

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

**VOLATILIDADE IMPLÍCITA VERSUS VOLATILIDADE ESTATÍSTICA:
UMA AVALIAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO A PARTIR DOS DADOS
DE OPÇÕES E AÇÕES DA TELEMAR S.A.**

Autor: João Gabe

Porto Alegre

2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

**VOLATILIDADE IMPLÍCITA VERSUS VOLATILIDADE ESTATÍSTICA:
UMA AVALIAÇÃO PARA O MERCADO BRASILEIRO A PARTIR DOS DADOS
DE OPÇÕES E AÇÕES DA TELEMAR S.A.**

Autor: João Gabe

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia, como quesito parcial de obtenção do Grau de Mestre em Economia.

Porto Alegre

2003

Ao Giovanni e a Rosicler

minha única riqueza e fonte de estímulo

AGRADECIMENTOS

À consecução de uma dissertação são necessários inúmeros fatores: aprendizado, conhecimento, financeiro, ... Porém, sem dúvida, além dos autores destacados na capa deste trabalho, muitos outros autores implícitos devem ser enumerados.

É praticamente impossível listar todas as pessoas que contribuíram para este trabalho, que através de uma forma ou outra, possibilitaram-me concretizar esse passo ao meu desenvolvimento pessoal. Porém, antes de todos, quero agradecer em especial a minha esposa – Rosicler e ao meu filho – Giovanni, que ao longo de todos esses anos - com muito amor e carinho, têm acompanhado-me nesta trajetória.

Igualmente devo agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal, que através de seus ensinamentos ao longo do curso de mestrado, contribui na elaboração e aprimoramento deste trabalho. Com o seu aprendizado e o do Prof. Dr. Eduardo Pontual Ribeiro, a Estatística e a Econometria tornaram-se disciplinas tangíveis, que associadas a contribuição do Prof. Dr. Jorge Paulo Araújo e do Prof. Dr. Sabino da Silva Porto Junior, foram de vital importância ao objetivo desta pesquisa. A que destacar também os outros professores do meu curso de mestrado em Economia, que foram importantes ao meu aprendizado: Profs. Drs. Eugênio Lagemann, Roberto Camps de Moraes, Ronald Otto Hillbrecht e o Prof. Dr. Gilberto Kloekner pelas idéias iniciais a dissertação. E ao Prof. Aod Cunha Moraes pelos conselhos e orientação desde a época da graduação.

Gostaria de agradecer a todos os meus colegas a paciência e relevantes contribuições: em especial a Izete, o Ângelo e o Luis; e ao Rony, Flávio, Paulo, Larissa, Viviane, Sidney, Marcelo, Rodrigo, Arnildo, Ariosto, Cristiane, Márcio, Túlio, ...

Agradeço também as meninas da Secretária do Curso de Pós-Graduação: Iara, Claudia, Raquel, Lourdes.

Ao Banco do Brasil S.A. pelo financiamento do meus estudos. Ao Gerson de Oliveira pela orientação técnica e a todos aqueles colegas do Banco, que ao longo de duas décadas, tive o prazer de conhecer e conviver.

Por fim, gostaria de agradecer a toda a minha família e aos amigos pelo apoio, presença, amor, ...: a minha Mãe, meu Irmão, meu Sogro e Sogra, minhas Irmãs, meus Cunhados e Cunhadas, meus Tios e Tias, as Sobrinhas, a Lidiane, a Célia e Arleu, ao Derci, Chico, Picolé, enfim, a todas as pessoas que *in memoriam* sempre estiveram comigo.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

RESUMO

ABSTRACT

INTRODUÇÃO	1
1 O MERCADO DE OPÇÕES	6
1.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM MERCADOS DE OPÇÕES	7
1.2 TIPOS DE OPÇÕES E <i>PAYOFFS</i>	8
1.3 ALGUNS ASPECTOS EM OPÇÕES	11
1.4 PREÇOS DAS OPÇÕES	13
1.4.1 Principais Determinantes do Preço das Opções	13
1.4.2 Arbitragem	16
1.4.3 A Paridade entre <i>Calls e Puts</i>	17
1.5 ESTRATÉGIAS COM OPÇÕES	19
1.5.1 <i>Hedge</i>	20
1.5.2 <i>Spread</i>	22
1.5.3 Combinação	26
1.6 MERCADO BRASILEIRO DE OPÇÕES	29
1.6.1 Bolsa de Valores de São Paulo	29
1.6.2 Bolsa de Mercadorias e Futuros	33
2 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES	37
2.1 CONJECTURA <i>RANDOM WALK</i>	37
2.1.1 Conceito de Mercado Eficiente e a Conjectura <i>Martingale</i>	40
2.1.2 Críticas e Revisão do Conceito de Mercado Eficiente	43

2.2 UM MODELO DO COMPORTAMENTO DOS PREÇOS EM TEMPO	
CONTÍNUO	44
2.2.1 Lemma de Itô	47
2.3 FÓRMULA DE <i>BLACK-SCHOLES</i>	50
2.3.1 O Método <i>Black-Scholes</i> de Precificação de Derivativos	51
2.3.2 A Equação de <i>Black-Scholes</i> e as Condições de Fronteira	54
2.3.3 Fórmulas de <i>Black-Scholes</i> para <i>Call</i> e <i>Put</i> Europeias	55
2.3.4 Medidas de Sensibilidade das Opções	57
2.4 CONCLUSÕES	58
3 VOLATILIDADE	60
3.1 VOLATILIDADE IMPLÍCITA	61
3.1.1 O Sorriso da Volatilidade	62
3.2 VOLATILIDADE ESTATÍSTICA	64
3.2.1 Modelos de Média Móvel	65
3.2.2 Modelos GARCH	67
3.2.2.1 Equação da Média	68
3.2.2.2 Equação da Variância	70
3.2.2.3 Estimação dos Modelos GARCH	78
3.2.2.4 Previsão da Variância Condicional	80
4 A INFORMAÇÃO E O PODER DE PREVISÃO DA VOLATILIDADE	
IMPLÍCITA E VOLATILIDADE ESTATÍSTICA	82
4.1 INTRODUÇÃO	82
4.2 ESPECIFICAÇÃO DOS TESTES DE CONTEÚDO DE INFORMAÇÃO E	
PODER DE PREVISÃO	86
4.3 DESCRIÇÃO DOS DADOS	88
4.4 CÁLCULO DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA	91
4.5 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DE VARIÂNCIA INCONDICIONAL	95
4.6 ESTIMAÇÃO E PREVISÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE	
CONDICIONAL	97
4.7 REGRESSÕES DE PREVISÃO	105
4.7.1 Regressões do Conteúdo de Informação	106
4.7.2 Regressões do Poder de Previsão	108

4.8 CONCLUSÕES	110
5 CONCLUSÕES	112
BIBLIOGRAFIA	115
ANEXO A: Correlograma das séries de volatilidades em nível	122

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 2.1 – Histograma dos retornos diários do ln de preços de fechamento das ações da TNLP4	50
Figura 4.1 – Histograma e sumário estatístico dos retornos sobre os preços médios diários da TNLP4	90

GRÁFICOS

Gráfico 1.1 – <i>Payoff</i> de retornos do comprador de uma opção de compra europeia	10
Gráfico 1.2 – <i>Payoff</i> de retornos do lançador de uma opção de compra europeia	10
Gráfico 1.3 – <i>Payoff</i> de retornos do comprador de uma opção de venda	11
Gráfico 1.4 – <i>Payoff</i> de retornos do lançador de uma opção de venda	11
Gráfico 1.5 – <i>Hedge</i> : posição comprada na ação e vendida em opção de compra	21
Gráfico 1.6 – <i>Hedge</i> : posição vendida na ação e comprada em opção de compra	21
Gráfico 1.7 – <i>Hedge</i> : posição comprada na ação e em opção de venda	22
Gráfico 1.8 – <i>Hedge</i> : posição vendida na ação e em opção de venda	22
Gráfico 1.9 – <i>Spread</i> de alta com <i>call</i>	23
Gráfico 1.10 – <i>Spread</i> de alta com <i>put</i>	23
Gráfico 1.11 – <i>Spread</i> de baixa com <i>call</i>	24
Gráfico 1.12 – <i>Spread</i> de baixa com <i>put</i>	24
Gráfico 1.13 – <i>Spread</i> borboleta com <i>call</i>	25
Gráfico 1.14 – Combinação: <i>straddle</i> de compra – <i>bottom straddle</i>	26
Gráfico 1.15 – Combinação: <i>straddle</i> de venda – <i>top straddle</i>	27
Gráfico 1.16 – Combinação: <i>strip</i>	27
Gráfico 1.17 – Combinação: <i>strap</i>	27
Gráfico 1.18 – Combinação: <i>strangle</i> de compra	28
Gráfico 1.19 – Combinação: <i>strangle</i> de venda	28
Gráfico 2.1 – Evolução histórica dos preços diários de fechamento da Telemar S.A. – PN (TNLP4), em lote de 1000 ações	38
Gráfico 3.1 – Sorriso da volatilidade implícita (período de 02/10/2000 a 15/10/2002)	64

Gráfico 4.1 – Evolução histórica dos preços médios diários da Telemar S.A., no período de 21/09/1998 a 21/10/2002	89
Gráfico 4.2 – Retornos diários dos preços médios da TNLP4 (de 22/09/1998 a 21/10/2002)	89
Gráfico 4.3 – Evolução histórica dos preços médios diários da TNLP4 e do Ibovespa (de 02/10/2000 a 21/10/2002)	91
Gráfico 4.4 – Volatilidade futura e do dia seguinte (de 02/10/2000 a 15/10/2002)	94
Gráfico 4.5 – Volatilidade implícita ponderada e volatilidade futura (de 02/10/2000 a 15/10/2002)	95
Gráfico 4.6 – Volatilidade implícitas	95
Gráfico 4.7 – Volatilidades incondicionais (de 02/10/2000 a 15/10/2002)	96
Gráfico 4.8 – Volatilidades realizadas e MA (20)	97
Gráfico 4.9 – Estimativas volatilidades condicionais da Telemar S.A. (de 22/09/1998 a 21/10/2002)	101
Gráfico 4.10 – Previsões das volatilidades condicionais um passo a frente (de 02/10/2000 a 15/10/2002)	102
Gráfico 4.11 – Previsões futuras das volatilidades condicionais (de 02/10/2000 a 15/10/2002)	104
Gráfico 4.12 – Volatilidade futura e FIGARCHPREV (de 02/10/2000 a 15/10/2002) ...	104

TABELAS

Tabela 1.1 – Síntese do efeito no valor da opção de um aumento numa variável determinante do preço das opções, quando as demais permanecem inalteradas	15
Tabela 1.2 – Volume financeiro negociado na Bovespa nos anos de 1999 a 2002	30
Tabela 1.3 – Identificação do tipo da opção associado ao seu vencimento através da letra que aparece após o código do ativo-objeto	31
Tabela 1.4 – Principais produtos negociados na BM&F no mês de setembro de 2002	35
Tabela 1.5 – Volume financeiro negociado na BM&F nos anos de 2000 a 2002	36
Tabela 4.1 – Sumário estatístico das volatilidades implícitas e realizadas	94
Tabela 4.2 – Resumo estatístico das volatilidades incondicionais	96
Tabela 4.3 – Modelos GARCH estimados	98
Tabela 4.4 – Erros estatísticos da previsão da variância	99

Tabela 4.5 – Estimativas dos parâmetros das variâncias condicionais	100
Tabela 4.6 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades condicionais 1 dia .	102
Tabela 4.7 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades incondicionais	103
Tabela 4.8 – Testes de raiz unitária	106
Tabela 4.9 – Resultados das regressões do conteúdo de informação	107
Tabela 4.10 – Resultados das regressões do poder de previsão	109

RESUMO

A partir de uma base de dados de ações da Telemar S.A., do período de 21/09/1998 a 21/10/2002, e de opções de 02/10/2000 a 21/10/2002, foi avaliado qual o previsor que prevê com maior precisão a volatilidade futura: o implícito ou o estatístico. A volatilidade implícita foi obtida por indução retroativa da fórmula de *Black-Scholes*. As previsões estatísticas da volatilidade foram obtidas pelos modelos de média móvel ponderada igualmente, modelo GARCH, EGARCH e FIGARCH.

Os resultados das regressões do conteúdo de informação revelam que a volatilidade implícita ponderada possui substancial quantidade de informações sobre a volatilidade um passo à frente, pois apresenta o maior R^2 ajustado de todas as regressões. Mesmo sendo eficiente, os testes indicam que ela é viesada. Porém, a estatística *Wald* revela que os modelos EGARCH e FIGARCH são previsores eficientes e não viesados da variação absoluta dos retornos da Telemar S.A. entre t e $t + 1$, apesar do R^2 um pouco inferior a volatilidade implícita. Esse resultado a partir de parâmetros baseados em dados *ex-post*, de certo modo refuta a hipótese de que as opções possibilitam melhores informações aos participantes do mercado sobre as expectativas de risco ao longo do próximo dia.

Nas regressões do poder de previsão, que testam a habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção, os resultados rejeitam a hipótese da volatilidade implícita ser um melhor previsor da volatilidade futura. Elas mostram que os coeficientes das volatilidades implícitas e incondicionais são estatisticamente insignificantes, além do R^2 ajustado ser zero ou negativo. Isto, a princípio, conduz à rejeição da hipótese de que o mercado de opções é eficiente.

Por outro lado, os resultados apresentados pelos modelos de volatilidade condicional revelam que o modelo EGARCH é capaz de explicar 60% da volatilidade futura. No teste de previsor eficiente e não viesado, a estatística *Wald* não rejeita esta hipótese para o modelo FIGARCH. Ou seja, um modelo que toma os dados *ex-post* consegue prever a volatilidade futura com maior precisão do que um modelo de natureza *forward looking*, como é o caso da volatilidade implícita. Desse modo, é melhor seguir a volatilidade estatística - expressa pelo modelo FIGARCH, para prever com maior precisão o comportamento futuro do mercado.

ABSTRACT

The main goal of this work was to identify the best way to make forecast about future volatility: if is using implicit or statistic forecast. It was made based on Telemar S. A. share's database during the period from 21/09/1998 to 21/10/2002 and Telemar S. A. option's database from 02/10/2000 to 21/10/2002. The implicit volatility was got using back-out procedure from the *Black-Scholes* model. The statistics forecasts were got using weighted moving average models as the same to GARCH, EGARCH and FIGARCH models.

The results from content information regression using implicit volatility weighted showed that there is important information about one step ahead' volatility. It is because it has the biggest adjusted R^2 among all the regressions. In spite of implicit volatility's efficiency, the testes show that it is biased. However, the *Wald* statistic shows that EGARCH and FIGARCH models are efficient in forecast works and they are not biased in Telemar S.A. absolute variation between t and $t + 1$. This result of the parameters based on ex-post dates, in some way, refuse the hypothesis that options can improve the amount of information to market users about expectations of the risk over next day.

At power forecast regressions, which test the explanatory variable ability to forecast the volatility during the maturity time of option, the results reject the hypothesis that implicit volatility is the best forecast to future volatility. It shows that in implicit and unconditional volatility's are insignificant statistically. This is, in the beginning, causes the rejection of the hypothesis that option's market is efficient.

On the other hand, shows results through conditional volatility models that EGARCH model can explain about 60% of future volatility. The efficient and not biased forecast test by *Wald* statistic, not refuse this hypothesis to FIGARCH model. It means that a model that take ex-post date can forecast future volatility with more precision than a forward looking model as implicit volatility case. So, the best way is following the statistic volatility by FIGARCH model, to forecast the future market behaviour with more precision.

INTRODUÇÃO

A partir da implementação do Plano Real em 1994, e a conseqüente estabilização da economia brasileira, novos desafios surgiram. O Brasil é uma das chamadas economias emergentes, que são caracterizadas por mercados financeiros altamente voláteis que, a princípio, podem propiciar altos retornos aos investidores. Essa característica desses mercados deveria ser um indicador de locais atraentes para um grande fluxo de investimentos, pois além de possibilitarem a diversificação de portfólios, *hedding*, ..., oferecem altos rendimentos. Porém, geralmente acarretam em altos riscos financeiros.

A grande suscetibilidade das economias emergentes a fatores tanto externos quanto internos, que podem desestabilizar a economia desses países, levou a um consenso geral: não somente políticas monetárias e fiscais são importantes ao crescimento de um país, mas um sistema financeiro estável e um mercado de capitais capaz de promover o emprego e a renda são igualmente condições inerentes a este fim. Quanto maior for a transparência dos mercados financeiros, com certeza, maior será o número de participantes desses mercados.

Nesse sentido, várias normas e técnicas têm sido propostas por acadêmicos e profissionais de mercado que possibilitam impulsionar o mercado financeiro brasileiro.

Assim como os contratos futuros, os contratos de opções também são classificados como um derivativo. São negociados nos Estados Unidos desde 1973 e no Brasil desde 1979. As séries de opções são opções do mesmo tipo (*call* ou *put*) para o mesmo ativo e com a mesma data de vencimento. Contudo, dependendo do preço de exercício, que difere de uma série para outra, os prêmios das opções podem ser diferentes.

O único componente na precificação de uma opção de ação que não é observável diretamente é a volatilidade futura do preço da ação. Volatilidade é o nome genérico para o desvio-padrão (in)condicional. Indica se o preço de um ativo está variando pouco ou muito. Ela é uma medida da incerteza quanto às variações de preço. Os períodos em que a oscilação dos preços está muito alta são aqueles em que o risco é maior. Quando a volatilidade é baixa, o risco é menor.

Existem vários modelos que podem ser utilizados para descrever ou gerar a volatilidade futura. Em alguns casos, várias previsões diferentes de volatilidade sobre um mesmo ativo podem ser obtidas ou uma grande similaridade, dependendo do modelo que se utiliza.

Nesse contexto, inserem-se os modelos de volatilidade implícita e estatística. A volatilidade implícita é a previsão da volatilidade ao longo do tempo de maturidade de

uma opção, que iguala o preço de mercado observado com o modelo de precificação de uma opção. O modelo mais simples e mais utilizado para precificar uma opção de compra (*call*) ou uma opção de venda (*put*) é o modelo *Black-Scholes*. Utilizando esse modelo, a volatilidade implícita é a volatilidade do movimento geométrico *Browniano*, que governa as variações de preço do ativo ao longo do tempo de maturidade da opção.

A volatilidade implícita pode ser utilizada para verificar a opinião do mercado sobre a volatilidade de certa ação, que varia com o tempo. Pode ser utilizada também para calcular o preço de uma opção a partir do preço de outra opção. Sendo assim, é comum obter-se simultaneamente muitas volatilidades implícitas em diferentes opções sobre o mesmo ativo.

A volatilidade estatística depende da escolha de um modelo estatístico que é aplicado aos dados históricos do retorno do ativo. O modelo estatístico é usualmente um modelo de série de tempo, tal como um processo de média móvel ou *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH). Aplicando o modelo aos dados históricos obtêm-se estimativas estatísticas da volatilidade do passado. Isto também possibilitará obter-se previsões da volatilidade de agora até um ponto futuro no tempo - o horizonte de risco.

Então, ao contrário do que ocorre com o preço de um ativo específico, a volatilidade não é diretamente observável no mercado. Ela só pode ser estimada no contexto de um modelo. Assim, modelos de volatilidade implícita e volatilidade estatística normalmente providenciam estimativas ou previsões do mesmo processo específico de preço.

Assim, este estudo avalia qual o melhor previsor da volatilidade futura. O problema básico será testar o poder de previsão e o conteúdo de informação das volatilidades implícita e estatística, e dessa forma, inferir se é a volatilidade implícita que prevê com maior precisão o futuro ou é a volatilidade estatística.

Muitas pesquisas têm sido publicadas na tentativa de determinar qual o estimador que prediz com maior eficiência a volatilidade dos mercados financeiros. Os resultados apresentados não são conclusivos, pois, dependendo do modelo de precificação da opção utilizado para extrair a volatilidade implícita ou o modelo estatístico usado para analisar os dados históricos, um *approach* pode prevalecer sobre o outro.

DAY & LEWIS (1992), que estudaram o índice opções *S&P 100* com expiração de 1985-1989, e LAMOUREUX & LASTRAPES (1993), que examinaram opções em dez ações com expiração de 1982 a 1984, concluíram que a volatilidade implícita é viesada e ineficiente e a volatilidade passada contém informação preditiva sobre volatilidade futura além do que contido na volatilidade implícita.

CANINA & FIGLEWSKI (1993), que também utilizaram o mercado de índice de opções *S&P 100* (dados incluem somente o período anterior a outubro de 1987), encontraram que a volatilidade implícita não tem nenhuma correlação com o retorno futuro da volatilidade e não incorpora a informação contida na mais recente volatilidade observada.

Por outro lado, CHRISTENSEN & PRABHALA (1998) encontraram que a volatilidade implícita tem uma melhor performance do que a volatilidade histórica na previsão da volatilidade futura. O estudo de FLEMING (1998), que também examina a performance da volatilidade implícita do índice *S&P 100*, indicou que a volatilidade implícita é um preditor viesado positivamente, mas também que ele contém relevantes informações sobre volatilidade futura.

A informação contida e o poder preditivo da volatilidade implícita em opções de câmbio futuro, negociadas no *Chicago Mercantile Exchange (CME)*, são investigadas em JORION (1995). Em contraste com as opções de índice de ações, *Jorion* encontrou que modelos estatísticos de séries de tempo são ultrapassados em performance pela previsão implícita de opções. Contudo, as volatilidades implícitas são estimadores viesados positivamente da volatilidade futura.

TAYLOR & XU (1995) realizam similares resultados para opções de câmbio à vista negociadas na *Philadelphia Stock Exchange (PHLX)*. Nesse artigo, os previsores implícitos são também superiores aos históricos.

Se os preços das opções de compra da taxa diária de câmbio real/dólar negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), contém informação sobre a volatilidade futura dos retornos desse ativo que não pode ser extraída de retornos passados, são verificados por ANDRADE & TABAK (2001). Seus resultados sugerem que a volatilidade implícita no preço das opções de compra R\$/US\$, possui informação sobre subsequente volatilidade realizada que não está presente nos retornos passados. Concluem, que é válido seguir a volatilidade implícita para inferir sobre a volatilidade futura, pois previsões que somente utilizam retornos passados não são eficientes, no sentido que elas não incorporam toda informação pública disponível.

A acuracidade da volatilidade futura é vital em teoria de finanças. Auferir a previsão da volatilidade de um ativo de modo preciso é a chave para um bom sistema de gerenciamento de risco. A correta previsão da volatilidade é importante não só no esboço de estratégias ótimas de *hedge* com derivativos, como também para captar momentos de grande incerteza no mercado. Quanto mais incerto estiver o mercado, frente a crises ou

fatos exógenos, mais os preços dos ativos tendem a variar, implicando em maiores possibilidades de ganhos ou perdas.

Expectativas sobre a volatilidade jogam um papel crucial em teoria das finanças:

- a) o lançador de uma opção precisa prever a volatilidade do processo de preço do ativo ao longo do tempo de vida da opção;
- b) os administradores de risco de portfólios requerem previsão da volatilidade principalmente para um curto espaço de tempo;
- c) a volatilidade implícita é necessária para computar a apropriada razão de *hedge* do portfólio;
- d) a volatilidade estatística é necessária para posições líquidas e para calcular o risco total de capital requerido pelo mercado para uma firma ou instituição financeira;
- e) para validar modelos de precificação e *hedging* usados pelos profissionais financeiros é requerida a avaliação independente de todas as volatilidades implícitas e estatísticas.

Principalmente, o que importa para a precificação de uma opção é somente a volatilidade do movimento de preço específico e não a tendência no preço da ação. Logo, quanto mais precisa for a sensibilidade à volatilidade, provavelmente mais próximo o preço da opção vai estar de seu preço justo.

Ademais, as últimas crises financeiras – crise da Ásia em 1997, crise da Rússia em 1998, troca do regime de câmbio fixo para flutuante no Brasil em 1999, e crise da Argentina em 2000/2001 - levou à necessidade de impor critérios rígidos de administração de riscos. Nesse sentido, a volatilidade possui uma função primordial na determinação do *Value at Risk* (VaR).¹

Igualmente, a habilidade para predições da volatilidade futura é também importante para o Banco Central como insumo nos processos de política monetária.

Estima-se que o número de pessoas que investem em ações no Brasil seja no máximo de 10 milhões, entre pessoas físicas e jurídicas, ou seja, 6% da população. Nos Estados Unidos, diretamente ou indiretamente existem 80 milhões de investidores pessoas físicas em ações, o que equivale a dizer que para cada três habitantes norte-americanos um investe recursos em ações. Em suma, não restam dúvidas de que o potencial para o crescimento do mercado acionário no Brasil é enorme, tanto pelas perspectivas de crescimento do país,

¹ Segundo JORION (1997), o VaR é um método de mensuração de risco que através de técnicas estatísticas padrões, mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Com base em fundamentos científicos, o VaR fornece aos usuários uma medida concisa do risco de mercado.

quanto pelo ingresso de um maior número de investidores. Assim, espera-se que a precisão na determinação da volatilidade futura seja um elemento que contribua à eficiência do mercado de capitais.

Dessa forma, para determinar qual o melhor previsor da volatilidade futura para o mercado brasileiro, utiliza-se uma base de dados de opções e ações da Tele Norte Leste Participações S.A. negociadas na Bovespa. Nesse sentido, além desta introdução, o objetivo do primeiro capítulo deste estudo é conceituar e apresentar o mercado de opções brasileiro através da familiarização aos seus principais conceitos e definições. Acredita-se que a análise e a compreensão dos jargões financeiros é vital ao trabalho com derivativos.

O próximo capítulo é destinado a apresentar o modelo *Black-Scholes* de precificação de opções, o qual é utilizado na derivação da volatilidade implícita. Contudo, como esse modelo de precificação é descrito em função dos parâmetros que regem o movimento dos preços do ativo-objeto, primeiramente são descritos os modelos que descrevem o processo de formação desses preços.

No terceiro capítulo, os modelos de volatilidade implícita e estatística são definidos e apresentados formalmente. Como a volatilidade não é diretamente observável no mercado, ela só pode ser obtida no contexto de um modelo. O método e a forma de se obter essas estimativas são cruciais à verificação de qual o melhor previsor da volatilidade futura.

Por último, a partir dos vários métodos de se obter a volatilidade de um determinado ativo financeiro, é realizado a mensuração empírica dessas alternativas. A partir das opções e ações da Telemar S.A. – a ação com o maior peso no índice Bovespa e a opção mais negociada no mercado brasileiro, é investigado se a volatilidade implícita prediz com maior precisão o futuro do que a volatilidade estatística ou se é o contrário. Para tanto, são realizados testes do conteúdo de informação e de poder de previsão das volatilidades.

1 O MERCADO DE OPÇÕES¹

Um dos principais preceitos a respeito da moderna teoria e engenharia de finanças, é que cabe a ela analisar as propriedades das estruturas financeiras e encontrar a maneira mais factível para operar os recursos de terceiros. Para tanto, utiliza vários instrumentos técnicos e estratégias com a devida contabilização a fatores como o tempo, risco e ambiente aleatório.

As estruturas que compõem a teoria microeconômica podem ser classificadas como: a) os indivíduos – dilema consumir/investir; b) as corporações – firmas, companhias, que emitem títulos, ações, ...; c) os intermediários – bancos, companhias de investimentos, fundos de pensão, bolsa de valores, bolsa de futuros e opções; d) os mercados financeiros. Dessas quatro estruturas, os mercados financeiros são apontados como a principal preocupação da teoria matemática financeira.

A engenharia financeira é uma das áreas que mais se desenvolveu nas instituições financeiras e corporações no mundo moderno. Esse rápido crescimento, associado a produtos sofisticados, originou um complexo sistema que requer o aprimoramento e acompanhamento constante de profissionais altamente qualificados. A complexidade pode ser devida a vários tipos de mercados financeiros, tais como:

- Bolsa de Valores;
- Mercado de Títulos que negociam títulos governamentais e outros;
- Mercados de Moedas ou Mercado de Moedas Estrangeiras, em que moedas são compradas e vendidas;
- Mercados de *Comodities*, onde ativos físicos como petróleo, ouro, prata, soja, eletricidade, etc., são negociados;
- Mercados de Opções e Futuros, em que produtos derivativos são negociados.

Os instrumentos financeiros distinguem-se como:

- Instrumentos primários: são os relacionados diretamente ao ativo-objeto – contas em banco, títulos, ações;
- Instrumentos secundários: são os derivativos, os quais são híbridos, pois são construídos baseados nos instrumentos primários – opções, contratos futuros, *warrants*, *swaps*, combinações, *spreads*, ...

¹ O material apresentado até a seção 1.5 (inclusive os gráficos) baseiam-se em ALEXANDER (2001), CAMPBELL *et alii* (1997), COX & RUBINSTEIN (1985), HULL (1997), JORION (1997), SHIRYAEV (1999), SILVA NETO (1996 E 1998), WILMOTT *att alli* (1995).

Em todos os mercados financeiros existem vários tipos de ativos que são comprados ou vendidos. Como os mercados tornam-se cada vez mais sofisticados, contratos cada vez mais complexos são introduzidos do que simplesmente negociações diretas de compra e venda (negociações de balcão).

Conhecidos como derivativos financeiros, títulos derivativos, produtos derivativos, ou somente derivativos, eles oportunizam ao investidor grandes oportunidades de lucros, *hedge*, diversificação e administração de risco em portfólio.

Nesse sentido, a análise e a compreensão dos jargões financeiros é vital ao trabalho com derivativos. Como o objetivo deste estudo é avaliar o poder de previsão da volatilidade implícita (derivada de opções) em relação a volatilidade estatística, delineai-se abaixo, em primeiro lugar, o mercado de opções através da familiarização aos seus principais conceitos, tipos e *payoffs*, aspectos, preços, estratégias, bem como são apresentados algumas particularidades referentes as duas maiores bolsas de valores que negociam opções no Brasil: Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e a Bolsa de Mercadorias & Futuros (BM&F). Os capítulos posteriores apresentam os modelos de precificação de opções, a caracterização das volatilidades implícitas e estatísticas, para, por último, inferir empiricamente sobre qual é o melhor previsor da volatilidade futura.

1.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS EM MERCADOS DE OPÇÕES

Uma opção é um título ou contrato emitido por um governo, uma empresa, um banco, uma companhia financeira e dá ao comprador o direito (não a obrigação) de comprar ou vender algo de valor (uma ação, um índice de ações, uma nota promissória, uma moeda, ...) em termos especificados em um instante fixado ou durante um certo período de tempo no futuro. O preço fixado do contrato é conhecido como preço de exercício – *strike-price*, e a data de vencimento é a data de maturidade ou a data de expiração da opção.

Usualmente, a pessoa disposta a comprar é dita manter uma posição comprada – *long position*, enquanto que aquele que vai entregar o bem está mantendo uma *short position* – posição vendida.

Os *dealers*² que esperam que o preço de um ativo-objeto aumente, são denominados *bulls*. Um *bull* abre uma *long position* esperando vender com lucro mais tarde, quando o preço do ativo-objeto subir no mercado, pois adquire o ativo-objeto pelo preço de exercício que é inferior ao preço corrente de mercado.

² Numa tradução literal, *dealer* é o negociante, revendedor.

Os *dealers* que esperam que o mercado mova-se para baixo são chamados *bears*. Um *bear* tende a vender títulos que possui – ou mesmo que ele não os tem (isto é referido como *short selling*³). Ele espera fechar sua *short position* por comprando o ativo-objeto a preços menores do que o preço de exercício. Essa diferença será seu lucro.

Outro termo comumente utilizado na literatura de finanças é o *spread bid/ask*, isto é, a diferença entre o *bid price* (preço de compra) e o *ask price* (preço de venda). Geralmente, o preço de venda é superior ao preço de compra.

As opções podem se diferenciar em tradicionais e não tradicionais. Tradicionais são as opções negociadas em balcão, como: i) seguro; ii) arras de compra e venda de imóvel; iii) debêntures conversíveis; iv) *leasing* com opção de compra; etc. Por outro lado, as opções não tradicionais são realizadas contra as Bolsas (de Valores ou Mercados Futuros), como: a) opções sobre ações; b) opções sobre índice de ações; c) opções sobre moedas e opções sobre índices de moedas; d) opções sobre *comodities*; e) opções sobre títulos do governo; f) opções sobre contratos futuros; etc.

Deve-se assumir que as transações com opções podem ocorrer no tempo: $n = 0, 1, 2, \dots, N$, e todo negócio termina após o instante N . As opções são baseadas em algum ativo-objeto de valor descrito por uma seqüência aleatória discreta: $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$.

1.2 TIPOS DE OPÇÕES E *PAYOFFS*

Distinguem-se dois tipos de opções: opções de compra (*call option*) – dá o direito a alguém adquirir, e opções de venda (*put option*) – dá o direito a alguém vender. É chamado de lançador ou emissor aquele que lança (vende) uma opção sobre um ativo-objeto, assumindo a obrigação de vender ou comprar do titular da opção, se este exercê-la, o objeto a que se refere o contrato. Assim, uma opção de compra dá ao titular o direito de comprar do lançador o ativo-objeto da opção, na data de vencimento, pelo preço de exercício acordado na contratação. Por esse direito, o comprador deve pagar um valor antecipado chamado de prêmio, isto é, o preço de mercado da opção. Uma opção de venda dá ao titular o direito de vender ao lançador o ativo-objeto da opção, na data de vencimento, pelo preço de exercício. Para tanto, deve pagar um prêmio.

Todo contrato de opção de um mesmo tipo emitido (lançado) no mesmo ativo-objeto constitui uma classe de opções. Logo, opções de compra e venda de um ativo-objeto são consideradas classes diferentes. Dentro de uma dada classe, todos os contratos de opções com a mesma data de expiração e preço de exercício constituem uma série de opção.

³ Venda à descoberto.

É importante para a engenharia financeira que esses dois instrumentos financeiros atuem em direções opostas, ou seja, quando o ganho de um titular de uma opção de compra aumenta, decresce o ganho do titular de uma opção de venda. Isto explica a prática amplamente utilizada de diversificação, de operando com opções de classes diferentes, algumas vezes combinadas com outros títulos.

Quando se considera o seu exercício, duas formas:

- a) européia: se o contrato de opção estabelecer que a opção somente pode ser exercida na data de expiração da opção N ;
- b) americana: se a opção pode ser exercida em um instante aleatório qualquer τ dentro do seu período de maturidade N , isto é, $\tau \leq N$.

Para uma definição mais precisa⁴, seja uma opção de compra tipo européia com data de expiração N , o preço de exercício K (acordado no ato de emissão da opção) – valor pelo qual o comprador terá o direito de comprar o ativo-objeto, cujo preço de mercado S_N no tempo N pode ser diferente de K .

Se $S_N > K$, a situação é favorável ao comprador da opção, pois ele vai comprar o ativo-objeto ao preço K , e pode imediatamente vendê-lo ao preço de mercado S_N . Seu retorno será igual a $S_N - K$. Como o comprador da opção pagou um certo prêmio c_N para a aquisição deste instrumento financeiro, seu lucro líquido será $S_N - K - c_N$.⁵

Por outro lado, se $S_N < K$, o comprador da opção não a exerce, pois ele pode ir no mercado e adquirir a ação pelo preço S_N , o qual é inferior ao preço de exercício K . Esta situação é favorável ao lançador da opção de compra. A perda do comprador será igual a c_N , enquanto o lucro do lançador limita-se ao valor do prêmio c_N .

Combinando estas suposições, pode-se expressar o retorno do comprador f_N no tempo N pela fórmula:

$$f_N = (S_N - K)^+, \quad (1.1)$$

onde $a^+ = \max(a, 0)$.

Assim, o retorno líquido para um comprador de uma opção de compra tipo européia será:

$$\begin{array}{ll} (S_N - K) - c_N & \text{para } S_N > K; \text{ e} \\ - c_N & \text{para } S_N \leq K. \end{array}$$

Analogamente, o ganho líquido do lançador da opção de compra é:

⁴ Esta definição segue SHIRYAEV (1999).

⁵ Como até este momento não foi incluída a hipótese da existência de uma taxa de juros, c_N é o valor do prêmio atualizado do tempo n (data da compra da opção) para N (data de vencimento da opção).

$$c_N - (S_N - K) \quad \text{para} \quad S_N > K; \text{ e}$$

$$c_N \quad \text{para} \quad S_N \leq K.$$

Esses *payoffs* de retornos líquidos de uma opção de compra tipo européia, são demonstrados nos gráficos 1.1 – posição comprada, e 1.2 – posição vendida. Analisando esses diagramas, verifica-se que o adquirente de uma opção de compra está antecipando uma alta no preço do ativo-objeto. Similarmente, um lançador de uma opção de compra está apostando na queda do preço do ativo-objeto.

Gráfico 1.1 *Payoff* de retornos do comprador de uma opção de compra européia

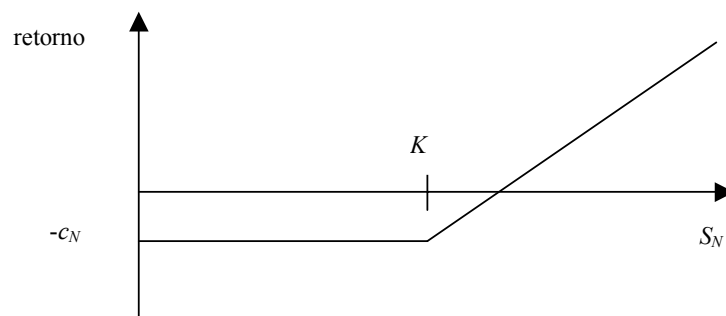
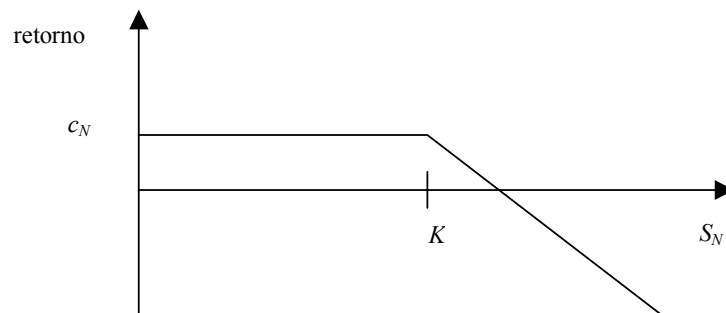


Gráfico 1.2 *Payoff* de retornos do lançador de uma opção de compra européia



No caso de uma opção de venda as situações do comprador e do lançador da opção são inversas às obtidas no caso de uma opção de compra. Seja uma opção de venda tipo européia com data de maturidade N , o preço de exercício K , em que ao comprador é conferido o direito de vender o ativo-objeto na data N . A função *payoff* do comprador de uma opção de venda será dada pela fórmula:

$$f_N = (K - S_N)^+ \quad (1.2)$$

O ganho líquido para o comprador desta opção levando em conta o prêmio p_N para adquiri-la é:

$$-p_N \quad \text{para} \quad S_N \geq K; \text{ e}$$

$$(K - S_N) - p_N \quad \text{para} \quad S_N < K.$$

Do mesmo modo, o ganho líquido do lançador da opção de venda é:

$$p_N \quad \text{para} \quad S_N \geq K; \text{ e}$$

$$p_N - (K - S_N) \quad \text{para} \quad S_N < K.$$

Nesta situação, o comprador de uma opção de venda acredita numa queda no preço do ativo-objeto, enquanto que o lançador desta opção aposta em um aumento no preço do ativo-objeto. Os gráficos 1.3 – posição comprada, e 1.4 – posição vendida, apresentam os *payoffs* de retornos líquidos para uma opção de venda tipo europeia.

Gráfico 1.3 *Payoff* de retornos do comprador de uma opção de venda

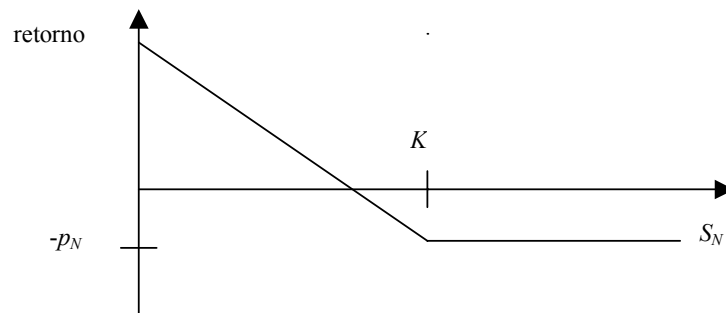
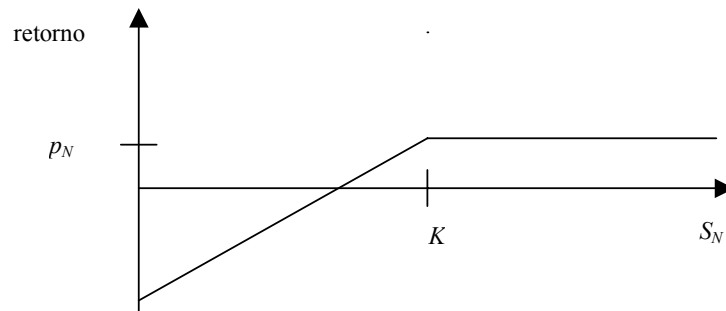


Gráfico 1.4 *Payoff* de retornos do lançador de uma opção de venda



1.3 ALGUNS ASPECTOS EM OPÇÕES

A partir da relação entre o preço de mercado do ativo-objeto S_0 em $t = 0$ e o preço de exercício K , as opções podem ser classificadas de três maneiras:

Classificação	Opção de Compra	Opção de Venda
Dentro-do-dinheiro (<i>in-the-money</i>)	$S_0 > K$	$S_0 < K$
No-dinheiro (<i>at-the-money</i>)	$S_0 = K$	$S_0 = K$
Fora-do-dinheiro (<i>out-of-the-money</i>)	$S_0 < K$	$S_0 > K$

Usando esta terminologia, somente as opções dentro-do-dinheiro é que serão exercidas.

No caso de uma opção americana dentro-do-dinheiro, muitas vezes, é melhor ao titular dessa opção aguardar até o vencimento, em vez de exercê-la imediatamente. Nesta situação diz-se que a opção possui um valor-tempo. O valor intrínseco de uma opção será dado pelo *payoff* de retornos, ou seja, será zero ou a diferença entre $S_N - K$ (para uma opção de compra) quando exercida, ou $K - S_N$ (para uma opção de venda) quando exercida. Logo, uma opção fora-do-dinheiro não possui valor intrínseco, pois não representa ao detentor da opção nenhuma vantagem comparativamente a compra à vista do ativo-objeto. O valor total de uma opção geralmente é a soma do valor intrínseco com seu valor-tempo⁶.

Um fato importante que pode ser deduzido pelos diagramas dos *payoffs* de retornos, são as enormes diferenças que existem entre o comprador e o lançador de uma opção. O comprador de uma opção pode aguardar até a data da maturidade N , e verificando a dinâmica da evolução do preço do ativo-objeto têm condições de arbitrariamente auferir grandes lucros, enquanto sua perda é limitada pelo prêmio pago na aquisição da opção. Por outro lado, o emissor de uma opção pode incorrer em grandes perdas e o seu lucro será limitado pelo prêmio da opção. Nesse ponto, pode-se argumentar por que alguém emite uma opção?

A resposta para tal questão reside no uso primário de opções para especulação⁷ e *hedding*. O emissor de opção espera realizar lucros tomando esta posição no mercado. Se ele vende uma opção de compra, está vendendo o direito ao detentor da opção o direito de comprar o ativo-objeto por K , durante o período de maturidade da opção $n = 0, 1, 2, \dots, N$, no caso de uma opção tipo americana. Logo, ele aposta na queda do preço do ativo-objeto, situação na qual a opção não será exercida, e seu lucro será igual ao prêmio da opção – ou prêmio de risco.

Da mesma forma, se o emissor acredita na alta do preço do ativo-objeto, ele vende uma opção de venda que dá o direito ao detentor da opção vender o ativo-objeto pelo preço de exercício K , numa data aleatória dentro do período de maturidade da opção (no caso se a opção for americana). Se no tempo N , $S_N > K$ o detentor não exerce a opção de venda, e o

⁶ Geralmente o prêmio de uma opção antes de seu vencimento é superior ao seu valor intrínseco, pois mesmo em opções sem valor intrínseco, o prêmio de uma opção deve remunerar o lançador tanto pelo seu risco na operação como pela imobilização de recursos.

⁷ Vale registrar uma importante distinção entre o especulador e o manipulador. O especulador é um investidor que compra algo na expectativa de vendê-lo com lucro. Ele deve estar preparado para o risco assumido nesta transação. Contudo, a presença do especulador no mercado de opções é de extrema importância, pois é ele que confere liquidez ao mercado. Por outro lado, o manipulador geralmente atua ilegalmente no sentido de auferir vantagens (desonestas) sobre informações privilegiadas. Sua presença é nociva ao mercado, pois além de prejudicar a liquidez, torna-o ineficiente no critério informacional.

emissor não precisa comprar o ativo-objeto do detentor e percebe um lucro equivalente ao prêmio da opção.

Apesar desta motivação ser plausível, tanto os *bears* como os *bulls*, podem não suportar o risco numa posição exposta desta maneira. Então, é a partir da idéia de reduzir o risco que surge o objeto de *hedding*. Criar um portfólio que contenha o ativo-objeto, bem como opções desse ativo-objeto (ou mesmo de outros ativos), de forma a assegurar uma garantia contra os movimentos imprevistos no preço do ativo-objeto S , tomando direções opostas em diferentes instrumentos financeiros. Na prática, os grandes investidores reduzem seus riscos pelo uso extensivo de diversificação, *hedding*, investindo em fundos compostos de vários títulos (ação, opções, títulos governamentais, ...), em *comodities*, etc.

1.4 PREÇOS DAS OPÇÕES

1.4.1 Principais Determinantes do Preço das Opções

Até o momento toda a análise de opções esteve centrada somente em duas variáveis – o preço do ativo-objeto e o preço de exercício. Porém, existem inúmeras outras variáveis que podem estar influenciando o preço de uma opção dentro do seu tempo de vida. A seguir, são enumerados alguns dos principais fatores mais comentados na literatura que podem influenciar o preço de uma opção, quando um desses fatores se altera, com os demais permanecendo inalterados:

- a) o preço do ativo e o preço de exercício: estes dois fatores certamente vão importar no preço da opção tanto antes da data de expiração como na data de vencimento. Para uma opção de compra européia ou americana, quanto maior for o preço do ativo, maior será o prêmio, pois maior a probabilidade da opção ser exercida. Porém, quanto maior for o preço de exercício, menor a probabilidade de a opção ser exercida, menor deve ser o valor da opção. Por outro lado, as opções de venda européia ou americana assumem situações opostas às opções de compra – maior o preço do ativo, menor o valor da opção de venda; maior o preço de exercício, maior o valor desta opção;
- b) volatilidade do ativo-objeto: se a volatilidade for uma medida da variabilidade do movimento futuro no preço do ativo, quanto maior a volatilidade, maior a probabilidade de o ativo ter um desempenho muito bom ou muito ruim. Esses efeitos se compensam para o detentor do ativo, mas não para o detentor de uma opção de compra ou de venda. Para o detentor da opção de compra elevações de preço beneficiam-no, enquanto que uma queda no preço do ativo limita sua perda

ao prêmio da opção. Ao possuidor de uma opção de venda, quedas de preço no ativo trazem ganhos e o risco é limitado ao prêmio da opção se o preço do ativo subir acima do preço de exercício. Assim, os valores das opções devem aumentar com o aumento da volatilidade;

- c) o tempo para a expiração: o efeito de um período mais longo para expiração trabalha na mesma direção de uma maior volatilidade do ativo – no caso de opções americanas. Ao longo de um período de tempo maior, uma grande quantidade de eventos pode acontecer, mesmo em um ativo com baixa volatilidade. Logo, para opções tipo americana (que podem ser exercidas aleatoriamente no período de maturidade), quanto maior o tempo restante de vida da opção, maior o prêmio, pois como o detentor de uma opção de longa duração tem no mínimo as mesmas condições de exercício que o detentor de uma opção de curta duração, no mínimo, a opção de longa duração vai valer tanto quanto a opção de curta duração. Por sua vez, opções de compra e venda européias podem não se tornar mais valorizadas com o tamanho do tempo para a expiração, já que neste tipo de opção o titular da opção só poderá exercê-la no vencimento, e podem ocorrer eventos neste período que a tornem mais valiosa ou não;⁸
- d) a taxa de juro livre de risco: quanto maior essa variável, menor o valor presente do preço de exercício para o titular da opção, bem como tende a aumentar a taxa de crescimento esperada para o preço do ativo-objeto. No caso de uma opção de venda, esses efeitos tendem a diminuir o seu valor. Para uma opção de compra, o menor valor presente do preço de exercício diminui o prêmio da opção, enquanto que a taxa de crescimento esperada para o preço do ativo tende a aumentar o prêmio. Porém, como este último efeito se sobrepõe ao primeiro, isto faz com que o preço das opções de compra sempre aumentam com a taxa de juro;⁹
- e) dividendos: este fator reduz o preço do ativo-objeto na data ex-dividendo¹⁰, situação favorável para o valor das opções de venda e desfavorável para o valor das

⁸ Vale registrar que, na prática, o prêmio de uma opção (tanto européia como americana) tende a zero, quando se aproxima a data de expiração da opção. SHIRYAEV (1999), p.32-34, desenvolve o preço justo, racional de uma opção de compra c_N , no qual o prêmio da opção aumenta com o tempo de maturidade N à razão de \sqrt{N} .

⁹ Conforme mencionado por HULL (1997), na prática um aumento nas taxas de juros livre de risco tende a diminuir o preço do ativo e o efeito líquido dessa mudança pode não ser o mencionado.

¹⁰ De acordo com CAMPBELL *att alli* (1997), por convenção, seja t a data de pagamento do dividendo do ativo e assumamos que este dividendo é pago na data t , mas antes em que o preço P_t é registrado. Então, P_t é dito ser o preço *ex-dividendo* na data t .

opções de compra. Logo, quanto maior o valor do dividendo, maior o valor da opção de venda e menor o valor da opção de compra.

A tabela 1.1 sintetiza os efeitos acima relacionados de um aumento numa variável que influencia o preço das opções, com as demais permanecendo inalteradas.

Tabela 1.1 Síntese do efeito no valor da opção de um aumento numa variável determinante do preço das opções, quando as demais permanecem inalteradas.

Variável	Efeito do Aumento			
	Tipo européia		Tipo americana	
	Opção de compra	Opção de venda	Opção de compra	Opção de venda
Preço do ativo-objeto (S)	+	-	+	-
Preço de exercício (K)	-	+	-	+
Volatilidade do ativo	+	+	+	+
Tempo para a expiração (n)	Indeterminado	Indeterminado	+	+
Taxa de juro livre de risco	+	-	+	-
Dividendos	-	+	-	+

Fonte: Elaborado pelo autor. O símbolo (+) significa tendência de alta no preço da opção, enquanto que (-) significa tendência de queda no valor da opção.

COX & RUBINSTEIN (1985) citam mais alguns fatores que podem determinar mudanças no preço das opções, porém não de forma tão direta como os seis fatores citados acima, pois em algumas situações esses fatores não influenciam o preço da opção:

1. Taxa esperada de crescimento do preço do ativo: como quanto maior o preço corrente do ativo implica em maior o valor da opção de compra, com os outros fatores permanecendo iguais, intuitivamente, se maior é o preço esperado do ativo no futuro, maior é o valor corrente da opção de compra (para a opção de venda ocorre o inverso). Porém, a partir da paridade entre *calls* e *puts* (apresentada na subseção 1.4.3) ver-se-á que a taxa esperada de crescimento do preço do ativo não é um determinante direto no valor de uma opção;
2. Propriedades adicionais do movimento de preço do ativo-objeto: a importância deste fator depende do que é incluído na variável volatilidade. Se volatilidade for uma medida que engloba todas as possíveis relevantes informações sobre a distribuição de probabilidade do preço futuro do ativo, certamente propriedades adicionais não influenciarão no valor de uma opção;

3. Atitudes dos investidores em direção ao risco: esta variável importa no valor de qualquer ativo. Porém, afeta indiretamente o valor de uma opção, através de sua influência no preço do ativo, volatilidade do ativo e taxas de juros.

Por último¹¹, são citados na literatura mais quatro variáveis relacionadas ao ambiente institucional, que podem, em princípio, influenciar o valor da opção: i) regras de tributação; ii) normas de margens de garantia; iii) custos de transação; iv) estrutura do mercado.¹²

1.4.2 Arbitragem

Antes de prosseguir no desenvolvimento de algumas relações entre os preços das opções e estratégias com opções, é necessário introduzir um dos conceitos fundamentais na teoria de precificação de derivativos financeiros e *hedding* – arbitragem: não existe nunca qualquer oportunidade de fazer um lucro instantâneo livre de risco.

As palavras chaves na definição de arbitragem são os termos instantâneo e livre de risco. Assuma que existe um investimento livre de risco que dê um retorno garantido com nenhuma oportunidade de *default* - investimento em um título governamental crível ou um depósito numa conta remunerada em um banco sólido. Pode ocorrer que o retorno do investimento em ações de empresas negociadas em Bolsas de Valores seja superior aquele obtido em um banco. Mas, isto não será possível sem um grau de risco. Logo, se um indivíduo quer um retorno maior, deverá aceitar um risco maior.

Assim, o maior retorno livre de risco que um portfólio de ativos pode realizar deve ser igual ao retorno de aplicando equivalente quantidade de dinheiro, por exemplo, em um banco. Caso não exista tal igualdade, o arbitrador pode ter lucros de arbitragem. Ignorado custos de transação, margens de garantia, impostos, pode-se realizar um certo lucro com investimento zero por vendendo e comprando opções, junto com uma apropriada posição nos ativos e tomando empréstimo em proporções corretas para realizar tais operações. Logo, em princípio, o mercado deve ser inabitado por ganhos de arbitragem. Esta hipótese é fundamental na precificação de opções, pois implica que o preço de mercado de uma opção, em princípio, será o preço justo, racional.

¹¹ Neste capítulo a discussão do valor de uma opção ocorre de forma intuitiva. Uma apresentação formal do processo de precificar opções será efetuada no capítulo subsequente.

¹² É óbvio que muitos outros condicionantes, além dos mencionados, podem estar influenciando o preço de mercado de uma opção, tanto diretamente como indiretamente.

1.4.3 A Paridade entre *Calls* e *Puts*

Existe uma importante relação entre os valores de opções de venda e de compra com a mesma data de expiração e mesmo preço de exercício e uma posição no mesmo ativo-objeto. Para desenvolver este relacionamento, introduz-se abaixo algumas notações que serão extensivamente utilizadas neste estudo:

- S : preço atual do ativo-objeto;
- K : preço de exercício do ativo;
- σ : volatilidade do ativo-objeto;
- T : data de vencimento ou expiração da opção;
- t : data de aquisição da opção ou o tempo corrente;
- r : taxa de juro livre de risco – continuamente capitalizada;
- S_T : preço do ativo-objeto no instante T ;
- C : valor de uma opção americana de compra;
- P : valor de uma opção americana de venda;
- c : valor de uma opção europeia de compra;
- p : valor de uma opção europeia de venda.

Igualmente, algumas hipóteses são necessárias para essa análise. Assim, supõem-se: i) inexistência de custos de transação; ii) todas as fontes de rendas (lucros) são taxadas à mesma alíquota de imposto; iii) é possível tomar emprestado e emprestar a uma mesma taxa de juro livre de risco; e iv) não existem oportunidades de arbitragem.

Em primeiro lugar, considerar-se-á o caso de opções europeias sobre uma ação¹³ que não paga dividendos durante o tempo de vida da opção. Suponha um portfólio em t , que seja constituído por uma posição comprada em uma ação, uma posição comprada em uma opção de venda e uma posição vendida (lançada) em uma opção de compra. As opções *call* e a *put* possuem a mesma data de expiração T e o mesmo preço de exercício K . Denotando o valor deste portfólio por Π , obtém-se:

$$\Pi = S + p - c. \quad (1.3)$$

Conforme demonstrado na subsecção 1.2 acima, o *payoff* para este portfólio na data de expiração T será:

$$\begin{aligned} S_T + (K - S_T) - 0 &= K & \text{se } S_T \leq K, & \text{ ou} \\ S_T + 0 - (S_T - K) &= K & \text{se } S_T \geq K. & \end{aligned}$$

¹³ Dado o amplo uso na literatura, referir-se-á a opções somente sobre ações, mencionando-se quando não for o caso.

Então, independentemente do valor de S_T ser maior ou menor do que K , o *payoff* deste portfólio é sempre o mesmo, isto é, é igual ao preço de exercício K . Logo, para um portfólio que dá um retorno garantido K em T , e como as opções são do estilo europeu (elas não podem ser exercidas antes do tempo de expiração), em t o portfólio deverá ser igual ao valor presente de K , ou seja, K descontado pelo tempo e por uma taxa de juro livre de risco: $Ke^{-r(T-t)}$. Isto iguala o retorno do portfólio com o retorno de um depósito em um banco. Se isto não for o caso, então operações de arbitragem podem realizar um lucro instantâneo sem risco em t com um *payoff* zero em T . Assim:

$$S + p - c = Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.4)$$

Esta equação é conhecida como a paridade entre *calls* e *puts* para opções europeias de ações que não pagam nenhum dividendo no tempo de vida da opção. A partir dessa relação pode-se, por exemplo, deduzir o valor de uma opção de compra europeia do valor de opção de venda europeia, desde que as duas opções tenham o mesmo preço de exercício e data de vencimento.¹⁴

Por segundo lugar, é importante entender o efeito dos dividendos sobre a paridade da relação em (1.4). Se for possível prever os dividendos com certeza, antes da expiração de uma opção, esta relação pode ser corrigida para levar em conta estes dividendos. Denotando por D o valor presente dos dividendos durante a vida da opção, e que o seu pagamento ocorre na data ex-dividendo anterior a data de expiração da opção. Como visto na subsecção 1.4.1-e, e na tabela 1.1, o efeito do dividendo tende a aumentar o valor da opção de venda e diminuir o valor de uma opção de compra, pois a ação geralmente decresce em igual valor aos dividendos. Logo, a paridade entre *puts* e *call* europeias torna-se igual a:

$$\begin{aligned} S - D + p - c &= Ke^{-r(T-t)}, \text{ ou} \\ c + D + Ke^{-r(T-t)} &= p + S. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ou seja, o preço da ação S é substituído pela sua diferença entre ele e o valor presente dos dividendos $S - D$. Novamente, se esta relação não for válida, existirão oportunidades de lucro sem risco arbitrariamente.

Uma terceira análise, refere-se a paridade entre os preços de opções americanas de compra e venda sobre uma ação que não paga dividendos. Segundo HULL (1997), para uma ação que não paga dividendos durante o tempo de vida de um opção, o valor de uma

¹⁴ HULL (1997), p.183, apresenta um exemplo em que se a equação (1.4) não for válida, haverá oportunidades de arbitragem. Do mesmo modo, COX & RUBINSTEIN (1985), p.42, dão um exemplo se esta relação é violada.

opção de compra européia será igual ao valor de uma opção de compra americana $c = C$, e o valor de uma opção de venda americana será maior do que o valor de uma opção de venda européia $P > p$, quando $r > 0$.¹⁵ Então, usando essas definições, pode-se rescrever a equação (1.4) como:

$$\begin{aligned} P &> C + Ke^{-r(T-t)} - S, \text{ ou} \\ C - P &< S - Ke^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por último, como já visto, a esperança de dividendos sobre uma ação faz com que o preço dessa ação diminua aproximadamente no mesmo valor dos dividendos. Logo, para opções de compra e venda americanas a relação em (1.6) pode ser reafirmada como:

$$C - P < S - D - Ke^{-r(T-t)}. \quad (1.7)$$

Assim, a paridade entre *puts* e *calls* é um importante indicador, se mantidas as hipóteses iniciais formuladas, para a verificação da consistência dos preços de mercado das opções e se não existem oportunidades de arbitragem.

1.5 ESTRATÉGIAS COM OPÇÕES

Segundo COX & RUBINSTEIN (1985), se os únicos títulos que podem ser comprados ou vendidos são *puts* e *calls* sobre uma ação, além da própria ação, existem quatro tipos elementares de posições que podem ser tomadas:

- a. descoberta;
- b. *hedge*;
- c. *spread*;
- d. combinação.

A posição descoberta são as posições simples que podem ser tomadas sobre uma ação – posição comprada na ação, posição vendida na ação, posição comprada em uma *call*, posição vendida em uma *call*, posição comprada em uma *put*, e uma posição vendida em uma *put* (posições já examinadas diretamente ou indiretamente nas subseções 1.1 e 1.2). *Hedges*, *spreads* e combinações são ditas serem posições cobertas, em que um ou mais títulos protegem o retorno de um ou mais de um de outros títulos, todos relacionados a mesma ação.

¹⁵ HULL (1997), p.177-181, demonstra analiticamente essas relações. Ainda, seguindo a relação que $c = C$, deduz que nunca poderá ser ideal exercer uma opção de compra americana antes da data de expiração, sobre uma ação que não paga dividendos. Porém, quando os dividendos são esperados, geralmente é vantajoso exercer a opção de compra americana imediatamente antes de uma data *ex-dividendo*, já que o dividendo faz com que o preço da ação decresça.

Abaixo, são relacionadas algumas estratégias em posições cobertas, bem como o diagrama de *payoff*¹⁶ em cada caso. Vale registrar que todas essas estratégias/*payoffs* são válidas somente se todas as partes das posições são mantidas até a data de expiração da opção. Como elas envolvem compras e vendas em opções, são válidas, em princípio, para as opções tipo européia.

1.5.1 Hedge

Um *hedge* é uma estratégia que combina uma opção sobre uma ação e a própria ação, de tal maneira que tanto a ação proteja a opção contra perdas ou a opção proteja a ação contra perdas. A primeira e mais direta forma de *hedge* no mercado de opções é a compra de opções de venda para um produtor - garante um preço mínimo para o seu produto, e a compra de opções de compra pelo consumidor deste produto - garante um preço máximo ao qual o produto irá ser adquirido.

Assim, seja um portfólio que consiste de uma posição comprada numa ação e vendida numa opção de compra - indicada pelas linhas pontilhadas no gráfico 1.5. Essa estratégia é conhecida como lançar uma opção de compra coberta, pois a posição comprada na ação protege o investidor contra a possibilidade de uma elevação acentuada em seu preço. Pode-se ver pelo gráfico 1.5, que essa estratégia é semelhante ao *payoff* de um lançador de uma opção de venda (gráfico 1.4). Por sua vez, essa semelhança pode ser derivada da paridade entre *puts* e *calls*. Rescrevendo a equação (1.5) como:

$$S - c = Ke^{-r(T-t)} + D - p. \quad (1.8)$$

A equação (1.8) mostra que o lançamento de uma opção de compra coberta $S - c$, é igual a uma posição vendida em uma opção de venda ($-p$), mais uma certa quantidade de dinheiro $Ke^{-r(T-t)} + D$.

O gráfico 1.6 apresenta uma relação inversa ao do lançamento de uma opção de compra coberta - uma posição vendida na ação e comprada numa opção de compra. O portfólio resulta em um *payoff* semelhante ao da posição comprada em opção de venda. Multiplicando os dois lados da equação (1.8) por (-1), pode-se chegar a essa conclusão.¹⁷

¹⁶ Em todos os diagramas de *payoff* nessa subseção, a linha pontilhada indica a posição individual do título no *portfólio*, enquanto a linha contínua indica a relação entre lucros/perdas e o preço da ação do *portfólio*.

¹⁷ $c - S = p - Ke^{-r(T-t)} - D$, ou seja, uma posição comprada numa opção de compra combinada com uma posição vendida na ação é equivalente a uma posição comprada em uma opção de venda menos uma certa quantidade monetária.

Gráfico 1.5 Hedge: posição comprada na ação e vendida em opção de compra

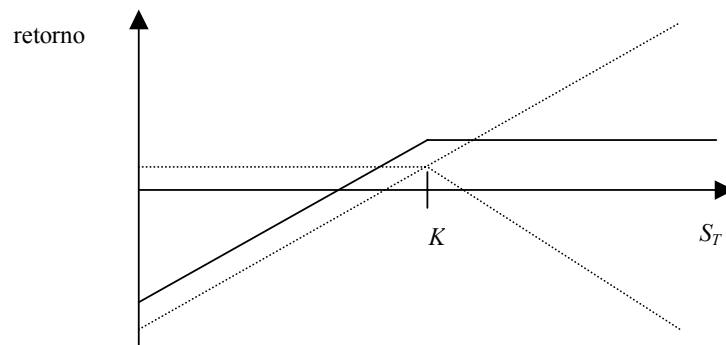
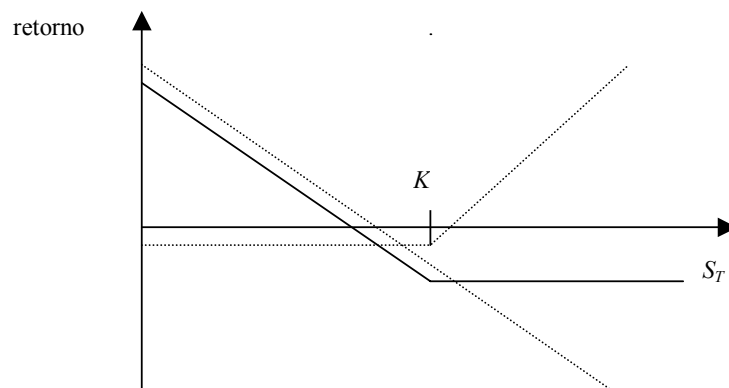


Gráfico 1.6 Hedge: posição vendida na ação e comprada em opção de compra



No gráfico 1.7, a estratégia de investimento consiste na compra de uma opção de venda sobre uma ação e a compra da própria ação, chamada de *hedding* com opção de venda. Esse portfólio é semelhante a posição comprada em opção de compra, a qual também pode ser derivada da equação (1.5) – uma posição comprada em opção de venda mais uma posição comprada na ação, é igual a uma posição comprada em opção de compra mais uma quantidade de dinheiro.

O gráfico 1.8 estabelece uma posição reversa da anterior – uma posição vendida em opção de venda, combinada com uma posição vendida na ação. O formato desse portfólio resulta numa semelhança a uma posição vendida em opção de compra. Novamente, essa derivação esta de acordo com a paridade entre *puts* e *calls* – equação 1.5¹⁸.

¹⁸ Aqui, também, usa-se o artifício de multiplicar por (- 1) ambos os lados da equação 1.5.

Gráfico 1.7 Hedge: posição comprada na ação e em opção de venda

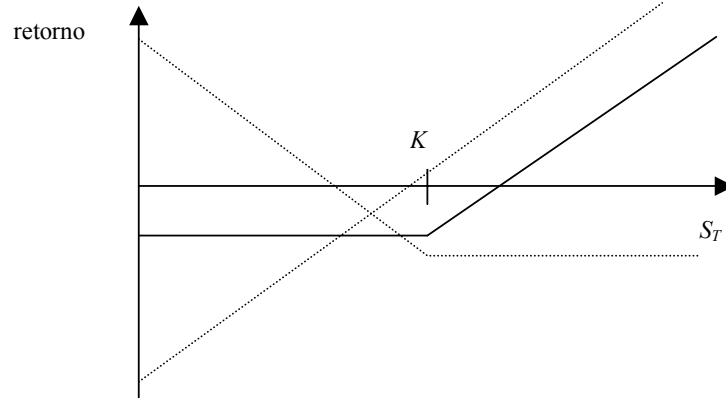
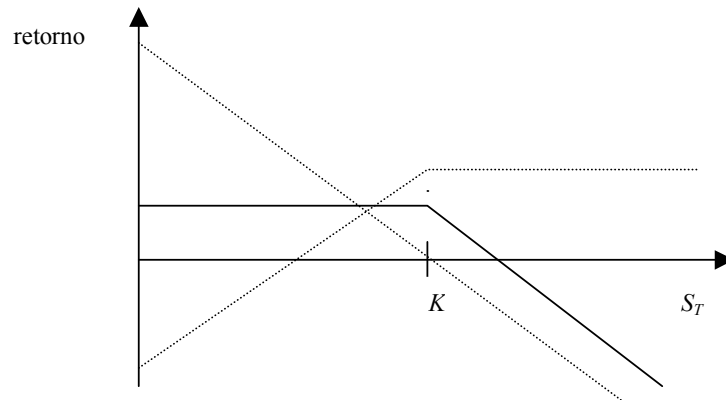


Gráfico 1.8 Hedge: posição vendida na ação e em opção de venda



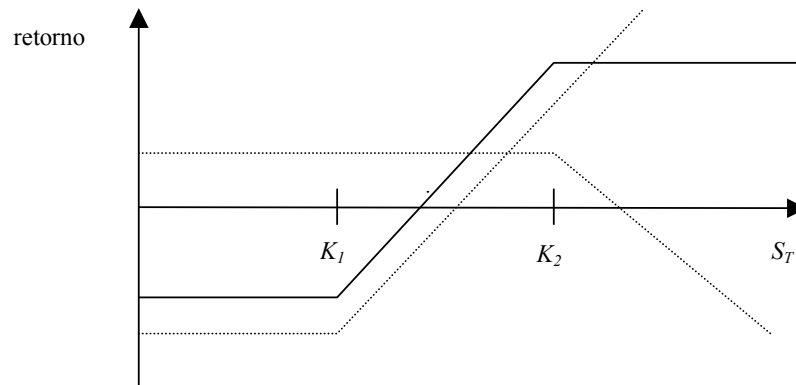
1.5.2 Spread

Um *spread* é uma estratégia que combina opções de diferentes séries, mas da mesma classe, onde algumas são compradas e outras são vendidas, ou seja, enseja tomar posições em duas ou mais opções de compra ou em opções de venda. O objetivo numa estratégia de *spread* é tentar controlar, simultaneamente, o risco e a alavancagem de um portfólio de ações face às expectativas dos movimentos futuros em seus preços.

Um *spread* de alta consiste na compra de uma *call* com preço de exercício baixo, K_1 , e na venda de outra *call* com preço de exercício alto, K_2 , isto é, em que $K_2 > K_1$. Nesta operação de *spread* de alta com *call* – *call bull spread*, o investidor limita sua área de risco e garante um *spread* na alta da *call*, ou seja, ele espera que os preços da ação subam até a data de vencimento da opção. Como o preço de uma opção de compra sempre cai à medida que aumenta o preço de exercício, o valor da opção vendida é inferior ao da opção

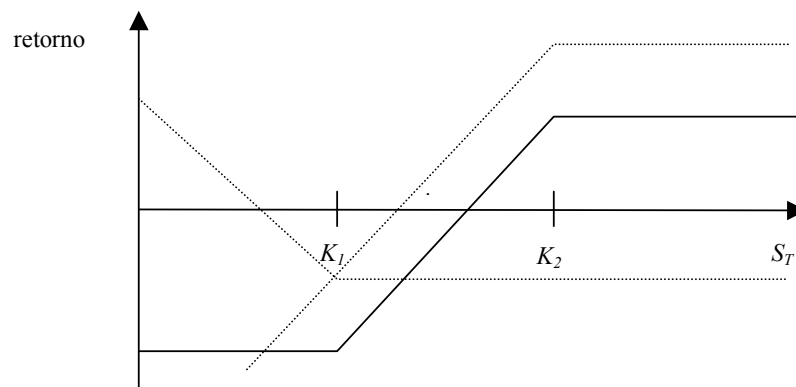
comprada. Logo, um *call bull spread* incorre em um investimento inicial ao especulador. O gráfico 1.9 ilustra esta estratégia.

Gráfico 1.9 Spread de alta com call



O *spread* de alta pode também ser criado através da compra de uma opção de venda com preço baixo de exercício, K_1 , e o lançamento de uma opção de venda com preço de exercício alto, K_2 , isto é, onde $K_1 < K_2$. Essa operação é chamada de *spread* de alta com *put* – *put bull spread*. Neste caso, o investidor têm um fluxo de caixa positivo no ato da constituição dessa estratégia, pois quanto maior o K , mais vale a opção de venda, e então, o valor da opção vendida é superior ao valor da opção comprada. Contudo, os retornos finais nessa estratégia serão inferiores aos que podem ser obtidos na estratégia de *spread* de alta com *call*. O gráfico 1.10 demonstra essa estratégia.

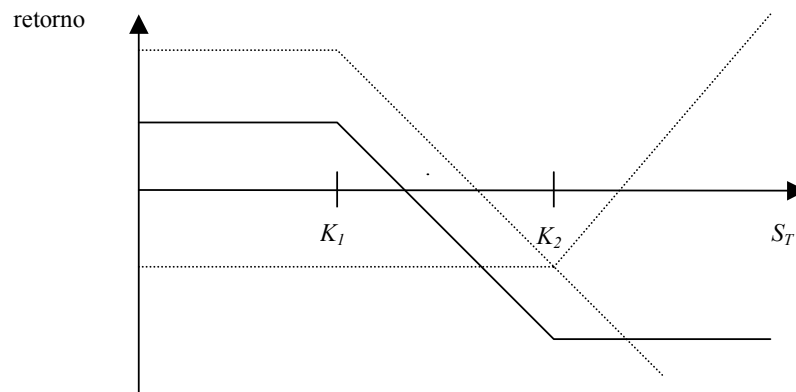
Gráfico 1.10 Spread de alta com put



Se ao contrário da estratégia com *spread* de alta - onde o investidor espera que o preço da ação suba, ele tem expectativas que o preço da ação caia, ele montará estratégias de

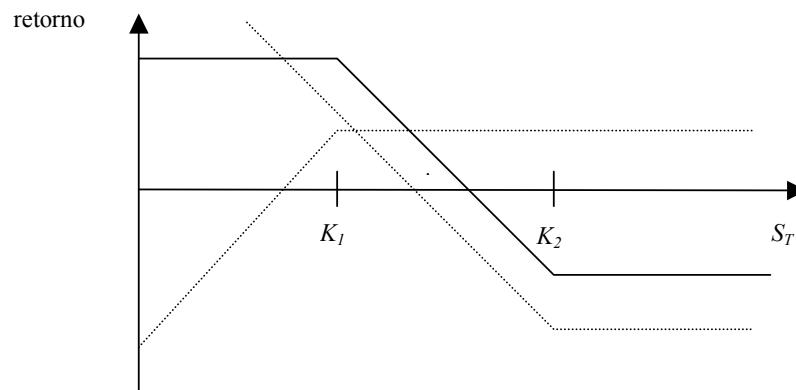
spread de baixa, tanto com *call* ou *put*. Um *spread* de baixa com opções de compra – *call bear spread*, consiste em uma posição comprada de uma *call* com K_2 , e de uma posição vendida em uma *call* com K_1 , mas $K_2 > K_1$. Esta estratégia resulta um fluxo de caixa inicial positivo, pois o valor da opção comprada é inferior ao valor da opção vendida. Esta situação é visualizada no gráfico 1.11.

Gráfico 1.11 *Spread* de baixa com *call*



Num *spread* de baixa com *put* – *put bear spread*, o investidor compra uma *put* com K_2 , e vende outra *put* com K_1 , sendo que $K_2 > K_1$. Logo, isto implica um investimento inicial, conforme pode-se ver no gráfico 1.12. Segundo HULL (1997), o investidor compra uma *put* com certo K , mas prefere desistir de parte de retorno potencial, vendendo uma *put* com K menor. Em troca, ele obtém o preço da opção vendida.

Gráfico 1.12 *Spread* de baixa com *put*

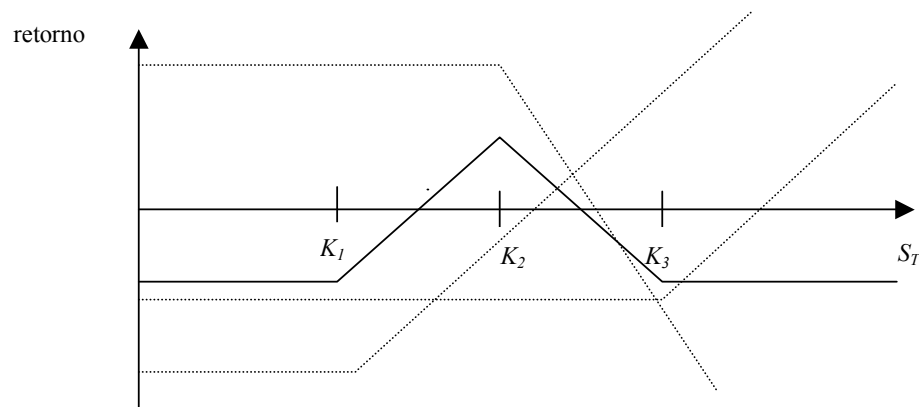


Em um *spread* borboleta tanto com opções de compra como opções de venda, envolve posições em opções com $K_1 < K_2 < K_3$. Um *spread* borboleta com opções de compra – *long*

call butterfly, consiste na compra de uma *call* com K_1 e outra com K_3 , e na venda de duas *calls* com K_2 . Geralmente, K_2 deve estar *nearest-at-the-money*. Este *payoff* é ilustrada no gráfico 1.13. Um pequeno lucro pode ser realizado somente se o preço da ação ficar próximo ao preço de exercício das opções emitidas. Logo, esta estratégia é apropriada ao investidor que não acredita em grandes volatilidades no preço da ação. Ademais, exige um pequeno investimento inicial.

Um *spread* borboleta com opções de venda envolve o mesmo portfólio acima, porém utilizando opções de venda. Dado a paridade entre *puts* e *calls* e como todas as opções são do tipo europeu, o *payoff* resultante será idêntico ao mostrado no gráfico 1.13, bem com o investimento inicial. Ainda, nesse sentido, pode-se usar estratégias opostas as utilizadas acima – lançar opções com K_1 e K_3 e adquirir duas opções com K_2 , as quais resultarão também no mesmo resultado ilustrado no gráfico 1.13, porém, produzirão um lucro pequeno se houver variação significativa no preço da ação.

Gráfico 1.13 *Spread* borboleta com *call*



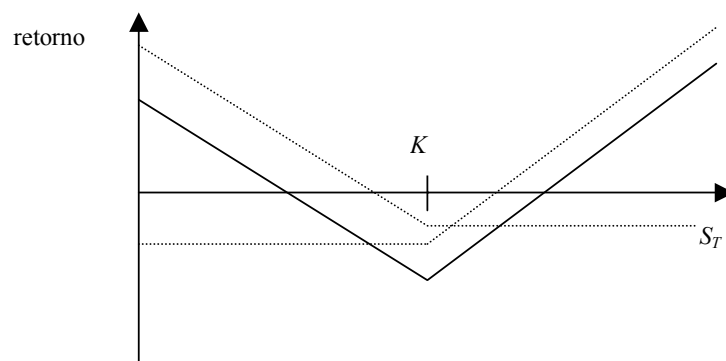
Por outro lado, se as opções compradas ou vendidas são da mesma ação e com o mesmo preço de exercício, mas com diferentes datas de expiração, um *spread* calendário pode ser realizado.

Se um portfólio é montado a partir da aquisição de uma opção e outra vendida, ambas da mesma ação, mas com diferentes preços de exercício e diferentes datas de expiração, então essa estratégia é chamada de *spread* diagonal.

1.5.3 Combinação

Uma combinação é uma estratégia que envolve opções de diferentes tipos na mesma ação, tal que elas podem ser compradas ou vendidas. A combinação mais apreciada pelos especuladores é o *straddle*, tanto comprado como vendido. Um *straddle* de compra – também denominado como *bottom* (uma perda máxima limitada) *straddle*, é obtido pela compra de uma *call* e de uma *put* com mesmos preços de exercícios K e data de vencimento, obtendo-se lucro tanto em altas quanto em baixas no preço de mercado da ação. A perda máxima possível nesta operação é limitada ao prêmio pago pelas opções. O gráfico 1.14 ilustra a compra de *straddle* – *long straddle*. Esta operação é também conhecida como compra de volatilidade, pois o lucro só advém de fortes oscilações no preço da ação.

Gráfico 1.14 Combinação: *straddle* de compra – *bottom straddle*



Um *top* (um lucro máximo limitado) *straddle* ou simplesmente *straddle* de lançamento é a venda de uma opção de compra e de uma opção de venda com mesmos preços de exercícios K e data de vencimento. Porém, nesta estratégia o investidor só obterá lucro se o preço da ação estiver próximo do K na data de vencimento. Logo, como a perda decorrente de grande volatilidade em qualquer direção é ilimitada, ela representa uma operação de alto risco, conforme pode ser constatado pelo gráfico 1.15.

Um *strip* refere-se a uma compra de uma opção de compra e em duas opções de venda de mesmos K e data de vencimento. O investidor espera uma grande volatilidade no preço da ação, provavelmente para baixo. O gráfico 1.16 mostra o *payoff* de retorno nesta situação.

Uma combinação de uma posição comprada em duas opções de compra e em uma opção de venda com mesmos K e data de vencimento, é denominada de *strap* – o

especulador acredita que uma grande variação no preço da ação será provavelmente para cima. O gráfico 1.17 demonstra esta situação.

Gráfico 1.15 Combinação: *straddle* de venda – *top straddle*

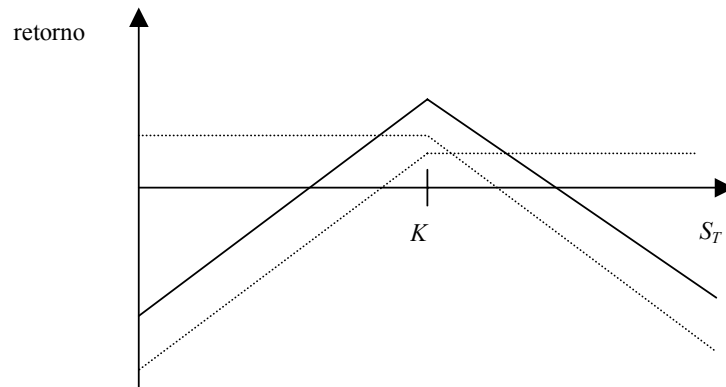


Gráfico 1.16 Combinação: *strip*

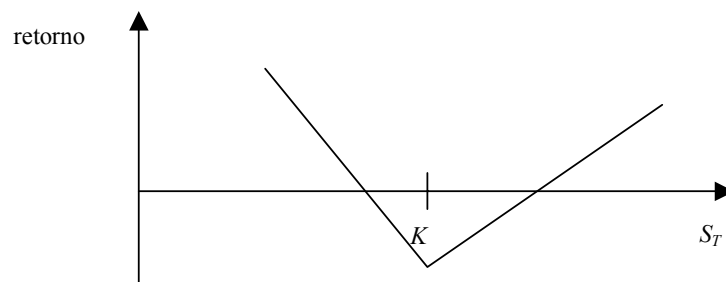
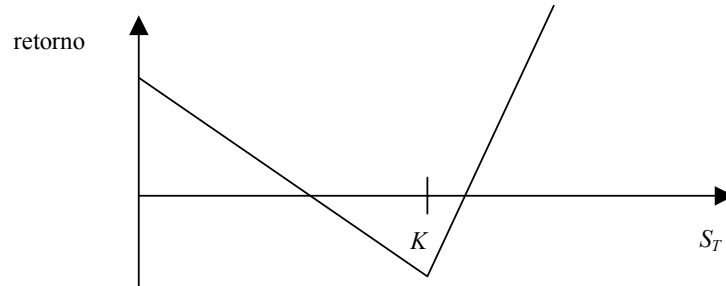


Gráfico 1.17 Combinação: *strap*



Uma combinação que é similar ao *straddle*, exceto no fato que as opções contratadas possuem preços de exercício diferentes, é denominada de *strangle*. Num *strangle* de compra ou *bottom vertical combination*, o investidor compra uma *put* com preço de exercício menor K_1 e uma *call* com preço de exercício mais alto K_2 . A vantagem dessa operação é apresentar um custo inferior ao da *straddle*, mas existe a necessidade de uma

maior volatilidade no preço da ação para ter algum retorno positivo. Contudo, se o preço da ação terminar num valor intermediário, ou seja, mais próximo do preço de exercício, o risco de perda aumentará quando comparado a um *straddle* de compra, conforme pode ser visualizado pelo gráfico 1.18.

Um *strangle* de venda - *top vertical combination*, é destinado ao especulador que não têm expectativas de grande volatilidade no preço da ação. Por outro lado, semelhante ao *straddle* de venda, representa uma estratégia de alto risco, pois seu retorno negativo é ilimitado – gráfico 1.19.

Gráfico 1.18 Combinação: *strangle* de compra

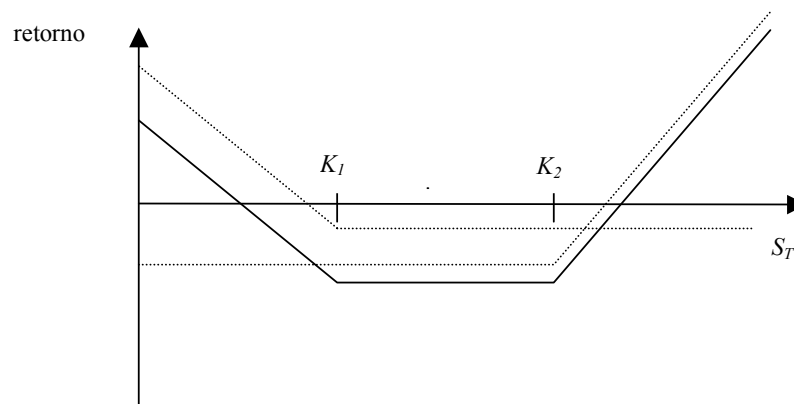
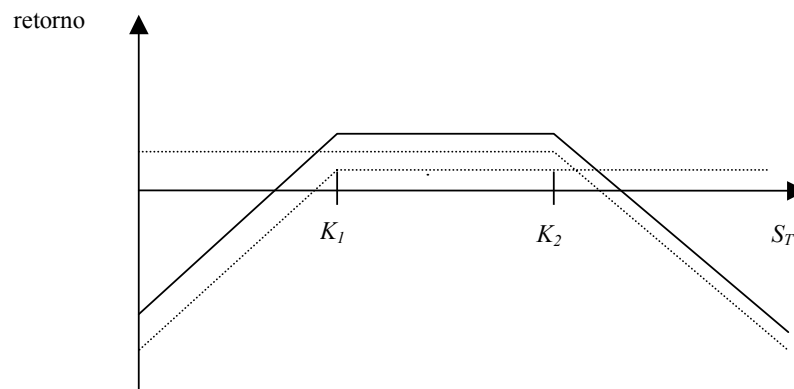


Gráfico 1.19 Combinação: *strangle* de venda



Em suma, existem inúmeros portfólios que podem ser construídos. Contudo, o principal objetivo em qualquer estratégia é a possibilidade de reduzir o risco envolvido nas operações, mesmo que isso resulte na limitação do *payoff* de retorno.

1.6 MERCADO BRASILEIRO DE OPÇÕES¹⁹

O mercado de opções é um mercado onde sobre um lote de um determinado ativo-objeto são negociados direitos de compra e venda, com preços e prazos de exercícios predeterminados. Apesar de existirem inúmeros tipos de opções de balcão ou não de balcão (conforme mencionado na subseção 1.1), são as opções negociadas em bolsa o objetivo deste estudo. Mais especificamente, opções sobre as ações da Tele Norte Leste Participações S.A., as quais são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa). Logo, primeiro serão abordados alguns aspectos relacionados a negociação de opções na Bovespa e, adicionalmente, à Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) – as duas principais Bolsas no Brasil.

1.6.1 Bolsa de Valores de São Paulo

A Bovespa foi fundada em 1890. Até 1965/66, as Bolsas²⁰ eram entidades oficiais corporativas, vinculadas às secretarias de finanças dos governos estaduais e compostas por corretores nomeados pelo poder público. A partir dessa data, elas têm a característica institucional que mantêm até hoje: associações civis sem fins lucrativos, com autonomia financeira e patrimonial, que operam sob supervisão da Comissão de Valores Mobiliários (CVM). Nessa nova estrutura os corretores individuais foram substituídos por sociedades corretoras, constituídas sob a forma de sociedade por ações nominativas ou por cotas de responsabilidade limitada.

No início da década de 1970, a Bovespa foi a primeira bolsa brasileira a implantar o pregão automatizado com a disseminação de informações em tempo real e em *on-line*. Em 1979, ela foi a pioneira na introdução de operações com opções sobre ações no Brasil. Nos anos 80, implantou o Sistema Privado de Operações por Telefone (SPOT), bem como desenvolveu um sistema de custódia fungível de títulos e implantou uma rede de serviços *on-line* às corretoras. Em 1990, iniciou as negociações através do Sistema de Negociação Eletrônica – CATS (*Computer Assisted Trading System*) que operava simultaneamente com o sistema tradicional de Pregão Viva Voz. Em 1997, foi implantado um novo sistema de negociação eletrônica – o Mega Bolsa: um sistema tecnológico altamente avançado, que ampliou o volume potencial de processamento de informações. Em 1999, lançou o *Home Broker* – permite ao investidor, por meio do *site* das Corretoras na Internet, transmitir sua

¹⁹ Praticamente todas as informações obtidas nesta subseção foram retiradas do site da Bovespa e da BM&F, www.bovespa.com.br e www.bmf.com.br, respectivamente.

²⁰ Isto vale tanto para a Bovespa como as demais bolsas brasileiras, incluindo a BM&F.

ordem de compra ou de venda diretamente ao Sistema de Negociação da Bovespa; e o *After-Market* – sessão noturna de negociação eletrônica: meios de informação e transmissão que facilitam e tornam viável a participação do pequeno e médio investidor no mercado. Atualmente, o acordo à integração de todas as bolsas brasileiras em torno de um único mercado de valores – o da Bovespa, a tornou no maior centro de negociação com ações da América Latina.

Na Bovespa²¹, regularmente, são negociadas ações de companhias abertas, opções sobre ações, direitos e dividendos sobre ações, bônus de subscrição e quotas de fundos, debêntures e notas promissórias. A tabela 1.2 apresenta o volume financeiro acumulado negociado anualmente na Bovespa nos anos de 1999 a 2002. Note que o ano de 2002 teve o pior desempenho dos últimos quatro anos em termos de valores negociados: ano de eleição do novo Presidente da República e recrudescimento da recessão mundial, são fatores que podem justificar o declínio do mercado de capitais no Brasil.

Tabela 1.2 Volume financeiro negociado na Bovespa nos anos de 1999 a 2002

Ano	Volume em R\$	Média mensal em R\$
1999	154.078.728.655,26	12.839.894.054,61
2000	185.190.612.974,75	15.432.551.081,23
2001	150.304.681.375,96	12.525.390.114,66
2002	138.969.058.899,27	11.580754.908,27

Fonte: Bovespa. Os volumes apresentados são os valores de negociação acumulados no ano.

No caso específico às opções sobre ações, os meses de vencimentos ocorrem normalmente nos meses pares, na terceira segunda-feira do mês de vencimento²². As opções autorizadas à negociação e/ou lançamentos são divulgados semanalmente no Boletim Diário de Informações da Bovespa – BDI e no Jornal Gazeta Mercantil. Também são transmitidas no serviço NBC (notícias Bovespa/CBLC), ou no sistema de negociações

²¹ A legislação atual autoriza as bolsas de valores a negociarem títulos e valores mobiliários de emissão ou co-responsabilidade de companhias abertas, registrados na CVM, assim como opções de compra e venda sobre ações de companhias abertas, debêntures (convertíveis ou simples) e “*comercial papers*” registrados para colocação pública. Direitos e índices referentes às ações negociadas, além de recibos de depósitos de ações, quotas de fundos ou de clubes de investimentos, também são negociados nas bolsas mediante autorização do Conselho de Administração ou por solicitação da bolsa à CVM.

²² Por exemplo, 21 de outubro de 2002 e 16 de dezembro de 2002, são dias de vencimento de opções sobre ações na Bovespa. Porém, a partir de novembro/2002, os vencimentos das opções acontecerão mensalmente. Além disso, a Bovespa passou a permitir a abertura de duas séries de opções para o mesmo papel. Assim, por

Mega Bolsa. As séries de opções autorizadas são identificadas pelo símbolo do ativo-objeto associado a uma letra – que identifica se a opção é de compra ou de venda e o mês de vencimento, e a um número – que indica o preço de exercício. A tabela 1.3 correlaciona as letras ao tipo de opção e o vencimento.

Tabela 1.3 Identificação do tipo da opção associado ao seu vencimento através da letra que aparece após o código do ativo-objeto

Opção		Vencimento
Compra	Venda	
A	M	Janeiro
B	N	Fevereiro
C	O	Março
D	P	Abril
E	Q	Maio
F	R	Junho
G	S	Julho
H	T	Agosto
I	U	Setembro
J	V	Outubro
K	W	Novembro
L	X	Dezembro

Fonte: Bolsa de Valores de São Paulo.

Vale destacar que as operações no mercado de opções somente podem ser efetuadas por sociedades corretoras autorizadas pela Bovespa, que observam o Regulamento de Operações no Mercado de Opções nas suas realizações.

Um aspecto importante é se a opção de compra é coberta ou não. Uma opção de compra é coberta quando o lançador deposita, em garantia, a totalidade dos ativos-objeto a que se refere a opção lançada. Se contudo, o lançador não efetua o depósito da totalidade da garantia, a opção de compra é classificada como descoberta. Neste caso, o lançador descoberto deve atender a exigência de margem por meio do depósito de ativos aceitos em garantia pela Companhia Brasileira de Custódia e Liquidação – CBLC: ações que compõem o Índice Bovespa, títulos públicos federais e privados, cartas de fiança bancária

exemplo, a Telemar PN, o papel mais líquido, têm a série K, para o vencimento de 18 de novembro de 2002 e L para dezembro.

incondicionada e outros. A exigência de margem é avaliada diariamente. Tanto o lançador coberto como o descoberto de uma opção de compra pode fechar sua posição e desta forma encerrar a obrigação assumida, e apurar o lucro ou prejuízo até então acumulado.

Do mesmo modo, um lançador de opções de venda deve atender a exigência de margem por meio do depósito de ativos aceitos em garantia pela CBLC. Como em opções de compra a descoberto, a exigência de margem também é avaliada diariamente. O risco no lançamento de opção de venda é elevado, mas ao contrário do risco de lançar opção de compra a descoberto, é limitado, pois o seu prejuízo máximo é igual ao preço de exercício menos o preço à vista do ativo-objeto no momento do exercício e o prêmio recebido pelo lançamento.

O nível de garantia é calculado diariamente pelo CBLC por meio do sistema de cálculo de margem *Clearing Members Theoretical Intermarket Margin System* – CM-TIMS. Esse sistema toma por base o cálculo de dois componentes para obter o valor da margem total: i) margem de prêmio: corresponde ao custo/valor de liquidação da posição, isto é, corresponde ao preço de fechamento do ativo-objeto a que se refere a opção; ii) margem de risco: é a perda potencial da posição decorrente de um movimento adverso no preço do ativo-objeto, calculada pelo CM-TIMS levando em conta a pior posição de dez cenários relativos ao preço de mercado do ativo. Então, conforme o comportamento do mercado, o lançador descoberto que esteja com prejuízo deve recompor o nível de garantia.

Ao ser exercida uma opção²³, mediante a entrega em pregão, pela sociedade corretora, do aviso de exercício, a designação para o atendimento do exercício resulta do sorteio realizado primeiro entre as posições lançadoras cobertas de opções de igual série, e após esgotadas as posições cobertas, por sorteio entre as descobertas. A Bovespa permite que o titular de uma de opção de compra exerça sua opção e venda as ações-objeto no mesmo pregão. Também garante ao titular de uma opção de venda a oportunidade de comprar no mercado à vista as ações que serão entregues no exercício. Assim, o lançador de uma opção de compra pode comprar à vista no mesmo pregão em que é exercido, e o lançador de uma opção de venda pode vender à vista as ações recebidas no exercício. Todas as operações de exercício são registradas em pregão como compra e venda à vista das ações-objeto.

²³ Segundo o Regulamento de Operações – Mercado de Opções – Bovespa, capítulo II, seção III, artigo 8, os titulares de opção de compra poderão exercê-las, a qualquer tempo, a partir do dia seguinte de sua aquisição, até a data do seu vencimento. Os titulares de opção de venda poderão exercê-la somente na data do vencimento.

1.6.2 Bolsa de Mercadorias e Futuros

A Bolsa de Mercadorias de São Paulo (BMSP), criada em 26 de outubro de 1917 por empresários paulistas ligados à exportação, ao comércio e à agricultura, foi a primeira no Brasil a introduzir operações a termo. Em 31 de janeiro de 1986, começa a funcionar a Bolsa Mercantil & de Futuros, a BM&F. Em 09 de maio de 1991, a BM&F e a BMSP fundem suas atividades operacionais e surge a Bolsa de Mercadorias & Futuros, mantendo a sigla BM&F. Em 30 de junho de 1997, um acordo operacional com a Bolsa Brasileira de Futuros (BBF), fundada em 1983 e sediada no Rio de Janeiro, objetivou fortalecer o mercado nacional de *commodities* e consolidar a BM&F como o principal centro de negociação de derivativos do Mercosul.

No dia 31 de janeiro de 2000, a BM&F ingressa na Aliança *Globex*²⁴: objetivo da aliança é servir de plataforma para acordos bilaterais ou multilaterais, visando acesso aos vários mercados e redução de margens por meio de sistemas mútuos de compensação, troca de informações, entre outros. No mesmo ano, dia 22 de setembro, a BM&F introduz seu sistema eletrônico de negociação, o *Global Trading System (GTS)*. Em 22 de abril de 2002, dá início às atividades da *Clearing* de Câmbio. No dia 25 do mesmo mês, adquire da CBLC os direitos de gestão e operacionalização das atividades da câmara de compensação e liquidação de operações com títulos públicos, títulos de renda fixa e ativos emitidos por instituições financeiras; e os títulos patrimoniais da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro (BVRJ), passando a deter os direitos de administração e operacionalização do sistema de negociação de títulos públicos e outros ativos, conhecido como Sisbex.

A BM&F é uma associação sem fins lucrativos, que efetua o registro, a compensação e a liquidação - física e financeira, das operações realizadas em pregão ou em sistema eletrônico, bem como desenvolver, organizar e operacionalizar mercados livres e transparentes, para a negociação de títulos e ou contratos que possuam como referência ativos financeiros, índices, indicadores, taxas, mercadorias e moedas, nas modalidades à vista e de liquidação futura.

Nesse sentido, uma das condições necessárias ao perfeito funcionamento dos mercados financeiros e de capitais é a crença de seus participantes de que seus ganhos serão recebidos e de que suas operações de compra e venda serão liquidadas nas condições e prazos estabelecidos. Um sistema de compensação que chama para si a responsabilidade

²⁴ A Aliança *Globex* é formada pelas bolsas de Chicago – *Chicago Mercantile Exchange*, Paris – *Euronext*, Cingapura – *Singapore Exchange-Derivatives Trading*, Madri – *Meff* (Mercado Oficial de Futuros y Opciones Financeiros), e Montreal – *Montreal Exchange*.

pela liquidação dos negócios, transformando-se no comprador para o vendedor e no vendedor para o comprador, com estruturas adequadas ao gerenciamento de risco de todos os participantes, é proporcionado pelas três *clearings* da BM&F, cada qual com as características dos mercados para os quais oferecem serviços de registro, compensação e liquidação de operações: *clearing* de derivativos, *clearing* de câmbio e a *clearing* de ativos.

No modelo da *Clearing* de Derivativos é o Membro de Compensação (MC) o responsável, perante a BM&F, pela liquidação de todas as operações. Além da aquisição do título e de sua caução a favor da BM&F, o MC precisa, no plano financeiro, manter o capital de giro mínimo determinado pela *Clearing*; no plano operacional, manter depósito de garantia para compor o Fundo de Liquidação de Operações e cumprir os limites impostos às posições sob sua responsabilidade, para diminuir o risco de alavancagem. Para garantir a integridade do mercado e os direitos contratuais de seus participantes, a estrutura de salvaguardas dessa *Clering* é subdividida em: i) limite de risco intradiário do MC; ii) limites de concentração de posições e de oscilação diária de preços; iii) margem de garantia; iv) fundo especial dos membros de compensação, fundo de liquidação de operações e fundo de garantia.

A *Clearing* de câmbio, que começou a funcionar em 22 de abril de 2002, junto com o novo Sistema de Pagamentos Brasileiro²⁵, é a primeira câmara de compensação e liquidação de operações no mercado interbancário de câmbio, que oferece todas as condições operacionais apropriadas à gestão de riscos intrínsecos às operações de compra e venda de moeda estrangeira cursadas por intermédio de seus sistemas. Para tanto, ela mantém conta de liquidação em moeda nacional junto ao Banco Central e contas de liquidação em moeda estrangeira no exterior, com as movimentações financeiras ocorrendo dentro da mesma “janela de tempo”. Por ser a parte contratante de todas as operações cursadas em seus sistemas, viabiliza a eliminação do risco de principal, utilizando o princípio de pagamento contra pagamento por valores líquidos compensados. Sua estrutura de salvaguardas é composta pelo Fundo de Participação, pelo Fundo Operacional e pelo Patrimônio Especial.

²⁵ O Sistema de Pagamentos Brasileiro (SPB) implantado pelo Banco Central do Brasil, visa, de um lado, reduzir o risco do sistema financeiro ao viabilizar a liquidação em tempo real das operações financeiras de grande porte e, de outro, torna necessária a existência de uma folga de reservas para cada instituição financeira participante do SPB.

A *Clearing* de Ativos, adquirida da CBLC, que deverá começar a operar a partir de 2003, terá o intuito de processar a liquidação das operações realizadas nos sistemas Sisbex-Negociação e Sisbex-Registro com títulos públicos e com títulos de renda fixa emitidos por instituições financeiras.

Na BM&F são realizados negócios nos mercado disponível, a termo, futuro e de opções. A respeito de dólar comercial, as opções sobre esse ativo são do tipo européia, com vencimento sempre no primeiro dia útil de cada mês. A títulos de ilustração, a tabela 1.4 abaixo lista os produtos em cada mercado que foram negociados na BM&F no mês de setembro de 2002, no pregão de viva voz e no *global trading system* (GTS) e de balcão.²⁶

Tabela 1.4 - Principais produtos negociados na BM&F no mês de setembro de 2002

Mercado							Mercado de Balcão	
Pregão de Viva Voz + GTS							Swaps	Opções Flexíveis
Ouro	Índice de ações	Taxas de Juro	Taxas de Câmbio	Tít. Dívida Externa	Agropecuários	Contratos Minis		
- Disponível - Opções de compra - Opções de venda - termo	- Ibovespa futuro - Opções de compra s/fut. - Opções de venda s/ fut.	- DI de um dia futuro . Opções de compra s/IDI . Opções de venda s/IDI -Cupom Cambial futuro . FRA . Swap - Cupom DI x IGP-M termo - DI termo com ajuste	-Dólar Comercial futuro . <i>forward points</i> . opções de compra . opções de venda - Euro futuro	- C-Bond futuro - EI-Bond futuro	- Açúcar cristal futuro - Boi gordo -Café arábica futuro . opções de compra s/fut. . opções de venda s/futuro - Milho futuro - Álcool anidro futuro	- Disponível fracionário (10g) - Disponível fracionário (0,225g) - Ibovespa fracionário futuro - Dólar Comercial frac. Fut. - Swap cambial futuro	- DI x pré - DI x dólar comercial - DI x TR - DI x índice de preços - DI x Selic - DI x Anbid - DI x Ibovespa - DI x TJLP - DI x euro - DI x IGP-M - Dólar comercial x pré - Selic x pré - Selic x dólar comercial	- Compra de dólar - Venda de dólar - Compra de ibovespa - Venda de ibovespa

Fonte: BM&F.

A tabela 1.5 apresenta os volumes financeiros acumulados negociados nos anos de 2000 a 2002 na Bolsa de Mercadorias e Futuros. Os expressivos valores apresentados devem-se as operações realizadas com taxas de juros e de câmbio, que importam em torno de 90% do total transacionado. Vale destacar que a BM&F é responsável pelos serviços de registro, compensação e liquidação de operações em três câmaras de compensação: câmbio, derivativos e ativos, que podem justificar esses volumes financeiros.

²⁶ Outros aspectos operacionais/estruturais referentes a BM&F não são destacados, pois são coincidentes aos da Bovespa.

Tabela 1.5 Volume financeiro negociado na BM&F nos anos de 2000 a 2002

Ano	Volume em R\$/MIL	Média mensal em R\$/MIL
2000	6.988.056.496,00	582.338.041,33
2001	9.696.150.472,00	808.012.539,33
2002	10.006.403.098,00	833.866.924,83

Fonte: BM&F. Valores acumulados nos anos sem atualização monetária.

Assim, expostos os principais conceitos, tipos, *payoffs*, aspectos, determinantes básicos dos preços, relações e estratégias concernentes às opções, bem como as duas principais Bolsas no Brasil que as transacionam - um arcabouço técnico e teórico, a partir do qual é possível prosseguir na avaliação do poder de previsão das volatilidades implícitas e estatísticas. Nessa linha, o próximo capítulo fará uma introdução ao mundo de *Black-Scholes*, modelo de precificação de opção que será utilizado para induzir retroativamente a volatilidade implícita.

2 MODELOS DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

A característica principal no processo de indução retroativa da volatilidade implícita¹ relaciona-se a necessidade de utilizar um modelo teórico de precificação de opção, que combina os parâmetros do modelo com os dados de mercado. Isso resultará na previsão da volatilidade ao longo do tempo de vida da opção.

Desse modo, o objetivo neste capítulo é apresentar o modelo *Black-Scholes* de precificação de opções, para posteriormente utilizá-lo na derivação da volatilidade futura.² Porém, como esse modelo de precificação, que pode ser tanto de opções como para qualquer outro derivativo, é estabelecido em função de parâmetros derivados de modelos que regem o movimento dos preços dos ativos, em primeiro lugar será descrito o processo de formação desses preços e posteriormente será desenvolvida a equação diferencial parcial de *Black-Scholes*.

2.1 CONJECTURA *RANDOM WALK*³

O gráfico 2.1 apresenta a evolução histórica do preço de fechamento diário das ações da Tele Norte Leste Participações S.A. - PN (TNLP4), negociadas na Bovespa.⁴ Através de uma verificação visual, fica evidente a existência de “picos de intervalos” que mostram a variação diária no valor da ação ao longo do período de 21 de setembro de 1998 a 28 de outubro de 2002. Contudo, é difícil a um econometrista (por mais talentoso e experiente que seja) prever com certeza o preço futuro da ação através de uma simples análise aos dados de uma série de tempo. Mas, uma análise estatística dos valores diários históricos de uma ação pode indicar os prováveis saltos no seu preço, bem como sua média, variância e a provável distribuição futura do preço da ação. Ou seja, podem deduzir como os preços de mercado se comportam e qual o processo estocástico que pode ser usado para descrever sua dinâmica.

Um aspecto muito importante nessa série de tempo é que ela configura um excelente exemplo de um *random walk* com *drift*. O primeiro autor a usar um *Random Walk* para

¹ A volatilidade implícita é obtida pela resolução numérica de um modelo teórico de precificação de opção a partir de dados do mercado. Nos capítulos 3 e 4 seguintes, será descrito detalhadamente este processo.

² Vale registrar que praticamente todas as fórmulas de precificação de opções, relaxam ou abandonam as hipóteses preceituadas na equação de *Black-Scholes*.

³ O material apresentado nesta seção segue CAMPBELL *att alli* (1997), DIXIT & PINDYCK (1994), SHIRYAEV (1999), SPANOS (1999) e WILMOTT *att alli* (1995) entre outros.

⁴ A Tele Norte Leste Participações S.A., inscrita na Bovespa sob o código TNLP, em que TNLP4 representa suas ações preferencias, é uma das doze empresas oriundas do processo de privatização da Telebrás S.A.,

descrever a evolução dos preços de uma ação $S = (S_t)_{t \geq 0}$, foi realizado por LOUIS BACHELIER (1900)⁵ em sua tese “*Théorie de la spéculation*”. Analisando os dados do mercado de ações de Paris, ele conjecturou que os preços $S^{(\Delta)} = (S_{k\Delta}^{(\Delta)})$ (não logaritmos) mudam seus valores em intervalos $\Delta, 2\Delta, \dots$, tal que:

$$S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0 + \xi_{\Delta} + \xi_{2\Delta} + \dots + \xi_{k\Delta}, \quad (2.1)$$

onde $(\xi_{i\Delta})$ são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, tomando valores $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ com probabilidade $\frac{1}{2}$. Portanto, a esperança e a variância de $S^{(\Delta)}$ são, respectivamente:

$$E[S_{k\Delta}^{(\Delta)}] = S_0, \quad \text{Var}[S_{k\Delta}^{(\Delta)}] = \sigma(k\Delta).$$

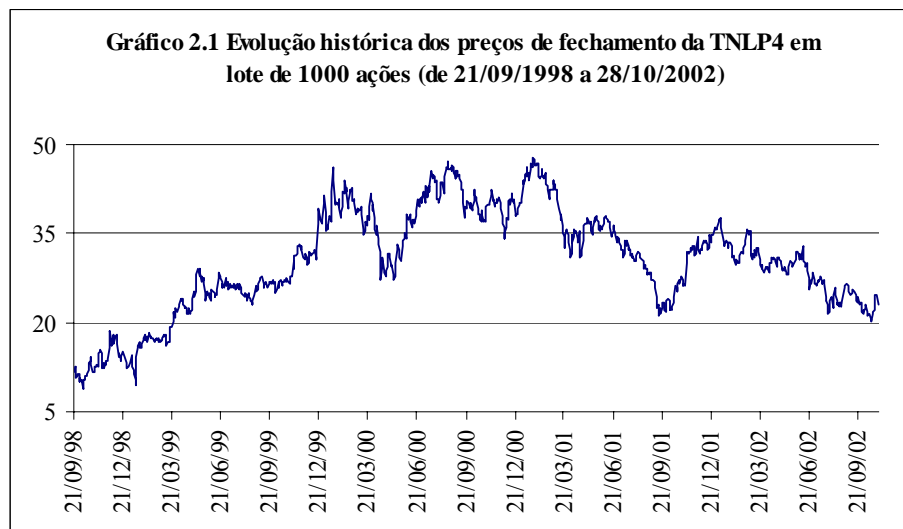
Estabelecendo $k = \left\lceil \frac{t}{\Delta} \right\rceil, t > 0$, *Bachelier* descobriu que no limite o processo

$S_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\left\lceil \frac{t}{\Delta} \right\rceil \Delta}^{(\Delta)}$, tinha a seguinte forma:

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad (2.2)$$

onde (W_t) era o processo que é atualmente chamado de movimento *Browniano* padrão ou um processo de *Wiener*: um processo com incrementos *Gaussianos* (Normais) independentes e com trajetórias contínuas. Logo, isto implica que:

$$W_0 = 0, \quad E[W_t] = 0 \quad \text{e} \quad \text{Var}[W_t] = E[W_t^2] = t.$$



Fonte de dados: Economática. Elaborado pelo autor.

ocorrida no ano de 1998. Suas ações começaram a ser negociadas na Bovespa no dia 21 de setembro de 1998 e, na posição de setembro de 2002, tinham uma participação de 13,57% (o maior peso) no Índice da Bovespa.

⁵ L. BACHELIER (1900) *apud* SHIRYAEV (1999).

Nos anos 30, os estudos procuravam determinar se os movimentos de preços das ações, títulos, eram previsíveis. Os estatísticos A. COWLES (1933) e (1944), H. WORKING (1934) e A. COWLES E H. JONES (1937)⁶, concluíram que os incrementos $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$ dos logaritmos de preços S_n , $n \geq 1$, devem ser independentes⁷. Também que a seqüência $(H_n)_{n \geq 1}$, onde $H_n = h_1 + \dots + h_n$, tinha a natureza de um *random walk*: era a soma de variáveis aleatórias independentes. Isto contradizia a idéia prevalecente naquela época que os preços tinham seus ritmos, ciclos, tendências, periodicidades, e que se poderia prever os movimentos de preços por descobrindo essas trajetórias.

M.G. KENDALL (1953)⁸ abriu a era moderna na pesquisa da evolução dos indicadores financeiros com a publicação do artigo – *The analysis of economic time-series. Part 1. Prices*. O ponto inicial de sua pesquisa era identificar os ciclos no comportamento dos preços das ações e *comodities*. Analisando os dados empíricos não encontrou nenhum ritmo, tendência ou ciclo nos preços. Além disso, conclui que nas séries de tempo estudadas, “... *the Demon of Chance drew a random number ... and added it to the current price to determine the next ... price*” (M. KENDALL (1953) *apud* SHIRYAEV (1999), p.38). Ou seja, o logaritmo dos preços $S = (S_n)$ comportava-se como um *random walk*.

Estabelecendo $h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, resulta que:

$$S_n = S_0 e^{H_n}, \quad n \geq 1, \quad (2.3)$$

onde H_n é a soma de variáveis aleatórias independentes h_1, \dots, h_n .

Esse artigo motivou estudos mais completos da dinâmica dos índices financeiros e a construção de vários modelos probabilísticos para explicar alguns fenômenos, que eram revelados pela observação dos dados, como a propriedade de aglomeração nos retornos dos preços das ações. Por exemplo, H. ROBERTS (1959)⁹ realizou um estudo endereçado diretamente aos profissionais de mercado e continha argumentos heurísticos a favor da conjectura *random walk*. M. F. M. OSBORNE (1959)¹⁰ um astrofísico, em seu *paper*

⁶ A. COWLES (1933) e (1944), H. WORKING (1934) e A. COWLES E H. JONES (1937), *apud* SHIRYAEV (1999). A. Cowles considerou dados do mercado de ações em seus estudos, enquanto H. Working os preços das *comodities*.

⁷ O fato surpreendente, conforme Shiryayev destaca, que naquela época nem os economistas (talvez por não terem conhecimento suficiente em matemática e estatística), nem os profissionais do mercado de ações (os quais acreditavam que os preços podiam ser previstos descobrindo seus ciclos, tendências, ritmos, ...), deram muita importância a estas pesquisas.

⁸ M. KENDALL (1953) *apud* SHIRYAEV (1999).

⁹ H. ROBERTS (1959) *apud* SHIRYAEV (1999).

¹⁰ M. F. M. OSBORNE (1959) *apud* SHIRYAEV (1999).

“*Brownian Motion in the Stock Market*”, testou técnicas físicas e estatísticas em itens “mundanos” como os preços das ações. Apesar de não familiarizado com os trabalhos de *Bachelier*, *H. Working* e *M. Kendall*, sua conclusão foi igual a estes autores. Ele apontou que era o logaritmo dos preços S_t que variava de acordo com a lei do movimento *browniano* com *drift*, e não os preços em si mesmos (que era o principal ponto na análise de *Bachelier*). Foi esta idéia que motivou *P. Samuelson*¹¹ em 1965, a introduzir na teoria e prática de finanças um movimento *browniano* geométrico (ou econômico):

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

2.1.1 Conceito de Mercado Eficiente e a Conjectura *Martingale*

O aspecto relevante da conjectura *random walk* exposta acima, foi o fato que ela originou o conceito de mercado eficiente, justo ou racional. O propósito inicial desse conceito era providenciar argumentos a favor do uso de conceitos probabilísticos e, neste contexto, demonstrar a plausibilidade dessa conjectura e uma conjectura mais geral – a *martingale*.

Segundo CAMPBELL *ett alli* (1997), em um mercado eficiente no critério de informação, mudanças devem ser imprevisíveis se elas são apropriadamente antecipadas, pois elas incorporam totalmente a expectativa e a informação de todos os participantes do mercado. Assim, a eficiência significa que o mercado responde racionalmente para novas informações. Isto implica que neste mercado:

- a) correções de preços são instantâneas e o mercado está sempre em equilíbrio. Os preços são justos e não deixam nenhum espaço para ganhos com arbitragem;
- b) os participantes do mercado são uniformes na interpretação da informação obtida e corrigem instantaneamente suas decisões quando novas informações tornam-se disponíveis, bem como são homogêneos em suas metas - suas ações são coletivamente racionais.

Assim, a partir do acesso ao conjunto de informações, distinguem-se três formas de eficiência:

¹¹ PAUL SAMUELSON (1965): “*Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*”, *Industrial Management Review*, 6, 41-49, *apud* HULL (1997), CAMPBELL *ett alli* (1997), COX & RUBINSTEIN (1985), entre outros.

- eficiência fraca: o conjunto de informações inclui somente os retornos ou preços históricos dos ativos. Conforme vários estudos apontam, o preço atual de uma ação incorpora todas as informações contidas em seu histórico de preços. Matematicamente, esta forma de eficiência fraca é chamada de propriedade de *Markov*;
- eficiência semi-forte: o conjunto de informações inclui toda a informação conhecida publicamente por todos os participantes do mercado;
- eficiência forte: o conjunto de informações inclui toda a informação disponível para qualquer participante do mercado – informação privada.

Logo, toda e qualquer análise formal do conceito de mercado eficiente deve considerar a natureza da informação como relacionada para e dependente sobre como esse fluxo é repassado para o mercado e seus participantes. Nesse sentido,¹² inicia-se com a hipótese que a incerteza no mercado pode ser interpretada como aleatória no contexto de algum espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , onde:

- i) $\Omega = \{\omega\}$ é o espaço de resultados elementares;
- ii) \mathcal{F} é algum subconjunto de σ -álgebras de Ω ;
- iii) P é uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) .

Dotando o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) com um fluxo característico (filtro) $F = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ de \mathcal{F}_n σ -subálgebras, tal que $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ para $m \leq n$, obtém-se um espaço de probabilidades filtradas de σ -álgebras $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_n), P)$. Interpreta-se os eventos em \mathcal{F}_n como a informação acessível ou o fluxo (o conjunto) de informações para um observador até o instante n .

Usando esta estrutura, SHIRYAEV (1999) descreve várias formas de mercado eficiente. Assume que existam três fluxos de σ -álgebras $F^1 = (\mathcal{F}_n^1)$, $F^2 = (\mathcal{F}_n^2)$, $F^3 = (\mathcal{F}_n^3)$, no (Ω, \mathcal{F}, P) , onde $\mathcal{F}_n^1 \subseteq \mathcal{F}_n^2 \subseteq \mathcal{F}_n^3$, e interpreta cada σ -álgebra \mathcal{F}_n^i como os dados do tipo (i) chegando no instante n .

¹² Essa formalização segue a notação utilizada por SHIRYAEV (1999).

Se existe uma conta em um banco livre de risco $B = (B_n)_{n \geq 0}$ e uma medida de probabilidade \hat{P} localmente equivalente a P , tal que cada preço $S = (S_n)$ de um instrumento financeiro neste mercado, satisfaz a condição de que a razão $\frac{S}{B} = \left(\frac{S_n}{B_n}\right)_{n \geq 0}$ é um \hat{P} -martingale, isto é, as variáveis $\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$ são \mathcal{F}_n^1 -mensuráveis e

$E \left| \frac{S_n}{B_n} \right| < \infty$, $E \left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n^1 \right) = \left(\frac{S_n}{B_n} \right)$, para $n \geq 0$, então o mercado é dito ser fracamente eficiente.

Se a propriedade *martingale* é com respeito ao fluxo de informação $F^3 = \mathcal{F}_n^3$, então o mercado é eficiente forte, enquanto que no caso de $F^2 = (\mathcal{F}_n^2)$ o mercado é dito ser da forma eficiente semi-forte.

Se $X = (X_n)$ é um *martingale* com respeito a $F = \mathcal{F}_n$ e $X_n = x_1 + \dots + x_n$, com $x_0 = 0$, então $x = (x_n)$ é um *martingale difference*, isto é,

- x_n é \mathcal{F}_n -mensurável;
- $E |x_n| < \infty$;
- $E(x_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

A partir desta propriedade, se $E |x_n|^2 < \infty$, para $n \geq 1$, resulta que $E(x_n x_{n+k}) = 0$, para cada $n \geq 0$ e $k \geq 1$, que quer dizer que as variáveis (x_n) não são autocorrelacionadas. Ou seja, o *martingale* integrável ao quadrado pertence a classe de seqüências aleatórias com incrementos ortogonais, pois

- $E(\Delta X_n \Delta X_{n+k}) = 0$, onde $\Delta X_n = X_n - X_{n-1} = x_n$ e $\Delta X_{n+k} = x_{n+k}$.

Isto segue que, em suma, a eficiência de um mercado nada mais é do que a propriedade *martingale* de preços nele. Um exemplo característico é um mercado livre de arbitragem, onde os preços das ações são descritos por um *random walk*. Logo, pode-se afirmar que a conjectura da propriedade *martingale* generaliza a conjectura *random walk* e é inerente ao conceito de mercado eficiente. Ainda, a propriedade *martingale*

- $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$,

mostra que a partir das previsões dos valores de $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$, o melhor que pode-se retirar dos dados é que o incremento desaparece em média com respeito a \mathcal{F}_{n-1} . Portanto, o ganho condicional $E(\Delta X_n | \mathcal{F}_{n-1})$ deve inexistir em um mercado justo, bem organizado, racional, que por sua vez, pode ser interpretado como a impossibilidade de lucros sem riscos.

2.1.2 Críticas e Revisão do Conceito de Mercado Eficiente

O conceito de mercado eficiente implica que o preço atual de um ativo leva em conta toda a informação disponível e que mudanças de preço ocorrem somente quando a informação é atualizada, quando novos, não previstos e não esperados dados tornam-se disponíveis. Os investidores desse mercado acreditam que os preços são justos, pois todos os participantes atuam uniformemente, de uma maneira coletivamente racional. Logo, isso simplesmente significa que um mercado eficiente é um *martingale* com respeito a um (ou outro) fluxo de informação e uma certa medida de probabilidade.

Porém, na prática, tais assertivas são contestadas. Primeiro, mesmo que todos os participantes do mercado tenham acesso a informação perfeita, eles não responderão a ela uniformemente de uma maneira homogênea, pois cada um pode ter um objetivo totalmente diferente de outro participante. Além disso, os participantes podem diferir quanto ao comportamento em relação ao risco.

Segundo, os participantes do mercado podem ter diferentes horizontes de tempo, fator não ponderado nos modelos de investimento racional, os quais assumem que todos os investidores têm o mesmo tempo de horizonte.

Por último, a questão da revisão instantânea que os participantes fazem em suas decisões quando novas informações surgem, pode não se concretizar na realidade. Alguns certamente diferem no tempo de ponderação às novas informações, bem como um pode tomar uma decisão, enquanto outro pode tomar uma decisão completamente distinta.

Nesse sentido, a afirmação de que o mercado é eficiente leva a uma incontestável interpretação matemática através da conjectura *martingale*, pois o mercado justo, racional, é um mercado livre de arbitragem. A ausência de arbitragem denota a existência de um *espectrum* global de medidas *martingale*, tal que o valor presente dos preços são *martingales* com respeito a essas medidas. Isto implica que o mercado pode ter um intervalo de estados estáveis, que, por sua vez, implica que operadores de mercado têm

vários objetivos e diferentes quantidades de tempo para processar e assimilar novas informações.

E essa característica do mercado, de possuir investidores com os mais distintos interesses e potenciais, reflete-se na diversificação, a qual assegura a liquidez do mercado, sua capacidade de transformar instantaneamente ativos em meios de pagamento, fatores imprescindíveis à estabilidade do mercado. Portanto, segundo SHIRYAEV (1999), o fato que à estabilidade do mercado requer participantes com diferentes horizontes de investimentos, implica que ele não é homogêneo, isto é, o mercado tem uma estrutura *fractal*.

Abaixo, são elencadas algumas características de um mercado com estrutura *fractal*:

- a) os preços são corrigidos pelos participantes do mercado, em cada instante de tempo, baseados na informação relevante a partir de seus horizontes de investimentos. Eles não respondem necessariamente às novas informações instantaneamente, mas podem aguardar que elas sejam reafirmadas para reagir;
- b) as análises e informações técnicas são importantes para horizonte de curto prazo, enquanto as informações fundamentais são decisivas para horizonte de longo prazo: os preços resultam da interação entre participantes de curto e longo prazo;
- c) as atividades de investidores de curto prazo refletem o componente de alta frequência nos preços, enquanto que as atividades de longo prazo originam o componente de baixa frequência - alisada;
- d) o mercado torna-se ilíquido e perde a estabilidade se ele “despejar/expurgar” os investidores com vários horizontes de investimentos e perde seu caráter *fractal*.

2.2 UM MODELO DO COMPORTAMENTO DOS PREÇOS EM TEMPO CONTÍNUO¹³

Na prática, os preços de qualquer ativo financeiro são observados em tempo discreto e suas variações podem depender de fatores institucionais (por exemplo, regulamentados pela Bolsa de Valores). Apesar do comportamento dos preços dos ativos serem denotados discretamente, eles podem ser modelados adequadamente se forem tratados como contínuos. Esses modelos, em tempo contínuo, permitem a obtenção de fórmulas fechadas de precificação de derivativos, como no caso da fórmula de Black-Scholes.

Como foi visto nas subseções anteriores, a hipótese de mercados eficientes implica que os preços das ações, títulos de renda fixa ou não, *comodities*, ... , devem mover-se

¹³ O material apresentado nesta seção baseia-se em WILMOTT *et al* (1995), DIXIT & PINDICK (1994), NEFTCI (1996), HULL (1997), CAMPBELL *et al* (1997) e COX E RUBINSTEIN (1985).

aleatoriamente. Geralmente no caso de ações, os preços devem seguir uma tendência positiva, que compensa o investidor pelo risco assumido. Portanto, o preço das ações pode ser modelado como uma variável que se movimenta com alguma tendência, mas oscila aleatoriamente em torno desta tendência. Esse tipo de movimento é conhecido na literatura como um processo estocástico.

Uma característica importante no preço das ações em mercados eficientes, é de que a história passada do preço da ação é totalmente refletida no preço presente, que não contém qualquer informação maior. Logo, o preço da ação é previsto somente com base no seu preço corrente. Isto representa a forma fraca de eficiência e, matematicamente, é chamado de processo de Markov.

Nesse sentido, seja:

- S o preço do ativo no tempo t ;
- dS a mudança absoluta no preço do ativo em um período de tempo dt ;
- dt um pequeno intervalo de tempo em que S muda para $S + dS$;
- dS/S é o retorno do ativo, definido como a mudança no preço dividido pelo seu valor original.

A forma mais comum de modelar o retorno (dS/S) do ativo é decompô-lo em duas partes. Uma parte é previsível, determinística, e o retorno é similar ao retorno de um investimento realizado em um banco livre de risco:

$$\mu dt, \tag{2.5}$$

onde μ é a taxa média de crescimento do preço do ativo, também denominada como a tendência ou *drift*.

A segunda parte para modelar o retorno de S é a mudança aleatória que ocorre no preço do ativo em resposta a efeitos externos, tais como informações não esperadas. Isto é representado por uma amostra aleatória retirada de uma distribuição Normal com média zero e acrescenta o termo:

$$\sigma dW, \tag{2.6}$$

para o retorno de S . Aqui σ é um número que é chamado de volatilidade, que em sua forma mais simples, pode ser caracterizado como o desvio padrão dos retornos de S .¹⁴ A quantidade dW é a que contém a aleatoriedade no preço dos ativos, conhecida como o processo de *Wiener* ou Movimento *Browniano* Padrão.

¹⁴ O termo σ determina a amplitude dos choques aleatórios que S sofre ao longo do tempo.

Agrupando (2.5) e (2.6) para o retorno de S , obtém-se uma equação diferencial estocástica, a qual é uma representação simples à geração do preço dos ativos, em que o preço da ação S segue um movimento *browniano* geométrico, com μ e σ duas constantes arbitrárias:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW. \quad (2.7)$$

Se na equação (2.7) $\sigma = 0$, resulta numa equação diferencial ordinária, que pode ser resolvida pelos métodos tradicionais de cálculo:

$$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}. \quad (2.8)^{15}$$

Logo, com $\sigma = 0$, o preço do ativo é totalmente determinístico e pode-se prever com certeza o preço futuro do ativo.

Segundo WILMOTT *et al* (1995), uma das justificativas econômicas para a equação (2.7) é que ela ajusta muito bem os dados reais das séries de tempo, pelo menos para ações e índices, muito embora os dados reais apresentam maior probabilidade de estarem acima ou abaixo do que o modelo prevê. Porém, serve de início para modelos mais sofisticados. Outra justificativa, é que essa equação é um exemplo particular de um *random walk*. Ela não pode ser resolvida para dar um caminho determinístico para o preço da ação, mas pode dar interessante e importante informação ligada ao comportamento de S no sentido probabilístico. Também, a equação (2.7) pode ser considerada uma receita para gerar uma série de tempo, com cada uma resultando um caminho diferente de S quando é reiniciada. Cada caminho é chamado a “realização do *random walk*”. Isso combina com a propriedade de *markov* e com a suposição de eficiência fraca, onde preços passados não são relevantes para prever o preço no futuro.

O termo dW da equação (2.7) – o processo de *Wiener*, é caracterizado por três propriedades. A primeira afirma que ele é um processo de *Markov*, ou seja, os preços futuros não dependem dos preços passados, apenas do preço corrente. A segunda é ter incrementos independentes, ou seja, qualquer variação dS no preço do ativo é independente da variação ocorrida em outro momento qualquer. A terceira afirma que suas variações têm

¹⁵ Se $\sigma = 0$, equação (2.7) fica igual a $\frac{dS}{dt} - \mu S = 0$. A solução geral desta equação é dada por

$$S(t) = ce^{-\int_{t_0}^t \mu dt} = ce^{\mu \int_{t_0}^t dt} = ce^{\mu(t-t_0)}. \text{ Se } S(0) = S_0, \text{ então } S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

distribuição normal com variância proporcional ao intervalo de tempo ocorrido. Formalmente:

$$dW = \varepsilon_t \sqrt{dt}, \quad (2.9)$$

onde ε_t é uma variável aleatória normal padrão, ou seja, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, e dt é igual a variação infinitesimal do tempo. Logo, a esperança da variação de dW é zero e sua variância é proporcional ao intervalo de tempo da variação:

$$E [dW] = 0, \quad (2.10)$$

$$Var [dW] = dt. \quad (2.11)$$

A partir das características do termo dW , podem-se relacionar as seguintes propriedades à equação (2.7):

- a) $E[dS] = E[\mu S dt + \sigma S dw] = \mu S dt$, pois $E[dW] = 0$. Na média, o próximo valor para S é maior do que o anterior por um montante igual a $\mu S dt$;
- b) $Var[dS] = E[(dS)^2] - (E[dS])^2 = \sigma^2 S^2 dt$;
- c) $desvio\ padrão = \sqrt{Var[dS]} = \sqrt{\sigma^2 S^2 dt} = \sigma S \sqrt{dt}$;
- d) ao comparar dois *randons walks* com diferentes valores de μ e σ , aquele que possui um valor maior para o parâmetro μ aumenta mais acentuadamente, enquanto o que têm um valor maior para σ será mais oscilatório em torno da tendência.

2.2.1 Lemma de Itô

Para manipular a equação (2.7), que contém variáveis aleatórias, é necessário um importante resultado do cálculo estocástico, conhecido como *Lemma de Itô*.¹⁶ Este lema permite calcular funções (ou transformações) de processos de *Itô*, os quais são uns conjuntos particulares de processos estocásticos, que generaliza o processo de Wiener. Algebricamente, um processo de *Itô* pode ser escrito como:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dW, \quad (2.12)$$

onde a e b são funções de S e t , e dW é o processo de *Wiener* ($dW = \varepsilon \sqrt{dt}$). A variável S tem taxa de desvio (*drift*) esperada de a e taxa de variância de b^2 , as quais estão sujeitas às variações de S e t .

¹⁶ Kyosi Itô, "On Stochastic Differential Equations", in *Memoirs, American Mathematical Society* 4, p. 1-51, 1951, apud HULL (1997).

O lema de Itô é uma versão do Teorema de Taylor¹⁷ para variáveis aleatórias. Então, seja uma função G que depende de S e t , duas vezes diferenciável e S segue um processo de Itô. Logo, a diferencial total desta função é:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial S} dS + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} (dS)^2 + R(S). \quad (2.13)$$

No cálculo de equações diferenciais ordinárias, os termos de ordem maior do que um desaparecem rapidamente. Porém, essa propriedade não é válida para processos de Itô. Lembrando que dS é dado pela equação (2.7), têm-se que:

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (\mu S dt + \sigma S dW)^2 \\ &= \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dW + \sigma^2 S^2 (dW)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Examinando a ordem da magnitude de cada um dos termos em (2.14), o último termo é maior quanto menor for dt e domina os dois outros termos. Então, por ordem de liderança:

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 (dW)^2 + \dots \quad (2.15)$$

Utilizando uma *rule of thumb* dada por WILMOTT *et al* (1995) de que $(dW)^2 \rightarrow dt$ quando $dt \rightarrow 0$, ou seja, quanto menor torna-se dt mais rapidamente $(dW)^2$ é igual a dt , a equação (2.15) torna-se igual a:

$$(dS)^2 \rightarrow \sigma^2 S^2 dt. \quad (2.16)$$

Assim, substituindo esses resultados e a definição de dS dada pela equação (2.7) na equação (2.13), obter-se-á o lema de Itô, que relaciona pequenas mudanças na função de uma variável aleatória para pequenas mudanças na variável em si mesma e no tempo:

$$dG = \left(\mu S \frac{\partial G}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + \frac{\partial G}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial G}{\partial S} dW. \quad (2.17)^{18}$$

A partir desta equação pode-se derivar o processo seguido por $\ln S$.¹⁹ Definindo $G = \ln S$, então:

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}.$$

Assim:

¹⁷ A fórmula da expansão de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de x_0 , de ordem n , é dada por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x-x_0)^n + R(x),$$

onde f^i é a derivada de ordem i e $R(x)$ é o resto.

¹⁸ Veja que a equação (2.17) assemelha-se a equação (2.7), pois possui um componente determinístico proporcional a dt e um componentes aleatório proporcional a dW , isto é, ambas seguem um *random walk*.

¹⁹ O símbolo \ln significa o logaritmo neperiano de uma variável.

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW. \quad (2.18)$$

Portanto, como μ e σ são constantes, $\ln S$ segue o processo generalizado de *Wiener*, que possui taxa de desvio esperado constante de $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ e taxa de variância constante de σ^2 . Isso implica que uma mudança em G entre o tempo atual t e algum instante futuro T , é normalmente distribuída, ou seja:

$$\Delta(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon. \quad (2.19)$$

Se $\Delta t = T - t$, $S(T) = S_T$ e $S(t) = S$, então:

$$\ln\left(\frac{S_T}{S}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\varepsilon\sqrt{T-t}. \quad (2.20)$$

Dessa forma,

$$\ln S_T - \ln S \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right], \quad (2.21)$$

onde $\phi(m, V)$ denota distribuição normal, com média m e variância V . A partir das propriedades da distribuição normal, segue da equação (2.21) que $\ln(S_T)$ tem distribuição Normal com:

$$E[\ln(S_T)] = \ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \quad e$$

$$Var[\ln(S_T)] = \sigma^2(T-t).$$

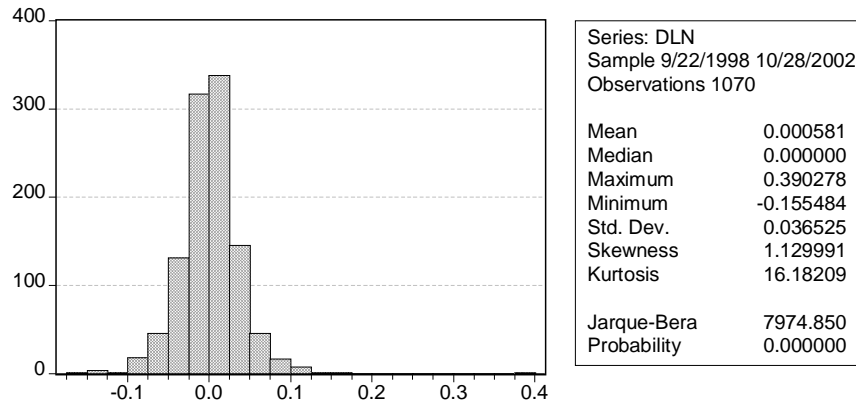
Uma variável é dita ser distribuída lognormalmente se o seu logaritmo neperiano é distribuído normalmente. Através da equação (2.21), conclui-se que o $\ln(S_T)$ é normalmente distribuído. Isso resulta que S_T têm uma distribuição lognormal. Logo, a distribuição lognormal de S_T resulta que essa variável pode assumir qualquer valor entre zero e infinito, e portanto, como sua distribuição é assimétrica, a média, mediana e moda são todas diferentes. Por outro lado, a distribuição normal de $\ln S$ implica que a taxa de retorno contínua da ação tem densidade de probabilidade simetricamente distribuída ao redor de sua média e proporcional ao prazo em que foi calculada. Ainda, o desvio padrão de $\ln S_T$ é proporcional a $\sqrt{T-t}$, o que significa que a incerteza com relação ao logaritmo do preço da ação, quando mensurado por seu desvio padrão, é proporcional à raiz quadrada do período futuro que estiver sendo considerado.

A função de densidade de probabilidade (fdp) de S_T será dada por:

$$\frac{1}{\sigma S_T \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left[\ln\left(\frac{S_T}{S}\right) - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2}{2\sigma^2 t}}, \text{ para } 0 < S_T < \infty. \quad (2.22)$$

A figura 2.1 descreve o retorno diário do logaritmo de preços de fechamento das ações da TNLP4,²⁰ no período de 22 de setembro de 1998 a 28 de outubro de 2002. Visualmente os retornos dessa ação parecem ser distribuídos normalmente. Porém, uma inspeção nas estatísticas como a assimetria, a kurtose e a estatística de normalidade de *Jarque-Bera* de 7.974, exclui a hipótese de normalidade em sua taxa de retorno contínua. Desse modo, certamente o comportamento dos preços dessa ação não deve seguir um movimento browniano geométrico – deve se basear em outro processo. Vários artigos mostram soluções para diferentes processos, mas o movimento browniano geométrico continua sendo o procedimento mais utilizado na descrição do comportamento dos preços de uma ação, devido a sua facilidade de cálculo e ampla literatura, que resulta em menores custos aos profissionais do mercado.

Figura 2.1 - Histograma dos retornos diários do ln de preços de fechamento das ações da TNLP4



Fonte de dados: Economática. Elaborado pelo autor no *Eviews*.

2.3 A FÓRMULA DE *BLACK-SCHOLES*²¹

Fischer Black e *Myrom Scholes* publicaram em 1973, no *Journal of Political Economy* um artigo clássico – *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, em que apresentam

²⁰ O retorno diário é definido como: $r_i = \frac{\ln S_i}{\ln S_{i-1}}$, com $i = 1, \dots, 1071$.

²¹ Esta seção segue ALEXANDER (2001), BLACK & SCHOLES (1973), COX & RUBINSTEIN (1985), HULL (1997), MERTON (1973), NEFTCI (1996) e WILMOTT *et alii* (1995) entre outros.

uma fórmula matemática para deduzir o preço de qualquer derivativo cujo preço dependa somente do valor corrente do ativo S e do tempo t , desde que sejam satisfeitas algumas hipóteses. Eles utilizaram esta equação para derivar o preço de opções européias de compra e venda sobre uma ação. O ponto principal deste trabalho foi que ele deu origem à análise de outros métodos de precificação de ativos,²² bem como serviu de base para o enorme desenvolvimento da teoria de finanças.

Uma importante hipótese na construção da fórmula de *Black-Scholes* é a não condição de ganhos com arbitragem. Isto possibilita criar uma carteira sem risco, constituída de uma posição vendida num derivativo e de uma posição comprada Δ no ativo-objeto. O retorno dessa carteira deve ser igual ao retorno de um investimento aplicado em um banco, ou em títulos do governo, capitalizado por uma taxa de juro livre de risco. O uso dessa técnica na derivação da fórmula de *Black-Scholes* conduz a um importante resultado: a irrelevância da preferência dos investidores em relação ao risco.

2.3.1 O Método *Black-Scholes* de Precificação de Derivativos

Antes de derivar a equação diferencial de *Black-Scholes*, é necessário elencar as hipóteses para se chegar a esta fórmula:

- a) o preço dos ativos tem distribuição lognormal.²³ Isto permite a utilização da equação (2.7) para descrever o comportamento do preço do ativo, com o retorno esperado de crescimento μ e a volatilidade σ do ativo objeto constante;²⁴
- b) não existem custos de transação, impostos ou margens. A inclusão de qualquer um desses itens altera a operação de arbitragem, resultando em um intervalo de preço para a opção;
- c) a taxa de juro r não tem risco de curto prazo e é constante.²⁵ Esta hipótese associada a σ ser também constante, implica que a única fonte de risco da opção é o ativo-objeto, a qual é eliminada pela construção de uma carteira sem risco;

²² Certas hipóteses tomadas sobre o comportamento de mercado no desenvolvimento da fórmula de *Black-Scholes* foram, posteriormente, relaxadas ou mesmo algumas abandonadas por vários pesquisadores, originando fórmulas drasticamente diferentes e/ou muito complicadas de operacionalização. Este aspecto pode ser um dos motivos que explica o fato da fórmula de *Black-Scholes* ser amplamente utilizada no mundo todo por teóricos e profissionais do mercado.

²³ R. Jarrow e A. Rudd, "Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes", in *Journal of Financial Economics* 10, p. 347-369, novembro 1982, relaxam essa hipótese, permitindo que o ativo objeto tenha outro tipo de distribuição.

²⁴ COX & ROSS (1976) introduzem um modelo em que a volatilidade é variável. HULL & WHITE(1987) consideram um modelo de volatilidade estocástica para o comportamento neutro em relação ao risco do preço de uma ação.

²⁵ Em MERTON (1973), a avaliação das opções é realizada quando a taxa de juros é estocástica.

- d) o ativo-objeto não paga dividendos durante o tempo de vida da opção. Se o ativo-objeto rende algum dinheiro a fórmula deve levar isto em conta;²⁶
- e) não existem oportunidades de arbitragem sem risco. Este pressuposto garante que o preço do modelo é o que está em vigor no mercado;
- f) a negociação com o ativo-objeto é contínua²⁷ e o ativo é divisível. Essa hipótese permite utilizar o modelo em tempo contínuo;
- g) é permitida a venda a descoberto (*short selling*) de ativos e pode-se tomar emprestado ou aplicar qualquer quantia a taxa de juros corrente. Isto possibilita comprar e vender qualquer número (não inteiro) do ativo-objeto, mesmo não o possuindo.

Analisando as hipóteses acima, o preço de uma opção ou de qualquer outro derivativo depende somente do preço do ativo-objeto S e do tempo t , pois o preço de exercício K , a taxa de juros livre de risco r e a volatilidade σ são tratadas como constantes. Desse modo, seja $V(S, t)$ o preço de um derivativo dependente de S e t .²⁸ Aplicando o Lema de Itô a essa função e considerando as hipóteses a e f , que permitem descrever o comportamento de S segundo um movimento browniano geométrico como dado pela equação (2.7), obtém-se:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (2.23)^{29}$$

A equação (2.23) mostra o comportamento do valor do derivativo com base no tempo, no preço do ativo-objeto e no choque aleatório. O primeiro passo para se chegar a equação diferencial de *Black-Scholes* é eliminar esse termo aleatório. Assim, seja uma carteira ou um portfólio que contém uma posição vendida em um derivativo e uma posição comprada

Δ em ações, onde $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$. O valor deste portfólio Π é:

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S. \quad (2.24)$$

A mudança no valor deste portfólio no instante dt é dada por:

$$d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS. \quad (2.25)$$

²⁶ HULL (1997) mostra que a fórmula de *Black-Scholes* pode ser facilmente modificada para considerar os dividendos.

²⁷ A hipótese da continuidade na negociação dos ativos pode ser substituída pelos modelos do tipo binomial.

²⁸ Neste estágio não é necessário especificar se V é uma *call* ou uma *put*. Inclusive, segundo WILMOTT *et alii* (1995), V pode ser tratado como sendo o valor de um portfólio que contém diferentes opções.

²⁹ Vale destacar a similaridade entre as equações (2.17) e (2.23). Também, V requer que seja pelo menos uma vez diferenciável em relação a t e duas vezes em relação a S .

Substituindo equações (2.7) e (2.23) em (2.25), resulta que:

$$d\Pi = -\left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dW). \quad (2.26)$$

Então, eliminando os termos que se anulam, origina um portfólio cujo incremento é completamente determinístico, ou seja, não têm o termo aleatório e, portanto, não exibe risco no intervalo de tempo dt :

$$d\Pi = -\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt. \quad (2.27)$$

Agora, invocando as hipóteses b , e e listadas no início desta subseção, ou seja, a inexistência de arbitragem associada a nenhum custo de transação, implica que o retorno deste portfólio deve ter a mesma taxa de retorno de outros títulos sem risco no tempo dt , isto é,

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (2.28)$$

Se o lado direito da equação (2.27) foi maior do que o lado direito da equação (2.28), um arbitrador poderia realizar um lucro sem risco, tomando emprestado uma quantidade Π e utilizar esses recursos para investir neste portfólio. O retorno desta estratégia livre de risco deve ser maior do que o custo de tomar emprestado. Por outro lado, se o lado direito de (2.27) for menor do que $r\Pi dt$ o arbitrador poderia vender o portfólio e investir em títulos sem risco. Assim, substituindo equações (2.24) e (2.28) em (2.27), implica que:

$$-\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S\right)dt. \quad (2.29)$$

Dividindo ambos os lados da equação (2.29) por $-dt$, surge que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a equação diferencial parcial de *Black-Scholes*. Essa equação pode ter muitas soluções. Sob as hipóteses determinadas anteriormente, qualquer derivativo cujo preço dependa somente do valor corrente de S e de t , deve satisfazer a equação (2.30). Para obter uma solução exata, única de (2.30) é necessário impor as condições iniciais e de fronteira para os possíveis valores de S e t .

Porém, antes é necessário fazer algumas observações sobre a derivação da equação (2.30). A primeira diz respeito ao portfólio Π . Ele não permanece sem risco constantemente, mas apenas pelo infinitesimal espaço de tempo dt . Conforme S e t variam,

o delta, dado por $\Delta = \partial V / \partial S$,³⁰ também varia. Logo, as proporções relativas de V e S devem mudar com frequência, para manter a carteira isenta de risco.

A segunda observação implica na propriedade principal da equação (2.30). Ela não contém o parâmetro μ , ou seja, ela independe das preferências dos investidores em relação ao risco. O único parâmetro da equação diferencial estocástica (2.7) que afeta o preço de qualquer derivativo é a volatilidade σ . Uma consequência disso é que diferentes investidores podem diferir sobre o valor de μ e, mesmo assim, concordar com o valor do derivativo. Ainda, a situação dos investidores serem indiferentes ao risco resulta que o retorno esperado de qualquer título é a taxa de juro livre de risco r , pois estes investidores não cobram um prêmio para correr riscos. Por sua vez, isto implica que o parâmetro μ que consta no termo de tendência ou *drift* da equação (2.7) é substituído por r (em qualquer lugar que ele aparecer).³¹ Logo, o valor presente de qualquer derivativo pode ser avaliado, num mundo neutro ao risco, pelo desconto do retorno esperado na expiração à taxa de juro livre de risco.

2.3.2 A Equação de *Black-Scholes* e as Condições de Fronteira

Uma equação diferencial parcial, por si só, pode ter muitas soluções, as quais podem envolver soluções somente por métodos numéricos, se uma fórmula exata não puder ser encontrada. Mas se, por exemplo, o valor de uma opção não for único, isso pode resultar em oportunidades de arbitragem. Logo, condições de fronteira devem especificar o comportamento da solução requerida em alguma parte do domínio da solução.

A equação (2.30) é uma equação diferencial parcial do tipo parabólica, pois o relacionamento entre a função $V(S, t)$ e suas derivadas parciais com respeito as variáveis independentes S e t , estabelece que a maior derivada em relação a t é somente a primeira derivada e em relação a S é a segunda derivada. E como a equação é linear e os sinais dessas derivadas parciais são iguais, ela é dita ser uma equação parabólica *backward* (indução retroativa).

Desse modo, o fato dessa equação ser do tipo parabólica impõe duas condições: V têm que ser duas vezes diferenciável em relação a S e somente uma vez diferenciável em

³⁰ O delta é a taxa de mudança do valor da opção ou do portfólio de opções com respeito a S . Ele é uma medida da correlação entre movimentos na opção ou outro qualquer derivativo e o ativo-objeto.

³¹ Dessa forma, num mundo neutro ao risco, a distribuição de probabilidade do $\ln S_T$ é determinada pela equação (2.21), porém com a variável μ substituída por r .

relação a t . Deve-se impor também uma condição final para fato dela ser do tipo *backward*, pois a resolução de V ocorre dentro do domínio em que $t < T$, tal como:

$$V(S,t) = V_T(S) \quad \text{em } t = T, \quad \text{onde } V_T \text{ é uma função conhecida.}$$

Logo, seja o valor de uma opção de compra europeia dado por $c(S,t)$, com preço de exercício K e a data de expiração T . A condição final para a equação (2.30), a ser aplicada em $t = T$, vêm da condição de arbitragem, em que o valor da *call* será com certeza o *payoff*:

$$c(S,T) = \max(S - K, 0). \quad (2.31)$$

As condições de fronteira são aplicadas em $S = 0$ e quando $S \rightarrow \infty$. Da equação (2.7) pode-se concluir que se $S = 0 \rightarrow dS = 0$. Se $S = 0$ na expiração, o *payoff* é zero. Logo, a *call* não tem valor em $S = 0$, mesmo se existe um longo tempo à expiração. Portanto:

$$c(0,t) = 0. \quad (2.32)$$

Quando $S \rightarrow \infty, dS \rightarrow \infty$, e maior a probabilidade da *call* ser exercida. Então:

$$c(S,t) \sim S, \quad \text{quando } S \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Para uma opção de venda, a condição final é o *payoff*:

$$p(S,T) = \max(K - S, 0). \quad (2.34)$$

Quando $S = 0$, o *payoff* final para uma *put* será com certeza K . Para determinar $p(0,t)$, deve-se calcular o valor presente da quantidade K recebida no tempo T . Num mundo neutro ao risco - hipótese implícita na equação (2.30), com r sendo a taxa de juro livre de risco, a condição de fronteira em $S = 0$ será:

$$p(0,t) = e^{-r(T-t)} K. \quad (2.35)$$

Quando $S \rightarrow \infty$, certamente a *put* não será exercida, e então:

$$p(S,t) \rightarrow 0, \quad \text{quando } S \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

2.3.3 Fórmulas de *Black-Sholes* para *Call* e *Put* Europeias

Estabelecidas as condições de contorno ou de fronteira para a resolução da equação (2.30), uma solução explícita das equações (2.30) – (2.33) determinará o valor de uma opção de compra europeia.³² Assim, quando r e σ são constantes, a fórmula *Black-Scholes* de precificação de uma *call*³³ é igual a:

³² No artigo original, BLACK & SCHOLES (1973) chegaram a fórmula exata de precificação de uma *call* europeia, após identificarem que o problema da resolução das equações (2.30) – (2.33) era igual ao problema da resolução da equação do calor, já solucionada em Física.

³³ Conforme mencionado na subseção 1.4.3, se uma ação não paga dividendos durante o tempo de vida da opção, implica que $c = C$. Como uma das hipóteses na derivação da fórmula de *Black-Scholes* é a exclusão

$$c(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (2.37)$$

onde $N(x)$ é a função de distribuição acumulada para uma variável aleatória normal padronizada, dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \text{ e}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

A solução do problema colocado pelas equações (2.30), (2.34) – (2.36), resulta no valor de uma opção de venda européia,³⁴ dado por:

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (2.38)$$

Uma importante interpretação da equação (2.37) pode ser obtida se ela for escrita como:

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)}[SN(d_1)e^{r(T-t)} - KN(d_2)]. \quad (2.39)$$

O fato de uma *call* conter a distribuição de probabilidade de uma normal acumulada padronizada num mundo neutro ao risco, significa que $KN(d_2)$ é o preço de exercício multiplicado pela probabilidade de K ser pago. A expressão $SN(d_1)e^{r(T-t)}$ é o valor esperado de uma variável num mundo neutro ao risco, que é igual a S_T , se $S_T > K$, e zero caso contrário. Ou seja, a interpretação da equação (2.39) mostra a consistência da fórmula de *Black-Scholes* com a neutralidade dos investidores em relação ao risco.

Vale registrar que a utilização das equações (2.37) ou (2.38) depende da correta mensuração de seus parâmetros. A volatilidade σ é o mais complexo deles e será abordado extensivamente nos próximos capítulos 3 e 4. A taxa de juros livre de risco r está na forma contínua, de forma que, para o caso brasileiro, onde se usa a taxa de juros efetiva anual i por dias úteis, com base em 252 dias úteis por ano, ela deve ser transformada da seguinte forma:

$$r = \ln(1+i). \quad (2.40)$$

de pagamento de dividendos, então a equação (2.37) é válida também para a precificação de opções de compra tipo americana.

³⁴ O valor de uma *put* européia sobre uma ação que não paga dividendos durante o prazo de expiração da opção, pode ser obtido também pela paridade entre *calls* e *puts*, descrita na subseção 1.4.3.

Se σ e r forem estabelecidos com periodicidade anual, então o número $(T - t)$ corresponderá a fração do ano até o exercício da opção. Seja n o número de dias úteis até a expiração da opção, tem-se que:

$$T - t = \frac{n}{252}. \quad (2.41)$$

Substituindo equações (2.40) e (2.41) em (2.37), obtém-se a fórmula *Black-Scholes* para uma *call* adaptada ao mercado brasileiro:

$$c(S, t) = SN(d_1) - \frac{K}{(1+i)^{n/252}} N(d_2), \quad (2.42)$$

onde $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(\ln(1+i) + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(n/252)}{\sigma\sqrt{n/252}}$, e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\frac{n}{252}}.$$

2.3.4 Medidas de Sensibilidade das Opções

As derivadas parciais de c em relação aos seus argumentos são designadas por letras gregas específicas e são conhecidas no mercado como *option sensitivities* (sensibilidade das opções) ou como gregas. Elas possuem um papel crucial na negociação e administração com opções, pois possibilitam avaliar qual o tamanho da exposição de uma opção ou de um portfólio de opções (ou mesmo uma carteira), quanto ao risco do preço da ação, do prazo, da taxa de juros, da volatilidade do ativo-objeto, e numa análise mais sutil, verificar a curvatura (a derivada segunda) do valor da opção em relação a S . Logo, se a fórmula *Black-Scholes* dada pela equação (2.42) representa o preço correto da opção, pode-se avaliar explicitamente as gregas de uma opção de compra a partir das seguintes definições:³⁵

a) *Delta*: $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) > 0;$ (2.43)

b) *Gamma*: $\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\frac{n}{252}}} > 0;$ (2.44)

³⁵ Essas medidas de sensibilidade podem ser efetuadas considerando-se um portfólio de opções, uma carteira composta de vários derivativos e ativos, ao invés de somente uma *call*.

$$\text{c) Theta: } \Theta = -\frac{\partial c}{\partial n} = \left[\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{\frac{n}{252}}} + \frac{K \ln(1+i)}{(1+i)^{n/252}} N(d_2) \right] \frac{1}{252} > 0; \quad (2.45)$$

$$\text{d) Rho: } \rho = \frac{\partial c}{\partial i} = K \frac{n}{252} \frac{N(d_2)}{(1+i)^{(n/252)+1}} > 0; \quad (2.46)$$

$$\text{e) Vega: } \nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S \sqrt{\frac{n}{252}} N'(d_1) > 0; \quad (2.47)$$

$$\text{onde } N'(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

As equações (2.43), (2.45) – (2.47) mostram que o preço da opção é maior quanto maior for o preço da ação, o prazo de expiração, a taxa de juros e a volatilidade.³⁶ Por outro lado, a derivada parcial de c em relação ao K é:

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -\frac{N\left(d_1 - \sigma \sqrt{\frac{n}{252}}\right)}{(1+i)^{n/252}} < 0. \quad (2.48)$$

Ou seja, o preço da opção é menor quanto maior é o preço de exercício.

2.4 CONCLUSÕES

Para obter a volatilidade contida no processo de negociação de uma opção, é preciso associar um modelo teórico de precificação com os dados do mercado. O resultado dessa indução retroativa da volatilidade é denominado de implícita, que representa as expectativas dos investidores quanto ao futuro da economia no tempo de maturidade da opção.

Porém, como quase todos os modelos de precificação de opções são baseados no comportamento do preço do ativo-objeto, a primeira parte deste capítulo descreveu o movimento de preços como um *Random Walk*, a qual originou o conceito de mercado eficiente e uma conjectura mais genérica, a *martingale*. Dependendo do conjunto de informações disponíveis, pode-se distinguir a eficiência do mercado em forte, semi-forte e fraca. Nesses conceitos, fica implícita a idéia de que as correções de preços são instantâneas, o mercado está sempre em equilíbrio, não existem ganhos com arbitragem, os

³⁶ Apesar da volatilidade e da taxa de juros serem tratadas como constantes, pode-se fazer uma análise de estática comparativa para verificar o efeito de mudanças no nível dessas variáveis sobre o preço da opção. Note que estas conclusões foram demonstradas intuitivamente na subseção 1.4.1 e resumidas na tabela 1.1.

agentes econômicos são uniformes na assimilação de novas informações, bem como agem racionalmente. Contudo, tais afirmações são contestadas pela hipótese de que o mercado possui uma estrutura *fractal*: os agentes não respondem necessariamente de forma uniforme (nem instantânea) às novas informações, pois apresentam horizontes de risco distintos, o qual, por sua vez, implica na diversificação e liquidez do mercado.

Na segunda parte foi apresentado o movimento geométrico *browniano*, que é uma representação simples à geração do preço dos ativos em tempo contínuo. Essa descrição, consubstanciada pela equação (2.7), associada ao *lemma* de Itô, é fundamental à obtenção da equação diferencial parcial de *Black-Scholes*. Se um dado ativo segue esse movimento, isto implica que o seu logaritmo é distribuído normalmente e, conseqüentemente, o ativo é distribuído lognormalmente, bem como sua taxa média de crescimento e sua volatilidade são constantes.

Nesse sentido, a última parte deste capítulo apresentou a fórmula de *Black-Scholes*. Além das hipóteses acima, a não condição de ganhos com arbitragem possibilita criar uma carteira sem risco, que conduz a uma importante conclusão: a propriedade de neutralidade ao risco dos investidores no mundo de *Black-Scholes*. Impondo condições de contorno à resolução da equação diferencial parcial (2.30), equações (2.37) e (2.38) resultam no modelo teórico de precificação de uma *call* e *put*, respectivamente.

Assim, tendo em vista que o objetivo deste estudo é avaliar o poder de previsão das volatilidades implícitas e estatísticas, este capítulo desenvolveu o modelo *Black-Scholes*, o qual é utilizado para induzir retroativamente a volatilidade implícita nos capítulos seguintes.

3 VOLATILIDADE

Volatilidade é o nome genérico para o desvio-padrão (in)condicional. Em Finanças, o termo é usualmente empregado para denotar o desvio-padrão condicional do retorno de um ativo. Contudo, existem na literatura muitos conceitos e definições sobre volatilidade. Segundo SHIRYAEV (1999), nenhum conceito em matemática financeira é tão livremente interpretado e intensivamente discutido como volatilidade. Como sinônimo de variabilidade, a volatilidade tem muitas definições e é usada para denotar várias dessas medidas.¹

Prever a volatilidade de um ativo de modo preciso é a chave para um bom sistema de gerenciamento de risco. A correta previsão da volatilidade é importante não só no esboço de estratégias ótimas de *hedge* com derivativos, como também para captar momentos de grande incerteza no mercado. Quanto mais incerto estiver o mercado, frente a crises ou fatos exógenos, mais os preços dos ativos tendem a variar, implicando em maiores possibilidades de ganhos ou perdas.

A volatilidade nos indica se o preço de um ativo está variando pouco ou muito, isto é, ela é uma medida da incerteza quanto as variações de preço no tempo. Os períodos em que a variabilidade dos preços está muito alta são aqueles em que o risco é maior. Quando a volatilidade é baixa, o risco é menor.

Existem vários modelos que podem ser utilizados para descrever ou gerar a volatilidade de um ativo. Dependendo do modelo utilizado, determina-se uma previsão de volatilidade do ativo, a qual pode ser significativamente diferente quando comparada com a previsão gerada por outro modelo, ou existir uma grande similaridade. Logo, diferentes estimativas ou previsões de volatilidade sobre um determinado ativo podem ser geradas.

Nesse contexto, inserem-se os modelos de volatilidade estatística e implícita. Se a volatilidade de um ativo é determinada a partir de um modelo estatístico – paramétrico ou não paramétrico, ela é denominada como a volatilidade estatística. Por outro lado, se a previsão da volatilidade é dada em função de um modelo de precificação de opções, ela é chamada de volatilidade implícita.

¹ O dicionário *Random House Webster's* (1993) dá as seguintes definições para o adjetivo volátil: a) rapidamente evaporando-se; b) tendendo ou ameaçando entrar em erupção com violência (explosivo); c) variável, instável.

Assim, ao contrário do que ocorre com o preço de um ativo específico, a volatilidade não é diretamente observável no mercado. Ela só poderá ser estimada e prevista no contexto de um modelo. Geralmente, os modelos de volatilidade implícita e estatística providenciam estimativas completamente distintas sobre o mesmo preço de um ativo.

Dessa forma, as seções seguintes caracterizam formalmente os modelos de volatilidade implícita e estatística. No capítulo subsequente eles serão objeto de avaliação para verificar qual deles é capaz de prever com maior acuracidade a volatilidade futura e quem têm o maior conteúdo de informação da volatilidade um passo a frente.

3.1 VOLATILIDADE IMPLÍCITA²

Volatilidade implícita é a previsão da volatilidade ao longo do tempo de maturação de uma opção, que iguala o preço da opção observado no mercado com o preço teórico de um modelo de precificação de opção.

Formalmente, seja $c_t = c_t(\sigma^2; T)$ o valor teórico de uma opção de compra tipo européia no tempo $t < T$, onde σ^2 é a variância e T a data de maturidade da opção, com o retorno do comprador dado por $f_T = (S_T - K)^+$. Se \hat{c}_t é o valor da opção praticado no mercado, então:

$$\hat{c}_t = c_t(\sigma^2; T). \quad (3.1)$$

Se for possível extrair a raiz quadrada de σ^2 na equação acima, esse valor é a volatilidade implícita e será denotado por σ^{VI} - ela é considerada a previsão do mercado da volatilidade futura durante o tempo de maturidade da opção.³

A σ^{VI} pode ser usada para:

- a) monitorar a opinião do mercado sobre a volatilidade de certa ação, que varia com o tempo;
- b) transformar preços de ativos em volatilidades e, a partir destas, negociar ou interpolar vencimentos e/ou maturidades para retornar preços consistentes com os mais líquidos do mercado;
- c) calcular o preço de uma opção a partir do preço de outra opção;

² Esta seção segue ALEXANDER (2001), CAMPBELL *et al* (1997), HULL (1997), JORION (1997), SHIRYAEV (1999), WILMOTT *et al* (1995) entre outros.

³ A equação (3.1), em sentido estrito, é uma forma generalizada de obter a volatilidade implícita, pois não há qualquer referência ao modelo de precificação de opção que é utilizado neste processo.

- d) testar a eficiência do mercado de opções, ou seja, se os preços das opções incorporam instantaneamente toda a informação disponível, a volatilidade implícita deve ser o melhor previsor da volatilidade futura.⁴

O argumento de que a volatilidade implícita enseja prever com melhor acuracidade os preços/volatilidades futuras dos ativos, reside no fato dela ser do tipo *forward looking*, pois é ela formada a partir das expectativas futuras dos agentes econômicos. Ela contém a expectativa dos participantes do mercado sobre eventos futuros e incorpora informações que não são estritamente históricas, tal como a divulgação de indicadores macroeconômicos. Logo, os modelos estatísticos que realizam suas estimações *backward looking*, devem realizar previsões estatísticas inferiores aquelas.

Assim, se o preço de mercado de uma opção de compra c pode ser obtido, juntamente com o preço do ativo S , o preço de exercício K , a taxa de juro livre de risco r , o tempo de maturidade da opção n , pode-se *back out* a volatilidade implícita utilizando a equação (2.42).⁵ De fato, a volatilidade implícita é somente o inverso do preço da opção no sentido do teorema de função inversa. Logo, utilizando a fórmula *Black-Scholes*, a volatilidade implícita será igual a:

$$\sigma^{VI} = f(c, K, S, T - t, r). \quad (3.2)$$

Contudo, não existe uma forma fechada à solução da equação acima, mesmo quando o modelo de precificação da opção tem uma forma analítica. Portanto, é utilizado o método numérico para descobrir a volatilidade como uma função implícita de variáveis conhecidas.⁶

3.1.1 O Sorriso da Volatilidade

O processo de derivação da fórmula *Black-Scholes* de precificação de opções, usa a hipótese que os preços dos ativos seguem um movimento geométrico *browniano*.⁷ Isso implica que o valor de σ^2 , que aparece na equação (2.42), é constante e conhecido. Assim, a volatilidade implícita deveria ser igual em todas as opções de um mesmo ativo e, portanto, que este modelo de precificação é o correto.

⁴ Especificamente, este item será estudado no próximo capítulo deste estudo.

⁵ Vale ressaltar que a equação (2.42) vai gerar, para cada opção negociada, uma estimativa anual da volatilidade implícita.

⁶ O *software* utilizado para *back out* a volatilidade implícita, neste estudo, é o *MAPLE 7*.

⁷ A fórmula de *Black-Scholes* foi detalhadamente descrita na subseção 2.3.

Contudo, como vários estudos demonstram, quando o modelo *Black-Scholes* é utilizado, obtêm-se diferentes volatilidades implícitas para diferentes preços de exercícios e maturidades, para o mesmo ativo. O efeito sorriso da volatilidade refere-se a esse fato empírico da discrepância que surge ao utilizar o modelo *Black-Scholes* como o verdadeiro modelo de formação dos preços e os preços praticados no mercado. Geralmente, a volatilidade implícita é maior em opções de compra muito dentro-do-dinheiro ou muito fora-do-dinheiro, do que em opções de compra no-dinheiro e, dessa forma, origina o sorriso da volatilidade.

Então, ou a informação do mercado não é precisa ou o mercado não acredita na hipótese desse modelo: volatilidade constante e normalidade nos retornos do ativo podem ser questionadas. Especificamente, a distribuição dos retornos do ativo pode ter caudas grossas e sua volatilidade pode ser estocástica, que torna impróprio usar o movimento geométrico *browniano* como o processo gerador do preço do ativo.⁸ Ainda, os preços de mercado podem estar refletindo propriedades do processo de preços que não são assumidos no modelo *Black-Scholes*. Muitas vezes, ao surgir uma nova informação, é mais fácil ajustar o parâmetro desconhecido – a volatilidade, ao invés de mudar de modelo.

Mas, apesar dos profissionais de mercado terem conhecimento dessa anomalia, sem dúvida, o modelo *Black-Scholes* é ainda o mais utilizado. Uma explicação para este fato, surge da simplicidade de aplicação do modelo. Existe somente um parâmetro no modelo que não é observável – a volatilidade, a qual pode ser deduzida a partir do preço do ativo, dos preços das opções e preços das opções a partir das volatilidades.⁹ Outra explicação reside nas “manhas” que os profissionais de mercado desenvolveram para lidar com as imperfeições do modelo.¹⁰

O gráfico 3.1 abaixo atesta a presença do sorriso da volatilidade para as opções de compra da Telemar S.A.. Os pontos são as volatilidades implícitas derivadas utilizando o modelo *Black-Scholes*, conforme consubstanciado na equação (2.42), no período de

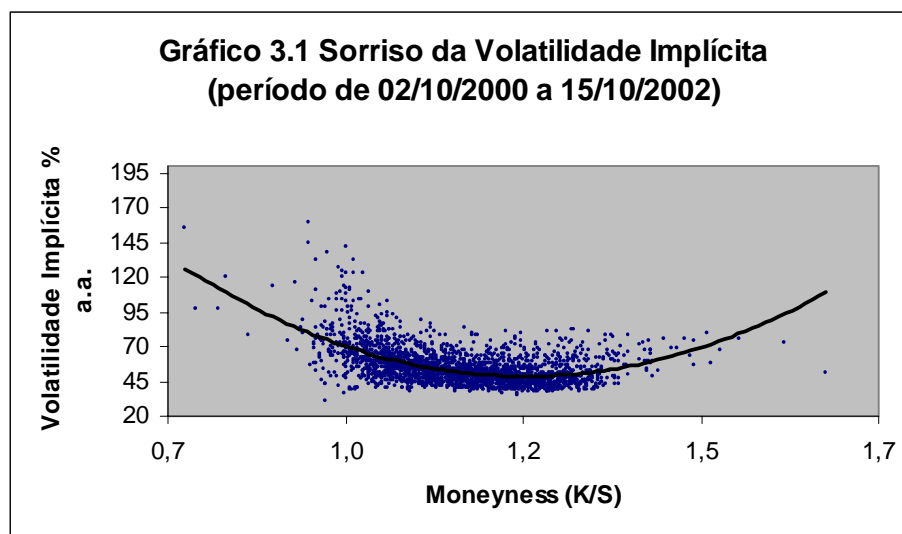
⁸ Como foi visto no capítulo anterior, a hipótese do modelo *Black-Scholes* de utilizar a equação (2.7) para descrever o comportamento dos preços do ativo, implica que o preço do ativo-objeto é distribuído lognormalmente e seu retorno têm uma distribuição normal.

⁹ Modelos mais complexos que relaxam algumas hipóteses implícitas no modelo *Black-Scholes*, utilizam vários parâmetros não observáveis e, portanto, tornam-se extremamente difíceis de serem utilizados.

¹⁰ Uma das “manhas” adotadas pelos profissionais é a criação de uma matriz de volatilidades implícitas. Uma descrição detalhada deste processo pode ser visto em HULL (1997), p.560.

02/10/2000 a 15/10/2002,¹¹ como função do *moneyness* (K/S)¹² das opções. A linha do ajuste polinomial aos dados configura claramente o sorriso. As opções que estão dentro-do-dinheiro (*moneyness* < 1,0) variam de uma volatilidade implícita de 155,3% a.a. - para opções com um *moneyness* de 0,72, a 30,4% a.a. (*moneyness* de 0,92). Para as opções fora-do-dinheiro (*moneyness* > 1,0) a σ^{II} varia de 84,1% a.a. (*moneyness* de 1,11) a 36,5% a.a. (*moneyness* de 1,19). Pode-se ver que a grande maioria das volatilidades implícitas se situam no intervalo de 40% a.a. a 70% a.a.

A existência do sorriso da volatilidade nas opções da Telemar S.A. implica que a volatilidade das opções no-dinheiro são menores do que a volatilidade cotada no mercado. Como consequência, a volatilidade implícita no-dinheiro pode estar subestimando a verdadeira volatilidade esperada, pois no mercado as opções dentro e fora-do-dinheiro possuem volatilidades mais alta.



Fonte: elaborado pelo autor.

3.2 VOLATILIDADE ESTATÍSTICA

Uma das principais características da volatilidade implícita é sua natureza de *forward looking*. Isto significa que o preço de uma opção depende da volatilidade futura esperada

¹¹ Esse período amostral resultou em 2.584 volatilidades implícitas, as quais são representadas por pontos no gráfico 3.1.. Referidas volatilidades foram calculadas obedecendo a um filtro, o qual será detalhadamente explicado no próximo capítulo.

¹² S é o preço médio diário de cotação da ação Telemar S.A. preferencial – TNLP4, e K é o preço de exercício. Igualmente, é utilizado o preço médio de cada opção negociada diariamente no processo de *back out* a volatilidade implícita.

ao longo do horizonte de sua maturidade. Ao contrário, a volatilidade estatística depende da escolha de um modelo estatístico que é aplicado aos dados históricos dos retornos do ativo, geralmente um modelo de série de tempo, sendo, por natureza, *backward looking*.

Aplicando o modelo aos dados históricos, originam-se estimativas estatísticas da volatilidade passada. Simultaneamente, geram-se previsões da volatilidade de agora até algum ponto futuro no tempo, chamado de o tempo de horizonte.

Um modelo estatístico pode ser um processo de média móvel igualmente ponderado (ou ponderado exponencialmente) ou um modelo derivado da “família” GARCH – *generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*. Estas classes de modelos são baseadas a partir de hipóteses similares, ou seja, sobre os retornos históricos dos ativos. Contudo, advindo de suas características específicas de estimação, podem gerar previsões imprecisas (ou não) sobre o futuro comportamento do retorno do ativo – por exemplo, fraco poder de previsão no sentido de avaliar qual o modelo que resulta no menor erro quadrático médio.

Nesse sentido, as subseções subseqüentes descrevem essas duas classes de modelos. No próximo capítulo eles serão utilizados para gerar previsões de volatilidade, as quais serão objeto de comparação com a volatilidade implícita para verificar qual delas possui maior poder de previsão e conteúdo de informação sobre os retornos da ação Telemar S.A..

3.2.1 Modelos de Média Móvel¹³

Os modelos de média móvel são classificados como modelos de volatilidade constante, pois referem-se a volatilidade incondicional do processo de retornos de um ativo. Isto implica que σ é uma constante finita, a mesma ao longo de todo o processo de geração dos dados. Ela pode ser definida em termos da variância da distribuição incondicional de um processo de retornos estacionário.¹⁴ Uma das propriedades de uma série estacionária é que ela tem uma variância incondicional (σ^2) finita. Logo, a variância desta distribuição é a variância incondicional e sua raiz quadrada é a volatilidade incondicional.

¹³ O material apresentado nesta seção segue ALEXANDER (2001), GREENE (2000), JORION (1997) e HULL (1997) entre outros.

¹⁴ Particularmente, a variância incondicional somente é definida se a série de retornos do ativo é gerada por um processo estocástico estacionário, ou seja, se for rejeitada a hipótese de raiz unitária. Como os retornos são definidos como a primeira diferença do log dos preços do ativo, não deve causar surpresa nenhuma se esta hipótese for rejeitada.

Uma das formas de derivar a volatilidade incondicional é através de uma média móvel igualmente ponderada.¹⁵ Ela é calculada a partir de uma janela de dados de tamanho fixo e é transportado ao longo do tempo, cada dia adicionando um novo retorno ao quadrado e descartando o retorno ao quadrado mais antigo, obtendo-se assim, estimativas da variância incondicional. Formalmente, uma estimativa não viesada da variância incondicional no tempo t , usando os n mais recentes retornos diários é

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_{t-i} - \bar{R}_t)^2}{n-1}, \quad (3.3)$$

onde $R_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$, $\bar{R}_t = \sum_{i=1}^n R_{t-i}$ e S_t é o preço diário do ativo em t . Para

converter $\hat{\sigma}_t^2$ em uma estimativa de volatilidade anual, aplica-se a fórmula abaixo:

$$\text{Volatilidade anual} = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2} \sqrt{252}. \quad (3.4)^{16}$$

Para fins de padronizar a notação, os modelos de média móvel igualmente ponderados serão citados ao longo deste estudo como $MA(n)$, onde n é o número de dias da janela móvel.

Um importante problema ocorre nos $MA(n)$: a ocorrência de eventos extremos. Se, por exemplo, ocorrer somente um não usual retorno durante o período n , ele afetará a volatilidade histórica de n dias na mesma extensão de exatamente os n dias seguintes a ocorrência daquele evento extremo, apesar da volatilidade já ter retornado ao seu nível normal.

Uma das formas de resolver este problema é colocar mais peso nas observações mais recentes, através de uma média móvel ponderada exponencialmente (EWMA). Quando o EWMA é aplicado aos retornos ao quadrado, um retorno extremo gradualmente diminui ao longo do tempo. A persistência desse evento ao longo do tempo será determinada por uma constante de alisamento λ , sendo $0 < \lambda < 1$. Quanto maior o valor de λ , mais peso é colocado nas observações passadas e então, mais suave a série torna-se. A estimativa da variância ponderada exponencialmente dos retornos ao quadrado é¹⁷

¹⁵ Geralmente, é denominada de volatilidade histórica a previsão estatística a partir de médias móveis igualmente ponderadas.

¹⁶ A equação (3.4) será utilizada tanto para converter variâncias incondicionais como condicionais em volatilidade anual. O fator de anualização – 252, refere-se ao período de dias úteis ao ano utilizado pelo mercado brasileiro. Vale destacar novamente, que o processo de *back out* a volatilidade implícita através da equação (2.42), já fornece uma previsão da volatilidade em termos anuais.

¹⁷ É padrão na literatura supor que a média dos retornos de séries financeiras diárias é zero.

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2. \quad (3.5)$$

Reescrevendo esta fórmula em sua forma recursiva:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) R_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2. \quad (3.6)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (3.6) determina a intensidade de reação da volatilidade para eventos do mercado. O segundo termo determina a persistência na volatilidade. Porém, uma importante restrição dos modelos EWMA é que a reação e a persistência não são independentes, pois a soma dos seus termos é igual a um.

Outro problema em utilizar o EWMA surge do fato de que diferentes valores de λ produzem diferentes previsões. Na prática, o mercado financeiro usa um valor de 0,94 para o λ , que produz resultados similares a um MA(20)-MA(25). Adicionalmente, a equação (3.6) é similar ao modelo IGARCH (descrito na próxima subseção), sem o termo constante. Desse modo, apesar do amplo uso desse predictor estatístico pelas instituições financeiras, optou-se por desconsiderá-lo para fins de análise de qual é o melhor predictor da volatilidade futura, pois se considera ser mais prudente e robusto seguir uma previsão paramétrica da volatilidade.

3.2.2 Modelos GARCH¹⁸

Os modelos de volatilidade que usam o método de médias móveis ponderadas descritos acima, assumem que os retornos dos ativos são independentes e identicamente distribuídos. Não existe a hipótese da volatilidade variando no tempo. Eles somente providenciam uma estimativa da volatilidade incondicional, a qual é constante, e a estimativa corrente é tomada como uma previsão. Essas estimativas não mudam ao longo do tempo. Caso isso ocorra, isto é devido a um ruído ou erros amostrais nos modelos de média móvel. Não existe nestes modelos qualquer variação na volatilidade.

Entretanto, os retornos de ativos financeiros não são apropriadamente modelados por um processo independente e identicamente distribuído. Nesse sentido, os modelos de volatilidade variando no tempo descrevem um processo para a volatilidade condicional. Uma distribuição condicional, neste contexto, é uma distribuição que é condicionada a um conjunto de informações, e a volatilidade condicional no tempo t é a raiz quadrada da variância da distribuição condicional no tempo t .

¹⁸ Esta seção segue BAILLIE *et al* (1996), BOLLERSLEV (1986), ENGLE (1982), ENGLE & BOLLERSLEV (1986), GREENE (2000), ENDERS (1995) e MORAIS & PORTUGAL (1999) entre outros.

Os modelos de variância condicional heteroscedástica, chamados também de modelos de volatilidade, são reconhecidamente interessantes para analisar o comportamento da volatilidade nas séries financeiras, pois possuem propriedades que procuram explicar alguns dos fatos estilizados de variáveis econômicas e financeiras:

- a) A distribuição não-condicional dos retornos possui caudas grossas em relação à distribuição Normal;
- b) variâncias que mudam a cada período de tempo;
- c) para alguns tipos de retornos, a volatilidade reage de maneira diferenciada se os preços estão aumentando ou declinando. Geralmente, as subidas são lentas e as quedas são abruptas – denotando uma volatilidade maior.

Encontrar essas evidências para o caso dos retornos de ativos financeiros é importante não apenas para uma melhor formulação teórica de modelos que descrevem o comportamento dessas séries e para as aplicações destes em seleção de portfólios e precificação de ativos, mas também para a avaliação dos riscos de um investimento.

Nesse contexto, ENGLE (1982) propõem uma estrutura alternativa especificamente designada para modelar e prever a variância condicional: modelos ARCH – *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, onde o primeiro e o segundo momento da série são modelados de forma conjunta. Desde então, diversas extensões do modelo original foram propostas na literatura, bem como diferentes métodos de estimação e testes para a presença de erros tipo ARCH:¹⁹ GARCH, EGARCH, GJR, IGARCH, FIGARCH, ...

Porém, antes de prosseguir na especificação dos modelos que descrevem a equação da variância condicional, será primeiro apresentado resumidamente alguns modelos que descrevem a equação da média, isto é, o primeiro momento da série de tempo.

3.2.2.1 Equação da Média

Seja uma série de tempo univariada y_t . Se Ω_{t-1} é o conjunto de informações no tempo $t-1$, sua forma funcional pode ser definida como:

$$y_t = E(y_t / \Omega_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

¹⁹ Os erros tipo ARCH podem ser verificados através do teste ARCH-LM. Este teste é um multiplicador de Lagrange para heterocedasticidade condicional autoregressiva nos resíduos (ENGLE (1982)). Através de uma regressão auxiliar: $\varepsilon_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t$, onde ε é o resíduo, é computado o teste estatístico ARCH-LM = TR^2 , em que T é o número de observações e o R^2 é obtido da regressão auxiliar. Sob $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$, o teste ARCH-LM é assintoticamente distribuído como χ_{q-1}^2 .

onde $E(./.)$ é o operador de expectativa condicional e ε_t é o termo de distúrbio (resíduo ou o processo de inovação), com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $E(\varepsilon_t \varepsilon_{st}) = 0, \forall t \neq s$.

Se a especificação da equação da média for composta de valores defasados de ordem 1 da variável dependente y_t , o modelo é dito ser um *autoregressive* de ordem 1 - $AR(1)$:

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (3.8)$$

onde $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$. O termo de tendência, a constante c , pode ser positivo ($c > 0$) ou negativo ($c < 0$). O coeficiente do lag α determina a estabilidade do processo, ou seja,

- se $|\alpha| > 1$ a série de tempo explode, isto é, $y_t \rightarrow \pm\infty$, quando $t \rightarrow \infty$;
- se $|\alpha| = 1$ a série de tempo resulta em um *random walk* com *drift*;
- se $|\alpha| < 1$ o processo y_t é estacionário.

Usando o operador de defasagem L^{20} na equação (3.8):

$$(1 - \alpha L)y_t = c + \varepsilon_t. \quad (3.9)$$

Supondo que $|\alpha| < 1$, outra forma de expressar o modelo $AR(1)$ é

$$y_t = (1 - \alpha L)^{-1}(c + \varepsilon_t) = (1 - \alpha L)^{-1}c + (1 - \alpha L)^{-1}\varepsilon_t, \quad (3.10)^{21}$$

$$y_t = \frac{c}{1 - \alpha} + \varepsilon_t + \alpha \varepsilon_{t-1} + \alpha^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (3.11)$$

A equação (3.11) mostra que o modelo $AR(1)$ é equivalente a um $MA(\infty)$.

A esperança e a variância de (3.11) são iguais a:

$$E(y_t) = c/(1 - \alpha) \quad e \quad V(y_t) = \sigma^2/(1 - \alpha^2). \quad (3.12)$$

As autocovariâncias do modelo $AR(1)$ são independentes do termo constante:

$$E(y_t y_{t-s}) = \alpha^s \sigma^2 / (1 - \alpha^2). \quad (3.13)$$

Um modelo *autoregressive* de ordem $(p) - AR(p)$, é descrito como:

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (3.14)$$

Segue que $E(y_t) = c/(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p)$ e

$$V(y_t) = \gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \dots + \alpha_p \gamma_p + \sigma^2, \quad (3.15)$$

onde $\gamma_s = \text{cov}(y_t, y_{t-s})$. Para $s > 0$, a autocovariância segue a mesma ordem de diferença do processo em si mesmo, isto é,

²⁰ O operador de defasagem L é definido como: $L^1 y_t = y_{t-1}$.

²¹ Vale lembrar que $(1 - \alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \dots$

$$\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = \gamma_s = \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2} + \dots + \alpha_p \gamma_{s-p}. \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) podem ser resolvidas para originar a variância e autocovariância de um processo estacionário $AR(p)$ em termos dos parâmetros do modelo:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \text{ e } \sigma^2.$$

Uma outra especificação para a equação da média são os modelos de média móvel para a variável y_t .²² Um modelo de média móvel de ordem 1 – $MA(1)$, é

$$y_t = c + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1}, \quad (3.17)$$

onde $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$. Este modelo é estacionário para qualquer valor de c ou β , pois $E(y_t) = c$, $V(y_t) = (1 + \beta^2)\sigma^2$ e $\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = \beta\sigma^2$, se $s=1$ e 0 c.c..

Inclusive, mesmo um modelo $MA(q)$, têm, ao contrário do $AR(p)$, sempre uma representação estacionária, pois se:

$$y_t = c + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.18)$$

resulta que $E(y_t) = c$, $V(y_t) = (1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_q^2)\sigma^2$

e $\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = (\beta_s + \beta_1 \beta_{s+1} + \beta_2 \beta_{s+2} + \dots + \beta_{q-s} \beta_q)\sigma^2$, se $s \leq q$ e 0 c.c..

Contudo, uma condição necessária para a invertibilidade do processo, por exemplo, $MA(1)$ em um $AR(\infty)$, é se e somente se $|\beta| < 1$.

Ao mixar esses dois processos estacionários num modelo mais geral com termos autoregressivos de ordem p e com termos de médias móveis de ordem q , resulta no modelo $ARMA(p, q)$:

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.19)$$

onde $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$.

3.2.2.2 Equação da Variância

ENGLE (1982) definiu como um processo *Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (ARCH), todo ε_t da forma:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t, \quad (3.20)$$

²² Vale destacar que os modelos de média móvel descritos na subseção 3.2.1, referem-se a estimação da variância incondicional de uma série de tempo de retornos.

onde $z_t \sim i.i.d.(0,1)$. Então, por definição ε_t é serialmente não correlacionado com esperança igual a zero, mas sua variância condicional é igual a σ_t^2 e, portanto, pode variar ao longo do tempo, ao contrário do que é assumido em modelos de regressão padrão.

Abaixo, serão descritos alguns modelos do tipo ARCH. Eles diferem na forma funcional de σ_t^2 , mas os princípios básicos são os mesmos. Além dos tradicionais modelos ARCH e GARCH, são também apresentados os modelos assimétricos e o GARCH com integração fracionária.

a) Modelo ARCH

O modelo ARCH (q) pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= z_t \sigma_t, \\ z_t &\sim i.i.d. D(0,1), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $D(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade com média zero e variância unitária.

O modelo ARCH pode descrever a aglomeração de volatilidade. A variância condicional de ε_t é uma função crescente do quadrado do choque que ocorreu em $t-1$. Logo, se ε_{t-1} era grande em valor absoluto, espera-se que σ_t^2 e (portanto) ε_t também sejam grandes em valor absoluto. A ordem de defasagem de q determina o período de tempo que o choque persiste em condicionar a variância de erros subsequentes. Quanto maior o valor de q , mais longos são os episódios de volatilidade.

Mesmo se a variância condicional do modelo ARCH variar no tempo ($\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 / \psi_{t-1})$), a variância incondicional de ε_t é constante e, providenciado que

$\alpha_0 > 0$ e $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$, resulta que:

$$\sigma^2 = Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i}.$$

O excesso de kurtose, que é observado em praticamente todas as séries de tempo financeiras, pode também ser explicado pelo modelo ARCH. Como mostrado por ENGLE (1982), no caso de um ARCH (1) sob a hipótese de normalidade, a kurtose de ε_t é igual

$3(1-\alpha_1^2)/(1-3\alpha_1^2)$. A kurtose é então finita se $\alpha_1 < \frac{1}{3}$ e maior do que 3 (o valor da kurtose numa distribuição normal padrão) se $\alpha_1 < 0$.

Por último, para garantir que a variância condicional, dada pela equação (3.21), seja positiva para todo t são impostas restrições quanto aos sinais dos coeficientes: $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 (i=1, \dots, q)$.

b) Modelo GARCH

Da experimentação empírica com modelos da classe ARCH (q), tornou-se aparente que a ordem do modelo ajustado era muito grande – q grande. Numa analogia direta com modelos da classe $AR(p)$, onde a solução parcimoniosa é incluir termos $MA(\cdot)$ – formando um modelo $ARMA$, o processo $ARCH(q)$ foi generalizado para incluir esses “termos $MA(\cdot)$ ”. Esta é a motivação por trás do modelo GARCH (p, q), proposto por BOLLERSLEV (1986). Assim, os modelos GARCH – *General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, estendem a formulação ARCH no sentido de que permitem uma memória mais longa e uma estrutura de defasagens para a variância mais flexível. Estes modelos também podem ser utilizados para entender a relação entre a volatilidade e os retornos esperados:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2, \quad (3.22)$$

onde as restrições são agora dadas por $q > 0, p > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, (i=1, \dots, q), e \beta_i \geq 0, (i=1, \dots, p)$. Se $p = 0$, o modelo se reduz a um ARCH (q) e se $p = q = 0$, então ε_t é um ruído branco. Para que o processo seja bem definido, é requerido também que $\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\beta(L)} + \frac{\alpha(L)\varepsilon_t^2}{1-\beta(L)}$ seja não negativo, e que as raízes do polinômio $(1-\beta(L))=0$ estejam fora do círculo unitário.

c) Modelo EGARCH

O modelo exponencial GARCH – EGARCH, foi introduzido por NELSON (1991) para tratar com três básicas carências nos modelos da classe GARCH. Primeiro, o impacto de choques na volatilidade é simétrico nestes modelos. Portanto, choque positivo ou negativo tem exatamente o mesmo efeito na variância condicional. Como muitas aplicações dos modelos da classe GARCH são em finanças, e nestes dados é observado

que os efeitos de retornos positivo ou negativo na volatilidade não é identificado, é desejável conceber modelos que admitem estimação e testes para assimetria. Segundo, a restrição $\alpha_0 > 0, \alpha_i, \beta_i \geq 0, \forall i$, em (3.22), restringe as raízes características do polinômio dos modelos GARCH, prevenindo movimento oscilatório em σ_t^2 . Terceiro, medidas de persistência de choques na variância condicional para processos IGARCH dependem da norma considerada, e nenhuma analogia direta pode ser feita com resultados de raiz unitária na literatura.

Assim, em algumas séries (como o retorno de ações), a volatilidade subsequente a um choque negativo seria maior que a gerada por choque positivo. Este fenômeno ficou conhecido como “*leverage effect*”. *Bollerslev e Mikkelsen (1996)* rescreveram o modelo EGARCH com vistas a captar esse tipo de assimetria:²³

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2, \quad (3.23)$$

onde $g(z_t) = \theta_1 z_t + \theta_2 [|z_t| - E|z_t|]$ e $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$, isto é, o resíduo padronizado. O valor de $E|z_t|$ depende da hipótese feita na densidade incondicional de z_t . Para a distribuição

$$t\text{-Student assimétrica}, E(|z_t|) = \frac{4\xi^2 \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\xi + \frac{1}{\xi} \sqrt{\pi}(\nu-1) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad \text{onde } \xi = 1.$$

Neste modelo, é dada maior flexibilidade à equação da variância permitindo que ela capture alguma assimetria na relação entre retornos de mercado e a volatilidade condicional. O modelo é assimétrico devida a existência do coeficiente θ_1 em $g(z_t)$, que capta o efeito *leverage*, onde choques de retornos positivos geram menor volatilidade do que choques de retornos negativos. O segundo coeficiente de $g(z_t) - \theta_2$, capta o efeito de magnitude, ou seja, grandes erros provocam maiores impactos na volatilidade, sejam eles de valores positivos ou negativos.

Note que a forma logarítmica do modelo EGARCH não requer a imposição de restrições quanto aos sinais dos parâmetros.

²³ A intuição por trás do efeito assimetria é justamente determinar quanto o mercado diferencia um efeito positivo de um negativo sobre a volatilidade.

d) Modelo GJR

Outro modelo que visa captar o efeito *leverage* foi proposto por GLOSTEN, JAGANNATHAN E RUNKLE (1993):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.24)$$

onde S_{t-i}^- toma o valor 0 se ε_t é positivo e 1 quando ε_t é negativo. Desta forma, o impacto de ε_t^2 em σ_t^2 vai ser diferente quando ε_t é positivo ou negativo.

e) Modelo IGARCH

Em muitas aplicações de séries de tempo financeiras de alta frequência, a variância condicional estimada utilizando um modelo *GARCH*(p, q), como o descrito pela equação (3.22), exibe uma forte persistência, isto é,

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1.$$

Se $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$, o processo (ε_t) é estacionário de segunda ordem e um choque na σ_t^2 têm um impacto de decaimento de σ_{t+h}^2 quando h aumenta e é assintoticamente negligenciável.

Contudo, se $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \geq 1$, o efeito de σ_{t+h}^2 não desaparece assintoticamente. Esta propriedade é denominada na literatura de persistência da volatilidade.

Rescrevendo a equação (3.22) como:²⁴

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2). \quad (3.25)$$

Quando o polinômio $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$ tem uma raiz unitária,²⁵ ou seja,

$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$, resulta no modelo Integrado GARCH (IGARCH)²⁶ de ENGLE E

BOLLERSLEV (1986). Os autores denominaram o modelo acima de integrado na variância se $\alpha_0 = 0$ e integrado na variância com tendência se $\alpha_0 > 0$.

²⁴ Deve-se primeiro acrescentar o termo $[1 - \beta(L)]\varepsilon_t^2$ em ambos os lados da equação (3.22).

²⁵ Neste caso, o processo da variância condicional é não estacionário.

²⁶ Um conceito similar existe na equação da média. Quando $AR(p) + MA(q) = 1$, o processo ARMA é integrado – ARIMA.

Neste modelo a informação corrente permanece importante para a previsão da volatilidade em qualquer horizonte de tempo. Então, se o modelo básico GARCH for estendido para admitir uma raiz unitária na variância condicional, esse processo Integrado GARCH - IGARCH, admite que choques tenham um efeito permanente na variância condicional.

Para ver isto, suponha um modelo IGARCH (1,1) sem *drift*:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2, \quad (3.26)$$

onde $\alpha_1 + \beta_1 = 1$.²⁷ A previsão s períodos a frente ($s \geq 2$) pode ser escrita na forma recursiva:

$$E_t(\sigma_{t+s}^2) = \alpha_1 E_t(\varepsilon_{t+s-1}^2) + (1 - \alpha_1) E_t(\sigma_{t+s-1}^2),$$

$$E_t(\sigma_{t+s}^2) = E_t(\sigma_{t+s-1}^2).$$

Dessa forma,

$$E_t(\sigma_{t+s}^2) = E_t(\sigma_{t+s-1}^2) = E_t(\sigma_{t+s-2}^2) = \dots = \sigma_{t+1}^2.$$

Ou seja, a variância condicional s períodos a frente é igual a variância condicional um período a frente, para $s \geq 2$. Este modelo é semelhante ao passeio aleatório com raiz unitária na média condicional, em que a previsão da média s períodos a frente é igual ao nível do período atual. Logo, a informação atual é importante para todas as previsões futuras e choques na série serão permanentes. Então, choques na variância condicional do modelo IGARCH (1,1) se perpetuarão.

Se for tomado o modelo:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2, \quad (3.27)$$

com $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, resulta que:

$$E_t(\sigma_{t+s}^2) = s\alpha_0 + \sigma_{t+1}^2.$$

Isto é semelhante ao passeio aleatório com *drift* na média. Neste caso, a importância relativa σ_{t+1}^2 no horizonte de tempo vai depender do valor de α_0 , mas ainda assim seu efeito é persistente.

Rescrevendo a equação (3.25) da seguinte forma:

$$\phi(L)(1-L)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2), \quad (3.28)$$

²⁷ Se além dessa restrição, for também suposto que $\beta_1 = \lambda$, o modelo IGARCH (1,1) será semelhante a um modelo EWMA, conforme descrito pela equação (3.6), em que $R_t^2 = \varepsilon_t^2$.

onde $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$, é da ordem $[\max(p, q), -1]$.

Rearranjando a equação (3.28) para expressar a variância em função dos resíduos ao quadrado:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{[1 - \beta(L)]} + \{1 - \phi(L)(1-L)[1 - \beta(L)]^{-1}\} \varepsilon_t^2. \quad (3.29)$$

Ainda, conforme destacado por *Engle e Bollerslev (1986)*, no caso estacionário, à medida que se aumenta o horizonte de previsão, a variância condicional tende à variância não condicional: $E_t(\sigma_{t+s}^2) \rightarrow \sigma^2$, quando $s \rightarrow \infty$.

Por último, a partir da soma dos coeficientes α e β no modelo GARCH - $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = \gamma$, pode-se quantificar o grau de influência da persistência da volatilidade nos retornos através do cálculo da meia-vida.²⁸

f) Modelos FIGARCH

Como mostrado em DING, GRANGER E ENGLE (1993), entre outros, choques na variância condicional tendem a persistir por um longo intervalo de tempo. No entanto, a distinção entre processos I(0) e I(1)²⁹ parece ser muito restritiva. A propagação de choques em um processo I(0) decresce a uma taxa exponencial – tal que ele captura somente a curta memória, enquanto que num processo I(1) a persistência de choques é infinita.

Na média condicional, a especificação ARFIMA³⁰ (modelo ARMA com Integração Fracionária) foi proposta para preencher o espaço entre modelos de persistência curta e longa, tal que o comportamento de curto prazo da série é descrito pelos parâmetros ARMA, enquanto que o parâmetro de diferença fracionária admite a modelagem da dependência de longo prazo.

Neste contexto, BAILLIE, BOLLERSLEV E MIKKELSEN (1996) (doravante denotados por *BBM*), sugeriram modelos GARCH com Integração Fracionária – FIGARCH. O modelo FIGARCH é obtido substituindo o operador de primeira diferença na equação (3.28) por $(1-L)^d$, ou seja,

²⁸ A meia-vida mede o período de tempo necessário para que o efeito de um choque na volatilidade diminua até a metade, e é dada por $\lambda = 1 - \left[\frac{\log 2}{\log \gamma} \right]$, onde γ é a persistência.

²⁹ I(0) significa que o processo é estacionário, ou seja, não possui raiz unitária. Em I(1) o processo é integrado de ordem 1, ou seja, é necessário diferenciar a série de tempo uma vez para torná-la estacionária.

³⁰ Uma descrição completa dos modelos ARFIMA pode ser vista em *Greene (2000)*, p. 785.

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2). \quad (3.30)$$

Neste caso, a variância condicional do modelo FIGARCH (p, d, q) é dada por:

$$\sigma_t^2 = \underbrace{\frac{\alpha_0}{[1 - \beta(L)]}}_{\omega} + \underbrace{\{1 - \phi(L)[1 - \beta(L)]^{-1}(1-L)^d\}}_{\lambda(L)} \varepsilon_t^2, \quad (3.31)$$

ou de forma mais concisa:

$$\sigma_t^2 = \omega + \lambda(L)\varepsilon_t^2, \quad (3.32)$$

com $0 \leq d \leq 1$. Note que $\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i$, a qual, na prática, tem de ser truncada. *BBM* propõem truncar $\lambda(L)$ em 1000 defasagens.

No presente modelo, no qual a variância condicional é uma função dos erros passados ao quadrado, a persistência é melhor caracterizada pelos coeficientes de resposta a impulsos dados por:

$$\gamma_k \equiv \frac{\partial E_t(\varepsilon_{t+k}^2)}{\partial v_t} - \frac{\partial E_t(\varepsilon_{t+k-1}^2)}{\partial v_t}.$$

Na classe de modelos FIGARCH os coeficientes de resposta a impulso são independentes de t e podem ser obtidos (a partir da equação (3.30)) pelos coeficientes do polinômio $\gamma(L)$ abaixo:³¹

$$\begin{aligned} (1-L)\varepsilon_t^2 &= \underbrace{[(1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}]}_{\zeta} \alpha_0 + \underbrace{[(1-L)^{1-d}\phi(L)^{-1}]}_{\gamma(L)} \underbrace{[1 - \beta(L)]}_{v_t} (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2), \\ &= \zeta + \gamma(L)v_t. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De forma análoga à convencional análise de resposta a impulsos para a média, o impacto de longo prazo de choque passados na volatilidade pode ser avaliado em termos do limite cumulativo dos coeficientes de resposta a impulsos:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \gamma_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k, \\ &= F(d-1, 1, 1; 1) \phi(1)^{-1} [1 - \beta(1)], \end{aligned}$$

onde F é a função hipergeométrica.

Para fins de notação, vale registrar que:

³¹ Multiplica-se ambos os lados da equação (3.30) pela expressão $[\phi(L)^{-1}(1-L)^{1-d}]$.

$$\begin{aligned}
(1-L)^d &= F(-d, 1, 1; L), \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(k-d)\Gamma(k+1)^{-1}\Gamma(-d)^{-1}L^k, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k L^k,
\end{aligned}$$

onde Γ é a função gama.

Para $0 \leq d < 1$, $F(d-1, 1, 1; 1) = 0$. Então para o modelo GARCH e FIGARCH (com $0 < d < 1$), choques na variância condicional irão desaparecer com o horizonte de previsão. Mas existem importantes diferenças na dissipação da persistência para $d = 0$ e $0 < d < 1$. No caso dos processos GARCH, os choques decaem a uma taxa exponencial – mais rapidamente, enquanto que no modelo FIGARCH efetivam-se a uma taxa hiperbólica. Se $d = 1$, obtém-se o modelo IGARCH, no qual os choques são permanentes.

3.2.2.3 Estimação dos Modelos GARCH

Os modelos GARCH são estimados utilizando o *approach* de máxima verossimilhança (ML).³² A lógica do ML é interpretar a densidade de distribuição como uma função do conjunto de parâmetros, condicional a um conjunto de resultados amostrais. Esta função é chamada de função verossimilhança. Através das equações das variâncias (apresentadas na subseção anterior), é evidente que a avaliação recursiva desta função é condicional a valores não observados. Logo, a estimação por ML não é perfeitamente exata. Para resolver o problema de valores não observados, essas quantidades são estabelecidas em função de seus valores esperados não condicionais.

Se a equação da média e o processo de inovação são dados pelas equações (3.7) e (3.20), respectivamente, a função log-verossimilhança de uma distribuição normal padrão será:

$$L_{norm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T [\ln(2\pi) + \ln(\sigma_i^2) + z_i^2], \quad (3.34)$$

onde T é o número de observações.

Para uma distribuição *t-Student*, a função log-verossimilhança é:

³² O maior mérito do método de máxima verossimilhança consiste nas propriedades assintóticas dos estimadores, que são consistentes e assintoticamente eficientes. GREENE (2000), p. 126, apresenta uma detalhada descrição do processo.

$$L_{Stud} = T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln [\pi(\nu-2)] \right\} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \left[\ln(\sigma_i^2) + (1+\nu) \ln \left(1 + \frac{z_i^2}{\nu-2} \right) \right], \quad (3.35)$$

onde ν é os graus de liberdade, $2 < \nu \leq \infty$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama.

A função log-verossimilhança de uma *Generalized Error Distribution* (GED) para uma variável aleatória normalizada é dada por:

$$L_{GED} = \sum \left[\ln(\nu/\lambda_\nu) - 0,5 \left| \frac{z_i}{\lambda_\nu} \right|^\nu - (1+\nu^{-1}) \ln(2) - \ln \Gamma(1/\nu) - 0,5 \ln(\sigma_i^2) \right], \quad (3.36)$$

onde $0 < \nu < \infty$ e $\lambda_\nu \equiv \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right) 2^{-\frac{2}{\nu}}}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}}$.

A principal utilidade das densidades *t-Student* e GED é o fato delas serem simétricas e podem explicar as caudas grossas. Assimetria e kurtose são importantes em muitas aplicações financeiras: modelos de precificação de ativos, seleção de portfólios, teoria de precificação de opções, *Value-at-Risk*, ...

Por último, a log-verossimilhança de uma *Student* assimétrica padronizada é:

$$L_{skSt} = T \left\{ \ln \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - 0,5 \ln [\pi(\nu-2)] + \ln \left(\frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} \right) + \ln(s) \right\} - 0,5 \sum \left\{ \ln \sigma_i^2 + (1+\nu) \ln \left[1 + \frac{(sz_i + m)^2}{\nu-2} \xi^{-2|z_i|} \right] \right\}, \quad (3.37)$$

onde $\begin{cases} 1 & \text{se } z_i \geq -\frac{m}{s} \\ -1 & \text{se } z_i < -\frac{m}{s} \end{cases}$, ξ é o parâmetro de assimetria, ν é graus de liberdade da

distribuição, $m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right)$ e $s = \sqrt{\left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 \right) - m^2}$.

Em princípio, o vetor gradiente e a matriz hessiana podem ser obtidos numericamente ou avaliando suas expressões analiticamente. O *software Ox*, pacote [G@rch](#) 2.3, o qual

será utilizado na estimação e previsões dos modelos GARCH, usa a técnica numérica para aproximar a derivada da função log-verossimilhança em função do vetor de parâmetros.

3.2.2.4 Previsão da Variância Condicional

Um dos principais propósitos em construir e estimar modelos com dados financeiros é gerar previsões da variância condicional e, utilizando a equação (3.4), convertê-las em previsões da volatilidade anual h passos a frente, independentemente da equação da média.

No caso de um modelo GARCH (p,q), a previsão da variância condicional h passos a frente - $\hat{\sigma}_{t+h/t}^2$, é dada por:

$$\hat{\sigma}_{(t+h)/t}^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i \varepsilon_{t+h-i/t}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \sigma_{t+h-j/t}^2, \quad (3.38)$$

onde $\varepsilon_{t+i/t}^2 = \sigma_{t+i/t}^2$ para $i > 0$, enquanto $\varepsilon_{t+i/t}^2 = \varepsilon_{t+i}^2$ e $\sigma_{t+i/t}^2 = \sigma_{t+i}^2$ para $i \leq 0$.

Pode-se facilmente, por um procedimento similar ao executado acima, obter previsões h passos a frente da variância condicional para os modelos ARCH, IGARCH e FIGARCH. Por outro lado, a hipótese realizada no processo de inovação tem efeito na previsão dos modelos EGARCH e GJR, especialmente quando $h > 1$.

Para o modelo EGARCH (p,q), a previsão é dada por:

$$\begin{aligned} \ln \hat{\sigma}_{t+h/t}^2 &= E(\ln \sigma_{t+h}^2 / \Omega_t), \\ &= E \left\{ \hat{\alpha}_0 + [1 - \hat{\beta}(L)]^{-1} [1 + \hat{\alpha}(L)] \hat{g}(z_{t+h-1}) / \Omega_t \right\} \\ &= [1 - \hat{\beta}(L)] \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}(L) \ln \hat{\sigma}_{t+h/t}^2 + [1 + \hat{\alpha}(L)] \hat{g}(z_{t+h-1/t}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $\hat{g}(z_{t+k/t}) = \hat{g}(z_{t+k})$ para $k \leq 0$ e 0 para $k > 0$.

No modelo GJR, a previsão é:

$$\hat{\sigma}_{t+h/t}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\hat{\alpha}_i \varepsilon_{t-i=h/t}^2 + \hat{\gamma}_i S_{t-i+h/t}^- \varepsilon_{t-i+h/t}^2) + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \sigma_{t-j+h/t}^2. \quad (3.40)$$

Se $\gamma_i = 0$ resulta na previsão do modelo GARCH. Caso contrário, deve-se computar $S_{t-i+h/t}^-$. Note primeiro que $S_{t-i+h/t}^- = S_{t+i}^-$ para $i \leq 0$. Entretanto, quando $i > 1$, $S_{t+i/t}^-$ vai depender da escolha da distribuição de z_t . Quando a distribuição de z_t é simétrica ao redor de zero (para as densidades *Gaussiana*, *Student* e *GED*), a probabilidade que ε_{t+i} será negativa é $S_{t+i}^- = 0,5$. Se z_t é a distribuição *Student* assimétrica com o parâmetro

assimetria ξ e graus de liberdade ν , $S_{t+i/t}^- = \frac{1}{1+\xi^2}$, pois ξ^2 é a razão de probabilidade de estar acima e abaixo da moda.

Enfim, concluído o embasamento teórico sobre os vários métodos de se obter a volatilidade de um determinado ativo financeiro, cabe realizar uma mensuração empírica dessas alternativas. Esse será o objetivo do próximo capítulo deste estudo, onde através dos preços da ação e de opções da Tele Norte Leste Participações S.A. - empresa do setor de telecomunicações brasileiro, procurar-se-á inferir, a partir das distintas abordagens da volatilidade, o poder de previsão e o conteúdo de informação sobre a volatilidade futura dos retornos desse ativo.

4 A INFORMAÇÃO E O PODER DE PREVISÃO DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA E VOLATILIDADE ESTATÍSTICA

4.1 INTRODUÇÃO

O capítulo anterior descreveu como a previsão da volatilidade pode ser gerada utilizando diferentes modelos. De uma forma genérica, a previsão da volatilidade pode apresentar diferentes resultados, dependendo do modelo utilizado e das condições de mercado. Mesmo se somente um tipo de modelo for sempre usado, as previsões dependerão da escolha dos parâmetros. Quando os mercados são estáveis, as diferenças entre várias previsões são relativamente pequenas.

A maioria dos modelos de previsão da volatilidade estatística se apóia no comportamento passado dos preços dos ativos, ou seja, são, por natureza, de indução retroativa. Por outro lado, a avaliação de uma opção é realizada olhando-se para frente, pois o preço de uma opção depende das expectativas dos agentes econômicos quanto à volatilidade futura. Logo, muitos economistas argumentam que se os mercados de opções forem eficientes, a volatilidade implícita derivada do preço de uma opção, deve ser um melhor preditor de mercado da volatilidade futura do que aquela volatilidade derivada de modelos baseados em dados históricos. A volatilidade implícita contém a crença dos participantes do mercado sobre futuros eventos e incorpora informações que não são estritamente históricas, tal como a publicação num futuro próximo de novos indicadores de política econômica.

Como a volatilidade só pode ser apurada no contexto de um modelo, torna-se muito difícil calcular a precisão dessas estimativas e previsões. Segundo ALEXANDER (2001), p. 118-119, se alguém decidir realizar o difícil problema de avaliar a previsão, três considerações devem ser levadas em conta:

“..., the first consideration is: which volatility is being forecast?... Future volatility is an extremely difficult thing to forecast because the actual realisation of the future process volatility will be influenced by events that happen in the future... The second consideration is the choice of a benchmark forecast. The benchmark volatility forecast could be anything, implied volatility or a long-term equally weighted average statistical volatility being the most common... A third consideration is, which type of volatility should be used for the forecast? Since both implied and statistical volatilities are forecasts of the same thing, either could be used... Price process volatilities could be forecast by statistical or implied volatilities or indeed both”.

Muitas pesquisas têm sido publicadas na tentativa de determinar qual o estimador que prediz com maior eficiência a volatilidade dos mercados financeiros. Os resultados apresentados não são conclusivos, pois o resultado final depende do modelo de precificação da opção utilizado para extrair a volatilidade implícita e do modelo estatístico usado para analisar os dados históricos.

DAY & LEWIS (1992), que estudaram o índice de opções S&P 100¹ com expiração de 1985-1989, e em LAMOUREUX E LASTRAPES (1993), que examinaram opções de dez ações negociadas na *Chicago Board Opions Exchange* (CBOE) com expiração de 1982 a 1984, concluíram que a volatilidade implícita é viesada e ineficiente, e que a volatilidade passada contém informação preditiva sobre volatilidade futura além do que contido na volatilidade implícita. Esses resultados são uma rejeição da hipótese conjunta de eficiência do mercado e dos modelos de precificação de opções da classe *Black-Scholes*. Porém, segundo CHRISTENSEN & PRABHALA (1998), ambos estudos usam amostras sobrepostas e, adicionalmente, são caracterizadas por um problema “*maturity mis-match*”, pois *Lamoureux & Lastrapes* examinam o poder preditivo da volatilidade implícita um dia à frente e *Day & Lewis* examinam-o uma semana à frente, computado de opções que possuem tempo de maturidade muito maior (129 dias de negociação no teste de *Lamoureux e Lastrapes* e 36 dias de negociação em *Day e Lewis*).

Mais forte ainda, são as evidências de CANINA & FIGLEWSKI (1993), que, também utilizando o mercado de índice de opções S&P 100 (dados incluem somente o período anterior a outubro de 1987), encontraram que a volatilidade implícita não tem qualquer correlação com o retorno futuro da volatilidade e não incorpora a informação contida na mais recente volatilidade observada.

Por outro lado, igualmente utilizando o índice de opções S&P 100 com um ciclo de expiração de um mês, de 11/1983 a 05/1995, CHRISTENSEN & PRABHALA (1998) encontraram que a volatilidade implícita tem uma melhor performance do que a volatilidade histórica na previsão da volatilidade futura. Eles atribuem à diferença de seus resultados comparados àqueles de *Canina e Figlewski* é uma consequência de usar uma série de tempo mais longa e dados não sobrepostos. A divisão dos dados em antes e após o *crash* no mercado americano, em outubro de 1987, evidência que foi essa quebra estrutural que levou a volatilidade implícita ser mais viesada antes do *crash*..

¹ O índice de opções S&P 100 é um dos ativos mais negociado no mercado de opções dos E.U.A.

Nesta mesma linha, segue o estudo de FLEMING (1998), que também examina a performance da volatilidade implícita do índice *S&P 100* como um preditor da futura volatilidade no mercado de ações. Usando uma amostra de preços históricos dessas opções transacionadas na *Chicago Board Options Exchange*, de outubro de 1985 a abril de 1992, seus resultados indicaram que a volatilidade implícita é um preditor viesado positivamente, mas que ele contém relevantes informações sobre a volatilidade futura. A volatilidade implícita domina a taxa de volatilidade histórica em termos do poder de previsão ex-ante, e seu erro de previsão é ortogonal aos parâmetros freqüentemente ligados à volatilidade condicional, incluindo aqueles empregados em várias especificações ARCH. Esses resultados sugerem que um modelo linear com correção para o viés da volatilidade implícita, pode providenciar um útil estimador de mercado da volatilidade condicional.

JORION (1995) investiga a informação contida e o poder preditivo da volatilidade implícita em opções de câmbio futuro, negociadas no *Chicago Mercantile Exchange* (CME). A informação contida é medida em termos da habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade um passo à frente. Testes do poder preditivo focam-se na volatilidade ao longo dos dias restantes do contrato de opção. Desvios padrões implícitos são regredidos contra modelos de séries de tempo, tal como uma média móvel e um GARCH (1,1). Para obter máxima eficiência dentro de um limitado período amostral, observações diárias são usadas e erros padrões são corrigidos para os dados sobrepostos. As moedas selecionadas para o seu estudo foram o *Marco Alemão* (DM), o *Yen Japonês* (JY) e o *Franco Suíço* (SF), compreendendo o período amostral de janeiro de 1985 a fevereiro de 1992.

Em contraste com as opções de índice de ações, *Jorion* encontrou que modelos estatísticos de séries de tempo, mesmo quando dada à vantagem de estimar parâmetros *ex-post*, são ultrapassados em performance pela previsão implícita de opções. Porém, mesmo quando contabilizando para possíveis erros de medida e problemas estatísticos, as volatilidades implícitas são estimadores viesados positivamente da volatilidade futura.

TAYLOR & XU (1995) realizam similares resultados para opções de câmbio à vista negociadas na *Philadelphia Stock Exchange* (PHLX). Nesse artigo, a performance relativa da predição da volatilidade implícita e da volatilidade histórica é comparada para quatro taxas de câmbio de 1985 a 1991. Para três moedas, os modelos ARCH estimados até 1989 mostram que a volatilidade implícita PHLX providencia especificação para variâncias condicionais diárias que não podem ser significativamente melhoradas usando retornos passados. Para o autor, esse resultado é consistente com o critério de eficiência

informativo do mercado de opções de câmbio. Nas previsões fora da amostra temos que, novamente, previsores implícitos são superiores aos previsores históricos.

AGUILAR (1999) propõe avaliar a informação contida e o poder preditivo da volatilidade implícita de opções de câmbio da Coroa Sueca contra o Dólar e o Marco Alemão. Seu interesse era analisar se a volatilidade implícita em opções em um pequeno mercado de câmbio periférico, tal como o da Suécia, teria uma igual performance em prever a volatilidade futura como a volatilidade implícita de opções de câmbio em moedas fortes. Opções de câmbio em pequenos países são menos negociadas, que pode resultar em uma menor eficiência no preço das opções, fazendo volatilidade implícita destas opções um previsor menos confiável. Seus resultados apontam que a volatilidade implícita tem uma melhor performance na previsão da volatilidade futura do que a previsão da volatilidade obtida dos dados históricos.

Para o mercado brasileiro, ANDRADE & TABAK (2001) verificam se as evidências da literatura recente, que indicam que os preços de opções embutem informação sobre volatilidade futura do retorno dos ativos que não pode ser extraída de retornos passados, também se aplicam para as opções de compra da taxa diária de câmbio Dólar-Real negociadas na Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F), no período de 02 de fevereiro de 1999 a 02 de junho de 2000. O modelo de precificação de opção utilizado é o padrão GARMAN-KOHLHAGEN (1983)² – extensão do modelo *Black-Scholes*. Como modelos baseados em dados históricos, usaram o desvio-padrão da média móvel com uma janela móvel de 20 dias e um modelo GARCH (1,1).

Seus resultados sugerem que a volatilidade implícita no preço das opções de compra US\$/R\$, recuperada pelo uso do modelo de precificação de opção *Garman-Kohlhagen*, contém informação sobre a subsequente volatilidade realizada que não está presente nos retornos passados. Concluem, que é válido seguir a volatilidade implícita Dólar-Real para inferir sobre a volatilidade futura, pois previsões que somente utilizam retornos passados não são eficientes, no sentido que elas não incorporam toda informação pública disponível. Consistente com os outros trabalhos existentes na literatura, também encontraram que o melhor estimador da volatilidade futura é a volatilidade implícita e que esta é viesada positivamente.³

² GARMAN-KOHLHAGEN (1983) *apud* ANDRADE & TABAK (2001).

³ O artigo de GOMES (2002), testa se as volatilidades implícitas em opções de Telebrás e de Dólar Comercial fornecem informações úteis sobre retornos de grande magnitude no futuro, isto é, se essas volatilidades implícitas tem o poder de prever eventos futuros de *stress*. Desse modo, o autor escolhe como o

Seguindo esta literatura, este capítulo pretende avaliar qual o melhor previsor da volatilidade futura. Desta forma, o problema básico será investigar se a volatilidade implícita prevê com maior precisão o futuro do que a volatilidade estatística ou vice-versa. Para tanto, serão realizados testes do conteúdo de informação e de poder de previsão das volatilidades. O conteúdo de informação é medido em termos da habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade um passo à frente. Testes do poder de previsão, ao contrário, concentram-se na volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção.

Ao contrário do trabalho de ANDRADE & TABAK (2001), que utiliza as opções de dólar comercial, as quais têm pouca liquidez e geralmente refere-se a operações de balcão, neste estudo a avaliação do melhor previsor será realizada a partir da opção mais negociada no mercado brasileiro – as opções da Tele Norte Leste Participações S.A., bem como, utilizar-se-á modelos estatísticos mais sofisticados. Um ativo com alta liquidez, associado à utilização de critérios robustos à geração das séries de previsão das volatilidades, devem resultar em indicadores mais eficientes, que reflitam com maior precisão o comportamento do mercado. Os resultados apontam a volatilidade implícita como um modelo capaz de prever a volatilidade do dia seguinte com maior habilidade, apesar de viesada. Contudo, quanto à capacidade de prever a volatilidade futura ao longo do tempo de vida da opção, a volatilidade estatística (expressa pelo modelo FIGARCH) superou a volatilidade implícita sendo, inclusive, eficiente e não viesada.

4.2 ESPECIFICAÇÃO DOS TESTES DE CONTEÚDO DE INFORMAÇÃO E PODER DE PREVISÃO

Seguindo a literatura,⁴ os testes econométricos para avaliação das volatilidades foram realizados pela estimação de dois conjuntos de regressões. Seja $\sigma_{t,t+1}$ a volatilidade realizada ao longo do próximo dia de transação (VOLIDIA) da ação definida como:

$$\sigma_{t,t+1} = |R_{t+1}|, \quad (4.1)$$

onde $|R_{t+1}|$ é o retorno do ativo-objeto entre t e $t + 1$ em módulo. Para que esta volatilidade resulte em uma estimativa anual, ela deve ser multiplicada por $\sqrt{252}$. Assim, para verificar a habilidade da(s) variável(eis) explicativa(s) prever a volatilidade entre t e $t + 1$, isto é, o conteúdo de informação, é computada a seguinte regressão:

melhor estimador da volatilidade futura a volatilidade implícita nessas opções, pois as maiorias dos estudos até agora demonstram ser este o melhor previsor.

⁴ JORION (1995), NAVATTE E VILLA (2000), ALEXANDER (2001), ANDRADE E TABAK (2001), entre outros.

$$\sigma_{t,t+1} = \alpha_0 + \beta_1 \hat{\sigma}_t + u_t, \quad (4.2)$$

onde $\hat{\sigma}_t$ é a previsão da volatilidade um passo à frente, que pode ser tanto o estatístico como o implícito, e $u_t \sim IIN(0,1)$.⁵ Se o $\beta_1 \neq 0$ na equação acima, significa que o previsor contém alguma informação sobre a volatilidade do dia seguinte. O R^2 (coeficiente de determinação) obtido na equação (4.2), pode também ser utilizado para inferir o poder de explicação da variável independente sobre a volatilidade um passo à frente.⁶

Além de verificar isoladamente qual a volatilidade que possui o maior conteúdo de informação, é possível realizar regressões múltiplas, onde se analisa a eficiência relativa dos previsores:

$$\sigma_{t,t+1} = \alpha_0 + \beta_1 \hat{\sigma}_t^{VI} + \beta_2 \hat{\sigma}_t^{VE} + u_t, \quad (4.3)$$

onde $\hat{\sigma}_t^{VI}$ é a estimativa da volatilidade implícita e $\hat{\sigma}_t^{VE}$ da volatilidade estatística. Se a volatilidade implícita é relativamente mais eficiente, seu coeficiente deve ser estatisticamente significativo e $\beta_2 = 0$.

Por outro lado, seja $\sigma_{t,T}$ a volatilidade realizada ou futura medida do tempo t até T (VOLREALIZ), onde T é a data de expiração da opção e definida pelo desvio padrão ao longo desse período:

$$\sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{(T-t)} \sum_{i=1}^{T-t} (R_{t+i} - \bar{R}_{t+1})^2}, \quad (4.4)^7$$

onde $\bar{R}_{t+1} = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} R_{t+i}$. Para obter uma estimativa anual da volatilidade realizada basta

multiplicar a equação (4.4) por $\sqrt{252}$.

O poder de previsão pode ser estimado regredindo a volatilidade realizada contra a previsão da volatilidade:

$$\sigma_{t,T} = \omega_0 + \delta_1 \hat{\sigma}_{t,T} + u_t, \quad (4.5)$$

onde $\hat{\sigma}_{t,T}$ é o previsor implícito ou estatístico tomado em t até o vencimento T da opção.

⁵ Nessa regressão a variável dependente não é sobreposta. Logo, os erros padrões podem ser computados por mínimos quadrados ordinários (OLS).

⁶ Note que o horizonte de previsão da volatilidade implícita não é associado com a volatilidade futura um passo à frente. Logo, quando é computada esta volatilidade contra a volatilidade implícita, não se requer que este coeficiente de inclinação seja necessariamente unitário, somente positivo. Contudo, pode-se verificar a eficiência dos estimadores estatísticos, pois é possível conseguir previsões para o dia seguinte.

⁷ JORION (1995) e ANDRADE & TABAK (2001) utilizam no denominador da equação (4.4) $N = (T - t)$. NAVATTE & VILLA (2000), AGUILAR (1999) entre outros, expressam $N = (T - t) - 1$. Neste estudo optou-se por usar $N = (T - t)$.

Como no teste de conteúdo de informação, pode-se verificar a eficiência relativa do poder de previsão dos estimadores sobre a $\sigma_{i,T}$ através de uma regressão múltipla similar à equação (4.3).

Um importante resultado surge da equação (4.5). Se $\omega_0 = 0$ e $\delta_1 = 1$, resulta que o previsor utilizado nessa regressão é eficiente e não viesado.

A variável dependente na equação (4.5) têm ainda uma importante característica. Os dados utilizados são diários e, então, a frequência de observações é menor do que o período coberto pelo contrato de opções, isto é, o horizonte de previsão. Como consequência, os resíduos são autocorrelacionados serialmente e, portanto, os erros padrões computados por OLS são viesados negativamente. Para solucionar este problema, bem como para gerar erros padrões robustos, é utilizado o procedimento de *Newey & West* (1987) em todas as regressões que envolvem a variável $\sigma_{i,T}$.

4.3 DESCRIÇÃO DOS DADOS

As avaliações empíricas das volatilidades implícita e estatística propostas na seção anterior, foram realizadas sobre uma base de dados de opções e o correspondente ativo-objeto negociados na Bovespa.⁸

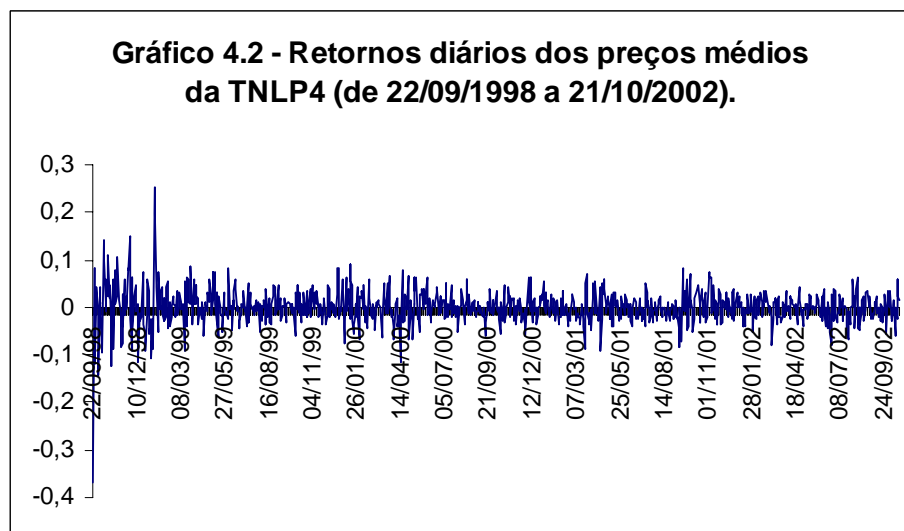
Os preços médios diários históricos das ações preferenciais da empresa Tele Norte Leste Participações S.A., registradas na Bovespa sob o código - TNLP4 (referida neste estudo como Telemar S.A.), no período de 21 de setembro de 1998 a 21 de outubro de 2002, constituem a base de dados do ativo-objeto. Os retornos diários são calculados pela primeira diferença do logaritmo dos preços médios diários. Os gráficos 4.1 e 4.2 apresentam a evolução histórica dos preços médios (por lote de mil ações) e do retorno diário desse ativo, respectivamente.

A cotação mais alta das ações TNLP4 ocorreu no dia 31/01/2001, ao valor médio de R\$ 47,14. A mais baixa aconteceu em 09/10/1998 a R\$ 9,84, poucos dias após o processo de privatização do sistema Telebrás, do qual originou a Telemar S.A. em 21/09/1998. O maior retorno dessas ações foram no dia 15/01/1999 – data da mudança do sistema cambial brasileiro de fixo para flutuante, no valor 25,15%. O menor retorno foi em 01/10/1998, com um rendimento negativo de 14,45%.

⁸ O intervalo de observações da base de dados é diária e é composto somente pelos dias em que efetivamente ocorreu negociação.



Fonte: Economática. Elaborado pelo autor.

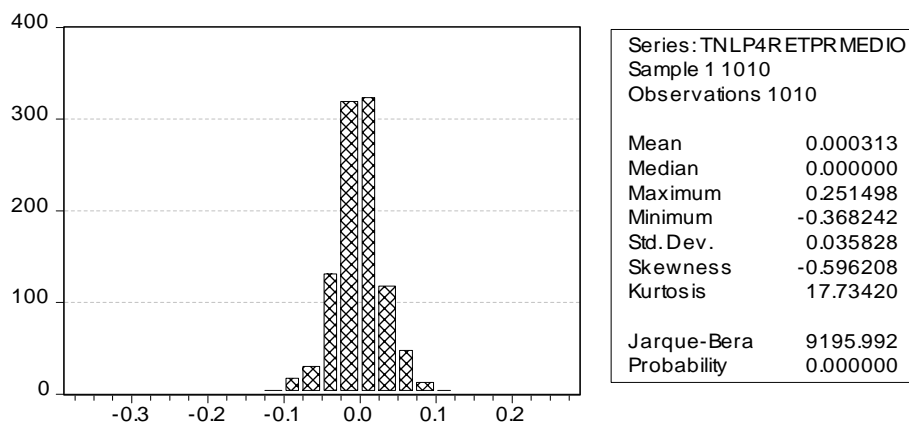


Fonte: Economática. Elaborado pelo autor.

A figura 4.1 apresenta o histograma e um sumário estatístico desses retornos. Como pode ser visto, eles têm média próxima a zero e não são estatisticamente diferentes de zero. Os retornos têm problema de assimetria e kurtose, que indica a presença de caudas mais grossas que a distribuição Normal. O fato de a kurtose estar bem acima de três, significa que a cauda da distribuição dos retornos é muito maior do que a distribuição Normal. Números muito grandes para kurtose surgem do fato de que este coeficiente é bastante sensível a retornos elevados.

A existência de uma distribuição leptocúrtica pode ser comprovada pelo teste de Normalidade de *Jarque-Bera*, onde a hipótese de normalidade nos retornos é rejeitada. O teste *Augmented Dickey-Fuller* mostrou que a série de retornos diários é estacionária em nível, a 1% de significância.

Figura 4.1 – Histograma e sumário estatístico dos retornos sobre os preços médios diários da TNLP4.



Fonte: Economática. Elaborada pelo autor no *Eviews*.

Além das ações TNLP4, também compõem a base de dados deste estudo as opções de compra referente ao período de 02/10/2000 a 21/10/2002, composta de todas as séries de opções de compra negociadas diariamente – aproximadamente 6.500 séries de observações.⁹ Essa base de dados contém a data de negociação, o código da opção negociada,¹⁰ especificação do ativo e valores de abertura, mínimo, máximo, médio, de fechamento, número de negócios, quantidade de títulos negociados e o respectivo volume financeiro para cada série de opção transacionada. Esse período importa em 13 ciclos de vencimento dos contratos de opções, os quais ocorrem sempre no primeiro dia útil da terceira semana nos meses pares.

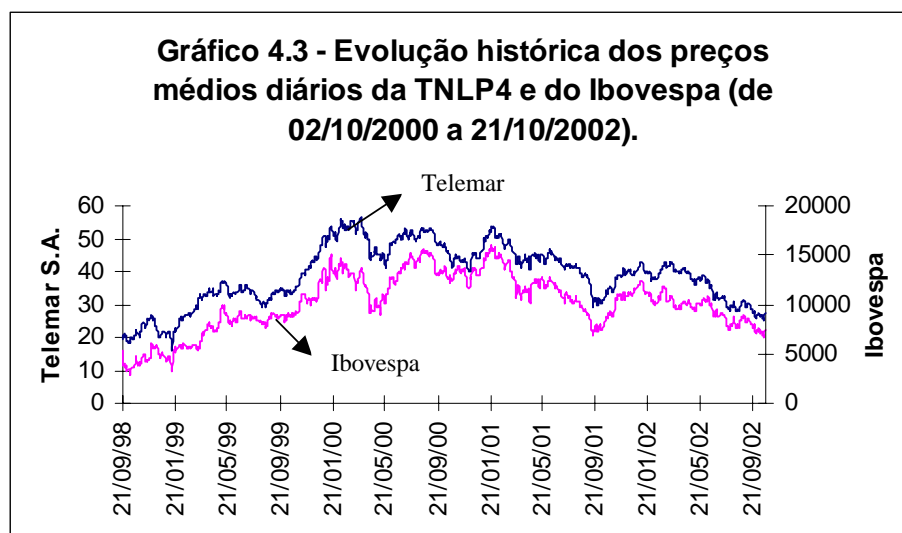
Por fim, a escolha das ações e opções da Telemar S.A. para avaliar empiricamente as volatilidades implícita e estatística é explicada por dois motivos. Em primeiro lugar, as ações da Telemar S.A. podem funcionar como uma *proxy* para o mercado acionário brasileiro, dada a alta correlação existente entre essas ações e o Índice Bovespa – correlação de 0,95 para o período de análise das volatilidades, que pode ser constatada pela

⁹ A fonte dos dados das opções de compra da Telemar S.A. foi o Banco do Brasil S.A. e a Solidus S.A. – Corretora de Câmbio e Valores Mobiliários.

¹⁰ A partir do código da opção deduz-se o preço de exercício da opção negociada.

observação do gráfico 4.3. Essa correlação é justificada ao fato dessas ações terem o maior peso no Índice – aproximadamente de 14%.

Em segundo lugar, pode-se citar a alta liquidez dessas opções. No período analisado, o volume médio financeiro mensal de opções negociadas da Telemar S.A. foi de R\$ 490.967,8 mil, equivalentes a uma quantidade média por mês de títulos negociados de aproximadamente 500.493,2 mil. Esse volume financeiro representa em torno de 4% quando comparado ao volume médio financeiro da Bovespa.¹¹ Sendo assim, acredita-se que os resultados derivados da análise das opções de compra da Telemar S.A. não estejam muito distantes do comportamento geral do mercado e, portanto, podem ser utilizados como uma fonte de referência.



Fonte: Economática. Elaborado pelo autor.

4.4 CÁLCULO DA VOLATILIDADE IMPLÍCITA

As volatilidades implícitas são derivadas do modelo *Black-Scholes* de precificação de opções europeias. Em particular, o método numérico de indução retroativa da σ^{VI} foi efetivado através da equação (2.42), utilizando-se para tanto os preços médios das cotações diárias das opções de compra c , o preço médio da cotação diária do ativo-objeto S , o preço de exercício K , o prazo de vencimento da opção como uma proporção dos dias úteis ao ano

¹¹ O volume médio financeiro da Bovespa no período de janeiro/1999 a outubro/2002 foi de R\$ 13.204.187,0 mil.

$\frac{T-t}{252}$, e a taxa de juros dos Certificados de Depósitos Interbancários (CDI) anual e composta i como uma *proxy* da taxa de juros livre de risco r .¹²

Vale registrar que as opções de compra da Telemar S.A. são do tipo americano e, usando o modelo *Black-Scholes*, que supõem opção tipo européia, introduz um viés positivo na volatilidade implícita estimada. Entretanto, como destaca JORION (1995), este viés é pequeno para opções de curta maturidade como é o caso das opções em análise, onde o intervalo das volatilidades estimadas implica uma amostra de opções com prazo de vencimento de no mínimo 4 dias até no máximo 48 dias. Além disso, como demonstra HULL (1997), p.177-181 (observação apontada na subseção 1.4.3), opções de compra americanas que não pagam dividendos ao longo do tempo de maturidade da opção, comportam-se como se fossem européias.¹³

Outro potencial erro de especificação pode ocorrer, pois o modelo *Black-Scholes* é inconsistente com volatilidade estocástica. JORION (1995) conclui que o erro de precificação é muito pequeno para opções de curto prazo. Sendo assim, é limitado o ganho com modelos de volatilidade estocástica.

Entretanto, um possível erro na estimação da σ^{VI} pode surgir a partir da utilização do valor de fechamento diário da opção, que pode ter sido significativamente influenciado pelo fechamento de posições a alguns minutos antes do término das operações na bolsa de valores. Nesse sentido, foram utilizados em todas as estimações das volatilidades sempre os preços médios, tanto das opções como do ativo-objeto.¹⁴

Antes de computar as volatilidades implícitas alguns filtros nos dados foram efetivados. Primeiro, foram excluídas as opções que, em determinada data, tiveram negociações inferiores a 5% da quantidade total de títulos. Segundo, foram descartadas as opções de compra com um prêmio inferior a R\$ 0,05. Por último, dado as distorções que as opções apresentam quando estão muito próximas do seu vencimento, como volatilidade

¹² Utilizou-se a equação (2.40) para transformar i na forma contínua r . A utilização da taxa CDI como uma *proxy* da taxa de juros livre de risco para o mercado brasileiro segue GOMES (2002) e MOTTA (2001). Contudo, o uso da taxa de juros implícita nos contratos futuros - os DIs futuro, ao invés da CDI, não gera viés algum no cálculo da volatilidade implícita, pois a correlação entre essas volatilidades é superior a 0,99. Essa perfeita correlação é devida ao curto intervalo de vencimento dos contratos das opções. Outra justificativa é a baixa sensibilidade da taxa de juros na fórmula de *Black-Scholes* a precificação de opções de ações.

¹³ Como os dividendos ocorrem regularmente após a divulgação dos balanços semestrais, o mercado leva em conta os efeitos dos dividendos sobre a ação ao precificar a opção.

¹⁴ O ideal para sincronizar os preços negociados seria utilizar uma pequena janela de dados, por exemplo, entre 14:30h e 15:00h

implícita extremamente alta e/ou tendendo a zero, optou-se por considerar somente as séries que contavam com 4 dias ou mais de negociação até o vencimento.¹⁵

Filtrados os dados, a volatilidade implícita foi calculada.¹⁶ Entre 02/10/2000 e 15/10/2002¹⁷ foram obtidas 2.584 volatilidades, as quais correspondem a uma amplitude temporal de maturidade das opções de no máximo 47 dias a 4 dias.

Como diariamente são negociadas várias *calls* com preços de exercícios diferentes, mas de idêntico prazo de vencimento, surge o problema de se obter diferentes volatilidades implícitas para o mesmo ativo-objeto.¹⁸ Desse modo, foram determinadas três séries de volatilidades implícitas para fins de análise:

- a) uma série é a média ponderada das volatilidades implícitas pela quantidade total de títulos negociados diariamente, que será doravante denotada por VIPOND;
- b) outra resultou das opções *nearest-at-the-money* (VINEAREST);
- c) a terceira são as volatilidades implícitas com a maior quantidade de títulos negociadas no dia, isto é, as de maior liquidez diária (VILQUIDA).

Dessa forma, cada série de volatilidade implícita resultou em 504 observações. A tabela 4.1 apresenta um sumário estatístico dessa volatilidade em conjunto com as volatilidades um passo à frente $\sigma_{t,t+1}$ e a realizada $\sigma_{t,T}$. Pode-se ver que a média das VILQUIDA e VIPOND são muito próximas, em torno de 53 % a.a., mas distantes das médias das $\sigma_{t,t+1}$ e $\sigma_{t,T}$ (em torno de 40% a.a.). Interessante é o alto desvio padrão da $\sigma_{t,t+1}$ - sinaliza a existência de uma grande variabilidade nos retornos de um dia para outro. Essa grande dispersão pode também ser constatada pelo gráfico 4.4, que mostra a volatilidade um passo à frente e a volatilidade realizada.

O gráfico 4.5 mostra a VIPOND e a $\sigma_{t,T}$. Existem claros sinais de que em alguns momentos essas séries caminham juntas, enquanto que em outros elas mostram movimentos divergentes. De fato, como ambas se referem a estimações de períodos equiparados, esperava-se uma forte correlação entre essas volatilidades, contudo este indicador é somente de 0,064.

¹⁵ A escolha do número foi arbitrária. Geralmente o número sugerido na literatura é 6. Contudo, se fosse utilizado as opções com até 6 dias de vencimento, a liquidez das opções para o próximo vencimento eram praticamente inexistentes. Mesmo com até 4 dias, os dois primeiros dias antes do vencimento da série atual também tinham pouca liquidez, mas não apresentaram tantas distorções como as opções com 3 e 2 dias até o vencimento.

¹⁶ O *software* utilizado neste processo foi o *Maple 7*.

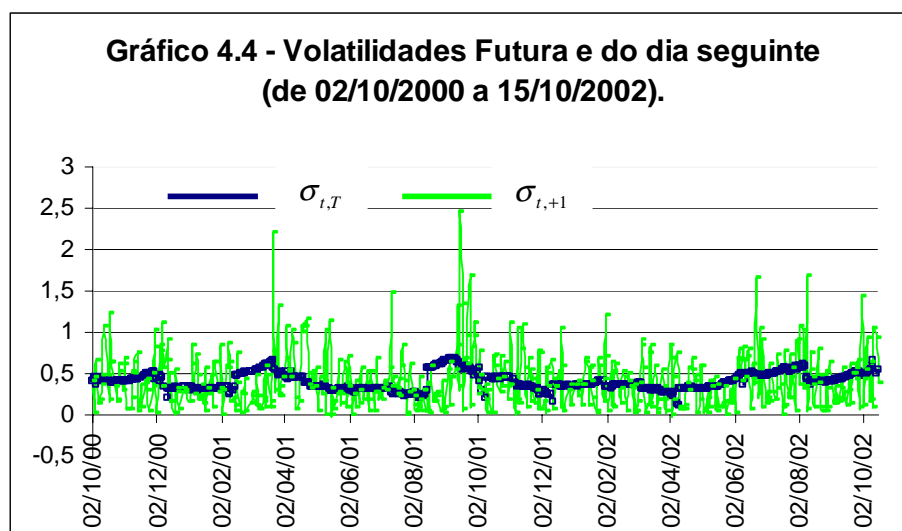
¹⁷ Veja que o período final da amostra de opções seria 21/10/2002, se não tivesse sido aplicado o filtro nas opções.

¹⁸ Essa observação foi identificada através do sorriso da volatilidade, apresentado na subseção 3.1.1.

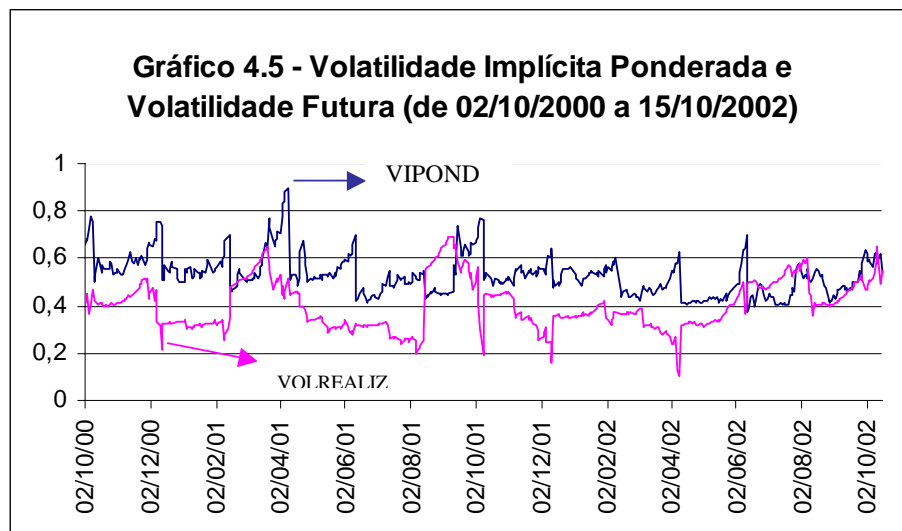
Enfim, o gráfico 4.6 apresenta as três séries de volatilidade implícitas. Verifica-se que a volatilidade *nearest-at-the-money* tem movimentos mais acentuados. Como são essas opções que possuem maior probabilidade de serem exercidas, esses picos de volatilidade devem ser um prêmio de risco maior requerido pelos lançadores.

Tabela 4.1 – Sumário Estatístico das Volatilidades Implícitas e Realizadas

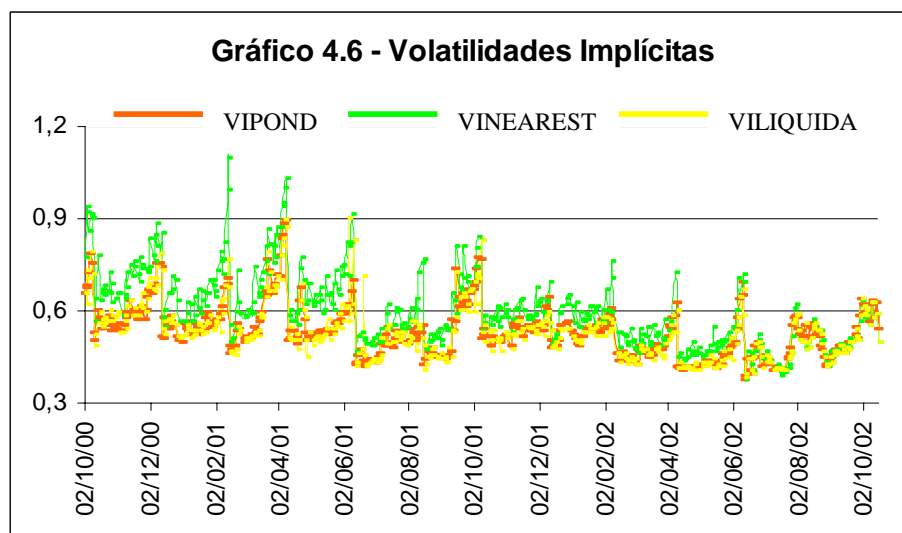
	VILQUIDA	VINEAREST	VIPOND	$\sigma_{t,+1}$	$\sigma_{t,T}$
Mean	0.527605	0.594293	0.529176	0.409881	0.403901
Median	0.519471	0.576888	0.521922	0.344440	0.385036
Maximum	0.897901	1.096130	0.896885	2.457607	0.691088
Minimum	0.379309	0.370473	0.373222	0.000337	0.106001
Std. Dev.	0.087288	0.117893	0.083665	0.335153	0.104748
Skewness	1.163570	0.930377	1.039367	1.591362	0.440278
Kurtosis	5.044150	4.059618	4.722955	7.592835	2.693605
Jarque-Bera	201.4768	96.28909	153.0839	655.7012	18.25438
Probability	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000109
Observations	504	504	504	504	504



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5 ESTIMAÇÃO DOS MODELOS DE VARIÂNCIA INCONDICIONAL

Os modelos de variância incondicional assumem que os retornos dos ativos são *I.I.D.* e, implicitamente, são estacionários – o teste *ADF* rejeitou a hipótese de raiz unitária para os retornos da Telemar S.A.. Logo, a volatilidade não varia no tempo. Sendo assim, eles geram uma estimativa da volatilidade incondicional corrente, a qual é tomada como uma previsão.

Desse modo, através das equações (3.3) e (3.4), e utilizando uma janela móvel de 10, 20 e 30 dias dos retornos passados, geraram-se, respectivamente, previsões dos modelos de média móvel igualmente ponderados – *MA(10)*, *MA(20)* e *MA(30)*, para o período de

02/10/2000 a 15/10/2002. Esses previsores estatísticos são os mais simples e ainda amplamente usados no mercado financeiro.

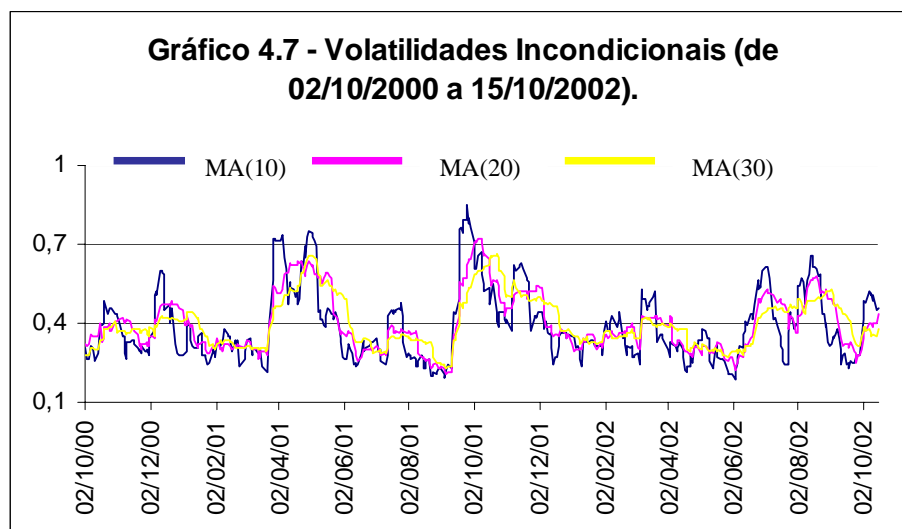
A tabela 4.2 apresenta um resumo estatístico dessas volatilidades. As estatísticas comprovam uma certa semelhança nas três séries, pois possuem uma volatilidade média em torno de 40% a.a.. A única clara divergência consiste no teste de normalidade *Jarque-Bera*, refletindo o fato de que o processo de geração dos retornos gera uma distribuição de caudas mais grossas quanto menor foi a janela de dados históricos.

A característica dos modelos de média móvel ponderar igualmente todos os dados ao longo da janela pode ser constatada pelo gráfico 4.7, que retrata conjuntamente essas volatilidades, pois a série *MA(30)* é mais suavizada/alisada do que a *MA(10)* e a *MA(20)*.

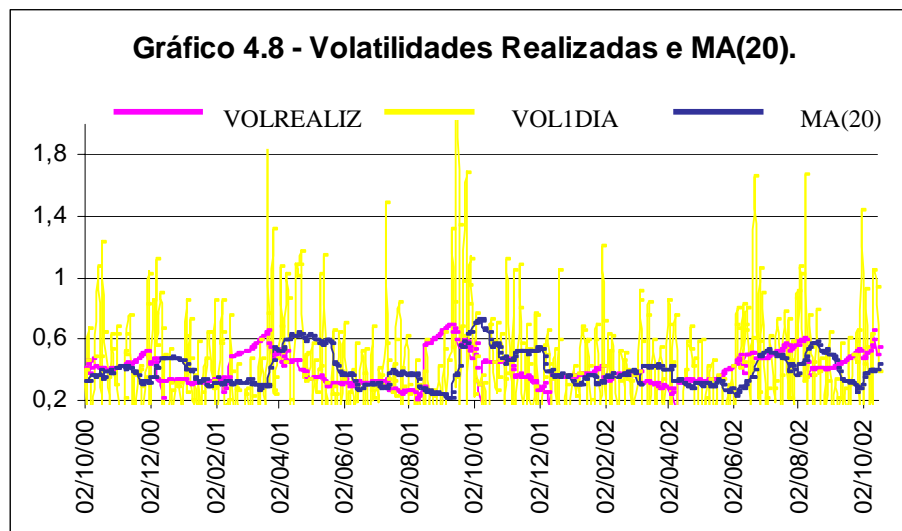
O gráfico 4.8 mostra a relação existente entre as volatilidades realizadas um passo à frente, futura e *MA(20)*. Há claros sinais da baixa correlação entre essas variáveis.

Tabela 4.2 – Resumo Estatístico das Volatilidades Incondicionais

	MA(10)	MA(20)	MA(30)
Mean	0.390487	0.398269	0.401703
Median	0.349529	0.368665	0.377387
Maximum	0.848726	0.724395	0.663075
Minimum	0.184793	0.206147	0.227515
Std. Dev.	0.135439	0.109107	0.094526
Skewness	1.012171	0.782820	0.733028
Kurtosis	3.469666	2.893705	2.894318
Jarque-Bera	90.68948	51.71307	45.37031
Probability	0.000000	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504



Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

4.6 ESTIMAÇÃO E PREVISÃO DOS MODELOS DE VOLATILIDADE CONDICIONAL

Ao contrário dos modelos de volatilidade incondicional, a principal característica dos modelos de variância condicional heteroscedástica é permitir a volatilidade variar ao longo do tempo e, assim, explicar alguns fatos estilizados em variáveis de alta frequência.¹⁹

O primeiro passo à estimação desses modelos consistiu em apurar as especificações da família ARCH que, levando em conta todo o período amostral dos retornos (22/09/1998 a 21/10/2002 – 1010 observações), bem como o método de estimar do geral para o específico, obedeceram aos seguintes critérios:²⁰

- a) a existência de convergência no modelo proposto;
- b) o modelo capturava a dinâmica do primeiro e segundo momentos dos retornos da Telemar S.A. através da análise da estatística Q de *Box-Pierce*;²¹
- c) os coeficientes estimados eram estatisticamente significantes;
- d) o teste ARCH-LM rejeitava a hipótese de efeitos ARCH na variância.

¹⁹ Esses modelos foram detalhadamente apresentados na subseção 3.2.2.

²⁰ O software econométrico *Ox*, pacote G@rch 2.3, foi o programa utilizado em todas as estimações e previsões dos modelos ARCH e suas extensões. Esse pacote está disponível para *download* no seguinte endereço: <http://www.egss.ulg.ac.be/garch>. A escolha deste programa deveu-se ao amplo conjunto de opções disponíveis: várias especificações à equação da média, modelos ARCH, GARCH, EGARCH, GJR, FIGARCH, quatro funções de distribuição, estimação por ML e Quase-ML, previsões da variância, vários testes, ...

²¹ Veja *Greene* (2000), p. 762, para maiores detalhes sobre a estatística Q .

Avaliados os modelos sob esses condicionantes, foram selecionadas algumas formulações que minimizavam o critério de informação de *Akaike* e/ou o de *Schwarz*.²² A tabela 4.3 apresenta as especificações resultantes.

Tabela 4.3 – Modelos GARCH estimados.

Eq.média	Eq.variância	Distrib.	Log likel	Akaike	Schwarz	Q(5) resid	Q(5) Res quadr.
Arma(2,2)	Garch(3,3)c	gauss	-2518,710	5,009327	5,062886	2,06311	3,52675
Arma(2,2)	Garch(3,2)c	gauss	-2514,882	4,999766	5,048456	1,47224	0,765187
Arma(2,2)	Garch(2,2)c	gauss	-2526,388	5,014630	5,058451	1,32617	3,06057
Arma(2,2)	Garch(1,1)c	gauss	-2524,760	5,013387	5,047470	1,53119	3,82252
Arma(1,1)	Garch(1,1)c	t-stud	-2516,142	4,994341	5,023555	1,71126	11,2166*
Arma(1,1)	Garch(1,1)	t-stud	-2523,970	5,007862	5,032207	0,666408	6,7128
Arma(2,2)	Garch(3,3)c	t-stud	-2506,398	4,986928	5,045356	1,08874	6,64091
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	gauss	-2552,151	5,065646	5,094860	5,51818	32,3776*
Arma(0,0)	Egarch(1,1)	gauss	-3254,682	6,452836	6,472312	4,51471	2,45281
Arma(0,0)	Egarch(1,0)c	Gauss	-2659,802	5,274855	5,294331	39,9078*	59,7046*
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	t-stud	-2516,728	4,999461	5,038413	2,06759	2,23561
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	-2508,664	4,981513	5,015596	2,04388	6,09631
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	GED	-2508,951	4,982082	5,016165	2,30677	6,01113
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	-2508,659	4,983484	5,022436	2,03686	6,11032
Arma(1,1)	GJR(1,1)	t-stud	-2512,56	4,987253	5,016468	1,39784	3,61121
Arma(1,1)	GJR(1,1)	Gauss	-2522,511	5,004972	5,029317	1,64197	3,83052
Arma(1,1)	Figarch(1,d,0)c	t-stud	-2518,928	4,999856	5,029071	1,39549	12,1906*
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)c	t-stud	-2516,306	4,996646	5,030729	1,17925	7,58949
Arma(2,2)c	Figarch(2,d,2)c	t-stud	-2510,356	4,994765	5,053193	1,46558	8,95642
Arma(2,2)	Figarch(2,d,2)c	t-stud	-2510,36	4,992792	5,046351	1,4768	8,99013
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)	t-stud	-2518,102	4,998222	5,027436	1,07086	6,88917

* estatisticamente não significativa a 5%. O método de estimação dos modelos foi do geral para o específico. Os dados compreendem os retornos da Telemar S.A. no período de 22/09/1998 a 21/10/2002. A letra “c” após a especificação da equação da média ou variância, denota a constante. As distribuições são a *gaussiana*, *t-Student*, *GED* e *t-Student* assimétrica. Q(5) é a estatística-Q no lag 5, isto é, não existe nenhuma autocorrelação nos resíduos (ou nos resíduos ao quadrado) na ordem 5.

Note que o modelo GARCH (1,1) com constante na equação da variância, distribuição *t-Student*, não rejeitou a hipótese de autocorrelação nos resíduos ao quadrado, ou seja, esta

²² O critério de informação de Akaike é dado por: $AIC = \log \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n} + \frac{2(k+1)}{n}$, onde k é número de parâmetros, n o número de observações e $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ é o resíduo estimado. O critério de informação de Schwarz é:

$$SIC = \log \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}}{n} + \frac{(k+1) \log n}{n}.$$

especificação não captura o processo gerador dos retornos. Geralmente, esta é a formulação utilizada na literatura para avaliar o poder preditivo ou informacional das volatilidades.

A partir das estimações acima, onde não se consegue identificar claramente pelo AIC ou SIC qual é o melhor modelo, essas formulações foram reestimadas para verificar qual o modelo que consegue prever com maior acuracidade a variância. Para tanto, foram realizadas previsões fora da amostra com um intervalo de 63 dias de negociação (aproximadamente três meses), para através do erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE) e erro percentual absoluto médio (MAPE), concluir qual é a melhor especificação.²³ A tabela 4.4 apresenta os erros estatísticos dessas previsões à variância. O modelo FIGARCH é, a princípio, o modelo que melhor especifica a variância condicional a partir desses critérios.

Tabela 4.4 – Erros estatísticos da previsão da variância.

Eq.média	Eq.variância	distrib	RMSE	MAE	MAPE
arma(2,2)	garch(3,3)c	gauss	9.9611	8.0487	272.6442
Arma(2,2)	garch(3,2)c	gauss	Não	converge	
Arma(2,2)	Garch(2,2)c	gauss	9.9817	8.0033	283.0424
Arma(2,2)	Garch(1,1)c	gauss	9.9768	7.9606	277.7574
Arma(1,1)	Garch(1,1)c	t-stud	10.0149	8.0539	282.9783
Arma(1,1)	Garch(1,1)	t-stud	10.3635	8.7236	315.1715
Arma(2,2)	Garch(3,3)c	t-stud	9.8613	7.8147	257.5852
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	gauss	Não	converge	
Arma(0,0)	Egarch(1,1)	gauss	11.6170	10.5762	418.4060
Arma(0,0)	Egarch(1,0)c	Gauss	10.7621	9.3928	365.9576
Arma(1,1)	Egarch(1,0)c	t-stud a	10.3968	8.7587	343.2158
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud	10.6827	9.2760	358.2064
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	GED	10.5590	9.0693	349.4971
Arma(1,1)	GJR(1,1)c	t-stud a	10.5908	9.1188	352.4868
Arma(1,1)	GJR(1,1)	t-stud	12.6992	11.7793	456.8022
Arma(1,1)	GJR(1,1)	Gauss	11.7339	10.7262	412.9636
Arma(1,1)	Figarch(1,d,0)c	t-stud	9.8158	7.2860	242.8221
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)c	t-stud	9.8429	7.6174	260.7597
Arma(2,2)c	Figarch(2,d,2)c	t-stud	9.7589	7.2619	248.8837
Arma(2,2)	Figarch(2,d,2)c	t-stud	9.7582	7.2643	249.3755
Arma(1,1)	Figarch(1,d,1)	t-stud	9.9091	6.7603	190.1993

²³ Suponha que o período de previsão é $t = S, S+1, \dots, S+h$, e seja y_t e \hat{y}_t o valor real e o valor previsto no período t . Então,

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} (\hat{y}_t - y_t)^2}, \quad MAE = \frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} |\hat{y}_t - y_t|, \quad MAPE = \frac{1}{h+1} \sum_{t=S}^{S+h} \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{y_t} \right|.$$

Assim, a partir do menor RMSE, MAE e MAPE, foram selecionados 3 modelos: o primeiro foi o ARMA (2,2)/GARCH (3,3)c, distribuição *t-Student*, que pode explicar a aglomeração da volatilidade e sua persistência. A segunda especificação foi o ARMA (1,1)/EGARCH (1,0)c, distribuição *t-Student* assimétrica, a qual possibilita captar o efeito de alavancagem. A última foi o ARMA (1,1)/FIGARCH (1,d,1), distribuição *t-Student*, que, através do coeficiente de integração fracionária, modela a dependência de longo prazo. As estimativas desses processos são apresentadas na tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Estimativas dos parâmetros das variâncias condicionais

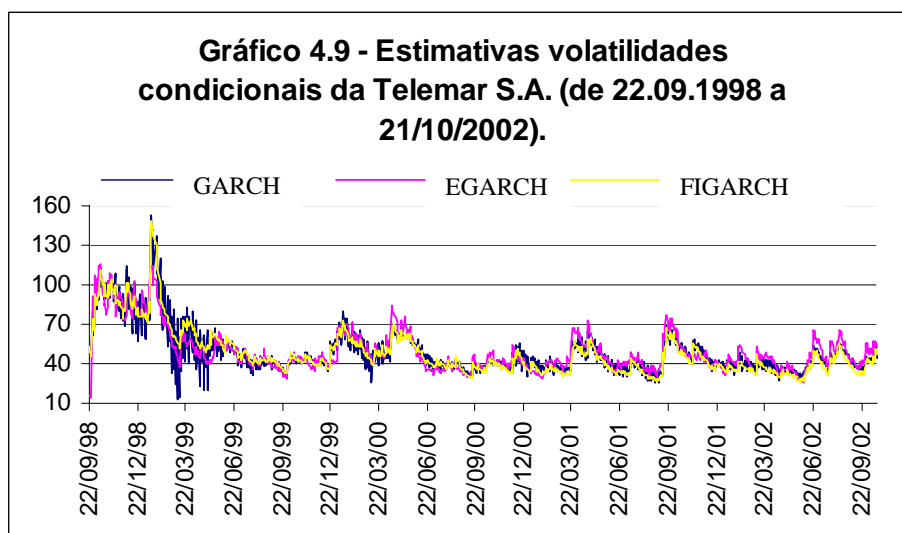
	ARMA (2,2)/ GARCH(3,3)c	ARMA(1,1)/ EGARCH(1,0)c	ARMA(1,1)/ FIGARCH(1,d,1)
AR(1)	0,554404 (4,175)	-0,211956 (-11,64)	-0,234233 (-5,225)
AR(2)	0,173830 (2,208)		
MA(1)	-0,363794 (-2,837)	0,430408 (12,73)	0,450231 (8,609)
MA(2)	-0,383885 (-4,703)		
Cte. Variância	0,663708 (2,379)	2,143841 (3,098)	
GARCH(<i>Beta</i> 1)	-0,635491 (-30,91)	0,980439 (87,79)	0,639859 (8,992)
GARCH(<i>Beta</i> 2)	0,432621 (15,07)		
GARCH(<i>Beta</i> 3)	0,888606 (51,32)		
ARCH(<i>Alpha</i> 1)	0,099371 (7,651)		0,286721 (3,609)
ARCH(<i>Alpha</i> 2)	0,101737 (4,107)		
ARCH(<i>Alpha</i> 3)	0,048817 (2,457)		
EGARCH (<i>Theta</i> 1)		-0,095288 (-4,480)	
EGARCH(<i>Theta</i> 2)		0,189640 (5,713)	
d-Figarch			0,443542 (6,490)

Estatística *t* entre parênteses.

Conforme pode ser visto na tabela acima, no GARCH $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 0,93566$. Isto conduz a uma meia-vida de 12 dias – o tempo necessário para que o efeito de um choque na volatilidade diminua até a metade. O coeficiente *theta* 1 negativo no modelo EGARCH significa que existe a presença do efeito alavancagem nos retornos da Telemar S.A. – a volatilidade responde assimetricamente a choques, e que esta magnitude é em torno de

19%, de acordo com o θ_2 . Por fim, o coeficiente d do modelo FIGARCH (= 0,443) traduz a dependência de longo prazo. O gráfico 4.9 apresenta as estimativas dessas volatilidades condicionais.

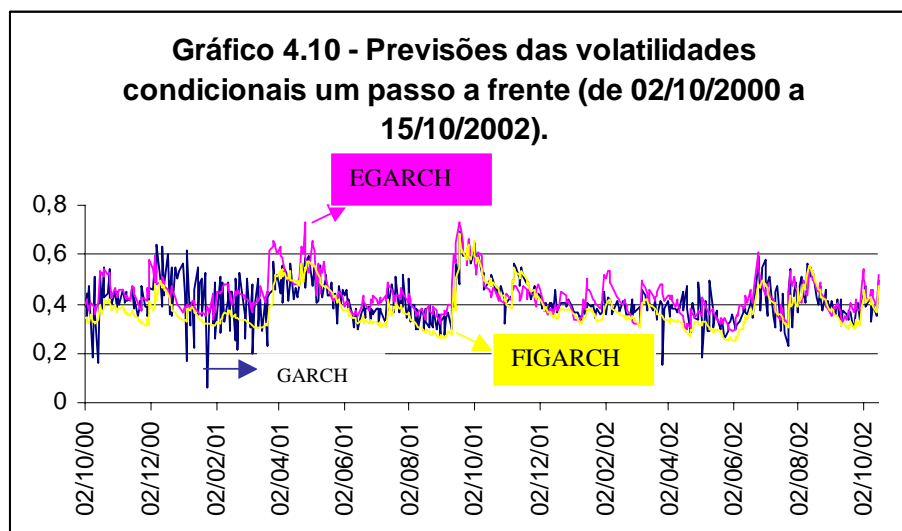
Note que os coeficientes estimados para a equação da média sobre os retornos da Telemar S.A. dizem que na média os retornos são autocorrelacionados: os coeficientes dos retornos defasados um ou dois períodos são estatisticamente significantes a 5%. Logo, estes fatos sinalizam uma contradição com a teoria dos mercados eficientes, que conforme foi visto na subseção 2.1.1, ganhos condicionais devem inexistir em um mercado “justo”, “racional”, ou seja, é impossível gerar ganho econômico e prever ganhos futuros em um mercado eficiente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Executadas as estimações e selecionados os modelos, o próximo passo foi realizar as previsões da variância um passo à frente para o período de 02/10/2000 a 15/10/2002. Neste processo foi utilizada uma janela móvel de 502 observações históricas de retornos. Ou seja, o período de 22/09/1998 a 29/09/2000 foi usado para realizar a estimação nas formulações selecionadas e obter a previsão da volatilidade para 02/10/2000, de 23/09/1998 a 02/10/2000 para a previsão de 03/10/2000, e assim sucessivamente até completar o período todo. O objetivo de computar em cada janela os parâmetros e realizar a previsão é obter previsões mais realísticas possíveis, pois são exatamente esses dados que os participantes do mercado dispõem no tempo em que a volatilidade implícita é observada.

A tabela 4.6 retrata um sumário estatístico dessas previsões um passo à frente e o gráfico 4.10 apresenta-as. Doravante serão referidas como: GARCH1DIA, EGARCH1DIA e FIGARCH1DIA. Note que a média dessas volatilidades é bem próxima a volatilidade realizada um passo à frente e às volatilidades incondicionais.



Fonte: elaborada pelo autor.

Por último, resta ainda realizar as previsões das volatilidades condicionais para serem equiparadas com a volatilidade futura, a qual é a volatilidade restante ao longo da maturidade da opção.

Tabela 4.6 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades condicionais 1 dia

	GARCH1DIA	EGARCH1DIA	FIGARCH1DIA
Mean	0.413168	0.433492	0.384671
Median	0.402944	0.421699	0.365725
Maximum	0.690123	0.730043	0.684356
Minimum	0.058639	0.290091	0.248579
Std. Dev.	0.086147	0.076664	0.080460
Skewness	0.166679	1.112440	0.938384
Kurtosis	3.948566	4.555814	3.484032
Jarque-Bera	21.22900	154.7836	78.88741
Probability	0.000025	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504

Nesse sentido, a previsão futura do modelo GARCH será dada por:

$$GARCHPREV_t = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} GARCH1DIA_{t+i}, \quad (4.6)^{24}$$

onde $T - t$ é o prazo de vencimento da opção. Desse modo, a previsão da volatilidade condicional é a média aritmética das previsões um passo à frente dos dias restantes à maturidade da opção. As estatísticas descritivas dessas previsões são apresentadas na tabela 4.7. O gráfico 4.11 e o gráfico 4.12 plotam, respectivamente, as previsões futuras das volatilidades condicionais e a volatilidade realizada com a FIGARCHPREV.

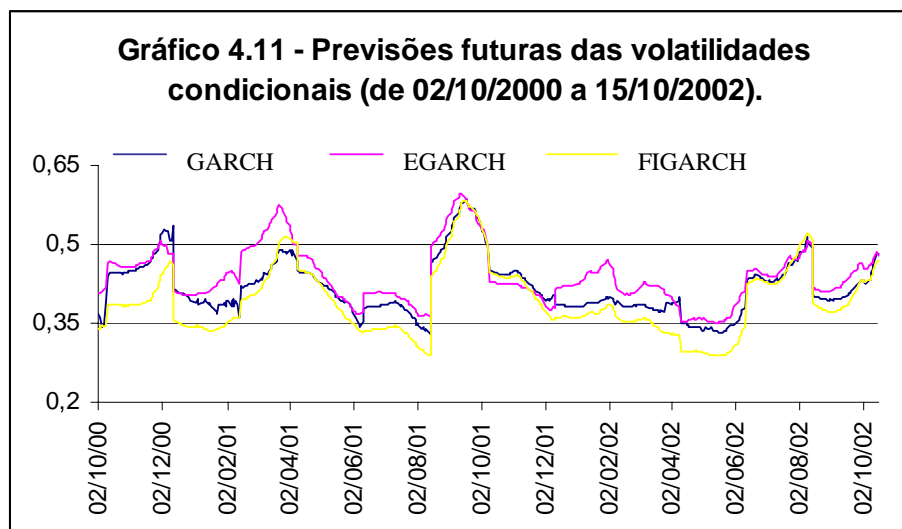
Constata-se que modelo FIGARCHPREV tem a menor esperança, seguida do GARCHPREV e por último do EGARCHPREV. Essa tendência fica clara no gráfico 4.11, pois a volatilidade do modelo FIGARCH se encontra praticamente sempre abaixo das outras. Contudo, o desvio padrão maior do FIGARCH indica que ele capta melhor os choques. Note que as séries apresentam uma clara quebra estrutural em 09/2001, quando os mercados acionários mundiais foram abalados pelos atentados terroristas nos E.U.A..

Vale destacar a forte correlação entre a volatilidade realizada e a FIGARCHPREV de 0,74 – uma indicação de que este previsor estatístico capta bem a volatilidade futura ao longo do tempo de vida do contrato de opção (isto também fica claro por uma simples observação no gráfico 4.12).

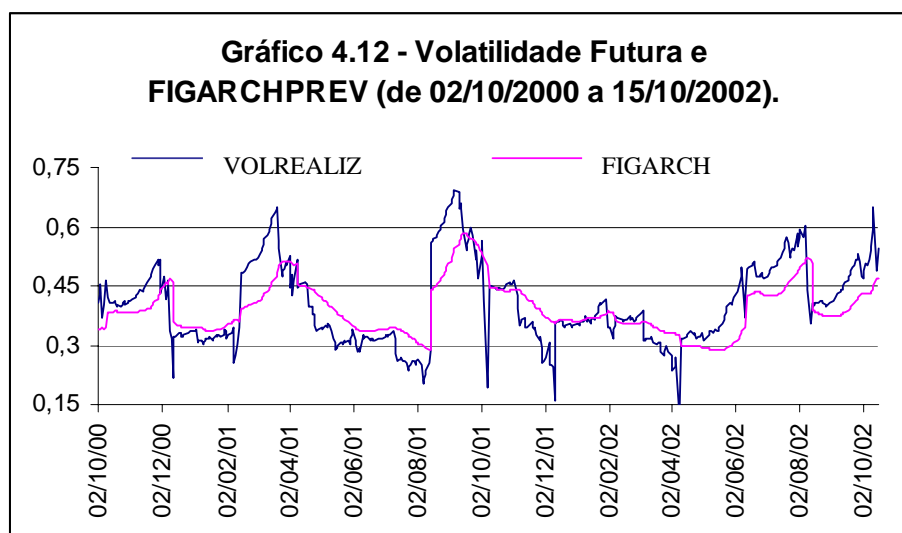
Tabela 4.7 – Estatísticas descritivas das previsões das volatilidades incondicionais

	EGARCHPREV	FIGARCHPREV	GARCHPREV
Mean	0.439617	0.392844	0.418217
Median	0.425971	0.381753	0.402542
Maximum	0.596276	0.583050	0.585197
Minimum	0.350866	0.287980	0.327956
Std. Dev.	0.053833	0.065577	0.053233
Skewness	0.743106	0.706240	0.828456
Kurtosis	3.280864	3.127869	3.518956
Jarque-Bera	48.04196	42.24043	63.30819
Probability	0.000000	0.000000	0.000000
Observations	504	504	504

²⁴ Para as previsões dos modelos EGARCH e FIGARCH é necessário somente alterar o somatório em (4.6) com a respectiva volatilidade um passo à frente.



Fonte: elaborado pelo autor.



Fonte: elaborado pelo autor.

Concluídas as séries de volatilidades em nível, foram realizados os testes especificados na parte 2 deste capítulo, os quais serão tratados na subseção seguinte. O anexo A apresenta o correlograma de todas essas séries. Verifica-se que todas as séries têm, com exceção da $\sigma_{t,+1}$, uma alta correlação serial. A fonte deste aspecto é a sobreposição substancial dos dados. Isto se deve ao fato de a amostra de dados ser diária, enquanto os

intervalos de previsão são determinados pelos ciclos de expiração dos contratos de opções.²⁵

4.7 REGRESSÕES DE PREVISÃO

A partir das especificações dos testes de conteúdo de informação e poder de previsão listados na subsecção 4.2, várias hipóteses podem ser levantadas:

- a) se o previsor estatístico ou implícito contém alguma informação sobre a volatilidade um passo à frente, o coeficiente β_1 na equação (4.2) deve ser estatisticamente diferente de zero;
- b) se na equação (4.2) $\beta_1 = 1$ e $\alpha_0 = 0$, este previsor é uma estimativa eficiente e não viesada da volatilidade no curtíssimo prazo;
- c) se o previsor é eficiente e não viesado, o intercepto ω_0 deve ser igual a zero e o coeficiente de inclinação δ_1 igual a 1 na equação (4.5). Isto implica que este previsor pode ser uma boa fonte de referência para prever a volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção. Por outro lado, se este previsor for a volatilidade implícita, significa que o mercado de opções é eficiente;
- d) pode-se atestar a eficiência relativa dos previsores através de regressões múltiplas incluindo as volatilidades estatísticas e implícitas.

Contudo, existe uma questão muito importante no contexto dos modelos de regressão padrão – a questão de raiz unitária nas séries de volatilidades. Uma das hipóteses do modelo de regressão clássico é que tanto a variável dependente como a(s) independente(s) sejam seqüências estacionárias e os erros tenham média zero e variância finita. Na presença de variáveis não estacionárias surge o problema de regressão espúria. Uma regressão espúria tem um alto R^2 , estatística t significativa, mas os resultados não possuem qualquer consistência econômica.²⁶

Dessa forma, é necessário testar a presença de raiz unitária nas séries de volatilidades em nível antes de executar as regressões. A tabela 4.8 apresenta os testes *augmented Dickey-Fuller* (ADF) e de *Phillips-Perron* (PP) a essas seqüências.

²⁵ A alta correlação serial nas séries é o motivo que leva a utilizar o procedimento de *Newey & West* (1987) nas regressões do poder de previsão, conforme já destacado na subsecção 4.2.

²⁶ Veja *Enders* (1995), capítulo 4, para uma descrição detalhada do problema de regressão espúria e testes de raiz unitária.

Tabela 4.8 - Testes de raiz unitária

Série de tempo	Teste estatístico ADF	Teste estatístico Phillips-Peron
MA (10)	-3,649332**	-4,537253*
MA (20)	-4,329134*	-3,064088**
MA (30)	-2,798204	-2,649318
EGARCHIDIA	-4,312871*	-5,818684*
EGARCHPREV	-3,241563**	-2,618832
FIGARCHIDIA	-4,262628*	-3,745266*
FIGARCHPREV	-2,911194**	-2,410740
GARCHIDIA	-4,409101*	-16,50133*
GARCHPREV	-3,096017**	-2,723151
VILQUIDA	-5,203676*	-9,109490*
VINEAREST	-5,334797*	-8,954963*
VIPOND	-5,091255*	-6,892243*
VOLIDIA	-5,318257*	-20,22491*
VOLREALIZ	-2,887139**	-3,314636**

* rejeita a hipótese de raiz unitária com 99% de confiança.

** rejeita a hipótese de raiz unitária com 95% de confiança.

Para apurar o lag ótimo no teste ADF, foi seguido a metodologia proposta em *Enders (1995)*, p. 256-258. No teste de *Phillips-Peron* foi utilizado o lag de truncagem igual a 5, sugerido em *Newey & West (1994)*.

O teste de PP aponta que as séries MA(30), EGARCHPREV, FIGARCHPREV e GARCHPREV são não estacionárias. Mas através dos gráficos 4.7 e 4.11, verifica-se que essa raiz unitária é devida à presença de quebras estruturais. Entretanto, dado que o teste ADF também indica a série MA(30) como não estacionária e, tendo em vista que não é usual na literatura a utilização da série MA(30), optou-se por desconsiderá-la nas regressões de previsão.

4.7.1 Regressões do Conteúdo de Informação

Os resultados das regressões do conteúdo de informação utilizando as equações (4.2) e (4.3) são apresentados na tabela 4.9. Pode-se afirmar que a volatilidade implícita ponderada possui uma substancial quantidade de informações para prever a volatilidade um passo à frente, pois apresenta o maior R^2 ajustado de todas as regressões. Além disso, pela estatística *Wald* o seu coeficiente é estatisticamente unitário e o intercepto é zero em um teste individual; contudo, é rejeitada essa hipótese num teste conjunto.

Tabela 4.9 - Resultados das regressões do conteúdo de informação

Constante	Coeficientes								R ² ajustado
	VI Pond	VI Nearest	VI mais líquida	MA(10)	MA(20)	GARCH	EGARCH	FIGARCH	
-0,157601 (0,09228)	1,072388* (0,172266)								0,0698
-0,056546 (0,08918)			0,884046* (0,166766)						0,0511
0,131042 (0,075818)		0,469194* (0,125142)							0,0253
-0,042185 (0,083413)							1,042846* (0,189487)		0,0550
0,109789 (0,071768)								0,780125* (0,182624)	0,0331
0,233221* (0,044874)			0,452409* (0,108584)						0,0315
0,195368* (0,072627)						0,519190* (0,172088)			0,0159
0,295710* (0,056364)				0,286668* (0,006735)					0,0067
-0,234769* (0,118229)	0,749886* (0,200138)		0,108057 (0,271211)	-0,66722* (0,299930)	-0,081715 (0,230642)	0,373660 (0,348448)	0,892061 (0,670754)		0,0846
-0,183093 (0,117726)			0,546637* (0,189007)	0,082788 (0,272534)	-0,70543* (0,301247)	-0,099799 (0,232329)	0,473576 (1,354847)	1,011595 (0,672714)	0,0743
-0,090011 (0,112734)		0,204314 (0,137946)		0,083215 (0,275900)	-0,75128* (0,302927)	-0,075773 (0,233650)	0,616137 (0,353438)	1,064297 (0,677131)	0,0629
-0,242235* (0,093290)	3,277368* (0,630577)	-1,109634* (0,278567)	-0,801242 (0,534340)						0,1011
-0,038578 (0,107381)			0,030717 (0,273942)	-0,79462* (0,301872)	-0,055721 (0,233536)	0,784592* (0,335039)	1,133027 (0,676348)		0,0606

*coeficiente estatisticamente significativo a 5%. Erros padrões por OLS entre parênteses (a variável dependente não é sobreposta). As estimações consistem de 504 observações no período de 02/10/2000 a 15/10/2002, realizadas no *software* econométrico *Eviews*.

Assim, a volatilidade implícita ponderada é um previsor eficiente, mas viesado. A mesma conclusão é verificada para a volatilidade implícita mais líquida. Esta porém, tem um coeficiente de determinação ajustado inferior.

Particularmente interessantes são os resultados dos modelos EGARCH e FIGARCH. Ambos são previsores eficientes e não viesados da volatilidade de curtíssimo prazo pela estatística *Wald* - $\chi^2_2 = 2,698$ e $\chi^2_2 = 4,398$, respectivamente. Contudo, eles contêm uma quantidade de informações inferior à volatilidade implícita ponderada, de acordo com o R^2 ajustado.

Quanto a eficiência relativa, o MA(20) é relativamente mais eficiente quando a volatilidade implícita é a *nearest-at-the-money*. Nas outras regressões não se pode chegar a uma conclusão precisa; é possível apenas afirmar que a inclusão dessa volatilidade estatística com a VOLPOND ou VILÍQUIDA significou um aumento no R^2 ajustado em

torno de 20%. Ou seja, parece que o modelo estatístico MA(20) associado a volatilidade implícita ponderada ou mais líquida é capaz de conter maiores informações sobre a volatilidade um passo à frente. Contudo, uma associação entre os previsores implícitos eleva substancialmente o R^2 ajustado, isto é, parece que as três séries de volatilidades implícitas juntas possuem substancial conteúdo de informações sobre a volatilidade um passo à frente.

Em suma, a afirmação de que as opções indicam melhores informações aos participantes do mercado sobre as expectativas de risco ao longo do próximo dia do que os modelos estatísticos é de certo modo refutada pelos dados das opções e ações da Telemar S.A., pois os modelos EGARCH e FIGARCH – com parâmetros baseados em valores *ex-post* – são não viesados e eficientes, apesar de conterem uma pequena quantidade de informações menor do que a VOLPOND e a VILQUIDA.

Esse resultado é relevante na gestão de risco por “*Value-at-Risk*”, pois as instituições financeiras utilizam geralmente o horizonte de um dia para a gestão de risco de *portfólios*, de recursos de terceiros. Como, neste caso, a variável relevante é a volatilidade dos ativos da carteira para o dia seguinte, o uso de previsores baseados em dados históricos pode resultar em ganhos expressivos em relação ao uso de volatilidades implícitas, onde a principal limitação é a pouca liquidez com opções no mercado brasileiro.

4.7.2 Regressões do Poder de Previsão

Nas regressões do conteúdo de informação foi testada a habilidade da variável independente em explicar os retornos absolutos do dia seguinte. Agora, testar-se-á o poder de previsão da variável explicativa ao longo do tempo de maturidade da opção. Isso implica em considerar a existência de uma estrutura a termo da volatilidade, ou seja, que ela não é necessariamente constante ao longo de todos os dias dos contratos de opções.

O poder de previsão é testado utilizando a equação (4.5). Os resultados são apresentados na tabela 4.10. Vale lembrar que nestas regressões as previsões dos modelos GARCH são dados pela equação (4.6).

Em primeiro lugar, convém fazer uma comparação do R^2 ajustado nos dois conjuntos de regressões. Nos modelos de volatilidade implícita e de volatilidade incondicional ele é praticamente nulo ou negativo nas regressões de poder preditivo. Mas observe a substancial diferença para os modelos de volatilidade condicional, que são muito superiores aos das regressões do conteúdo de informação. Utilizando o EGARCHPREV,

por exemplo, pode-se afirmar que 60% da volatilidade futura é explicada por choques *ex-post* capturados por esse modelo estatístico.

Tabela 4.10 - Resultados das regressões do poder de previsão

Constante	Coeficientes								R ² ajustado
	VI Pond	VI Nearest	VI mais líquida	MA(10)	MA(20)	GARCH PREV	EGARCH PREV	FIGARCH PREV	
0,361245* (0,059446)	0,080609 (0,109467)								0,0021
0,368047* (0,056230)			0,067957 (0103416)						0,0012
0,416610* (0,047406)		-0,021385 (0,077242)							-0,0014
0,382555* (0,034700)			0,054664 (0,077497)						0,00301
0,417573* (0,042980)				-0,034328 (0,096107)					-0,0007
-0,178482* (0,058697)						1,392537* (0,143853)			0,4998
-0,261579* (0,049520)							1,513773* (0,111995)		0,6045
-0,063745 (0,042853)								1,190411* (0,111981)	0,5545
0,026352 (0,052508)	-0,25979* (0,070734)		-0,141659* (0,045867)	-0,19981* (0,066815)	-0,542506 (0,283365)	0,528497* (0,208552)	1,640514* (0,248646)		0,7598
0,019229 (0,053856)		-0,216490* (0,059294)	-0,148991* (0,046187)	-0,20556* (0,067734)	-0,530514 (0,288903)	0,487996* (0,211768)	1,645131* (0249692)		0,7527
-0,002476 (0,052571)		-0,170194* (0,042916)	-0,155227* (0,044212)	-0,1879* (0,063480)	-0,525249 (0,293993)	0,597513* (0,216466)	1,527231* (0247619)		0,7571
0,331043* (0,059619)	0,559124 (0,297404)	-0,388694* (0,151379)	0,015127 (0,173359)						0,0342
-0,017487 (0,056983)			-0,187256* (0,052248)	-0,21665* (0,074156)	-0,63726* (0,301959)	0,315250 (0,23891)	1,804072* (0,251630)		0,7268

*coeficiente estatisticamente significativo a 5%. Erros padrões (entre parênteses) corrigidos pela induzida sobreposição e heterocedasticidade da variável dependente usando o procedimento de *Newey-West* (1987). As estimações consistem de 504 observações no período de 02/10/2000 a 15/10/2002, realizadas no *software Eviews*.

A hipótese de um previsor eficiente e não viesado implica que a constante seja zero e o coeficiente da volatilidade unitário. Pode-se ver que somente os coeficientes dos modelos de volatilidade condicionais são estatisticamente significantes. Logo, a princípio, a hipótese de que o mercado de opções é eficiente deve ser rejeitada.

A estatística *Wald* não rejeita a hipótese de eficiência e não viés para o modelo FIGARCHPREV a um nível de significância de 1%:

$$\chi_2^2 = 4,464214 \quad e \quad F(2,504) = 2,232107.$$

Na questão da avaliação da eficiência relativa dos previsores através das regressões múltiplas, os coeficientes dos previsores estatísticos ou implícitos devem ser zeros. Nota-se que a associação desses previsores eleva os ganhos em termos do R^2 ajustado, além do que todos os coeficientes são estatisticamente diferentes de zero, à exceção do modelo GARCH.

Enfim, para fins de avaliação e precificação de opções, *hedding* e, conseqüentemente, seu controle de risco, são necessárias previsões para toda a maturidade futura da opção, isto é, previsores que espelham com a maior precisão possível o futuro. Nesse sentido, a partir dos testes do poder de previsão, pode-se afirmar, a um nível de confiança de 99%, que o modelo estatístico FIGARCHPREV é um predictor eficiente e não viesado da volatilidade futura.

4.8 CONCLUSÕES

Uma das principais características das opções é sua natureza *forward looking*. Sendo assim, e se os mercados de opções são eficientes, a volatilidade implícita derivada do preço de uma opção deve prever a volatilidade futura com maior precisão do que a volatilidade baseada em parâmetros *ex-post*.

Inúmeras pesquisas têm procurado determinar qual o melhor estimador da volatilidade. Dessa forma, testou-se, a partir das regressões de previsão, qual o predictor que contém maiores informações sobre a volatilidade do dia seguinte e sobre a volatilidade futura.

Os resultados das regressões do conteúdo de informação relevam que a volatilidade implícita ponderada contém informação relevante sobre a volatilidade um passo à frente, entendida como a variação absoluta dos retornos entre t e $t + 1$. Contudo, ela é viesada. Por outro lado, os modelos estatísticos EGARCH e FIGARCH, apesar do R^2 ajustado ser um pouco inferior ao obtido na regressão com a VIPOND, são eficientes e não viesados. Esse resultado é muito importante para avaliações de risco com um horizonte de curtíssimo prazo, pois pode ser efetuada a partir de modelos que dependem de dados históricos dos ativos.

Os resultados das regressões do poder de previsão refutam a hipótese da volatilidade implícita, apurada através da fórmula de *Black-Scholes*, ser o melhor predictor da volatilidade futura, pois seus coeficientes não são estatisticamente significantes. Entretanto, os modelos de volatilidade condicional têm um poder de determinar a volatilidade realizada ao longo do tempo de maturidade da opção muito alto, em torno de 55%. Aliado a isto, o modelo FIGARCH é eficiente e não viesado.

Na avaliação da eficiência relativa dos previsores, os resultados dos conjuntos de regressão mostram que umas associações entre as volatilidades implícita e estatística, permitem uma melhora significativa na determinação da volatilidade realizada.

Se a volatilidade implícita é uma medida *ex-ante*, na qual todos os *traders* têm (a princípio) todo o conjunto relevante de informações sobre o futuro, ela deveria prever com maior habilidade a volatilidade futura do que um modelo que toma os dados *ex-post*. Então, as conclusões acima podem implicitamente denotar a ineficiência no mercado de opções brasileiro, avaliado a partir de uma base de dados de opções e ações da Tele Norte Leste Participações S.A., negociadas na Bovespa.

Porém, isso também pode ser uma refutação ao modelo *Black-Scholes* – variância constante e conhecida, como o modelo que precifica a opção, ou ainda, que outros parâmetros, principalmente o prêmio de risco requerido pelos investidores, podem ser altamente significativos no mercado brasileiro.

5 CONCLUSÕES

Este estudo realizou uma avaliação empírica da volatilidade implícita e estatística a partir de uma base de dados de ações e opções da Telemar S.A., para verificar qual o previsor que determina com maior precisão a volatilidade futura. As ações compreendem o período de 21/09/1998 a 21/10/2002 e as opções de 02/10/2000 a 21/10/2002.

Dessa forma, o primeiro capítulo apresentou os principais conceitos e definições correlacionadas ao mercado de opções, que procuraram estabelecer um arcabouço teórico suficiente para a análise de derivativos. A compreensão dos jargões financeiros foi vital no prosseguimento do estudo.

Para obter a volatilidade implícita é necessário associar um modelo de precificação de opções com os dados de mercado. Nesse sentido, o segundo capítulo desenvolveu o modelo *Black-Scholes*, o qual por resolução numérica foi utilizado para induzir retroativamente a volatilidade implícita. Como esse modelo, bem como praticamente todas as suas extensões, são em função de parâmetros derivados de modelos que regem o movimento dos preços dos ativos, foram primeiramente apresentadas às conjecturas *random walk* - a qual origina os conceitos de mercado eficiente e *martingale*, e o movimento geométrico *browniano* - um modelo à geração dos preços dos ativos em tempo contínuo. Essa descrição associada ao *lemma* de *Itô* permite obter a equação diferencial parcial de *Black-Scholes*. A propriedade de taxa de crescimento e variância constantes do ativo, em conjunto com a condição de inexistência de ganhos com arbitragem, resultam uma importante conclusão: a propriedade de neutralidade ao risco dos investidores no mundo de *Black-Scholes*.

Contudo, ao contrário do que ocorre com o preço de um ativo, a volatilidade não é diretamente mensurável no mercado. Ela só pode ser estimada e prevista no contexto de um modelo. Dependendo do modelo utilizado, diferentes estimativas ou previsões de volatilidade podem ser geradas. Assim, o terceiro capítulo caracterizou formalmente os modelos de volatilidade implícita e estatística.

Desse modo, sobre uma base de dados da ação e opções de compra da Telemar S.A., a última parte deste estudo avaliou se é a volatilidade implícita que prevê com maior precisão a volatilidade futura ou é a volatilidade estatística. Os resultados das regressões do conteúdo de informação revelam que a volatilidade implícita ponderada possui substancial

quantidade de informações sobre a volatilidade um passo à frente, pois apresenta o maior R^2 ajustado de todas as regressões. Apesar dela ser eficiente, é viesada.

Entretanto, a estatística *Wald* revela que os modelos EGARCH e FIGARCH são previsores eficientes e não viesados da variação absoluta dos retornos da Telemar S.A. entre t e $t + 1$, mesmo apresentando um R^2 um pouco inferior a VOLPOND e a VILQUIDA. Esse resultado a partir de parâmetros baseados em dados *ex-post*, de certo modo refuta a hipótese de que as opções possibilitam melhores informações aos participantes do mercado sobre as expectativas de risco ao longo do próximo dia. No mesmo sentido, pode ser relevante na gestão de risco de *portfólios*, de recursos de terceiros, onde a variável que importa é a volatilidade dos ativos da carteira para o dia seguinte. Portanto, o uso de previsores estatísticos ao invés de implícitos, pode resultar em ganhos dado a principal limitação das opções no mercado brasileiro: a pouca liquidez.

Nas regressões do poder de previsão, que testam a habilidade da variável explicativa em prever a volatilidade ao longo do tempo de maturidade da opção, os resultados rejeitam a hipótese da volatilidade implícita (obtida através da fórmula de *Black-Scholes*) ser o melhor predictor da volatilidade futura. Elas mostram que os coeficientes das volatilidades implícitas e incondicionais são estatisticamente insignificantes, além do R^2 ajustado ser zero ou negativo. Isto, a princípio, conduz à rejeição da hipótese de que o mercado de opções é eficiente.

Contundentes são os resultados apresentados pelos modelos de volatilidade condicional. O modelo EGARCH é capaz de explicar 60% da volatilidade futura. No teste de predictor eficiente e não viesado, a estatística *Wald* não rejeita esta hipótese para o modelo FIGARCH. Isto é, um modelo que toma os dados *ex-post* consegue prever a volatilidade futura com maior precisão do que um modelo de natureza *forward looking*, como é o caso da volatilidade implícita.

Dessa forma, para a avaliação e precificação de opções, *hedding*, pode-se afirmar que para fins de controle de risco, onde é vital a previsão ao longo do tempo de vida da opção, é melhor seguir a volatilidade estatística - expressa pelo modelo FIGARCH, pois este predictor demonstrou prever com maior precisão o comportamento futuro do mercado.

Deve-se ressaltar que as várias hipóteses que são necessárias para se chegar à fórmula de *Black-Scholes*, podem ter influenciado os resultados da volatilidade implícita. Provavelmente, um erro de especificação do modelo é o fato dele considerar que os retornos do ativo seguem uma distribuição Normal. Como foi visto, a distribuição da primeira diferença do log dos preços das ações da Telemar S.A. têm caudas mais grossas

do que a Normal. Outra hipótese é de que não existem custos de transação, nem oportunidades de arbitragem sem risco. A associação destes pressupostos pode explicar a ineficiência da volatilidade implícita em prever a volatilidade futura, ao longo do tempo de maturidade das opções da Telemar S.A., no período de 02/10/2000 a 15/10/2002.

Um fator que deve influenciar significativamente qualquer modelo de precificação de um derivativo, é a questão relacionada ao prêmio de risco requerido pelos investidores. A economia brasileira ao longo das últimas décadas e início deste novo milênio, tem propiciado condições de auferir altos retornos financeiros. Mas também, estes altos retornos estão associados a grandes períodos de instabilidade econômica, tanto oriunda de fatores internos como externos. Desse modo, certamente os investidores no mercado acionário brasileiro não devem ser indiferentes ao risco. Quando é lançada uma opção, seu prêmio deve estar refletindo o ambiente econômico, que dependendo das condições de mercado incute um significativo valor de risco.

Uma continuação deste estudo seria aplicar a metodologia acima para um conjunto das ações e opções mais negociadas no mercado brasileiro, bem como estendê-la para o mercado de câmbio. Outra seqüência seria modelar a variância condicional a partir de um modelo estatístico que supõe quebras estruturais, do tipo *Markov-Switching*. Além disso, poder-se-ia computar a volatilidade realizada conforme sugerido por *Andersen & Bollerslev* (1998) – avaliar a previsão das volatilidades a partir de dados de retornos intradia dos ativos. Também, controlar o prazo até o vencimento, isto é, a partir de uma janela de dados maior - no mínimo com sessenta ciclos de vencimento, fixar o intervalo de tempo $N = (T - t)$ e repetir a análise para ver se os resultados se mantêm.

Finalmente, cabe registrar que a desmistificação do mercado de capitais brasileiro e sua conseqüente popularização são vitais ao desenvolvimento do país. Contudo, a enorme complexidade que o envolve, requer o constante aprimoramento e o desenvolvimento de novas técnicas, que visem torná-lo mais compreensível e eficiente. E isto só será possível através de investimento constante em capacitação intelectual, pois é pelo conhecimento e aplicação de modernas teorias que se obtêm uma crescente credibilidade e, portanto, a eficiência do mercado, que por sua vez, limitará os riscos institucionais de severos prejuízos pecuniários à sociedade.

BIBLIOGRAFIA

ABU-MOSTAFA, Yaser S.; LeBARON, Blake; LO, Andrew W.; WEIGEND, Andreas S. **Computational Finance 1999**. Cambridge : MIT Press, 2000.

AGUILAR, Javiera. GARCH, Implied Volatilities and Implied Distributions: Na Evaluation for Forecasting Purposes. **Central Bank of Sweden**, Working Paper Series, n. 08, p. 1-10, ago. 1999.

ALEXANDER, Carol. **Market Models: a guide to financial data analysis**. New York: John Wiley & sons, Inc., 2001.

AMIM, Kaushik; NG, Victor K. Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatility in Eurodollar Options: A New Approach. **The Review of Financial Studies**, v. 10, n. 2, p. 333-367, 1997.

ANDERSEN, Torben G.; BOLLERSLEV, Tim. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. **International Economic Review**, v. 39, n. 4, p. 885-905, 1998.

ANDRADE, Sandro C.; TABAK, Benjamin M. Is it Worth Tracking Dollar/Real Implied Volatility? **Banco Central do Brasil**, Working Papers Series, n. 15, p. 1-25, mar. 2001.

BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 74, p. 3-30, 1996.

BATES, David S. Post-'87 Crash Fears in the S&P 500 Futures Option Market. **Journal of Econometrics**, v. 94, p. 181-238, 2000.

BERGMAN, Y.; GRUNDY, B.; WIENER, Z. General Properties of Option Prices. **Journal of Finance**, v. 51, p. 1573-1610, 1996.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, p. 637-654, 1973.

BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v. 31, p. 307-328, 1986.

BOLLERSLEV, T.; CHOU, R.Y.; KRONER K.F. ARCH Modelling in Finance: A Review of The Theory and Empirical Evidence. **Journal of Econometrics**, v. 52, p. 5-59, 1992.

BOLLERSLEV, T.; MIKKELSEN, H. O. Modeling and Pricing Long-Memory in Stock Market Volatility. **Journal of Econometrics**, v. 73, p. 151-184, 1996.

BUSTAMANTE, M.; FERNANDES, M. Um Procedimento para Análise da Persistência na Volatilidade. **Revista de Econometria**, v. 17, nr.01, p. 15-43, 1997.

CAMPBELL, John Y.; LO, Andrew W.; MACKINLAY, Archie C. **The Econometrics of Financial Markets**. New Jersey: Princeton University Press, 1997.

CANINA, L.; FIGLEWSKI, S. The Informational Content of Implied Volatility. **Review of Financial Studies**, v. 6, p. 659-681, 1993.

CORREA, M.M.R.L.; PEREIRA, P.L.V. Modelos não-lineares em Finanças: Previsibilidade em Mercados Financeiros e Aplicações a Gestão de Risco. **Anais do XX Encontro Brasileiro de Econometria**, v.1, p. 427-448, 1998.

COX, J. C.; ROSS, S. A.. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. **Journal of Financial Economics**, v.3, p. 145-166, 1976.

COX, John C.; RUBINSTEIN, Mark. **Options Markets**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1985.

CHRISTENSEN, B. J.; PRABHALA, N. R. The Relation Between Implied and Realized Volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 50, p. 125-150, 1998.

CUTHBERTSON, Keith; HALL, Stephen G.; TAYLOR, Mark P. **Applied Econometric Techniques**. London: Simon & Schuster International Group, 1992.

DAY, Theodore E.; LEWIS, Craig M. Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options. **Journal of Econometrics**, v. 52, p. 267-287, 1992.

DING, Z.; GRANGER, C. W. J.; ENGLE, R. F. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. **Journal of Empirical Finance**, v. 1, p. 83-106, 1993.

DIXIT, Avnet K.; PINDYCK, Robert S. **Investment under Uncertainty**. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

DUMAS, Bernard; FLEMING, Jeff; WHALEY, Robert E. Implied Volatility Functions: Empirical Tests. **The Journal of Finance**, v. 53, n. 06, p. 2059-2106, 1998.

ENDERS, Walter. **Applied Econometric Time Series**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity With estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. **Econometric**, v.50, p. 987-1007, 1982.

ENGLE, R.; BOLLERSLEV, T. Modeling the Persistence of Conditional Variances. **Econometric Reviews**, v. 5, p. 1-50, 1986.

ENGLE, R. F.; LILIEN, D. M.; ROBINS, R. P. Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure. **Econometrica**, v. 55, n. 2, p. 391-407, 1987.

ENGLE, Robert F.; MUSTAFA, Chowdhury. Implied ARCH Models from Options Prices. **Journal of Econometrics**, 52, p. 289-311, 1992.

FAIR, Ray C.; SHILLER, Robert J. Comparing Information in Forecasts from Econometric Models. **The American Economic Review**, v. 80, n. 3, p. 375-389, 1990.

FLEMING, Jeff. The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P 100 Index Option Prices. **Journal of Empirical Finance**, 5, p. 317-345, 1998.

GALVÃO, A. B. C.; PORTUGAL, M. S.; RIBEIRO, E. P. Volatilidade e Causalidade: Evidências para o Mercado à Vista e Futuro de Índice de Ações no Brasil. **Revista Brasileira de Economia**, v. 54, n. 1, p. 37-56, 2000.

GLOSTEN, L. R.; JAGANNATHAN, R.; RUNKLE, D. E. On The Relation Between Expected Value and The Volatility of The Nominal Excess Return on Stocks. **Journal of Finance**, v. 48, p. 1779-1801, 1993.

GOMES, Frederico P. Volatilidade Implícita e Antecipação de Eventos de *Stress*: Um Teste para o Mercado Brasileiro. **Banco Central do Brasil**, Working Papers Series, n. 38, p. 1-38, mar. 2002.

GREENE, William H. **Econometric Analysis**. 4. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 2000.

HARVEY, Andrew C. **Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

HERENCIA, M. E. Z.; HOTTA, L. K.; PEREIRA, P. L. Filtragem e Previsão com Modelos de Volatilidade: Volatilidade Estocástica Versus GARCH. **Revista de Economia**, v. 52, n. 2, p. 241-278, 1998.

HULL, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, Inc., 1997.

HULL, J.; WHITE, A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility. **Journal of Finance**, v. 42, p. 281-300, 1987.

ISSLER, J.V. Estimating and Forecasting the Volatility of Brazilian Finance Series Using ARCH Models. *Revista de Econometria*, v.19, n.1, p. 5-56, 1999.

JARROW, R.; RUDD, A.. Approximate Option Valuation for Arbitrary Stochastic Processes. **Journal of Financial Economics**, v. 10, p. 347-369, 1982.

JORION, Philippe. Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market. **The Journal of Finance**, v. L, n. 2, p. 507-528, 1995.

JORION, Philippe. **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. California: The McGraw-Hill Companies, Inc., 1997.

KIM, Chang-J.; NELSON, Charles R. **State-Space Models with Regime Switching**. Cambridge: MIT Press, 1999.

KIM, Sangjoon; SHEPHARD, Neil; CHIB, Siddhartha. Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models. **Review of Economic Studies**, v. 65, p. 361-393, 1998.

LAMOUREUX, C. G.; LASTRAPES, W. Forecasting Stock Return Variance: Towards Understanding Stochastic Implied Volatility. **Review of Financial Studies**, v. 6, p. 293-326, 1993.

MERTON, R. C. Theory of Rational Option Pricing. **Bell Journal of Economics and Management Science**, n. 4 (Spring), p. 141-183, 1973.

MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do Ibovespa. *Estudos Econômicos*, v. 29, n. 3, p. 303-341, 1999.

MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Uma Investigação sobre os Co-Movimentos na Volatilidade dos Par *Bonds* Latino-Americanos. **Revista Brasileira de Economia**, v. 55, n. 2, p. 183-204, 2001.

MOTTA, Daniel A.. The Predictive Power of Implied Volatility Applied to Brazil. **Anais do Primeiro Encontro Brasileiro de Finanças**, 2001.

NAVATTE, Patrick; VILLA, Christophe. The Information Content of Implied Volatility, Skewness and Kurtosis: Empirical Evidence from Long-Term CAC 40 Options. **European Financial Management**, v. 6, n. 1, p. 41-56, 2000.

NELSON, D. Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach. **Econometrica**, v. 59, p. 347-370, 1991.

NEFTCI, Salih N. **An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives**. San Diego: Academic Press, 1996.

NEWHEY, Whitney; WEST, Kenneth. A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. **Econometrica**, v. 55, p. 703-708, 1987.

NEWHEY, Whitney; WEST, Kenneth. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. **Review of Economic Studies**, v. 61, p. 631-653, 1994.

SHIRYAEV, Albert N. **Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1999.

SILVA NETO, Lauro A. **Opções: do Tradicional ao Exótico**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1996.

SILVA NETO, Lauro A. **Derivativos: Definições, Emprego e Risco**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1998.

SPANOS, Aris. **Probability Thoery and Statistical Inference: econometric modelling with observational data**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

TAYLOR, Stephen J.; XU, Xinzhong. Conditional Volatility and the Informational Efficiency of the PHLX Currency Options Market. **Journal of Banking & Finance**, v. 19, p. 803-821, 1995.

TAYLOR, Stephen J.; XU, Xinzhong. The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations. **Journal of Empirical Finance**, v. 4, p. 317-340, 1997.

WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J. **The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

ZAKOIAN, J. M. Threshold Heteroskedastic Models. *Manuscrito*, CREST, INSEE, Paris, 1990.

ZIEGELMANN, F. A.; PEREIRA, P. V. Modelos de Volatilidade Estocástica com Deformação Temporal: Um Estudo Empírico para o Índice Bovespa. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 27, n.2, p. 353-376, 1997.

ANEXO A: Correlograma das séries de volatilidades em nível.

a) Volatilidade Realizada:

Date: 02/27/03 Time: 11:15

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.*****	.*****	1	0.944	0.944	451.39	0.000
.*****	.*	2	0.898	0.067	860.75	0.000
.*****	.	3	0.854	0.005	1232.0	0.000
.*****	.*	4	0.820	0.066	1574.7	0.000
.*****	.	5	0.790	0.042	1893.9	0.000
.*****	.	6	0.757	-0.039	2187.2	0.000
.*****	.	7	0.721	-0.035	2454.0	0.000
.*****	.	8	0.690	0.023	2698.7	0.000
.*****	*.	9	0.651	-0.079	2917.3	0.000
.*****	.	10	0.617	-0.002	3113.8	0.000
.*****	.	11	0.582	-0.013	3289.3	0.000
.*****	.	12	0.549	-0.020	3445.3	0.000
.*****	.	13	0.515	-0.026	3582.8	0.000
.*****	.	14	0.478	-0.043	3701.5	0.000
.***	*.	15	0.436	-0.069	3800.8	0.000
.***	*.	16	0.392	-0.074	3881.0	0.000
.***	.	17	0.347	-0.037	3944.1	0.000
.**	.	18	0.307	-0.013	3993.5	0.000
.**	.	19	0.269	-0.005	4031.7	0.000
.**	.	20	0.233	-0.013	4060.4	0.000
.**	.	21	0.197	-0.019	4081.0	0.000
.*	.	22	0.164	0.004	4095.2	0.000
.*	.	23	0.130	-0.027	4104.1	0.000
.*	.	24	0.098	-0.004	4109.2	0.000
.*	.	25	0.072	0.040	4111.9	0.000
.	.	26	0.049	0.008	4113.2	0.000
.	.	27	0.026	-0.006	4113.6	0.000
.	.	28	0.007	0.029	4113.6	0.000
.	.	29	-0.010	0.017	4113.7	0.000
.	.	30	-0.027	-0.006	4114.1	0.000
.	.	31	-0.043	-0.005	4115.1	0.000
.	.	32	-0.055	0.027	4116.7	0.000
*.	.	33	-0.067	-0.012	4119.1	0.000
*.	.	34	-0.077	-0.009	4122.4	0.000
*.	.	35	-0.092	-0.051	4127.0	0.000
*.	.	36	-0.102	0.019	4132.6	0.000

b) Volatilidade um passo a frente:

Date: 02/27/03 Time: 11:13

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.*	.*	1	0.121	0.121	7.4704	0.006
.*	.*	2	0.087	0.074	11.360	0.003
.*	.*	3	0.165	0.149	25.192	0.000
.*	.	4	0.086	0.048	28.943	0.000
.*	.	5	0.085	0.052	32.675	0.000
.*	.*	6	0.112	0.070	39.055	0.000
.	.	7	0.054	0.011	40.552	0.000
.*	.*	8	0.142	0.108	50.853	0.000
.	.	9	0.042	-0.017	51.764	0.000
.	.	10	0.005	-0.033	51.775	0.000
.	*.	11	-0.035	-0.085	52.399	0.000
.	.	12	0.037	0.024	53.127	0.000
.	.	13	0.034	0.021	53.717	0.000
.	.	14	-0.013	-0.026	53.805	0.000
*.	*.	15	-0.063	-0.075	55.877	0.000
.	.	16	-0.003	-0.007	55.883	0.000
.	.	17	-0.042	-0.027	56.806	0.000
*.	.	18	-0.059	-0.033	58.614	0.000
.	.	19	-0.033	-0.002	59.190	0.000

*			20	-0.103	-0.090	64.792	0.000
*			21	-0.058	-0.023	66.541	0.000
.			22	-0.027	0.006	66.920	0.000
.			23	-0.050	0.017	68.225	0.000
*			24	-0.080	-0.046	71.638	0.000
.			25	-0.051	-0.019	73.007	0.000
*			26	-0.071	-0.035	75.727	0.000
.			27	-0.029	0.023	76.167	0.000
.			28	-0.051	-0.005	77.558	0.000
*			29	-0.071	-0.040	80.252	0.000
.		*	30	0.037	0.070	80.981	0.000
.			31	-0.028	-0.021	81.416	0.000
.			32	-0.009	0.033	81.460	0.000
.		*	33	0.058	0.070	83.280	0.000
.			34	-0.040	-0.038	84.136	0.000
.			35	0.036	0.022	84.834	0.000
.			36	-0.008	-0.034	84.865	0.000

c) Volatilidade Implícita ponderada:

Date: 02/27/03 Time: 11:12

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	*****	1	0.853	0.853	368.87	0.000
. *****	.	2	0.724	-0.012	635.33	0.000
. *****	*	3	0.638	0.086	842.81	0.000
. ****	.	4	0.573	0.038	1010.2	0.000
. ****	.	5	0.503	-0.032	1139.4	0.000
. ***	.	6	0.447	0.029	1241.8	0.000
. ***	.	7	0.410	0.040	1328.0	0.000
. ***	.	8	0.389	0.057	1405.9	0.000
. ***	.	9	0.371	0.026	1476.9	0.000
. ***	.	10	0.352	0.014	1540.9	0.000
. ***	.	11	0.334	0.014	1598.8	0.000
. **	*	12	0.294	-0.079	1643.7	0.000
. **	*	13	0.238	-0.079	1673.1	0.000
. *	.	14	0.194	-0.003	1692.7	0.000
. *	.	15	0.161	-0.007	1706.2	0.000
. *	.	16	0.126	-0.027	1714.4	0.000
. *	.	17	0.087	-0.034	1718.4	0.000
. *	.	18	0.068	0.023	1720.8	0.000
. .	.	19	0.055	-0.005	1722.4	0.000
. .	.	20	0.051	0.023	1723.8	0.000
. .	.	21	0.050	0.020	1725.1	0.000
. .	.	22	0.057	0.040	1726.9	0.000
. *	.	23	0.070	0.043	1729.4	0.000
. *	.	24	0.078	0.023	1732.6	0.000
. *	.	25	0.087	0.038	1736.7	0.000
. *	.	26	0.101	0.037	1742.2	0.000
. *	.	27	0.116	0.032	1749.4	0.000
. *	.	28	0.128	0.029	1758.1	0.000
. *	.	29	0.139	0.020	1768.4	0.000
. *	.	30	0.155	0.035	1781.3	0.000
. *	.	31	0.173	0.025	1797.4	0.000
. *	.	32	0.190	0.029	1817.0	0.000
. **	.	33	0.218	0.063	1842.6	0.000
. **	.	34	0.254	0.065	1877.5	0.000
. **	.	35	0.287	0.048	1922.1	0.000
. **	.	36	0.316	0.049	1976.6	0.000

d) Volatilidade implícita *nearest-at-the-money*:

Date: 02/27/03 Time: 11:12

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	*****	1	0.828	0.828	347.87	0.000
. *****	*	2	0.708	0.068	602.19	0.000
. *****	*	3	0.633	0.097	806.03	0.000

****		.*		4	0.592	0.104	984.75	0.000
****		.		5	0.544	0.008	1136.1	0.000
****		.		6	0.509	0.049	1268.7	0.000
****		.		7	0.481	0.038	1387.6	0.000
****		.		8	0.462	0.042	1497.6	0.000
****		.*		9	0.457	0.070	1605.0	0.000
****		.		10	0.450	0.039	1709.6	0.000
****		.		11	0.452	0.065	1815.1	0.000
****		.*		12	0.417	-0.073	1905.1	0.000
****		.		13	0.377	-0.035	1978.8	0.000
****		.*		14	0.373	0.083	2051.2	0.000
****		.		15	0.357	-0.031	2117.4	0.000
****		.		16	0.347	0.038	2180.3	0.000
**		.		17	0.315	-0.056	2232.3	0.000
.*		.		18	0.291	-0.012	2276.8	0.000
.*		.		19	0.272	-0.002	2315.6	0.000
.*		.		20	0.275	0.049	2355.5	0.000
.*		.		21	0.274	0.017	2395.2	0.000
.*		.		22	0.278	0.036	2436.0	0.000
.*		.		23	0.288	0.057	2480.0	0.000
.*		.		24	0.295	0.034	2526.2	0.000
.*		.		25	0.310	0.044	2577.3	0.000
****		.*		26	0.336	0.090	2637.5	0.000
****		.		27	0.346	0.015	2701.3	0.000
****		.		28	0.347	0.026	2765.7	0.000
****		.*		29	0.357	0.068	2834.1	0.000
****		.		30	0.353	-0.026	2901.1	0.000
****		.		31	0.363	0.063	2972.2	0.000
****		.		32	0.362	-0.009	3042.9	0.000
****		.		33	0.366	0.040	3115.3	0.000
****		.		34	0.376	0.042	3192.1	0.000
****		.*		35	0.403	0.084	3280.5	0.000
****		.		36	0.430	0.065	3381.1	0.000

e) Volatilidade implícita mais líquida:

Date: 02/27/03 Time: 11:12

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
*****		*****		1	0.768	0.768	299.37	0.000
*****		**		2	0.676	0.208	531.33	0.000
*****		.*		3	0.615	0.113	724.17	0.000
*****		.		4	0.522	-0.050	863.10	0.000
*****		.		5	0.477	0.054	979.31	0.000
****		.*		6	0.455	0.080	1085.3	0.000
****		.		7	0.401	-0.025	1167.7	0.000
****		.		8	0.380	0.040	1242.1	0.000
****		.*		9	0.384	0.087	1318.1	0.000
****		.		10	0.337	-0.050	1376.8	0.000
**		.		11	0.325	0.028	1431.5	0.000
.*		.		12	0.298	-0.026	1477.4	0.000
.*		.*		13	0.228	-0.100	1504.5	0.000
.*		.		14	0.213	0.027	1528.1	0.000
.*		.		15	0.179	-0.033	1544.7	0.000
.*		.		16	0.147	0.002	1556.1	0.000
.*		.*		17	0.112	-0.065	1562.6	0.000
.*		.		18	0.077	-0.043	1565.7	0.000
.		.		19	0.064	0.035	1567.8	0.000
.		.		20	0.062	0.020	1569.9	0.000
.		.		21	0.055	0.011	1571.5	0.000
.		.		22	0.049	0.012	1572.7	0.000
.*		.*		23	0.081	0.094	1576.2	0.000
.*		.		24	0.088	0.039	1580.4	0.000
.*		.		25	0.098	0.022	1585.4	0.000
.*		.		26	0.115	0.034	1592.5	0.000
.*		.		27	0.112	0.012	1599.2	0.000
.*		.*		28	0.135	0.071	1609.0	0.000
.*		.		29	0.153	0.040	1621.5	0.000
.*		.		30	0.157	0.008	1634.8	0.000
.*		.*		31	0.188	0.067	1653.9	0.000
****		.		32	0.204	0.013	1676.4	0.000
**		.		33	0.213	0.023	1701.0	0.000

.**		.		34	0.249	0.065	1734.6	0.000
.**		.*		35	0.290	0.077	1780.5	0.000
.**		.		36	0.300	0.019	1829.6	0.000

f) MA(10):

Date: 02/27/03 Time: 11:35

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.*****	*****	1	0.940	0.940	448.28	0.000
.*****	*	2	0.867	-0.144	830.55	0.000
.*****	*	3	0.791	-0.061	1148.9	0.000
.*****	.	4	0.715	-0.027	1409.8	0.000
.*****	*	5	0.634	-0.093	1615.5	0.000
.*****	*	6	0.552	-0.058	1771.4	0.000
.*****	.	7	0.473	-0.010	1886.3	0.000
.***	*	8	0.391	-0.100	1964.8	0.000
.**	*	9	0.307	-0.063	2013.2	0.000
.**	*	10	0.222	-0.063	2038.8	0.000
.*	. ***	11	0.189	0.393	2057.3	0.000
.*	*	12	0.162	-0.083	2070.9	0.000
.*	.	13	0.142	0.022	2081.4	0.000
.*	.	14	0.121	-0.056	2089.0	0.000
.*	*	15	0.100	-0.065	2094.3	0.000
.*	.	16	0.080	-0.044	2097.6	0.000
.	.	17	0.059	-0.004	2099.4	0.000
.	*	18	0.037	-0.102	2100.1	0.000
.	*	19	0.012	-0.059	2100.2	0.000
.	.	20	-0.007	-0.021	2100.2	0.000
.	. ***	21	-0.026	0.201	2100.6	0.000
.	*	22	-0.044	-0.066	2101.6	0.000
*	.	23	-0.065	0.004	2103.8	0.000
*	.	24	-0.078	0.026	2107.0	0.000
*	.	25	-0.083	0.019	2110.7	0.000
*	.	26	-0.083	0.002	2114.4	0.000
*	*	27	-0.088	-0.070	2118.5	0.000
*	.	28	-0.084	0.025	2122.3	0.000
*	.	29	-0.073	-0.010	2125.2	0.000
.	. *	30	-0.054	0.083	2126.8	0.000
.	.	31	-0.041	0.004	2127.7	0.000
.	.	32	-0.024	0.033	2128.0	0.000
.	.	33	-0.005	-0.023	2128.0	0.000
.	.	34	0.009	-0.007	2128.0	0.000
.	*	35	0.010	-0.101	2128.1	0.000
.	*	36	-0.004	-0.114	2128.1	0.000

g)MA(20):

Date: 02/27/03 Time: 11:36

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
.*****	*****	1	0.976	0.976	483.08	0.000
.*****	*	2	0.944	-0.187	935.76	0.000
.*****	*	3	0.908	-0.061	1355.8	0.000
.*****	.	4	0.871	-0.046	1742.5	0.000
.*****	*	5	0.830	-0.078	2094.4	0.000
.*****	*	6	0.786	-0.069	2410.4	0.000
.*****	*	7	0.739	-0.060	2690.5	0.000
.*****	.	8	0.690	-0.053	2935.3	0.000
.*****	.	9	0.640	-0.044	3146.0	0.000
.*****	*	10	0.587	-0.070	3323.6	0.000
.*****	.	11	0.533	-0.033	3470.4	0.000
.*****	*	12	0.477	-0.058	3588.5	0.000
.*****	.	13	0.423	-0.008	3681.3	0.000
.*****	*	14	0.367	-0.063	3751.3	0.000
.***	.	15	0.313	0.022	3802.5	0.000
.**	.	16	0.262	0.012	3838.4	0.000
.**	*	17	0.211	-0.075	3861.6	0.000
.*	.	18	0.160	-0.006	3875.1	0.000
.*	.	19	0.111	-0.022	3881.6	0.000
.*	. *	20	0.069	0.079	3884.1	0.000

.		***		21	0.044	0.336	3885.1	0.000
.		.		22	0.024	-0.046	3885.4	0.000
.		*		23	0.004	-0.069	3885.5	0.000
.		.		24	-0.013	0.019	3885.5	0.000
.		*		25	-0.029	-0.077	3886.0	0.000
.		.		26	-0.044	-0.036	3887.0	0.000
.		.		27	-0.057	-0.016	3888.7	0.000
*		.		28	-0.067	0.003	3891.1	0.000
*		*		29	-0.077	-0.075	3894.3	0.000
*		.		30	-0.087	-0.045	3898.4	0.000
*		.		31	-0.097	-0.049	3903.5	0.000
*		.		32	-0.103	0.032	3909.2	0.000
*		.		33	-0.109	-0.041	3915.7	0.000
*		*		34	-0.116	-0.059	3922.9	0.000
*		*		35	-0.127	-0.102	3931.7	0.000
*		*		36	-0.143	-0.112	3942.9	0.000

h) MA(30);

Date: 02/27/03 Time: 11:39

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
*****	*****	1	0.984	0.984	490.87	0.000
*****	*	2	0.962	-0.195	960.96	0.000
*****	*	3	0.936	-0.109	1406.8	0.000
*****	*	4	0.907	-0.065	1826.3	0.000
*****	.	5	0.877	-0.020	2219.3	0.000
*****	.	6	0.846	-0.012	2586.1	0.000
*****	*	7	0.814	-0.077	2925.7	0.000
*****	.	8	0.780	-0.024	3238.5	0.000
*****	.	9	0.746	-0.031	3524.9	0.000
*****	.	10	0.710	-0.032	3785.2	0.000
*****	*	11	0.673	-0.061	4019.7	0.000
*****	*	12	0.635	-0.059	4228.5	0.000
*****	.	13	0.596	0.000	4412.9	0.000
*****	.	14	0.556	-0.042	4574.0	0.000
*****	.	15	0.515	-0.055	4712.5	0.000
*****	.	16	0.475	-0.016	4830.2	0.000
*****	.	17	0.434	-0.016	4928.7	0.000
*****	.	18	0.393	-0.011	5009.9	0.000
*****	.	19	0.352	-0.044	5075.2	0.000
****	.	20	0.313	0.020	5126.9	0.000
****	*	21	0.272	-0.093	5166.1	0.000
****	.	22	0.232	0.008	5194.6	0.000
****	*	23	0.191	-0.086	5213.9	0.000
****	.	24	0.150	-0.013	5225.9	0.000
****	.	25	0.109	-0.016	5232.2	0.000
****	.	26	0.069	-0.025	5234.7	0.000
****	.	27	0.030	-0.012	5235.2	0.000
****	.	28	-0.007	0.018	5235.2	0.000
****	.	29	-0.044	-0.041	5236.3	0.000
****	.	30	-0.077	0.049	5239.5	0.000
****	***	31	-0.099	0.321	5244.8	0.000
****	*	32	-0.119	-0.088	5252.4	0.000
****	.	33	-0.137	-0.029	5262.6	0.000
****	.	34	-0.154	-0.051	5275.4	0.000
****	*	35	-0.174	-0.171	5292.0	0.000
****	*	36	-0.197	-0.068	5313.1	0.000

i) GARCH(1,1):

Date: 02/27/03 Time: 11:41

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
***	***	1	0.381	0.381	73.634	0.000
***	**	2	0.329	0.215	128.70	0.000
***	****	3	0.625	0.546	327.69	0.000
**	.	4	0.317	-0.037	379.10	0.000
**	*	5	0.367	0.178	447.98	0.000
***	*	6	0.401	-0.081	530.21	0.000
*	**	7	0.103	-0.253	535.71	0.000

. ***		. **		8	0.396	0.262	616.33	0.000
. ***		. .		9	0.334	0.009	673.68	0.000
. .		* .		10	0.019	-0.102	673.87	0.000
. **		. .		11	0.296	0.040	719.14	0.000
. **		. .		12	0.226	-0.031	745.68	0.000
. .		* .		13	0.009	-0.084	745.72	0.000
. **		. *		14	0.250	0.073	778.16	0.000
. .		* .		15	0.049	-0.096	779.40	0.000
. .		. .		16	-0.004	-0.007	779.40	0.000
. **		. .		17	0.209	-0.002	802.31	0.000
* .		* .		18	-0.081	-0.103	805.76	0.000
* .		. .		19	-0.070	-0.049	808.32	0.000
. *		. *		20	0.178	0.111	824.94	0.000
* .		. .		21	-0.091	0.034	829.36	0.000
. .		. .		22	-0.027	0.021	829.76	0.000
. *		. .		23	0.078	-0.034	833.00	0.000
* .		. .		24	-0.119	-0.012	840.47	0.000
. .		. .		25	0.044	0.007	841.48	0.000
. .		. .		26	0.032	-0.003	842.04	0.000
* .		. .		27	-0.163	0.020	856.17	0.000
. *		. .		28	0.087	0.045	860.27	0.000
. .		. .		29	0.047	0.043	861.43	0.000
* .		. .		30	-0.143	-0.056	872.39	0.000
. *		. .		31	0.076	-0.002	875.49	0.000
. .		. .		32	-0.004	-0.018	875.50	0.000
* .		. .		33	-0.085	-0.001	879.39	0.000
. *		. *		34	0.129	0.087	888.36	0.000
* .		. .		35	-0.060	-0.030	890.32	0.000
* .		. .		36	-0.067	-0.056	892.76	0.000

j) GARCHPREV:

Date: 02/27/03 Time: 11:42

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob			
. *****		. *****		1	0.973	0.973	480.20	0.000
. *****		. .		2	0.946	-0.026	934.56	0.000
. *****		. .		3	0.918	-0.021	1363.4	0.000
. *****		* .		4	0.883	-0.155	1760.8	0.000
. *****		. .		5	0.849	0.010	2128.9	0.000
. *****		. .		6	0.816	0.000	2469.7	0.000
. *****		. .		7	0.781	-0.043	2782.3	0.000
. *****		. .		8	0.747	0.006	3069.2	0.000
. *****		. .		9	0.712	-0.056	3330.2	0.000
. *****		. .		10	0.675	-0.039	3565.5	0.000
. *****		. .		11	0.641	0.022	3778.2	0.000
. *****		* .		12	0.605	-0.060	3967.7	0.000
. *****		. .		13	0.567	-0.033	4134.9	0.000
. *****		. .		14	0.533	0.015	4282.7	0.000
. *****		* .		15	0.495	-0.069	4410.5	0.000
. *****		. .		16	0.457	-0.022	4519.8	0.000
. *****		. .		17	0.422	-0.005	4612.9	0.000
. *****		. .		18	0.385	-0.018	4690.8	0.000
. *****		. .		19	0.351	0.023	4755.7	0.000
. *****		. .		20	0.319	-0.017	4809.2	0.000
. *****		. .		21	0.285	-0.042	4852.0	0.000
. *****		. .		22	0.253	0.005	4885.9	0.000
. *****		. .		23	0.223	-0.009	4912.2	0.000
. *****		. .		24	0.191	-0.021	4931.6	0.000
. *****		. .		25	0.163	0.004	4945.8	0.000
. *****		. .		26	0.135	-0.025	4955.5	0.000
. *****		. .		27	0.106	-0.025	4961.5	0.000
. *****		. .		28	0.081	0.019	4964.9	0.000
. *****		. .		29	0.054	-0.036	4966.5	0.000
. *****		. .		30	0.029	-0.007	4967.0	0.000
. *****		. .		31	0.007	0.010	4967.0	0.000
. *****		. .		32	-0.017	-0.039	4967.1	0.000
. *****		. .		33	-0.039	0.007	4968.0	0.000
. *****		* .		34	-0.058	0.003	4969.8	0.000
. *****		* .		35	-0.080	-0.067	4973.3	0.000
. *****		. .		36	-0.101	-0.011	4978.9	0.000

k) EGARCH1DIA:

Date: 02/27/03 Time: 11:44

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0.867	0.867	381.29	0.000
. *****	. *	2	0.785	0.132	694.11	0.000
. *****	. *	3	0.688	-0.070	935.11	0.000
. *****	. *	4	0.625	0.067	1134.2	0.000
. ****	. .	5	0.556	-0.019	1292.3	0.000
. ****	. .	6	0.510	0.042	1425.6	0.000
. ***	. *	7	0.441	-0.088	1525.1	0.000
. ***	. .	8	0.383	-0.023	1600.7	0.000
. **	. .	9	0.318	-0.043	1652.9	0.000
. **	. *	10	0.291	0.091	1696.8	0.000
. **	. .	11	0.249	-0.034	1728.9	0.000
. **	. .	12	0.213	-0.042	1752.4	0.000
. *	. .	13	0.181	0.028	1769.4	0.000
. *	. .	14	0.150	-0.022	1781.2	0.000
. *	. .	15	0.109	-0.055	1787.4	0.000
. *	. .	16	0.070	-0.053	1790.0	0.000
. .	. .	17	0.045	0.029	1791.1	0.000
. .	. .	18	0.015	-0.032	1791.2	0.000
. .	. .	19	0.007	0.060	1791.2	0.000
. .	. .	20	0.010	0.057	1791.3	0.000
. .	. *	21	-0.002	-0.060	1791.3	0.000
. .	. .	22	-0.005	0.036	1791.3	0.000
. .	. *	23	-0.031	-0.097	1791.8	0.000
. .	. .	24	-0.037	0.026	1792.5	0.000
. .	. .	25	-0.038	0.033	1793.3	0.000
. .	. .	26	-0.021	0.059	1793.5	0.000
. .	. .	27	-0.014	-0.012	1793.6	0.000
. .	. .	28	-0.004	0.013	1793.6	0.000
. .	. .	29	0.002	0.039	1793.6	0.000
. .	. .	30	0.023	0.031	1793.9	0.000
. .	. .	31	0.036	0.012	1794.6	0.000
. .	. .	32	0.053	-0.017	1796.1	0.000
. .	. .	33	0.058	-0.011	1797.9	0.000
. .	. .	34	0.059	-0.027	1799.8	0.000
. .	. .	35	0.048	-0.034	1801.1	0.000
. .	. *	36	0.023	-0.098	1801.4	0.000

l) EGARCHPREV:

Date: 02/27/03 Time: 11:45

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	. *****	1	0.982	0.982	488.98	0.000
. *****	. *	2	0.958	-0.181	955.23	0.000
. *****	. *	3	0.930	-0.085	1395.9	0.000
. *****	. .	4	0.901	-0.040	1810.0	0.000
. *****	. *	5	0.869	-0.067	2196.1	0.000
. *****	. *	6	0.835	-0.068	2553.0	0.000
. *****	. .	7	0.799	-0.022	2880.9	0.000
. *****	. .	8	0.763	-0.034	3180.2	0.000
. *****	. .	9	0.725	-0.038	3451.3	0.000
. *****	. .	10	0.687	-0.022	3695.2	0.000
. *****	. .	11	0.649	-0.032	3912.7	0.000
. *****	. .	12	0.609	-0.046	4104.8	0.000
. *****	. .	13	0.568	-0.029	4272.6	0.000
. *****	. .	14	0.528	-0.029	4417.4	0.000
. *****	. .	15	0.486	-0.036	4540.7	0.000
. ****	. .	16	0.444	-0.039	4643.9	0.000
. ****	. .	17	0.402	-0.031	4728.5	0.000
. ****	. .	18	0.360	-0.019	4796.5	0.000
. ****	. .	19	0.318	-0.013	4849.8	0.000
. ****	. .	20	0.278	-0.008	4890.5	0.000
. ****	. .	21	0.238	-0.008	4920.4	0.000
. ****	. .	22	0.200	0.006	4941.6	0.000
. ***	. .	23	0.164	0.010	4955.9	0.000
. ***	. .	24	0.131	0.018	4965.0	0.000
. ***	. .	25	0.099	0.002	4970.2	0.000

. *			26	0.069	-0.001	4972.8	0.000
. .			27	0.041	-0.018	4973.7	0.000
. .			28	0.013	-0.019	4973.8	0.000
. .			29	-0.013	-0.028	4973.9	0.000
. .			30	-0.039	-0.013	4974.7	0.000
* .			31	-0.063	-0.008	4976.8	0.000
* .			32	-0.086	-0.009	4980.8	0.000
* .			33	-0.107	-0.006	4987.0	0.000
* .			34	-0.128	-0.023	4995.9	0.000
* .			35	-0.149	-0.047	5008.0	0.000
* .			36	-0.170	-0.049	5023.6	0.000

M) FIGARCH1DIA:

Date: 02/27/03 Time: 11:11

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	*****	1	0.945	0.945	453.06	0.000
. *****	**	2	0.917	0.216	879.90	0.000
. *****	*	3	0.873	-0.107	1267.6	0.000
. *****	*	4	0.818	-0.183	1609.1	0.000
. *****	*	5	0.760	-0.120	1904.0	0.000
. *****	.	6	0.699	-0.052	2154.4	0.000
. *****	.	7	0.637	-0.032	2362.4	0.000
. *****	.	8	0.575	-0.012	2532.4	0.000
. *****	*	9	0.522	0.072	2673.0	0.000
. *****	.	10	0.469	0.007	2786.4	0.000
. *****	*	11	0.414	-0.063	2875.2	0.000
. *****	*	12	0.362	-0.061	2943.2	0.000
. *****	.	13	0.320	0.057	2996.5	0.000
. *****	.	14	0.275	-0.020	3035.8	0.000
. *****	*	15	0.230	-0.059	3063.5	0.000
. *****	.	16	0.196	0.040	3083.5	0.000
. *****	.	17	0.161	0.022	3097.1	0.000
. *****	.	18	0.130	-0.002	3106.0	0.000
. *****	.	19	0.105	0.002	3111.8	0.000
. *****	*	20	0.090	0.090	3116.1	0.000
. *****	.	21	0.070	-0.029	3118.7	0.000
. *****	.	22	0.058	-0.022	3120.5	0.000
. *****	*	23	0.042	-0.076	3121.4	0.000
. *****	.	24	0.035	0.056	3122.1	0.000
. *****	.	25	0.024	-0.007	3122.4	0.000
. *****	.	26	0.018	0.006	3122.5	0.000
. *****	.	27	0.008	-0.037	3122.6	0.000
. *****	*	28	0.006	0.073	3122.6	0.000
. *****	.	29	0.003	-0.003	3122.6	0.000
. *****	.	30	0.007	0.035	3122.6	0.000
. *****	*	31	0.004	-0.060	3122.6	0.000
. *****	.	32	0.007	0.039	3122.6	0.000
. *****	.	33	0.011	0.000	3122.7	0.000
. *****	.	34	0.012	-0.022	3122.8	0.000
. *****	*	35	0.008	-0.089	3122.8	0.000
. *****	*	36	-0.008	-0.138	3122.9	0.000

m) FIGARCHPREV:

Date: 02/27/03 Time: 11:11

Sample: 1 504

Included observations: 504

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
. *****	*****	1	0.982	0.982	489.16	0.000
. *****	*	2	0.961	-0.118	958.00	0.000
. *****	*	3	0.936	-0.091	1403.9	0.000
. *****	.	4	0.909	-0.057	1825.3	0.000
. *****	*	5	0.880	-0.057	2221.2	0.000
. *****	.	6	0.849	-0.052	2590.6	0.000
. *****	.	7	0.818	-0.023	2933.6	0.000
. *****	.	8	0.785	-0.032	3250.6	0.000
. *****	.	9	0.752	-0.035	3541.6	0.000
. *****	.	10	0.717	-0.032	3807.2	0.000
. *****	.	11	0.682	-0.027	4048.0	0.000
. *****	.	12	0.647	-0.021	4265.1	0.000

****	..	13	0.612	-0.022	4459.4	0.000
****	..	14	0.576	-0.017	4632.2	0.000
****	..	15	0.541	-0.020	4784.7	0.000
****	..	16	0.505	-0.023	4918.0	0.000
****	..	17	0.470	-0.016	5033.6	0.000
***	..	18	0.435	-0.013	5132.9	0.000
**	..	19	0.401	-0.009	5217.4	0.000
****	..	20	0.367	-0.009	5288.4	0.000
****	..	21	0.334	-0.019	5347.3	0.000
**	..	22	0.302	-0.009	5395.4	0.000
**	..	23	0.270	-0.011	5434.0	0.000
**	..	24	0.240	0.008	5464.5	0.000
**	..	25	0.210	-0.012	5488.1	0.000
*	..	26	0.182	-0.016	5505.7	0.000
*	..	27	0.154	-0.020	5518.3	0.000
*	..	28	0.126	-0.024	5526.7	0.000
*	..	29	0.099	-0.015	5532.0	0.000
*	..	30	0.072	-0.012	5534.8	0.000
..	..	31	0.046	-0.022	5536.0	0.000
..	..	32	0.021	-0.023	5536.2	0.000
..	..	33	-0.004	-0.004	5536.2	0.000
..	..	34	-0.028	-0.024	5536.6	0.000
..	..	35	-0.052	-0.032	5538.1	0.000
*	..	36	-0.076	-0.027	5541.3	0.000
