Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Instituto de Matemática e Estatística

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Aplicação de Galois e extensões Azumaya Galois para ações de grupoides

Tese de Doutorado

JULIANA BORGES PEDROTTI

Porto Alegre, 21 de julho de 2023

Tese submetida por Juliana Borges Pedrotti*, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professora Orientadora:
Professora. Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas

Banca examinadora:
Professora. Dra. Thaísa Raupp Tamusiunas (UFRGS, Orientadora)
Professor Dr. Alveri Alves Sant'Ana (UFRGS)
Professora. Dra. Andrea Morgado (UFPEL)
Professora. Dra. Saradia Sturza Della Flora (UFSM)
Professor Dr. Antonio Paques (UFRGS)

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Agradecimentos

Agradeço a Deus e à Nossa Senhora Aparecida por sempre me guiarem e mostrarem que é possível.

À minha família, em especial aos meus pais Rita e Manoel, por todo carinho que sempre recebi. Ao Leonardo pelo companheirismo, por toda ajuda e incentivo. À família do Leonardo, por todo amparo e apoio.

Aos meus amigos, Christian, Danrlei, Matheus, Poliana e Stephanie, pelos momentos de descontração e estudos, pela parceria durante estes anos e principalmente por me acalmarem e ajudarem nos momentos difíceis.

Ao Wesley e Rafael, que sempre estiveram dispostos a me ajudar, a conversar sobre álgebra, e que foram meus companheiros de eventos nestes últimos anos de doutorado.

À minha orientadora Thaísa por toda dedicação, paciência e compreensão durante essa caminhada.

Ao professor Antonio Paques por ter aceitado ser meu orientador no início do doutorado, e por toda a sua contribuição na álgebra.

Agradeço às professoras Andrea, Daiana, Saradia e Thaísa por terem sido minhas orientadoras durante a minha jornada na matemática. Obrigada pelos ensinamentos e por serem exemplos de mulheres que inspiram.

À banca por ter aceitado ler este trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a teoria de Galois para o caso de ações de grupoides finitos sobre anéis não comutativos. Precisamente, daremos condições para que a aplicação de Galois seja injetiva, e após apresentaremos uma caracterização de uma extensão Azumaya Galois. Em ambos os casos, estenderemos os resultados de [32] e [30], respectivamente, para o contexto de grupoides finitos.

Palavras-chave: Teoria de Galois, ações de grupoides, aplicação de Galois, Azumaya Galois.

Abstract

The purpose of this work is to study the Galois theory for the case of finite groupoids acting on noncommutative rings. Precisely, we will give some conditions for the Galois map to be injective and further we will present a characterization for an Azumaya Galois extension. In both cases we shall extend the results of [32] and [30], respectively, for the finite groupoid context.

Keywords: Galois Theory, groupoids actions, Galois map, Azumaya Galois.

Índice

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Álgebras de Azumaya 5

1.2 Grupoides 10

1.2.1 Subgrupoide normal e grupoide quociente 15

1.2.2 Grupoides Conexos 20

1.2.3 Teorema do Homomorfismo 22

2 Teoria de Galois Fraca **25**

2.1 Extensão β-Galois 25

2.2 Extensão fracamente β-Galois 39

3 A aplicação de Galois e suas aplicações induzidas **44**

3.1 Aplicações induzidas pela aplicação de Galois 44

3.2 A aplicação de Galois 52

4 Álgebras de Galois e extensões de Azumaya Galois **55**

4.1 Álgebras fracamente Galois 55

4.2 Extensão Azumaya Galois 64

Referências Bibliográficas **72**

Introdução

A noção de grupoide foi introduzida por H. Brandt [7] em 1926, e é usualmente apresentada como sendo uma categoria pequena onde cada morfismo é invertível [8]. Desta forma, a noção de grupoide é uma extensão natural da noção de grupo, visto que um grupo é um grupoide com apenas um objeto. Nesta tese, iremos adotar a versão axiomática de grupoide dada em [24]. Podemos dizer brevemente que um grupoide é um conjunto não vazio munido de uma operação binária parcialmente definida, para quais os axiomas de grupo são válidos desde que os elementos sejam operáveis.

Introduzida por D. Bagio e A. Paques [4], a definição de ação parcial de um grupoide sobre um anel é uma generalização da noção de ação parcial de um grupo sobre um anel, apresentado por M. Dokuchaev e R. Exel [13]. Em [4], os autores também apresentam a noção de ação global de um grupoide sobre um anel, bem como exibem uma condição necessária e suficiente para que uma dada ação parcial seja global. Neste trabalho, trataremos de ações globais de grupoides.

Em 1965, S. Chase, D. Harrison e A. Rosenberg publicaram em [10] uma Teoria de Galois para o caso de anéis comutativos. Dentre os vários resultados apresentados por estes, foi mostrado o teorema, conhecido como Teorema da Correspondência CHR, que estabelece uma correspondência biunívoca entre os subgrupos do grupo de Galois G, que age sobre um anel R, e as subálgebras de R que são separáveis sobre a subálgebra dos elementos invariantes pela ação de G e que, além disso, são G-fortes. A aplicação que fornece tal correspondência é chamada de aplicação de Galois. Em [4], D. Bagio e A. Paques generalizaram para o contexto de grupoides as equivalências para a definição de extensão de Galois. Já a correspondência de Galois foi generalizada para ações de grupoides por A. Paques e T. Tamusiunas em [26].

Para o caso de anéis não comutativos, ainda não foi obtida uma correspondência de Galois geral, no sentido de que não se exija nada a respeito dos anéis envolvidos. Porém se pode obter resultados sobre a correspondência estudando certas álgebras que satisfazem o teorema da correspondência. Em [32], G. Szeto e L. Xue deram condições para que a aplicação de Galois seja injetiva. No contexto de grupoides, A. Paques e T. Tamusiunas, em [27], apresentaram condições em que a aplicação de Galois é injetiva, mas não necessariamente sobrejetiva, e deram caracterizações de álgebras que satisfazem o teorema (generalizando os resultados de G. Szeto e L. Xue [31]).

Ainda sobre a Teoria de Galois para o caso não comutativo, mais precisamente sobre as álgebras que são ditas álgebras de Galois, T. Kanzaki [23] e M. Harada [17, 18] desenvolveram uma Teoria de Galois a partir de estudos sobre tais álgebras. Em [30], G. Szeto e L. Xue, mostraram que existe uma subálgebra S de uma álgebra de Galois R que, sob determinadas condições, dá algumas caracterizações para R, vista agora como uma extensão Azumaya Galois de S.

O objetivo desta tese é estudar a Teoria de Galois para o caso de uma ação de um grupoide finito sobre um anel não comutativo. Para isso, iremos organizar este trabalho da seguinte maneira. No Capítulo 1, recordamos ao leitor os conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, bem como apresentamos e fixamos algumas notações. Inicialmente apresentamos as definições e resultados básicos da teoria de álgebras de Azumaya. Recordamos o conceito de grupoides, de ações de grupoides e mostraremos algumas propriedades fundamentais.

No Capítulo 2, recordaremos alguns resultados sobre a Teoria de Galois para o contexto de grupoides. Um destes resultados, o qual será apresentado de maneira sucinta, é a primeira parte do Teorema da correspondência de Galois o qual foi mostrado por A. Paques e T. Tamusiunas em [26]. Além disso, introduziremos novos resultados acerca da Teoria de Galois para ações de grupoides, mais especificamente, um desses resultados nos diz essencialmente que se a álgebra R é escrita em termos de J_g, onde $J_g = \{r \in E_g \,|\, xr = r\beta_g(x1_{g^{-1}}), \text{ para todo } x \in R\}$ é um $C(R)$-módulo à direta, então R será uma extensão β-Galois central, onde β é a ação de um grupoide finito $\mathcal{G}$ em R, e $C(R)$ denota o centro de R.

No Capítulo 3, daremos condições para que a aplicação de Galois seja injetiva. Essencialmente, se R é uma extensão β-Galois de R^β, dado $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, denotaremos por $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_\mathcal{H}}$ a aplicação de Galois dos subgrupoides amplos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ nas R^β-subálgebras separavéis de R. Introduziremos duas aplicações, $\sigma : \mathcal{H} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\gamma : \mathcal{H} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ que são induzidas pela aplicação θ, e provaremos que existe uma relação entre σ, γ e θ. Além disso, definiremos $\bar{\sigma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\bar{\gamma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$, onde $V_R(\theta(\mathcal{H}))$ é o comutador de R em $\theta(\mathcal{H})$ e considerando R^β uma $C(R)^\beta$-álgebra separável, mostraremos que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\gamma}$ são aplicações injetivas do conjunto $\{\overline{\mathcal{H}} \,|\, \mathcal{H} \text{ é subgrupoide amplo de } \mathcal{G}\}$ no conjunto $\{T \,|\, T \text{ é } C(R)\text{-subálgebra separável de } R\}$. Os resultados deste capítulo estão publicados em [28] e estendem os resultados de [27] e [32].

No último capítulo trataremos sobre álgebras de Galois e extensões de Azumaya Galois. Precisamente, considere R uma álgebra de Galois de R^β, o subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}_{C(R)} = \{g \in \mathcal{G} \mid \beta_g(c1_{g^{-1}}) = c1_g, \text{ para todo } c \in C(R)\}$ e denote $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{g \in \mathcal{H}_{C(R)}} J_g$. Sob estas condições, apresentaremos algumas caracterizações para a extensão Azumaya Galois R usando $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.

Ao longo deste trabalho, anel significa um anel associativo com unidade não necessariamente comutativo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos introduzir os conceitos que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Começaremos estudando brevemente álgebras de Azumaya. Posteriormente, iremos introduzir o conceito de grupoides e explorar alguns resultados importantes sobre estes. As definições e os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados nas referências indicadas.

1.1 Álgebras de Azumaya

Nesta seção apresentaremos a definição de álgebras de Azumaya e alguns resultados importantes acerca desse tema. Para isso, começaremos definindo álgebras separáveis e estudando algumas de suas propriedades. Nesta seção, R denotará um anel e $C(R) = \{x \in R \,|\, xy = yx, \text{ para todo } y \in R\}$ o seu centro.

Definição 1.1.1. *[19, Definition 2]* Sejam R um anel e $S \subseteq R$ subanel com a mesma unidade de R. Dizemos que R é uma *extensão separável* sobre S (ou simplesmente *S-separável*) se existe $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes_S y_i \in R \otimes_S R$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_R$ e $rz = zr$, para todo $r \in R$. Em particular, se $S = C(R)$ dizemos que R é uma *extensão de*

Azumaya de S (ou simplesmente *Azumaya* sobre S ou S*-álgebra de Azumaya*).

Se S é um anel comutativo e R é uma extensão separável sobre S, então R é uma álgebra separável sobre S no sentido de [1]. Precisamente:

Definição 1.1.2. *[1, Section 1]* Sejam S um anel comutativo e R uma S-álgebra. Dizemos que R é uma *extensão separável sobre* S (ou simplesmente S*-separável*) se e somente se R é um R^e-módulo à esquerda projetivo, onde $R^e = R \otimes_S R^o$ é a álgebra envolvente sobre S e R^o denota a álgebra oposta de R.

A seguir apresentaremos algumas propriedades e resultados sobre separabilidade. Optamos por não demonstrar tais resultados, visto que são resultados clássicos da teoria de extensões separáveis e podem ser encontrados nas referências indicadas.

Dado um R-bimódulo M. Consideremos o subconjunto de M,

$$M^R = \{m \in M \,|\, mx = xm, \text{ para todo}\, x \in R\}.$$

Notemos que M^R é um $C(R)$-submódulo à esquerda de M via $c \cdot m = cm$, para quaisquer $c \in C(R)$ e $m \in M^R$, e $R \otimes_{C(R)} M^R$ é um R^e-módulo à esquerda via $(a \otimes b^o) \cdot (r \otimes m) = arb \otimes m$, para quaisquer $a, b, r \in R$ e $m \in M^R$. Além disso, a aplicação $\psi : R \otimes_{C(R)} M^R \longrightarrow M$ definida por $\psi(r \otimes m) = rm$ é um homomorfismo de R^e-módulos à esquerda.

Teorema 1.1.3. *[1, Theorem 3.1] Sejam K um anel comutativo e R uma K-álgebra. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) R é separável sobre $C(R)$;

(ii) para todo R^e-módulo M, a aplicação $R \otimes_{C(R)} M^R \longrightarrow M$ é um isomorfismo de R-álgebras.

Proposição 1.1.4. *[19, Proposition 2.5] Sejam R um anel, S e T subanéis de R tais que $T \subseteq S$.*

(i) Se R é uma extensão separável de T, então R é extensão separável de S;

(ii) Se R é uma extensão separável de S e S é uma extensão separável de T, então R é uma extensão separável de T.

Proposição 1.1.5. *[12, Proposition 1.13] Sejam R, S anéis comutativos, A uma R-álgebra e B uma S-álgebra. Então, $A \oplus B$ é $R \oplus S$-álgebra separável se e somente se A é R-separável e B é S-separável.*

Observação 1.1.6. Seja A uma K-álgebra sobre o anel comutativo K. Lembremos que A é uma K-álgebra *central* se A é fiel como K-módulo à esquerda e K coincide com o centro de A [12]. Se R é uma extensão separável sobre S, em particular, R é fiel como S-módulo. Assim, podemos também definir uma R-álgebra de Azumaya como sendo uma S-álgebra separável e central.

Teorema 1.1.7. *[22, Theorem 1] Sejam R uma K-álgebra sobre o anel comutativo K e M um R-módulo à esquerda fiel e $\Omega = Hom_R(M, M)$. Se R é uma K-álgebra separável e M é R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado, então Ω é uma K-álgebra separável, M é um Ω-módulo projetivo finitamente gerado e $Hom_\Omega(M, M) = R$. Além disso, se R é uma álgebra central sobre K, então Ω é álgebra central sobre R.*

Os resultados apresentados a seguir são bastante conhecidos na literatura e suas demonstrações podem ser encontradas nas referências indicadas.

Seja A um anel. Para qualquer A-módulo M, consideremos o subconjunto

$$\mathcal{T}_A(M) = \left\{ \sum_{i \in I} f_i(m_i) \,|\, f_i \in Hom_A(M, A), m_i \in M, \, I \text{ conjunto de índices} \right\}.$$

Como $Hom_A(M, A)$ é um A-módulo à direita via $(f \cdot a) = f(m)a$, para quaisquer $a \in A$, $f \in Hom_A(M, A)$ e $m \in M$, então $a(\sum_{i \in I} f_i(m_i)) = \sum_{i \in I} f_i(am_i) \in T_A(M)$ e $(\sum_{i \in I} f_i(m_i)a = \sum_{i \in I}(f_i \cdot a)(m_i) \in T_A(M)$. Assim, $T_A(M)$ é um ideal bilateral de A, chamado de *ideal traço* de M.

Definição 1.1.8. *[15, Chapter 1]* Sejam A um anel e M um A-módulo à esquerda. Dizemos que M é um *A-módulo gerador* se $\mathcal{T}_A(M) = A$.

Observação 1.1.9. Da definição acima, segue que M é um A-gerador se e somente se existem $f_1, ..., f_n \in Hom_A(M, A)$ e $m_1, ..., m_n \in M$ tais que $\sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) = 1$.

Definição 1.1.10. *[15, Chapter 1]* Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda. Dizemos que M é um *R-progerador* se M é finitamente gerado, projetivo e gerador sobre R.

Teorema 1.1.11. *[12, Theorem 3.4] Sejam K um anel comutativo e R uma K-álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) R é Azumaya sobre K;

(ii) R é um R^e-progerador e R é K-central;

(iii) R é um K-progerador e a aplicação $\psi : R^e \longrightarrow Hom_K(R, R)$ dada por

$$\psi(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i$$

é um isomorfismo de anéis.

Teorema 1.1.12. *[12, Theorem 3.8] Seja K um anel comutativo. Uma K-álgebra R é separável se e somente se R é uma álgebra de Azumaya sobre seu centro e seu centro é uma K-álgebra separável.*

Definição 1.1.13. *[12, Chapter 2]* Sejam S um subanel de R. Definimos o *comutador de S em R* como sendo o conjunto

$$V_R(S) = \{r \in R \,|\, rs = sr, \text{ para todo}\, s \in S\}.$$

Notemos que comutador de S em R é um subanel de R. Além disso, mostremos as seguintes propriedades sobre $V_R(S)$.

Proposição 1.1.14. *Sejam R um anel e S_1, S_2 subanéis de R. Então:*

(i) $V_R(S_1) = V_R(S_1C(R))$;

(ii) Se $V_R(S_1) = V_R(S_2)$, *então* $V_R(S_1C(R)) = V_R(S_2C(R))$;

(iii) Se $S_1 \subseteq C(R)$, *então* $V_R(S_1) = R$.

Demonstração. (i) Seja $r \in V_R(S_1)$. Então $rs = sr$, para todo $s \in S_1$. Dado $s'c \in S_1C(R)$,

$$r(s'c) = r(cs') = (rc)s' = (cr)s' = c(rs') = c(s'r) = (cs')r = (s'c)r.$$

Portanto, $r \in V_R(S_1C(R))$. Reciprocamente, como $S_1 \subseteq S_1C(R)$, segue que $V_R(S_1C(R)) \subseteq V_R(S_1)$.
(ii) Seja $r \in V_R(S_1C(R))$. Então $r(sc) = (sc)r$, onde $sc \in S_1C(R)$. Notemos que $r(sc) = r(cs) = (cr)s$ e $(sc)r = s(cr)$, pois $c \in C(R)$. Logo $(cr)s = s(cr)$, donde $cr \in V_R(S_1)$. Como $V_R(S_1) = V_R(S_2)$, então $cr \in V_R(S_2)$. Ou seja, $(cr)s' = s'(cr)$ para todo $s' \in S_2$. Logo $(cr)s' = (rc)s' = rcs' = r(s'c)$ e $s'(cr) = (s'c)r$. Portanto $r \in V_R(S_2C(R))$. A recíproca é feita de maneira análoga.
(iii) Claramente, $V_R(S_1) \subseteq R$. Reciprocamente, seja $r \in R$. Dado $s \in S_1$, em particular, $s \in C(R)$. Logo, $rs = sr$. Portanto, $r \in V_R(S_1)$. □

Proposição 1.1.15. *[12, Proposition 7.1.3] Sejam K um anel comutativo e A, B álgebras de Azumaya sobre K. Então $A \otimes_K B$ é uma álgebra de Azumaya sobre K.*

Teorema 1.1.16. *[12, Theorem 4.3] Sejam R um anel, A uma R-álgebra de Azumaya, B uma subálgebra de A contendo R e separável sobre R. Então, $V_A(B)$ é uma subálgebra separável de A e $V_A(V_A(B)) = B$. Se B for Azumaya sobre R, então $V_A(B)$ também o é, e a aplicação $\psi : B \otimes_R V_A(B) \longrightarrow A$ dada por $\psi(x \otimes y) = xy$ é um isomorfismo de R-álgebras.*

Teorema 1.1.17. *[12, Theorem 4.4] Sejam R um anel, A uma R-álgebra de Azumaya, B e C subálgebras R-separáveis de A tal que a aplicação $\phi : B \otimes_R C \longrightarrow A$ dada por $\phi(x \otimes y) = xy$ é um isomorfismo de R-álgebras. Então, B e C são R-álgebras de Azumaya com $V_A(B) = C$ e $V_A(C) = B$.*

Finalizaremos essa subseção observando um fato importante sobre as álgebras de Azumaya. Para isso, definiremos a noção de extensão Hirata-separável.

Definição 1.1.18. *[29, Definition 1]* Sejam R um anel e $S \subseteq R$ um subanel com a mesma unidade de R. Dizemos que R é uma *extensão Hirata-separável* de S se $R \otimes_S R$ é isomorfo a um somando direto de uma soma finita de R como R-bimódulos.

Observação 1.1.19. Em [29], podemos ver que álgebras de Azumaya cumprem a condição da definição acima. Consequentemente, uma álgebra de Azumaya é uma extensão Hirata-separável.

1.2 Grupoides

Nesta seção introduziremos os conceitos de grupoides e ação de grupoide sobre um anel, ilustrando com exemplos, além de apresentar resultados importantes dessa teoria. Em geral, um grupoide é definido como uma categoria pequena em que todo morfismo é invertível, o qual é uma generalização natural de grupos, visto que um grupo é uma categoria pequena com um único objeto. Iremos apresentar neste trabalho a versão axiomática dada em [24].

Definição 1.2.1. *[24, Chapter 3]* Seja $\mathcal{G}$ um conjunto não vazio munido de uma operação binária definida parcialmente, que será dada pela concatenação. Dados $g, h \in \mathcal{G}$, escrevemos $\exists gh$ sempre que o produto gh está definido. Um elemento $e \in \mathcal{G}$ é chamado de identidade se $\exists eg$ e $\exists ge$ então $eg = g = ge$. Assim, se e, e' são identidades, $\exists ee'$ então $e = e'$. Dizemos que $\mathcal{G}$ *é um grupoide* se:

(G1) Para todo $g, h, l \in \mathcal{G}$, $\exists g(hl)$ se e somente se $\exists (gh)l$, e neste caso são iguais;

(G2) Para todo $g, h, l \in \mathcal{G}$ $\exists g(hl)$ se e somente se $\exists gh$ e $\exists hl$;

(G3) Para cada $g \in \mathcal{G}$ existem únicas identidades $d(g)$, $r(g) \in G$ tais que $\exists gd(g)$, $\exists r(g)g$ e $gd(g) = g = r(g)g$;

(G4) Para cada $g \in \mathcal{G}$ existe um elemento $g^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = g^{-1}g$ e $r(g) = gg^{-1}$.

O conjunto das identidades de $\mathcal{G}$ será denotado por $\mathcal{G}_0$.

Observação 1.2.2.

1. Para todo $g \in \mathcal{G}$, o elemento $d(g)$ é chamado *identidade domínio* de g e o elemento $r(g)$ é chamado *identidade imagem* de g;

2. O conjunto de todos elementos $g \in \mathcal{G}$ tais que $d(g) = r(g) = e$ será denotado por $\mathcal{G}_e$. Claramente, $\mathcal{G}_e$ é um grupo cujo elemento identidade é e, e é chamado de *grupo principal* (ou de *isotropia*) associado a e.

3. O conjunto dos pares $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ tais que $\exists gh$, será denotado por $\mathcal{G}^2$.

No lema a seguir mostraremos algumas propriedades básicas sobre grupoides.

Lema 1.2.3. *[24, Chapter 3] Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então, são válidas as seguintes propriedades:*

(i) Para todo $g, h \in \mathcal{G}$, $(g, h) \in \mathcal{G}^2$ se e somente se $d(g) = r(h)$ e, neste caso, $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$;

(ii) Para todo $g \in \mathcal{G}$, o elemento g^{-1} é único com a propriedade descrita na Definição 1.2.1 (G4);

(iii) Para todo $g, h \in \mathcal{G}$, $(h^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$ se e somente se $(g, h) \in \mathcal{G}^2$ e, neste caso, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$;

(iv) Para qualquer $e \in \mathcal{G}_0$*, temos que* $d(e) = r(e) = e$ *e* $e^{-1} = e$*;*

(v) Para todo $(g, h) \in \mathcal{G}^2$*,* $gh \in \mathcal{G}_0$ *se e somente se* $g = h^{-1}$*;*

Demonstração. (i) Suponhamos que $(g, h) \in \mathcal{G}^2$. Notemos que $\exists gd(g)$, $\exists r(h)h = h$ e $gd(g) = g$, $r(h)h$, para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$. Assim,

$$gh = (gd(g))(r(h)h) = g(d(g)r(h))h,$$

logo $\exists d(g)r(h)$. Como $d(g)$ e $r(g)$ são identidades, temos $d(g) = d(g)r(h) = r(h)$. Reciprocamente, suponhamos que $d(g) = r(h)$. Como para cada $g \in \mathcal{G}$, $\exists gd(g)$ temos

$$gd(g) = gr(h) = g(hh^{-1}) = (gh)h^{-1}.$$

Portanto, $\exists gh$. Além disso, $gh = g(hd(h)) = (gh)d(h)$ e $gh = (r(g)g)h = r(g)gh$. Como $(gh)d(gh) = gh$ e $r(gh)(gh) = gh$, pela unicidade de $d(h), r(g)$, segue que $d(gh) = d(h)$ e $r(gh) = r(g)$.
(ii) Seja $g \in \mathcal{G}$. Suponhamos que existam $h, l \in \mathcal{G}$ inversos de g. Então, $d(g) = hg = lg$ e $r(g) = gh = gl$. Assim, pelo item (i), $d(h) = r(g) = d(l)$.

$$\begin{aligned} h &= hd(h) = hr(g) = h(gh) = (hg)h = (lg)h \\ &= l(gh) = l(r(g)) = l(d(l)) = l. \end{aligned}$$

Logo, o inverso é único. Agora consideremos $l = g^{-1}$ e vejamos que $l^{-1} = g$. Como $r(g) = gg^{-1} = gl$ e $d(g) = g^{-1}g = lg$. Pelo item (i), $d(g) = r(l)$ e $d(l) = r(g)$. Logo pela unicidade do inverso, $g = l^{-1}$. Portanto, $l^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g$.
(iii) Suponhamos que $(h^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$, ou seja, $\exists h^{-1}g^{-1}$. Pelo item (i), temos que $d(h^{-1}) = r(g^{-1})$. Além disso, pelo item (ii), notemos que

$$r(g^{-1}) = g^{-1}(g^{-1})^{-1} = g^{-1}g = d(g) \tag{1.1}$$

$$d(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1}h^{-1} = hh^{-1} = r(h). \tag{1.2}$$

Então, $d(g) = r(h)$. Logo, $\exists gh$ e consequentemente $(g,h) \in \mathcal{G}^2$. Reciprocamente, suponhamos que $(g,h) \in \mathcal{G}^2$. Então, pelo item (i), $d(g) = r(h)$. Assim, segue de (1.1) e (1.2) que $d(h^{-1}) = r(g^{-1})$. Logo, $(h^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} gh(h^{-1}g^{-1}) &= g(hh^{-1})g^{-1} = gr(h)g^{-1} = gd(g)g^{-1} = gg^{-1} = r(g) \\ &= r(gh) = (gh)(gh)^{-1}. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} (h^{-1}g^{-1})gh &= h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}d(g)h = h^{-1}r(h)h = h^{-1}h = d(h) \\ &= d(gh) = (gh)^{-1}gh. \end{aligned}$$

Pela unicidade do elemento inverso, temos que $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

(iv) Seja $e \in \mathcal{G}_0$. Então, $e = d(g) = r(g^{-1})$, para algum $g \in \mathcal{G}$. Sejam $h, l \in \mathcal{G}$ tais que $\exists eh$ e $\exists le$. Pelo item (i), $d(e) = r(h)$ e $d(l) = r(e)$. Notemos que,

$$\begin{aligned} r(e) &= r(d(g)) = r(g^{-1}g) = (g^{-1}g)(g^{-1}g)^{-1} = (g^{-1}g)g^{-1}g \\ &= g^{-1}(gg^{-1})g = g^{-1}r(g)g = g^{-1}g = d(g). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $d(e) = d(g)$.Logo, $r(e) = d(e) = e$. Consequentemente, $\exists ee$ e $ee = e = e^{-1}$.

(v) Seja $(g,h) \in \mathcal{G}^2$. Então, $d(g) = r(h)$. Suponhamos que $gh \in \mathcal{G}_0$. Logo, $gh = e$, para algum $e \in \mathcal{G}_0$. Portanto,

$$g = gd(g) = gr(h) = g(hh^{-1}) = (gh)h^{-1} = eh^{-1} = h^{-1}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $g = h^{-1}$. Então, $gh = h^{-1}h = d(h) \in \mathcal{G}_0$.

$\square$

Vejamos alguns exemplos de grupoides.

Exemplo 1.2.4. *[20, Chapter 3]* Todo grupo $\mathcal{G}$ é um grupoide, onde todos seus elementos são operáveis e $r(g) = d(g) = 1_{\mathcal{G}}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.5. *[9, Example 1]* A união disjunta de grupos $\coprod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ é um grupoide, onde o produto gh está definido se e somente se g e h pertencem ao mesmo G_λ.

Exemplo 1.2.6. *[20, Example 3.4]* Seja G um grupo agindo por bijeções em um conjunto X. Em $X \times G$, definimos a seguinte operação parcial

$$\exists(x,g)(y,h) \Leftrightarrow x = gy \,\text{e, neste caso,}\, (x,g)(y,h) = (x,gh).$$

O conjunto $X\times G$ com esta multiplicação parcial será denotado por $P(X,G)$. Com a operação definida acima, temos que $P(X,G)$ é um grupoide, onde $d(x,g) = (x,1_G)$, $r(x,g) = (gx,1_G)$ e $(x,g)^{-1} = (gx,g^{-1})$.

Exemplo 1.2.7. *[24, Example 2]* Sejam K um anel comutativo, R uma K-álgebra e I,J ideais de R gerados por idempotentes centrais. Definimos

$$I_K(R) = \{f_{IJ} : I \longrightarrow J \mid f_{IJ} \text{ é } K\text{-isomorfismo}\}$$

O conjunto $I_K(R)$ é um grupoide com a operação de composição de funções. Ou seja,

$$\exists f_{IJ}g_{I'J'} \Leftrightarrow Dom(f_{IJ}) = Im(g_{I'J'}) \Leftrightarrow I = J',$$

para quaisquer $f_{IJ}, g_{I'J'} \in I_K(R)$. Além disso, $d(f) = Id_I$ e $r(f) = Id_J$.

Introduziremos a seguir a definição de ação de grupoides sobre uma álgebra.

Definição 1.2.8. *[4, Section 1]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide, K um anel comutativo e R uma K-álgebra unitária. Uma *ação* de $\mathcal{G}$ sobre R é um par $\beta = (\{E_g\},\{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$, onde para cada $g \in \mathcal{G}$, $E_g = E_{r(g)}$ é um ideal de R e $\beta_g : E_{g^{-1}} \longrightarrow E_g$ é um isomorfismo de K-álgebras satisfazendo:

(i) β_e é a aplicação identidade de E_e, Id_{E_e}, para todo $e \in \mathcal{G}_0$;

(ii) $\beta_g(\beta_h(r)) = \beta_{gh}(r)$, para todo $(g,h) \in \mathcal{G}^2$ e $r \in E_{h^{-1}} = E_{(gh)^{-1}}$.

Notemos que se $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação de $\mathcal{G}$ sobre R, então é fácil verificar que, $\beta_{\mathcal{G}_e} = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}_e}$ é uma ação do grupo $\mathcal{G}_e$ sobre o anel E_e, para todo $e \in \mathcal{G}_0$.

Exemplo 1.2.9. *[4, Example 2.2]* Consideremos o grupoide $\mathcal{G} = \{d(g), r(g), g, g^{-1}\}$ e a álgebra $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel com unidade e e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes dois a dois ortogonais cuja a soma é 1_R. Sejam $E_{d(g)} = E_{g^{-1}} = Ke_1 \oplus Ke_2$, $E_{r(g)} = E_g = Ke_3 \oplus Ke_4$, e definimos $\beta_{d(g)} = Id_{E_{d(g)}}$, $\beta_{r(g)} = Id_{E_{r(g)}}$, $\beta_g(ae_1+be_2) = ae_3+be_4$ e $\beta_{g^{-1}}(ae_3+be_4) = ae_1+be_2$, para quaisquer $a, b \in K$. Então, $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre R.

Definição 1.2.10. *[11, Section 2]* Sejam K um anel comutativo, R uma K-álgebra e $\mathcal{G}$ um grupoide finito. Dizemos que $\mathcal{G}$ *age sobre R por isomorfismos parciais* se $\mathcal{G} \subseteq I_K(R)$.

1.2.1 Subgrupoide normal e grupoide quociente

Nesta subseção iremos definir algumas subestruturas de grupoides, bem como apresentar alguns exemplos e resultados sobre estes.

Definição 1.2.11. *[26, Section 2]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um *subgrupoide* de $\mathcal{G}$ se satisfaz as seguintes condições:

(i) para todo $g, h \in \mathcal{H}$, se $\exists gh$ então $gh \in \mathcal{H}$;

(ii) se $g \in \mathcal{H}$, então $g^{-1} \in \mathcal{H}$, para todo $g \in \mathcal{H}$.

Definição 1.2.12. *[26, Section 2]* Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide de um grupoide $\mathcal{G}$. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um *subgrupoide amplo* de $\mathcal{G}$ se $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$.

Exemplo 1.2.13. *[26, Example 3.2]* Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então, $\mathcal{G}_0$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.14. *[2, Example 1]* Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Para cada $g \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = r(g)$, o conjunto $\mathcal{H}(g) = \{h \in \mathcal{G}_{d(g)} \,|\, gh = hg\}$ é um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Com efeito, sejam $h, l \in \mathcal{H}(g)$ tais que $\exists hl$. Como $h, l \in \mathcal{H}(g)$, então $d(h) = r(h) = d(g), d(l) = r(l) = d(g), gh = hg$ e $lg = gl$, para cada $g \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = r(g)$. Assim,

$$g(hl) = (gh)l = (hg)l = h(gl) = h(lg) = (hl)g.$$

Logo, $hl \in \mathcal{H}(g)$. Temos ainda que $h^{-1} \in \mathcal{G}_{d(g)}$, pois $r(h^{-1}) = d(h) = d(g)$ e $d(h^{-1}) = r(h) = d(g)$. Além disso, como $h \in \mathcal{H}(g)$, temos que $d(h) = r(g)$ e $gh = hg$. Então,

$$\begin{aligned} gh^{-1} &= r(g)gh^{-1} = d(h)gh^{-1} = h^{-1}hgh^{-1} = h^{-1}ghh^{-1} \\ &= h^{-1}gr(h) = h^{-1}gd(g) = h^{-1}g. \end{aligned}$$

Logo, $h^{-1} \in \mathcal{H}(g)$. Portanto, $\mathcal{H}(g)$ é subgrupoide de $\mathcal{G}$.

Definição 1.2.15. Seja $\mathcal{H}$ um subconjunto de um grupoide $\mathcal{G}$. O *subgrupoide gerado* pelos elementos de $\mathcal{H}$ é o menor subgrupoide de $\mathcal{G}$ que contém $\mathcal{H}$, denotado por $\langle \mathcal{H} \rangle$.

Lema 1.2.16. *[26, Lemma 2.1] Seja $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre uma álgebra R, onde para cada $e \in \mathcal{G}_0, E_e$ é uma álgebra com unidade 1_e. Para qualquer subálgebra S de R, seja $\mathcal{H}_S = \{g \in \mathcal{G} \,|\, \beta_g(s1_{g^{-1}}) = s1_g, \text{ para todo } s \in S\}$. Então, $\mathcal{H}_S$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Sejam $g, h \in \mathcal{H}_S$. Suponhamos que, $\exists gh$, ou seja, $d(g) = r(h)$. Então,

$$\beta_{gh}(s1_{(gh)^{-1}}) = \beta_{gh}(s1_{h^{-1}g^{-1}}) = \beta_g(\beta_h(s1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) = \beta_g(s1_h1_{g^{-1}})$$

$$= \beta_g(s1_{r(h)}1_{g^{-1}}) = \beta_g(s1_{d(g)}1_{g^{-1}}) = \beta_g(s1_{g^{-1}}1_{g^{-1}})$$
$$= \beta_g(s1_{g^{-1}}) = s1_g = s1_{r(g)} = s1_{r(gh)} = s1_{gh},$$

para todo $s \in S$. Logo, $gh \in \mathcal{H}_S$. Além disso,

$$\beta_{g^{-1}}(s1_g) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(s1_{g^{-1}})) = \beta_{g^{-1}g}(s1_{g^{-1}}) = \beta_{d(g)}(s1_{g^{-1}}) = s1_{g^{-1}},$$

para todo $s \in S$. Portanto, $g^{-1} \in \mathcal{H}_S$.

Agora observe que $\mathcal{H}_S$ é subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, pois $\beta_e(s1_e) = s1_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. □

Exemplo 1.2.17. Seja $\mathcal{H}_S$ o subgrupoide de $\mathcal{G}$ definido no Lema 1.2.16. Consideremos T uma subálgebra de S e definimos o conjunto

$$\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H}_S \,|\, \beta_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h, \text{ para todo } x \in T\}.$$

Temos que $\mathcal{L}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{H}_S$.

Definição 1.2.18. *[26, Section 3]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide de $\mathcal{G}$. Para todo $g \in \mathcal{G}$, definimos o subconjunto

$$g^{-1}\mathcal{H}g = \{g^{-1}hg \,|\, h \in \mathcal{H} \text{ e } r(h) = d(h) = r(g)\}.$$

Dizemos que $\mathcal{H}$ é um *subgrupoide normal* de $\mathcal{G}$, se $g^{-1}\mathcal{H}g \neq \emptyset$ e $g^{-1}\mathcal{H}g \subseteq \mathcal{H}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Em [8], R. Brown apresentou outra definição para subgrupoide normal. Precisamente,

Definição 1.2.19. *[8, Section 1]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide de $\mathcal{G}$. O subgrupoide $\mathcal{H}$ é dito *normal* se $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}_0$ e $g^{-1}\mathcal{H}_{r(g)}g = \mathcal{H}_{d(g)}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Da definição acima, podemos ver que um subgrupoide normal é também um subgrupoide amplo. Além disso, em [26] foi mostrado a equivalência da definição acima com a Definição 1.2.18. Neste trabalho usaremos a Definição 1.2.18.

Lema 1.2.20. *Seja* $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ *uma ação de um grupoide* $\mathcal{G}$ *sobre uma álgebra* R*, onde cada* E_g *é uma álgebra unitária. Se* S *é uma subálgebra de* R *tal que* $\beta_g(S1_{g^{-1}}) \subseteq S1_g$*, para cada* $g \in \mathcal{G}$*, então* $\mathcal{H}_S$ *é subgrupoide normal de* $\mathcal{G}$*.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.16 $\mathcal{H}_S$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, logo resta mostrarmos que $g^{-1}\mathcal{H}_S g \subseteq \mathcal{H}_S$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Sejam $g^{-1}hg \in g^{-1}\mathcal{H}_S g$ e $s \in S$. Como $\beta_g(S1_{g^{-1}}) \subseteq S1_g$, $\beta_g(s1_{g^{-1}}) = s'1_g$, para algum $s' \in S$, assim

$$\begin{aligned}\beta_{g^{-1}hg}(s1_{(g^{-1}hg)^{-1}}) &= \beta_{g^{-1}}(\beta_h(\beta_g(s1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})1_g) = \beta_{g^{-1}}(\beta_h(s'1_g)1_{h^{-1}})1_g) \\ &= \beta_{g^{-1}}((s'1_g)1_h)1_g) = \beta_{g^{-1}}(s'1_g) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(s1_{g^{-1}})) \\ &= \beta_{g^{-1}g}(s1_{g^{-1}}) = \beta_{d(g)}(s1_{d(g)}) = s1_{d(g)} = s1_{r(g^{-1})} = s1_{g^{-1}hg}.\end{aligned}$$

Logo, $g^{-1}\mathcal{H}_S g \in \mathcal{H}_S$. □

Vejamos alguns exemplos de subgrupoides normais.

Exemplo 1.2.21. *[26, Example 3.2]* Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então, $\mathcal{G}_0$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Basta ver que $g^{-1}\mathcal{G}_0 g = \{d(g)\}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.22. *[26, Example 3.3]* Pelo Exemplo 1.2.5, sabemos que união disjunta de grupos $\coprod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ é um grupoide. Considerando H_λ um subgrupo normal de G_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $\coprod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ é um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$.

Exemplo 1.2.23. *[26, Example 3.4]* Seja $P(X, G)$ o grupoide do Exemplo 1.2.6. Se considermos H um subgrupo normal de G, temos que $P(X, H)$ é um subgrupoide normal de $P(X, G)$.

Definição 1.2.24. *[26, Section 3]* Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Dizemos que $\mathcal{G}$ é *abeliano* se satisfaz as seguintes condições:

(i) para cada $g \in \mathcal{G}$, $d(g) = r(g)$;

(ii) para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ com $d(g) = r(h)$, $gh = hg$.

Exemplo 1.2.25. *[26, Example 3.6]* Todo subgrupoide $\mathcal{H}$ de um grupoide abeliano $\mathcal{G}$ é normal. Com efeito, para todo $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{H}$ com $d(h) = r(h) = r(g)$. Como $\mathcal{G}$ é abeliano, $d(g) = r(g)$, ou seja, $d(g) = r(h)$. Assim,

$$g^{-1}r(h)g = g^{-1}r(g)g = g^{-1}g = d(g) = r(g) = r(h) \in \mathcal{H}.$$

Logo, $g^{-1}\mathcal{H}g \neq \emptyset$. Além disso,

$$g^{-1}hg = g^{-1}gh = d(g)h = r(h)h = h \in \mathcal{H}.$$

Portanto, $g^{-1}\mathcal{H}g \subseteq \mathcal{H}$.

A seguir iremos definir e estudar algumas propriedades sobre classes laterais. Além disso, apresentaremos condições para que o quociente de um grupoide possua uma estrutura de grupoide.

Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Definimos em $\mathcal{G}$ a seguinte relação:

$$g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_2 \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} \, \text{tal que} \, \exists g_1 h \, \text{e} \, g_2 = g_1 h,$$

para quaisquer $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$. Notemos que $\sim_{\mathcal{H}}$ é uma relação de equivalência.

De fato, como $\mathcal{H}$ é amplo, existe $d(g) \in \mathcal{H}$ tal que $g = gd(g)$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Assim, $g \sim_{\mathcal{H}} g$. Sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ e suponhamos que $g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_2$. Então, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $\exists gh$ e $g_2 = g_1 h$. Como $\mathcal{H}$ é subgrupoide de $\mathcal{G}$, $h^{-1} \in \mathcal{H}$ e então $g_1 = g_2 h^{-1}$. Logo, $g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_2$. Por fim, suponhamos que $g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_2$ e $g_2 \sim_{\mathcal{H}} g_3$, para quaisquer $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$. Então, existem $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ tais que $\exists g_1 h_1, \exists g_2 h_2$ e $g_2 = g_1 h_1, g_3 = g_2 h_2$. Como $d(h_1) = d(g_1 h_1) = d(g_2) = r(h_2)$, $\exists h_1 h_2$ e $h_1 h_2 \in \mathcal{H}$. Logo, $g_3 = g_1(h_1 h_2)$ e consequentemente $g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_3$.

Definição 1.2.26. *[20, Definition 6.1]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Definimos a *classe lateral à esquerda* de um elemento $g \in \mathcal{G}$ por $g\mathcal{H} = \{gh \,|\, h \in \mathcal{H} \, \text{e} \, d(g) = r(h)\}$.

Analogamente, podemos definir em $\mathcal{G}$ a relação de equivalência:

$$g_1 \sim_{\mathcal{H}} g_2 \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} \,\text{tal que}\, \exists hg_1 \,\text{e}\, g_2 = hg_1.$$

Neste caso, definimos a classe lateral à direita de $g \in \mathcal{G}$ por $\mathcal{H}g = \{hg \,|\, h \in \mathcal{H} \,\text{e}\, d(h) = r(g)\}$ ([20, Definition 6.1]).

Chamamos de conjunto *quociente de $\mathcal{G}$ por $\mathcal{H}$* o conjunto das classes laterais à esquerda, o qual é denotado por $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{g\mathcal{H} \,|\, g \in \mathcal{G}\}$.

Proposição 1.2.27. *[16, Proposição 1.2.13] Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. Então, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ é um grupoide com a seguinte operação:*

$$\exists g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} \Leftrightarrow \exists h \in \mathcal{H} \,\text{tal que}\, \exists g_1 h g_2,$$

para quaisquer $g_1\mathcal{H}, g_2\mathcal{H} \in \mathcal{G}/\mathcal{H}$, e neste caso, $g_1\mathcal{H}g_2\mathcal{H} = g_1 h g_2 \mathcal{H}$.

1.2.2 Grupoides Conexos

Nesta subseção estudaremos brevemente sobre grupoides conexos, e mostraremos alguns resultados acerca destes.

Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $e, f \in \mathcal{G}_0$. Denotamos o conjunto

$$\mathcal{G}(e, f) = \{g \in \mathcal{G} \,|\, d(g) = e, r(g) = f\}.$$

Em particular, $\mathcal{G}(e, e) := \mathcal{G}_e$ é o grupo de isotropia associado a e.

Definição 1.2.28. *[5, Section 2]* Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide. Dizemos que $\mathcal{G}$ é *conexo* se $\mathcal{G}(e, f) \neq \emptyset$, para quaisquer $e, f \in \mathcal{G}_0$.

Consideramos a seguinte relação em $\mathcal{G}_0$:

$$e \sim f \Leftrightarrow \mathcal{G}(e, f) \neq \emptyset,$$

para quaisquer $e, f \in \mathcal{G}_0$. Notemos que a relação acima é uma relação de equivalência. Com efeito, como $e \in \mathcal{G}_0$ e $d(e) = r(e) = e$, assim $\mathcal{G}_e \neq \emptyset$, donde segue que $e \sim e$. Sejam $e, f \in \mathcal{G}_0$ tais que $e \sim f$. Então, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = e$ e $r(g) = f$. Em particular, $g^{-1} \in \mathcal{G}$ e $r(g^{-1}) = d(g) = e, d(g^{-1}) = r(g) = f$. Logo, $\mathcal{G}(f, e) \neq \emptyset$ e portanto $f \sim e$. Por fim, sejam $e, f, e' \in \mathcal{G}_0$ tais que $e \sim f$ e $f \sim e'$. Assim, existem $g, h \in \mathcal{G}$ tais que $d(g) = e$, $r(g) = f$ e $d(h) = f$, $r(h) = e'$. Então, $\exists hg$ e $d(hg) = d(g) = e$, $r(hg) = r(h) = e'$. Logo, $\mathcal{G}(e, e') \neq \emptyset$ e consequentemente $e \sim e'$.

Denotaremos a classe de equivalência de $e \in \mathcal{G}_0$ por $X \in \mathcal{G}_0/\sim$.

Cada classe de equivalência $X \in \mathcal{G}_0/\sim$ determina um subgrupoide $\mathcal{G}_X$ de $\mathcal{G}$, de modo que, o conjunto dos objetos de $\mathcal{G}_X$ é X e $\mathcal{G}_X(e, f) := \mathcal{G}(e, f)$, para quaisquer $e, f \in X$. Por construção, $\mathcal{G}_X$ é um subgrupoide conexo de $\mathcal{G}$, chamado de *componente conexa de $\mathcal{G}$ associado a X*. Além disso, $\mathcal{G} = \coprod_{X \in \mathcal{G}_0/\sim} \mathcal{G}_X$, conforme descrito em [5].

Observação 1.2.29.

1. Se $\mathcal{G}$ é um grupoide finito, então $\mathcal{G}/\sim = \{X_1, ..., X_n\}$ e consequentemente, $\mathcal{G} = \coprod_{i=1}^{n} \mathcal{G}_{X_i}$.

2. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$. Então cada componente conexa $\mathcal{G}_{X_i}$ de $\mathcal{G}$, $X_i \in \mathcal{G}_0/\sim$, $1 \leq i \leq n$, é subgrupo de $\mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$.

3. Se para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, $\mathcal{G}_{X_i}, \mathcal{G}_{X_j} \subset \mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$, então $i = j$. De fato, suponhamos que $i \neq j$. Em particular, $\mathcal{G}_{X_i}, \mathcal{G}_{X_j}$ são subgrupos de $\mathcal{G}'_e$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$, assim $e' \in \mathcal{G}_{X_i}$ e $e' \in \mathcal{G}_{X_j}$. Logo, $e' \in \mathcal{G}_{X_i} \cap \mathcal{G}_{X_j}$, o que é um absurdo, pois $\mathcal{G}_{X_i} \cap \mathcal{G}_{X_j} = \emptyset$, para todo $1 \leq i \leq n$.

1.2.3 Teorema do Homomorfismo

Em [2], foi mostrado o teorema de homomorfismo para o caso em que o grupoide é uma união disjunta de grupos. Nesta subseção, temos como objetivo estender os resultados apresentados em [2] para um grupoide qualquer.

Definição 1.2.30. *[21, Definition 1.4]* Sejam $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ grupoides. Dizemos que a aplicação $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ é um *homomorfismo de grupoides* se para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ tal que $\exists gh$, então $\exists \psi(g)\psi(h)$ e neste caso $\psi(hg) = \psi(g)\psi(h)$.

Exemplo 1.2.31. Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. A aplicação $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ dada por $\pi(g) = g\mathcal{H}$, para cada $g \in \mathcal{G}$ é um homomorfismo sobrejetor de grupoides. De fato, sejam $g, l \in \mathcal{G}$ tais que $\exists gl$. Queremos mostrar que $\exists \pi(g)\pi(l)$, ou seja, $\exists g\mathcal{H}l\mathcal{H}$. Assim, pelo Lema 1.2.27, basta ver que $\exists h \in \mathcal{H}$ tal que $\exists ghl$. Mas como $\mathcal{H}$ é amplo, $d(g) \in \mathcal{H}$ e $\exists gd(g)l = gl$. Assim, $\exists g\mathcal{H}l\mathcal{H}$ e neste caso $g\mathcal{H}l\mathcal{H} = gd(g)l\mathcal{H} = gl\mathcal{H}$.

Definição 1.2.32. *[2, Definition 8]* Sejam $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ grupoides e $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ um homomorfismo de grupoides. Definimos os conjuntos $Ker(\psi) = \{g \in \mathcal{G} \mid \psi(g) \in \mathcal{G}'_0\}$ e $\psi(\mathcal{G}) = \{\psi(g) \in \mathcal{G}' \mid g \in \mathcal{G}\}$ como sendo o *núcleo* e a *imagem* de ψ, respectivamente.

Proposição 1.2.33. *Seja $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ um homomorfismo de grupoides. Então,*

(i) Para cada $g \in \mathcal{G}$, $\psi(d(g)) = d(\psi(g)), \psi(r(g)) = r(\psi(g))$ e $\psi(g^{-1}) = (\psi(g))^{-1}$;

(ii) $Ker(\psi)$ é subgrupoide normal de $\mathcal{G}$.

Demonstração. (i) Seja $g \in \mathcal{G}$. Como $\exists gd(g)$ e ψ é um homomorfismo de grupoides, então $\exists \psi(g)\psi(d(g))$ e $\psi(g) = \psi(gd(g)) = \psi(g)\psi(d(g))$. Logo, pela unicidade da identidade, $\psi(d(g)) = d(\psi(g))$. Analogamente, $r(\psi(g)) = \psi(r(g))$. Por fim, como $\exists gg^{-1}$, $\exists g^{-1}g$ e ψ é um homomorfismo, então $\exists \psi(g)\psi(g^{-1})$, $\psi(g^{-1})\psi(g)$ e

$$\psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(gg^{-1}) = \psi(r(g)) = r(\psi(g)),$$

$$\psi(g^{-1})\psi(g) = \psi(g^{-1}g) = \psi(d(g)) = d(\psi(g)).$$

Logo, $(\psi(g))^{-1} = \psi(g^{-1})$.

(ii) Sejam $g, h \in Ker(\psi)$ tais que $\exists gh$. Como ψ é homomorfismo, $\exists \psi(g)\psi(h)$ e $\psi(g)\psi(h) = \psi(gh)$. Assim, $\psi(gh) \in \mathcal{G}'_0$. Pela Proposição 1.2.3, $\psi(g^{-1}) = (\psi(g))^{-1}$, então $\psi(g^{-1}) \in \mathcal{G}'_0$. Logo, $Ker(\psi)$ é subgrupoide de $\mathcal{G}$. Para mostrarmos que $Ker(\psi)$ é normal, vejamos que $g^{-1}Ker(\psi)g \neq \emptyset$ e $g^{-1}Ker(\psi)g \subseteq Ker(\psi)$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Seja $g^{-1}hg \in g^{-1}Ker(\psi)g$, onde $h \in Ker(\psi)$ e $d(h) = r(h) = r(g)$. Como $\psi(d(g)) = d(\psi(g)) \in \mathcal{G}'_0$, $d(g) \in Ker(\psi)$ e $g^{-1}Ker(\psi)g \neq \emptyset$. Além disso, $\exists hg$, ou seja, $\exists \psi(h)\psi(g)$. Então, $\psi(d(h)) = \psi(r(g))$ e $d(\psi(g^{-1})\psi(h)) = r(\psi(g))$. Assim, $\exists (\psi(g^{-1})\psi(h))\psi(g)$. Logo, $\psi(g^{-1}hg) = \psi(g^{-1})\psi(h)\psi(g)$. Desde que $\psi(h) \in \mathcal{G}'_0$, $\psi(g^{-1}hg) = \psi(g^{-1})\psi(g) = d(\psi(g)) \in \mathcal{G}'_0$. Portanto, $Ker(\psi)$ é subgrupoide normal de $\mathcal{G}$. $\square$

Definição 1.2.34. *[21, Definition 2.3]* Seja $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ um homomorfismo de grupoides. Dizemos que ψ é um *homomorfismo forte* se para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$ tais que $\exists \psi(g)\psi(h)$, então $\exists gh$.

Teorema 1.2.35. *Seja $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ um homomorfismo sobrejetor forte de grupoides. Então existe um isomorfismo forte de grupoides $\bar{\psi} : \mathcal{G}/Ker(\psi) \longrightarrow \mathcal{G}'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{G}' \\
\mathcal{G}/Ker(\psi) \arrow[ur, dotted, "\bar{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Consideremos $\mathcal{L} = Ker(\psi)$. Definimos $\bar{\psi} : \mathcal{G}/\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G}'$ por $\bar{\psi}(g\mathcal{L}) = \psi(g)$, para todo $g\mathcal{L} \in \mathcal{G}/\mathcal{L}$. Vejamos que $\bar{\psi}$ está bem definida. Sejam $g\mathcal{L}, h\mathcal{L} \in \mathcal{G}/\mathcal{L}$ tais que $g\mathcal{L} = h\mathcal{L}$. Então, existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $\exists hl$ e $g = hl$. Ou seja, $\exists h^{-1}g$ e

$h^{-1}g \in \mathcal{L}$. Assim, $\psi(h^{-1}g) = d(l')$, para algum $l' \in \mathcal{G}'$ e $\psi(h^{-1})\psi(g) = d(l)$. Como ψ é sobrejetor, em particular, $l' = \psi(h)$. Logo, $(\psi(h)\psi(h^{-1}))\psi(g) = \psi(h)d(l)$, ou seja, $\psi(r(h))\psi(g) = \psi(h)$. Desde que $\psi(r(g)) = \psi(r(h))$, segue que $\psi(g) = \psi(h)$. Portanto, $\bar{\psi}(g\mathcal{L}) = \bar{\psi}(h\mathcal{L})$.

Provemos agora que $\bar{\psi}$ é um homomorfismo forte. Sejam $g\mathcal{L}, h\mathcal{L} \in \mathcal{G}/\mathcal{L}$ tais que $\exists g\mathcal{L}h\mathcal{L}$. Então, existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $\exists glh$. Como ψ é homomorfismo, $\exists \psi(g)\psi(l)\psi(h)$ e por $l \in \mathcal{L}$, $\psi(g)\psi(l)\psi(h) = \psi(g)\psi(h)$. Assim, $\exists \psi(g)\psi(h)$ e consequentemente $\exists \bar{\psi}(g\mathcal{L})\bar{\psi}(h\mathcal{L})$. Reciprocamente, suponhamos que $\exists \bar{\psi}(g\mathcal{L})\bar{\psi}(h\mathcal{L})$, isto é, $\exists \psi(g)\psi(h)$. Desde que ψ é um homomorfismo forte, $\exists gh$. Logo, $\exists d(g) \in \mathcal{L}$ tal que $\exists gd(g)h$. Consequentemente, $\exists g\mathcal{L}h\mathcal{L}$.

Claramente, $\bar{\psi}$ é sobrejetor. Finalmente, resta vermos que $\bar{\psi}$ é injetiva. Suponhamos que $\bar{\psi}(g\mathcal{L}) = \bar{\psi}(h\mathcal{L})$, para quaisquer $g\mathcal{L}, h\mathcal{L} \in \mathcal{G}/\mathcal{L}$. Então, $\psi(g) = \psi(h)$. Como ψ é homomorfismo forte, $\exists \psi(g)\psi(h)$ se e somente se $\exists gh$. Assim, $\exists h^{-1}g$ e $\psi(h^{-1}g) = \psi(h^{-1})\psi(g)$. Por outro lado, $\psi(h^{-1})\psi(g) = \psi(h^{-1})\psi(h) = d(\psi(h)) \in \mathcal{G}'_0$. Logo, $h^{-1}g \in \mathcal{L}$ e portanto $g\mathcal{L} = h\mathcal{L}$. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Galois Fraca

Neste capítulo apresentaremos os conceitos fundamentais para o desenvolvimento da Teoria de Galois para ações de grupoides.

Ao longo deste capítulo, assumiremos que $\mathcal{G}$ é um grupoide finito, K é um anel comutativo, R é uma K-álgebra, $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre a álgebra R tal que $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$, onde cada E_e é uma álgebra com unidade $1_e \neq 0$ e $C(R)$ é o centro de R.

2.1 Extensão β-Galois

Iniciaremos esta subseção com a versão global de [4, Theorem 5.3], que fornece equivalências para a definição de extensão de Galois no contexto de grupoides. Para isso, introduziremos alguns conceitos e provaremos alguns resultados sobre estes.

Definição 2.1.1. *[4, Section 4] A subálgebra dos elementos invariantes* sobre a ação β é o conjunto definido por

$$R^\beta = \{r \in R \,|\, \beta_g(r1_{g^{-1}}) = r1_g, \text{ para todo}\, g \in \mathcal{G}\}.$$

Notemos que como $R = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, então $R^\beta \subseteq \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. De fato, dado $x \in R^\beta$ temos que $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Em particular, $x \in R$ e qualquer $x \in R$ é da forma $x = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e$, com $x_e \in E_e$. Assim,

$$\beta_g(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_g \Rightarrow \beta_g(x_{d(g)}) = x_{r(g)},$$

Consequentemente, $\beta_g(x_e) = x_e$, para todo $g \in \mathcal{G}_e$. Logo, $x_e \in E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$ e $x = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \in \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. Porém, em geral a reciproca não vale, como podemos ver com o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.2. *[25, Remark 2.2]* Consideremos o grupoide $\mathcal{G} = \{d(g), r(g), g, g^{-1}\}$ e a álgebra $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4$, onde K é um anel com unidade e e_1, e_2, e_3 e e_4 são idempotentes dois a dois ortogonais cuja a soma é 1_R. Sejam $E_{d(g)} = E_{g^{-1}} = Ke_3 \oplus Ke_4$, $E_{r(g)} = E_g = Ke_1 \oplus Ke_2$, e definimos $\beta_{d(g)} = Id_{E_{d(g)}}$, $\beta_{r(g)} = Id_{E_{r(g)}}$, $\beta_g(ae_3 + be_4) = ae_1 + be_2$ e $\beta_{g^{-1}}(ae_1 + be_2) = ae_3 + be_4$, para quaisquer $a, b \in K$. É fácil verificar que $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação de $\mathcal{G}$ sobre R, $R^\beta = K(e_1 + e_3) \oplus K(e_2 + e_4)$, $E_{r(g)}^{\beta_{\mathcal{G}_{r(g)}}} = Ke_1 \oplus Ke_2$ e $E_{d(g)}^{\beta_{\mathcal{G}_{d(g)}}} = Ke_3 \oplus Ke_4$.

A reciproca vale quando $\mathcal{G}$ é uma união de seus grupos de isotropia. Precisamente:

Lema 2.1.3. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$, então $R^\beta = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$.*

Demonstração. Seja $x = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e \in \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. Ou seja, para cada $e \in \mathcal{G}_0$, $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}_e$. Então, dado $g \in \mathcal{G} = \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$, temos que $g \in \mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$. Como $(\bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e) \cap E_{e'} = E_{e'}$ temos

$$\beta_g(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_{g^{-1}}) = \beta_g(x_{e'}) = x_{e'} 1_g = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_g.$$

Logo, $\beta_g(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e 1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Portanto, $x \in R^\beta$. $\square$

Definição 2.1.4. *[3, Section 3] O skew anel de grupoide $R \star_\beta \mathcal{G}$* correspondente à ação β é definido como a soma direta $R\star_\beta \mathcal{G} = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} E_g u_g$, onde os $u_g' s$ são símbolos com a adição usual e multiplicação dada por

$$(xu_g)(yu_h) = \begin{cases} x\beta_g(y1_{g^{-1}})u_{gh}, & \text{se } (g,h) \in \mathcal{G}^2 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $g, h \in \mathcal{G}$, $x \in E_g$ e $y \in E_h$.

Observação 2.1.5. *[3, Remark 3.2]* O skew anel de grupoide é uma K-álgebra associativa. Além disso, $R \star_\beta \mathcal{G}$ é unitário, com unidade $1_{R\star_\beta\mathcal{G}} := \sum_{e\in\mathcal{G}_0} 1_e u_e$.

Consideremos a aplicação $\varphi : R \longrightarrow R \star_\beta \mathcal{G}$ definida por $\varphi(r) = r1_{R\star_\beta\mathcal{G}}$, para todo $r \in R$. Notemos que, φ é um homomorfismo injetor de K-álgebras. De fato, sejam $r, s \in R$. Então, $\varphi(rs) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} rs1_e u_e$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi(r)\varphi(s) = (r1_{R\star_\beta\mathcal{G}})(s1_{R\star_\beta\mathcal{G}}) &= \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} r1_e u_e\right)\left(\sum_{e'\in\mathcal{G}_0} s1_{e'} u_{e'}\right) \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{e'\in\mathcal{G}_0} r1_e u_e s1_{e'} u_{e'} = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r1_e u_e s1_e u_e \\
&= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r1_e \beta_e(s1_e) u_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r1_e s1_e u_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} rs1_e u_e.
\end{aligned}$$

Assim, $\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s)$, para quaisquer $r, s \in R$. Logo, φ é um homomorfismo de K-álgebras. Além disso, é fácil ver que φ é um homomorfismo de K-módulos e é injetiva. Consequentemente, podemos identificar R com sua imagem em $R \star_\beta \mathcal{G}$.

Podemos ainda induzir uma estrutura de R-módulo à esquerda em $R \star_\beta \mathcal{G}$ via:

$$r \cdot \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right) = \varphi(r)\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right),$$

para todo $r \in R$ e $\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g \in R \star_\beta \mathcal{G}$. Mais explicitamente,

$$r \cdot \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right) = \varphi(r)\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right) = \left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e u_e\right)\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)$$

$$= \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\sum_{g\in\mathcal{G}} r_e u_e x_g u_g = \sum_{g\in\mathcal{G}} (r1_{r(g)}u_{r(g)})x_g u_g$$
$$= \sum_{g\in\mathcal{G}} r1_{r(g)}\beta_{r(g)}(x_g)u_{r(g)g} = \sum_{g\in\mathcal{G}} r1_{r(g)}x_g u_g = \sum_{g\in\mathcal{G}} r x_g u_g.$$

Além disso, $R \star_\beta \mathcal{G}$ é também um R-módulo à direita via:

$$\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)\cdot r = \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)\varphi(r),$$

para todo $r \in R$ e $\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g \in R \star_\beta \mathcal{G}$. Mais explicitamente,

$$\left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)\cdot r = \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)\varphi(r) = \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g\right)\left(\sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e u_e\right)$$
$$= \sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_g u_g r_e u_e = \sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g r 1_{d(g)} u_{d(g)}$$
$$= \sum_{g\in\mathcal{G}} x_g \beta_g(r1_{d(g)})u_{gd(g)} = \sum_{g\in\mathcal{G}} x_g\beta_g(r1_{g^{-1}})u_g,$$

já que $E_{g^{-1}} = E_{d(g)}$ e assim $1_{g^{-1}} = 1_{d(g)}$.

A seguir apresentaremos a definição de extensão de Galois e o teorema de equivalências de extensões de Galois para ações de grupoides.

Definição 2.1.6. *[4, Section 5]* Dizemos que R é uma *extensão β-Galois* de R^β se existem $\{x_i, y_i \in R \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ tais que $\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\delta_{g,e}1_e$, para quaisquer $g \in \mathcal{G}$ e $e \in \mathcal{G}_0$. O conjunto $\{x_i, y_i\}_{1\leq i\leq n}$ é chamado *sistema de coordenadas de Galois* de R sobre R^β.

Observação 2.1.7. Quando for necessário especificar qual é o grupoide, então usamos a expressão *R é uma extensão de Galois de R^β com grupoide de Galois $\mathcal{G}$.*

Exemplo 2.1.8. Sejam $\mathcal{G} = \{d(g), r(g), g, g^{-1}\}$ e $R = Ke_1 \oplus Ke_2$, onde K é um anel com unidade e e_1 e e_2 são idempotentes dois a dois ortogonais cuja a soma é 1_R. Consideremos $E_{d(g)} = E_{g^{-1}} = Ke_1$, $E_{r(g)} = E_g = Ke_2$ e definimos $\beta_{d(g)} = Id_{E_{d(g)}}$, $\beta_{r(g)} = Id_{E_{r(g)}}$, $\beta_g(ae_1) = ae_2$ e $\beta_{g^{-1}}(ae_2) = ae_1$, para quaisquer $a, b \in K$. Podemos ver facilmente que $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação de $\mathcal{G}$ sobre R. Além disso, o conjunto $\{e_i, e_i\}_{1\leq i\leq 2}$ é o sistema de coordenadas de Galois de R sobre R^β. Com efeito, como

$$e_1\beta_g(e_1 1_{g^{-1}}) + e_2\beta_g(e_2 1_{g^{-1}}) = e_1e_2 = 0,$$

$$e_1\beta_{g^{-1}}(e_1 1_g) + e_2\beta_{g^{-1}}(e_2 1_g) = e_2e_1 = 0,$$

$$e_1\beta_{r(g)}(e_1 1_{r(g)}) + e_2\beta_{r(g)}(e_2 1_{r(g)}) = e_2e_2 = e_2,$$

$$e_1\beta_{d(g)}(e_1 1_{d(g)}) + e_2\beta_{d(g)}(e_2 1_{d(g)}) = e_1e_1 = e_1.$$

Então, $\sum_{i=1}^{2} e_i\beta_h(e_i 1_{h^{-1}}) = \sum_{f\in\mathcal{G}_0} \delta_{h,f} 1_f$, para todo $h \in \mathcal{G}$ e $f \in \mathcal{G}_0$.

Definição 2.1.9. *[27, Section 2]* Dizemos que R é uma *álgebra de Galois* (ou simplesmente *β-Galois*) sobre R^β se R é uma extensão β-Galois de R^β tal que $R^\beta \subseteq C(R)$. Mais ainda, R é dita uma *álgebra de Galois central* (ou simplesmente *β-Galois central*) se $R^\beta = C(R)$.

Definição 2.1.10. Dizemos que R é uma *extensão Azumaya Galois* (ou simplesmente *Azumaya β-Galois*) se R é uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma $C(R)^\beta$-álgebra de Azumaya, onde β é a ação de $\mathcal{G}$ sobre R.

Lembremos que $End(R)_{R^\beta}$ denota o conjunto dos endomorfismos de R que são R^β-lineares à direita.

Para qualquer $R \star_\beta \mathcal{G}$-módulo à esquerda M definimos:

$$M^{\mathcal{G}} = \{m \in M \mid (1_g u_g)m = 1_g m, \text{ para todo}\, g \in \mathcal{G}\}$$

como sendo o conjunto dos *invariantes* de M sobre $\mathcal{G}$. Se M é um $R \star_\beta \mathcal{G}$-módulo à esquerda, necessariamente M é também um R-módulo à esquerda via:

$$r \cdot m = \psi(r)m,$$

para todo $r \in R$ e $m \in M$, onde $\varphi : R \longrightarrow R \star_\beta \mathcal{G}$ é o homomorfismo injetor de K-álgebras definido por $\varphi(r) = r1_{R\star_\beta\mathcal{G}}$.

Teorema 2.1.11. *[4, Theorem 5.3] As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *R é uma extensão β-Galois de R^β;*

(ii) *R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado e a aplicação $j : R \star_\beta \mathcal{G} \longrightarrow End(R)_{R^\beta}$ dada por $j(\sum_{g\in\mathcal{G}} a_g u_g)(x) = \sum_{g\in\mathcal{G}} a_g \beta_g(x 1_{g^{-1}})$, para todo $x \in R$, é isomorfismo de anéis e de R-módulos à esquerda;*

(iii) *Para qualquer $R \star_\beta \mathcal{G}$-módulo M, a aplicação $\mu : R \otimes_{R^\beta} M^{\mathcal{G}} \longrightarrow M$ dada por $\mu(x \otimes m) = xm$ é isomorfismo de R-módulos à esquerda;*

(iv) *A aplicação $\phi : R \otimes_{R^\beta} R \longrightarrow \prod_{g\in\mathcal{G}} E_g$ dada por $\phi(x \otimes y) = (x\beta_g(y1_{g^{-1}}))_{g\in\mathcal{G}}$ é isomorfismo de R-módulos à esquerda;*

(v) *$RtR = R \star_\beta \mathcal{G}$, onde $t = \sum_{g\in\mathcal{G}} 1_g u_g$;*

(vi) *A aplicação $\tau' : R \otimes_{R^\beta} R \longrightarrow R \star_\beta \mathcal{G}$ dada por $\tau'(x \otimes y) = \sum_{g\in\mathcal{G}} x\beta_g(y1_{g^{-1}})\delta_g$ é sobrejetora;*

(vii) *R é gerador para a categoria dos $R \star_\beta \mathcal{G}$-módulos à esquerda, ou seja, R é um $End(R)_{R\star_\beta\mathcal{G}}$-módulo à direita projetivo finitamente gerado e $R \star_\beta \mathcal{G} \simeq End(R)_{End(R)_{R\star_\beta\mathcal{G}}}$.*

Observação 2.1.12. Notemos que se R é uma extensão β-Galois de R^β, então R é uma extensão separável de R^β, como foi provado em [14].

A proposição a seguir é um caso particular de [6, Proposition 2.9], porém enunciaremos e provaremos no caso em que estaremos interessados aqui, a saber o caso em que $\mathcal{G}$ é uma união disjunta de grupos.

Proposição 2.1.13. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$. Então R é uma extensão β-Galois de R^β se e somente se E_e é extensão de Galois de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ com grupo de Galois $\mathcal{G}_e$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$.*

Demonstração. Suponhamos que R é uma extensão β-Galois de R^β. Então existem $x_i, y_i \in R$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{g,e}1_e$, para quaisquer $g \in \mathcal{G}$ e $e \in \mathcal{G}_0$. Para cada $e \in \mathcal{G}_0$ escolhemos $x_i' = x_i 1_e$ e $y_i' = y_i 1_e$. Assim, para todo $g \in \mathcal{G}_e$,

$$\sum_{i=1}^n x_i'\beta_g(y_i'1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^n x_i 1_e \beta_g(y_i 1_e 1_{d(g)}) = \sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i 1_e)$$
$$= \delta_{g,e}1_e = \delta_{g,e}.$$

Portanto, E_e é extensão de Galois de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. Reciprocamente, suponhamos que E_e é extensão de Galois de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. Então, para cada $e \in \mathcal{G}_0$ existem $x_{e,i}, y_{e,i} \in E_e$, $1 \leq i \leq n$, tais que $\sum_{i=1}^n x_{e,i}\beta_g(y_{e,i}) = \delta_{g,e}1_e$, para todo $g \in \mathcal{G}_e$. Consideremos $x_i = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_{e,i}, y_i = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} y_{e,i} \in R, 1 \leq i \leq n$. Primeiramente, notemos que $x_i 1_g = (\sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_{e,i})1_{r(g)} = x_{r(g),i}$ e $y_i 1_{g^{-1}} = (\sum_{e\in\mathcal{G}_0} y_{e,i})1_{d(g)} = y_{d(g),i}$. Assim, se $g \in \mathcal{G}$, então $g \in \mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$. Logo, $d(g) = r(g) = e'$ e portanto

$$\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \sum_{i=1}^n x_i 1_{r(g)}\beta_g(y_i 1_{d(g)}) = \sum_{i=1}^n x_i 1_{e'}\beta_g(y_i 1_{e'})$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_{e,i}\beta_g(y_{e',i}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0}\left(\sum_{i=1}^n x_{e,i}\beta_g(y_{e',i})\right)$$
$$= \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{g,e}1_e.$$

para todo $g \in \mathcal{G}$ e $e' \in \mathcal{G}_0$. Então, R é extensão β-Galois de R^β. $\square$

Para cada $g \in \mathcal{G}$, consideramos o conjunto

$$J_g = \{r \in E_g \,|\, xr = r\beta_g(x1_{g^{-1}}), \text{ para todo}\, x \in R\}.$$

Notemos que, dados $a \in C(R)$ e $r \in J_g$,

$$y(ra) = (yr)a = (r\beta_g(y1_{g^{-1}}))a = r(\beta_g(y1_{g^{-1}})a) = r(a\beta_g(y1_{g^{-1}})) = (ra)\beta_g(y1_{g^{-1}}),$$

para todo $y \in R$. Assim, podemos induzir uma estrutura de $C(R)$-módulo à direita em J_g. De maneira análoga, induzimos uma estrutura de $C(R)$-módulo à esquerda em J_g.

A seguir vejamos alguns resultados acerca do $C(R)$-módulo à direita J_g definido acima.

Lema 2.1.14. *Sejam $g \in \mathcal{G}$ e $h \in \mathcal{G}_{d(g)}$. Então,*

(i) $J_g J_h \subseteq J_{hg}$;

(ii) $\beta_g(J_h 1_{g^{-1}}) = J_{ghg^{-1}} 1_g$.

Demonstração. *(i)* Seja $r = \sum_i a_i b_i$, onde $a_i \in J_g$ e $b_i \in J_h$. Dado $x \in R$,

$$\begin{aligned} xr = x\left(\sum_i a_i b_i\right) &= \sum_i (xa_i)b_i = \sum_i (a_i \beta_g(x1_{g^{-1}}))b_i \\ &= \sum_i a_i b_i \beta_h((\beta_g(x1_{g^{-1}}))1_{h^{-1}}) = \sum_i a_i b_i \beta_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}}) \\ &= r\beta_{hg}(x1_{(hg)^{-1}}) \end{aligned}$$

Logo, $r \in J_{hg}$.

(ii) Como $h \in \mathcal{G}_{d(g)}$, $d(h) = r(h) = d(g)$. Assim, $\exists hg^{-1}$ e $r(hg^{-1}) = r(h)$. Consequentemente, $\exists ghg^{-1}$. Além disso, notemos que $J_h \subseteq E_h = E_{r(h)} = E_{d(g)} = E_{g^{-1}}$.

Seja $y \in \beta_g(J_h 1_{g^{-1}})$. Então, existe $r \in J_h$ tal que $y = \beta_g(r1_{g^{-1}})$. Dado $z \in R$,

$$\begin{aligned} y\beta_{ghg^{-1}}(z1_{(ghg^{-1})^{-1}}) &= \beta_g(r1_{g^{-1}})\beta_g(\beta_{hg^{-1}}(z1_{gh^{-1}})1_{g^{-1}}) \\ &= \beta_g(r(\beta_{hg^{-1}}(z1_{gh^{-1}}))1_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Como $r \in J_h$, $r\beta_h(\beta_{g^{-1}}(z1_g)1_{h^{-1}}) = \beta_{g^{-1}}(z1_g)r$. Então,

$$\begin{aligned} y\beta_{ghg^{-1}}(z1_{(ghg^{-1})^{-1}}) &= \beta_g((\beta_{g^{-1}}(z1_g)r)1_{g^{-1}}) \\ &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(z1_g)1_{g^{-1}})\beta_g(r1_{g^{-1}}) \\ &= z1_g y1_g = zy. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja $r \in J_{ghg^{-1}}1_g$. Vejamos que, $\beta_{g^{-1}}(r1_g) \in J_h 1_{g^{-1}}$. Dado $y \in R$, como $E_h = E_{g^{-1}}$, $y = \beta_{g^{-1}}(y'1_g)$, com $y' \in E_g$. Então,

$$y\beta_{g^{-1}}(r1_g) = \beta_{g^{-1}}(y'1_g)\beta_{g^{-1}}(r1_g) = \beta_{g^{-1}}(y'r1_g).$$

Como $r \in J_{ghg^{-1}}1_g$, $y'r = r\beta_{ghg^{-1}}(y'1_{(hgh^{-1})^{-1}})$. Assim,

$$\begin{aligned}
y\beta_{g^{-1}}(r1_g) &= \beta_{g^{-1}}((r\beta_{ghg^{-1}}(y'1_{(hgh^{-1})^{-1}}))1_g) \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_{g^{-1}}((\beta_{ghg^{-1}}(y'1_{(hgh^{-1})^{-1}}))1_g) \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_{g^{-1}}((\beta_g(\beta_{hg^{-1}}(y'1_{(hg)^{-1}})1_{g^{-1}})1_g) \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_{g^{-1}g}(\beta_{hg^{-1}}(y'1_{(hg)^{-1}})1_{d(g)}) \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_{hg^{-1}}(y'1_{(hg)^{-1}})1_{r(g)} \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_h((\beta_{g^{-1}}(y'1_g))1_{h^{-1}}) \\
&= \beta_{g^{-1}}(r1_g)\beta_h(y1_{h^{-1}}).
\end{aligned}$$

Então, existe $z = \beta_{g^{-1}}(r1_g) \in J_h1_{g^{-1}}$ tal que $\beta_g(z) = r$. Logo, $r \in \beta_g(J_h1_{g^{-1}})$. $\square$

Lema 2.1.15. $C(R) = \oplus_{e\in\mathcal{G}_0} J_e$.

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $C(R) = \oplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(E_e)$. Com efeito, seja $c \in C(R)$. Assim, $c = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e \in R$, onde $c_e \in E_e$, visto que, $R = \oplus_{e\in G_0} E_e$. Para qualquer $r = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e$, onde $r_e \in E_e$, $cr = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e r_e$. Por outro lado, $rc = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e c_e$. Como $cr = rc$ e pela soma ser direta, temos que $c_e r_e = r_e c_e$, para todo $r_e \in E_e$. Logo, $c_e \in C(E_e)$. Reciprocamente, seja $x \in \oplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(E_e)$. Então, $x = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e$, onde $c_e \in C(E_e)$. Notemos que, $c_e \in C(E_e) \subseteq E_e \subseteq R$. Dado $r \in R$, $r = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e$, onde $r_e \in E_e$. Assim,

$$xr = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e = c_e r_e = r_e c_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e \sum_{e\in G_0} c_e = rx.$$

Logo, $x \in C(R)$.

Por fim, vejamos que $J_e = C(E_e)$. Suponhamos que $r \in J_e$. Dado $x \in E_e$,

$$rx = r\beta_e(x1_e) = xr.$$

Logo, $r \in C(E_e)$. Reciprocamente, suponhamos que $c \in C(E_e)$. Dado $r \in R$,

$r = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} r_e$, onde $r_e \in E_e$. Assim,

$$rc = \left(\sum_{e \in \mathcal{G}_0} r_e \right) c = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} r_e c = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} c r_e = cr = c\beta_e(r1_e).$$

Portanto, $c \in J_e$. $\square$

Observação 2.1.16. Se R é separável sobre $C(R)$, então E_g é separável sobre $C(E_g)$, para cada $g \in \mathcal{G}$. Além disso, E_g é álgebra de Azumaya sobre seu centro. De fato, como $R = \bigoplus_{e \in G_0} E_e$ é separável sobre $C(R) = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} C(E_e)$, pela Proposição 1.1.5, E_e é separável sobre $C(E_e)$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. E pelo Teorema 1.1.12, E_g é álgebra de Azumaya sobre seu centro.

Lema 2.1.17. *[27, Lemma 3.1] Seja R é uma extensão β-Galois de R^β. Então $V_R(R^\beta) = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} J_g$.*

O teorema a seguir, a qual será a apresentado de maneira sucinta, é a primeira parte do teorema da correspondência de Galois no contexto de grupoides, e pode ser encontrado com mais detalhes em [26].

Teorema 2.1.18. *[26, Theorem 4.1] Sejam R uma extensão β-Galois de R^β e $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Então, $\beta_{\mathcal{H}} = (\{E_h\}, \{\beta_h\})_{h \in \mathcal{H}}$ é uma ação de $\mathcal{H}$ sobre R e R é uma extensão $\beta_{\mathcal{H}}$-Galois de $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Além disso, se $\mathcal{H}$ é normal, então $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ age sobre $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ via uma ação $\bar{\beta}$ e $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é uma extensão $\bar{\beta}$-Galois de R^β.*

Consideremos o subgrupoide $\mathcal{G}$ dado por:

$$\mathcal{H}_{C(R)} = \{g \in \mathcal{G} \mid \beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo}\, x \in C(R)\}$$

de $\mathcal{G}$. Lembremos que pelo Lema 1.2.16, $\mathcal{H}_{C(R)}$ é um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Além disso, $\mathcal{H}_{C(R)}$ é uma união disjunta de grupos, como mostra o seguinte resultado.

Lema 2.1.19. $\mathcal{H}_{C(R)} \subset \coprod_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$.

Demonstração. Suponhamos que $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$ não pertence a $\mathcal{G}_{e'}$ para nenhum $e' \in \mathcal{G}_0$. Assim, $\beta_h(c1_{h^{-1}}) = c1_h$, para todo $c \in C(R)$ e $r(h) \neq d(h)$. Notemos que $1_h \in C(R)$, pois dado $x \in R$, $x = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e$, onde $x_e \in E_e$ então

$$1_h x = 1_h \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e = 1_{r(h)} \sum_{e\in\mathcal{G}_0} x_e = 1_{r(h)} x_{r(h)} = x_{r(h)}.$$

Analogamente, $x1_h = x_{r(h)}$. Logo, $\beta_h(1_h 1_{h^{-1}}) = 0$ e, por outro lado, $1_h 1_h = 1_h$, o que é um absurdo. Portanto, $\mathcal{H}_{C(R)} \subset \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$. $\square$

O subgrupoide $\mathcal{H}_{C(R)}$ será extremamente importante para o desenvolvimento do Capítulo 4, pois daremos uma caracterização para extensões Azumaya $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois. Sendo assim, apresentaremos a seguir alguns resultados envolvendo este subgrupoide.

Proposição 2.1.20. *Seja R uma álgebra β-Galois de R^β e consideremos o subgrupoide de $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}_{C(R)} = \{g \in \mathcal{G} \mid \beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo } x \in C(R)\}$. Então R é uma álgebra $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois central, onde $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é ação de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre R, se e somente se, $J_g = \{0\}$, para todo $g \in \mathcal{G}$ tal que $g \notin \mathcal{H}_{C(R)}$. Além disso, $C(R)$ é álgebra $\bar{\beta}$-Galois de R^β, onde $\bar{\beta}$ é ação de $\mathcal{G}/\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre $C(R)$.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que como R é álgebra β-Galois de R^β, pelo Lema 2.1.17, sabemos que $V_R(R^\beta) = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} J_g$, e pela Proposição 1.1.14, temos que $V_R(R^\beta) = R$. Logo,

$$R = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} J_g = \left(\bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{g\notin\mathcal{H}_{C(R)}} J_g \right).$$

Agora suponhamos que R é uma álgebra $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois central, onde $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é ação de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre R. Então, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = C(R)$. Assim, dado $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$, $\beta_h(C(R)1_{h^{-1}}) \subseteq C(R)1_g$, logo pelo Lema 1.2.20, $\mathcal{H}_{C(R)}$ é normal. Portanto, pelo Teorema 2.1.18, $C(R)$ é álgebra $\bar{\beta}$-Galois de R^β. Além disso, ainda por R é uma álgebra $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois central, pelo Lema 2.1.17, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}) = \bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g$. Logo, $R = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})$, já que $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = C(R)$. Consequentemente, $J_g = \{0\}$, para $g \notin \mathcal{H}_{C(R)}$. Reciprocamente, suponhamos que $J_g = \{0\}$, para todo $g \in \mathcal{G}$ tal que $g \notin \mathcal{H}_{C(R)}$. Assim, $R = \bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g$. Sabemos pelo Lema 1.2.16 que $\mathcal{H}_{C(R)}$ é amplo. Então, pelo Teorema 2.1.18, R é uma extensão $\beta_{\mathcal{H}}$-Galois de $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ e pelo Lema 2.1.17, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}) = \bigoplus_{g\in\mathcal{H}} J_g$. Logo, $R = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}})$. De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, $R^{\beta_{\mathcal{H}}} = C(R)$. Portanto, R é uma álgebra $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois central. $\square$

Lema 2.1.21. *$E_gJ_g = J_gE_g = E_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que $E_gJ_g = J_gE_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Seja $x = \sum_i x_iy_i \in E_gJ_g$, onde $x_i \in E_g, y_i \in J_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Então,

$$x = \sum_i x_iy_i = \sum_i y_i\beta_g(x_i1_{g^{-1}}) \in J_gE_g,$$

para cada $g\in\mathcal{H}_{C(R)}$. Reciprocamente, seja $x=\sum_i x_iy_i \in J_gE_g$ onde $x_i\in J_g$ e $y_i\in E_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Como $y_i \in E_g$, existe $y_i' \in E_{g^{-1}}$ tal que $\beta_g(y_i'1_{g^{-1}}) = y_i1_g$. Então,

$$x = \sum_i x_iy_i = \sum_i x_i\beta_g(y_i'1_{g^{-1}}) = \sum_i y_i'x_i \in E_{g^{-1}}J_g, \tag{2.1}$$

para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Como $\mathcal{H}_{C(R)} \subset \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$, temos que $g \in \mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$. Assim, $d(g) = r(g) = e'$ e consequentemente $E_{g^{-1}} = E_g$. Logo, de (2.1), $x \in E_gJ_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Afirmação. $E_gJ_g = E_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Pela Observação 2.1.16, E_g é separável sobre $C(E_g)$, para cada $g \in \mathcal{G}$. Pelo Teorema 1.1.3, para todo $(E_g)^e$-módulo $M, \psi : E_g \otimes_{C(E_g)} M^{E_g} \longrightarrow M$ dada por $\psi(\sum_{i=1}^n s_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^n s_ir_i$ é um isomorfismo de $C(E_g)$-módulos, onde M é um E_g-bimódulo e $M^{E_g} = \{m \in M \mid rm = mr, \text{ para todo } r \in E_g\}$.

Notemos que, E_g é um E_g-módulo à direita via $x \cdot s = x\beta_g(s1_{g^{-1}})$, para todo $x, s \in E_g$ e $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$, pois dados $x, y, s, s' \in E_g$,

$$\begin{aligned} x \cdot (ss') &= x(\beta_g(ss'1_{g^{-1}})) = x\beta_g(s1_{g^{-1}})\beta_g(s'1_{g^{-1}}) \\ &= (x\beta_g(s1_{g^{-1}})) \cdot s' = (x \cdot s) \cdot s' \end{aligned}$$

e,

$$1_g \cdot_l s = s\beta_g(1_g 1_{g^{-1}}) = s\beta_g(1_g) = s1_g = s.$$

Como β_g é um isomorfismo, $(x+y) \cdot_l s = x \cdot_l s + y \cdot_l s$ e $x \cdot_l (s + s') = x \cdot_l s + x \cdot_l s'$. Temos ainda que E_g é um E_g-módulo à esquerda via a sua própria multiplicação, $s \cdot x = sx$, para todo $x, s \in E_g$ e $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Denotaremos a ação de E_g como E_g-módulo à direita por $\cdot_r$ e a ação de E_g como E_g-módulo à esquerda por $\cdot_l$. Além disso,

$$\begin{aligned} (s \cdot_l x) \cdot_r s' &= (sx) \cdot_r s' = sx\beta_g(s'1_{g^{-1}}) = s \cdot_l (x\beta_g(s'1_{g^{-1}})) \\ &= s \cdot_l (x \cdot_r s') \end{aligned}$$

para quaisquer $x, s, s' \in E_g$ $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Logo, E_g é um E_g-bimódulo. Escolhendo $M = E_g$, então $E_g \otimes_{C(E_g)} E_g^{E_g} \simeq E_g$. Provemos agora que $E_g^{E_g} = J_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Seja $x \in E_g^{E_g}$. Então, $s \cdot_l x = x \cdot_r s$, para todo $s \in E_g$. Consequentemente, $sx = x\beta_g(s1_{g^{-1}})$, para todo $s \in E_g$. Logo, $x \in J_g$. Reciprocamente, seja $s \in J_g$. Então, $xs = s\beta_g(x1_{g^{-1}})$, para todo $x \in E_g$. Em particular,

$$x \cdot_l s = xs = s\beta_g(x1_{g^{-1}}) = s \cdot_r x$$

Logo, $s \cdot_r r = x \cdot_l s$, para todo $x \in E_g$. Portanto, $s \in E_g^{E_g}$

Por fim, como $E_g \otimes_{C(E_g)} J_g \simeq E_g$, dado $x \in E_g$, existe $\sum_{i=1}^n s_i \otimes r_i \in E_g \otimes_{C(E_g)} J_g$ tal que $x = \sum_{i=1}^n s_i r_i$. Logo, $x \in E_g J_g$. A recíproca é clara. $\square$

Proposição 2.1.22. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupoide tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$ e R uma R^β-álgebra separável. Se $R = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} J_g$ e $J_{g^{-1}} J_g = C(E_g)$, para cada $g \in \mathcal{G}_e$, então R é uma extensão β-Galois central.*

A demonstração desta proposição é uma consequência da Proposição 2.1.13 e do seguinte resultado:

Proposição 2.1.23. *[17, Theorem 1] Seja A uma K-álgebra separável com grupo de Galois G. Se $A = \bigoplus_{\sigma\in G} J_\sigma$ e $J_\sigma J_{\sigma^{-1}} = C(A)$, para cada $g \in G$, então A é uma extensão de Galois central com grupo de Galois G.*

Demonstração da Proposição 2.1.22. Inicialmente, notemos que $E_e = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}_e} J_g$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Seja $x \in E_g$, como $x \in R$, temos que $x = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} x_g$ e por E_e ser um ideal de R, segue que

$$x = 1_e x 1_e = 1_e \left(\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g\right) 1_e = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} x_g \in \sum_{g\in\mathcal{G}_e} J_g.$$

Por outro lado, dado $x = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} x_g \in \bigoplus_{g\in\mathcal{G}_e} J_g$. Como $x_g \in J_g \subseteq E_g = E_e$, para cada $g \in \mathcal{G}_e$, segue que $x \in E_e$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$.

Mostremos agora a seguinte afirmação:

Afirmação 1. $C(E_e) = E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$.

Sejam $g \in \mathcal{G}_e$ e $c \in C(E_e)$. Assim, $cy_g = y_g c$, para todo $y_g \in J_g$ e consequentemente $cy_g = y_g\beta_g(c1_{g^{-1}})$. Então, $y_g(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g) = 0$, para todo $y_g \in J_g$. Logo, $J_g(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g) = \{0\}$. Notemos que,

$$C(E_g)(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g) = J_{g^{-1}}J_g(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g) = J_{g^{-1}}(J_g(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g).$$

Portanto, $C(E_g)(\beta_g(c1_{g^{-1}}) - c1_g) = \{0\}$ e assim $\beta_g(c1_{g^{-1}})) = c1_g$. Logo, $c \in E_e^{\mathcal{G}_e}$. Reciprocamente, sejam $x \in E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ e $y \in E_e$. Como $E_e = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}_e} J_g$, em particular, $y = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} y_g$. Então,

$$xy = x\sum_{g\in\mathcal{G}_e} y_g = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} y_g\beta_g(x1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in\mathcal{G}_e} y_g x 1_g = yx.$$

Assim, pela Afirmação 1 e pelo Lema 2.1.3, $R^\beta = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(E_e)$. Desde que R é uma R^β-álgebra separável, temos que $\bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$ é $\bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(E_e)$-álgebra separável. Logo, pela Proposição 1.1.5, E_e é $C(E_e)$-álgebra separável.

Como E_e é $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$-álgebra separável, $E_e = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}_e} J_g$ e $J_{g^{-1}} J_g = C(E_g)$, para cada $g \in \mathcal{G}_e$, segue da Proposição 2.1.23 que E_e é uma extensão de Galois central com grupo de Galois $\mathcal{G}_e$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Logo, pela Proposição 2.1.13, R é extensão β-Galois de R^β. Finalmente, $R^\beta = C(R)$ pois

$$R^\beta = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}} = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_0} C(E_e) = C(R).$$

A última igualdade segue da demonstração do Lema 2.1.15. □

Terminamos esta seção enunciando um resultado a respeito de extensões Hirata-separáveis.

Proposição 2.1.24. *[27, Lemma 3.4] Se R é uma extensão Hirata-separável de R^β, então $J_h J_g = J_{gh}$, para cada $g, h \in \mathcal{G}$ tal que $d(g) = r(h)$. Em particular, $J_{g^{-1}} J_g = V_{E_g}(R)$ e $J_g \neq \{0\}$, para todo $g \in \mathcal{G}$.*

2.2 Extensão fracamente β-Galois

Em [33], O. E. Villamayor e D. Zelinsky introduziram o conceito de extensão fracamente Galois e desenvolveram uma Teoria de Galois fraca semelhante a feita por S. U. Chase, D. K. Harrison e A. Rosenberg em [10] para extensões de Galois. Posteriormente, M. Harada, em [18], apresentou uma equivalência para extensões fracamente Galois. Essencialmente, R é uma extensão fracamente Galois se e somente se R pode ser escrito como uma soma direta dos J_g, para $g \in H$, onde H é um subconjunto finito do grupo G.

Nesta seção iremos introduzir o conceito de extensão fracamente Galois para o contexto de grupoides e iremos ver alguns resultados importantes sobre esse conceito.

Definição 2.2.1. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito que age sobre R por isomorfismos parciais. Dizemos que R é uma *extensão fracamente Galois* de R^β com grupoide de Galois $\mathcal{G}$ (ou simplesmente *extensão fracamente β-Galois*) se satisfaz as seguintes condições:

(i) R é um R^β-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado;

(ii) $\rho(E_e)\mathcal{G}_e \simeq Hom_{E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$, onde $\mathcal{G}_e \subseteq Aut(E_e)$ é o grupo de isotropia de $\mathcal{G}$ e $\rho : E_e \longrightarrow Hom_{E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$ é a representação regular à esquerda dada por $\rho(x_e)(y_e) = x_e y_e$, para quaisquer $x_e, y_e \in E_e$. Denotaremos a imagem da representação regular à esquerda $\rho(E_e)$ por $(E_e)_l$.

Observação 2.2.2.

1. A condição *(ii)* da Definição 2.2.1 nos diz que o E_e-módulo $Hom_{E^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$ é gerado por $E^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$-automorfismos de E_e, para cada $e \in \mathcal{G}_0$;

2. De maneira análoga, podemos considerar a representação regular à direita, $\rho : E_e \longrightarrow Hom_{E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$ $\rho(x_e)(y_e) = y_e x_e$, para quaisquer $x_e, y_e \in E_e$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$, e neste caso, denotaremos $\rho(E_e)$ por $(E_e)_r$.

Lema 2.2.3. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$. Então R é uma extensão fracamente β-Galois de R^β se e somente se E_e é extensão fracamente Galois de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ (no sentido de grupos), para cada $e \in \mathcal{G}_0$.*

Demonstração. Primeiramente, lembremos que $R = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$ e pelo Lema 2.1.3, $R^\beta = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$. Assim, R é um módulo projetivo finitamente gerado sobre R^β se e somente se cada E_e é modulo projetivo finitamente gerado sobre $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$.

Agora, suponhamos que R é uma extensão fracamente β-Galois. Então, R é um módulo projetivo finitamente gerado sobre R^β e $(E_e)_l\mathcal{G}_e \simeq Hom_{E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Logo, E_e é extensão fracamente Galois de $E^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Reciprocamente, se E_e é extensão fracamente Galois de $E^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ então E_e é um módulo projetivo finitamente gerado sobre $E^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ e $(E_g)_l\mathcal{G}_e \simeq Hom_{E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}}(E_e, E_e)$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Portanto, R é extensão fracamente β-Galois de R^β. $\square$

Nosso objetivo a partir de agora é mostrar que uma extensão β-Galois é também uma extensão fracamente β-Galois e apresentar um exemplo de que a recíproca em geral não é válida. Para isso iremos considerar $\mathcal{G}$ um grupoide finito tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$ e usar a equivalência estabelecida no Lema 2.2.3, ou seja, faremos tal estudo analisando E_e como extensão de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Nesse contexto, o estudo de extensões fracamente Galois se reduz ao estudo de extensões fracamente Galois no caso de grupos. Com isso, enunciamos os seguintes resultados, os quais serão utilizados para concluir nosso objetivo.

Teorema 2.2.4. *[18, Theorem 1] Seja R uma K-álgebra. Se R uma extensão de Galois de K com grupo de Galois G (finito), então R é uma extensão fracamente Galois de $C(R)$, onde $C(R)$ é o centro de R.*

Corolário 2.2.5. *[18, Section 2] Seja R uma K-álgebra. Então R é uma extensão fracamente Galois de K se e somente se $R = \sum_{\sigma \in H} J_\sigma$, onde H é subconjunto finito do grupo G.*

Proposição 2.2.6. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide finito tal que $\mathcal{G} = \coprod_{e \in \mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$. Se R é extensão β-Galois de R^β, então R é extensão fracamente β-Galois de $C(R)$.*

Demonstração. Suponhamos que R é extensão β-Galois de R^β. Pela Proposição 2.1.13, E_e é extensão de Galois de $E_e^{\beta_{\mathcal{G}_e}}$ com grupo de Galois $\mathcal{G}_e$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Assim, pelo Teorema 2.2.4, E_e é extensão fracamente Galois de $C(E_e)$. Logo, pelo Lema 2.2.3, R é extensão fracamente β-Galois de $C(R)$. $\square$

Exemplo 2.2.7. Sejam $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ com $\mathcal{G}_0 = \{g_1, g_2\}$, $g_3^{-1} = g_3, g_3g_3 = g_2$ e $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \oplus \mathbb{Z}$. Consideremos $E_{g_1} = \mathbb{Z}$, $E_{g_2} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = E_{g_3}$ e definimos $\beta_{g_1} = Id_{\mathbb{Z}}$, $\beta_{g_2} = Id_{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}$ e $\beta_{g_3}(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$. Podemos ver facilmente que $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ é uma ação de $\mathcal{G}$ sobre R e $R^\beta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Vejamos que R não é uma extensão β-Galois de R^β. Notemos que, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ não é separável sobre $\mathbb{Z}$. Assim, pela Proposição 1.1.5, R não é separável sobre R^β. Logo, pela Observação 2.1.12, R não é β-Galois sobre R^β. Além disso, observemos ainda que $\mathcal{G}_{g_1} = \{g_1\}$, $\mathcal{G}_{g_2} = \{g_2, g_3\}$ e vejamos que $J_{g_2} = E_{g_2}$ e $J_{g_3} = \{0\}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
J_{g_2} &= \{r \in E_{g_2} \,|\, xr = r\beta_{g_2}(x1_{g_2^{-1}}), \text{ para todo } x \in R\} \\
&= \{r \in E_{g_2} \,|(a + b\sqrt{2}, y)r = r\beta_{g_2}(a + b\sqrt{2})r, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{r \in E_{g_2} \,|(a + b\sqrt{2})r = r(a + b\sqrt{2}), \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{Z}\} = E_{g_2}.
\end{aligned}$$

E dado $r = a + b\sqrt{2} \in J_{g_3}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$, então $xr = r\beta_{g_3}(x1_{g_3^{-1}})$, para todo $x \in R$. Em particular, se $x = \sqrt{2} \in R$ temos que

$$r\beta_{g_3}(x1_{g_3^{-1}}) = (a + b\sqrt{2})\beta_{g_3}(\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{2})(-\sqrt{2}).$$

Por outro lado, $xr = (\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})$. Logo, $a = b = 0$. Sendo assim, considerando $H = \mathcal{G}_{g_2}$, $E_{g_2} = J_{g_2} \oplus J_{g_3} = \bigoplus_{\substack{r(h)=g_2,\\ h\in H}} J_h$. Logo, pelo Corolário 2.2.5, E_e é extensão fracamente Galois, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Portanto, pelo Lema 2.2.3, R é extensão fracamente β-Galois.

Finalizaremos esta seção com as seguintes definições.

Definição 2.2.8. Dizemos que R é uma *álgebra fracamente Galois* com grupoide de Galois $\mathcal{G}$ (ou simplesmente *álgebra fracamente β-Galois*) se R é uma extensão fracamente Galois de R^β com grupoide de Galois $\mathcal{G}$ tal que $R^\beta \subseteq C(R)$.

Definição 2.2.9. Dizemos que R é uma *álgebra fracamente Galois central* com grupoide de Galois $\mathcal{G}$ (ou simplesmente *álgebra fracamente β-Galois central*) se

R é uma extensão fracamente Galois de R^β com grupoide de Galois $\mathcal{G}$ tal que $R^\beta = C(R)$.

Capítulo 3

A aplicação de Galois e suas aplicações induzidas

Neste capítulo daremos condições para que a aplicação de Galois seja injetiva, estendendo os resultados de [32] para contexto de grupoides finitos. Os resultados apresentados neste capítulo estão publicados em [28].

Consideraremos neste capítulo, $\mathcal{G}$ um grupoide finito, K um anel comutativo, R uma K-álgebra, $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre a álgebra R tal que $R = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$, onde cada E_e é uma álgebra com unidade $1_e \neq 0$ e $C(R)$ é o centro de R.

3.1 Aplicações induzidas pela aplicação de Galois

Seja R uma extensão β-Galois de R^β. Dado um subgrupoide amplo $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$, considere $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_\mathcal{H}}$ a aplicação de Galois dos subgrupoides amplos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ nas R^β-subálgebras separavéis de R.

Consideremos R uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Seja $\mathcal{H}$ um subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Definimos os seguintes conjuntos, $S_\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{H} \,|\, J_g \neq \{0\}\}$, $T_\mathcal{H} = \{g \in \mathcal{H} \,|\, J_g = \{0\}\}$ e $\overline{\mathcal{H}} = \{\mathcal{L} \,|\, \mathcal{L}$ é subgrupoide $\mathcal{G}$ e $S_\mathcal{L} = S_\mathcal{H}\}$, e duas aplicações $\sigma : \mathcal{H} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\gamma : \mathcal{H} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ induzidas pela aplicação de Galois $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_\mathcal{H}}$.

Queremos mostrar que as aplicações $\overline{\sigma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\overline{\gamma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ são aplicações injetivas do conjunto $\mathcal{A} = \{\, \overline{\mathcal{H}} \,|\, \mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}\}$ no conjunto $\mathcal{B} = \{T \,|\, T$ é $C(R)$-subálgebra separável de $R\}$. Para isso, vamos enunciar e provar alguns resultados auxiliares.

Lema 3.1.1. *Sejam R uma extensão β-Galois de R^β e $K = C(R)^\beta$. Se R^β é um álgebra separável sobre K, então $R \star_\beta \mathcal{G}$ é uma álgebra separável sobre K.*

Demonstração. Como R é uma extensão β-Galois de R^β pelo Teorema 2.1.11, R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado e $End_{R^\beta}(R) \simeq R \star_\beta \mathcal{G}$. Pelo Teorema 1.1.7, $End_{R^\beta}(R)$ é uma álgebra separável sobre K. Consequentemente, $R \star_\beta \mathcal{G}$ é uma álgebra separável sobre K. □

Lema 3.1.2. *Seja R uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Então, $R^{\beta_\mathcal{H}}$ é separável sobre $C(R)^\beta$, para cada $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, onde $\beta_\mathcal{H} = (\{E_h\}, \{\beta_h\})_{h\in\mathcal{H}}$ é a ação de $\mathcal{H}$ sobre R induzida pela ação de $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Como R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$, pelo Lema 3.1.1, $R \star_\beta \mathcal{G}$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Notemos que $\mathcal{G} = \coprod g\mathcal{H}$, onde $g\mathcal{H} = \{gh \,|\, h \in \mathcal{H} \,\mathrm{e}\, d(g) = r(h)\}$. Assim, podemos reescrever

$$\mathcal{G} = \left(\coprod_{j=1}^{m} e_i\mathcal{H}\right) \coprod \left(\coprod_{i=1}^{n} g_i\mathcal{H}\right) = \left(\coprod_{j=1}^{m} \mathcal{H}e'_j\right) \coprod \left(\coprod_{i=1}^{n} \mathcal{H}g'_i\right),$$

$e_j, e'_j \in \mathcal{G}_0$, para todo $1 \leq j \leq n$.

Afirmação 1: $R \star_\beta \mathcal{G} = R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \oplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i}$.

Seja $g \in \mathcal{G}$, existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $g = hg'_i$ com $d(h) = r(g'_i), 1 \leq i \leq n$. Então, dado $\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g \in R \star_\beta \mathcal{G}$ segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in\mathcal{G}} x_g u_g &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{h\in\mathcal{H},\\ d(h)=e'_j}} x_{he'_j} u_{he'_j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{l\in\mathcal{H},\\ d(l)=r(g'_i)}} x_{lg'_i} u_{lg'_i} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{h\in\mathcal{H},\\ d(h)=e'_j}} x_{hd(h)} u_{hd(h)} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{l\in\mathcal{H},\\ d(l)=r(g'_i)}} x_{lg'_i} u_{lg'_i} \\
&= \sum_{h\in\mathcal{H}} x_h u_h + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{l\in\mathcal{H},\\ d(l)=r(g'_i)}} x_{lg'_i} u_l u_{g'_i} \in R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} + \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i}.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, como $R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \subseteq R \star_\beta \mathcal{G}$, então $R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \oplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_\beta \mathcal{H}) u_{g'_i} \subseteq R \star_\beta \mathcal{G}$.

Analogamente, podemos ver que $R \star_\beta \mathcal{G} = R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus_{i=1}^{n} u_{g_i} (R \star_\beta \mathcal{H})$. Portanto

$$R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \oplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_\beta \mathcal{H}) u_{g'_i} = R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \oplus \sum_{i=1}^{n} u_{g_i} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})$$

e, consequentemente, $\sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{g_i} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})$.

Afirmação 2: $R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}$ é separável sobre $C(R)^\beta$.

Claramente, $R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}$ é uma subálgebra de $R \star_\beta \mathcal{G}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(R \star_\beta \mathcal{G})^e &= R \star_\beta \mathcal{G} \otimes_{C(R)^\beta} (R \star_\beta \mathcal{G})^o \\
&= \left(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i} \right) \otimes_{C(R)^\beta} \left(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i} \right)^o \\
&= \left(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) u_{g'_i} \right) \otimes_{C(R)^\beta} \left((R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^o \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^o u^o_{g'_i} \right) \\
&= \left(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) \right) u_{g'_i} \otimes_{C(R)^\beta} \left((R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^o \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^o \right) u^o_{g'_i} \\
&= \left(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}) \right)^e (u_{g'_i} \otimes u^o_{g'_i}).
\end{aligned}$$

Assim $(R \star_\beta \mathcal{G})^e$ é um $(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H} \bigoplus \sum_{i=1}^{n} (R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H}))^e$-módulo à esquerda livre. Consequentemente, $(R \star_\beta \mathcal{G})^e$ é um $(R \star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^e$-módulo à esquerda livre, e portanto,

$(R\star_\beta \mathcal{G})^e$ é um $(R\star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^e$-módulo à esquerda projetivo. Pelo Lema 3.1.1, temos que $R\star_\beta\mathcal{G}$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$, então $R\star_\beta\mathcal{G}$ é um $(R\star_\beta\mathcal{G})^e$-módulo à esquerda projetivo. Logo, $(R\star_\beta \mathcal{G})$ é $(R\star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^e$-módulo à esquerda projetivo. Além disso, pela Afirmação 1 sabemos que $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ é um somando direto de $R\star_\beta\mathcal{G}$ como $(R\star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^e$-módulo à esquerda, então $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ é um $(R\star_{\beta_\mathcal{H}} \mathcal{H})^e$-módulo à esquerda projetivo. Logo, $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$, concluindo assim a demonstração da Afirmação 2.

Como R é uma extensão β-Galois de R^β, pelo Teorema 2.1.11, R é um R^β-módulo à direita projetivo finitamente gerado. Desde que R^β é uma álgebra separável de $C(R)^\beta$, temos que R é um $End_{R^\beta}(R)\simeq R\star_\beta\mathcal{G}$-módulo à direita projetivo finitamente gerado pelo Teorema 1.1.7. Notemos ainda que $R\star_\beta\mathcal{G}$ é um $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$-módulo livre, pois $R\star_\beta\mathcal{H}\subseteq R\star_\beta\mathcal{G}$ e $1_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}=1_{R\star_\beta\mathcal{G}}$. Assim, $R\star_\beta\mathcal{G}$ é um $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$-módulo projetivo finitamente gerado. Logo, R é um $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$-módulo projetivo finitamente gerado. Portanto, pela Afirmação 2 e pelo Teorema 1.1.7, $End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R)$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$.

Afirmação 3: $End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R)\simeq R^{\beta_\mathcal{H}}$ como anéis.

Definimos $\psi: End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R)\longrightarrow R^{\beta_\mathcal{H}}$ por $\psi(f)=f(1)$, para todo $f\in End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R)$. Vejamos que ψ está bem definida. Como R é um $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$-módulo à esquerda via $u_g x=\beta_g(x1_{g^{-1}})$, dado $u_g\in R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ e $x\in R$ temos que

$$f(u_g x)=u_g f(x)\Leftrightarrow f(\beta_g(x1_{g^{-1}}))=\beta_g(f(x)1_{g^{-1}}),$$

para todo $f\in End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R,R)$.

Como vimos no Capítulo 2, R está imerso em $R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ via $\varphi: R\longrightarrow R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$ dada por $\varphi(r)=\sum_{e\in\mathcal{G}_0} r1_e u_e$, para todo $r\in R$. Além disso, $R\star_\beta\mathcal{G}$ é também um R-módulo à direita. Com isso, dados $f\in End_{R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}}(R,R)$ e $x\in R\subseteq R\star_{\beta_\mathcal{H}}\mathcal{H}$, temos que $f(x)=f(x1_R)=xf(1_R)$, onde 1_R é a unidade de R. Então, $f(1_h 1_R)=f(1_h)$

e, por outro lado, $f(1_h 1_R) = 1_h f(1_R) = f(1_R)1_h$. Assim, dado $h \in \mathcal{H}$ segue que

$$\beta_h(f(1_R)1_{h^{-1}}) = f(\beta_h(1_R 1_{h^{-1}})) = f(1_R 1_h) = f(1)1_h.$$

Logo, ψ está bem definida e claramente é um homomorfismo de anéis.

Por fim, vejamos que ψ é bijetiva. Sejam $f, f' \in End_{R\star_{\beta_{\mathcal{H}}}\mathcal{H}}(R, R)$ tais que $\psi(f) = \psi(f')$, ou seja, $f(1_R) = f'(1_R)$. Dado $x \in R$, sabemos que $f(x) = f(1_R)x$ e $f'(x) = f'(1)x$. Então $f(x) = f'(x)$ e, portanto ψ é injetiva. Agora, seja $y \in R^{\beta_{\mathcal{H}}}$. Notemos que $f_y : R \longrightarrow R$ dado por $f_y(x) = xy \in End_{R\star_{\beta_{\mathcal{H}}}\mathcal{H}}(R, R)$, pois dado $x \in R$ e $u_g \in R \star_{\beta_{\mathcal{H}}} \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} f_y(u_g x) &= f_y(\beta_g(x1_{g^{-1}})) = \beta_g(x1_{g^{-1}})y = \beta_g(x1_{g^{-1}})\beta_g(y1_{g^{-1}}) \\ &= \beta_g(xy1_{g^{-1}}) = \beta_g(f_y(x)1_{g^{-1}}) = u_g f_y(x). \end{aligned}$$

Assim, existe $f_y \in End_{R\star_{\beta_{\mathcal{H}}}\mathcal{H}}(R, R)$ tal que $\psi(f_y) = f_y(1) = 1y = y$. Logo ψ é um isomorfismo de anéis. Portanto, $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. $\square$

Lema 3.1.3. *Seja R uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Então $\overline{\gamma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$, para $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, está bem definida.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $V_R(\theta(\mathcal{H}))$ é separável sobre $C(R)^\beta$ e que $V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(\theta(\mathcal{H}))$.

Como R é separável sobre R^β e R^β é separável sobre $C(R)^\beta$, então R é separável sobre $C(R)^\beta$. Além disso, $C(R)^\beta \subseteq R^{\beta_{\mathcal{H}}}$, pois dado $x \in C(R)^\beta$, temos que $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Assim, dado $h \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $\beta_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h$. Ou seja, $C(R)^\beta \subseteq R^{\beta_{\mathcal{H}}} \subseteq R$ e consequentemente pelo Teorema 1.1.16, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}})$ é separável sobre $C(R)^\beta$.

Seja $\mathcal{L} \in \overline{\mathcal{H}}$, temos que $S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{H}}$. Assim, $\bigoplus_{h\in S_{\mathcal{H}}} J_h = \bigoplus_{g\in S_{\mathcal{L}}} J_g$. Porém, $\bigoplus_{h\in\mathcal{H}} J_h = \bigoplus_{h\in S_{\mathcal{H}}} J_h$ e $\bigoplus_{g\in\mathcal{L}} J_g = \bigoplus_{g\in S_{\mathcal{L}}} J_g$. Logo, $\bigoplus_{h\in\mathcal{H}} J_h = \bigoplus_{g\in\mathcal{L}} J_g$, e então, pelo Lema 2.1.17, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}})$. Portanto, $V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(\theta(\mathcal{H}))$. $\square$

Lema 3.1.4. *Seja R uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Então $\overline{\sigma} : \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow \theta(\mathcal{H})C(R)$, para $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, está bem definida.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $\theta(\mathcal{H})C(R)$ é separável sobre $C(R)^\beta$ e que $\theta(\mathcal{H})C(R) = \theta(\mathcal{L})C(R)$.

Seja $\mathcal{L} \in \overline{\mathcal{H}}$. Pelo Lema 3.1.3, $V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(\theta(\mathcal{H}))$, e pela Proposição 1.1.14 (*ii*), $V_R(\theta(\mathcal{L})C(R)) = V_R(\theta(\mathcal{H})C(R))$. Do Lema 3.1.2, $R^{\beta_\mathcal{L}} = \theta(\mathcal{L})$ e $R^{\beta_\mathcal{H}} = \theta(\mathcal{H})$ são álgebras separáveis sobre $C(R)^\beta$.

Afirmação: $\theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\theta(\mathcal{L})C(R)$ são álgebras separáveis sobre $C(R)^\beta$.

Mostremos que $\theta(\mathcal{H})C(R)$ é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Como $\theta(\mathcal{H})$ é separável sobre $C(R)^\beta$, existe $e = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in \theta(\mathcal{H}) \otimes_{C(R)^\beta} (\theta(\mathcal{H}))^o$ tal que $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^n r x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n x_i \otimes r y_i$, para todo $r \in \theta(\mathcal{H})$. Escolhendo $d = \sum_{i=1}^n x_i 1_R \otimes y_i 1_R \in \theta(\mathcal{H})C(R) \otimes_{C(R)} (\theta(\mathcal{H})C(R))^o$. Assim,

$$\sum_{i=1}^n (x_i 1_R)(y_i 1_R) = \sum_{i=1}^n (x_i y_i) 1_R = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1_R.$$

Agora, notemos que $\theta(\mathcal{H})C(R) \otimes_{C(R)^\beta} \theta(\mathcal{H})C(R)$ é um $C(R)$-módulo à esquerda via $c \cdot (xa \otimes yb) = c(xa) \otimes yb = x(ca) \otimes yb$, para quaisquer $x, y \in \theta(\mathcal{H})$ e $c, a, b \in C(R)$. Logo, dado $xc \in \theta(\mathcal{H})C(R)$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (xc)x_i 1_R \otimes y_i 1_R &= \sum_{i=1}^n c(xx_i)1_R \otimes y_i 1_R = (c \otimes 1_R) \sum_{i=1}^n x x_i 1_R \otimes y_i 1_R \\ &= (c \otimes 1_R) \sum_{i=1}^n x_i 1_R \otimes x y_i 1_R = \sum_{i=1}^n c x_i 1_R \otimes x y_i 1_R \\ &= \sum_{i=1}^n x_i 1_R \otimes c(x y_i 1_R) = \sum_{i=1}^n x_i 1_R \otimes (xc) y_i 1_R.\end{aligned}$$

Portanto, $\theta(\mathcal{H})C(R)$ é álgebra separável sobre $C(R)$. Analogamente, $\theta(\mathcal{L})C(R)$ é álgebra separável sobre $C(R)^\beta$.

Como R é uma extensão β-Galois de R^β, então R é uma extensão separável de R^β. Além disso, $R^\beta \supseteq C(R)^\beta$ pois, dado $x \in C(R)^\beta$, temos que $x \in R$ e dado $g \in \mathcal{G}$, $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$. Logo, $x \in R^\beta$. Com isso, e por R^β ser uma extensão separável de $C(R)^\beta$, segue da Proposição 1.1.4 (ii) que, R é uma extensão separável de $C(R)^\beta$. Notemos ainda que, $C(R) \supseteq C(R)^\beta$. Assim, pela Proposição 1.1.4 (i), R é uma extensão separável de $C(R)$, ou seja, R é uma álgebra de Azumaya. Claramente, $\theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\theta(\mathcal{L})C(R)$ são subálgebras de R. Portanto, pelo Teorema 1.1.16, $\theta(\mathcal{H})C(R) = V_R(V_R(\theta(\mathcal{H})C(R)))$ e $\theta(\mathcal{L})C(R) = V_R(V_R(\theta(\mathcal{L})C(R)))$. Logo,

$$\theta(\mathcal{H})C(R) = V_R(V_R(\theta(\mathcal{H})C(R))) = V_R(V_R(\theta(\mathcal{L})C(R))) = \theta(\mathcal{L})C(R).$$

□

Lema 3.1.5. *Sejam R uma extensão β-Galois de R^β e $\phi : S \mapsto \bigoplus_{g\in S} J_g$ para $S \subseteq S_{\mathcal{G}}$. Então, ϕ é uma aplicação injetiva.*

Demonstração. Primeiramente, vejamos que ϕ restrito ao conjunto dos subconjuntos unitários de $S_{\mathcal{G}}$ é injetiva. Sejam $g, h \in S_{\mathcal{G}}$ tais que $\phi(\{g\}) = \phi(\{h\})$, ou seja, $J_g = J_h$. Como $J_g \subseteq E_g$ e $J_h \subseteq E_h$, temos que $E_g \cap E_h \neq \{0\}$. Assim $r(g) = r(h)$. Como $J_g = J_h \neq \{0\}$, existe $0 \neq b \in E_g = E_h$ tal que $b \in J_g = J_h$ e

$$xb = b\beta_g(x1_{g^{-1}}) = b\beta_h(x1_{h^{-1}}),$$

para todo $x \in R$. Assim, $b(\beta_g(x1_{g^{-1}}) - \beta_h(x1_{h^{-1}})) = 0$, para todo $x \in R$. Logo, $b(\beta_g(x1_{d(g)} - \beta_{g^{-1}h}(x1_{h^{-1}g}))) = 0$, para todo $x \in R$. Notemos que $\exists\, g^{-1}h$, pois $r(g) = r(h)$. Observamos ainda que, como $b \in J_g$, então,

$$b(\beta_g(x1_{d(g)} - \beta_{g^{-1}h}(x1_{h^{-1}g}))) = (x1_{d(g)} - \beta_{g^{-1}h}(x1_{h^{-1}g}))b = 0, \qquad (3.1)$$

para todo $x \in R$. Como R é uma extensão β-Galois de R^β, existem elementos $x_i, y_i \in R, 1 \leq i \leq n$ tais que $\sum_{i=1}^n x_i\beta_g(y_i1_{g^{-1}}) = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} \delta_{e,g}1_e$, para todo $g \in \mathcal{G}$ e $e \in \mathcal{G}_0$. Substituindo x por y_i e multiplicando por x_i na equação (3.1) temos

$$x_i(y_i1_{d(g)} - \beta_{g^{-1}h}(y_i1_{h^{-1}g}))b = 0,$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i 1_{d(g)} - \beta_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g}))b = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g})\right) b.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} b = 1_{r(g)}b &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{r(g)}(y_i 1_{r(g)})\right) b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i 1_{r(g)}\right) b \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_{g^{-1}h}(y_i 1_{h^{-1}g})\right) b = \left(\sum_{e \in \mathcal{G}_0} \delta_{e,g^{-1}h} 1_e\right) b. \end{aligned}$$

Como $b \neq 0$ temos que $g^{-1}h \in \mathcal{G}_0$ e assim

$$g^{-1}h = r(g^{-1}h) = r(g^{-1}) = d(g).$$

Logo,

$$h = r(h)h = r(g)h = gg^{-1}h = gd(g) = g.$$

Portanto, $\{g\} = \{h\}$. Por fim, sejam S, S' dois subconjuntos não-vazios de $S_{\mathcal{G}}$ tais que $\phi(S) = \phi(S')$. Ou seja, $\bigoplus_{g \in S} J_g = \bigoplus_{h \in S'} J_h$.

Afirmação: Para cada $l \in S$ temos que $l \in S'$.

Suponhamos que $l \notin S'$. Como

$$\bigoplus_{g \in S_{\mathcal{G}}} J_g = \left(\bigoplus_{h \in S'} J_h\right) \oplus \left(\bigoplus_{h \notin S'} J_h\right),$$

pela primeira parte da demonstração, $J_l \cap (\bigoplus_{h \in S'} J_h) = \{0\}$ para $l \notin S'$. Assim, $J_l \nsubseteq \bigoplus_{h \in S'} J_h$, o que é uma contradição, pois $J_l \subseteq \bigoplus_{g \in S} J_g = \bigoplus_{h \notin S'} J_h$, para $l \in S$. Logo, $l \in S'$ e portanto $S \subseteq S'$.

Analogamente, $S' \subseteq S$. Portanto, $S = S'$. $\square$

Teorema 3.1.6. *Sejam R é uma extensão β-Galois de R^β tal que R^β é uma álgebra separável sobre $C(R)^\beta$. Então $\overline{\sigma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\overline{\gamma} : \overline{\mathcal{H}} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$, $\overline{\mathcal{H}} \in \mathcal{A}$, são aplicações injetivas.*

Demonstração. Lembremos que $\mathcal{A} = \{\ \overline{\mathcal{H}}\,|\,\mathcal{H}\,\text{subgrupoide amplo de}\,\mathcal{G}\}$. Suponhamos que $\overline{\sigma}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\sigma}(\overline{\mathcal{L}})$. Notemos que

$$R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R) = \theta(\mathcal{H})C(R) = \overline{\sigma}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\sigma}(\overline{\mathcal{L}}) = \theta(\mathcal{L})C(R) = R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R)$$

para $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$. Assim, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R)) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R))$. Pela Proposição 1.1.14 (i), $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R))$ e $V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R))$. Então, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}})$. Pelo Lema 2.1.17, $\bigoplus_{h\in S_{\mathcal{H}}} J_h = \bigoplus_{l\in S_{\mathcal{L}}} J_l$ e pelo Lema 3.1.5 $S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{L}}$. Logo, por definição $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{L}}$. Portando, $\overline{\sigma}$ é injetiva.

Agora, suponhamos que $\overline{\gamma}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\gamma}(\overline{\mathcal{L}})$. Então, $V_R(\theta(\mathcal{H})) = V_R(\theta(\mathcal{L}))$. Pelo Lema 2.1.17,

$$\bigoplus_{h\in S_{\mathcal{H}}} J_h = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}) = V_R(\theta(\mathcal{H})) = V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}) = \bigoplus_{l\in S_{\mathcal{L}}} J_l.$$

Pelo Lema 3.1.5, $S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{L}}$ e assim $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{L}}$. Portanto, $\overline{\gamma}$ é injetiva. □

3.2 A aplicação de Galois

Nesta seção iremos apresentar condições sob as quais a aplicação de Galois $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é injetiva. Certas condições são dadas a partir das aplicações induzidas que foram introduzidas na seção anterior.

Lema 3.2.1. *A aplicação $\sigma : \mathcal{H} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ é injetiva se e somente se a aplicação $\gamma : \mathcal{H} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ é injetiva.*

Demonstração. Suponhamos que σ é injetiva. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides de $\mathcal{G}$ tais $\gamma(\mathcal{H}) = \gamma(\mathcal{L})$. Então, $V_R(\theta(\mathcal{H})) = V_R(\theta(\mathcal{L}))$, ou seja, $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}})$. Assim, pela Proposição 1.1.14 (ii), $V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R)) = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R))$. Desde que, $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ e $R^{\beta_{\mathcal{L}}}$ são álgebras separáveis sobre $C(R)^{\beta}$ pela demonstração do Lema 3.1.4, temos que $R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R)$ e $R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R)$ são álgebras separáveis sobre $C(R)^{\beta}$. Além disso, ainda pela demonstração do Lema 3.1.4, sabemos que R é uma álgebra de Azumaya. Logo, pelo Teorema 1.1.16,

$$R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R) = V_R(V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R))) = V_R(V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R))) = R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R).$$

Portanto, $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{L})$. Como σ é injetiva, segue que, $\mathcal{H} = \mathcal{L}$. Consequentemente, γ é injetiva. Reciprocamente, suponhamos que γ é injetiva. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ tais que $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{L})$. Então, $\theta(\mathcal{H})C(R) = \theta(\mathcal{L})C(R)$. Da Proposição 1.1.14 (i), temos que $V_R(\theta(\mathcal{H})) = V_R(\theta(\mathcal{H})C(R)) = V_R(\theta(\mathcal{L})C(R))$ e $V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(\theta(\mathcal{L})C(R))$. Assim,

$$V_R(\theta(\mathcal{H})) = V_R(\theta(\mathcal{H})C(R)) = V_R(\theta(\mathcal{L})) = V_R(\theta(\mathcal{L})C(R)).$$

Logo, $\gamma(\mathcal{H}) = \gamma(\mathcal{L})$. Como γ é injetiva, temos que $\mathcal{H} = \mathcal{L}$. Portanto, σ é injetiva. $\square$

Lema 3.2.2. *Se as aplicações $\sigma : \mathcal{H} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ ou $\gamma : \mathcal{H} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ são injetivas, então a aplicação de Galois $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ é injetiva.*

Demonstração. Assumimos que σ é injetiva. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides de $\mathcal{G}$ tais que $\theta(\mathcal{H}) = \theta(\mathcal{L})$. Então,

$$R^{\beta_{\mathcal{H}}} = R^{\beta_{\mathcal{L}}} \Rightarrow R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R) = R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R) \Rightarrow \sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{L}).$$

Como σ é injetiva, então $\mathcal{H} = \mathcal{L}$. Logo, θ é injetiva.

Agora assumindo que γ é injetiva, pelo Lema 3.2.1, σ é injetiva. Consequentemente, θ é injetiva. $\square$

Teorema 3.2.3. *Se $\overline{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}\}$ é um conjunto unitário para cada $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$, então θ é injetiva.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ tais que $\theta(\mathcal{H}) = \theta(\mathcal{L})$, então

$$R^{\beta_{\mathcal{H}}} = R^{\beta_{\mathcal{L}}} \Rightarrow R^{\beta_{\mathcal{H}}}C(R) = R^{\beta_{\mathcal{L}}}C(R).$$

Assim, pelo Lema 3.1.4, $\overline{\sigma}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\sigma}(\overline{\mathcal{L}})$. Desde que $\overline{\sigma}$ é injetiva pelo Teorema 3.1.6, segue que $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{L}}$. Como $\overline{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}\}$ e $\overline{\mathcal{L}} = \{\mathcal{L}\}$, então $\mathcal{H} = \mathcal{L}$. Logo, θ é injetiva. $\square$

O próximo teorema generaliza o [27, Theorem 3.3].

Teorema 3.2.4. *Seja $\langle S_{\mathcal{H}} \rangle$ o subgrupoide de $\mathcal{G}$ gerado pelos elementos de $S_{\mathcal{H}}$, para $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Se $\langle S_{\mathcal{H}} \rangle = \mathcal{H}$, então θ é injetiva.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{L}$ subgrupoides amplos de $\mathcal{G}$ tais que $\theta(\mathcal{H}) = \theta(\mathcal{L})$. Então, $R^{\beta_{\mathcal{H}}} = R^{\beta_{\mathcal{L}}}$. Pelo Lema 2.1.17, $\bigoplus_{h \in \mathcal{H}} J_h = V_R(R^{\beta_{\mathcal{H}}})$ e $\bigoplus_{l \in \mathcal{L}} J_l = V_R(R^{\beta_{\mathcal{L}}})$. Assim, $\bigoplus_{h \in \mathcal{H}} J_h = \bigoplus_{l \in \mathcal{L}} J_l$. Pelo Lema 3.1.5, $S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{L}}$. Então, $\mathcal{H} = \langle S_{\mathcal{H}} \rangle = \langle S_{\mathcal{L}} \rangle = \mathcal{L}$. Portanto, θ é injetiva. $\square$

Corolário 3.2.5. *[27, Theorem 3.3] Se $J_g \neq \{0\}$ para cada $g \in \mathcal{G}$, então θ é injetiva.*

Demonstração. Vejamos que $S_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$, para $\mathcal{H}$ subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$. Claramente, $S_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$. Como $J_h \neq \{0\}$, temos que $h \in S_{\mathcal{H}}$ e portanto, $S_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Notemos ainda que $\langle S_{\mathcal{H}} \rangle \subseteq \mathcal{H}$, visto que, $S_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$. Logo, $\langle S_{\mathcal{H}} \rangle = S_{\mathcal{H}}$. Consequentemente, $\langle S_{\mathcal{H}} \rangle = S_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$. Portanto, pelo Teorema 3.2.4, θ é injetiva. $\square$

Observemos que, os Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 nos dão condições suficientes para que a aplicação de Galois $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ seja injetiva. Além disso, o Teorema 3.2.4 vale para qualquer extensão β-Galois R sobre R^{β}, não sendo essa extensão necessariamente separável sobre $C(R)^{\beta}$.

Capítulo 4

Álgebras de Galois e extensões de Azumaya Galois

Neste capítulo apresentaremos uma caracterização de uma extensão Azumaya Galois, estendendo os resultados de [30] para o contexto de grupoides finitos.

Assumiremos, neste capítulo, que $\mathcal{G}$ é um grupoide finito, K é um anel comutativo, R uma K-álgebra, $\beta = (\{E_g\}, \{\beta_g\})_{g\in\mathcal{G}}$ uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ sobre a álgebra R tal que $R = \bigoplus_{e\in G_0} E_e$, onde cada E_e é uma álgebra unitária com identidade $1_e \neq 0$ e $C(R)$ é o centro de R. Além disso, consideraremos R uma álgebra β-Galois de R^β e $\mathcal{H}_{C(R)} = \{g \in \mathcal{G} \,|\, \beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g, \text{ para todo}\, x \in C(R)\}$ o subgrupoide amplo de $\mathcal{G}$ definido no Lema 1.2.16.

4.1 Álgebras fracamente Galois

Começaremos esta seção lembrando que se R é uma álgebra β-Galois de R^β, então R é uma extensão β-Galois sobre R^β tal que $R^\beta \subseteq C(R)$. Neste caso, pela Proposição 1.1.14, temos que $V_R(R^\beta) = R$. Além disso, pelo Lema 2.1.17, sabemos que $V_R(R^\beta) = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} J_g$. Logo,

$$R = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}} J_g = \left(\bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{g\notin\mathcal{H}_{C(R)}} J_g\right).$$

Por outro lado, $R = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} E_e$. Como $\mathcal{H}_{C(R)}$ é uma união disjunta de grupos (Lema 2.1.19), então conforme foi mostrado na demonstração da Proposição 2.1.23, temos que $E_e = \bigoplus_{g\in\mathcal{G}_e} J_g$.

Denotaremos $\bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g$ por $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ e o centro de $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ por Z. Inicialmente iremos provar que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z. Para isso, consideremos a decomposição $\mathcal{H}_{C(R)} = \coprod_{X_j\in(\mathcal{H}_{C(R)})_0/\sim}(\mathcal{H}_{C(R)})_{X_j}$, $1 \leq j \leq r$, de $\mathcal{H}_{C(R)}$ em componentes conexas, onde $(\mathcal{H}_{C(R)})_0 = X_1 \coprod ... \coprod X_r$. Como $\mathcal{H}_{C(R)} \subseteq \coprod_{e\in\mathcal{G}_0}\mathcal{G}_e$, em particular, pela Observação 1.2.29 temos que $\mathcal{H}_{C(R)} = \coprod_{e_j\in\mathcal{G}_0}(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}$, $1 \leq j \leq r$.

Teorema 4.1.1. *$R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z.*

A demonstração desse teorema é uma consequência do seguinte resultado:

Teorema 4.1.2. *[30, Theorem 3.1] Sejam K um anel comutativo, R uma álgebra de com grupo de Galois G e $H = \{\sigma \in G \mid \sigma(c) = c, \text{ para todo } c \in C(R)\}$ subgrupo de G. Considere $R_H = \bigoplus_{\sigma\in H} J_\sigma$. Então R_H é álgebra de Azumaya sobre $C(R_H)$.*

Demonstração do Teorema 4.1.1. Como $\mathcal{H}_{C(R)} = \coprod_{e_j\in\mathcal{G}_0}(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}$, $1 \leq j \leq r$, temos que,

$$\bigoplus_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_h = \bigoplus_{j=1}^{r} \bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h.$$

Afirmação. $C\left(\bigoplus_{j=1}^r \bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h\right) = \bigoplus_{j=1}^r \left(C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)\right)$.

Seja $x \in C\left(\bigoplus_{j=1}^r \bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h\right)$. Então, $x = \sum_{j=1}^r x_j$, onde $x_j \in \bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h$, para cada $1 \leq j \leq r$. Queremos ver que, $x \in C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$. Para isso, seja

$y \in \bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_i}} J_h$, para algum $1 \leq i \leq r$. Assim,

$$xy = \left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) y = \sum_{j=1}^{r} x_j y = x_j z$$

Como $x \in C\left(\bigoplus_{j=1}^{r}\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h\right)$, temos que $xy = yx$. Mas,

$$yx = y\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) = \sum_{j=1}^{r} y x_j = y x_j.$$

Logo, $x_j y = y x_j$, e portanto, $c \in C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$, $1 \leq j \leq r$. Por outro lado, seja $x \in \bigoplus_{j=1}^{r}\left(C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)\right)$. Então, $x = \sum_{j=1}^{r} x_j$, onde $x_j \in C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$, para cada $1 \leq j \leq r$. Mostremos que, $x \in C\left(\bigoplus_{j=1}^{r}\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h\right)$. Para isso, seja $y = \sum_{j=1}^{r} y_j \in \bigoplus_{j=1}^{r}\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h$. Então,

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right)\left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) = \sum_{j,i=1}^{r} x_j y_i = \sum_{j=1}^{r} x_j y_j \overset{(\star)}{=} \sum_{j=1}^{r} y_j x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) = yx, \end{aligned}$$

onde a igualdade $(\star)$ é valida, pois $x_j \in C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$. Consequentemente, $x \in C(\bigoplus_{j=1}^{r}\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$.

Como cada $(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}$ tal que $e_j \in \mathcal{G}_0, 1 \leq j \leq r$ são grupos, então pelo Teorema 4.1.2, cada $\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h$ é separável sobre $C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$. Assim, pela Proposição 1.1.5, $\bigoplus_{1\leq j\leq r}\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h$ é separável sobre $\bigoplus_{1\leq j\leq r} C(\bigoplus_{h\in(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}} J_h)$. Portanto, pela Afirmação, temos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_h$ é separável sobre $C(\bigoplus_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_h) = Z$. $\square$

Observação 4.1.3. Como para cada $1 \leq j \leq r$, $(\mathcal{H}_{C(R)})_{e_j}$ tal que $e_j \in \mathcal{G}_0$ são grupos, pela demonstração do Teorema 4.1.2 podemos concluir que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra separável sobre $C(R)$.

A partir de agora iremos ver algumas propriedades importantes acerca de $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Começaremos notando que $F_e := R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_e = \bigoplus_{\substack{g\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ r(g)=e}} J_g$ é um ideal unitário de

$R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$ e $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} F_e$. Com efeito, sejam $x = \sum_{\substack{g\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(g)=e}} x'_g$ e $r = \sum_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} r'_h \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, onde $r'_h \in J_h$ e $x'_g \in J_g$. Então,

$$rx = \left(\sum_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} r'_h\right)\left(\sum_{\substack{g\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(g)=e}}\right) = \sum_{\substack{g,h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(g)=r(h)=e}} r'_h x'_g.$$

Como $h, g \in \mathcal{H}_{C(R)}$, e $\mathcal{H}_{C(R)}$ é uma união disjunta de grupos de isotropia, então $d(h) = r(h)$. Logo, $r(h) = r(g) = d(g)$. Pelo Lema 2.1.14, $J_h J_g \subseteq J_{gh}$. Portanto, $rx \in \sum_{\substack{g,h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(g)=r(h)=e}} r'_h x'_g \in \bigoplus_{\substack{g,h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(gh)=e}} J_{gh} \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_e$. De maneira análoga, temos que $xr \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_e$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. Além disso, pelo Lema 2.1.15 e por $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{H}_{C(R)}$,

$$C(R) = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} J_e \subseteq \bigoplus_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_h = R_{\mathcal{H}_{C(R)}}.$$

Desde que $1_R \in C(R)$, então $1_R \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Logo, $1_g = 1_R 1_g \in F_g$ e $1_g x = x = x 1_g$, para todo $x \in F_g$.

Lema 4.1.4. *Se $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$, então $\beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{h^{-1}}) \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h$, onde $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}} = (\{E_h\}, \{\beta_h\})_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}}$ é ação de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre R.*

Demonstração. Se $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$, então

$$\begin{aligned}\beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{h^{-1}}) &= \beta_h(\bigoplus_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g 1_{d(h)}) = \bigoplus_{r(g)=d(h)} \beta_h(J_g 1_{d(h)})\\ &= \bigoplus_{r(g)=d(h)} J_{hgh^{-1}} 1_h = \bigoplus_{l\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_l 1_l \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_l\end{aligned}$$

Logo, $\beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{h^{-1}}) \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h$. □

Como consequência do lema anterior, podemos definir $\widetilde{\beta}_h : F_{h^{-1}} \longrightarrow F_h$ por $\widetilde{\beta}_h(x 1_{h^{-1}}) = \beta_h(x 1_{h^{-1}})$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.

Lema 4.1.5. $\widetilde{\beta}_{\mathcal{H}_{C(R)}} = (\{F_h\}, \{\widetilde{\beta}_h\})_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}}$ *é ação de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.*

Demonstração. Sejam $(h,l) \in \mathcal{H}^2_{C(R)}$ e $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Como $d(h) = r(l)$, segue que $F_l = R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{r(l)} = R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{d(h)} = F_{h^{-1}}$ e $\widetilde{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) \in F_{h^{-1}}$. Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}_h(\widetilde{\beta}_l(x1_{l^{-1}})1_{h^{-1}}) &= \beta_h(\beta_l(x1_{l^{-1}})1_{h^{-1}}) = \beta_{hl}(x1_{l^{-1}h^{-1}}) \\ &= \beta_{hl}(x1_{(hl)^{-1}}) = \widetilde{\beta}_{hl}(x1_{(hl)^{-1}}).\end{aligned}$$

e $\widetilde{\beta}_e(x1_e) = \beta_e(x1_e) = x1_e = Id_{F_e}(x)$, para todo $e \in \mathcal{G}_0$. □

Denotaremos a ação $\widetilde{\beta}_{\mathcal{H}_{C(R)}} = (\{F_h\}, \{\widetilde{\beta}_h\})_{h \in \mathcal{H}_{C(R)}}$ de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ simplesmente por $\widetilde{\beta}$.

Observação 4.1.6. $\widetilde{\beta}_h$ é um $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$-isomorfismo, onde $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$ é a subálgebra dos elementos invariantes sobre a ação $\widetilde{\beta}$ de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Com efeito,

$$\widetilde{\beta}_h(rx1_{h^{-1}}) = \widetilde{\beta}_h(r1_{h^{-1}})\widetilde{\beta}_h(x1_{h^{-1}}) = r\widetilde{\beta}_h(x1_{h^{-1}}),$$

para quaisquer $r \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$ e $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.

Definimos

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \{\widetilde{\beta}_h : F_{h^{-1}} \longrightarrow F_h \,|\, h \in \mathcal{H}_{C(R)}\}.$$

E podemos ver facilmente que $\widetilde{\mathcal{H}} \subseteq I_{(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ (ver Exemplo 1.2.7), ou seja, $\widetilde{\mathcal{H}}$ é um grupoide que age sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ por isomorfismos parciais.

Lema 4.1.7. *Seja* $\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H}_{C(R)} \,|\, \beta_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h, \text{ para todo } x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}\}$ *o subgrupoide normal de* $\mathcal{H}_{C(R)}$. *Então,* $\mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L} \simeq \widetilde{\mathcal{H}}$.

Demonstração. Do Exemplo 1.2.17 temos que $\mathcal{L}$ é subgrupoide amplo de $\mathcal{H}_{C(R)}$ e pelo Lema 4.1.4, $\beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}1_{h^{-1}}) \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}}1_h$. Assim, do Lema 1.2.20, segue que $\mathcal{L}$ é de fato um subgrupoide normal de $\mathcal{H}_{C(R)}$.

Definimos $\psi : \mathcal{H}_{C(R)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ por $\psi(h) = \widetilde{\beta}_h$. Dados $h, l \in \mathcal{H}_{C(R)}$, suponhamos que $\exists hl$ e mostremos que $\exists \psi(h)\psi(l)$. Para isso, vejamos que $d(\psi(h)) = r(\psi(l))$.

Notemos que, $d(\psi(h)) = F_{h^{-1}}$ e $r(\psi(l)) = F_l$. Como $d(h) = r(l)$, segue que $d(\psi(h)) = r(\psi(l))$. Agora suponhamos que $\exists\psi(h)\psi(l)$, então $d(\psi(h)) = r(\psi(l))$. Assim, $F_{h^{-1}} = F_l$ e consequentemente $d(h) = r(l)$. Além disso, dado $x \in F_{l^{-1}}$, $\widetilde{\beta}_l(l1_{l^{-1}}) \in F_h$, pois $F_l = F_{r(l)} = F_{r(h)} = F_h$. Então,

$$\begin{aligned}\psi(hl)(x) &= \widetilde{\beta}_{hl}(x1_{(hl)^{-1}}) = \widetilde{\beta}_h(\widetilde{\beta}_l(x1_{l^{-1}})1_{h^{-1}}) \\ &= \psi(h)(\psi(l)(x)) = (\psi(h)\psi(l))(x).\end{aligned}$$

Logo, ψ é um homomorfismo de grupoides, e pela forma que foi construída, ψ é sobrejetora. Por fim, provemos que $Ker(\psi) = \mathcal{L}$. Seja $l \in \mathcal{L}$, então $\beta_l(x1_{l^{-1}}) = x1_l$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Como $l \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_{C(R)} \subset \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$, $d(l) = r(l) = e'$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$. Então, dado $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ temos:

$$\psi(l)(y1_{l^{-1}}) = \widetilde{\beta}_l(y1_{l^{-1}}) = \beta_l(y1_{l^{-1}}) = y1_l = y1_{e'} = \beta_{e'}(y1_{e'}) = \widetilde{\beta}_{e'}(y1_{e'}).$$

Logo, $\psi(l) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$. Reciprocamente, dado $h \in Ker(\psi)$ temos que $\psi(h) \in \widetilde{\mathcal{H}}_0$. Então, $\psi(h) = \widetilde{\beta}_e$, para algum $e \in \mathcal{G}_0$. Mas, por outro lado, $\psi(h) = \widetilde{\beta}_h$. Portanto, $\psi(h)(x1_{h^{-1}}) = \widetilde{\beta}_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. □

Queremos mostrar que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra fracamente Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$ (ver Definição 2.2.9). Para isso, provemos alguns resultados auxiliares.

Lema 4.1.8. *$(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = Z$, onde Z é o centro de $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.*

Demonstração. Sejam $r \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ e $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Assim, $x = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g$, onde $x'_g \in J_g$. Então,

$$\begin{aligned}rx = r\left(\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g\right) &= \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} rx'_g = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g\beta_g(r1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g r1_g = \left(\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g\right) r1_g = xr.\end{aligned}$$

Logo, $r \in Z$. Reciprocamente, sejam $z \in Z$ e $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Ou seja, $zx = xz$ para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Em particular, $x = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g$, onde $x'_g \in J_g$, então $zx = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g\beta_g(z1_{g^{-1}})$. Assim,

$$\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g\beta_g(z1_{g^{-1}}) = xz = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g z.$$

Então, $\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} x'_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z) = 0$. Logo, $\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z) = \{0\}$. Por outro lado, pelo Lema 2.1.21, $E_gJ_g = J_gE_g = E_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Então,

$$E_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z) = (E_gJ_g)(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z) = E_g(J_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z))$$

Como $J_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z1_g) = \{0\}$, segue que $E_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - z1_g) = \{0\}$. Consequentemente, $\beta_g(z1_{g^{-1}}) = z1_g$. Portanto, $z \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. $\square$

Observação 4.1.9. $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}} = Z$.

Notemos que, $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$. De fato, sejam $x \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ e $\widetilde{\beta}_l \in \widetilde{\mathcal{H}}$, para algum $l \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Assim, $\widetilde{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) = \beta_l(x1_{l^{-1}}) = x1_l$. Então, $x \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$. Reciprocamente, sejam $y \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}}$ e $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Então, podemos definir $\widetilde{\beta}_h : F_{h^{-1}} \longrightarrow F_h$ tal que $\widetilde{\beta}_h(y1_{h^{-1}}) = \beta_h(y1_{h^{-1}})$, para todo $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Logo, $y1_h = \widetilde{\beta}_h(y1_{h^{-1}}) = \beta_h(y1_{h^{-1}})$. Portanto, $y \in (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Consequentemente, pelo Lema 4.1.8, segue que $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}} = Z$.

Teorema 4.1.10. *$R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra fracamente Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}}$.*

Demonstração. Mostremos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é Z-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado e $\rho(F_g)\widetilde{\mathcal{H}}_{r(g)} \simeq Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$, para cada $g \in \widetilde{\mathcal{H}}$, onde $\widetilde{\mathcal{H}}_{r(g)} \subseteq Aut(F_g)$ é o grupo de isotropia de $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Pelo Teorema 4.1.1, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z. Assim, pelo Teorema 1.1.11, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é um Z-progerador. Logo, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é um Z-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado.

Afirmação 1. $F_g \otimes_{C(F_g)} F_g \simeq Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Desde que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z, então $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é Z-separável. Lembrando que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} F_e$, vejamos que $Z = \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(F_e)$. Com efeito, seja $c \in Z$. Em particular, $c \in \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e$, onde $c_e \in F_e$. Para qualquer $r = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, onde $r_e \in F_e$, temos que $cr = rc$. Mas $cr = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e r_e$, e por outro lado, $rc = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e c_e$. Logo, pela soma ser direta, $c_e r_e = r_e c_e$, para todo $r_e \in F_e$. Reciprocamente, dado $c \in \bigoplus_{e\in\mathcal{G}_0} C(F_e)$. Então, $c = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e$, onde $c_e \in C(F_e)$. Seja $r = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, onde $r_e \in F_e$. Assim,

$$cr = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e = c_e r_e = r_e c_e = \sum_{e\in\mathcal{G}_0} r_e \sum_{e\in\mathcal{G}_0} c_e = xc.$$

Logo, $c \in Z$.

Pela Proposição 1.1.5, F_e é $C(F_e)$-separável, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Consequentemente, F_e é uma álgebra de Azumaya sobre $C(F_e)$, para cada $e \in \mathcal{G}_0$. Portanto, pelo Teorema 1.1.11, $F_g \otimes_{C(F_g)} F_g \simeq Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$.

Afirmação 2. $Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g) = (F_g)_l (F_g)_r$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Notemos que dado $f \in Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$, existe $\sum_i a_i \otimes b_i \in F_g \otimes_{C(F_g)} F_g$ tal que $\psi(\sum_i a_i \otimes b_i) = f$, onde $\psi : F_g \otimes_{C(F_g)} F_g \longrightarrow Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$ dado por $\psi(\sum_i a_i \otimes b_i)(x) = \sum_i a_i x b_i$, para todo $x \in F_g$, é isomorfismo. Neste caso, temos que $f(x) = \sum_i a_i x b_i$ e

$$\sum_i a_i x b_i = \sum_i (a_i)_l (x b_i) = \sum_i ((a_i)_l (b_i)_r)(x).$$

Logo, $f \in (F_g)_l (F_g)_r$. Reciprocamente, sejam $\sum_i (a_i)_l (b_i)_r \in (F_g)_l (F_g)_r$ e $x \in F_g$. Então,

$$\sum_i ((a_i)_l (b_i)_r)(x) = \sum_i (a_i)_l (x b_i) = \sum_i a_i x b_i.$$

Logo, $\sum_i (a_i)_l (b_i)_r \in Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g)$.

Afirmação 3. $(F_g)_r = (F_g)_l \widetilde{\beta}_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Sejam $(a)_l\widetilde{\beta}_g \in (F_g)_l\widetilde{\beta}_g$ e $x \in F_g$. Então

$$((a)_l\widetilde{\beta}_g)(x) = (a)_l(\widetilde{\beta}_g(x)) = a\widetilde{\beta}_g(x) = a\beta_g(x).$$

Como $a \in F_g = \bigoplus_{\substack{h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(h)=r(g)}} J_h$, temos que $a = \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(h)=r(g)}} a'_h$, onde $a'_h \in J_h$. Assim,

$$\begin{aligned}((a)_l\widetilde{\beta}_g)(x) = a\beta_g(x) &= \left(\sum_{\substack{h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(h)=r(g)}} a'_h\right)\beta_g(x) = \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(h)=r(g)}} a'_h\beta_g(x)\\ &= \sum_{\substack{h\in\mathcal{H}_{C(R)}\\ r(h)=r(g)}} x1_g a'_h = ax = ((a)_r)(x).\end{aligned}$$

Logo, $(a)_l\widetilde{\beta}_g \in (F_g)_r$. A recíproca é feita de maneira análoga.

Agora, observemos que $(F_g)_l(F_g)_l = (F_gF_g)_l = (F_g)_l$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Com efeito, dados $\sum_i (a_i)_l(b_i)_l \in (F_g)_l(F_g)_l$ e $x \in F_g$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_i((a_i)_l(b_i)_r)(x) &= \sum_i((a_i)_l)((b_i)_r)(x)) = \sum_i((a_i)_l)(b_ix)\\ &= \sum_i a_ib_ix = \sum_i(a_ib_i)_l(x).\end{aligned}$$

Reciprocamente, sejam $(\sum_i a_ib_i)_l \in (F_gF_g)_l$ e $x \in F_g$. Então,

$$\begin{aligned}((\sum_i a_ib_i)_l)(x) &= \sum_i a_ib_ix = \sum_i(a_i)_l(b_ix)\\ &= \sum_i(a_i)_l((b_i)_l(x))\\ &= (\sum_i(a_i)_l(b_i)_l)(x).\end{aligned}$$

Assim, $(F_g)_l(F_g)_l = (F_gF_g)_l$. Como 1_g é a unidade de F_g então $F_gF_g = F_g$.

Portanto, pelas Afirmações 1,2 e 3, $Hom_{C(F_g)}(F_g, F_g) = (F_g)_l\widetilde{\mathcal{H}}_{r(g)}$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. □

4.2 Extensão Azumaya Galois

Nesta seção apresentaremos uma caracterização para a extensão Azumaya Galois R usando $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Para isso, inicialmente mostraremos alguns resultados aos quais serão fundamentais para a construção de tal caracterização.

Lema 4.2.1. $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$.

Demonstração. Seja $x \in R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Em particular, $x \in R$ e $\beta_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h$, para todo $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Dado $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, temos que $y = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g$, onde $y'_g \in J_g$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Assim,

$$\begin{aligned} xy = x\left(\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g\right) &= \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} xy'_g = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g\beta_g(x1_{g^{-1}}) \\ &= \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g x1_g = \left(\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g\right) x1_g = xy. \end{aligned}$$

Logo, $x \in V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$. Reciprocamente, sejam $x \in V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ e $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Então, $xy = yx$, para todo $y = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, onde $y'_g \in J_g$. Assim, $xy{=}\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g\beta_g(x1_{g^{-1}})$ e,

$$\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g\beta_g(x1_{g^{-1}}) = yx = \sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g x.$$

Então, $\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} y'_g(\beta_g(x1_{g^{-1}}) - x) = 0$. Logo, $\sum_{g\in\mathcal{H}_{C(R)}} J_g(\beta_g(z1_{g^{-1}}) - x1_g) = \{0\}$. Por um argumento análogo ao utilizado na demonstração do Lema 4.1.8, segue que $E_g(\beta_g(x1_{g^{-1}}) - x1_g) = \{0\}$ e consequentemente $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$. Portanto, $x \in R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. □

Lema 4.2.2. $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ *é álgebra de Azumaya sobre Z.*

Demonstração. Primeiramente, notemos que como R é uma álgebra β-Galois de R^β, pela Observação 2.1.12, temos que R é uma extensão separável sobre R^β tal que $R^{\beta} \subseteq C(R)$. Assim, pela Proposição 1.1.4, R é uma extensão separável sobre $C(R)$ e assim R é álgebra de Azumaya sobre $C(R)$. Pela Observação 4.1.3, temos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é separável sobre $C(R)$. Além disso, $C(R) \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} \subseteq R$, então pelo Teorema 1.1.16, $V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ é separável sobre $C(R)$ e $V_R(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})) = R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$.

Como $V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ é separável sobre $C(R)$, pelo Teorema 1.1.12, $V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ é uma álgebra de Azumaya sobre $C(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$. Vejamos que, $Z = C(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$. Com efeito, sejam $x \in Z$ e $y \in V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$. Então, $xb = bx$, para todo $b \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Em particular, $xy = yx$. Portanto, $x \in C(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$. Reciprocamente, dados $x \in C(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$ e $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, temos que $xa = ax$, para todo $a \in V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$. Como $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = V_R(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$, segue que $y \in V_R(V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}))$. Ou seja, $yb = by$, para todo $b \in V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$. Em particular, $xy = yx$. Logo, $x \in Z$. Assim, pelo Lema 4.2.1, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$, logo $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z. □

Consideremos $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} \subseteq R$. Notemos que,

$$(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})1_h = R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}},$$

para cada $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$. Denotamos $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} := T_h$ e vejamos que T_h é ideal unitário de $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. De fato, como $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$,

$$\begin{aligned}
(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})T_h &= R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} (R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}) \\
&= R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} \\
&\subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = T_h
\end{aligned}$$

Além disso, dado $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$, segue que

$$\beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} 1_{h^{-1}}) = \beta_h(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_{h^{-1}})\beta_h(R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} 1_{h^{-1}}) \subseteq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} 1_h R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} 1_h.$$

Assim, para cada $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$, definimos $\bar{\beta}_h : T_h \longrightarrow T_{h^{-1}}$ por $\bar{\beta}_g(x1_{h^{-1}}) = \beta_g(x1_{h^{-1}})$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. De maneira análoga ao que foi feito no Lema 4.1.5, podemos mostrar que $\bar{\beta}_{\mathcal{H}_{C(R)}} = (\{T_h\}, \{\bar{\beta}_h\})_{h\in\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma ação de $\mathcal{H}_{C(R)}$ sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$, ao qual denotaremos por $\bar{\beta}$. Além disso, $\bar{\beta}_h$ é um $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})^{\bar{\beta}}$-isomorfismo, para cada $h \in \mathcal{H}_{C(R)}$.

Definimos

$$\mathcal{K} = \{\bar{\beta}_g : T_{g^{-1}} \longrightarrow T_g \,|\, g \in \mathcal{H}_{C(R)}\}.$$

E podemos ver que, $\mathcal{K} \subseteq I_{(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})^{\bar{\beta}}}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}})$, ou seja, $\mathcal{K}$ age sobre $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ por isomorfismos parciais.

Lema 4.2.3. *Seja* $\mathcal{L} = \{h \in \mathcal{H}_{C(R)} \,|\, \beta_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h, \text{para todo}\, x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}\}$ *o subgrupoide normal de* $\mathcal{H}_{C(R)}$. *Então,* $\mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L} \simeq \mathcal{K}$.

Demonstração. Definimos $\phi : \mathcal{H}_{C(R)} \longrightarrow \mathcal{K}$ por $\phi(h) = \bar{\beta}_h$. De maneira análoga ao que foi feito no Lema 4.1.7, ϕ é um homomorfismo sobrejetor forte de grupoides. Mostremos que $\mathcal{L} = Ker(\phi)$. Primeiramente, notemos que se $l \in \mathcal{L}$, então $\bar{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) = x1_l$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta}$. De fato, por definição, dado qualquer $l \in \mathcal{L}$, temos que $\beta_l(y1_{l^{-1}}) = y1_l$, para todo $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) = \bar{\beta}_l\left(\sum_i a_ib_i1_{l^{-1}}\right) &= \sum_i \bar{\beta}_l(a_ib_i1_{l^{-1}}) \\
= \sum_i \beta_l(a_ib_i1_{l^{-1}}) &= \sum_i \beta_l(a_i1_{l^{-1}})\beta_l(b_i1_{l^{-1}}) \\
= \sum_i a_i1_lb_i1_l &= \sum_i a_ib_i1_l = x1_l,
\end{aligned}$$

para todo $x = \sum_i a_ib_i \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Consequentemente, $\bar{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) = x1_l$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Agora, seja $l \in \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H}_{C(R)} \subset \coprod_{e\in\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_e$, segue que $l \in \mathcal{G}_{e'}$, para algum $e' \in \mathcal{G}_0$. Assim,

$$x1_{l^{-1}} = x1_{d(l)} = x1_{r(l)} = x1'_e = \bar{\beta}'_e(x1'_e) \in T_{e'}.$$

Então, $\phi(l)(x1_{l^{-1}}) = \bar{\beta}_l(x1_{l^{-1}}) = x1_l = \bar{\beta}_l(x1'_e)$. Logo, $\phi(l) \in \mathcal{K}_0$. Reciprocamente, seja $h \in Ker(\phi)$. Então, $\phi(h) \in \mathcal{K}_0$. Assim, $\phi(h) = \bar{\beta}_e$, para algum $e \in \mathcal{G}_0$.

Por outro lado, $\phi(h) = \bar{\beta}_h$. Logo, $\phi(h)(x1_{l^{-1}}) = \bar{\beta}_h(x1_{h^{-1}}) = x1_h$, para todo $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Portanto, pelo Teorema 1.2.3, $\mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L} \simeq \mathcal{K}$. $\square$

A partir de agora, consideremos

$$J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = \{x \in F_g \mid yx = x\widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}}), \text{ para todo } y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}\},$$

para cada $\bar{g} \in \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L} \simeq \widetilde{\mathcal{H}}$. Notemos que, dados $z \in Z$ e $x \in J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$,

$$\begin{aligned} y(xz) = (yx)z = (x\widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}}))z = x(\widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}})z) \\ = x(z\widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}})) = (xz)\widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}}), \end{aligned}$$

para todo $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Assim, podemos induzir uma estrutura de Z-módulo à direita em $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. De maneira análoga, induzimos uma estrutura de Z-módulo à esquerda em $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$.

Lema 4.2.4. *$R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$ se e somente se $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = \bigoplus_{\substack{l\in\mathcal{L} \\ d(g)=r(l)}} J_{gl}$, para cada $\bar{g} \in \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$.*

Demonstração. Suponhamos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$. Da Observação 4.1.9, temos que $(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\widetilde{\beta}_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = Z$. Assim, pelo Lema 2.1.17, segue que

$$R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{\bar{g}\in\mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}} J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}. \tag{4.1}$$

Afirmação 1. $\bigoplus_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} J_{gl} \subset J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$

Sejam $x = \sum_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} x_{gl} \in \bigoplus_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} J_{gl}$ e $y \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Então,

$$xy = \left(\sum_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} x_{gl}\right) y = \sum_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} \beta_{gl}(y1_{(gl)^{-1}})x_{gl} = \sum_{\substack{l\in\mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} \beta_{gl}(y1_{(g)^{-1}})x_{gl}$$

$$= \sum_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} \beta_g(\beta_l(y1_{l^{-1}})1_{g^{-1}})x_{gl} = \sum_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} \beta_g(y1_{g^{-1}})x_{gl}$$

$$= \sum_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} \widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}})x_{gl} = \widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}}) \left(\sum_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g)=r(l)}} x_{gl} \right) = \widetilde{\beta}_g(y1_{g^{-1}})x$$

Logo, $x \in J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$.

Como $\mathcal{H}_{C(R)} = \coprod_{1 \leq i \leq n} g_i \mathcal{L}$, dado $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$ então existe $l \in \mathcal{H}_{C(R)}$ tal que $g = g_i l$ com $d(g_i) = r(l)$, para algum $1 \leq i \leq n$. Assim, $\bigoplus_{g \in \mathcal{H}_{C(R)}} J_g = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g_i)=r(l)}} J_{g_i l}$. Por definição, temos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{g \in \mathcal{H}_{C(R)}} J_g$. Ou seja, podemos reescrever, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g_i)=r(l)}} J_{g_i l}$. Logo, de (4.1), segue que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{\substack{l \in \mathcal{H}_{C(R)} \\ d(g_i)=r(l)}} J_{g_i l} = \bigoplus_{\bar{g} \in \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}} J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}. \tag{4.2}$$

Portanto, da Afirmação 1 e de (4.2), temos que $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = \bigoplus_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ d(g)=r(l)}} J_{gl}$.

Reciprocamente, suponhamos que $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = \bigoplus_{\substack{l \in \mathcal{L} \\ d(g)=r(l)}} J_{gl}$, para cada $\bar{g} \in \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$. Então, pelo mesmo argumento usado anteriormente, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = \bigoplus_{\bar{g} \in \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}} J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$.

Afirmação 2. $J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} J_{\bar{g}^{-1}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = C(F_g)$, para cada $g \in \widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$.

Pelo Teorema 4.1.1, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Azumaya sobre Z, então pela Observação 1.1.19, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma extensão Hirata-separável de Z. Assim, pelo Lema 2.1.24, $J_{\bar{g}^{-1}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = V_{F_g}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$, para todo $g \in \widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$. Vejamos que $V_{F_g}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}) = C(F_g)$. Com efeito, seja $x_g \in V_{F_g}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$. Como $x_g z = z x_g$, para todo $z \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, em particular, $z = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} z_e$, onde $z_e \in F_e$. Consequentemente, $x_g z = x_g \sum_{e \in \mathcal{G}_0} z_e = x_g z_g$, e por outro lado, $z x_g = x_g z_g$. Então, $x_g z_g = z_g x_g$, para todo $z_g \in F_g$. Reciprocamente, sejam $x_g \in C(F_g)$ e $y = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} y_e \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Então,

$$x_g y = x_g \sum_{e \in \mathcal{G}_0} y_e = x_g y_g = y_g x_g = \sum_{e \in \mathcal{G}_0} y_e x_g = y x_g.$$

Portanto, $x_g \in V_{F_g}(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$.

Além disso, do Lema 4.1.8 temos que $Z = (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$, e ainda por $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ ser uma álgebra de Azumaya sobre Z, segue da Proposição 2.1.22 que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$. □

Mostramos no Teorema 4.1.10 que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra fracamente Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}}$ e no Exemplo 2.2.7 mostramos que, em geral, uma extensão pode ser fracamente Galois e não ser Galois. Porém quando R for uma extensão de Azumaya $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois, o teorema abaixo garante que, em particular, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ será uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Teorema 4.2.5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) R é uma extensão Azumaya $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois;

(ii) $Z = C(R)$;

(iii) $R = R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$;

(iv) $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Suponhamos que R é uma extensão Azumaya $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois. Assim, R é uma extensão $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois de $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ e $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ é $C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$-álgebra de Azumaya. Pelo Lema 4.2.2, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ é álgebra de Azumaya sobre Z, então $Z = C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Como $C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} \subset C(R)$, segue que $Z \subseteq C(R)$. Por outro lado, seja $x \in C(R)$. Como $C(R) \subset R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, então $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$. Além disso, $xy = yx$, para todo $y \in R$. Em particular, dado $z \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$, temos que $xz = zy$. Logo, $x \in Z$ e portanto $Z = C(R)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que $Z = C(R)$. Então, pelo Teorema 4.1.1, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é álgebra de Azumaya sobre $C(R)$. Consequentemente, do Teorema 1.1.16, temos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} \otimes_{C(R)} V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}) \simeq R$. Assim, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}}) = R$, pois dado $x \in R$,

existe $a \otimes b \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}} \otimes_{C(R)} V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$ tal que $x = ab$. A recíproca é clara. Pelo Lema 4.2.1, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$, logo $R = R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Suponhamos que $R \simeq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Assim, $\mathcal{K} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}$. Pelo Lema 4.2.3, $\mathcal{K} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$, então $\mathcal{H}_{C(R)} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}/\mathcal{L}$. Logo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Pela Observação 2.1.16 e pelo Lema 4.2.2, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ e $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ são subálgebras $C(R)$-separáveis de R. Como $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} \otimes_{C(R)} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} \simeq R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = R$ então pelo Teorema 1.1.17, $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ e $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ são álgebras de Azumaya sobre $C(R)$. Logo, $C(R) = Z$. Vejamos agora que $J_g = J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$, para cada $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$. De fato, sejam $x \in J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ e $y \in R$ tal que $y = ab$, onde $a \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ e $b \in R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Assim,

$$xy = x(ab) = (xa)b = (\widetilde{\beta}_g(a1_{g^{-1}})x)b = (\beta_g(a1_{g^{-1}})x)b.$$

Pelo Lema 4.2.1, sabemos que $R^{\beta} = V_R(R_{\mathcal{H}_{C(R)}})$, então

$$xy = (\beta_g(a1_{g^{-1}})xb = \beta_g(a1_{g^{-1}})bx = \beta_g((ab)1_{g^{-1}})x = \widetilde{\beta}_g((ab)1_{g^{-1}})x$$

Assim, $x \in J_g$. A recíproca é clara. Como $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, temos que $J_g^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = J_{\bar{g}}^{R_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Logo, pelo Lema 4.2.4, segue que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Galois central com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* Suponhamos que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ é uma álgebra de Galois central sobre $C(R)$ com grupoide de Galois $\widetilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{H}_{C(R)}$. Como R é uma extensão β-Galois de R^{β}, onde β é ação de $\mathcal{G}$ sobre R e $\mathcal{H}_{C(R)}$ é amplo, então pelo Teorema 2.1.18, R é uma extensão $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois de $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. Por hipótese, $Z = C(R)$ e pelo Lema 4.2.2, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ é álgebra de Azumaya sobre $C(R)$. Notemos que $C(R) = C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$, pois dado $x \in C(R) = Z = (R_{\mathcal{H}_{C(R)}})^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ e $g \in \mathcal{H}_{C(R)}$, em particular, $x \in R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ e $\beta_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g$. Logo, $C(R) \subseteq C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. A recíproca é clara. Portanto, $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$ é álgebra de Azumaya sobre $C(R)^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}}$. $\square$

O Teorema 4.2.5 generaliza a Proposição 2.1.20 e com isto temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.6. *Se $J_g = \{0\}$, para cada $g \notin \mathcal{H}_{C(R)}$, então R é uma álgebra $\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}$-Galois central e $C(R)$ é álgebra $\bar{\beta}$-Galois de R^{β}.*

Demonstração. Lembremos que,

$$R = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} J_g = \left(\bigoplus_{g \in \mathcal{H}_{C(R)}} J_g \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{g \notin \mathcal{H}_{C(R)}} J_g \right).$$

Assim, como $J_g = \{0\}$, para cada $g \notin \mathcal{H}_{C(R)}$, segue que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} = R$. Assim, este é o caso do Teorema 4.2.5 em que $R_{\mathcal{H}_{C(R)}} R^{\beta} = R_{\mathcal{H}_{C(R)}}$ onde $R^{\beta_{\mathcal{H}_{C(R)}}} = C(R)$. $\square$

Bibliografia

[1] M. Auslander and O. Goldman. The Brauer group of a commutative ring. *Transactions of the American Mathematical Society*, 97(3):367–409, 1960.

[2] J. Ávila, V. Marín, and H. Pinedo. Isomorphism theorems for groupoids and some applications. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2020:1–10, 2020.

[3] D. Bagio, D. Flôres, and A. Paques. Partial actions of ordered groupoids on rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 09(03):501–517, 2010.

[4] D. Bagio and A. Paques. Partial Groupoid Actions: Globalization, Morita Theory, and Galois Theory. *Communications in Algebra*, 40(10):3658–3678, 2012.

[5] D. Bagio, A. Paques, and H. Pinedo. Restriction and extension of partial actions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(10):106391, 2020.

[6] D. Bagio, A. Sant'Ana, and T. Tamusiunas. Galois correspondence for group-type partial actions of groupoids. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, 28(5):745–767, 2022.

[7] H. Brandt. Uber eine verallgemeinerung des gruppenbegriffes. *Mathematische Annalen*, 96:360–366, 1927.

[8] R. Brown. Groupoids and Van Kampen's Theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s3-17(3):385–401, 1967.

[9] R. Brown. From Groups to Groupoids: a Brief Survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19(2):113–134, 1987.

[10] S. Chase, D. Harrison, and A. Rosenberg. Galois theory and Galois cohomology of commutative rings. *American Mathematical Society*, 52:1–19, 1968.

[11] W. Cortes and T. Tamusiunas. A characterisation for a groupoid Galois extension using partial isomorphisms. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 96(1):59–68, 2017.

[12] F. DeMeyer and E. Ingraham. *Separable Algebras Over Commutative Rings.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1971.

[13] M. Dokuchaev and R. Exel. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(5):1931–1952, 2005.

[14] D. Flôres. *Ação de Grupoides sobre Álgebras: Teoremas de Estrutura.* PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, April 2011.

[15] T. Ford. *Separable Algebras.* Graduate Studies in Mathematics 180. American Mathematical Society, 2017.

[16] C. Garcia. *Teoria de Galois para K_β-anéis.* PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, June 2023.

[17] M. Harada. Supplementary results on Galois extension. *Osaka Journal of Mathematics*, 2(2):343–350, 1965.

[18] M. Harada. Note on Galois extension over the center. *Revista de la Union Matematica Argentina*, 24(2):91–96, 1968.

[19] K. Hirata and K. Sugano. On semisimple extensions and separable extensions over non commutative rings. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 18(4):360–373, 1966.

[20] A. Ibort and M. Rodríguez. *An Introduction to Groups, Groupoids and Their Representations*. CRC Press, 2019.

[21] G. Ivan. Strong morphisms of groupoids. *Balkan Journal of Geometry and its Applications*, 4(1):91–102, 1999.

[22] T. Kanzaki. On commutor rings and Galois theory of separable algebras. *Osaka Journal of Mathematics*, 1(1):103–115, 1964.

[23] T. Kanzaki. On Galois algebra over a commutative ring. *Osaka Journal of Mathematics*, 2(2):309–317, 1965.

[24] M. Lawson. *Inverse Semigroups*. World Scientific, 1998.

[25] A. Paques and D. Flôres. On the structure of skew groupoid rings which are Azumaya. *Algebra and Discrete Mathematics*, 16(1):71–80, 2013.

[26] A. Paques and T. Tamusiunas. The Galois correspondence theorem for groupoid actions. *Journal of Algebra*, 509:105–123, 2018.

[27] A. Paques and T. Tamusiunas. On the Galois map for groupoid actions. *Communications in Algebra*, 49(3):1037–1047, 2021.

[28] J. Pedrotti and T. Tamusiunas. Injectivity of the Galois map. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 54(11), 2023.

[29] K. Sugano. On a special type of Galois extensions. *Hokkaido Mathematical Journal*, 9(2):123–128, 1980.

[30] G. Szeto and L. Xue. The Galois algebras and the Azumaya Galois extensions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 31:37–42, 2002.

[31] G. Szeto and L. Xue. On Galois extensions with a one-to-one Galois map. *International Journal of Algebra*, 5(17):801–807, 2011.

[32] G. Szeto and L. Xue. The Galois map and its induced maps. *In Proceedings of the Sixth China–Japan–Korea International Conference on Ring Theory, 27 June – 2 July, 2011, Suwon, South Korea*, pages 10–15, 2012.

[33] O. Villamayor and D. Zelinsky. Galois theory with infinitely many idempotents. *Nagoya Mathematical Journal*, 35:83–98, 1969.