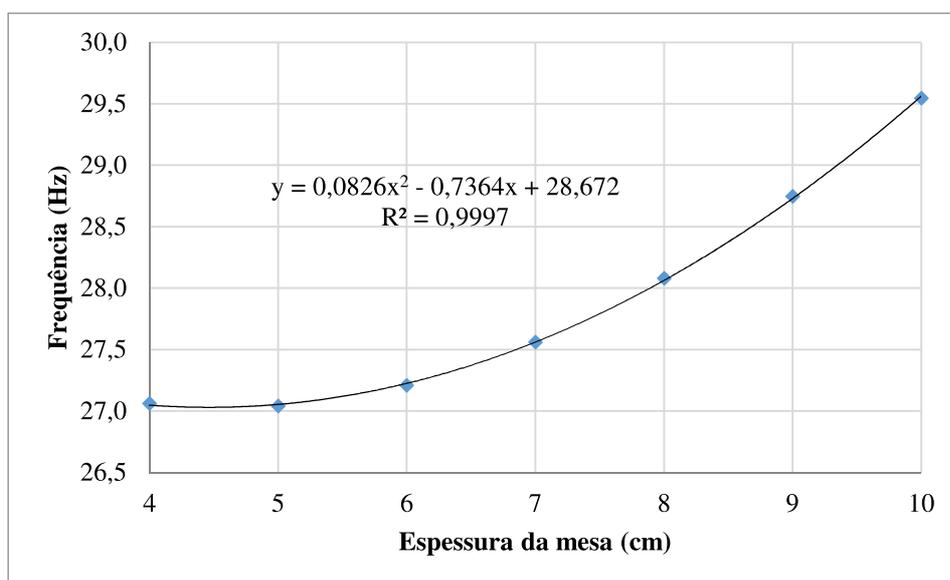
A NBR 6118 (ABNT, 2014) fornece valores mínimos para a espessura da mesa, como apresentado anteriormente. Neste estudo, a mesa sofre variação de espessura, iniciando com o valor mínimo de 4 cm até uma espessura de 10 cm. A Figura 94 mostra o gráfico da variação da espessura da mesa em relação ao deslocamento máximo da laje (centro da laje) e a Figura 95 com relação à frequência fundamental.

Figura 94 - Deslocamento x espessura da mesa.



Fonte: o autor.

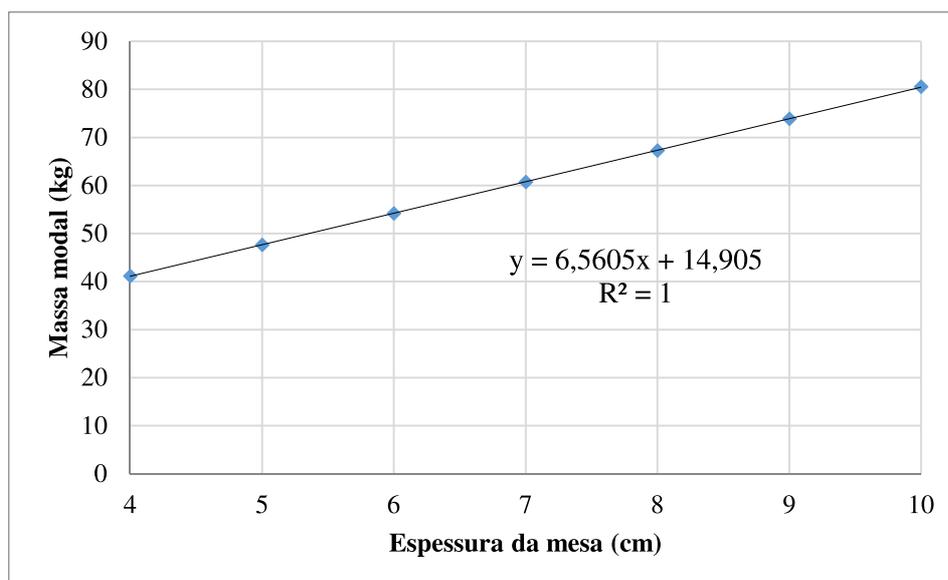
Figura 95 - Frequência x espessura da mesa.



Fonte: o autor.

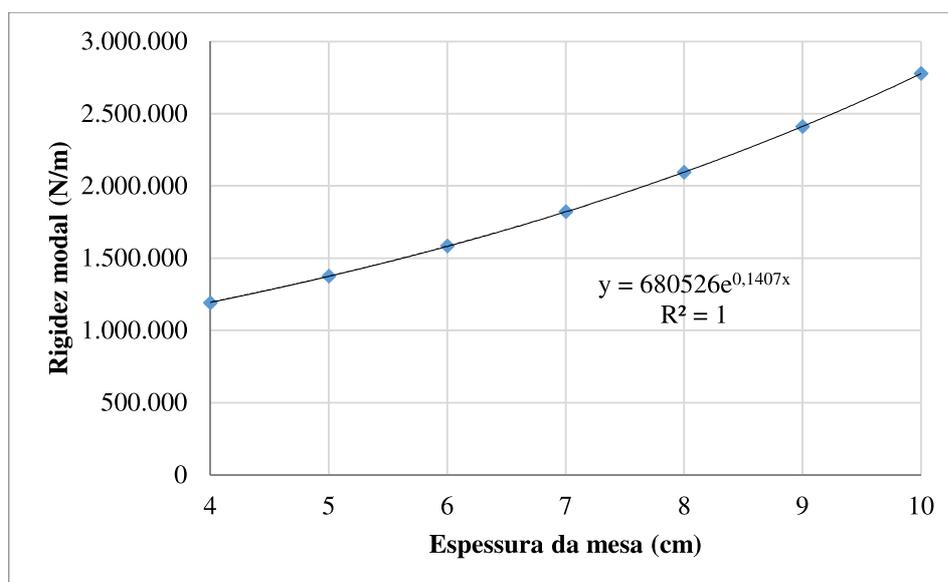
O aumento da espessura da mesa gera um aumento da frequência natural e uma redução dos deslocamentos. Nas duas situações, um polinômio é capaz de representar a variação da espessura da mesa com relação aos deslocamentos e as frequências. As variações da massa e rigidez modal para o primeiro modo de vibração são apresentadas nas Figura 96 e Figura 97, respectivamente.

Figura 96 - Massa modal x espessura da mesa.



Fonte: o autor.

Figura 97 - Rigidez modal x espessura da mesa.



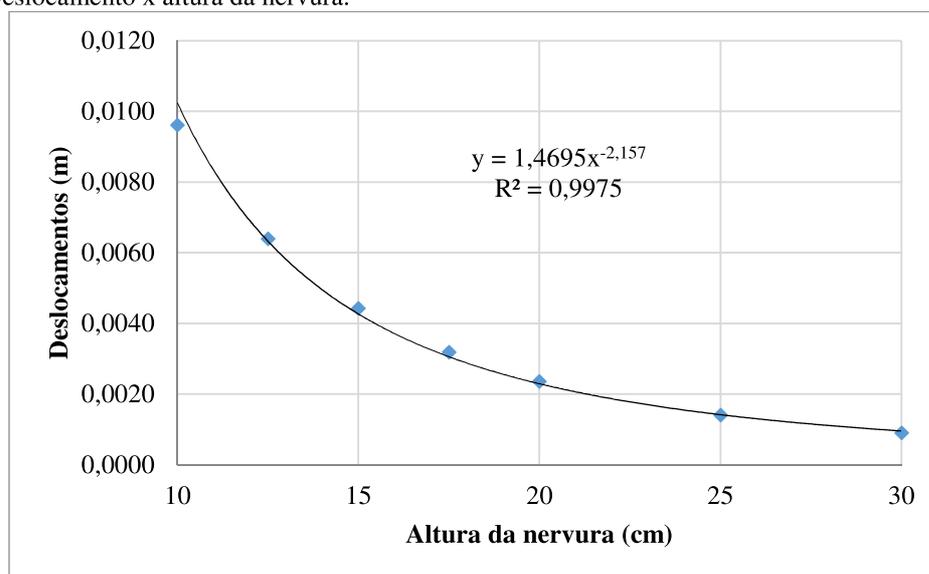
Fonte: o autor.

No intervalo analisado, a rigidez modal da frequência fundamental aumenta de forma exponencial, enquanto que a massa modal de forma linear, ou seja, o aumento da rigidez em função do aumento da espessura da mesa é o fator mais significativo na alteração da frequência. Destaca-se que o coeficiente de determinação (R^2) nos dois gráficos é 1, ou seja, 100% da variável dependente (eixo das ordenadas) pode ser representada pela função em relação a variável independente (eixo das abscissas).

6.1.2 Variação da altura da nervura

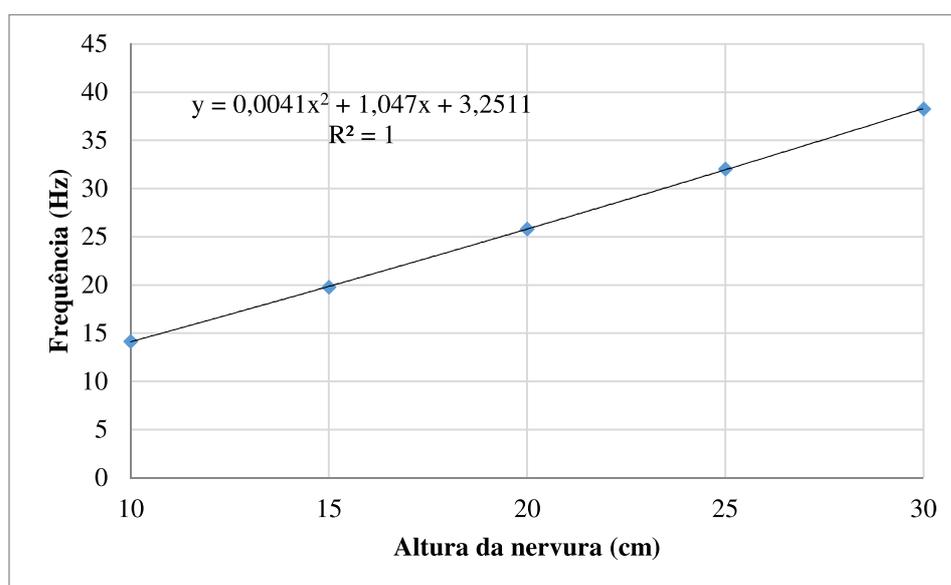
A laje apresenta as mesmas características descritas anteriormente. A espessura da mesa é fixada em 4 cm e a nervura sofre alteração em sua altura, variando de 10 cm até 30 cm. Os resultados são apresentados na Figura 98 para os deslocamentos e na Figura 99 para as frequências fundamentais.

Figura 98 - Deslocamento x altura da nervura.



Fonte: O autor.

Figura 99 - Frequência x altura da nervura.

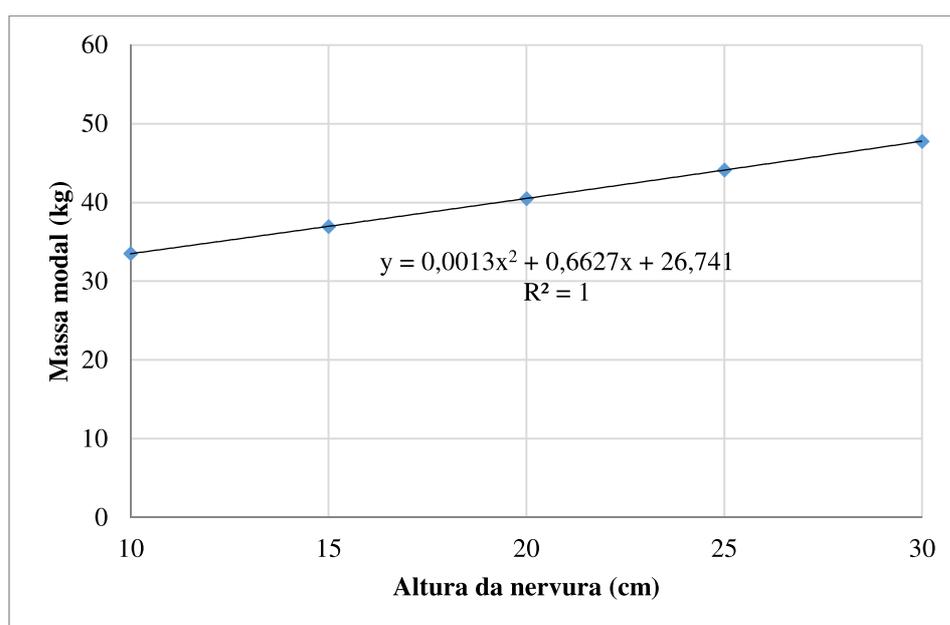


Fonte: O autor.

O deslocamento máximo da laje reduz com o aumento da altura da nervura e um polinômio é capaz de descrever adequadamente o gráfico do deslocamento em função da variação da altura da nervura. A relação entre a frequência fundamental e a variação da altura da nervura também pode ser aproximada por um polinômio, no intervalo analisado. O aumento da altura da nervura ocasiona o aumento da frequência fundamental da laje.

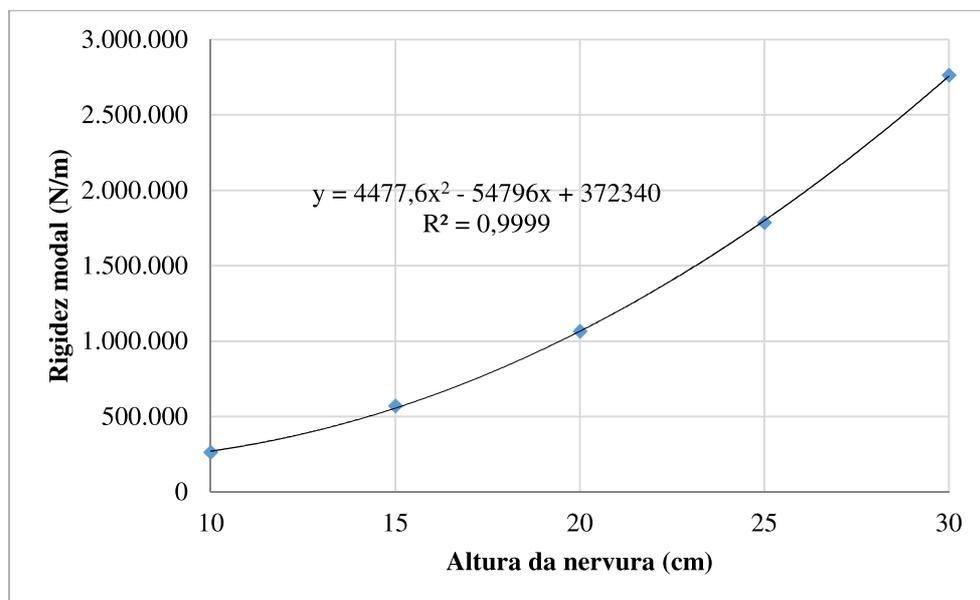
A massa e a rigidez modal do primeiro modo de vibração relacionam-se com a altura da nervura por uma função polinomial, como apresentado na Figura 100 e Figura 101. Nesta análise, o aumento da rigidez em função do aumento da altura da nervura é o fator mais significativo na alteração da frequência natural, a qual apresenta expressiva variação de valor no intervalo analisado. Em um estudo paramétrico experimental, a altura da nervura deve ser um parâmetro analisado.

Figura 100 - Massa modal x altura da nervura.



Fonte: O autor.

Figura 101 - Rigidez modal x altura da nervura.

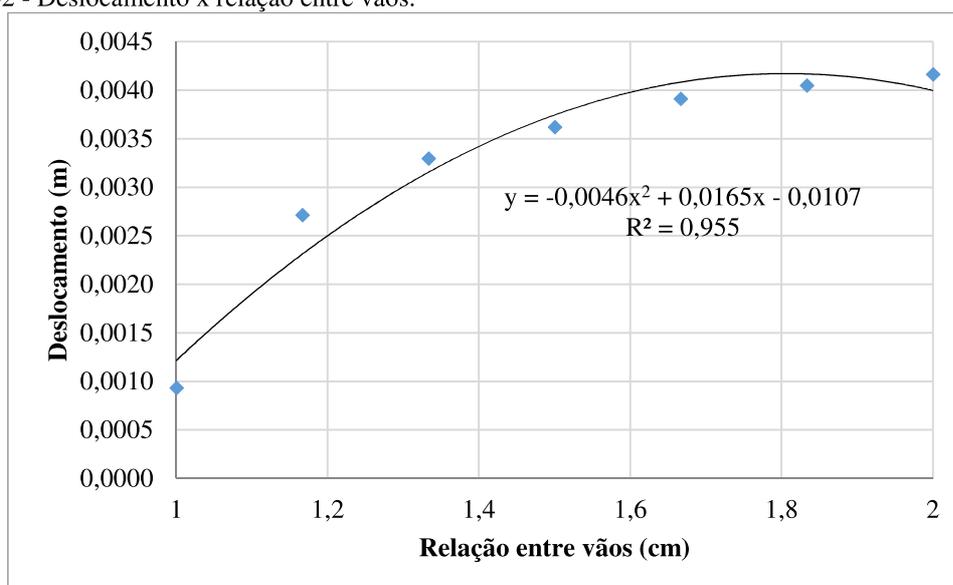


Fonte: O autor.

6.1.3 Variação da relação entre vãos

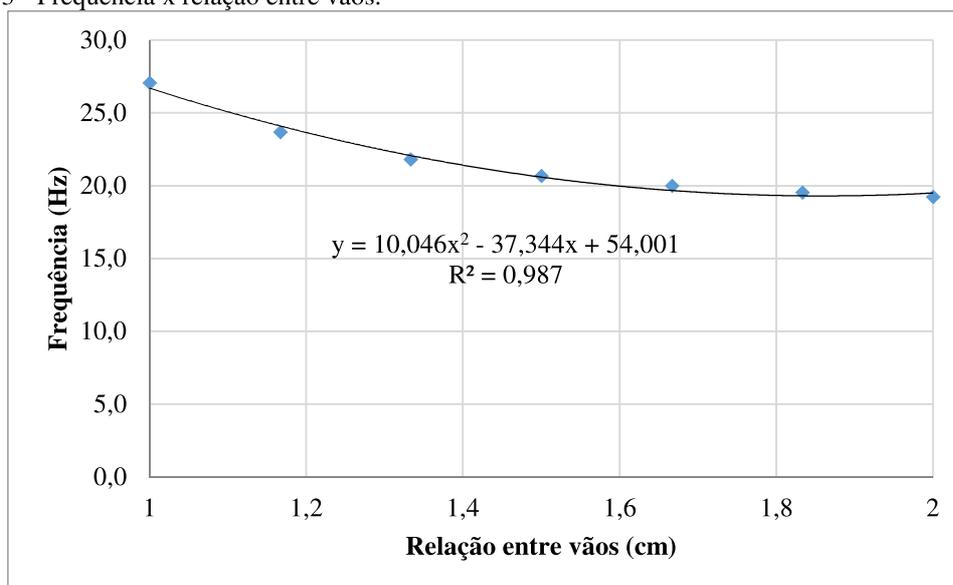
Neste estudo, a laje apresentada sofre variação da relação entre vãos, de 1 (3,66 m x 3,66 m) até 2 (7,32 m x 3,66 m). Os resultados para os deslocamentos máximos e frequências fundamentais são apresentados na Figura 102 e Figura 103, respectivamente.

Figura 102 - Deslocamento x relação entre vãos.



Fonte: O autor.

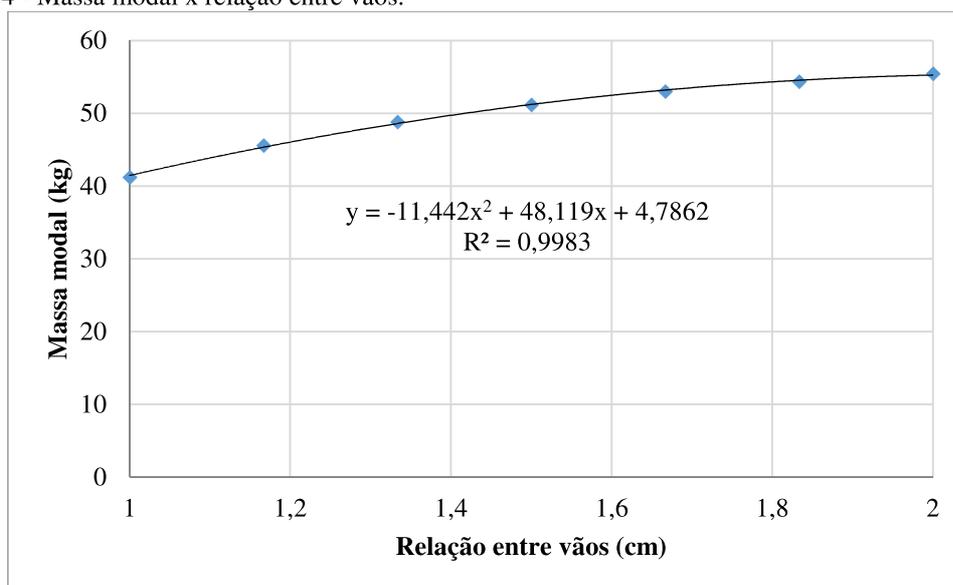
Figura 103 - Frequência x relação entre vãos.



Fonte: O autor.

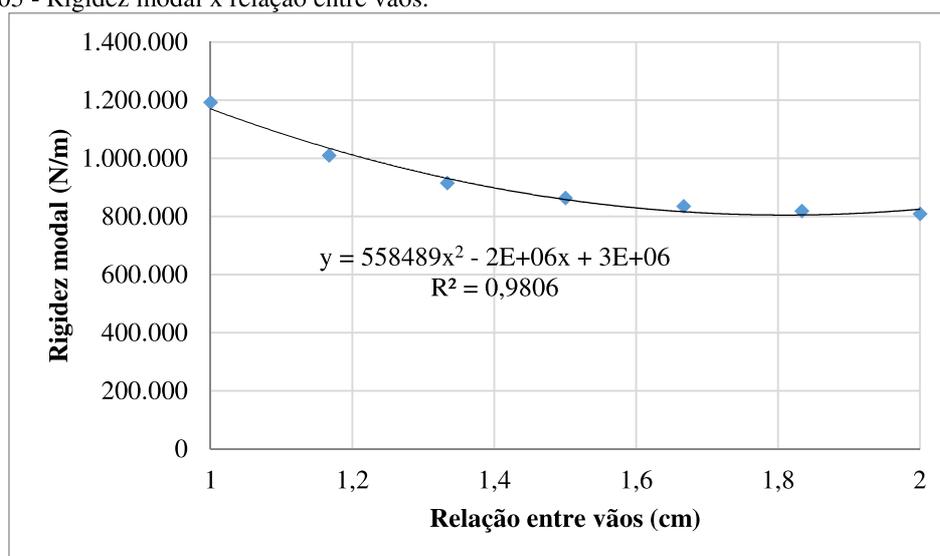
Com relação ao deslocamento, os mesmos aumentam com o aumento da relação entre vãos. A frequência fundamental da laje reduz à medida que a relação entre vãos aumenta. Tal fato pode ser explicado, analisando as Figura 104 e Figura 105. Que mostram a relação entre massa e rigidez do primeiro modo de vibração em relação a variação da relação entre vãos. A massa do sistema aumenta com o aumento da relação entre vãos, ao passo que a rigidez reduz. Gerando a redução da primeira frequência da laje.

Figura 104 - Massa modal x relação entre vãos.



Fonte: O autor.

Figura 105 - Rigidez modal x relação entre vãos.



Fonte: O autor.

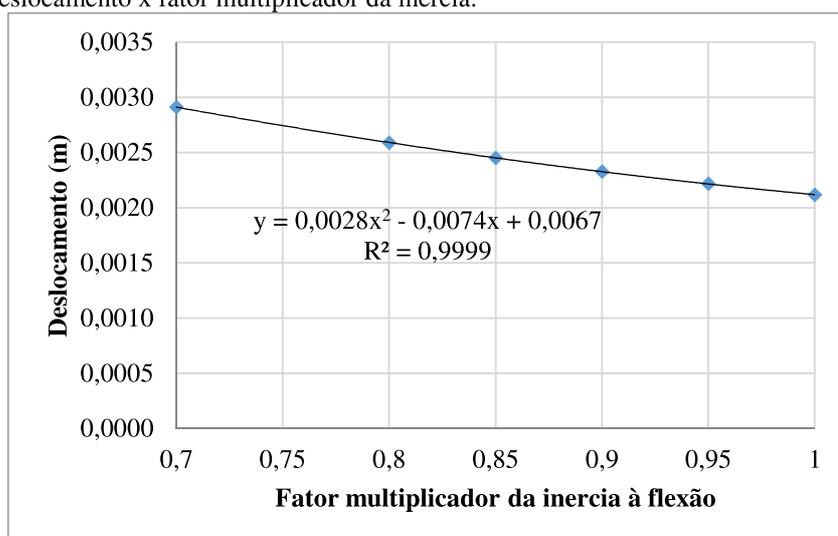
Neste caso, a frequência da laje reduz com o aumento da relação entre vãos devido ao efeito combinado do aumento da massa e da redução da rigidez.

6.1.4 Variação do momento de inércia à flexão

Uma laje com as mesmas características anteriores é analisada novamente. A variação do momento de inércia à flexão é realizada neste estudo. Por meio de uma redução em até 30% do seu valor, conforme Figura 106 e Figura 107, as quais mostram, respectivamente, a variação do deslocamento máximo e da frequência à medida que o fator multiplicador da inércia é modificado.

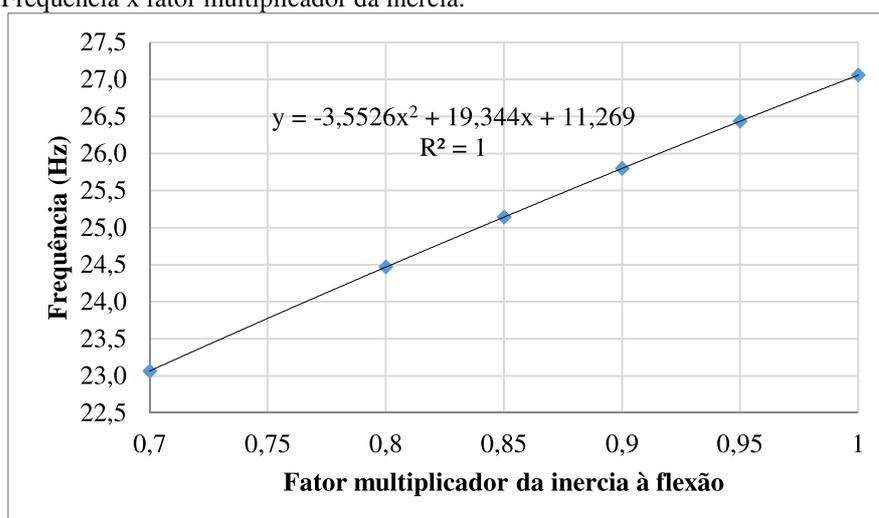
A redução do momento de inércia à flexão é utilizada em muitos estudos para simular o estado fissurado no concreto armado. Nesta análise, todas as peças apresentam redução na mesma proporção, o que não ocorre em uma situação real. O momento de inércia à flexão é multiplicado por um fator que varia de 0,7 até 1, onde 0,7 significa a desconsideração de 30% do seu valor e 1 a consideração total.

Figura 106 - Deslocamento x fator multiplicador da inércia.



Fonte: O autor.

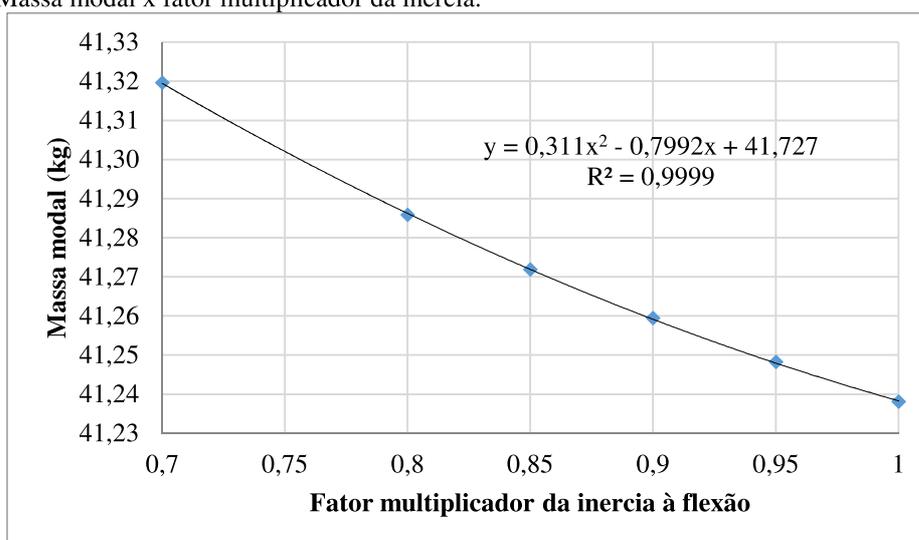
Figura 107 - Frequência x fator multiplicador da inércia.



Fonte: O autor.

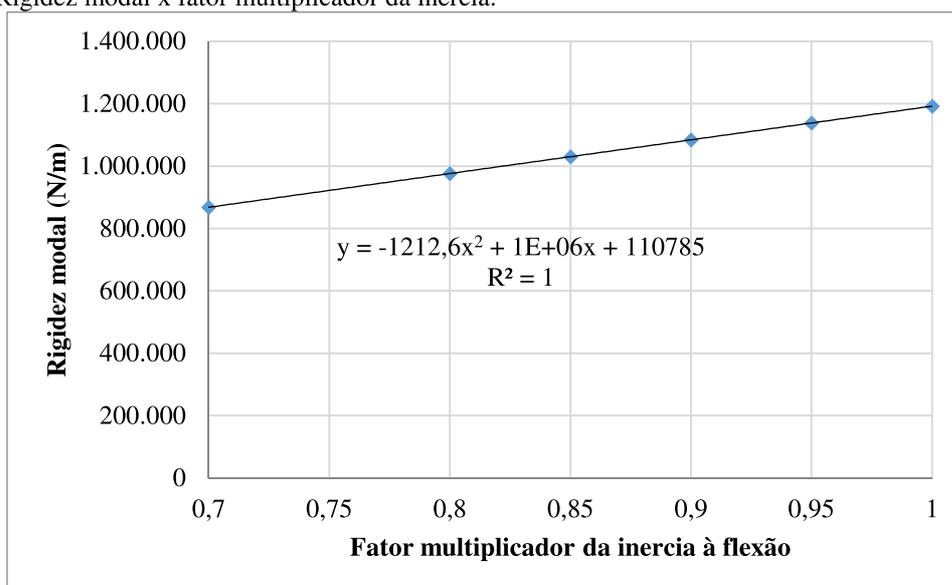
Como já comentado, a redução do momento de inércia à flexão simula o concreto com fissuras. Essa perda de área da seção transversal gera na estrutura analisada, um aumento no valor do deslocamento no centro da laje e uma redução na frequência fundamental. As Figura 108 e Figura 109 apresentam a relação da variação do momento de inércia à flexão com a massa e rigidez modal. A massa modal permanece constante, com uma pequena variação observada por questões de arredondamentos de cálculo. O eixo das ordenadas teve que ser representado com duas casas decimais. A rigidez modal diminui à medida que o momento de inércia à flexão considerado também reduz.

Figura 108 - Massa modal x fator multiplicador da inércia.



Fonte: o autor

Figura 109 - Rigidez modal x fator multiplicador da inércia.



Fonte: o autor

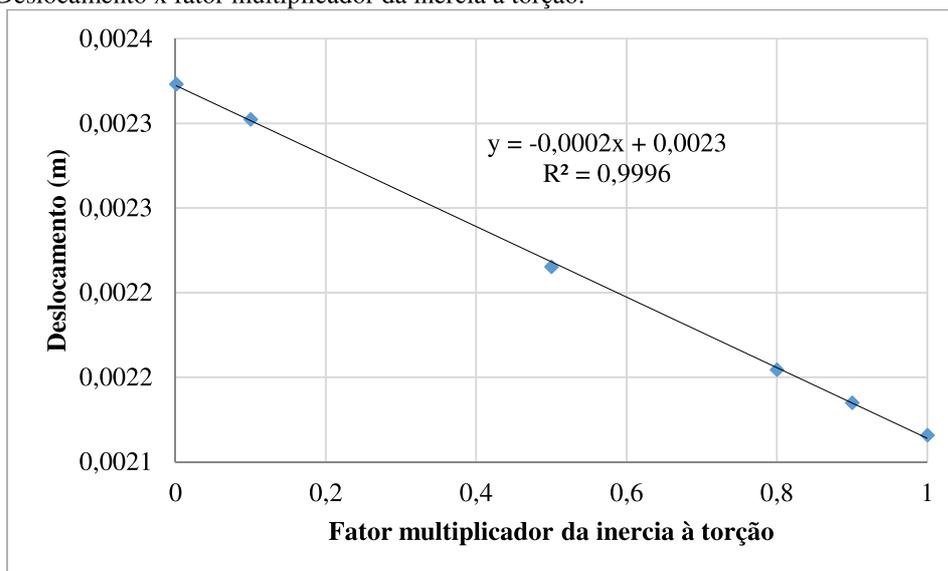
6.1.5 Variação do momento de inércia à torção

O momento de inércia à torção sofre alteração, buscando avaliar a sua interferência na frequência natural do sistema, assim como sua influência sobre o deslocamento máximo da laje. Seu valor é multiplicado por um fator que varia de 0 a 1, onde 0 significa a desconsideração e 1 a consideração com seu valor total. A Figura 110 e Figura 111 mostram esse estudo.

A variação do valor do momento de inércia à torção, para a laje em estudo, apresenta pouca interferência na alteração dos deslocamentos máximos e da frequência

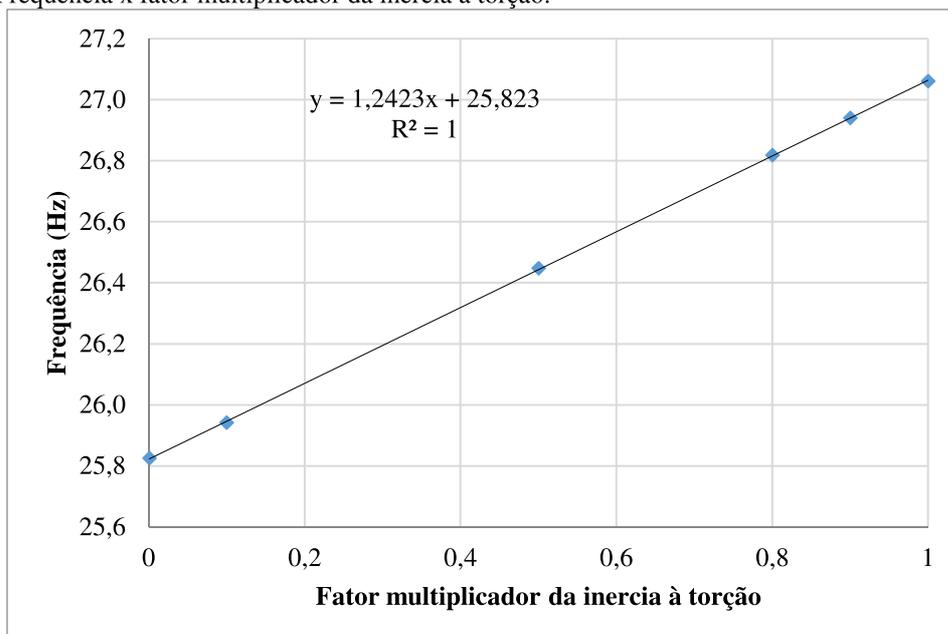
fundamental do sistema. Apesar desse fato, é possível relacionar linearmente o fator multiplicador com o deslocamento máximo, a frequência fundamental e a rigidez modal. A massa modal, pode ser considerada constante, assim como explicado anteriormente. À medida que há redução do momento de inércia à torção, os deslocamentos aumentam um pouco e a frequência fundamental do sistema reduz, no estudo em questão, pouco mais de 1 Hz.

Figura 110 - Deslocamento x fator multiplicador da inércia à torção.



Fonte: o autor

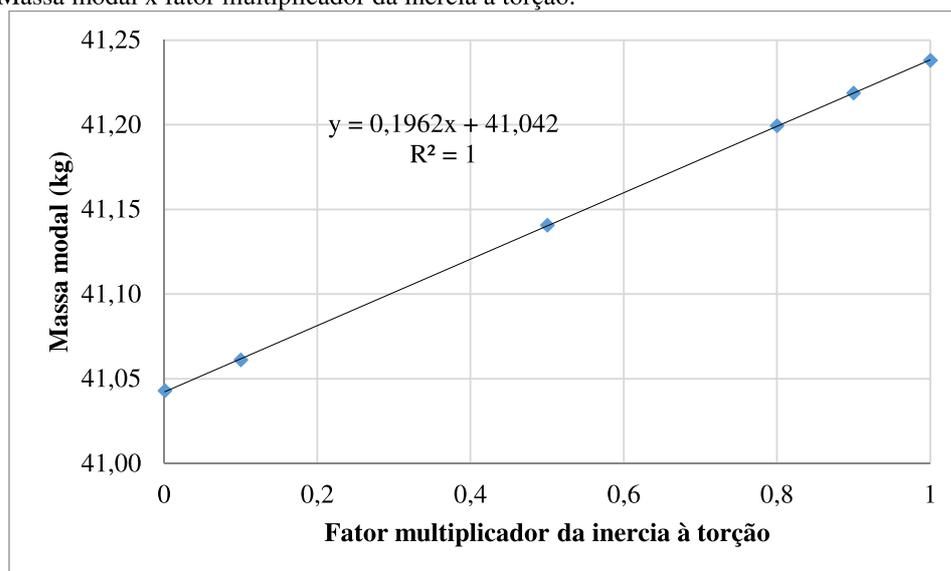
Figura 111 - Frequência x fator multiplicador da inércia à torção.



Fonte: o autor.

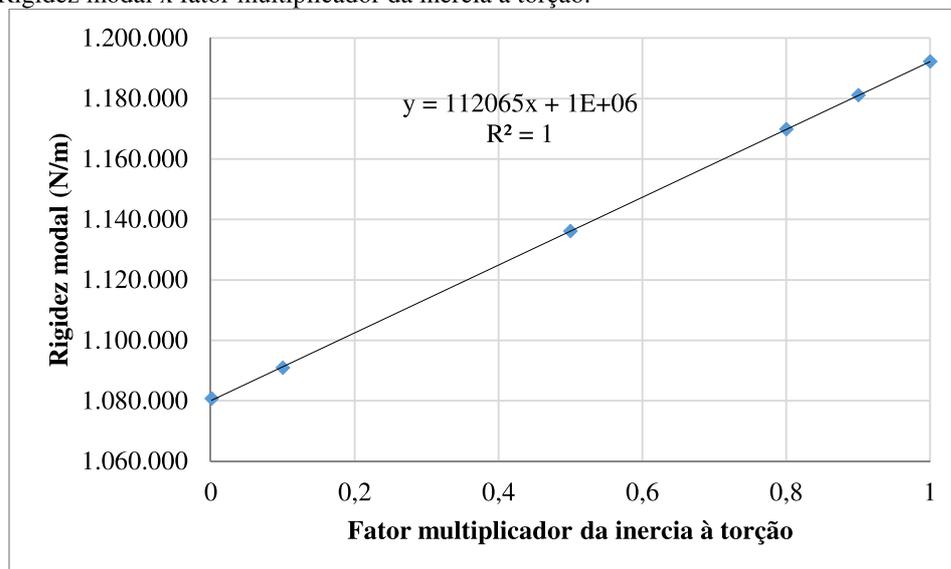
A Figura 112 mostra que a massa modal não teve variação significativa, podendo ser considerada constante. Já a rigidez modal (Figura 113), reduz um pouco à medida que o momento de inércia à torção é desconsiderado. A rigidez é o único fator responsável pela alteração da frequência natural da laje, quando o momento de inércia à flexão é alterado.

Figura 112 - Massa modal x fator multiplicador da inércia à torção.



Fonte: o autor.

Figura 113 - Rigidez modal x fator multiplicador da inércia à torção.



Fonte: o autor.

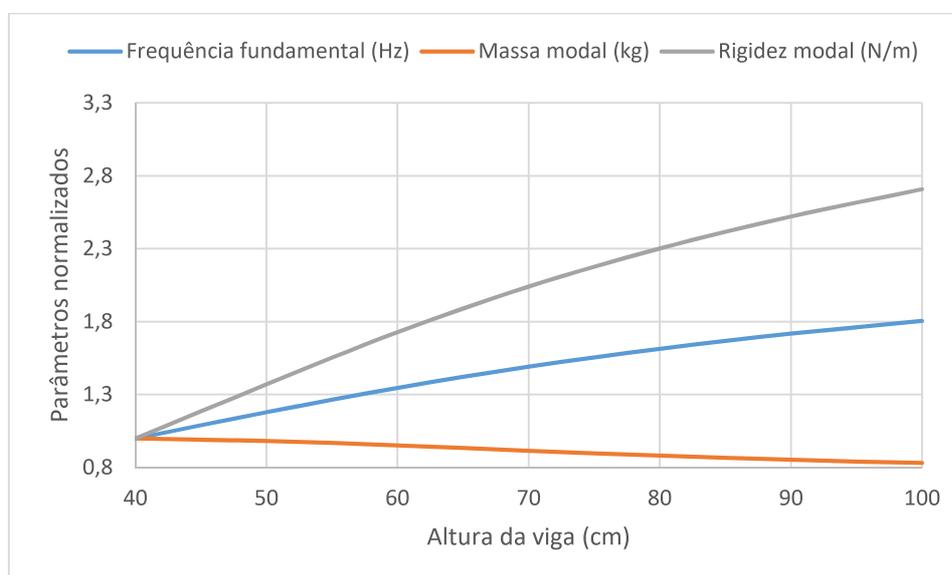
6.1.6 Variação da altura da viga na borda da laje

Uma laje com as características descritas é modelada neste estudo, com a diferença que a mesa foi adotada com altura de 5 cm. A laje é apoiada em vigas, e estas, são apoiadas em pilares nos quatro cantos da laje. As vigas sofrem alteração da altura, variando de 40 cm até 100 cm. A largura das vigas é constante em todas as análises e igual a 15 cm. Tabela 23 apresenta os dados obtidos nas análises.

Tabela 23 - Parâmetros modais em função da viga de apoio.

Altura da viga (cm)	Frequência fundamental (Hz)	Massa modal (kg)	Rigidez modal (N/m)
40	5,97	119	168.008
50	7,05	117	230.446
60	8,05	113	290.586
70	8,92	109	343.005
80	9,65	105	386.882
90	10,27	101	423.651
100	10,79	99	455.107

Figura 114 - Parâmetros normalizados x altura da viga de borda.



Fonte: o autor.

Percebe-se que a frequência fundamental da laje aumenta com o aumento da rigidez das vigas de apoio. Conforme a altura das vigas aumentam, a rigidez do primeiro modo de vibração também aumenta e a massa modal reduz. A massa modal reduzir pode ser explicado pelo seguinte fato: vigas com menor altura são mais flexíveis, sua massa contribui na vibração

do primeiro modo da laje; quando a viga apresenta maior altura (menos flexível), sua massa passa a não contribuir com o primeiro modo de vibração, explicando assim, a redução da massa modal.

Vale destacar que os apoios (pilares) foram considerados como pontuais, o que não pode ser considerado em uma situação real. A influência do pilar na modelagem, deve ser melhor analisada, quando esse for considerado.

7 CONCLUSÕES

Da revisão bibliográfica concluiu-se que há poucos trabalhos que relatam o comportamento dinâmico das lajes nervuradas bidirecionais, o que gera uma dificuldade para obter dados que validem modelagens computacionais, fato que ressalta a importância da presente tese.

O estudo experimental realizado mostrou que os modelos computacionais representam adequadamente os valores obtidos experimentalmente. Com relação a esses métodos de análise, destacam-se:

- Para realizar a análise não linear simplificada no método por analogia de grelhas, a alteração do índice no cálculo do momento de inércia equivalente entre os valores 3 e 4 não gerou significativa mudança no comportamento da estrutura. Porém a adoção do índice com valor 4, gerou deslocamentos um pouco maiores, estando assim, a favor da segurança;
- Com relação à adoção do momento fletor na equação do momento de inércia equivalente, entre o valor médio e o valor máximo, destaca-se, adotar o valor máximo, pelo mesmo motivo relatado anteriormente, estar a favor da segurança;
- Na equação do momento de inércia equivalente, combinar o índice 3 com o valor médio dos momentos fletores obtidos nos elementos de barra, deve ser evitado, pois nos modelos computacionais, gerou-se uma estrutura mais rígida, com deslocamentos menores que os obtidos experimentalmente;
- O aumento da altura da nervura modificou completamente o comportamento da laje, quando analisada por analogia de grelhas. As lajes L1 e L2 geraram resultados mais próximos dos experimentais, quando a rigidez à torção foi adotada em sua integralidade. Já para a laje L3, o modelo que melhor representou seu comportamento, desprezava 85% da rigidez à torção das barras;
- Em situação de fissuração no concreto, reduzir a rigidez à torção das vigas a 15% do valor integral gerou valores coerentes para os deslocamentos obtidos por analogia de grelhas com relação aos valores experimentais. Essa situação confirma a orientação da NBR 6118 (ABNT, 2014);

- A análise não linear simplificada gerou resultados melhores que a análise linear, mesmo para pequenos deslocamentos;
- Analisar lajes nervuradas por analogia de grelhas é extremamente simples e eficiente, fornecendo valores coerentes com os dados experimentais na análise estática e dinâmica;
- Devido a limitação computacional observada neste trabalho na análise não linear utilizando o programa *SAP2000*, necessitou-se simplificar o diagrama tensão-deformação após a fissuração do concreto. Para essa simplificação, os melhores resultados foram gerados considerando a tensão de tração máxima como 70% do valor determinado pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Esse valor é próximo ao obtido por Schwetz (2011) (75%).
- Modelar lajes nervuradas por analogia de grelhas é mais simples que por elemento de casca, porém nesse último a geometria da estrutura é obtida naturalmente. Não havendo necessidade de definir tantos parâmetros quando na análise por analogia de grelhas;
- Os modelos numéricos analisados neste trabalho conseguiram representar adequadamente as frequências fundamentais das lajes, antes dos ciclos de carga, porém, não após os ciclos. Ao descarregar as lajes, há uma recuperação elástica, o que não ocorre nos modelos numéricos; e
- A análise não linear simplificada utilizando o momento de inércia equivalente mostrou-se adequada à análise de lajes nervuradas.

O estudo paramétrico desenvolvido revela que as vigas de borda podem influenciar no valor da frequência fundamental da laje. Segundo as análises, quando a viga é mais flexível, essa contribui com a massa modal do primeiro modo da laje. Quando apresenta maior rigidez, deixa de contribuir com a massa do primeiro modo de vibração. Atrelado a esse fato, é observado que quanto maior a rigidez da viga, maior a rigidez do primeiro modo de vibração da laje.

É constatado que entre os fatores analisados no estudo paramétrico, um dos que mais altera a frequência fundamental da laje nervurada é a altura da nervura. Essa alteração modificou também a forma de considerar a rigidez à torção na análise por analogia de grelhas.

Como sugestão para trabalhos futuros indica-se: realizar estudo numérico e experimental sobre a relação entre a altura da nervura e a rigidez à torção nas lajes nervuradas

bidirecionais; e analisar o comportamento de lajes nervuradas perante outros tipos de vínculos de apoios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDUL-WAHAB, H. M. S; KHALIL, M. H. *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffles slab*. 2000.
- ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projetos de estruturas de concreto: Procedimentos**. Rio de Janeiro, 2014.
- ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Rio de Janeiro, 2008.
- ANDRADE, K.F; DONIN, C. **Contribuições à Análise Linear e Não Linear de Lajes Nervuradas Empregando o Método dos Elementos Finitos**. Engenharia Estudo e Pesquisa. ABPE, v. 19 - n. 1 - p. 18-24 - jan./jun. 2019.
- ANTONIOU, A. *Digital filters. Analysis, design, and signal processing applications*. Mc Graw Hill. 2018.
- ARAÚJO, J. M. **A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado**. 2006. Teoria e prática na engenharia civil, n 8, p1-9, Abril.
- ARAÚJO, J. M. **Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado**. 2005. Teoria e prática na engenharia civil, n 7, p1-8, Setembro.
- AZEVEDO, A.F.M. **Método dos elementos finitos**. 1ª Edição. 2003.
- BACHMANN, H.; AMMANN, W.J.; DEISCHL, F.; EISENMANN, J.; FLOEGL, I.; HIRSCH, G.H.; KLEIN, G.H.; LANDE, G.J.; MAHREHOLTZ, O.; NATKE, H.G.; NUSSBAUMER, H.; PRETLOVE, A.; RAINER, J.H.; SAEMANN, E.; AND STEINBEISSER, L. *Vibration problems in structures. Practical guidelines*. Birkhauser, 1995.
- BOCCHI JR., C. F.; GIONGO, J. M. **Concreto armado: projeto e construção de laje nervurada**. 2010. Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BOCCHI JR, C. F. **Lajes nervuradas de concreto armado: projeto e execução**. 1995. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARVALHO, R.C; FILHO, J.R.F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. 2013. 3ª ed. Edufscar.
- CARVALHO, R.C; PINHEIRO, L.M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. Volume 2. 2009. 1ª ed. São Paulo. Pini.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. 1995. 3.ed. Berkeley: Computers & Structures.
- CASTRO, L. M. S. **Modelação de Lajes com Elementos de Grelha**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2001

COSTA, Y.C.V. **Análise paramétrica de vibrações em laje nervurada devido às ações humanas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

COSTA, Y.C.V.; ARAÚJO, T.D. *Evaluation of dynamic behavior of waffle slab to gym center*. Latin American Journal of Solids and Structures. 11 (7). 2014.

D'Avila, V. M. R. **Estudo sobre Modelos de Fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado em engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

DIAS, R. H. **Análise numérica de pavimentos de edifícios em lajes nervuradas**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

DONIN, C. **Análise numérica de lajes nervuradas por meio do método dos elementos finitos**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul.

DUTRA, C. **Análise teórica e experimental de lajes cogumelo nervuradas em escala reduzida**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria. 2005.

ELLIS, B.R. *Dynamic monitoring*. In: ARMER, G.S.T. *Monitoring and assessment of structures*. London and New York. Taylor & Francis. 2001. p.8 – 31.

FAISCA, R. G. **Caracterização de cargas dinâmicas geradas por atividades humanas**. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2003

FARRAR, C.R.; BAKER, W.E.; DOVE, R.C. *Dynamic parameter similitude for concrete models*. ACI Structural Journal, v.91, n.1, p.90-99, Jan-Feb 1994.

GERE, J.M.; WEAVER JR., W. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Editora Guanabara Dois S. A. Rio de Janeiro – RJ, 1981.

GRACE, N.F; KENNEDY, J.B. *Dynamic characteristic of prestressed waffles slabs*. 1990.

HAMBLY, E.C. *Bridge deck behaviour*. Second edition. New York, Routledge. 1991.

HARRIS, H.G; SABNIS, G.M. *Structural modeling and experimental techniques*. Second edition. Boca Raton, Florida. CRC Press. 1999.

HOWARD, C. Q.; HANSEN, C. H. *Vibration analysis of waffles floors*. 2002. *Computers and structures. Department of Mechanical Engineering, University of Adelaide, South Australia, Australia*.

INMAM, D.J. *Engineering vibration*. 4 ed. Pearson. 2014.

INVENSENSE. *MPU-6000 and MPU-6050 product specification*. 2013.

JUNGES, E. **Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado.** Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2011.

ROCHA JUNIOR, J.D. **Análise de desgaste em mancais radiais de motores usando instrumentação de baixo custo.** Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2020.

JI, X.; HUANG, T.; LU, L.; CHEN, S. **An experimental study of the in-plane characteristics of waffles slab panels.** 1985.

KIM, S.; CHOI, S. W. **Experimental and analytical investigation based on 1/2 scale model for a cleanroom unit module consisting of steel section and reinforced concrete.** Advances in Materials Science and Engineering. 2016.

LAGO; F. S. **Estudo numérico e experimental de parâmetros de vibrações em lajes de concreto.** 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharias) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo.

LEITE, M. R. S.; SILVA, J. G. S.; TAVARES, M. E. N., SOEIRO, F. J. C. P. **Estudo do comportamento estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado.** 2010. Asociación de mecánica computacional. Vol. XXIX, pp. 9929-9937. Buenos Aires, Argentina, 15-18 Novembro, 2010.

LEITE, M. R. S. **Modelagem do comportamento estrutural estático e dinâmico de lajes nervuradas de concreto armado.** Rio de Janeiro, 2012. 143f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

MARTHA, L.F.C.R. (2010). **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MURRAY, T. M.; ALLEN, D. E.; UNGAR, E. E. **Floor vibration due to human activity, steel design guide series.** AISC Steel Design Guide Series, Chicago, USA, 1997.

NÓBREGA, P.G.B. **Análise dinâmica de estruturas de concreto: estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas.** São Carlos, 2004. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2004.

PARK, R.; GAMBLE, W.L. **Reinforced concrete slabs.** 2000. 2ª ed. John Wiley & Sons, Inc.

PCI Design Handbook: precast and prestressed concrete. 6ª ed. Chicago. Precast/Prestressed Concrete Institute. 2004.

PEPPER, D.W.; HEINRICH, J.C. **The finite element method.** 3ª edição. 2017.

PORTO, T.B., FERNANDES, D.S.G. **Curso básico de concreto armado: conforme NBR 1618/2014.** São Paulo: Oficina de textos. 2015.

RAIA, F. **Estudo experimental dos efeitos da temperatura em pavimentos de concreto instrumentado**. Tese (Doutorado). Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares. 2010.

RECALDE, B.R.B.; GASTAL, F.P.S.L.; BESSA, V.R.D.; SCHWETZ, P.F. *Numerical analysis of waffle slabs in fluxure considering the effects of concrete cracking*. V. 8, N° 2. p. 225-247. 2015

RIOS, R.D. **Determinação das propriedades dinâmicas das estruturas mediante o emprego de modelos em escala reduzida**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 2011. 6ª ed. Pearson.

SALOMÃO, Í.L.; VELASCO, V.L.S.; SOTELINO, E.D. **Análise numérica da eficiência de lajes nervuradas tridirecionais**. Revista CIATEC – UPF, vol.7 (2), p.p.1-17, 2015

SARTORTI, A.L. **Comportamento Dinâmico de Lajes Maciças de Concreto Leve com Pérolas de EPS**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia Civil (Estruturas)) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SCHWETZ, P. F. **Análise numérico-experimental de lajes nervuradas sujeitas a cargas estáticas de serviço**. 2011. Tese (Doutorado em Engenharia na modalidade acadêmico) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SCHWETZ, P. F. **Análise teórico-experimental de uma laje nervurada em modelo reduzido sujeita a um carregamento linear**. 2005. Dissertação (Mestre em Engenharia na modalidade acadêmico) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SELISTRE, S.L.C. **Análise teórico-experimental de uma laje nervurada de microconcreto armado submetido a um carregamento uniformemente distribuído**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Porto Alegre - RS. 2000.

SHTAERMAN, M. I.; IAVINSKI, A. M. *Entrepisos sin vigas*. 2 ed. Montevideo: Inter Ciência, 1960.

SILVA, M. A. F. **Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo.

SILVA, N. M. T. F. **Análise estática e dinâmica de lajes nervuradas de concreto armado**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro.

SORIANO, H. L. **Introdução a dinâmica de estruturas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier. 2014

STRAMANDINOLI, J. S. B. **Contribuições à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. *Thin plates and shells: theory, analysis and applications*. 2001. Taylor & Francis.

ZHU, B. *Element Method – Fundamentals and applications in civil, hydraulic, mechanical and aeronautical engineering*. Wiley. 2018.

APÊNDICE A – ROTINA PARA CÁLCULO DOS MOMENTOS CARACTERÍSTICO E DE RUPTURA EM LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON

Dados de entrada (unidades em N e m):

- bitola (diâmetro da barra de aço);
 - A_s (área de aço);
 - f_{yd} (resistência de cálculo do aço);
 - largura_mesa (largura da mesa da seção considerada);
 - f_{ck} (resistência característica do concreto);
 - d (altura útil).
-

Descobrimo o valor de K_x :

```
Kx=0
for i in range(200000):
    if (Kx*0.59*(((Kx/(1-Kx))*10)**(1/2))) < ((As*fyd)/(0.68*largura_mesa*d*fcd)):
        Kx=Kx+0.000001
    else:
        break
```

```
ecd = (Kx/(1-Kx))*10
if ecd < 2:
    beta = 0.59*(ecd**(1/2))
else:
    beta = 1.25*(1-(0.67/ecd))
```

Cálculo do momento de projeto no domínio 2:

```
x = ((np.pi*((bitola/2)**2))*fyd)/(beta*0.68*(largura_mesa)*fcd)
Kx = x/d
Kz = 1-(0.4*Kx)
Md=beta*0.68*Kx*Kz*largura_mesa*d*d*fcd
```

Momentos:

```
Momento característico ou de serviço (Mk) = Md/1.4
Momento de ruptura ou de projeto (Md) = Md
```

APÊNDICE B – PLANILHA DE NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

Caderneta de nivelamento geométrico antes dos ensaios				
Ponto Visado	Plano de referência (m)	Leituras na mira (m)		Cotas (m)
		Ré	Vante	
RN	11,393	1,393	 	10,000
1		 	1,257	10,136
2		 	1,258	10,135
3		 	1,259	10,134
4		 	1,258	10,135
5		 	1,258	10,135
6		 	1,260	10,133
6 (BIS)	11,511	1,378	 	
RN		 	1,511	10,000

Caderneta de nivelamento geométrico após dos ensaios				
Ponto Visado	Plano de referência (m)	Leituras na mira (m)		Cotas (m)
		Ré	Vante	
RN	11,532	1,532		10,000
1			1,396	10,136
2			1,397	10,135
3			1,398	10,134
4			1,397	10,135
5			1,397	10,135
6			1,399	10,133
1 (BIS)	11,901	1,765		
RN			1,901	10,000