UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

“ Um Problema Relacionado à Equação de Stokes em Domínios Lipschitz ”

por

Jorge Luis Domínguez Rodríguez

Tese submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, 30 de agosto de 2010.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rodríguez, Jorge Luis Domínguez

“ Um Problema Relacionado à Equação de Stokes em Domínios Lipschitz ” / Jorge Luis Domínguez Rodríguez.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2010.

93 p.: il.

Tese (doutorado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2010.
Orientador: Thompson, Mark

Tese: Análise Aplicada
Equações de Navier-Stokes, Fluidos compressíveis, Potenciais de Camada

“ Um Problema Relacionado à Equação de Stokes em Domínios Lipschitz ”

por

Jorge Luis Domínguez Rodríguez

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Doutor em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Análise Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Leandro Farina
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
IMECC/UNICAMP

Tese apresentada e aprovada em
30 de agosto de 2010.

Prof. Waldir Leite Roque.
Coordenador

Sumário

DEDICATÓRIA

A **Deus**, pois sem Ele, nada seria possível.

A minha mãe, **Tarcila Angelita Rodríguez Muguerza**, pelo esforço, dedicação e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas.

A meus filhos; **Michelle, Angeles e Thiago**, motivo de entusiasmo e paixão pela vida.

A minha família que soube entender a minha ausência nos muitos momentos desde que ingressei no doutorado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor **Mark Thompson** pela orientação, confiança, paciência e apoio continuo na realização deste trabalho.

A minha mãe, **Tarcila Angelita Rodríguez Muguerza**, os mais profundos agradecimentos por suas sábias lições de esperança; sempre repetindo palavras essenciais; como, por exemplo, amor, crença, compreensão, alegria. Pelo apoio nos momentos difíceis e de inquietantes decisões; por estar ao meu lado a cada passo, a cada pequena conquista e grandes realizações, pois estes não teriam valor se você não estivesse comigo.

A todos os professores do **PPGMAp** que participaram da minha formação.

Aos meus colegas pelos convívio, solidariedade e amizade compartilhadas todo esse tempo.

Às agências de fomento **CAPES** e **CNPQ** pelo apoio econômico para a realização do meu Doutorado.

RESUMO

Um problema auxiliar crucial à análise do problema de Stokes Compressível é estudado via a técnica de potenciais de camada dupla em regiões Lipschitz através de um método primeiro utilizado por Verchota e subseqüentemente estendido ao caso parabólico por Brown e Shen. Desse modo, mediante a utilização e cálculo da condição de salto na fronteira é possível estabelecer a existência e unicidade da solução em apropriados espaços funcionais via o estudo de potenciais de camada.

Palavras-chave: Equações de Navier Stokes, Fluidos Compressíveis, Potenciais de Camada.

ABSTRACT

An auxiliary problem crucial to the analysis of the compressible Stokes problem is studied by means of the technique of double layer in Lipschitz regions through a method first used by Verchota and subsequently extended to the parabolic case by Brown and Shen. In this way through the use and calculation of the boundary jump condition it is possible to establish the existence and unicity of the solution in appropriate function spaces via the study of boundary layer potentials.

Keywords:: Navier Stokes Equation, Compressible Fluids, Layer Potential.

INTRODUÇÃO

A teoria de operadores integrais singulares de Calderón e Zygmund teve um imenso impacto na teoria geral de equações diferenciais e em extensões à teoria de análise micro-local e aplicações topológicas, entre as quais a teoria de índice de sistemas elípticos (veja [1, 49] e [53]).

Num certo sentido, isto é a teoria de alta regularidade. As aplicações às situações geométricas menos regulares demoraram a ser desenvolvidas e têm origem novamente num resultado de Calderón num trabalho seminal [8] sobre a limitação da integral de Cauchy sobre curvas em $\mathbb{R}^2$ com norma de Lipschitz pequena. Quase imediatamente este resultado foi aproveitado por Fabes, Jodeit e Riviére [25] para estabelecer para C^1-domínios com dados em L^p, $1 < p < \infty$, a existência de soluções únicas dos problemas de Dirichlet e Neumann via técnicas de potencial de camada.

Em 1981 Coifman, McIntosh e Meyer [13] num trabalho fundamental mostraram que a restrição sobre a norma de Lipschitz poderia ser removida no caso da integral de Cauchy, abrindo caminho para a análise da invertibilidade das equações integrais definidas via potenciais de camada para a equação de Laplace em regiões Lipschitz em $\mathbb{R}^n$ sobre condições de Dirichlet e Neumann (veja [17, 60]). Considerando a integral singular

$$g(x) = p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + i\varphi'(y)}{x - y + i\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right)} f(y)\, dy$$

onde φ é uma função Lipschitz, tem-se a estimativa

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\,(1 + M)^9\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

onde C é uma constante absoluta e M é a constante de Lipschitz associada com φ.

Outros sistemas elípticos clássicos tem sido tratados por este método (veja [18, 19]) e, para uma abordagem geral de operadores de segunda ordem, o trabalho de Costabel [16]. O trabalho de Itô [33] traz à luz questões importantes sobre problemas não homogêneos e domínio dos operadores de Laplace em regiões de Lipschitz (generalizado em [7] ao problema incompressível de Stokes).

Logo após, resultados foram obtidos para os problemas iniciais de Dirichlet e Neumann para a equação de calor em cilindros de Lipszchitz (veja [3, 4] e [24]) e para problemas de fronteira [6]. A importância das equações de Navier-Stokes compressíveis e incompressíveis levou ao estudo dos problemas de Stokes compressível e incompressível em regiões irregulares em vários trabalhos, entre os quais citamos [7, 11] e [42] (incompressível) e em domínios poligonais os trabalhos [39, 40, 41] para o problema de Stokes compressível.

Na generalização de Brown e Shen [5], é estudado o operador de Stokes $A:\, \mathcal{D}\,(A) \to L^2_\sigma$ dado por

$$\int_\Omega Au \cdot \phi = Q(u, \phi) \;\; para \;\; todo \;\; \phi \in \mathcal{C}^{\,\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$$

onde

$$\mathcal{C}^{\,\infty}_{0,\sigma}(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^{\,\infty}_{0}(\Omega) \;\; : \;\; \operatorname{div} \phi = 0\}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^{\,3}$ é um domínio Lipschitz limitado, $L^2_\sigma(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}^{\,\infty}_{0,\sigma}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e

$$Q(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; d\boldsymbol{x}$$

O resultado principal mostra que o domínio de A esta contido em $W^{1,p}_0(\Omega) \cap W^{3/2,2}(\Omega)$, para algum $p > 3$. Este resultado pode ser usado para provar a regularidade de soluções fortes das equações de Navier-Stokes em domínios não suaves.

No trabalho de Kweon e Kellogg [40] é estudada uma forma muito simples do problema de Stokes compressível sobre um domínio poligonal (convexo ou não convexo). Considera-se o sistema

$$\begin{aligned}
-\mu\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f} \quad em \;\; D, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla p &= \boldsymbol{g} \quad em \;\; D, \\
\boldsymbol{u} &= 0 \quad sobre \;\; \partial D, \\
p &= 0 \quad sobre \;\; \partial D_{in}
\end{aligned}$$

onde D é um domínio aberto e limitado no plano com fronteira poligonal, $\boldsymbol{U} = [1, 0]$ e o influxo na fronteira ∂D_{in} é dado por

$$\partial D_{in} = \{\boldsymbol{x} \in \partial D \ : \ \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} < 0\}$$

onde $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2]$ denota o vetor normal unitário exterior a ∂D. Neste trabalho é provada a decomposição da velocidade em partes singular e regular

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_s, \quad \textit{com} \quad \boldsymbol{u}_s \in \left(H^2(D)\right)^2 \times H^1(D)$$

Já Shen [51] estudou o problema de valor de fronteira em cilindros Lipschitz para o sistema parabólico

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$

onde $\mu > 0$, $\lambda > -2\mu/n$ são constantes. A este sistema está associado a matriz solução fundamental $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}, t) = \{\Gamma_{jk}(\boldsymbol{x}, t)\}_{n \times n}$ onde

$$\Gamma_{jk}(\boldsymbol{x}, t) = \delta_{jk} \Omega(\boldsymbol{x}, \mu t) + \int_{\mu t}^{(\lambda+2\mu)t} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x}, s)\, ds$$

e $\Omega(\boldsymbol{x}, t)$ denota a solução fundamental da equação do calor. Usando as fórmulas de Rellich e o argumento de Brown [3] desenvolvido para a equação do calor, é mostrado que, para a solução $\boldsymbol{u}$ do sistema parabólico, a norma L^2 da derivada conormal é essencialmente comparável com a soma da norma L^2 das derivadas tangencial e a norma L^2 de semi-ordem no tempo:

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \nu} \right\|_{L^2(S_T)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(S_T)} \sim \|\nabla_{\tan} \boldsymbol{u}\|_{L^2(S_T)} + \left\| D_t^{1/2} \boldsymbol{u} \right\|_{L^2(S_T)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(S_T)}$$

Nossa atenção foi atraída a este problema pelos últimos trabalhos citados e pelo trabalho de Mucha e Zajaczkwski [48] que trabalha em domínios regulares estabelecendo diversas estimativas a priori sobre as soluções. Considerando o sistema linear

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t - \mu \Delta \boldsymbol{u} - \nu \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + a \nabla \eta &= \boldsymbol{f} \quad \textit{em} \ \ D_T, \\ \eta_t + b \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 \quad \textit{em} \ \ D_T, \\ \boldsymbol{u} &= 0 \quad \textit{sobre} \ \ S_T, \\ \boldsymbol{u}\,|_{t=0} = 0, \ \ \eta\,|_{t=0} &= 0 \quad \textit{sobre} \ \ D, \end{aligned}$$

a seguinte estimativa é obtida:

$$
\begin{aligned}
\|\, \boldsymbol{u}\, \|_{W_r^{2,1}(D_T)} + \|\eta\|_{W_r^{1,0}(D_T)} + \|\eta_t\|_{W_r^{1,0}(D_T)} \\
\leq A \Big(\|\, \boldsymbol{f}\, \|_{L^r(D_T)} + \|\, \boldsymbol{f}\, \|_{L^2(D_T)} + \|\, \boldsymbol{g}\, \|_{W_r^{1,0}(D_T)} \\
+ \|\, \boldsymbol{g}\, \|_{W_2^{1,0}(D_T)} + \|\, \boldsymbol{u}\, \|_{L^2(D_T)} + \|\eta\|_{L^2(D_T)} \Big) ,
\end{aligned}
$$

onde $r \geq 2$ e A é independente de T.

De fato, sentimos uma certa insatisfação com a seqüência complicada de passos analíticos utilizados naquele trabalho e o desejo de ter uma abordagem mas direta como estabelecido por Brown e Shen [5] para o problema de Stokes incompressível. Isto exige a construção de um parametrise ou solução fundamental, o qual é uma perturbação (regular) limitada do núcleo introduzido por Brown e Shen. Trabalhando com o sistema de Navier Stokes linearizado (ver Capítulo 4)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t - \mu\Delta \boldsymbol{u} - \nu\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \frac{c^2}{\rho}\nabla\eta &= \boldsymbol{f} \;, && \text{em} \quad D_T, \\
\eta_t + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= g \;, && \text{em} \quad D_T, \\
\boldsymbol{u} &= 0 \;, && \text{sobre} \quad S_T, \\
\boldsymbol{u}\big|_{t=0}, \;\; \eta\big|_{t=0} &= 0 \;, && \text{sobre} \quad D,
\end{aligned}
$$

através de uma longa serie de cálculos e construções, obtemos a matriz solução fundamental

$$
\mathbb{G}_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) - \mathscr{R}_{ij} \left(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right)(\boldsymbol{x}, t).
$$

Observamos que o núcleo encontrado é uma perturbação daquele encontrado por Shen e $\mathscr{R}_{ij} = (-\Delta)^{-1}\partial_{ij}$ é um operador diferencial de ordem zero.

Nos capítulos 1 e 2 apresentamos alguns conceitos preliminares, como a teoria de potenciais parabólicos, operadores integrais e a teoria de semigrupos. Também apresentamos a solução da equação do calor, definida como potencial de camada dupla no caso do problema de Dirichlet.

O capítulo 3 é a base fundamental para o desenvolvimento do trabalho de tese aqui apresentado. Neste capítulo, considerando a equação de tração introduzida por Z. Shen e R. Brown [3, 4, 5, 6, 7],

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mu\Delta\, \boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\,(\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}\,) + \boldsymbol{f}\,,$$

definimos o potencial de camada dupla utilizando o operador tração

$$\boldsymbol{v}\,(\,\boldsymbol{x}\,,t) = \mathscr{H}(\,\boldsymbol{f}\,)(\,\boldsymbol{x}\,,t) = \int_0^t \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\,\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{x}\,-\,\boldsymbol{q}\,,t-s) \right\}^{Tr} \boldsymbol{f}\,(\,\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds.$$

Nos Capítulos 4 e 5 definimos e analisamos propriedades dos potenciais de camada, incluindo suas propriedades de salto, usamos resultados padrão de compacidade e um resultado de Coifman e Meier [14]. Para o potencial de camada dupla

$$\mathcal{D}\,(\,\boldsymbol{g}\,)(\,\boldsymbol{x}\,,t) = \int_0^t \int_{\partial D} \left[\frac{\partial\,\mathbb{G}\,(\,\boldsymbol{x}\,-\,\boldsymbol{q}\,,t-s)}{\partial \nu_t(\,\boldsymbol{q}\,)} \right]^{Tr} \boldsymbol{g}\,(\,\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds,$$

considerando o problema de Dirichlet interior

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \mu\Delta\,\boldsymbol{u}\, - \nu\nabla\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}\, - c^2\int_0^t (\nabla\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}\,)(\,\boldsymbol{x}\,,\theta)\;d\theta \;&=\; \boldsymbol{F}\,, \qquad (\,\boldsymbol{x}\,,t) \in D_T, \\ \boldsymbol{u} \;&=\; \boldsymbol{g} \quad \textit{sobre}\;\; \partial D, \\ \boldsymbol{u}\,(\,\boldsymbol{x}\,,0) \;&=\; 0, \quad\; \boldsymbol{x}\, \in D, \end{aligned} \tag{1}$$

onde D é um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^3$, $D_T = D \times (0,T)$. Assim temos

$$\mathcal{D}\,(\,\boldsymbol{g}\,)(\,\boldsymbol{p}\,,t) \;\;=\;\; \left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\boldsymbol{g}\,(\,\boldsymbol{p}\,,t) \;\;, \qquad (\,\boldsymbol{p}\,,t) \in S_T, \tag{2}$$

onde $S_T = \partial D \times (0,T)$, $K(\,\boldsymbol{g}\,(\,\boldsymbol{p}\,,t))$ é um operador limitado trabalhado por Brown e Shen e $C(\,\boldsymbol{g}\,(\,\boldsymbol{p}\,,t))$ é um operador compacto em $L^2(S_T)$.

Finalmente, modificando um método de Liu [44] aplicado à equação de Helmholtz (também uma perturbação regular de um problema básico inversível) estabelecemos a existência de uma única solução em $L^2(S_T)$ do problema de Dirichlet interior.

No capítulo 6, ultimo desta tese, motivados pela tese de doutorado de Tunde Jakab, orientada por Marius Mitrea [34, University of Missouri-Columbia 2006] apresentamos uma breve descrição do problema tratado em espaços parabólicos de Besov com a teoria de potenciais de camada parabólicos,

$$\begin{aligned} (\partial_t - L)\,\boldsymbol{u} \;&=\; \boldsymbol{f}\,, \qquad (\boldsymbol{x}\,,t) \in D \times (0,T), \\ \text{traço } \boldsymbol{u} \;&=\; \boldsymbol{g} \quad \text{ sobre } \; \partial D, \\ \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}\,,0) \;&=\; 0, \quad \boldsymbol{x} \in D, \end{aligned} \tag{3}$$

onde D é um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^3$, e

$$L\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nu\nabla\,\text{div}\,\boldsymbol{u} + c^2\int_0^t (\nabla\,\text{div}\,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}\,,\theta)\;d\theta.$$

Mostramos que os operadores

$$(\partial_t - L):\ {}_0B^2_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T)) \longrightarrow_0 B^2_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))$$

$$(\partial_t - L):\ {}^0B^2_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T)) \longrightarrow^0 B^2_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))$$

são limitados e no Teorema 6.3.1, dada $\boldsymbol{f} \in {}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))$, mostramos que existe $\boldsymbol{w} \in {}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))$ tal que

$$(\partial_t - L)\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \;\in\; \Omega\times(0,T),$$

$$\boldsymbol{w} = 0\,, \quad t = \text{sobre } \; \partial D,$$

$$\boldsymbol{w} = 0\,, \quad t = 0,$$

e

$$\|\,\boldsymbol{w}\,\|_{\,{}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \le c\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\,{}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))}.$$

Observamos que, usando este resultado, poderíamos reduzir o problema não homogêneo ao problema de fronteira de Dirichlet considerado no capítulo 5.

1 PRELIMINARES E PROBLEMAS AUXILIARES

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1.1. *Um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um* **domínio de Lipschitz** *se para cada $\boldsymbol{q} \in \partial D$ existe cilindro aberto truncado $Z(\boldsymbol{q}, r)$ centrado em $\boldsymbol{q}$, com raio r, cuja base está a uma distancia positiva de ∂D tal que existe um sistema coordenado retangular de $\mathbb{R}^n$, com eixo y_n, contendo o eixo de Z e uma função de Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, tal que*

$$Z \cap D = Z \cap \{(\boldsymbol{x}', x_n) \ : \ x_n > \phi(\boldsymbol{x}')$$

e $\boldsymbol{q} = (0, \phi(0))$.

Para cada $\boldsymbol{q} \in \partial D$, associamos um cone[1] $\Gamma(\boldsymbol{q})$, chamamos a família $\{\Gamma(\boldsymbol{q}) \ : \ \boldsymbol{q} \in \partial D\}$ regular se existe uma cobertura finita, por cilindros, de ∂D tal que para cada $(Z(\boldsymbol{p}, r), \phi)$ existem três cones $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3$ com vértices na origem e eixos ao longo dos eixos de Z tais que $\gamma_1 \subset \overline{\gamma_2} \setminus \{0\} \subset \gamma_3$, e para todo $(\boldsymbol{x}', \phi(\boldsymbol{x}')) = \boldsymbol{q} \in (4/5)Z \cap \partial D$,

$$\gamma_1 + \boldsymbol{q} \subset \Gamma(\boldsymbol{q}) \subset \overline{\Gamma(\boldsymbol{q})} \setminus \{\boldsymbol{q}\} \subset \gamma_2 + \boldsymbol{q}$$

$$\gamma_3 + \boldsymbol{q} \subset Z \cap D$$

e $\{(1/5)Z\}$ ainda cobre a fronteira de D.

Definição 1.1.2. *Dada uma família regular de cones $\{\Gamma\}$ e uma função $\boldsymbol{u}$ definida sobre D, define-se a* **Função Maximal não Tangencial Parabólica**

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{p}, t) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \Gamma(\boldsymbol{p})} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)|$$

[1] Por um cone entende-se um cone circular, aberto, truncado [51].

Definição 1.1.3. *Dizemos que* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ **converge no sentido não tangencial, quase sempre**, *para* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p},t)$ *se para qualquer família regular de cones* $\{\Gamma\}$, *temos*

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\,\to\,\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{x}\,\in\,\Gamma(\boldsymbol{p})}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p},t)\quad,\quad q.s\ sobre\ \ S_T$$

Entende-se que $\boldsymbol{u}$, *tem valor inicial* 0 *e escrevemos* $\boldsymbol{u}\big|_{t=0}=0$, *se* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\to 0$ *uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto de* D *quando* $t\to 0^+$.

Para uma função $\boldsymbol{u}$ definida em $\mathbb{R}^n\backslash\partial D$ ou $(\mathbb{R}^n\backslash\partial D)\times(0,T)$, usamos $\boldsymbol{u}_+$ ou $\boldsymbol{u}_-$ para denotar os limites não tangenciais de $\boldsymbol{u}$ tomados no interior de D e exterior $\overline{D}$ respectivamente. Definimos $D_+=D$ e $D_-=\mathbb{R}^n\backslash\overline{D}$.

O seguinte Lema que apresentamos será utilizado em algumas estimativas no capítulo 3, a demonstração pode ser encontrada no livro de Friedman [31].

Lema 1.1.1. *Seja* D *um domínio limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $0<\alpha<n$, $0<\beta<n$, *então para qualquer* $\boldsymbol{x}\in D$, $\boldsymbol{z}\in D$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{z}$, $D_T=D\times(0,T)$, $S_T=\partial D\times(0,T)$ *para* $T\in(0,\infty)$. *Usamos* $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *pontos em* $D\subset\mathbb{R}^n$ *e* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *denotam pontos na fronteira* ∂D.

$$\int_D \frac{d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\alpha}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}|^{\beta}}\leq\begin{cases} Const.|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|^{n-\alpha-\beta} & se\ \ \alpha+\beta>n,\\ Const. & se\ \ \alpha+\beta<n,\end{cases}$$

Definição 1.1.4. *Seja* $f\in\mathcal{C}^\infty(-\infty,T)$ *tal que* $f(t)=0$ *para* $t<0$. *Definimos as integrais e derivadas fracionárias:*

$$I_\sigma(f)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\sigma}}\,ds\qquad para\quad 0<\sigma\leq 1$$

e

$$D_t^\sigma(f)(t)=D_tI_{1-\sigma}(f)(t)\qquad para\quad 0<\sigma<1,$$

onde Γ *denota a função Gamma.*

Definição 1.1.5. *Para* $\boldsymbol{u}$ *definido numa vizinhança de* ∂D, *define-se o* **gradiente tangencial** *de* $\boldsymbol{u}$ *sobre* ∂D *por*

$$\nabla_{\tan}\boldsymbol{u}=\nabla\boldsymbol{u}-\langle\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{N}\rangle\,\boldsymbol{N}\,.$$

onde $\boldsymbol{N}$ o vetor normal unitário exterior a ∂D.

Seja $L^2_1(\partial D)$ o fecho do espaço

$$\left\{ \boldsymbol{v} \;:\; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\big|_{\partial D}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \right\}$$

com respeito à norma

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2_1(\partial D)} = \left(\int_{\partial D} \left(|\nabla_{\tan} \boldsymbol{v}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 \right) \, d\boldsymbol{p} \right)^{1/2}$$

Definição 1.1.6. *O espaço $L^p(0,T;X)$ consiste de todas as funções $\boldsymbol{u} : [0,T] \to X$ com*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^p(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^T \|\boldsymbol{u}\|_X^p \, dt \right)^{1/p} & , \quad 1 \le p < \infty \\ \\ ess \displaystyle\sup_{0 \le t \le T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_X & , \quad p = \infty \end{cases}$$

Para maiores detalhes sobre as definições anteriormente apresentadas veja [20, 33, 38, 52, 54].

1.1.1 Potenciais Parabólicos

Discutimos aqui algumas propriedades dos potenciais parabólicos; fazemos isto mediante alguns teoremas que apresentamos a seguir. Referenciamos o trabalho de Brown [3] para maiores detalhes no caso de potenciais do calor.

Seja $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ satisfazendo a estimativa

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|+\beta_0} \mathcal{A}}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta} \partial t^{\beta_0}}(\boldsymbol{x}, t) \right| \le \frac{C_0}{(|\boldsymbol{x}|^2 + t)^{(3+|\beta|+2\beta_0)/2}} \tag{1.1}$$

para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, $\beta_0 = 0, 1, 2$ e $|\beta| \le 2$ onde β é um multi-índice.

Seja $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \tau)$ a transformada de Fourier modificada na variável t de $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, t)$, i.e.,

$$\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-it\tau} \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, t) \, dt$$

O seguinte lema é uma conseqüência imediata da estimativa (1.1).

Lema 1.1.2.

$$\left|\frac{\partial^{|\beta|}\widehat{\mathcal{A}}}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}(\boldsymbol{x},\tau)\right| \leq C \min\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{1+|\beta|}}, \frac{1}{|\tau||\boldsymbol{x}|^{3+|\beta|}}\right),$$

para $|\beta| \leq 2$ *onde* C *depende somente de* C_0.

Seja $S_+ = \partial D \times (0,\infty)$. Para $\boldsymbol{f} \in L^2(S_+)$, defina

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \int_{\partial D} \mathcal{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t-s)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.1. *Seja* $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *satisfazendo* (1.1) *e* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ *definida como acima. Suponhamos*

$$\left\| p.v. \int_{\partial D} \frac{\partial \widehat{\mathcal{A}}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},0)h(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq C_1 \|h\|_{L^2(\partial D)}, \tag{1.3}$$

para $j = 1,2,3$ *e* $h \in L^2(\partial D)$. *Então*

(i) $\left\| p.v. \int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t-s)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds \right\|_{L^2(S_+)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(S_+)}$,

(ii) $\|(\nabla \boldsymbol{u})^*\|_{L^2(S_+)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(S_+)}$.

A prova deste teorema é baseada na desigualdade (1.1), no lema anterior e no argumento de Fabes and N. Riviere em [29].

Teorema 1.1.2. *Sejam* $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *satisfazendo* (1.1) *e* $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ *definida como em* (1.2). *Então*

(i) $\left\| p.v. \int_0^t \int_{\partial D} D_t^{1/2}\mathcal{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},t-s)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds \right\|_{L^2(S_+)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(S_+)}$,

(ii) $\|(\boldsymbol{u})^*\|_{L^2(S_+)} + \|(D_t^{1/2}\boldsymbol{u})^*\|_{L^2(S_+)} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(S_+)}$,

(iii) $D_t^{1/2}\boldsymbol{u}_+(\boldsymbol{p},t) = D_t^{1/2}\boldsymbol{u}_-(\boldsymbol{p},t)$ *quase sempre sobre* S_+.

Para $h \in L^2(\partial D)$, definimos

$$\boldsymbol{u}_{\tau}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial D} \widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q},\tau)h(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q}.$$

Teorema 1.1.3. *Seja* $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty))$ *satisfazendo* (1.1) *e* $\boldsymbol{u}_{\tau}(\boldsymbol{x})$ *definida como acima. Então*

(i) $\displaystyle \left\| p.v. \int_{\partial D} \frac{\partial \widehat{\mathcal{A}}}{\partial x_j}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \tau) h(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq C \|h\|_{L^2(\partial D)},$

(ii) $\displaystyle \left\| p.v. \int_{\partial D} |\tau|^{1/2} \widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, \tau) h(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{q} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq C \|h\|_{L^2(\partial D)},$

(iii) $\|(\boldsymbol{u}_{\tau})^*\|_{L^2(\partial D)} + \|(\nabla \boldsymbol{u}_{\tau})^*\|_{L^2(\partial D)} \leq C \|h\|_{L^2(\partial D)}.$

1.1.2 Aproximações por Domínios $\mathcal{C}^{\infty}$

Dado um domínio Lipschitz , D, podemos aproximar este por seqüências de domínios $\mathcal{C}^{\infty}$, $\Omega_k,\ k = 1, 2, \ldots$ (veja [3, 4] e [60]).

Lema 1.1.3. *[Russell M. Brown [3, Lema 2.2]] Seja D um domínio Lipschitz. Podemos construir seqüências de domínios, Ω_k, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, homeomorfismos $\Lambda_k : \partial D \to \partial \Omega_k$, funções $\sigma_k : \partial D \to \mathbb{R}^+$ e um campo vetorial $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, suave com suporte compacto tais que:*

1. *Os homeomorfismos $\Lambda_k : \partial D \to \partial \Omega_k$ satisfazem*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup\{|\boldsymbol{q} - \Lambda_k(\boldsymbol{q})| \ : \ \boldsymbol{q} \in \partial D\}\right) = 0$$

   e $\Lambda_k(\boldsymbol{p})$ aproxima $\boldsymbol{p}$ não tangencialmente. Isto significa que

$$|\boldsymbol{p} - \Lambda_k(\boldsymbol{p})| < (1+\beta)\,\mathrm{dist}\,(\Lambda_k(\boldsymbol{p}), \partial D), \qquad \beta = const.$$

2. *As normais $\boldsymbol{N}_k$ de $\partial \Omega_k$ satisfazem*

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{N}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{p})) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{p}).$$

3. *As funções σ_k satisfazem $\delta \leq \sigma_k \leq \delta^{-1}$ para algum $\delta > 0$, $\sigma_k \to 1$ pontualmente quase sempre e*

$$\int_E \sigma_k(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} = \int_{\Lambda_k(E)} d\boldsymbol{q}^k,$$

para $E \subset \partial D$ é mensurável e onde $d\boldsymbol{q}^k$ denota a medida de superfície sobre $\partial\Omega_k$.

4. *O campo vetorial $\boldsymbol{\alpha}$ satisfaz $\langle \boldsymbol{\alpha}\,, \boldsymbol{N}_k \rangle \geq c > 0$, $c = const$, quase sempre sobre cada $\partial\Omega_k$.*

5. *Podemos escolher a seqüência de domínios Ω_k tal que $\overline{\Omega}_k \subset \overline{\Omega}_{k+1} \subset \ldots \subset D$ e denotamos esta propriedade $\Omega_k \uparrow D$. Podemos também construir outra seqüência de domínios os quais aproximam D exteriormente $\Omega_k \supset \Omega_{k+1} \supset \ldots \supset \overline{D}$ e denotaremos $\Omega_k \downarrow D$*

Observação 1. *Usaremos as notações Ω e $\Sigma_T \equiv \partial\Omega \times (0, T)$ quando o domínio for suave.*

1.1.3 Resultados sobre Comutadores

Considere o comutador

$$[\partial_k \mathscr{K}_i, n_k(\boldsymbol{p})] = n_k(\boldsymbol{p})\partial_k \mathscr{K}_i \partial_j - \mathscr{K}_i \partial_j n_k(\boldsymbol{p})\partial_k$$

onde $\mathscr{K}_i = (-\Delta)^{-1}\partial_i$ e n_i são as componentes do vetor normal $\boldsymbol{N}$. Dos resultados de Lions [43], temos as seguintes conseqüências:

1. $\mathscr{R}_{ij} = (-\Delta)^{-1}\partial_{ij}$ é um operador integral singular do tipo Calderon-Zygmund (veja [37]) o qual é uma composição de duas transformadas de Riesz $(-\Delta)^{-1/2}\partial_i$ e $(-\Delta)^{-1/2}\partial_j$.

2. $\partial_k \mathscr{K}_i$, é um operador limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$, e dos resultados de Coifman & Meier [14] o comutador $[\partial_k \mathscr{K}_i, n_k(\boldsymbol{x})]$ é limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$ em $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

3. Se $n_k \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ então $[\partial_k \mathscr{K}_i, n_k(\boldsymbol{x})]$ é limitado de $L^p(\mathbb{R}^N)$ em $W^{1,q}(\mathbb{R}^N)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.

Lema 1.1.4. *Seja* $\boldsymbol{v} \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\boldsymbol{w} \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$, $r > \frac{2N}{N+2}$. *Então há constantes* $C = C(r) > 0$, $\omega = \omega(r) \in (0, \infty)$, $p = p(r) > 1$ *tal que*

$$\| \mathscr{R}_{i,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] \|_{W^{\omega,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^N)} \| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \tag{1.4}$$

Demonstração. Consideremos $\boldsymbol{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, então

$$\begin{aligned}
\| \mathscr{R}_{*,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{*,j}[v_j] \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} &\leq \| \mathscr{R}_{*,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{*,j}[v_j] \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\
&+ C \Big\{ \| \operatorname{div} (\mathscr{R}_{*,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{*,j}[v_j]) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \| \operatorname{curl} (\mathscr{R}_{*,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{*,j}[v_j]) \|_{L^p(\mathbb{R}^{N^2})} \Big\} \\
&= \| \mathscr{R}_{*,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{*,j}[v_j] \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\
&+ C \Big\{ \left\| \partial_{x_j} \boldsymbol{w}\, v_j - \partial_{x_i} \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \sum_{i \neq k} \| \partial_{x_k} \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] - \partial_{x_i} \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{k,j}[v_j] \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \Big\}
\end{aligned}$$

Aqui, as quantidades $\mathscr{R}_{*,j}$ são consideradas como campos vetoriais $[\mathscr{R}_{1,j}, \ldots, \mathscr{R}_{N,j}]$.

Dado que $\mathscr{R}_{i,j}$ é um operador limitado sobre qualquer espaço de Lebesgue L^q para $1 < q < \infty$, tem-se

$$\| \mathscr{R}_{i,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{W^{1,r_1}(\mathbb{R}^N)} \| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \tag{1.5}$$

sempre que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r_1} < 1.$$

Por outro lado, pelas desigualdades de Sobolev

$$\| \mathscr{R}_{i,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{W^{1,r_2}(\mathbb{R}^N)} \| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \tag{1.6}$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} + \frac{1}{r_2}.$$

De acordo com nossa hipótese, sempre podemos achar

$$r_2 < r < r_1, \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{N} < \frac{1}{2},$$

e conseqüentemente a estimativa desejada segue de (1.5), (1.6) via interpolação.

Mais especificamente, escrevendo

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{1-\alpha}{r_2}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

obtemos

$$\| \mathscr{R}_{i,j}[\boldsymbol{w}\, v_j] - \boldsymbol{w}\, \mathscr{R}_{i,j}[v_j] \|_{H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \| \boldsymbol{w} \|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^N)} \| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)},$$

onde $H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço potencial de Bessel contido dentro do espaço de Sobolev $W^{\omega,p}(\mathbb{R}^N)$, sempre que que $\omega < \alpha$. □

1.2 Operadores Integrais Fracamente Singulares

Sejam X, Y dois espaços normados.

Definição 1.2.1. *Um operador linear $A : X \to Y$, é chamado compacto se para todo conjunto limitado $U \subset X$, tem-se que $A(U) \subset Y$ é relativamente compacto*[2].

Agora enunciamos alguns resultados importantes de Mikhlin [47] e o conhecido Lema de Aubin-Lions [54]:

Um **operador integral fracamente singular** num espaço euclidiano é da forma

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_D \frac{A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^\lambda} d\boldsymbol{y} \tag{1.7}$$

Onde D é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ e $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é uma função mensurável limitada. A constante λ satisfaz a restrição $0 < \lambda < m$.

[2] *Um conjunto é chamado relativamente compacto se seu fecho é compacto, i.e., se cada subseqüência nele contem uma subseqüência convergente no espaço.*

No caso geral, um operador integral fracamente singular é definido por

$$F(\boldsymbol{x}) = \int_M \frac{A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})}{\rho^\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} d_y M,$$

onde M denota uma variedade limitada $m-$dimensional imersa num espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m'}$ $(m' \geq m)$ e $\rho^\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ é a distância entre os pontos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ na métrica de $\mathbb{R}^{m'}$. Utilizamos a seguinte versão restrita do Teorema de Mikhlin veja [47, cap. VIII, seção 3].

Teorema 1.2.1 (Mikhlin, Teorema 3.1, pág 210.). *O operador* (1.7) *considerado como uma aplicação de $L^p(D)$ em $L^q(D)$, $1 \leq p \leq \infty$ é limitado sempre que*

$$p \leq q \leq q*, \quad q^* := \begin{cases} \frac{mp}{m-p(m-\lambda)} & , \; p < \frac{m}{m-\lambda} \\ \infty & , \; p \geq \frac{m}{m-\lambda} \end{cases}$$

O operador é completamente continuo, se $p \leq q \leq q^*$ ou (no caso $q^* = \infty$) $p < q$.

Considere o espaço

$$\begin{aligned} \mathscr{Y} &= \mathscr{Y}\big(0, T; L^2(\partial D)\big) \\ &= \left\{ \boldsymbol{u} \in L^2(0, T; L^2(\partial D)), \boldsymbol{u}' = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\partial D)) \right\}. \end{aligned}$$

O espaço $\mathscr{Y}$ é dotado da norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathscr{Y}} = \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\partial D))} + \|\boldsymbol{u}'\|_{L^2(0,T;L^2(\partial D))},$$

o qual faz deste um espaço de Banach. É evidente que

$$\mathscr{Y} \subset L^2(0, T; L^2(\partial D)),$$

com uma injeção continua.

Teorema 1.2.2 (Aubin-Lions). *Sob as considerações anteriores a injeção de $\mathscr{Y}$ em $L^2(0, T; L^2(\partial D))$ é compacta.*

1.2.1 Regularização de Operadores

Seja A um operador linear de X em Y com domínio denso $D(A)$, X e Y dois espaços de Banach. Então para a equação

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \ , \quad (\boldsymbol{y} \in Y) \tag{1.8}$$

ter uma solução $\boldsymbol{x} \in D(A)$ é necessário que $\boldsymbol{y}$ seja ortonormal a $Ker(A^*)$.

De fato, se $\boldsymbol{x}$ é uma solução de (1.8), então, para $\boldsymbol{f} \in \ker A^*$,

$$(\boldsymbol{y}\,, \boldsymbol{f}\,) = (A\boldsymbol{x}\,, \boldsymbol{f}\,) = (\boldsymbol{x}\,, A^*\boldsymbol{f}\,) = (\boldsymbol{x}\,, 0) = 0.$$

Definição 1.2.2. *Um operador A é dito ser* **normally solvable** *no sentido de Hausdorff, se a condição de ortogonalidade é também suficiente para* (1.8) *ter uma solução $\boldsymbol{x} \in X$*

Teorema 1.2.3 (Banach - Hausdorff). [3] *Para um operador linear fechado $A : X \to Y$, com domínio denso, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$Im(A)$ é fechada.*
2. *A é normally solvable.*
3. *A^* é normally solvable.*
4. *$Im(A^*)$ é fechada em Y.*

Segue-se que se A é algebricamente inversível então $A^{-1} \in B(X, Y)$.

1.2.2 Teoria de Riesz

Considere a equação

$$\phi - A\phi = f, \qquad \phi \in X.$$

[3] *Para maiores detalhes veja [62]*

Para um espaço normando X e $A : X \to X$ um operador linear compacto definimos

$$L := I - A.$$

Teorema 1.2.4 (Primeiro Teorema de Riesz). *O espaço nulo do operador L*

$$\ker(L) := \{\phi \in X \ / \ L\phi = 0\},$$

é um subespaço de dimensão finita.

Demonstração. O subespaço nulo de um operador linear limitado é trivialmente um subespaço linear fechado de X, uma vez que para todo $\phi \in \ker(L)$ temos $A\phi = \phi$, a restrição de A para o espaço nulo $\ker(L)$ coincide com o operador identidade

$$A\big|_{N(L)} = I : \ker(L) \to \ker(L)$$

A é compacto sobre X e além do mais também é compacto sobre subespaços lineares fechados de X. Daí, $\ker(L)$ é de dimensão finita [15, Teorema 1.9]. $\square$

Teorema 1.2.5 (Segundo Teorema de Riesz). *A imagem do operador L*

$$L(X) := \{L\phi \in X \ / \ \phi \in X\}$$

é um subespaço linear fechado.

Demonstração. A imagem do operador linear L é claramente um subespaço. Seja $f \in \overline{L(X)}$, então existe uma seqüência $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ tal que

$$L\phi_n \to f, \quad n \to \infty,$$

para cada ϕ_n escolhemos um elemento $\mathcal{X}_n \in N(L)$ tal que

$$\|\phi_n - \mathcal{X}_n\| \leq \inf_{\mathcal{X} \in N(L)} \|\phi_n - \mathcal{X}\| + \frac{1}{n}.$$

A seqüência $\{\phi'_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\phi'_n := \phi_n - \mathcal{X}_n$$

é limitada.

De fato: Supondo o contrario, existe uma subseqüência $\left\{\phi'_{n(k)}\right\}$ tal que

$$\left\|\phi'_{n(k)}\right\| \geq k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Agora definimos

$$\psi_k := \frac{\phi'_{n(k)}}{\|\phi'_{n(k)}\|}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

uma vez que $\|\psi_k\| = 1, \quad k \in \mathbb{N}$, existe uma subseqüência $\{\psi_{k(j)}\}$ tal que

$$A\psi_{k(j)} \to \psi \in X, \qquad j \to \infty.$$

Além do mais,

$$\|L\psi_k\| = \frac{\|L\phi'_{n(k)}\|}{\|\phi'_{n(k)}\|} \leq \frac{\|L\phi_{n(k)}\|}{k} \to 0, \qquad j \to \infty,$$

desde que a seqüência $(L\phi_n)$ é convergente e além limitado. Daí

$$L\psi_{k(j)} \to 0, \qquad j \to \infty,$$

obtendo agora

$$\psi_{k(j)} = L\psi_{k(j)} + A\psi_{k(j)} \to \psi, \qquad j \to \infty,$$

dado que L é limitado, das duas equações previas concluímos

$$L\psi = 0.$$

Mais então uma vez que $\mathcal{X}_{n(k)} + \|\phi'_{n(k)}\|\psi \in N(L)$ para todo k encontramos

$$\begin{aligned}
\|\psi_k - \psi\| &= \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|} \left\|\phi_{n(k)} - \left(\mathcal{X}_{n(k)} + \|\phi'_{n(k)}\|\psi\right)\right\|, \\
&\geq \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|} \inf_{\mathcal{X} \in N(L)} \left\|\phi_{n(k)} - \mathcal{X}\right\|, \\
&\geq \frac{1}{\|\phi'_{n(k)}\|} \left(\left\|\phi_{n(k)} - \mathcal{X}_{n(k)}\right\| - \frac{1}{n(k)}\right), \\
&= 1 - \frac{1}{n(k)\|\phi'_{n(k)}\|} \to 1, \qquad k \to \infty.
\end{aligned}$$

o qual contradiz o fato que $\psi_{n(k)} \to \psi$, $j \to \infty$.

Além disso, a seqüência (ϕ'_n) é limitada e podemos e podemos escolher uma subseqüência $\left(\phi'_{n(k)}\right)$ tal que $(A\phi'_n)$ converge quando $k \to \infty$. Para $\phi'_{n(k)} = L\phi'_{n(k)} + A\phi'_{n(k)}$ observamos que $(\phi'_{n(k)})$ converge

$$\phi'_{n(k)} \to \phi \in \mathcal{X}, \quad k \to \infty.$$

Mas então $L\phi'_{n(k)} \to L\phi \in \mathcal{X}$ e além disso $f = L\phi \in L(X)$. Daí $\overline{L(X)} = L(X)$.

O operador iterativo L^n, $n \geq 1$, definido por

$$L^0 := I, \quad L^n := LL^{n-1},$$

pode ser escrito na forma

$$L^n = (I - A)^n = I - A_n,$$

onde

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) A^k$$

é compacto. Além os espaços nulos $\ker(L^n)$ são de dimensão finita e as imagens $L^n(X)$ são subespaços fechados. □

Teorema 1.2.6. *Seja $A : X \to X$ um operador linear compacto e $I - A$ injetivo. então o operador inverso $(I - A)^{-1}$ existe e é limitado.*

Demonstração. Da hipótese, $\ker(L) = \{0\}$, logo, por [15, Teorema 1.15] concluímos que

$$L(X) = X.$$

□

Corolário 1.2.1. *Se a equação homogênea*

$$\phi - A\phi = 0$$

somente tem a solução trivial $\phi = 0$, então para todo $f \in X$ a equação não homogênea

$$\phi - A\phi = f$$

tem uma única solução $\phi \in X$ e sua solução depende continuamente sobre f.

Teorema 1.2.7. *Seja X um espaço normado e $A : X \to X$ um operador linear compacto e assuma $I - A$ não injetiva. Então o espaço nulo* $\ker(I - A)$ *tem dimensão finita e a imagem $(I - A)X \subsetneq X$ é um subespaço proprio fechado.*

Corolário 1.2.2. *Se a equação homogênea*

$$\phi - A\phi = 0,$$

tem solução não-trivial, então a equação não homogênea

$$\phi - A\phi = f,$$

não tem solução ou sua solução geral é da forma

$$\phi = \phi^* + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k,$$

onde ϕ^* denota uma solução particular da equação não-homogênea, $\phi_1, \ldots, \phi_m$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea e $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são numeros complexos arbitrários.

Corolário 1.2.3. *Os Teoremas 1.2.6 e 1.2.7 e seus corolários são validos quando substituimos $I - A$ por $S - A$, onde S é um operador linear limitado que tem inversa limitada S^{-1}.*

Lema 1.2.1. *Para um operador fechado $A : X \to Y$ ser normally solvable e ter nulidade[4] finita é necessário e suficiente que exista um operador compacto T e uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| \boldsymbol{x} \| \leq C \left(\|A \boldsymbol{x}\| + \|T \boldsymbol{x}\| \right), \quad \forall \ \boldsymbol{x} \in D(A).$$

1.3 Semigrupo de Operadores

Considere o **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u}, & t > 0, \\ \boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

[4] *$\alpha = dim$ $\ker A$ é chamada a nulidade do operador A.*

num espaço de Hilbert H. O operador linear $\boldsymbol{A}$ é definido sobre algum subconjunto $D(A)$ de H. Queremos identificar a classe de operadores $\boldsymbol{A}$ para a qual podemos, em algum sentido, definir uma "solução" $e^{\boldsymbol{A}\,t}\boldsymbol{u}_0$.

Outro tópico importante pesquisado é o **problema de valor inicial não-homogêneo**

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} & = & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}\,, \quad t > 0, \\ \boldsymbol{v}\,(\cdot, 0) & = & \boldsymbol{v}_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^+ \to X$ é localmente L^1.

Aplicando variação de parâmetros, podemos mostrar que se $\boldsymbol{S}$ é um semigrupo gerado por $\boldsymbol{A}$, então qualquer solução $\boldsymbol{v}$ pode ser da forma

$$\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}\,, t) = \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,, t)\,\boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,, t-s)\,\boldsymbol{f}\,(s)\; ds, \quad t \geq 0.$$

Neste casso, a função $\boldsymbol{v}$ é chamada **solução suave** do problema não homogêneo.

As ideas desenvolvidas para equações não-homogêneas são importantes pata o estudo de equações não-lineares (ou semi-lineares). Por exemplo, consideremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{w}}{dt} & = & \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{w}\,, t), \quad < 0t < T, \\ \boldsymbol{w}\,(\cdot, 0) & = & \boldsymbol{w}_0, \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $\boldsymbol{f} : [0, T] \times X \to X$ é uma aplicação dada.

Seja $\mathfrak{C}$ o espaço de todas as funções continuas sobre $[0, T]$ e defina o operador $\mathcal{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ por

$$[\mathcal{F}\phi](\boldsymbol{x}\,, t) = \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,, t)\,\boldsymbol{w}_0 + \int_0^t \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,, t-s)\,\boldsymbol{f}\,(\phi(s), s)\; ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

para cada $\phi \in \mathfrak{C}$. Comparando (1.10) with (1.11) mostramos que qualquer solução de (1.11) pode ser um ponto fixo para a aplicação $\mathcal{F}$. Resultados e técnicas deste tipo são estudadas nos Capítulos 5 e 6 do livro de Pazy [50], para equações de evolução lineares[5]. As técnicas são baseadas na Teoria de semigrupos, as quais de fato são mas complicadas. (Veja [21], [22])

Definição 1.3.1. *Seja X um espaço de Banach. Um* **$\boldsymbol{\mathcal{C}}_0$-semigrupo de operadores** *é uma família de operadores lineares limitados $S(t) : X \to X$, $t \geq 0$, satisfazendo*

1. $S(t+s) = S(t)S(s), \qquad t, s \geq 0,$
2. $S(0) = I,$
3. $\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x$, *para qualquer* $x \in X$,

onde $S(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$.

Se, em adição, $\|S(t)\| \leq 1$ para $t \geq 0$ (propriedade de contração), S é dito um **semigrupo de contrações**.

Observação 2. *No caso de o espaço X ser de dimensão finita, o operador $\boldsymbol{A}$ em (3) é idêntico à derivada de $S(\cdot)$ em 0, ou seja,*

$$\frac{dS}{dt}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} = \boldsymbol{A}.$$

$\boldsymbol{A}$ é chamado de **Operador Infinitesimal** [62] ou **Gerador de** $S(t)$**,** $t \geq 0$. Este não é, em geral, um operador definido em todo X, mas o domínio $D(\boldsymbol{A})$ consiste de todos os $x \in X$ para os quais existe o limite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}$$

e o operador $\boldsymbol{A}$ é dado pela formula

$$\boldsymbol{A}x = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad x \in D(\boldsymbol{A}).$$

i.e. $\boldsymbol{A}$ é um operador linear cujo domínio é o conjunto

$$D(\boldsymbol{A}) = \left\{ x \in X \ : \ \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \ \textit{existe em } X \right\}.$$

[5]Equações diferenciais lineares abstratas que dependem do tempo (ao contrário para independente do tempo no caso de semigrupos)

Observação 3.

1. *$D(\boldsymbol{A})$ é não vazio, (contem pelo menos o vetor 0).*

2. *$D(\boldsymbol{A})$ é denso em X (veja [9], [62][Teorema 1, pág 237]).*

1.3.1 O Teorema de Hille - Yosida

O teorema de Hille-Yosida é fundamental para estabelecer o gerador de um semigrupo de soluções do problema linearizado, motivo pelo qual fazemos uma apresentação do mesmo. Aplicações mais avançadas de operadores φ Hille-Yosida podem ser vistas no artigo de Wang [61].

Seja um operador linear $\boldsymbol{A}$, não necessariamente limitado, em X. Definimos o resolvente de $\boldsymbol{A}$ por

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, (\lambda I - \boldsymbol{A})^{-1} \text{ existe}\right\}.$$

Teorema 1.3.1 (Hille - Yosida). *Se um operador linear $\boldsymbol{A}$ sobre um espaço de Banach X satisfaz:*

1. *$\boldsymbol{A}$ é fechado e denso;*

2. *Existe $(\lambda I - \boldsymbol{A})^{-1}$, $\forall\ \lambda > 0$ e $\|(\lambda I - \boldsymbol{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Então $\boldsymbol{A}$ é gerador infinitesimal e um semigrupo de contrações $S(t)$.

2 EQUAÇÃO DO CALOR

Aqui, estudamos o problema de Dirichlet para a equação do calor num cilindro Lipschitz. A existência de soluções é estabelecida por métodos clássicos da teoria de potenciais (para mais detalhes veja [3, 6] e [24]).

Seja $G(\boldsymbol{x}\,,t)$ a solução fundamental da equação do calor no $\mathbb{R}^3$

$$G(\boldsymbol{x}\,,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{3/2}}\, e^{-\dfrac{|\,\boldsymbol{x}\,|^2}{4t}} & ; \quad t > 0, \\ \qquad 0 & ; \quad t \leq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposição 2.0.1. *$G(\boldsymbol{x}\,,t)$, $t\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,t)$ e $\displaystyle\int_{a_1 t}^{a_2 t} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,s)\,ds$ satisfazem (1.1). Então*

$$\int_0^\infty G(\boldsymbol{x}\,,t)\;dt \;=\; \frac{1}{2\pi|\,\boldsymbol{x}\,|},$$

$$\int_0^\infty t\frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,t)\;dt \;=\; \frac{C'\delta_{jk}}{|\,\boldsymbol{x}\,|} + \frac{C'' x_j x_k}{|\,\boldsymbol{x}\,|^3},$$

e

$$\int_0^\infty \left(\int_{a_1 t}^{a_2 t} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,s)\;ds\right)\;dt \;=\; C'(a_1,a_2)\frac{\delta_{jk}}{|\,\boldsymbol{x}\,|} + C''(a_1,a_2)\frac{x_j x_k}{|\,\boldsymbol{x}\,|^3},$$

onde $1 \leq j,k \leq 3$ e $0 < a_1 < a_2 \leq \infty$.

Demonstração. Note que fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{|\,\boldsymbol{x}\,|}{2\sqrt{t}}$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G(\boldsymbol{x}\,,t)\;dt \;&=\; -\int_\infty^0 \frac{e^{-s^2}}{(4\pi t)^{3/2}} \frac{4t^{3/2}}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\;ds, \\ &=\; \frac{1}{2\pi^{3/2}|\,\boldsymbol{x}\,|}\int_0^\infty e^{-s^2}\;ds \;=\; \frac{1}{2\pi|\,\boldsymbol{x}\,|}. \end{aligned}$$

derivando e fazendo mudanças similares temos as outras duas igualdades. $\square$

Recordamos a conhecida propriedade de semigrupo da solução fundamental da equação do calor. (Veja [33])

Teorema 2.0.2 (Propriedade de Semigrupo).

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\,, t-r) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\,, t-s) G(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\,, s-r)\; d\boldsymbol{y}\,.$$

Demonstração. Da definição de solução fundamental do calor, podemos escrever a integral acima, que chamaremos I, na forma

$$I \;=\; \frac{1}{(4\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(t-s)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4(t-s)}\right) \frac{1}{(s-r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|^2}{4(s-r)}\right)\; d\boldsymbol{y}\,.$$

Consideremos a mudança

$$\xi_i = \left(\frac{t-r}{t-s}\right)^{1/2} \frac{y_i - z_i}{2(s-r)^{1/2}} + \left(\frac{s-r}{t-s}\right)^{1/2} \frac{z_i - x_i}{2(t-s)^{1/2}}$$

e note que

$$\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4(t-s)} + \frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|^2}{4(s-r)} = \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|^2}{4(t-r)} + |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

então,

$$\begin{aligned} I \;&=\; \frac{8}{(4\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(t-r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|^2}{4(t-r)} - |\boldsymbol{\xi}|^2\right)\; d\boldsymbol{\xi}\,, \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(t-r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|^2}{4(t-r)}\right) \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-|\boldsymbol{\xi}|^2\right)\; d\boldsymbol{\xi}\,, \end{aligned}$$

o resultado é imediato. □

2.1 Problemas de Dirichlet e Neumann

Nesta seção D denota um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, o nosso objetivo é estabelecer a condição do salto para o núcleo do calor em $\mathbb{R}^n$.

Para um dado especifico $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$ o problema de Newmann consiste em encontrar uma função $\boldsymbol{u}$ suave em $D \times [0, T)$ que satisfaça

$$(\textit{ Problema de Newmann}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \Delta \boldsymbol{u} = 0 & em \;\; D_T, \\ \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}\,, 0) = 0 & \boldsymbol{x} \in D, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{N}} = \boldsymbol{f} & \text{sobre} \;\; S_T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para um dado especifico $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$ o problema de Dirichlet consiste em encontrar uma função $\boldsymbol{u}$ suave em $D \times [0,T)$ que satisfaça

$$(\textit{ Problema de Dirichlet}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \Delta \boldsymbol{u} = 0 & em \ \ D_T, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = 0 & \boldsymbol{x} \in D, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} & \text{sobre } \ S_T. \end{cases} \tag{2.3}$$

Associados com estes dois problemas, tem-se os potenciais de camada simples e dupla, dados por

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{x},t) := \int_0^t \int_{\partial D} \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds$$

e

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},t) := \int_0^t \int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds$$

Definamos também

$$H_n(\tau) := \int_0^\infty \frac{1}{s^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{1}{4s}\right) \exp(i\tau s)\ ds$$

e

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\ ds.$$

Teorema 2.1.1. *Seja $\boldsymbol{g} \in L^2(S_T)$ e $\mathscr{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},t)$ o potencial de camada dupla para a equação do calor. Então*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to p} \mathscr{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},t) = \frac{w_n}{4}(4\pi)^{n/2} H_n(0)\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t) + \mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t). \tag{2.4}$$

Demonstração. Considere o potencial de camada dupla na forma

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = & \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)]\, d\boldsymbol{q}\ ds \\ & + \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t) \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) d\boldsymbol{q}\ ds, \end{aligned}$$

computando o limite quando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ podemos passar o limite ao interior das integrais e obter:

$$\begin{aligned} \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \mathscr{D}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = & \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right) [\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)]\, d\boldsymbol{q}\ ds \\ & + \ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t) \int_{\partial D} \langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle \left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{1}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right)\ ds\right] d\boldsymbol{q}, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $s \to \frac{t-s}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}$ na segunda integral, temos

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}} \mathscr{D}_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D} \frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{(t-s)^{n/2+1}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(t-s)}\right)[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)]\,d\boldsymbol{q}\ ds$$

$$+ \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)\int_{\partial D}\frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^n}\left[\int_0^\infty \frac{1}{s^{n/2+1}}\exp\left(-\frac{1}{4s}\right)ds\right]\,d\boldsymbol{q},$$

por outro lado,

$$\int_{\partial D}\frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^n}\,d\boldsymbol{q} = \lim_{\delta\to 0}\int_{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|>\delta}\frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^n}\,d\boldsymbol{q}$$

$$= -\lim_{\delta\to 0}\int_{D\cap\partial B(\boldsymbol{p},\delta)}\frac{\langle \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, \boldsymbol{N}_q\rangle}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^n}\,d\boldsymbol{q} \longrightarrow \frac{w_n}{2}.$$

Desta maneira, temos

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to p}\mathscr{D}(\boldsymbol{x},t) = \mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)+\frac{w_n}{2}H_n(0)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)$$

o resultado segue de maneira imediata. □

O seguinte corolário é uma conseqüência imediata do Teorema 2.1.1.

Corolário 2.1.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, uma densidade $\boldsymbol{g} \in L^2(S_T)$ e $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},t)$ o potencial de camada simples para a equação do calor. Então*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to p}\frac{\partial \boldsymbol{S}(\boldsymbol{g})}{\partial \boldsymbol{N}}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{w_n}{4}(4\pi)^{n/2}H(0)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)+\mathcal{J}'(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t) \tag{2.5}$$

onde

$$\mathcal{J}'(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\ ds$$

é o operador dual de $\mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)$.

2.1.1 Potenciais de Camada

O potencial de camada simples produz soluções do problema de Newmann. Calculando $\frac{\partial \mathcal{S}(g)}{\partial \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}}$, para $n=3$, vemos que

$$\frac{\partial \mathcal{S}(g)}{\partial \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{p},t) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t)+\mathcal{J}'(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t).$$

Assim a solução do problema de Newmann reduz-se à questão da invertibilidade de $-\frac{l}{2}I + \mathcal{J}\,'$.

A Equação

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{g} + \mathcal{J}\,'(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}$$

é uma equação integral de Volterra. Sobre domínios suaves, o operador $\mathcal{J}\,'$: $L^2(S_T) \to L^2(S_T)$ vai para zero quando $T \to 0$. Assim podemos construir a serie

$$\left(-\frac{l}{2}I + \mathcal{J}\,'\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(2\,\mathcal{J}\,')^k \quad , \qquad T \;\; \text{pequeno.} \tag{2.6}$$

Utilizando métodos iterativos temos a inversa sobre $L^2(S_T)$ para T arbitrário ($T < \infty$). Fabes & Rivieȓe [29] mostraram que este argumento também é válido quando D é $\mathcal{C}^1$.

Sobre domínios Lipschitz, embora, a norma de $\mathcal{J}\,'$ permaneça limitada longe do zero quando $T \to 0$, podemos encontrar outro método para inverter $-\frac{1}{2}I + \mathcal{J}\,'$. Este método foi desenvolvido por G. Verchota [60] no estudo de potenciais para a equação de Laplace sobre domínios Lipschitz (veja também [11, 44]). A ferramenta principal no argumento é devida a uma identidade integral de Rellich; esta mostra que, na fronteira, as derivadas normal e tangencial de funções harmonicas são comparáveis na norma L^2. Usando estas estimativas e a condição de salto para a derivada normal do potencial de camada simples, Verchota mostra que o operador potencial de fronteira tem imagem fechada. Tendo este fato estabelecido o resto do argumento não é tão difícil.

Como é mostrado por Brown [3], o argumento de Verchota aplica-se à equação do calor. Para isto basta estabelecer as estimativas adequadas para as derivadas da equação do calor na fronteira.

2.2 Solução do Problema de Dirichlet

Construímos nossa solução para o problema de Dirichlet como potencial de camada dupla com densidade em $\boldsymbol{g} \in L^2(S_T)$, Os valores de fronteira de $\mathscr{D}\,(\boldsymbol{g}\,)$ são dados por $\frac{1}{2}\boldsymbol{g} + \mathcal{J}\,(\boldsymbol{g}\,)$ onde $\mathcal{J}$ é um operador integral singular definido sobre $L^2(S_T)$.

O operador $\frac{1}{2}I + \mathcal{J}$ é o adjunto do operador $-\frac{1}{2}I + \mathcal{J}\,'(\boldsymbol{g}\,)$ que é obtido quando se tem a derivada normal de $\mathcal{S}\,(\boldsymbol{g}\,)$ para o domínio exterior $D^e = \mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$. Assim a solução do problema de Dirichlet segue facilmente da solução do problema de Neumann.

Definição 2.2.1. *Seja $H^{1,1/2}(S_T)$ o fecho de*

$$\left\{ v \ : \ v = \boldsymbol{u}\big|_{S_T} \quad com \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_0^{\infty}\,(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \right\}$$

com respeito à norma

$$\|v\|^2_{H^{1,1/2}(S_T)} \equiv \int_0^T \int_{\partial D} \left(|\nabla_{\tan} v|^2 + |v|^2 \right) \, d\boldsymbol{p} \; dt + \int_{\partial D} \|v(\boldsymbol{p}\,,\cdot)\|^2_{1/2,T}.$$

2.2.1 Estimativas Importantes

Sejam $D_\infty \equiv D \times \mathbb{R}$ e $S_\infty \equiv \partial D \times \mathbb{R}$, assume-se que $\boldsymbol{u}$ é a solução da equação do calor em D_∞, que $\boldsymbol{u}^*$ e $(\nabla \boldsymbol{u}\,)^*$ estão em $L^2(S_\infty)$ e que $\boldsymbol{u}$ e $\nabla \boldsymbol{u}$ tem limites não tangenciais, quase sempre, sobre S_∞. Nós estamos requerendo nossas soluções definidas para todo tempo, para que possamos utilizar a transformada de Fourier a fim de converter o estudo da equação do calor para o estudo de soluções da equação

$$\Delta \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}\,) - i\tau\,\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}\,) = 0 \quad , \qquad \tau \in \mathbb{R}\,. \tag{2.7}$$

Iniciamos com a primeira identidade de Green. Seja $\boldsymbol{v}$ uma função de valor complexo e suave em $\overline{D}$. Então

$$\int_D \overline{\boldsymbol{v}}\,\Delta \boldsymbol{v} + |\nabla \boldsymbol{v}\,|^2 \; d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial D} \overline{\boldsymbol{v}}\, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{N}} \; d\boldsymbol{p}\,.$$

Assumindo que $\boldsymbol{v}$ resolve (2.7), obtemos a estimativa

$$\int_D |\tau|\ |\boldsymbol{v}|^2 + |\nabla \boldsymbol{v}|^2\ d\boldsymbol{x} \le 2 \int_{\partial D} |\boldsymbol{v}|\ \left|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{N}}\right|\ d\boldsymbol{p}.$$

Seja $\boldsymbol{\alpha}$ um campo vetorial de valor real definido em $\overline{D}$. Um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[Re\left(\frac{1}{2}|\nabla \boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{\alpha} - \langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\alpha} \nabla \boldsymbol{v}\rangle\right)\right]& \\ = Re\left(-\langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \alpha\rangle \nabla \boldsymbol{v} + 1/2|\nabla \boldsymbol{v}|^2 \operatorname{div}\alpha - \langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \nabla \boldsymbol{\alpha}\ (\nabla \boldsymbol{v})\rangle\right)&\end{aligned}$$

onde $(\nabla \boldsymbol{\alpha}\ (\nabla \boldsymbol{v}))_i = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \boldsymbol{v}\, \partial_j \alpha_i$. Assim, usando o teorema da divergência, a equação (2.7) e tomando a parte real, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D} \frac{1}{2}|\nabla \boldsymbol{v}|^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{v}\rangle - Re\left(\langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\alpha}\rangle \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{N}}\right)\ d\boldsymbol{p} \\ &= Re\left(\int_D \langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\alpha}\rangle i\tau \boldsymbol{v} - 1/2|\nabla \boldsymbol{v}|^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} + \langle \nabla \overline{\boldsymbol{v}}, \nabla \boldsymbol{\alpha} (\nabla \boldsymbol{v})\rangle\ d\boldsymbol{x}\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Lema 2.2.1. *Seja* $\boldsymbol{u}$ *u solução da equação do calor em* D_∞, $\boldsymbol{u}^*$ *e* $(\nabla \boldsymbol{u})^*$ *estão em* $L^2(S_\infty)$ *e que* $\boldsymbol{u}$ *e* $\nabla \boldsymbol{u}$ *tem limites não-tangenciais quase sempre sobre* S. *Então temos*

$$\int\int_{S_\infty} |\nabla \boldsymbol{u}|^2\ d\boldsymbol{p}\ dt + \int_{\partial D} \|\boldsymbol{u}\|^2_{1/2;\infty}\ d\boldsymbol{p} \le C \int\int_{S_\infty} \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{N}}\right|^2 + |\boldsymbol{u}|^2\ d\boldsymbol{p}\ dt$$

e

$$\int\int_{S_\infty} \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{N}}\right|^2\ d\boldsymbol{p}\ dt = C\left(\int\int_{S_\infty} |\nabla_{\tan} \boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{u}|^2\ d\boldsymbol{p}\ dt + \int_{\partial D} \|\boldsymbol{u}\|^2_{1/2;\infty}\ d\boldsymbol{p}\right)$$

Teorema 2.2.1. *Seja* $\boldsymbol{f} \in H^{1,1/2}(S_T)$. *Então, a solução da equação do calor do problema de Dirichlet com* $\boldsymbol{f}$ *satisfaz*

$$\int_0^t \int_{\partial D} \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{N}}\right|^2\ d\boldsymbol{p}\ dt \le C\left[\int_0^t \int_{\partial D} \left(|\nabla_{\tan} \boldsymbol{u}|^2 + \boldsymbol{u}^2\right)\ d\boldsymbol{p}\ dt + \int_{\partial D} \|\boldsymbol{u}\|^2_{H^{1,1/2}(S_T)}\ d\boldsymbol{p}\ dt\right].$$

2.2.2 Potenciais do Calor na Fronteira

Definimos o domínio exterior $D^e \equiv \mathbb{R}^n \backslash \overline{D}$ e $D^e_T \equiv D^e \times (0, T)$. Sejam

$$\mathcal{S}^e(\boldsymbol{g}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{g})\big|_{D^e_T}, \quad \mathcal{S}^i(\boldsymbol{g}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{g})\big|_{D_T} \quad e \quad \mathcal{S}^b(\boldsymbol{g}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{g})\big|_{S_T}$$

Também,

$$\mathscr{D}^{\,e}(\boldsymbol{g}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{g})\big|_{D_T^e} \quad e \quad \mathscr{D}^{\,i}(\boldsymbol{g}) = \mathscr{D}(\boldsymbol{g})\big|_{D_T}$$

Para $\ell = 1, \ldots, n$, seja

$$\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p}, t) = \frac{1}{2}(4\pi)^{-n/2}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{p_\ell - q_\ell}{(t-s)^{n/2+1}}\exp\left(-\frac{|\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}\,|^2}{4(t-s)}\right)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

e seja $\mathscr{K}_{\ell,*}(\boldsymbol{p}, t) = \sup\limits_{\varepsilon>0}\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p}, t)$.

Teorema 2.2.2. *Seja* $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$. *Então*

$$\|\mathscr{K}_{\ell,*}\|_{L^2(S_T)} \leq C\|\,\boldsymbol{g}\,\|_{L^2(S_T)}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p}, t) = \mathscr{K}_\ell(\boldsymbol{p}, t) \quad \textit{existe} \quad \textit{q.s} \quad \textit{sobre} \quad S_T.$$

A prova deste teorema pode ser encontrada no trabalho de Fabes e Rivière [29], também pode ser visto como referência no trabalho de R. Brown [3, pág. 365].

Teorema 2.2.3. *Seja* $\boldsymbol{f} \in H^{1,1/2}(S_T)$. *Então,*

i) $\|(\nabla\mathcal{S}^{\,e}(\boldsymbol{g}))^*\|_{L^2(S_T)} + \left\|(\nabla\mathcal{S}^{\,i}(\boldsymbol{g}))^*\right\|_{L^2(S_T)} \leq C\|\,\boldsymbol{g}\,\|_{L^2(S_T)}$,

ii)

$$\lim_{(\boldsymbol{x},s)\to(\boldsymbol{p},t)}\partial_j\mathcal{S}^{\;i}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}, s) = -\frac{1}{2}n_j(P)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t) - \mathscr{K}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t)$$

e

$$\lim_{(\boldsymbol{x},s)\to(\boldsymbol{p},t)}\partial_j\mathcal{S}^{\;e}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}, s) = \frac{1}{2}n_j(P)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t) - \mathscr{K}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t)$$

quase sempre sobre S_T,

iii) $\mathcal{S}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, t)$ *é suave e satisfaz a equação do calor em* $(\mathbb{R}^n\backslash\partial D)\times[0, T)$ *e* $\mathcal{S}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ *para* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\backslash\partial D$.

Observação 4. *Note duas conseqüências da fórmula na parte ii) do teorema (2.2.3).*

A primeira é a relação de salto para a derivada normal de $\mathcal{S}(\boldsymbol{f})$:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial\mathcal{S}^{\,e}}{\partial\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{f}) - \frac{\partial\mathcal{S}^{\,i}}{\partial\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{f})$$

Por outro lado, a derivada tangencial não dependem sobre a aproximação para S_T:

$$\nabla_{\tan} \mathcal{S}^{e}(\boldsymbol{f}) = \nabla_{\tan} \mathcal{S}^{i}(\boldsymbol{f}) = \nabla_{\tan} \mathcal{S}^{b}(\boldsymbol{f}) \quad \textit{sobre} \quad S_T.$$

O resultado final é sobre o potencial de camada dupla. Note que $\mathcal{J}(\boldsymbol{g}) = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{K}_i(N_i \boldsymbol{g})$ já definido na seção 2.2.

Teorema 2.2.4. *Seja $\boldsymbol{g} \in L^2(S_T)$. Então*

$$\|(\mathscr{D}^{e}(\boldsymbol{g}))^{*}\|_{L^2(S_T)} + \left\|\left(\mathscr{D}^{i}(\boldsymbol{g})\right)^{*}\right\|_{L^2(S_T)} \leq C\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(S_T)}.$$

Os limites não tangenciais de $\mathscr{D}^{e}(\boldsymbol{g})$ e $\mathscr{D}^{i}(\boldsymbol{g})$ existem e são dados por

$$\lim_{(\boldsymbol{x},s)\to(\boldsymbol{p},t)} \partial_j \mathscr{D}^{i}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x},s) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t) + \mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)$$

e

$$\lim_{(\boldsymbol{x},s)\to(\boldsymbol{p},t)} \partial_j \mathscr{D}^{e}(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x},s) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p},t) + \mathcal{J}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)$$

quase sempre sobre S_T.

$\mathscr{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},t)$ é suave e satisfaz a equação do calor em $(\mathbb{R}^n \setminus \partial D) \times [0,T)$ e $\mathscr{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x},0) = 0$ para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \partial D$.

3 EQUAÇÃO DE TRAÇÃO

Nesta seção seguimos os trabalhos de Z. Shen e R. Brown [3, 4, 5, 6, 7] e [51]. Considere a equação de tração introduzida nestes trabalhos

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} \tag{3.1}$$

onde $\mu > 0,\ \lambda > -2\mu/3$ são constantes.

Para conveniência do leitor, derivamos em detalhe a construção da solução fundamental, cuja forma final não é inteiramente evidente.

3.1 Solução Fundamental

Seja $G(\boldsymbol{x}, t)$ a solução fundamental da equação do calor. Para achar a solução fundamental do problema de tração usamos um método de decomposição, o qual será visto também para uma equação mais complexa na seção 4.3.

Denotando $\mathscr{X} = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\mathscr{W}} = \nabla \times \boldsymbol{u}$, temos duas equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t} &= (2\mu + \lambda)\Delta \mathscr{X} + \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\mathscr{W}}}{\partial t} &= \mu \Delta \boldsymbol{\mathscr{W}} + \nabla \times \boldsymbol{f}, \end{aligned}$$

as quais tem como soluções, respectivamente, as funções

$$\begin{aligned} \mathscr{X} &= G(\boldsymbol{x}, (2\mu + \lambda)t) * \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{\mathscr{W}} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \mu t) * (\nabla \times \boldsymbol{f}). \end{aligned}$$

Logo, da identidade

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

temos

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\mathscr{W}} - \nabla \mathscr{X}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{W}} &= \nabla\times\left[\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}\,,\mu t)*(\nabla\times\,\boldsymbol{f}\,)\right],\\
&= \nabla\times\left[\nabla\times\,\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}\,,\mu t)*\,\boldsymbol{f}\,\right],\\
&= \left[-\Delta\boldsymbol{G}\,+\nabla\operatorname{div}\,\boldsymbol{G}\,\right](\boldsymbol{x}\,,\mu t)*\,\boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\nabla\,\mathscr{X} &= \nabla\left[G(\boldsymbol{x}\,,(2\mu+\lambda)t)*\,\operatorname{div}\,\boldsymbol{f}\,\right],\\
&= \sum_{k=1}^{3}\partial_k\left(\sum_{j=1}^{3}\partial_j G(\boldsymbol{x}\,,(2\mu+\lambda)t)*\,\boldsymbol{f}_{\,j}\right)e_k,\\
&= \left(\sum_{j,k=1}^{3}\partial_j\partial_k G(\boldsymbol{x}\,,(2\mu+\lambda)t)*\,\boldsymbol{f}_{\,j}\right)e_k
\end{aligned}
$$

onde $e_k=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ é o $k-$ésimo vetor canônico. Então

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \left[\boldsymbol{G}+(-\Delta)^{-1}\nabla\operatorname{div}\,\boldsymbol{G}\right](\boldsymbol{x}\,,\mu t)*\,\boldsymbol{f}\\
&- (-\Delta)^{-1}\left(\sum_{j,k=1}^{3}\partial_j\partial_k G(\boldsymbol{x}\,,(2\mu+\lambda)t)*\,\boldsymbol{f}_{\,j}\right)e_k.
\end{aligned}
$$

Logo o núcleo de $\boldsymbol{u}$ na posição (j,k), é da forma

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{jk}(\boldsymbol{x}\,,t) &= \delta_{j,k}G(\boldsymbol{x}\,,\mu t)+(-\Delta)^{-1}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,\mu t)-\frac{\partial^2 G}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,(2\mu+\lambda)t)\right),\\
&= \delta_{j,k}G(\boldsymbol{x}\,,\mu t)-(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\int_{\mu t}^{(2\mu+\lambda)t}\frac{\partial G}{\partial s}(\boldsymbol{x}\,,s)\;ds,\\
&= \delta_{j,k}G(\boldsymbol{x}\,,\mu t)-(-\Delta)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\int_{\mu t}^{(2\mu+\lambda)t}\Delta G(\boldsymbol{x}\,,s)\;ds.
\end{aligned}
$$

Introduzimos assim a **matriz solução fundamental** da equação (3.1), $\Gamma(\boldsymbol{x}\,,t)=\{\Gamma_{jk}(\boldsymbol{x}\,,t)\}_{3\times 3}$, dada por

$$
\Gamma_{jk}(\boldsymbol{x}\,,t)=\delta_{jk}G(\boldsymbol{x}\,,\mu t)+\int_{\mu t}^{(\lambda+2\mu)t}\frac{\partial^2 G}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,s)\;ds \tag{3.2}
$$

Temos a seguinte estimativa

$$
\left|\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|+\alpha_0}}{\partial\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}\partial t^{\alpha_0}}\Gamma(\boldsymbol{x}\,,t)\right|\le\frac{C}{(|\boldsymbol{x}\,|+|t|^{1/2})^{3+|\boldsymbol{\alpha}|+2\alpha_0}} \tag{3.3}
$$

3.1.1 Potencial de Camada Simples

Dada $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$, defina o potencial de camada simples

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}\,,t) = \mathscr{L}(\boldsymbol{f}\,)(\boldsymbol{x}\,,t) = \int_0^t \int_{\partial D} \Gamma(\boldsymbol{x}\, - \,\boldsymbol{q}\,,t-s)\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds \tag{3.4}$$

para $(\boldsymbol{x}\,,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,T)$. Então $\boldsymbol{u}$ satisfaz (3.1) em $(\mathbb{R}^3 \backslash \partial D) \times (0,T)$.

Introduzimos também o **operador tração** sobre a fronteira

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = (\nu-\mu)(\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}\,)\,\boldsymbol{N}\; + \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}\; + (\nabla\,\boldsymbol{u}\,)^{Tr}\right)\,\boldsymbol{N} \tag{3.5}$$

onde Tr indica a matriz transposta.

Lema 3.1.1 (Formulas de Traço). *Seja $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$, $\boldsymbol{u} = \mathscr{L}(\boldsymbol{f}\,)$. Então, para quase todo $(\boldsymbol{p}\,,t) \in S_T$*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}_{\pm}^{j}}{\partial x_r}(\boldsymbol{p}\,,t) \;\;&=\;\; \pm\left\{\frac{1}{2\mu}N_r(\boldsymbol{p}\,)f_j(\boldsymbol{p}\,,t) - AN_r(\boldsymbol{p}\,)N_j(\boldsymbol{p}\,)\,\langle\,\boldsymbol{N}\,(\boldsymbol{p}\,),\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{p}\,,t)\rangle\right\} \\ &\quad + \;\; p.v.\int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_r}(\boldsymbol{p}\, - \,\boldsymbol{q}\,,t-s)\,\boldsymbol{f}_{\,k}(\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds \end{aligned}$$

onde $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+\lambda}\right)$.

Segue deste Lema que, se $\boldsymbol{u} = \mathscr{L}(\boldsymbol{f}\,)$, então

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_{\pm}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left(\pm\frac{1}{2}I + K_{\boldsymbol{\nu}}\right)\boldsymbol{f}\,, \qquad \text{sobre} \quad \partial D \times \mathbb{R}\,,$$

onde os sub-indices + e - denotam os limites não tangenciais tomados em $D \times \mathbb{R}$ e $D^e \times \mathbb{R}$ respectivamente, I denota o operador identidade e

$$K_{\boldsymbol{\nu}}\,(\boldsymbol{f}\,)(\boldsymbol{p}\,,t) = p.v.\int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}\,(\boldsymbol{p}\,)}(\boldsymbol{p}\, - \,\boldsymbol{q}\,,t-s)\,\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds.$$

é um operador integral singular sobre $L^2(S_T)$(veja [2, 12, 49]).

Lema 3.1.2. $K_{\boldsymbol{\nu}}$ *é limitado sobre $L^q\,(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$ para qualquer $1 < p,q < \infty$.*

Demonstração. Considere o caso $1 < q \leq p$. Podemos ver K_ν como um operador integral singular sobre $L^p(\partial D)$. Escrevemos

$$K_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{f}\,(t) = p.v. \int_{\mathbb{R}} K_\nu(t-s)\, \boldsymbol{f}\,(s)\; ds, \qquad \boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D)).$$

Usando a estimativa (3.3), para $\boldsymbol{g} \in B$ temos

$$|K_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{g}\,(t)|_{L^p(\partial D)} \leq \frac{C}{t}\, |M_{\partial D}(\boldsymbol{g}\,)|_{L^p(\partial D)} \quad e \quad \left|\frac{d}{dt} K_{\boldsymbol{\nu}}\, \boldsymbol{g}\,(t)\right|_{L^p(\partial D)} \leq \frac{C}{t^2}\, |M_{\partial D}(\boldsymbol{g}\,)|_{L^p(\partial D)}$$

onde $M_{\partial D}$ denota a função maximal de Hardy-Littlewood sobre ∂D. Assim

$$\|K_{\boldsymbol{\nu}}\,(t)\|_{L^p(\partial D) \to L^p(\partial D)} \leq \frac{C}{t} \quad e \quad \left\|\frac{d}{dt} K_{\boldsymbol{\nu}}\,(t)\right\|_{L^p(\partial D) \to L^p(\partial D)} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Além do mais, $K_{\boldsymbol{\nu}}\,(t)$ é um núcleo padrão do tipo Calderón-Zygmund. Uma vez que $K_{\boldsymbol{\nu}}\, : L^p(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D)) \to L^p(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$ é limitado, temos que $K_{\boldsymbol{\nu}}\, : L^q(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D)) \to L^q(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$ é limitado para $1 < q \leq p$, por um argumento padrão de Calderón-Zygmund [8].

Finalmente, note que o mesmo argumento também mostra que $K^*_{\boldsymbol{\nu}}$ é limitado sobre $L^q(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$ para $1 < q \leq p$. Assim por dualidade, obtém-se a limitação de $K_{\boldsymbol{\nu}}$ sobre $L^q\,(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$ quando $q > p$. □

3.1.2 Potencial de Camada Dupla

Também para $\boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}\,, L^p(\partial D))$, defina o potencial de camada dupla

$$\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{x}\,, t) = \mathscr{H}(\boldsymbol{f}\,)(\boldsymbol{x}\,, t) = \int_0^t \int_{\partial D} \left\{\frac{\partial \Gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}\,, t-s)\right\}^{Tr} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{q}\,, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds \qquad (3.6)$$

é claro que $\boldsymbol{v}$ é solução de (3.1) em $(\mathbb{R}^3 \backslash \partial D) \times (0, T)$. Então

$$\boldsymbol{v}_{\pm} = \left(\mp \frac{1}{2} I + \widetilde{K}_{\boldsymbol{\nu}}\right) \boldsymbol{f}\,, \qquad \text{sobre} \;\; \partial D \times \mathbb{R}\,,$$

onde $\widetilde{K}_{\boldsymbol{\nu}} = R K^*_{\boldsymbol{\nu}} R$ e R é a reflexão definida por

$$R(\boldsymbol{f}\,)(\boldsymbol{p}\,, t) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{p}\,, -t). \qquad (3.7)$$

Observe que R é um operador unitário sobre $L^2(S_T)$.

O seguinte Teorema da uma estimativa sobre potenciais de camada simples e dupla, usando as definições de funções maximais não tangenciais. Maiores detalhes podem ser vistos no trabalho de Z. Shen [51]

Teorema 3.1.1. *Seja* $1 < p,\ q < \infty$ *e* $\boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}, L^p(\partial D))$.

1. *Para* $\boldsymbol{u} = \mathscr{L}(\boldsymbol{f})$, *temos*

$$\|(\nabla \boldsymbol{u})^*\|_{p,q} + \|(\partial_t^{1/2} \boldsymbol{u})^*\|_{p,q} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{p,q}.$$

2. *Para* $\boldsymbol{v} = \mathscr{H}(\boldsymbol{f})$, *temos*

$$\|(\boldsymbol{v})^*\|_{p,q} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{p,q},$$

onde $\|\cdot\|_{p,q}$ *é a norma em* $L^q((0,T); L^p(\partial D))$.

Demonstração. Usando o argumento de Fabes e Rivière [29, Teorema 1.11], podemos mostrar que para qualquer $q_0 > 1$,

$$(\nabla \boldsymbol{u})^*(\boldsymbol{p}, t) \leq C_{q_0}\left[M_1\left(M_{\partial D}(Kf)\right)(\boldsymbol{p}, t) + M_1\left(M_{\partial D}(|\boldsymbol{f}|^{q_0})\right)^{\frac{1}{q_0}}(\boldsymbol{p}, t)\right]$$

onde K é um operador integral singular do mesmo tipo de $K_{\boldsymbol{\nu}}$ e M_1 é a função maximal de Hardy-Littlewood em $\mathbb{R}$. Do Lemma 3.1.2 temos que K é limitado sobre $L^q(\mathbb{R}, L^p(\partial D))$ para $1 < p,\ q < \infty$. Do trabalho de Fefferman e Stein, M_1 é limitado sobre $L^q(\mathbb{R}, L^p(\partial D))$. A estimativa desejada segue disto.

Dada $f \in L^q((0,T); L^p(\partial D))$, seja $\boldsymbol{g}$ a extensão de $\boldsymbol{f}$ por zero para $\partial D \times \mathbb{R}$. Definamos $K_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{f} = K_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{g}$. Claramente, $\pm\frac{1}{2} + K_{\boldsymbol{\nu}}$ é limitado sobre $L^q((0,T); L^p(\partial D))$ para $1 < p,\ q < \infty$. De [51, Teorema 4.3.1], é sabido que $\pm\frac{1}{2} + K_{\boldsymbol{\nu}}$ é também limitado sobre $L^2((0,T); L^2(\partial D))$. Usando [5, Teorema 4.3.1] podemos estender este resultado. □

4 PROBLEMA ASSOCIADO COM A EQUAÇÃO DE STOKES

Considere o seguinte as equações de Navier Stokes compressíveis[1]

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho\dfrac{D\boldsymbol{v}}{Dt} - \mu\rho\Delta\boldsymbol{v} - \nu\rho\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \nabla P(\rho) & = & \rho\boldsymbol{f} \\ \rho_t + \mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v}) & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

com dados iniciais de fronteira:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{v} = 0 \quad sobre \quad \partial D \times [0,T] \\ \boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \ , \qquad \rho\big|_{t=0} = \rho_0 \quad sobre \quad D \end{array}\right. \tag{4.2}$$

definido em $(\boldsymbol{x}, t) \in D_T = D \times (0,T)$, onde $D \subset \mathbb{R}^3$, é um domínio limitado com fronteira Lipschitz ∂D (veja também [36, 39, 40, 41, 48, 58, 59]), $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ é a velocidade do fluido, ρ é a densidade, $P = P(\rho)$ a pressão e $\boldsymbol{f}$ a força externa. Os termos da difusão μ e ν, são tais que $\mu < \nu$.

4.1 Linearização das Equações

Na primeira equação do sistema (4.1), fazendo

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \quad e \quad \rho \to \rho + \eta,$$

negligenciando os termos quadráticos, temos

$$\begin{array}{rcl} (\rho+\eta)\dfrac{D(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})}{dt} & = & (\rho+\eta)(\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{u}_t) + (\rho+\eta)\{(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})\cdot\nabla\}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) \\ & = & \rho\boldsymbol{v}_t + \{\rho\boldsymbol{u}_t + \eta\boldsymbol{v}_t\} + (\rho+\eta)(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \\ & + & \rho[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] \\ & = & \rho\boldsymbol{v}_t + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \{\eta\boldsymbol{v}_t + \eta(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\} \\ & + & \{\rho\boldsymbol{u}_t + \rho[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]\} \end{array}$$

[1] $\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)$ denota a derivada material.

$$
\begin{aligned}
\mu(\rho+\eta)\Delta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) &= \mu\rho\Delta\boldsymbol{v}+\mu(\rho\Delta\boldsymbol{u}+\eta\Delta\boldsymbol{v})\\
\nu(\rho+\eta)\nabla\operatorname{div}(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) &= \nu\rho\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\nu(\rho\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\eta\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
&\left\{\rho\boldsymbol{u}_t+\rho[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]-\mu\rho\Delta\boldsymbol{u}-\nu\rho\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+c^2\nabla\eta\right\}\\
&\qquad\qquad+\eta\{\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\nu\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{v}-\mu\Delta\boldsymbol{v}\} = \eta\boldsymbol{f}
\end{aligned}
$$

ou,

$$
\boldsymbol{u}_t+[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]-\mu\Delta\boldsymbol{u}-\mu\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{c^2}{\rho}\nabla\eta-\eta\frac{c^2}{\rho^2}\nabla\rho=0 \tag{4.3}
$$

Considerando um fluido adiabático isentrópico[2], assim, $c=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial\rho}}$ é a velocidade do som, considerada constante. Na outra equação

$$
\begin{aligned}
\rho_t+\eta_t+\operatorname{div}(\rho+\eta)(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) &= 0,\\
\rho_t+\eta_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}+\eta\boldsymbol{v}) &= 0.
\end{aligned}
$$

Dai, temos

$$
\eta_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})+\operatorname{div}(\eta\boldsymbol{v})=0. \tag{4.4}
$$

Assim temos, o problema linearizado, na forma:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t+[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]-\mu\Delta\boldsymbol{u}-\nu\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{c^2}{\rho}\nabla\eta-\eta\frac{c^2}{\rho^2}\nabla\rho &= 0,\\
\eta_t+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\eta+\eta\operatorname{div}\boldsymbol{v} &= 0.
\end{aligned}
\right. \tag{4.5}
$$

4.1.1 Análise Preliminar

Como no trabalho feito por Mucha and Zajaczkowski [48], discutimos o seguinte sistema:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t-\mu\Delta\boldsymbol{u}-\nu\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\frac{c^2}{\rho}\nabla\eta &= \boldsymbol{f}, && \textit{em}\quad D_T,\\
\eta_t+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{u} &= g, && \textit{em}\quad D_T,\\
\boldsymbol{u} &= 0, && \textit{sobre}\quad S_T,\\
\boldsymbol{u}\big|_{t=0},\quad \eta\big|_{t=0} &= 0, && \textit{sobre}\quad D.
\end{aligned}
\right. \tag{4.6}
$$

[2]Entropia constante

Este sistema tem sido objeto de estudo na análise do problema de Stokes compressível em regiões de fronteira suave. Nesta Tese propomos estender esta análise a problemas em regiões com fronteira Lipschitz.

Quando $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \geq 0$ na fronteira não há necessidade de especificar também o valor da pressão na fronteira (ou portanto especificar η) [59, 60].

De fato, este sistema corresponde à linearização e localização do sistema de Navier-Stokes compressível onde alguns termos menos importantes foram absorvidos no termo fonte. O primeiro passo crucial na analise compressível do problema de Stokes.

4.1.2 Estimativas Importantes

Fazemos aqui uma estimativa heurística da contractividade da equação de evolução[3] [46, 55] em um espaço apropriado antes de tratar com o assunto em uma outra maneira através do Teorema de Hille-Yosida; o presente argumento pode ser feito rigorosamente, independentemente deste último resultado (veja [9]).

Considere o sistema (4.6) com $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, $g = 0$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t - \mu\Delta \boldsymbol{u} - \nu\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \dfrac{c^2}{\rho}\nabla\eta &= 0 \;, \qquad em \quad D_T, \\ \eta_t + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 \;, \qquad em \quad D_T, \\ \boldsymbol{u} &= 0 \;, \qquad sobre \quad S_T, \\ \boldsymbol{u}\Big|_{t=0}, \quad \eta\Big|_{t=0} &= 0 \;, \qquad sobre \quad D. \end{cases} \tag{4.7}$$

Na primeira equação tomando o produto interno com $\boldsymbol{u}$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(D)} + \mu \|\nabla \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(D)} + \nu \| \operatorname{div} \boldsymbol{u} \|^2_{L^2(D)} + \frac{c^2}{\rho} Re \left\langle \nabla\eta, \boldsymbol{u} \right\rangle = 0. \tag{4.8}$$

Analogamente, tomando o produto interno da segunda equação com η, obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{\rho^2}\|\eta\|^2_{L^2(D)}\right) + \frac{c^2}{\rho} Re \left\langle \operatorname{div} \boldsymbol{u} , \eta\right\rangle = 0. \tag{4.9}$$

[3] isto é, quando $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ são nulos, certas normas da solução não crescem

Observemos que

$$\operatorname{div}(\eta \boldsymbol{u}) = \eta \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \nabla\eta \cdot \boldsymbol{u}\,,$$

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,, \eta\rangle = \langle \boldsymbol{u}\,, \nabla\eta\rangle$$

e

$$Re\,\{\langle \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,, \eta\rangle + \langle\nabla\eta, \boldsymbol{u}\,\rangle\} = 0.$$

Assim somando as equações (4.8) e (4.9), obtém-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\,\boldsymbol{u}\,\|^2_{L^2(D)} + \frac{c^2}{\rho^2}\|\eta\|^2_{L^2(D)}\right] + \mu\,\|\nabla\boldsymbol{u}\,\|^2_{L^2(D)} + \nu\,\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\,\|^2_{L^2(D)} = 0. \tag{4.10}$$

Conseqüentemente,

$$\|\,\boldsymbol{u}\,\|^2_{L^2(D)} + \frac{c^2}{\rho^2}\|\eta\|^2_{L^2(D)} \leq \|\,\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(D)} + \frac{c^2}{\rho^2}\|\eta_0\|^2_{L^2(D)}. \tag{4.11}$$

4.2 Aplicações de Semigrupos ao Sistema Linearizado

O sistema de equações original (4.6), o qual é objeto principal deste trabalho, pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L} & -\frac{c^2}{\rho}\nabla \\ -\rho \operatorname{div} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ g \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

onde

$$\mathcal{L}\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nu\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,.$$

4.2.1 Problema de Dirichlet

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial t} &= \mathfrak{A}\Theta + \boldsymbol{H} \\ \Theta\,|_{t=0} &= \Theta_0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

onde

$$\Theta=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \\ \eta\end{bmatrix},\quad \mathfrak{A}=\begin{bmatrix}\mathcal{L} & -\frac{c^2}{\rho}\nabla\\ \\ -\rho\,\mathrm{div} & 0\end{bmatrix},\quad e\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \\ g\end{bmatrix},$$

Seja $\boldsymbol{A}$ uma extensão fechada minimal de $\mathfrak{A}$ em $X_D=L^2(D)\times L^2(D)$, $\boldsymbol{A}$ é densamente definida e fechada em X_D. Além disso, de (4.11), espera-se que $\boldsymbol{A}$ seja o gerador infinitesimal de um semi-grupo $\mathcal{G}(t)$ de contrações em $B(X_D,X_D)$. Estabelecemos este fato a seguir.

O problema (4.13) tem uma solução fraca da forma

$$\Theta(\boldsymbol{x}\,,t)=\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,,t)\Theta_0+\int_0^t \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}\,,t-s)\,\boldsymbol{H}\,(s)\;ds$$

onde $S(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador $\boldsymbol{A}$.

Teorema 4.2.1. *Seja $1<p<\infty$. O operador $\boldsymbol{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico de contrações sobre X_D.*

Demonstração. Seja $\Theta\in D(\boldsymbol{A})$ então $\overline{\Theta}\in L^2(D)$ e

$$\|\Theta\|^2=\left\langle\Theta,\overline{\Theta}\right\rangle=\|\,\boldsymbol{u}\,\|^2+\frac{c^2}{\rho^2}\|\eta\|^2.$$

Tomando o produto interno de $\boldsymbol{A}$ com $\overline{\Theta}$ em $L^2(D)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle\boldsymbol{A}\,\Theta,\overline{\Theta}\right\rangle &= \left\langle\begin{pmatrix}\mathcal{L} & -\frac{c^2}{\rho}\nabla\\ \\ -\rho\,\mathrm{div} & 0\end{pmatrix}\Theta,\overline{\Theta}\right\rangle,\\
&= \left\langle\begin{pmatrix}\mathcal{L}\boldsymbol{u}\,-\frac{c^2}{\rho}\nabla\eta\\ \\ -\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{u}}\\ \\ \overline{\eta}\end{pmatrix}\right\rangle,\\
&= \left\langle\mathcal{L}\boldsymbol{u}\,-\frac{c^2}{\rho}\nabla\eta,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle+\frac{c^2}{\rho^2}\left\langle-\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\eta}\right\rangle,\\
&= \left\langle\mathcal{L}\boldsymbol{u}\,,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle-\frac{c^2}{\rho}\left\langle\nabla\eta,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle-\frac{c^2}{\rho}\left\langle\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\eta}\right\rangle,\\
&= \left\langle\mu\Delta\,\boldsymbol{u}\,+\nu\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle-\frac{c^2}{\rho}\left[\left\langle\nabla\eta,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle+\left\langle\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\eta}\right\rangle\right],\\
&= \mu\left\langle\Delta\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle+\nu\left\langle\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle-\underbrace{\frac{c^2}{\rho}\left[\left\langle\nabla\eta,\overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle+\left\langle\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,,\overline{\eta}\right\rangle\right]}_{=0}.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes [23], obtém-se

$$\left\langle \boldsymbol{A}\,\Theta, \overline{\Theta} \right\rangle \;=\; -\mu\,\|\nabla\,\boldsymbol{u}\,\|^2 - \nu\,\|\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{u}\,\|^2 \;\leq\; 0$$

ou seja, $Re\left\langle \boldsymbol{A}\,\Theta, \overline{\Theta} \right\rangle \leq 0$. Logo temos

$$\lambda\|\Theta\| \leq \|(\lambda I - A)\Theta\|\,.$$

Para analisar a inversão do resolvente, consideremos a equação

$$(\lambda I - \boldsymbol{A}\,)\,\Theta = \boldsymbol{H}\,. \tag{4.14}$$

Tomando o produto interno com $\overline{\Theta}$, temos

$$\lambda\|\Theta\|^2 - \left\langle \boldsymbol{A}\,\Theta, \overline{\Theta} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{H}\,, \overline{\Theta} \right\rangle,$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lambda\|\Theta\|^2 \;&\leq\; \left\langle \boldsymbol{H}\,, \overline{\Theta} \right\rangle, \\ &\leq\; \|\,\boldsymbol{H}\,\| \cdot \|\overline{\Theta}\| \;=\; \|\,\boldsymbol{H}\,\| \cdot \|\Theta\|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lambda\|\Theta\| \;\leq\; \|\,\boldsymbol{H}\,\|.$$

Uma vez que da equação (4.14), $\Theta = (\lambda I - \boldsymbol{A}\,)^{-1}\,\boldsymbol{H}$, da desigualdade anterior obtemos

$$\|\,(\lambda I - \boldsymbol{A}\,)^{-1}\,\boldsymbol{H}\,\| \;\leq\; \frac{1}{\lambda}\|\,\boldsymbol{H}\,\|\,, \qquad \lambda > 0.$$

Assim, $\boldsymbol{A}$ satisfaz as condições do Teorema de Hille-Yosida. □

4.3 Construção de Certas Soluções Fundamentais

Nesta seção, tem-se como finalidade achar uma expressão explícita da solução fundamental do sistema (4.16), da mesma maneira como foi feito na equação (3.1).

Da segunda equação do sistema (4.6), temos

$$\nabla\eta = -\rho\int_0^t (\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},s)\;ds + \int_0^t (\nabla g)(\boldsymbol{x},s)\;ds + \nabla\eta_0,$$

substituindo este resultado na primeira equação do sistema (4.6), obtém-se

$$\boldsymbol{u}_t - \mu\Delta\boldsymbol{u} - \nu\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} - c^2\int_0^t (\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},s)\;ds = \boldsymbol{F} \tag{4.15}$$

onde $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} - \dfrac{c^2}{\rho}\displaystyle\int_0^t (\nabla g)(\boldsymbol{x},s)\;ds - \nabla\eta_0$. Definindo o operador integro-diferencial.

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nu\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + c^2\int_0^t (\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},\theta)\;d\theta\;,$$

temos o novo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \\ \eta = -\rho\displaystyle\int_0^t \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\;d\tau + \int_0^t g\;d\tau, \\ u\big|_{t=0} = 0 \quad , \quad \eta\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Seja $\mathscr{X} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\mathscr{W}} = \nabla\times\boldsymbol{u}$. Então temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t} &= (\mu+\nu)\Delta\mathscr{X} + c^2\int_0^t \Delta\mathscr{X}\;ds + \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}, \\ \frac{\partial\boldsymbol{\mathscr{W}}}{\partial t} &= \mu\Delta\boldsymbol{\mathscr{W}} + \nabla\times\boldsymbol{F}. \end{aligned}$$

Sejam $G_\mu(\boldsymbol{x},t) = G(\boldsymbol{x},\mu t)$, $\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},(\mu+\nu)t)$ as funções de Green para a equação do Calor correspondentes a os coeficientes μ, $\nu+\mu$, cujas fórmulas explícitas foram apresentadas na equação (2.1). Assim[4]

$$\boldsymbol{\mathscr{W}} = \boldsymbol{G}_\mu \divideontimes (\nabla\times\boldsymbol{F}) \tag{4.17}$$

Observação 5. *A função de Green* $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t)$ *é uma matriz da forma*

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{I}\,G(\boldsymbol{x},t)$$

onde $\boldsymbol{I}$ *é a matriz identidade de ordem* 3×3.

[4]onde $\divideontimes$ é a convolução definida sobre $D\times(0,T)$, por

$$\boldsymbol{f}\divideontimes\boldsymbol{g} = \int_0^t\int_D \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},s)\;d\boldsymbol{y}\;ds$$

Denotando $g = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{f}) = \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, s)\, ds$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{X}}{\partial t} &= (\mu+\nu)\Delta \mathscr{X} + c^2 \boldsymbol{K}(\Delta \mathscr{X}) + g, \\ \mathscr{X}(0) &= 0, \end{cases} \tag{4.18}$$

tomando a transformada de Laplace no tempo

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)] = \int_0^\infty e^{-st} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\, dt,$$

a transformada de Fourier no espaço

$$\mathscr{F}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)] = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x},$$

e escrevendo $\mathscr{L}\mathscr{F}\mathscr{X} = \mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}}$. Então

$$s\mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}} = -(\mu+\nu)|\boldsymbol{\xi}|^2 \mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}} - \frac{c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}{s}\mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}} + \mathscr{L}\widehat{g},$$

usando $\mathscr{X}(0) = 0$, tal que

$$\left(s + (\mu+\nu)|\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}{s}\right)\mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}} = \mathscr{L}\widehat{g}$$

ou

$$\mathscr{L}\widehat{\mathscr{X}} = \frac{s}{s^2 + (\mu+\nu)|\boldsymbol{\xi}|^2 s + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2}\mathscr{L}\widehat{g}.$$

Seja $D(|\boldsymbol{\xi}|) = (\mu+\nu)^2|\boldsymbol{\xi}|^4 - 4c^2|\boldsymbol{\xi}|^2$. Note que D é negativo para $|\boldsymbol{\xi}|^2 < \frac{4c^2}{(\mu+\nu)^2} = \kappa$. Sejam

$$\alpha(|\boldsymbol{\xi}|) = \frac{-(\mu+\nu)|\boldsymbol{\xi}|^2 - \sqrt{D(|\boldsymbol{\xi}|)}}{2} \quad e \quad \beta(|\boldsymbol{\xi}|) = \frac{-(\mu+\nu)|\boldsymbol{\xi}|^2 + \sqrt{D(|\boldsymbol{\xi}|)}}{2}.$$

Observe que

$$\frac{s}{(s-\alpha)(s-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{s-\alpha} - \frac{\beta}{s-\beta}\right),$$

logo tomando a Transformada Inversa de Laplace, vemos que

$$\widehat{\mathscr{X}} = \left\{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}e^{\beta t}\right\} \star \widehat{g},$$

onde $\star$ é a convolução no tempo, dada por

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\ ds.$$

Seja $\rho^2 = |\,\boldsymbol{\xi}\,|^2$, então

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{X}} &= \left\{ \frac{(\mu+\nu)\rho^2 + \sqrt{D(\rho)}}{2\sqrt{D(\rho)}}\ e^{\dfrac{-(\mu+\nu)\rho^2 - \sqrt{D(\rho)}}{2}t} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{(\mu+\nu)\rho^2 - \sqrt{D(\rho)}}{2\sqrt{D(\rho)}}\ e^{\dfrac{-(\mu+\nu)\rho^2 + \sqrt{D(\rho)}}{2}t} \right\} \star g(\,\boldsymbol{\xi}\,, t),\end{aligned} \tag{4.19}$$

podendo também ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathscr{X}} &= e^{-\dfrac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}t} \left\{ \left(\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2\sqrt{D(\rho)}} + \frac{1}{2} \right)\ e^{-\dfrac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t} \right. \\ &\qquad \left. + \left(-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2\sqrt{D(\rho)}} + \frac{1}{2} \right)\ e^{\dfrac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t} \right\} \star g(\,\boldsymbol{\xi}\,, t), \\ &= e^{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}t} \left\{ -\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{\sqrt{D(\rho)}} \left(\frac{e^{\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t} - e^{-\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t}}{2} \right) + \frac{e^{\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t} + e^{-\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t}}{2} \right\} \star g(\,\boldsymbol{\xi}\,, t).\end{aligned}$$

Então,

$$\widehat{\mathscr{X}} = e^{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}t} \left\{ -\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{\sqrt{D(\rho)}} \operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t \right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t \right) \right\} \star g(\,\boldsymbol{\xi}\,, t).$$

No caso $\rho^2 < \kappa$, temos

$$\sqrt{D(\rho)} = i\sqrt{|D(\rho)|} \qquad e \qquad \operatorname{senh}\left(\frac{i\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right) = i \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right),$$

enquanto $\cosh\left(\frac{i\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right) = \cos\left(\frac{\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right)$. Daí,

$$\frac{1}{i\sqrt{|D(\rho)|}} \operatorname{senh}\left(\frac{i\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right) = \frac{1}{\sqrt{|D(\rho)|}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{|D(\rho)|}}{2}t \right).$$

A Transformada Inversa de Fourier $\Gamma(\,\boldsymbol{x}\,, t)$ é dada por

$$\Gamma(\,\boldsymbol{x}\,, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \rho^2 \left(-\frac{\alpha(\rho)}{\sqrt{D(\rho)}} e^{\alpha(\rho)t} + \frac{\beta(\rho)}{\sqrt{D(\rho)}} e^{\beta(\rho)t} \right) \frac{\operatorname{sen}(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}\ d\rho. \tag{4.20}$$

Para $\rho^2 > \kappa$, temos

$$\frac{-(\mu+\nu)\rho^2 + \sqrt{D(\rho)}}{2} = \frac{-(\mu+\nu)\rho^2}{2} + \frac{(\mu+\nu)\rho^2\sqrt{1-\kappa\rho^{-2}}}{2}$$

e, pelo Teorema de Taylor (versão integral)

$$\sqrt{1-\kappa\rho^{-2}} = 1 - \frac{1}{2}\kappa\rho^{-2} - \frac{1}{4}\kappa^2\rho^{-4}\int_0^1 \frac{(1-\theta)\;d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{-(\mu+\nu)\rho^2 + \sqrt{D(\rho)}}{2} &= \frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\kappa\rho^{-2} - \frac{1}{4}\kappa^2\rho^{-4}\int_0^1 \frac{(1-\theta)\;d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{3/2}}\right),\\ &= -\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4} - \frac{(\mu+\nu)\rho^{-2}\kappa^2}{8}\int_0^1 \frac{(1-\theta)\;d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{3/2}}.\end{aligned}$$

Então,

$$\beta(\rho) = -\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4} - B(\rho), \tag{4.21}$$

onde

$$B(\rho) = \frac{(\mu+\nu)\rho^{-2}\kappa^2}{8}\int_0^1 \frac{(1-\theta)\;d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{3/2}}.$$

Por (4.22), temos

$$\frac{\beta(p)}{\sqrt{D(\rho)}} = -\frac{\kappa}{4}\rho^{-2} + \mathcal{O}\left(\rho^{-4}\right)$$

e

$$\exp\left(\beta(\rho)t\right) = e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\;e^{-B(\rho)t}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{-(\mu+\nu)\rho^2 - \sqrt{D(\rho)}}{2} &= \frac{-(\mu+\nu)\rho^2}{2} - \frac{(\mu+\nu)\rho^2\sqrt{1-\kappa\rho^{-2}}}{2},\\ &= -\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}\left[2 - \frac{1}{2}\kappa\rho^{-2} - \frac{1}{4}\kappa^2\rho^{-4}\int_0^1 \frac{(1-\theta)\;d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{3/2}}\right],\\ &= -\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\kappa\rho^{-2}\right) + B(\rho).\end{aligned}$$

Então,

$$\alpha(\rho) = -(\mu+\nu)\rho^2 + \frac{(\mu+\nu)\kappa}{4} + B(\rho), \tag{4.22}$$

enquanto que

$$-\frac{\alpha(p)}{\sqrt{D(\rho)}} = 1 + \mathcal{O}\left(\rho^{-2}\right)$$

e

$$\exp\left(\alpha(\rho)t\right) = e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ e^{\dfrac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\ e^{B(\rho)t}.$$

Escrevemos

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\boldsymbol{x}\,,t) &= \int_L^{\infty} + \int_0^L = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad , \qquad L > \kappa \\
&= \Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2,
\end{aligned}$$

onde os sub indices $+$ e $-$ correspondem para α e β na integral definida por (4.19). Então:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_L^{+\infty} \rho^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\rho^{-2}\right)\right) e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\ e^{B(\rho)t}\,\frac{\operatorname{sen}\left(|\boldsymbol{x}|\rho\right)}{|\boldsymbol{x}|\rho}\ d\rho, \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|} \int_L^{+\infty} \rho\left(1 + \mathcal{O}\left(\rho^{-2}\right)\right) e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ e^{B(\rho)t}\operatorname{sen}\left(|\boldsymbol{x}|\rho\right)\ d\rho.
\end{aligned}$$

Definindo

$$B_L(\rho) = \begin{cases} B(\rho) & , \quad \rho \geq L, \\ 0 & , \quad \rho < L, \end{cases}$$

podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|} \int_0^{+\infty} \rho e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ e^{B_L(\rho)t}\operatorname{sen}\left(|\boldsymbol{x}|\rho\right)\ d\rho, \\
&- \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|} \int_0^{L} \rho e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ \operatorname{sen}\left(|\boldsymbol{x}|\rho\right)\ d\rho, \\
&= e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\,\boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t) * \ \mathfrak{F}\left(e^{B_L(\rho)t}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|} g_1^+(\boldsymbol{x}\,,t),
\end{aligned}$$

onde $*$ denota a convolução no espaço e

$$g_1^+(\boldsymbol{x}\,,t) = \int_0^L \rho e^{-(\mu+\nu)\rho^2 t}\ \operatorname{sen}\left(|\boldsymbol{x}|\rho\right)\ d\rho.$$

Note que ambos $e^{B_L(\rho)t}$ e $g_1^+(\boldsymbol{x}\,,t)$ estão em $\mathcal{C}_B^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+)$.

Por outro lado,

$$e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t} = 1 + \frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}s}\ ds$$

e

$$\mathfrak{F}\left(e^{B_L(\rho)t}\right) \;=\; \mathfrak{F}\left[1+\left(e^{B_L(\rho)t}-1\right)\right] \;=\; \delta(\boldsymbol{x}) + \mathfrak{F}\left(e^{B_L(\rho)t}-1\right).$$

Lema 4.3.1. *As integrais*

$$H(\boldsymbol{x},t) = \int_0^\infty \rho\left(e^{B_L(\rho)t}-I\right)\operatorname{sen}(|\boldsymbol{x}|\rho)\;d\rho$$

e

$$h(t) = \frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}s}\;ds$$

são convergentes.

Demonstração. Note que

$$e^{B_L(\rho)t} - I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_L^n(\rho)t^n}{n!} = \mathcal{O}\left(\rho^{-2}\right);$$

logo,

$$H(\boldsymbol{x},t) \;=\; \mathcal{O}(1)\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(|\boldsymbol{x}|\rho)}{\rho}\;d\rho + Termos\;\;Regulares,$$

o primeiro termo sendo uma integral condicionalmente convergente. □

Então podemos escrever,

$$\Gamma_1^+ \;=\; (1+h(t))\,\boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x},t) * \left(\delta(x)+H(\boldsymbol{x},t)\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|}g_1^+(\boldsymbol{x},t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_1^+ \;&=\; \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x},t) + h(t)\boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x},t) * H(\boldsymbol{x},t)\\ &+\; h(t)\boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x},t) * H(\boldsymbol{x},t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\boldsymbol{x}|}g_1^+(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}$$

Lema 4.3.2. *As Integrais*

$$S_{B,L}(\boldsymbol{x},t) = \int_{L|\boldsymbol{x}|}^{\infty}\exp\left[-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)\right]\frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\;d\zeta$$

e

$$C_{B,L}(\boldsymbol{x},t) = \int_{L|\boldsymbol{x}|}^{+\infty}\exp\left[-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)\right]\frac{\cos\zeta}{\zeta}\;d\zeta$$

existem.

Demonstração. De fato, uma vez que $\exp\left[-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)\right] \uparrow 1$, com $\zeta \uparrow \infty$ e $1 - \exp\left[-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)\right] \downarrow 0$, com $\zeta \uparrow \infty$.

$$S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t) = \int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\; d\zeta - \int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{\infty} \left\{1 - \exp\left[-B\left(\frac{\zeta}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\right)\right]\right\} \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\; d\zeta,$$

existe e similarmente para $C_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t)$. □

Então

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^- &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_L^{+\infty} \rho^2 \left(-\frac{\kappa}{4}\rho^{-2} + \mathcal{O}\left(\rho^{-4}\right)\right)\; e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\; e^{-B(\rho)t} \frac{\operatorname{sen}\left(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho\right)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}\; d\rho,\\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\kappa}{4}\; e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t} \int_L^{+\infty}\; e^{-B(\rho)t} \frac{\operatorname{sen}\left(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho\right)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}\; d\rho\\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t} \int_L^{+\infty}\; \mathcal{O}\left(\rho^{-2}\right)\; e^{-B(\rho)t} \frac{\operatorname{sen}\left(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho\right)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}\; d\rho,\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t} \left[-\frac{\kappa}{4|\,\boldsymbol{x}\,|} S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t) + \mathcal{O}\left(|\,\boldsymbol{x}\,|\right) \int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{+\infty} e^{-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)t} \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta^3}\; d\zeta\right].
\end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left[S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t)\right] &= -\frac{L x_i}{|\,\boldsymbol{x}\,|} e^{-B(L)t} \frac{\operatorname{sen}\left(L|\,\boldsymbol{x}\,|\right)}{L|\,\boldsymbol{x}\,|}\\
&\quad + \int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{+\infty} t e^{-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)t} B'\left(\frac{\zeta}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\right) \frac{x_i}{|\,\boldsymbol{x}\,|^3} \operatorname{sen}\zeta\; d\zeta.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B'(\rho) &= \frac{(\mu+\nu)\kappa^2}{8} \left\{-2\rho^{-3} \int_0^1 \frac{(1-\theta)\; d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^2)^{5/2}}\right.\\
&\qquad \left. + \rho^{-2} \int_0^1 \frac{-3/2(-\kappa\theta)(-2)\rho^{-3}(1-\theta)\; d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{5/2}}\right\},\\
&= \frac{(\mu+\nu)\kappa^2}{8} \left\{-2\rho^{-3} \int_0^1 \frac{(1-\theta)\; d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^2)^{5/2}}\right.\\
&\qquad \left. -3\kappa\; \rho^{-5} \int_0^1 \frac{\theta(1-\theta)\; d\theta}{(1-\kappa\theta\rho^{-2})^{5/2}}\right\},\\
&= \mathcal{O}\left(\rho^{-3}\right).
\end{aligned}$$

Daí, $B'\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right) = |\,\boldsymbol{x}\,|^3\, \mathcal{O}\left(\zeta^{-3}\right)$ e

$$\begin{aligned}
\int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{+\infty} t e^{-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)t} B'\left(\frac{\zeta}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\right) \frac{x_i}{|\,\boldsymbol{x}\,|^3} \operatorname{sen}\zeta\; d\zeta &= \int_{L|\boldsymbol{x}\,|}^{+\infty} t e^{-B\left(\frac{\zeta}{|\boldsymbol{x}|}\right)t}\, \mathcal{O}\;\left(|\,\boldsymbol{x}\,|\right) \zeta^{-3} \operatorname{sen}\zeta\; d\zeta,\\
&= \mathcal{O}\left(t\right).
\end{aligned}$$

Disto segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t)\right] \;=\; \mathcal{O}\,(t).$$

Concluímos que $S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t) \in \mathcal{C}^{\,1,\infty}\,(\mathbb{R}^{\,3},\,\mathbb{R}_{\,+})$ e

$$\Gamma_1^- \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\left[\frac{\kappa}{4|\,\boldsymbol{x}\,|}S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t) + \,\mathcal{O}\,(|\,\boldsymbol{x}\,|)g_1^-(\boldsymbol{x}\,,t)\right],$$

onde

$$g_1^-(\boldsymbol{x}\,,t) = \int_{L|\,\boldsymbol{x}\,|}^{+\infty} e^{-B\left(\frac{\zeta}{|\,\boldsymbol{x}\,|}\right)t}\,\frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta^3}\;d\zeta \qquad \text{esta certamente em} \quad \mathcal{C}^{\,1,\infty}(\mathbb{R}^{\,3}, R_+).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\Gamma_2(\boldsymbol{x}\,,t) \;&=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^L e^{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}t}\left\{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{\sqrt{D(\rho)}}\operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t\right)\right.\\ &\qquad\left. +\cosh\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t\right)\right\}\frac{\operatorname{sen}\,(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}d\rho\end{aligned}$$

é $\mathcal{C}_{\,B}^{\,1,\infty}$ sobre compactos em $\mathbb{R}^{\,3}\times\mathbb{R}_{\,+}$.

4.3.1 Núcleo do Problema Associado

Observamos que a solução fundamental pode ser escrita como a soma de três termos; com um certo abuso de notação vamos tirar um termo de Γ_1^+ e escrever na verdade uma soma de quatro termos, visando obter o núcleo de Shen, para o qual temos uma série de resultados importantes que já foram desenvolvidos.

Assim, o núcleo da equação (4.18) toma a forma:

$$\Upsilon(\boldsymbol{x}\,,t) = \boldsymbol{G}_{\,\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t) + \Gamma_1^+(\boldsymbol{x}\,,t) + \Gamma_1^-(\boldsymbol{x}\,,t) + \Gamma_2(\boldsymbol{x}\,,t) \tag{4.23}$$

onde

$$\begin{aligned}\Gamma_1^+(\boldsymbol{x}\,,t) \;&=\; h(t)\,\boldsymbol{G}_{\,\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t) + \boldsymbol{G}_{\,\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t) *\; H(\boldsymbol{x}\,,t)\\ &+\; h(t)\,\boldsymbol{G}_{\,\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t) *\; H(\boldsymbol{x}\,,t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}}{|\,\boldsymbol{x}\,|}g_1^+(\boldsymbol{x}\,,t),\end{aligned}$$

$$\Gamma_1^-(\boldsymbol{x}\,,t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}t}\left[\frac{\kappa}{4|\,\boldsymbol{x}\,|}S_{B,L}(\boldsymbol{x}\,,t) + \,\mathcal{O}\,(|\,\boldsymbol{x}\,|)g_1^-(\boldsymbol{x}\,,t)\right]$$

e

$$\Gamma_2(\boldsymbol{x}\,,t) \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^L e^{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}t}\left\{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{\sqrt{D(\rho)}}\,\mathrm{senh}\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t\right)\right.$$
$$\left. +\cosh\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}t\right)\right\}\frac{\mathrm{sen}\,(|\,\boldsymbol{x}\,|\rho)}{|\,\boldsymbol{x}\,|\rho}d\rho.$$

Observação 6. *Observe que*

$$\frac{\partial G_{\mu+\nu}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,t) \;=\; -\frac{x_k}{2(\mu+\nu)t}G_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t),$$

$$\frac{\partial^2 G_{\mu+\nu}}{\partial x_j\partial x_k}(\boldsymbol{x}\,,t) \;=\; -\frac{\delta_{kj}}{2(\mu+\nu)t}G_{\mu+\nu}(x,t)+\frac{x_k x_j}{4(\mu+\nu)^2t^2}G_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t).$$

4.3.2 Parte Principal do Núcleo

Pelo visto anteriormente, existe um núcleo $\Upsilon(\boldsymbol{x}\,,t)$, tal que

$$\mathscr{X} = \Upsilon \circledast \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,. \tag{4.24}$$

Lembramos que

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} \;=\; -\Delta\,\boldsymbol{u} + \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u} \quad (\textit{vetor identidade})$$

ou,

$$-\Delta\,\boldsymbol{u} \;=\; \nabla\times\boldsymbol{\mathscr{W}} - \nabla\,\mathscr{X},$$

segue-se que a solução da equação (4.16) tem a forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}\,,t) &= (-\Delta)^{-1}\nabla\times\boldsymbol{\mathscr{W}} - (-\Delta)^{-1}\nabla\,\mathscr{X},\\
&= (-\Delta)^{-1}\nabla\times(\boldsymbol{G}_{\mu}\circledast(\nabla\times\boldsymbol{F}\,)) - (-\Delta)^{-1}\nabla\,(\Upsilon\circledast\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,)\,,\\
&= \left[(-\Delta)^{-1}(\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{G}_{\mu})\right]\circledast\boldsymbol{F} - (-\Delta)^{-1}\sum_{j=1}^{3}\partial_j\left(\sum_{i=1}^{3}\partial_i\Upsilon\circledast F_i\right)e_j,\\
&= \left[(-\Delta)^{-1}(-\Delta\,\boldsymbol{G}_{\mu}+\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{G}_{\mu})\right]\circledast\boldsymbol{F} - (-\Delta)^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i\partial_j\Upsilon\circledast F_i\right)e_j,\\
&= \left[\boldsymbol{G}_{\mu} + \mathcal{A}\,\boldsymbol{G}_{\mu} - \mathcal{A}\,\boldsymbol{\Upsilon}\right]\circledast\boldsymbol{F}\,,
\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{x}\,,t) = \boldsymbol{I}\;\; \Upsilon(\boldsymbol{x}\,,t)$ e a matriz simétrica [5] $\mathcal{A} = (-\Delta)^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\,.$

Então a solução do sistema (4.16), em D, tem a forma

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{x}\,,t) \;\;=\;\; \int_0^t\int_D \mathbb{G}\,(\boldsymbol{x}\,-\,\boldsymbol{y}\,,t-\tau)\,\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{y}\,,\tau)\;d\boldsymbol{y}\;\;d\tau$$

onde

$$\mathbb{G}\,(\boldsymbol{x}\,,t) = \boldsymbol{G}_{\,\mu}(\boldsymbol{x}\,,t) + (-\Delta)^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{G}_{\,\mu}(\boldsymbol{x}\,,t) - (-\Delta)^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Upsilon}(\boldsymbol{x}\,,t). \tag{4.25}$$

Substituindo a equação (4.23), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\,ij}(\boldsymbol{x}\,,t) &= \delta_{ij}G_\mu(\boldsymbol{x}\,,t) + \mathscr{R}_{\,i}\mathscr{R}_{\,j}\,[G_\mu(\boldsymbol{x}\,,t) - G_{\mu+\nu}(\boldsymbol{x}\,,t)] \\
&\quad - \;\; \mathscr{R}_{\,i}\mathscr{R}_{\,j}\left(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right)(\boldsymbol{x}\,,t), \\
&= \delta_{ij}G_\mu(\boldsymbol{x}\,,t) + \int_{\mu t}^{(\mu+\nu)t} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}\,,\theta)\;d\theta - \mathscr{R}_{\,i}\mathscr{R}_{\,j}\left(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right)(\boldsymbol{x}\,,t),
\end{aligned}$$

ou, em termos dos elementos da matriz fundamental $\mathbb{G}\,(\boldsymbol{x}\,,t) = \{G_{ij}(\boldsymbol{x}\,,t)\}$, temos:

$$\boxed{\mathbb{G}_{\,ij}(\boldsymbol{x}\,,t) = \Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}\,,t) - \mathscr{R}_{\,i}\mathscr{R}_{\,j}\left(\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right)(\boldsymbol{x}\,,t)} \tag{4.26}$$

onde $i,\;\; j\;=\;1,2,3.$ $\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}\,,t) \;=\; \delta_{ij}G_\mu(\boldsymbol{x}\,,t) + \displaystyle\int_{\mu t}^{(\mu+\nu)t} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}\,,\theta)\;d\theta$ é o núcleo achado por Brown e Shen [5].

Observação 7. *Note que o núcleo encontrado é uma perturbação daquele encontrado na equação* (3.2)*, para o problema de Navier Stokes em Cilindros Lipschitz [51, veja também [13, 39]].*

[5] $\mathcal{A} = \{\mathscr{R}_{\,i}\mathscr{R}_{\,j}\}$onde $\mathscr{R}_{\,i} = (-\Delta)^{-1/2}\partial_i$ é a Transformada de Riesz (*veja*[26]).

4.4 Identificação do Semigrupo

A solução achada no Capítulo anterior e escrita em termos de potenciais de camada é da forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= \mathbb{G} \circledast \boldsymbol{F} \quad , \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{f}, g) \\ &= \mathcal{G}_1 \boldsymbol{f} + \mathcal{G}_2 g\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\eta &= -\rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_1 \boldsymbol{f} - \rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_2 g + K g, \\ &= -\rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_1 \boldsymbol{f} + (-\rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_2 + K)\, g,\end{aligned}$$

ou, voltando à forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 & \mathcal{G}_2 \\ -\rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_1 & -\rho K \operatorname{div} \mathcal{G}_2 + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ g \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Agora lembremos que da equação em η no sistema (4.6), temos

$$\eta(\boldsymbol{x}, t) = -\rho \int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\, ds + \int_0^t \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, s)\, ds.$$

Observe que

$$\begin{aligned}u_i(\boldsymbol{x}, t) &= \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \int_D \mathbb{G}_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - \tau) F_j(\boldsymbol{y}, \tau)\, d\boldsymbol{y}\ d\tau, \\ \operatorname{div} u_i(\boldsymbol{x}, t) &= \int_0^t \int_D \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i \mathbb{G}_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - \tau) F_j(\boldsymbol{y}, \tau)\, d\boldsymbol{y}\ d\tau,\end{aligned}$$

ou matricialmente,

$$\operatorname{div} u_i(\boldsymbol{x}, t) = \partial_i \mathbb{G}(\boldsymbol{x}, t) \circledast \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$$

onde

$$\partial_i \mathbb{G} = \begin{pmatrix} \partial_1 \mathbb{G}_{i1} & \partial_1 \mathbb{G}_{i2} & \partial_1 \mathbb{G}_{i3} \\ \partial_2 \mathbb{G}_{i1} & \partial_1 \mathbb{G}_{i2} & \partial_1 \mathbb{G}_{i3} \\ \partial_3 \mathbb{G}_{i1} & \partial_1 \mathbb{G}_{i2} & \partial_1 \mathbb{G}_{i3} \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \operatorname{div} u_1 + \operatorname{div} u_2 + \operatorname{div} u_3 = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, t) \circledast \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$$

onde $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \mathbb{G}$, com $M_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \partial_i \mathbb{G}_{kj}$.

Contudo temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) &= \mathbb{G}(\boldsymbol{x}, t) \circledast \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t), \\ \eta(\boldsymbol{x}, t) &= -\rho \int_0^t \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, s) \circledast \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, s)\, ds + \int_0^t \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, s)\, ds, \end{aligned}$$

ou,

$$\Theta(\boldsymbol{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbb{G}(\boldsymbol{x}, t) \\ -\rho t \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, t) \end{pmatrix} \circledast \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \displaystyle\int_0^t \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, s)\, ds \end{pmatrix}.$$

5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA EM TERMOS DE POTENCIAIS DE CAMADA

Neste capítulo, construímos os potenciais de camada simples e dupla [27, 44], para assim identificando o símbolo principal do núcleo $\mathbb{G}(\boldsymbol{x}, t)$ estabelecer condições para a inversão do operador e solução do problema de Dirichlet [15, 28, 53].

Seja D um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^3$, lembrando a notação

$$L\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nu\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + c^2 \int_0^t (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, \theta)\, d\theta.$$

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} &= L\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in D_T, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{g} \ \ \textit{sobre} \ \ \partial D, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) &= 0, \quad \boldsymbol{x} \in D. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Precisamos o seguinte resultado técnico sobre unicidade em determinadas classes funcionais.

Teorema 5.0.1. *Seja $\boldsymbol{u}$ solução do problema (5.1) em D_T, suponha que u^* e $(\nabla \boldsymbol{u})^*$ estão em $L^2(S_T)$, que u e $\nabla \boldsymbol{u}$ tem limites não tangenciais sobre S_T. Temos a desigualdade*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)\|^2_{L^2(D)} + \mu \|\nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\|^2_{L^2(0,T;L^2(D))} + \nu \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, s)\|^2_{L^2(0,T;L^2(D))} + \\ &\frac{c^2}{2} \left\| \int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \theta)\, d\theta \right\|^2_{L^2(D)} \le \mu \int_0^t \int_{\partial D} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s) \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{q}, s)| \ d\boldsymbol{q} \ ds \\ &\qquad + \nu \int_0^t \int_{\partial D} |(u(\boldsymbol{q}, s) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}, s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)| \ d\boldsymbol{q} \ ds \\ &\qquad + c^2 \int_0^t \int_{\partial D} \left| (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}, s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, \theta)\, d\theta \right) \right| \ d\boldsymbol{q} \ ds \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$+ \int_0^t \int_D |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},s)| \; d\boldsymbol{x} \; ds. \tag{5.3}$$

Demonstração. Seja $\Omega_k \uparrow D$ como no Lema 1.1.3. Como $\boldsymbol{u}$ é suave em cada $\Omega_{k,T}$ é possível uma aplicação das identidades de Green. Utilizamos aqui a notação $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}$ para denotar a derivada normal de $\boldsymbol{u}$.

Tomando o produto interno com $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ e integrando na variável t, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Omega_k} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2 d\boldsymbol{x} &= \mu \int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\cdot\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\, ds \\
&+ \nu \int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\cdot\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\; ds \\
&+ c^2 \int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s) \left(\int_0^s \nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{x}\; ds \\
&+ \int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\; ds
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\cdot\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\; ds &= -\int_0^t \int_{\Omega_k} |\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)|^2\; d\boldsymbol{x}\; ds \\
&+ \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}_k}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\; ds
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\cdot\nabla\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\; ds = \\
&\qquad -\int_0^t \int_{\Omega_k} |\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)|^2\; d\boldsymbol{x}\; ds \\
&\qquad +\int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (u(\boldsymbol{q},s)\cdot\boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q},s))\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\; ds.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\nabla\left(\int_0^s \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{x}\; ds = \\
&\qquad -\int_0^t \int_{\Omega_k} \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\left(\int_0^s \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{x}\; ds \\
&\qquad +\int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\cdot\boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q},s))\left(\int_0^s \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},\theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{q}\; ds.
\end{aligned}$$

Notemos também que,

$$\int_0^t \int_{\Omega_k} \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta \right) d\boldsymbol{x}\; ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega_k} \frac{d}{ds} \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta \right)^2 d\boldsymbol{x}\; ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega_k} \left(\int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta \right)^2 d\boldsymbol{x}\,.$$

Então,

$$\frac{1}{2} \| \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \|^2_{L^2(\Omega_k)} + \mu \| \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s) \|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega_k))} + \nu \| \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s) \|^2_{L^2(0,t;L^2(\Omega_k))} +$$

$$\frac{c^2}{2} \left\| \int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\theta)\, d\theta \right\|^2_{L^2(\Omega_k)} = \mu \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}_k}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$+ \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (u(\boldsymbol{q},s) \cdot \boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q},s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\; ds \qquad .$$

$$+ c^2 \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s) \cdot \boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q},s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},\theta)\, d\theta \right) d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},s)\, d\boldsymbol{x}\; ds$$

Quando $k \to \infty$, as integrais à esquerda convergem para as correspondentes integrais sobre D graças ao teorema da convergência monótona. Para os termos à direita temos,

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s)\, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}_k}(\boldsymbol{q},s)\, d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$= \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \sigma_k(\boldsymbol{q})\, \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}),s) \langle \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q})), \nabla \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}),s) \rangle\; d\boldsymbol{q}\; ds$$

onde usamos a parte 3) do Lema 1.1.3. Tomando em conta as partes 1) e 4) do Lema 1.1.3 e assumindo que $\boldsymbol{u}$ e $\nabla \boldsymbol{u}$ tem limites não tangenciais, vemos que

$$\sigma_k(\boldsymbol{q}) \to 1 \;\; q.s.\,, \quad \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}),s) \to \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q},s) \;\; q.s.$$

e

$$\langle \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q})), \nabla \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\rangle \to \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{q}, s) \quad q.s.$$

Também, usando a parte (1) do Lema 1.1.3 segue-se que

$$|\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\langle \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q})), \nabla \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\rangle| \leq \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{q}, s)(\nabla \boldsymbol{u})^*(\boldsymbol{q}, s).$$

Da análise anterior, assumindo que u^* e $(\nabla \boldsymbol{u})^*$ pertencem a $L^2(S_T)$, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}_k}(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\; ds = \int_0^t \int_{\partial D} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\; ds.$$

Da mesma maneira os outros termos podem ser escrito como,

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (u(\boldsymbol{q}, s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q}, s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$= \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \sigma_k(\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\, d\boldsymbol{q}\; ds$$

e

$$\int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (u(\boldsymbol{q}, s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\boldsymbol{q}, s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, \theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$= \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} \sigma_k(\boldsymbol{q})\,(\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), \theta)\, d\theta\right) d\boldsymbol{q}\; ds,$$

com as mesmas considerações anteriores, as do Lema 1.1.3 e assumindo que $(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^*$ e $\left(\int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\, ds\right)^*$ pertencem a $L^2(S_T)$, temos

$$(\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s) \to (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}, s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s) \; q.s.,$$

e

$$(\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)) \int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), \theta)\, d\theta$$

$$\longrightarrow (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, s)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}, s)) \int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{q}, \theta)\, d\theta \quad q.s.$$

Além disso,

$$|(\boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)\cdot \boldsymbol{n}_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\Lambda_k(\boldsymbol{q}), s)| \leq (\boldsymbol{u})^*(\boldsymbol{q}, s)\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u})^*(\boldsymbol{q}, s)$$

e

$$\left|(\boldsymbol{u}\,(\Lambda_k(\boldsymbol{q}\,), s) \cdot \boldsymbol{n}\,_k(\Lambda_k(\boldsymbol{q}\,), s)) \int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\Lambda_k(\boldsymbol{q}\,), \theta)\; d\theta\right| \leq (\boldsymbol{u}\,)^*(\boldsymbol{q}\,, s) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, \theta)\; d\theta\right)^*.$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (u(\boldsymbol{q}\,, s) \cdot \boldsymbol{n}\,_k(\boldsymbol{q}\,, s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, s)\; d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$= \int_0^t \int_{\partial D} (u(\boldsymbol{q}\,, s) \cdot \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{q}\,, s)) \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, s)\; d\boldsymbol{q}\; ds$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\partial\Omega_k} (\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, s) \cdot \boldsymbol{n}\,_k(\boldsymbol{q}\,, s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, \theta)\; d\theta\right)\; d\boldsymbol{q}\; ds$$

$$= \int_0^t \int_{\partial D} (\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, s) \cdot \boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{q}\,, s)) \left(\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{q}\,, \theta)\; d\theta\right)\; d\boldsymbol{q}\; ds.$$

Assim tendo estabelecido estas convergências a estimativa (5.2), segue facilmente.

□

Corolário 5.0.1. *Suponha que* $\boldsymbol{u}$ *satisfaz as mesmas condições da proposição 5.0.1 com* $\boldsymbol{F} = 0$ *e* $\boldsymbol{u} = 0$ *sobre* S_T*. Então* $\boldsymbol{u} = 0$ *em* D_T*.*

5.1 Potenciais de Camada

Seja $\boldsymbol{g} \in L^2(\partial D \times (0, T))$, definimos os potenciais de camada simples e dupla com densidade $\boldsymbol{g}$ por

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\,(\boldsymbol{g}\,)(\boldsymbol{x}\,, t) &= \int_0^t \int_{\partial D} \mathbb{G}\,(\boldsymbol{x}\, - \boldsymbol{q}\,, t - s)\, \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{q}\,, s)\; d\boldsymbol{q}\; ds, \\
\mathcal{D}\,(\boldsymbol{g}\,)(\boldsymbol{x}\,, t) &= \int_0^t \int_{\partial D} \left[\frac{\partial\, \mathbb{G}\,(\boldsymbol{x}\, - \boldsymbol{q}\,, t - s)}{\partial \nu_t(\boldsymbol{q}\,)}\right]^{Tr} \boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{q}\,, s)\; d\boldsymbol{q}\; ds,
\end{aligned}$$

onde o **operador tração modificada** é dado por

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}\,_t} = (\nu - \mu)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}\,)\boldsymbol{N}\, + \mu\left(\nabla \boldsymbol{u}\, + (\nabla \boldsymbol{u}\,)^T\right)\,\boldsymbol{N}\, + c^2 \left(\int_0^t \operatorname{div} \boldsymbol{u}\; ds\right)\, \cdot \boldsymbol{N} \quad (5.4)$$

Agora vamos tentar entender o comportamento na fronteira de $\nabla\mathcal{S}(\boldsymbol{f})$ e $\mathcal{D}(\boldsymbol{f})$. Para $\ell = 1,\ldots,n$, seja

$$
\begin{aligned}
\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p},t) &= \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma_{ij}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds \\
&- \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\mathscr{R}_{ij}\Gamma_1^{+}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds \\
&- \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\mathscr{R}_{ij}\Gamma_1^{-}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds \\
&- \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\mathscr{R}_{ij}\Gamma_2(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds
\end{aligned}
$$

e seja $\mathscr{K}_{\ell,*}(\boldsymbol{p},t) = \sup\limits_{\varepsilon>0}\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p},t)$.

Sejam

$$
\begin{aligned}
K_1^{+} &= \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma_1^{+}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds, \\
K_1^{-} &= \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma_1^{-}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds,
\end{aligned}
$$

e

$$
K_2 = \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma_2}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds.
$$

Escrevendo por extenso o primeiro termo, temos:

$$
\begin{aligned}
K_1^{+} &= \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}h(t-s)\frac{\partial\boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds \\
&+ \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}[1+h(t-s)]\,\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * H\right)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds \\
&- \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}g_1^{+}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds
\end{aligned}
$$

O operador acima pode ser escrito como a soma de outros três, os quais como demonstraremos mediante aplicações dos resultados de Mikhlin [47] e o Lema de Aubin-Lions [54] são operadores compactos. Isto é apresentado mediante os seguintes Lemas :

Lema 5.1.1. *Dada $g_j(\boldsymbol{q}\,,s) \in L^2(0,T;L^2(\partial D))$ o operador*

$$K_{11}^{+} \;=\; \int_0^t h(t-s)\int_{\partial D}\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,,t-s)g_j(\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds$$

é um operador compacto em $L^2(0,T;L^2(\partial D))$

Demonstração.

$$K_{11}^{+} \;=\; -\frac{2\pi}{[4\pi(\mu+\nu)]^{5/2}}\int_0^t h(t-s)\int_{\partial D}\frac{p_\ell-q_\ell}{(t-s)^{5/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}g_j(\boldsymbol{q}\,,s)\;d\boldsymbol{q}\;\;ds$$

estimando temos

$$K_{11}^{+} \;\leq\; \frac{2\pi}{[4\pi(\mu+\nu)]^{5/2}}\int_0^t h(t-s)\int_{\partial D}\frac{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|}{(t-s)^{5/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}\,|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|\;\;d\boldsymbol{q}\;\;ds$$

considerando que

$$h(t-s) = \mathcal{O}\,(t-s)\qquad sobre\;\;[0,T] \tag{5.5}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}\left|K_{11}^{+}\right| \;&\leq\; \frac{2\pi C}{[4\pi(\mu+\nu)]^{5/2}}\int_0^t\int_{\partial D}\frac{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|}{(t-s)^{3/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}\,|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|\;\;d\boldsymbol{q}\;\;ds\\[2ex]
&\leq\; \frac{2\pi C}{[4\pi(\mu+\nu)]^{5/2}}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\varepsilon}}\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^{2(1-\varepsilon)}}\frac{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^{2(1-\varepsilon)}}{(t-s)^{1-\varepsilon}}\\[2ex]
&\qquad\qquad\times\frac{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|}{(t-s)^{1/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}\,|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|\;\;d\boldsymbol{q}\;\;ds\\[2ex]
&\leq\; \frac{C}{2(4\pi)^{3/2}(\mu+\nu)^{1+\varepsilon}}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\varepsilon}}\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^{2(1-\varepsilon)}}\\[2ex]
&\qquad\qquad\times\left[\frac{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}\right]^{3/2-\varepsilon}e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}\,|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|\;\;d\boldsymbol{q}\;\;ds\end{aligned}$$

Dado que $|\,\boldsymbol{x}\,|^{3/2-\varepsilon}e^{-|x|} \leq Const$ para $0 \leq |\,\boldsymbol{x}\,| < \infty$ (veja [31]), temos ainda

$$\left|K_{11}^{+}\right| \;\leq\; \frac{C}{2(4\pi)^{3/2}(\mu+\nu)^{1+\varepsilon}}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\varepsilon}}\int_{\partial D}\frac{|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|}{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^{2(1-\varepsilon)}}\;d\boldsymbol{q}\;\;ds$$

Pelos resultados de Mikhlin o operador integral

$$F(s,G) = \int_{\partial D}\frac{|g_j(\boldsymbol{q}\,,s)|}{|\boldsymbol{p}\,-\,\boldsymbol{q}\,|^{2(1-\varepsilon)}}\;\,d\boldsymbol{q}\,\in L^2(0,T;L^2(\partial D))$$

é limitado para $\varepsilon > 0$. Então

$$\begin{aligned}
\left|K_{11}^{+}\right| &\leq C_\varepsilon \int_0^t \frac{F(s,G)}{(t-s)^\varepsilon}\, ds \\
&\leq C_\varepsilon \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2\varepsilon}}\, ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t |F(s,G)|^2\, ds\right)^{1/2} < \infty
\end{aligned}$$

No que segue analisamos a derivada no tempo do operador, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{dK_{11}^{+}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds\right] \\
&= h(0)\int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, 0) g_j(\boldsymbol{q}, t)\, d\boldsymbol{q} \\
&\quad + \int_0^t \frac{dh}{dt}(t-s)\int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds \\
&\quad + \int_0^t h(t-s)\int_{\partial D} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, t-s)\right] g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds
\end{aligned}$$

onde

$$h(0) = 0, \quad \frac{dh}{dt}(t-s) = \frac{(\mu+\nu)\kappa}{4} e^{\frac{(\mu+\nu)k}{4}(t-s)}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial G_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}, t-s)\right] &= -\frac{d}{dt}\left[\frac{p_\ell - q_\ell}{16\pi^{3/2}[(\mu+\nu)(t-s)]^{5/2}}\ e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}\right] \\
&= \frac{5(p_\ell - q_\ell)}{32\pi^{3/2}(\mu+\nu)^{5/2}(t-s)^{3/2}}\ e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} \\
&\quad - \frac{(p_\ell - q_\ell)|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{64\pi^{3/2}[(\mu+\nu)(t-s)]^{7/2}}\ e^{-\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}}
\end{aligned}$$

pela equação (5.5), estimando temos

$$\left|\frac{dK_{11}^{+}}{dt}\right| \leq \frac{C}{16\pi^{3/2}(\mu+\nu)^{5/2}}\int_0^t\int_{\partial D}\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}{(t-s)^{5/2}}\, e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

$$+\frac{5}{32\pi^{3/2}(\mu+\nu)^{5/2}}\int_0^t\int_{\partial D}\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}{(t-s)^{1/2}}\, e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

$$+\frac{1}{64\pi^{3/2}(\mu+\nu)^{7/2}}\int_0^t\int_{\partial D}\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^3}{(t-s)^{5/2}}\, e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

levando na forma para poder estimar:

$$\left|\frac{dK_{11}^{+}}{dt}\right| \leq C\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\varepsilon}}\int_{\partial D}\frac{\left[\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{t-s}\right]^{5/2-\varepsilon}}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^{2(2-\varepsilon)}}\, e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

$$+C\int_0^t\int_{\partial D}\left[\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{t-s}\right]^{1/2} e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

$$+C\int_0^t\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}\left[\frac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{t-s}\right]^{5/2} e^{-\dfrac{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}{4(\mu+\nu)(t-s)}} g_j(\boldsymbol{q},s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

Pelo mesmo argumento anterior, (veja [31]), temos

$$\left|\frac{dK_{11}^{+}}{dt}\right| \leq C\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\varepsilon}}\int_{\partial D}\frac{|g_j(\boldsymbol{q},s)|}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^{2(2-\varepsilon)}}\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

$$+\; C\int_0^t\int_{\partial D}|g_j(\boldsymbol{q},s)|\; d\boldsymbol{q}\;\; ds + C\int_0^t\int_{\partial D}\frac{|g_j(\boldsymbol{q},s)|}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^2}\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

novamente pelos resultados de Mikhlin [47] e como é sabido $g_j \in L^2(0,T;L^2(\partial D))$, temos

$$\frac{dK_{11}^{+}}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\partial D))$$

Logo pelo lema de Aubin- Lions [54], temos

$$K_{11}^{+} \;\; \text{é compacto em} \quad L^2\left(0,T;L^2(\partial D)\right)$$

$\square$

Lema 5.1.2. *Dada* $g_j(\boldsymbol{q}, s) \in L^2(0,T; L^2(\partial D))$ *o operador*

$$K_{12}^{+} \;=\; \int_0^t \int_{\partial D} [1 + h(t-s)]\, \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; H\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds$$

é um operador compacto em $L^2(0,T; L^2(\partial D))$

Demonstração. A primeira parte pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; H\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds \\
&=\; \int_0^t \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell} * \; H\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds \\
&=\; \int_0^t \left(\int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\right) * \; H(\boldsymbol{p}, t)\; ds \\
&=\; -\int_0^t \left(\int_{\partial D} \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\right) * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}, t)\; ds \\
&=\; -\int_0^t \left[\int_{\partial D} \left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\right]\; ds \\
&=\; -\left[\left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right) \circledast g_j\right](\boldsymbol{p}, t)
\end{aligned}$$

estimado este termo

$$|I| \;\leq\; \left\| \left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right)(\boldsymbol{p}, t) \right\|_{L^2(S_T)} \|g_j(\boldsymbol{p}, t)\|_{L^2(S_T)}$$

e a segunda parte pela equação (5.5), é da forma

$$\begin{aligned}
J \;&=\; \int_0^t h(t-s) \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; H\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds \\
&=\; \int_0^t h(t-s) \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell} * \; H\right)(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\; d\boldsymbol{q}\;\; ds
\end{aligned}$$

$$= \int_0^t h(t-s)\left(\int_{\partial D} \frac{\partial \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\right) * \; H(\boldsymbol{p},t)\,ds$$

$$= -\int_0^t h(t-s)\left(\int_{\partial D} \boldsymbol{G}_{\mu+\nu}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\right) * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p},t)\,ds$$

$$= -\int_0^t h(t-s)\left[\int_{\partial D}\left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\right]\,ds$$

$$= -\left[h(t)\left(\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right)(\boldsymbol{p},t) \circledast g_j(\boldsymbol{p},t)\right]$$

considerando que $h(t) = \mathcal{O}(t)$ em $[0,T]$, e estimando, outra vez temos:

$$|J| \;\leq\; \left\|\left(t\boldsymbol{G}_{\mu+\nu} * \; \frac{\partial H}{\partial p_\ell}\right)(\boldsymbol{p},t)\right\|_{L^2(S_T)} \|g_j(\boldsymbol{p},t)\|_{L^2(S_T)}$$

$\square$

Lema 5.1.3. *Dada* $g_j(\boldsymbol{q},s) \in L^2(0,T;L^2(\partial D))$ *o operador*

$$K_{13}^+ = \int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\; e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}g_1^+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds$$

é um operador compacto em $L^2(0,T;L^2(\partial D))$

Demonstração.

$$K_{13}^+ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\right]g_1^+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\left[\frac{\partial g_1^+}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{p_\ell-q_\ell}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^3}g_1^+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\frac{\partial g_1^+}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds$$

$\square$

O segundo termo K_1^- pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
K_1^- &= \frac{\kappa}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}S_{B,L}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds\\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\partial D} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\mathcal{O}(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)g_1^-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds\\
&= -\frac{\kappa}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{p_\ell-q_\ell}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|^3}S_{B,L}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds\\
&+ \frac{\kappa}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}\frac{\partial S_{B,L}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds\\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\frac{p_\ell-q_\ell}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|}g_1^-(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds\\
&+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{t-\varepsilon} e^{-\frac{(\mu+\nu)\kappa}{4}(t-s)}\int_{\partial D}\mathcal{O}(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|)\frac{\partial g_1^-}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds
\end{aligned}
$$

Analogamente o terceiro,

$$
\begin{aligned}
K_2 &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^L e^{-\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{2}(t-s)}\left\{\frac{(\mu+\nu)\rho^2}{\sqrt{D(\rho)}}\operatorname{senh}\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}(t-s)\right)\right.\\
&+ \left.\cosh\left(\frac{\sqrt{D(\rho)}}{2}(t-s)\right)\right\}\times\left\{\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial p_\ell}\left[\frac{\operatorname{sen}(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|\rho)}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|\rho}\right]g_j(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\right\}d\rho\;ds.
\end{aligned}
$$

Teorema 5.1.1. *Seja* $\boldsymbol{f}\in L^2(S_T)$*. Então*

$$\|\mathscr{K}_{\ell,*}(\boldsymbol{g})\|_{L^2(S_T)}\le C\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(S_T)}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)\equiv\mathscr{K}_\ell(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)$$

existe quase sempre sobre S_T*.*

Demonstração. Denotando

$$K^\ell(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p},t)=\text{p.v.}\int_0^t\int_{\partial D}\frac{\partial\Gamma_{ij}}{\partial p_\ell}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},t-s)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q},s)\,d\boldsymbol{q}\;ds.$$

Do trabalho de Shen [51] (para maiores detalhes veja o Teorema 2.2.3, pag. 306), temos que

$$\|K^{\ell}(\boldsymbol{g})\|_{L^2(S_T)} \leq C\|\boldsymbol{g}\|_{L^2(S_T)}.$$

O outro termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} K_2^j &= [\partial_i \mathscr{K}_j, \partial_\ell] \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \left[\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right](\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds \\ &+ \mathscr{R}_{ij} \int_0^{t-\varepsilon} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left[\Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_2\right](\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds, \end{aligned}$$

onde $\mathscr{K}_j = (-\Delta)^{-1}\partial_j$.

Além disso, pelos resultados de Lions [30, 43], $\partial_i \mathscr{K}_j$ é um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^3)$, e dos resultados de Coifman & Meier [14] o comutador $[\partial_i \mathscr{K}_j, \partial_\ell]$ é limitado de $L^2(\mathbb{R}^3)$ em $W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Assim

$$\mathscr{K}_{\ell,\varepsilon}(\boldsymbol{p}, t) = K^{\ell}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t) + [\partial_i \mathscr{K}_j, \partial_\ell]\, K_1(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t) + \mathscr{R}_{ij}\left[K_1^+ + K_1^- + K_2\right](\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t).$$

□

De maneira geral temos

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t) = \left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t) \tag{5.6}$$

onde

$$K(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t)) = p.v. \int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial \nu_t(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s) g_j(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\ ds$$

é operador conhecido no capitulo anterior, onde foi tratada a equação simplificada e

$$C(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t)) = [\partial_i \mathscr{K}_j, \partial_\ell]\, K_1(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t) + \mathscr{R}_{ij}\left[K_1^+ + K_1^- + K_2\right](\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t)$$

é um operador compacto em $L^2(S_T)$.

5.1.1 O Problema de Dirichlet

Uma vez que o potencial de camada dupla $\mathcal{D}(\boldsymbol{g})(\boldsymbol{p}, t)$ é solução do sistema (4.16), o problema de Dirichlet é equivalente à seguinte equação

$$\left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}, t) \quad , \quad (\boldsymbol{p}, t) \in S_T. \tag{5.7}$$

Enunciamos agora o resultado principal do trabalho.

Teorema 5.1.2. *O problema de Dirichlet 5.7 tem uma única solução em* $L^2(S_T)$.

Demonstração. Denotemos $A = \frac{1}{2}I + K$, note que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\| &\leq C\|A\boldsymbol{x}\|, \\ &\leq C\left(\|(A+C)\boldsymbol{x}\| + \|C\boldsymbol{x}\|\right), \end{aligned}$$

assim pelo Teorema de Banach-Hausdorff

$$Im(A+C) \quad \text{é fechada,}$$

e se $A+C$ é algebricamente inversível, sabemos que $(A+C)^{-1} \in B(L^2(S_T))$. □

Lema 5.1.4. *Seja* D *um domínio Lipschitz em* $\mathbb{R}^3$*, com fronteira conexa. Então para todo* $\boldsymbol{f} \in L^2(S_T)$

$$\left\|\left(\frac{1}{2}I - K^*\right)\boldsymbol{f}\right\| \leq C\left\{\left\|\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\boldsymbol{f}\right\| + \left|\int_{S_T} \mathcal{S}(\boldsymbol{f})d\boldsymbol{x}\,dt\right|\right\}$$

onde C *depende somente sobre a constante de Lipschitz para* D.

Teorema 5.1.3. $\frac{1}{2}I + K : L^2(S_T) \to L^2(S_T)$ *é invertível.*

Demonstração. Se $\|f_j\|_{L^2(S_T)} \leq B < \infty$ então podemos dizer $f_j \to f$ fracamente em $L^2(S_T)$ e para qualquer $h \in L^2(S_T)$

$$\begin{aligned} \int_{S_T} \boldsymbol{g}\,\boldsymbol{h}\,d\boldsymbol{x}\;\; dt &= \lim_{j\to\infty}\int_{S_T}\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{h}\;\; d\boldsymbol{x}\;\; dt, \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{S_T}\boldsymbol{f}_j\left(\frac{1}{2}I + K\right)\boldsymbol{h}\;\; d\boldsymbol{x}\;\; dt, \\ &= \int_{S_T}\boldsymbol{f}\left(\frac{1}{2}I + K\right)\boldsymbol{h}\;\; d\boldsymbol{x}\;\; dt. \end{aligned}$$

Assim $\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$.

Por outro lado se $\|\boldsymbol{f}_j\|_{L^2(S_T)} \to \infty$, então depois de dividir por estas normas reduzimos para

$$\left(\frac{1}{2}I + K^*\right)\boldsymbol{f}_j \to 0, \qquad em \;\; L^2(\partial D), \tag{5.8}$$

$$\| \boldsymbol{f}_j \|_{L^2(S_T)} \equiv 1, \tag{5.9}$$

e pode ser discutido como acima. $\boldsymbol{f}_j \to \boldsymbol{f}$ fracamente em $L^2(S_T)$, daí $\left(\frac{1}{2}I + K^*\right) \boldsymbol{f} = 0$ então $\boldsymbol{f} = 0$ e assim $\boldsymbol{f}_j \to 0$ fracamente em $L^2(S_T)$.

Isto último implica que $\displaystyle\int_{S_T} \mathcal{S}\,(\boldsymbol{f}_j)\, d\boldsymbol{x}\, dt \to 0$. Pelo Lema 5.1.4 temos

$$\left\| \left(\frac{1}{2}I - K^*\right) \boldsymbol{f} \right\| \leq C \left\{ \left\| \left(\frac{1}{2}I + K^*\right) \boldsymbol{f} \right\| + \left| \int_{S_T} \mathscr{S}(\boldsymbol{f}) d\boldsymbol{x}\, dt \right| \right\} \to 0 \quad , \quad j \to \infty,$$

por (5.8) e a sentencia anterior. Assim

$$\| \boldsymbol{f}_j \| \leq \left\| \left(\frac{1}{2}I + K^*\right) \boldsymbol{f}_j \right\| + \left\| \left(\frac{1}{2}I - K^*\right) \boldsymbol{f}_j \right\| \to 0,$$

contradizendo (5.9). Isto monstra que $\frac{1}{2}I + K$ tem imagem fechada. □

Logo para concluir a demonstração do Teorema 5.1.2 é preciso demonstrar: por Teorema de Banach - Hausdorff [Teorema 1.2.3] que $\frac{1}{2}I + K$ é algebricamente inversível.

De fato: se $\boldsymbol{w} = \mathcal{D}\sigma$ e

$$\left(\frac{1}{2}I + K\right)\sigma = 0.$$

Defina $\boldsymbol{u}$ o potencial de camada dimples de σ, observe que $\frac{\partial \boldsymbol{u}^+}{\partial \nu} = 0$ e via unicidade que $\frac{\partial \boldsymbol{u}^-}{\partial \nu} = 0$ e logo

$$\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{u}^+}{\partial \nu} - \frac{\partial \boldsymbol{u}^-}{\partial \nu} = 0.$$

Concluímos a demonstração apresentando uma modificação do argumento aplicado por Liu[44] no caso do problema de Hemholtz.

Observe que as relações de salto são validas via os cálculos da seção 5.1 e os resultados da seção 3.1.1:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_\pm}{\partial \nu_t} = \left(\pm\frac{1}{2}I + K + C\right) \boldsymbol{f}$$

e

$$\boldsymbol{v}_\pm = \left(\mp\frac{1}{2}I + \widetilde{K} + \widetilde{C}\right) \boldsymbol{f} = R^* \left(\pm\frac{1}{2}I + K^* + C^*\right) R\,\boldsymbol{f}$$

com

$$K(\boldsymbol{f}) = p.v. \int_0^t \int_{\partial D} \frac{\partial \mathbb{G}}{\partial \nu_t(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}, t-s)\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, s)\, d\boldsymbol{q}\, ds.$$

De fato, o método é simplesmente uma aplicação da alternativa de Fredholm ou modificando $\boldsymbol{f}$ de tal modo que ele fica em I$m\left(\frac{1}{2}I + K + C\right)$. Assim, buscamos uma solução do problema de Dirichlet interior na forma

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{D}(\psi) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widetilde{u}_j,$$

com α_j a ser escolhido e $\widetilde{u}_j = \mathcal{S}\,\varphi_j$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ sendo uma base de ker $\left(\frac{1}{2}I + K + C\right)$, de dimensão finita n.

Utilizando as relações de salto observamos que u_j satisfaz

$$\frac{\partial \widetilde{u}_j^+}{\partial \nu_t} = \left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\varphi_j = 0$$

e

$$\frac{\partial \widetilde{u}_j^-}{\partial \nu_t} = \left(-\frac{1}{2}I + K + C\right)\varphi_j,$$

e conseqüentemente $\frac{\partial u_j^-}{\partial \nu_t} = -\varphi_j$, ou $\widetilde{u}_j$ resolve o problema de tração exterior. Então,

$$\text{traço}(\widetilde{u}_j^-) = \text{traço}(\widetilde{u}_j^+) = u_j$$

e $\boldsymbol{u}$ é uma solução do problema interior de Dirichlet se

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\psi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j. \tag{5.10}$$

Seja $\{R\psi_j\}_{j=1}^n$ uma base ortonormal de ker $\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{K} + \widetilde{C}\right)$

$$\#\ker\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{K} + \widetilde{C}\right) = \#\ker\left(\frac{1}{2}I + K + C\right) = n$$

Observe que $\{u_j\}_{j=1}^n$ são linearmente independentes. De fato, suponha que $\boldsymbol{u}^{\pm} = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j^{\pm} = 0$ e defina $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \mathcal{S}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j\right)$ então $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ satisfaz (4.16) no exterior com $\boldsymbol{u}^- = 0$. Mas o Teorema de unicidade 5.0.1 aplicado a $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ implica $\widetilde{\boldsymbol{u}} \equiv 0$ no exterior e por conseqüência $\frac{\partial \boldsymbol{u}^-}{\partial \nu_t} = 0$ e $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j = 0$ contrario à hipótese.

Existe um isomorfismo entre $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ e $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ como bases de espaços de dimensão finita iguais

$$(u_j) = T(\psi_i) \quad , \qquad T = (T_{ij}).$$

Segue-se de (5.10) que[1]

$$\begin{aligned}
f_i = (\psi_i, \boldsymbol{f}\,) &= \left(\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{K} + \widetilde{C}\right)\psi_i, R\varphi\right) - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\psi_i, u_j), \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\psi_i, u_j), \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(\psi_i, T_{jk}\psi_k), \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_{ik}T_{jk}, \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j T_{ji}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\boldsymbol{f} = (f_i) = -(T_{ij}^{tr}\alpha)\ , \quad \alpha = (\alpha_i) \tag{5.11}$$

e $\alpha = -\left(T^{-1}\right)^{tr}\boldsymbol{f}$ resolve o problema.

Note que $\frac{1}{2}I + K$ é unitáriamente equivalente a $\frac{1}{2}I + K_\nu$ e conseqüentemente aplicando Teorema 5.1.3 é um isomorfismo de $L^2(S_T)$. Então

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}I + K + C\right)\psi &= \left(\boldsymbol{f} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right) \in L^2(D_T), \\
\left(I + \left(\frac{1}{2}I + K\right)^{-1}C\right)\psi &= \left(\frac{1}{2}I + K\right)^{-1}\left(\boldsymbol{f} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\psi = -\left(\frac{1}{2}I + K\right)^{-1}C\psi + \left(\frac{1}{2}I + K\right)^{-1}\left(\boldsymbol{f} + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j u_j\right),$$

segue-se do Teorema 5.0.1 que

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu_t}\right)^{-*} \in L^2(D_T), \qquad \left(\partial_t^{1/2}\psi\right)^{*} \in L^2(D_T).$$

[1] $(\cdot,\cdot)$ é o produto interno em $L^2(S_T)$

Conseqüentemente, as condições do Teorema de unicidade são satisfeitas e concluímos que a solução do problema interior de Dirichlet

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{D}(\psi) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \widetilde{u}_j,$$

$\widetilde{u}_j = \mathcal{S}\,\varphi_j$, φ_j é uma base de $\ker\left(\frac{1}{2}I + K + C\right)$ e α_j dada por (5.11) é única.

6 PROBLEMA DE DIRICHLET NÃO-HOMEGÊNEO EM ESPAÇOS DE BESOV PARABÓLICOS

Nesta seção tratamos o problema com fonte e dados de fronteira não homogêneos (Dirichlet) e dados iniciais zero. É conveniente formular este problema em espaços funcionais mais gerais, a saber os chamados espaços de Besov que parabólicos. Recentemente estes espaços foram, objeto de estudos elaborados por Mitrea e sua aluna Tunde Jakab (Veja [34, 35]).

6.1 Espaços de Besov

Seja $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ com

$$\mathit{supp}\ \varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ |\xi| \leq 2\}, \quad \varphi(\xi) = 1 \ \text{ se } \ |\xi| \leq 1$$

Sejam $j \in \boldsymbol{N}$ e

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_j = \varphi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) - \varphi\left(\frac{\xi}{2^{j-1}}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Então, temos

$$\mathit{supp}\ \varphi_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \ : \ 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) = 1 \ \ \mathit{se} \ \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Em outras palavras, $(\varphi_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ é uma partição da unidade.

Seja $f \in S'$. Então

$$\varphi_k(D) f(x) = \left(\varphi_k \hat{f}\right)^{\vee}(x), \quad k \in \boldsymbol{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

é uma função inteira, logo temos

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(D) f \ \ \in S',$$

decompomos f em funções analíticas (inteiras). A seguir introduzimos espaços observando o comportamento destas funções com respeito a $x \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \boldsymbol{N}$.

Definição 6.1.1. *Seja $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, define-se o espaço de Besov*

$$B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha q} \|\varphi_k(D) f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

com a modificação usual se $q = \infty$, i.e.

$$B_\alpha^{p,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{B_\alpha^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \sup [2^{k\alpha} \|\varphi_k(D) f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}] < \infty \right\}.$$

Observação 8. *Seja $1 < p < \infty$, $k_0 \in \boldsymbol{N}$ e $k_1 \in \boldsymbol{N}$ com $k_0 \neq k_1$. Seja $1 \leq q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ e*

$$s = k_0(1-\theta) + k_1\theta.$$

Então

$$\left(W^{k_0,p}, W^{k_1,p} \right) = B_{p,q}^s.$$

Para maiores detalhes veja Triebel [56, 57].

6.1.1 Traços

Dado um domínio Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $0 < p,\ q \leq \infty$, define-se os espaços de Besov em Ω,

$$B_\alpha^{p,q}(\Omega) = \{ u \in S'(\Omega) \ : \ \exists\, v \in B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n) \ \text{ com } v\,|_\Omega = u \}.$$

Define-se $B_\alpha^{p,q}(\partial\Omega)$ como o espaço de funções localmente integráveis

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}^{n-1} \ &\to \ B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ x' \ &\to \ f(x', \psi(x')) \end{aligned}$$

onde

$$f \in B_{\alpha-1}^{p,q}(\partial\Omega) \Longleftrightarrow f(\cdot, \psi(\cdot)) \sqrt{1 + |\nabla\psi(\cdot)|^2} \in B_{\alpha-1}^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Estas definições se estendem para o caso de domínios Lipschitz limitados em $\mathbb{R}^n$ via um argumento padrão de partição da unicidade.

Seja $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$. A aplicação

$$\text{traço} : f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x}', 0)$$

faz sentido se f pertence a $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Isto é o que nos diz o teorema:

Teorema 6.1.1. *Sejam $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, e $s - \frac{1}{p} > (n-1)\left(\frac{1}{p} - 1\right)$. Então o traço é um operador linear limitado de $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ em $B_{\alpha-\frac{1}{p}}^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Mas precisamente,

$$\textit{traço}\,(B_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)) = B_{\alpha-\frac{1}{p}}^{p,q}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

6.1.2 Espaços de Besov Parabólicos

No que segue denotamos (veja [34, 35])

$$\|(\boldsymbol{x}, t)\|_{par} = \left(\|\boldsymbol{x}\|^2 + |t|\right)^{1/2} \quad \textit{para } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

Definição 6.1.2. *Definimos o sistema Φ de funções de variável complexa $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ com as seguintes propriedades:*

1. $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$;

2. *Para $k > 1$ apropriado,*

$$\textit{supp } \varphi_0 =\subset \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; \|(\boldsymbol{x}, t)\|_{par} \leq 2k\},$$

$$\textit{supp } \varphi_j =\subset \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; \frac{2^j}{k} \leq \|(\boldsymbol{x}, t)\|_{par} \leq 2^{j+1}k\}, \quad j \in \boldsymbol{N};$$

3. *Existem constantes positivas c_0 e c_1 tais que*

$$c_0 \leq \left|\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\boldsymbol{x}, t)\right| \leq c_1, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

4. *Para todo multi-índice, $\gamma \in \boldsymbol{N}$ e todo $k \in \boldsymbol{N}_0$, existe uma constante positiva $C_{\gamma,k}$ tal que*

$$\left|\partial_{\boldsymbol{x}}^\gamma \partial_t^k \varphi_j(\boldsymbol{x}, t)\right| \leq \frac{C_{\gamma,k}}{2^{j(|\gamma|+2k)}}$$

Baseados neste sistema Φ, podemos dar uma definição do tipo Littlewood-Paley de espaços de Besov parabólicos.

Definição 6.1.3. *Para* $0 < p,\ q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\{\varphi_j\} \in \Phi$, *define-se os espaços de Besov parabólicos*

$$B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ : \ \|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} < \infty \right\}$$

onde

$$\|f\|_{B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha q} \left\| \left(\varphi_j \hat{f}\right)^{\vee} \right\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \right)^{1/q}$$

com a modificação usual se $q = \infty$, *i.e.*

$$B^{p,\infty}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ : \ \|f\|_{B^{p,\infty}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} < \infty \right\}$$

onde

$$\|f\|_{B^{p,\infty}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} = \sup_{j\in \boldsymbol{N}_0} \left[2^{k\alpha} \left\| \left(\varphi_j \hat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \right].$$

Observação 9. *Para* $0 \leq p,q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *os espaços* $B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *são completos, para* $p,q \geq 1$ *eles são espaços de Banach, e as inclusões*

$$S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \hookrightarrow B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}),$$

são densas para $0 < p,q < \infty$.

Além disso, para $0 < p \leq \infty$ *e* $\alpha, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$

$$B^{p,q_0}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \hookrightarrow B^{p,q_1}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ , \ \ para \ \ 0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty,$$

$$B^{p,q}_{\alpha_0,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \hookrightarrow B^{p,r}_{\alpha_1,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ , \ \ para \ \ \alpha_0 > \alpha_1, \ \ e \ \ todo \ \ 0 < q,r \leq \infty.$$

A seguinte proposição é um resultado importante neste contexto, cuja demonstração pode ser vista em [1, Proposição 2.1.19].

Proposição 6.1.1. *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *a escala diagonal de Besov tem a propriedade de Fubini:*

$$B^{p,p}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = L^p\left(\mathbb{R}^n; B^{p,p}_{\alpha/2}(\mathbb{R})\right) \bigcap L^p\left(\mathbb{R}; B^{p,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Teorema 6.1.2. *Sejam* $\beta \in \boldsymbol{N}_0$ *e* $\boldsymbol{f} \in B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, *onde* $0 < p,q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então*

$$\partial_t \boldsymbol{f} \in B^{p,q}_{\alpha-2,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad e \quad \partial^{\beta}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} \in B^{p,q}_{\alpha-\beta,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

6.1.3 Espaços sobre Cilindros Lipschitz

Definição 6.1.4. *Considere um conjunto aberto* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. *Então para* $0 < p,q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *definimos*

$$B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathcal{O}) := B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})|_{\mathcal{O}}$$

com

$$\|\boldsymbol{f}\|_{B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathcal{O})} := \inf\left\{\|F\|_{B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})} \ : \ F \in B^{p,q}_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}), \quad F|_{\mathcal{O}} = \boldsymbol{f}\right\}.$$

Definição 6.1.5. *Para indices* $1 < p,q < \infty$, $\alpha > 0$ *e* Ω *um domínio Lipschitz em* $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, *definimos os seguintes espaços*

$${}_0B^{p,q}_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T)) = \left\{F\,\big|_{\Omega\times(0,T)} \ : \ F \in B^{p,q}_{s,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ , \ \operatorname{supp} F \subset \mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right\}$$

e

$${}^0B^{p,q}_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T)) = \left\{F\,\big|_{\Omega\times(0,T)} \ : \ F \in B^{p,q}_{s,par}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \ , \ \operatorname{supp} F \subset \mathbb{R}^n \times (-\infty,T]\right\}.$$

6.2 Inversão de potenciais na fronteira

Nesta parte recordamos a inversão de operadores potenciais do calor na fronteira sobre espaços de Besov parabólicos definidos sobre cilindros de Lipschitz (limitados e ilimitados) [10, 32, 34, 45].

Para um ponto da fronteira $(\boldsymbol{x}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$, onde Ω é um domínio de Lipschitz em $\mathbb{R}^n$, introduzimos

$$Kf(\boldsymbol{x}, t) := p.v. \int_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} \partial_{\nu_y} G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t-s) f(y,s)\, dy\, ds$$

e

$$K' := R \circ K^* \circ R,$$

onde K^* é o adjunto formal de K e R é o operador reflexão no tempo

$$Rf(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}, -t) \quad para\ qualquer \ (\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Para cada tempo, temos

$$K_T f := Kf \big|_{\partial\Omega\times(0,T)} .$$

Para qualquer solução da equação do calor em $\Omega \times \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{u} = \mathcal{D}(\boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}) - \boldsymbol{S}(\partial_\nu \boldsymbol{u}).$$

Em particular, se $\boldsymbol{u} := \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{f}$ para alguma densidade $\boldsymbol{f}$, então, tomando os traços na fronteira de ambos lados da equação temos

$$\pm\frac{1}{2}I + K = S\left(\pm\frac{1}{2}I + K'\right)S^{-1}$$

6.2.1 Operador Traço na Fronteira

O operador de traço na fronteira é tomado no sentido de limite não-tangencial, i.e. para quase todo $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$,

$$\text{traço } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}\,(\boldsymbol{x}, t) := \lim_{(\boldsymbol{y}, s)\to(\boldsymbol{x}, t)} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}, s) \quad , \quad (\boldsymbol{y}, s) \in \Gamma(\boldsymbol{x}, t)$$

onde $\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$ é um cone não-tangencial em um ponto da fronteira $(\boldsymbol{x}, t)$.

Teorema 6.2.1. *Seja Ω um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^n$ e $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} \leq \alpha < 1 + \frac{1}{p}$. Então o operador traço estende-se para*

$$traço\ : B^p_{\alpha,par}(\Omega \times \mathbb{R}) \to B^p_{\alpha-\frac{1}{p},par}(\partial\Omega \times \mathbb{R})$$

como um operador limitado.

Teorema 6.2.2. *Seja Ω um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, e $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 2$. Dada $\boldsymbol{f} \in {}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$, existe $\boldsymbol{w} \in {}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T))$ tal que*

$$(\partial_t + \Delta)\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \ \in \ \Omega \times (0,T)$$

e

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\,_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \leq c \| \boldsymbol{f} \|_{\,_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))}.$$

Teorema 6.2.3. *Seja Ω um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, e $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 2$. Dada $\boldsymbol{f} \in {}^0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$, existe $\boldsymbol{w} \in {}^0B^p_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T))$ tal que*

$$(\partial_t + \Delta)\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \;\; \in \;\; \Omega \times (0,T)$$

e

$$\| \boldsymbol{w} \|_{\,^0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \leq c \| \boldsymbol{f} \|_{\,^0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))}.$$

6.3 Problema Compressível em Espaços de Besov

Nesta seção tratamos os potenciais de camada em espaços parabólicos definidos sobre cilindros Lipschitz. Estes espaços tem um papel crucial para a solução de problemas de valor de fronteira. Trabalhos recentes de Mitrea mostram a importância destas técnicas para construir soluções da equação do calor em espaços de Besov.

Considere o problema

$$\begin{aligned} (\partial_t - L)\,\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{f}, \qquad (\boldsymbol{x}, t) \in D \times (0,T) \\ \text{traço } \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{g} \;\; \textit{sobre} \;\; \partial D \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) &= 0, \qquad \boldsymbol{x} \in D \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde D é um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^3$, e

$$L\boldsymbol{u} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nu\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u} + c^2 \int_0^t (\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, \theta)\, d\theta$$

Lema 6.3.1. *Considere um domínio Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $0 < T < \infty$ e um índice $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Então os operadores compressíveis*

$$(\partial_t - L) : \,_0B^2_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T)) \longrightarrow_0 B^2_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$$

$$(\partial_t - L) : \,^0B^2_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T)) \longrightarrow^0 B^2_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$$

são limitados.

Demonstração. Seja $\boldsymbol{f} \in {}_0B^2_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$. Então há um $\boldsymbol{F} \in B^2_{\alpha-2,par}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ com supp $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, tal que

$$\boldsymbol{F}\,\big|_{\Omega\times(-\infty,T)} = \boldsymbol{f}\,.$$

Agora, pelo Teorema 6.1.2, temos que

$$\partial_t \boldsymbol{F}\,,\;\; L\boldsymbol{F} \in B^2_{\alpha-2,par}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R});$$

observando que a diferenciação não muda a condição de suporte de $\boldsymbol{F}$, e

$$[(\partial_t - L)\,\boldsymbol{F}\,]\,\big|_{\Omega\times(-\infty,T)} = (\partial_t - L)(\,\boldsymbol{F}\,\big|_{\Omega\times(-\infty,T)}) = (\partial_t - L)\,\boldsymbol{f}\,.$$

Concluímos que

$$(\partial_t - L)\;\boldsymbol{f} \in {}_0B^2_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T)).$$

Analogamente pode ser provada a segunda parte do teorema. □

Teorema 6.3.1. *Seja Ω um domínio Lipschitz em $\mathbb{R}^3$, $0 < T < \infty$, e $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 2$. Dada $\boldsymbol{f} \in {}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$, existe $\boldsymbol{w} \in {}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T))$ tal que*

$$(\partial_t - L)\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \quad \text{em}\;\; \Omega \times (0,T), \tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\,, \quad \text{sobre}\;\; \partial D, \tag{6.3}$$

$$\boldsymbol{w}\,(\,\boldsymbol{x}\,,0) = 0, \tag{6.4}$$

e

$$\|\,\boldsymbol{w}\,\|_{\;{}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \le c\|\,\boldsymbol{f}\,\|_{\;{}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))}.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{f} \in {}_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega \times (0,T))$, por definição, $\boldsymbol{f} = F\,\big|_{\Omega\times(0,T)}$, onde

$$\boldsymbol{F} \in {}_0B^p_{\alpha-2,par}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) \;\; \text{com} \;\; \text{supp}\,\boldsymbol{F} \subset \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$$

Considere $\varphi,\ \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tais que $\varphi \equiv \psi \equiv 1$ numa vizinhança de $\overline{\Omega} \times [0,T]$, e defina

$$\boldsymbol{w} = (\varphi \Pi_{par} \psi\,\boldsymbol{F}\,)\,\big|_{\Omega\times(0,T)} \in {}_0B^p_{\alpha,par}(\Omega \times (0,T))$$

onde Π_{par} é o potencial Newtoniano

$$\Pi_{par}\boldsymbol{f} := \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}} \mathbb{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, s)\, d\boldsymbol{y}\ ds$$

onde $\mathbb{G}$ é a solução fundamental do problema compressível.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= (\varphi(\partial_t - L)\Pi_{par}\psi\boldsymbol{F})\big|_{\Omega\times(0,T)} \\
&= (\varphi\psi\boldsymbol{F})\big|_{\Omega\times(0,T)} \\
&= (\boldsymbol{F})\big|_{\Omega\times(0,T)} \\
&= \boldsymbol{f}
\end{aligned}$$

isto é possível uma vez que $(\partial_t - L)\Pi_{par}$ é o operador identidade.

Dado que $\varphi\Pi_{par}\psi\boldsymbol{F}$ é uma extensão de $\boldsymbol{w}$, obtemos que

$$\|w\|_{\,_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \leq \|\varphi\Pi_{par}\psi\boldsymbol{F}\|_{B^p_{\alpha,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})} \leq C\|\boldsymbol{F}\|_{B^p_{\alpha-2,par}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as $\boldsymbol{F}$ tais que $\boldsymbol{F}\big|_{\Omega\times(0,T)} = \boldsymbol{f}$ com $\operatorname{supp}\boldsymbol{F} \subset \mathbb{R}^3\times[0,\infty)$, temos

$$\|w\|_{\,_0B^p_{\alpha,par}(\Omega\times(0,T))} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{\,_0B^p_{\alpha-2,par}(\Omega\times(0,T))},$$

o que conclui a prova do teorema. □

Seja $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}$, do sistemas (6.1) e (6.2), considerando o caso $p = 2$, temos que

$$\begin{cases}
(\partial_t - L)\,\boldsymbol{v} = 0, & (\boldsymbol{x}, t) \in D\times(0,T) \\
\mathcal{T}\text{ra}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{w} \in L^2 & \textit{sobre}\ \ \partial D \\
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0, & \boldsymbol{x} \in D
\end{cases} \tag{6.5}$$

Assim, pelo Corolário 5.0.1 do Teorema 5.0.1, temos que o sistema 6.5 tem uma única solução $\boldsymbol{v} \in L^2(0,T; L^2(D))$

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, M. F. *Algebraic topology and operators in Hilbert space*, vol. 103 of *Lectures in Modern Analysis and Applications I.* Springer - Verlag, Berlin, 1969.

[2] BAJASANSKI, B., AND COIFMAN, R. On singular integrals. *AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics X* (1967), 1 – 17.

[3] BROWN, R. M. The method of layer potentials for the heat equation in Lipschitz cylinders. *American Journal of Mathematics 111* (1989), 339 – 379.

[4] BROWN, R. M. The initial-Neumann problem for the heat equation in Lipschitz cylinders. *Transactions of the American Mathematical Society 320*, 1 (1990), 1 – 52.

[5] BROWN, R. M., AND SHEN, Z. Boundary value problems in Lipschitz cylinders for three-dimensional parabolic systems. *Revista Matemática Iberoamericana 8*, 3 (1992), 271 – 303.

[6] BROWN, R. M., AND SHEN, Z. A note on boundary value problems for the heat equation in Lipschitz cylinders. *Proceedings of the American Mathematical Society 119*, 2 (1993), 585 – 594.

[7] BROWN, R. M., AND SHEN, Z. Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains. *Ind. U. J. Math.*, 44 (1995), 1183 – 1206.

[8] CALDERÓN, A. P. Cauchy integrals on lipschitz curves and related operator. *Proceedings of the National Academy of Sciences 74*, 4 (April 1977), 1324 – 1327.

[9] CARROLL, R. W. *Abstract Methods in Partial Differential Equations.* Harper & Row, Publishers, New York, Evanston, and London, 1969.

[10] Chanillo, S. Hypersingular integrals and parabolic potentials. *Transactions of the American Mathematical Society 267*, 2 (1981), 531 – 547.

[11] Choe, H. J., and Kozono, H. The Stokes problem for Lipschitz domains. *Indiana University Mathematics Journal 51*, 5 (2002), 1235 – 1260.

[12] Christ, M. Lectures on singular integral operators. In *CBMS Regional Conference* (1990).

[13] Coifman, R., MCIntosh, A., and Meyer, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur l^2 pour les courbes lipschitziennes. *Ann. of Math. 116* (1982), 361 – 387.

[14] Coifman, R., and Meyer, Y. On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals. *Transactions of the American Mathematical Society 212* (1975), 315 – 331.

[15] Colton, D., and Kress, R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Krieger Publishing Company, 1983.

[16] Costabel, M. Boundary integral operators on lipschitz domains: elementary results. *SIAM Journal on Mathematical Analysis 19* (1988), 613 – 626.

[17] Dahlberg, B. E. J., and Kenig, C. Hardy spaces and the Neumann problem in L^p for Laplace equation in Lipschitz domains. *Annales of Mathematics 125* (1987), 437 – 465.

[18] Dahlberg, B. E. J., Kenig, C., and Verchota, G. The dirichlet problem for the biharmonic equation in a lipschitz domain. *Annales de l'institut Fourier 36*, 3 (1986), 109 – 135.

[19] Dahlberg, B. E. J., Kenig, C., and Verchota, G. Boundary value problems for the systems of elastostatics in lipschitz domains. *Duke Mathematical Journal 57*, 3 (1988), 795 – 818.

[20] Dautray, R., and Lions, J. L. *Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 6. Springer-Verlag, 1984.

[21] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear Operators Part I: General Theory.* No. VII in Pure and Applied Mathematics. Interscience Publishers, INC., New York, 1957.

[22] Dunford, N., and Schwartz, J. T. *Linear Operators Part II: Spectral Theory, Selft Adjoint Operators in Hilbert Space.* No. VII in Pure and Applied Mathematics. Interscience Publishers, INC., New York, 1967.

[23] Evans, L. C. *Partial Differential Equations.* No. 19 in Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1969.

[24] Fabes, E., and Salsa, S. Estimates of caloric measure and the initial-Dirichlet problem for the heat equation in Lipschitz cylinders. *Transactions of the American Mathematical Society 279*, 2 (October 1983), 635 – 650.

[25] Fabes, E. B., Jr, M. J., and Rivieré, N. M. Potential techniques for boundary value problems on C^1 domain. *Acta Mathematica 141* (1978), 165 – 186.

[26] Fabes, E. B., Lewis, J. E., and Rivière, N. M. Boundary Value Problems for the Navier-Stokes Equations. *American Journal of Mathematics 99*, 3 (1977), 626 – 668.

[27] Fabes, E. B., Lewis, J. E., and Rivière, N. M. Singular Integrals and Hydrodynamics Potentials. *American Journal of Mathematics 99*, 3 (1977), 601 – 625.

[28] Fabes, E. B., and M. Jodeit, J. Boundary value problem for second-order parabolic equations. *AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics X* (1967), 82 – 105.

[29] FABES, E. B., AND RIVIÈRE, N. M. Dirichlet and Neumann Problems for the Heat Equation in $\mathcal{C}^1-$Cylinders. *Proceedings af Symposia in Pure Mathematics XXXV*, Part 2 (1979), 179 – 196.

[30] FEIREISL, E. On the Motion of a Viscous, Compressible, and Heat Conducting Fluid. *Indiana University Mathematics Journal 53*, 6 (2004), 1705 – 1738.

[31] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[32] HOFMANN, S., LEWIS, J., AND MITREA, M. Spectral properties of parabolic layer potentials and transmission boundary problems in nonsmooth domains. *Illinois J. Math. 47*, 4 (2003), 1345 – 1361.

[33] ITÔ, S. *Diffusion Equations*, vol. 114 of *Translations of MATHEMATICAL MONOGRAPHS*. American Mathematical Society, 1992.

[34] JAKAB, T. *Parabolic Layer Potentials and Initial Boundary Value Problems in Lipschitz Cylinders with data in Besov Spaces*. Dissertation, Faculty of the Graduate School University of Missouri-Columbia, may 2006. Dr. Marius Mitrea, Dissertation Supervisor.

[35] JAKAB, T., AND MITREA, M. Parabolic initial boundary value problems in nonsmooth cylinders with data in anisotropic Besov spaces. *Math. Res. Lett. 13*, 5 (2006), 825 – 831.

[36] JERISON, D., AND KENIG, C. E. The inhomogeneous Dirichlet problem in lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis 130* (1995), 161 – 219.

[37] JOURNÉ, J. *Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón*, vol. 994 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg new York Tokyo, 1980.

[38] Krantz, S. G. *Partial Differential Equations and Complex Analysis*. Studies in Advanced Mathematics, 1951.

[39] Kweon, J. R. An evolution compressible stokes system in a polygon. *Journal of Differential Equations 199* (2004), 352 – 375.

[40] Kweon, J. R., and Kellogg, R. B. Compressible Stokes problem on nonconvex polygonal domains. *Journal of Differential Equations 176* (2001), 290 – 314.

[41] Kweon, J. R., and Kellogg, R. B. Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations for compressible barotropic flows on a polygon. *Arch. Rational Mech. Anal. 163* (2002), 35 – 64.

[42] Lang, J., and Méndez, O. Potential techniques and regularity of boundary value problems in exterior non-smooth domains. *Potential Analysis 24* (2006), 385 – 406.

[43] Lions, P.-L. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Compressible Models*, vol. 2 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10*. Oxford Science Publications, 1998.

[44] Liu, C. The Helmholtz equation on Lipschitz domains. *Preprints University of North Carolina* (September 1995).

[45] Malyshev, I. On the parabolic potentials in degenerate-type heat equation. *Journal ofApplied Mathematics and Stochastic Analysis 4*, 2 (1991), 147 – 160.

[46] Maz'ja, V. G. *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[47] Mikhlin, S. G., and Prössdorf, S. *Singular integral Operators*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986.

[48] MUCHA, P. B., AND ZAJACZKOWSKI, W. M. On a L_p−estimate for the Line-arized Compressible Navier-Stokes Equations with the Dirichlet Boundary Conditions. *Journal of Differential Equations 186* (2002), 377 – 393.

[49] NERI, U. *Singular Integrals*, vol. 200 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1971.

[50] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* No. 44 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.

[51] SHEN, Z. Boundary Value Problem for Parabolic Lamé Systems and a Nonstationary Linearized System of Navier-Stokes Equation in Lipschitz Cylinders. *American Journal of Mathematics 113* (1991), 293 – 373.

[52] STEIN, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. *Princeton Univ. Press, Princeton* (1970).

[53] TAYLOR, M. E. *Tools for PDE: Pseudodifferential Operators Paradifferential Operators, and Layer Potentials*, vol. 81 of *Mathematical Surveys and Monograps.* American Mathematical Society, 2000.

[54] TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis.* North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1977.

[55] TREVES, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* No. 25 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press New York London, 1967.

[56] TRIEBEL, H. *Theory of Function Spaces II*, vol. 84 of *Monograhs in mathematics.* Birkhäuser Verlag Basel, 1992.

[57] TRIEBEL, H. *Theory of Function Spaces III*, vol. 100 of *Monograhs in mathematics.* Birkhäuser Verlag, 2006.

[58] Valli, A. An existence theorem for compressible viscous fluids. *Annali di Matematica Pura ed Applicata 130* (1982), 197 – 213.

[59] Valli, A., and Zajaczkowski, W. Navier-Stokes equations for compressible fluids: Global existence and qualitative properties of the solutions in the general case. *Communications in mathematical physics 103* (1986), 259 – 296.

[60] Verchota, G. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for laplace's equation in lipschitz domains. *Journal of Functional Analysis 59* (1984), 52 – 81.

[61] Wang, S. W. Generation theorems for φ Hille-Yosida operators. *Proceeding of the American Mathematical Society 130*, 11 (May 2002), 3355–3367.

[62] Yosida, K. *Functional Analysis.* Berlin Heidelberg New York. Springer-Verlag, 1980.