

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Equação de Poisson em variedades  
riemannianas e estimativas do primeiro  
autovalor**

Dissertação de Mestrado

Patrícia Kruse Klaser

Porto Alegre, 24 de agosto de 2010

Dissertação submetida por Patrícia Kruse Klaser <sup>1</sup>, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:  
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll

Banca examinadora:  
Prof. Dr. Jaime Bruck Ripoll (IM - UFRGS, ORIENTADOR)  
Prof. Dr. Artur Oscar Lopes (IM - UFRGS)  
Prof. Dr. Eduardo Henrique de Mattos Brietzke (IM - UFRGS)  
Prof. Dr. Detang Zhou (UFF)

---

<sup>1</sup>Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

## Resumo

Este trabalho trata de estimativas inferiores para o primeiro autovalor de Dirichlet para domínios multiplamente conexos contidos em variedades riemannianas. Essas estimativas consideram o supremo da curvatura seccional da variedade e a curvatura do bordo do domínio. Para obter os resultados, usa-se uma estimativa  $C^0$  para soluções da equação de Poisson.

**Palavras-chave:** Primeiro Autovalor; Domínio Multiplamente Conexo; Curvatura.

### **Abstract**

Lower bounds for the first Dirichlet eigenvalue are presented. We consider multiply connected domains in riemannian manifolds. The estimates are obtained using hypothesis on the supremum of the manifold's sectional curvature and on the domain's boundary curvature.  $C^0$  estimates for solutions of Poissons equation are used to prove the results.

**Key-words:** First Eigenvalue; Multiply Connected Domains; Curvature.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Comparação de Resultados</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Preliminares</b>	<b>10</b>
3.1	Notações . . . . .	10
3.2	Distância a um ponto . . . . .	11
3.2.1	Campos de Jacobi . . . . .	11
3.2.2	Primeiro lema do índice . . . . .	13
3.2.3	Distância a um ponto . . . . .	14
3.3	Distância a uma subvariedade . . . . .	20
3.3.1	$N$ -campos de Jacobi . . . . .	21
3.3.2	Lema do Índice . . . . .	25
3.3.3	Distância a uma subvariedade . . . . .	30
3.4	Princípios do Máximo para funções subharmônicas . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Estimativas para o primeiro autovalor</b>	<b>40</b>
4.1	Estimativa para domínios do tipo anel . . . . .	40
4.1.1	Casos particulares . . . . .	44
4.2	Estimativa para bolas normais . . . . .	49
4.2.1	Casos particulares . . . . .	51
4.3	Estimativa para domínios multiplamente conexos . . . . .	53
4.3.1	Caso particular . . . . .	54
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Este texto trata de um assunto muito antigo, porém ainda muito importante em Matemática: estimativas por baixo para o primeiro autovalor do Problema de Dirichlet para o operador Laplaciano em variedades riemannianas. Mais precisamente, consideramos em uma variedade riemanniana compacta com bordo  $M$ , o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u \text{ em } M \\ u = 0 \text{ em } \partial M. \end{cases}$$

e procuramos o menor número real positivo  $\lambda$  para o qual existe solução  $u$  deste problema. Este número é denotado por  $\lambda_1$  e é chamado primeiro autovalor de Dirichlet para o laplaciano.

Sabe-se que  $\lambda_1$  é dado pelo ínfimo do quociente de Rayleigh.

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\int_M |\text{grad } u|^2}{\int_M |u|^2} \mid u \in C^\infty(M), u|_{\partial M} = 0, u \neq 0 \right\},$$

o que fornece um caminho natural para estimar  $\lambda_1$  por cima. Neste texto usamos um método aparentemente novo para estimar o primeiro autovalor por baixo. Dizemos aqui aparentemente novo, pois não encontramos referências que o utilizem. Fomos motivados pelo teorema seguinte.

**Teorema 1.0.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado. Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  satisfazendo*

$$\Delta u = f \text{ em } \Omega.$$

*Então existe uma constante  $C > 0$ , dependendo apenas de  $\Omega$ , tal que*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |f|.$$

Este é o Teorema 3.7 de [GT] para o caso particular do operador laplaciano. Buscamos generaliza-lo para variedades riemannianas com uma boa constante  $C$ . Tomando  $f = \lambda u$  e o dado no bordo nulo, obtém-se que:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq 0 + C\lambda \sup_{\Omega} |u|,$$

de modo que

$$\lambda \geq \frac{1}{C},$$

pois  $\sup_{\Omega} u > 0$ .

Portanto o que fazemos ao longo do texto é buscar estimativas  $C^0$  para a solução da equação de Poisson em  $M$  e com isso estimamos  $\lambda_1$ . Naturalmente, para isso, precisamos de hipóteses sobre  $M$ , que serão sobre o supremo de sua curvatura seccional e sobre a curvatura de seu bordo. Com esse procedimento, obtemos a estimativa para  $\lambda_1$  do teorema abaixo.

**Definição 1.0.2.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e seja  $N \subset M$ , subvariedade  $n - 1$  dimensional, compacta, conexa, simplesmente conexa e orientável. Fixe uma orientação em  $N$  de modo que para cada  $x \in N$ ,  $\eta(x)$  seja o vetor normal unitário em  $x$ . Seja*

$$\Lambda = \sup_{p \in N} \left\{ \sup \{ \langle \nabla_v v, \eta \rangle \mid v \in T_p N, |v| = 1 \} \right\}$$

e seja  $R > 0$  tal que

$$E : N \times [0, R] \rightarrow M$$

$$E(x, t) = \exp_x t\eta(x),$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Definimos a imagem  $\Omega$  deste difeomorfismo como a vizinhança normal de  $N$  na direção  $\eta$  de largura  $R$  e curvatura  $\Lambda$ .

Para fixar as ideias, imaginamos  $\Omega$  como um anel (não necessariamente circular), de modo que  $N$  não tem bordo, mas o teorema que segue vale em casos mais gerais.

**Teorema 1.0.3.** *Sejam  $\Omega \subset M$  e  $\Lambda$  como na definição acima e suponha  $\Lambda < 0$ . Suponha que  $\sup_{\Omega} K = K$ , onde  $K$  é a curvatura seccional de  $M$ . Além disso, se  $K < 0$ ,  $\Lambda < -\sqrt{-K}$  e, se  $K > 0$ ,  $r_K + R$  é menor que o primeiro zero positivo da função  $\text{sen}(\sqrt{K}t)$ . Então, o primeiro autovalor de  $\Omega$ ,  $\lambda_1$  satisfaz*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\int_0^R \frac{E_K(t)}{S_K^{n-1}(r_K + t)} dt},$$

onde

$$r_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth} \left( \frac{-\Lambda}{\sqrt{-K}} \right), & \text{se } K < 0 \\ \frac{1}{-\Lambda} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arccot} \left( \frac{-\Lambda}{\sqrt{K}} \right) & \text{se } K > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$S_K(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}} & \text{se } K < 0; \\ t & \text{se } K = 0; \\ \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}} & \text{se } K > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

e

$$E_K(t) = \int_0^t S_K^{n-1}(r_K + s) ds. \quad (1.3)$$

Ao longo do texto, nos referiremos ao teorema acima por Teorema Principal. Mostra-se ainda que o resultado acima é válido para  $\Omega$  uma bola normal, conjunto de pontos cuja distância riemanniana ao centro é menor do que um certo raio e no qual a distância ao centro é diferenciável. A estimativa para o primeiro autovalor é obtida fazendo  $r_K$  tender a zero no enunciado acima (veja Teorema 4.2.2). Obtemos também resultados análogos para domínios multiplamente conexos, caso em que a subvariedade  $N$  não precisa ser conexa.

Devido à vasta literatura sobre estimativas do primeiro autovalor, compararemos este resultado com outras estimativas no Capítulo 2. Acreditamos ainda na possibilidade de melhorar o resultado aqui apresentado. Algumas perspectivas encontram-se em considerar no lugar de  $N$ , um subvariedade  $k$ -dimensional com  $k < n$ . Além disso, gostaríamos de tirar a hipótese  $\Lambda < -\sqrt{-K}$ , no caso em que  $K < 0$  e usar alguma comparação com a distância a horo- e hiperesferas de  $\mathbb{H}^n$ .



## Capítulo 2

# Comparação de Resultados

Barroso e Bessa mostraram o seguinte resultado:

**Teorema 2.0.4. (Barroso e Bessa, [BB])** *Seja  $M = [0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}$  uma variedade riemanniana esfericamente simétrica com métrica  $dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(t) > 0$  se  $t \in (0, R]$ . Seja  $B(r) \subset M$  uma bola geodésica de raio  $r$ , então:*

$$\lambda_1(r) \geq \frac{1}{\int_0^r \frac{\int_0^t f^{n-1}(s) ds}{f^{n-1}(t)} dt} = \frac{1}{\int_0^r \frac{V(s)}{S(s)} ds},$$

onde  $V(s)$  é o volume  $n$ -dimensional da bola geodésica de raio  $s$  e  $S(s)$  o volume  $(n-1)$ -dimensional de  $\partial B(s)$ .

Aplicando este teorema a espaços de curvatura seccional constante, obtem-se exatamente a mesma estimativa do Teorema 1.0.3. Em outros casos, torna-se sem sentido comparar os resultados, pois o Teorema Principal tem hipóteses ligadas ao bordo do domínio  $\Omega$ , que não precisa ser uma bola geodésica e ligadas ao supremo da curvatura seccional de  $M$ . Por outro lado, o teorema acima trabalha com a simetria da variedade  $M$ . Sua demonstração é muito bonita e, em nada se relaciona a demonstração deste texto. O resultado de Barroso e Bessa é demonstrado usando um teorema de ponto fixo.

No que segue são enunciados outros teoremas que estimam o primeiro autovalor do laplaciano por baixo. Esperamos ter encontrado as principais referências. Devido a vasta literatura no assunto, constam aqui apenas teoremas cujas hipóteses são comparáveis as do Teorema 1.0.3. Um resultado clássico é a desigualdade de Faber-Kahn.

**Teorema 2.0.5. (Faber-Kahn)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e seja  $B(R)$  a bola de raio  $R$  centrada na origem, cujo volume é o mesmo que o de*

$\Omega$ . Então, o primeiro autovalor de Dirichlet associado a  $\Omega$ ,  $\lambda_1(\Omega)$ , satisfaz:

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B(R)).$$

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [P]. A estimativa de Faber-Kahn tende a não ser boa para domínios não simplesmente conexos. Em vários casos o primeiro autovalor é melhor estimado pelo Teorema 1.0.3. Por exemplo, no caso de um anel circular  $A$  em  $\mathbb{R}^2$  de raio menor  $r$  e largura  $R$ , segue de Faber-Kahn que:

$$\lambda_1(A) \geq \frac{\lambda(B_1)}{2rR + R^2}.$$

$B_1$  é a bola de raio um de  $\mathbb{R}^2$  e  $\lambda_1(B_1)$  é o quadrado do primeiro zero positivo da função de Bessel  $J_0$ . Seu valor é aproximadamente  $(2.4048)^2$ . Por outro lado, o Teorema 1.0.3 dá a estimativa

$$\lambda_1(A) \geq \frac{4}{2rR + R^2 - 2r^2 \ln\left(1 + \frac{R}{r}\right)}. \quad (2.1)$$

É fácil ver que para qualquer  $R$  fixado, quando  $r$  tende a infinito, a estimativa de Faber-Kahn tende a zero, enquanto a estimativa (2.1) tende a  $\frac{2}{R^2}$ . Isso mostra que para  $r$  suficientemente grande, a estimativa do Teorema 1.0.3 é melhor do que a de Faber-Kahn. Este fato também vale em  $\mathbb{R}^n$ , veja Exemplo 4.1.7.

Contudo também é conveniente observar que a nossa estimativa não é optimal, pois é 1 o primeiro autovalor de qualquer anel com  $r = a_m$  e  $r + R = a_{m+1}$ , onde  $a_0 < a_1 < \dots$  são os zeros da função de Bessel  $J_0$ . Isso ocorre porque a equação  $\Delta u = -u$  em  $\mathbb{R}^2$  para  $u$  radialmente simétrica se escreve como a equação de Bessel de índice zero. Assim, como queremos a primeira autofunção de Dirichlet do anel, devemos escolher os raios interno e externo de  $A$  sendo dois zeros consecutivos de  $J_0$ . Desse modo, a função  $J_0$  restrita ao intervalo entre os zeros fixados não troca de sinal no anel e é, portanto, a primeira autofunção de  $A$ . Além disso, verifica-se que  $R \rightarrow \pi$  quando  $m$  tende a infinito. Decorre que, assintoticamente, nosso teorema fornece para esses anéis a estimativa

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{\pi^2}.$$

No Exemplo 4.1.10 analisamos anéis de  $\mathbb{R}^3$ , que tem a propriedade interessante que o primeiro autovalor depende apenas da largura do anel.

A vantagem do Teorema 1.0.3 é que ele dá estimativas para domínios não radialmente simétricos (veja o Exemplo 4.1.6), cujo cálculo do primeiro autovalor costuma ser complicado.

Um outro resultado é a comparação do  $\lambda_1$  de uma bola normal em  $M$  com  $\lambda_1$  de uma bola em um espaço de curvatura constante, com o seguinte teorema, conhecido como teorema de comparação para autovalor de Cheng:

**Teorema 2.0.6. Cheng, [CG]** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Suponha que:*

- (i) *a curvatura seccional de  $M$  é menor ou igual a  $K$ ;*
- (ii) *a bola geodésica  $B(x, r)$  não intercepta o cut-locus de  $x$ .*

Então,

$$\lambda_1(B(x, r)) \geq \lambda_1(B_K(r)),$$

onde  $B_K(r)$  é a bola geodésica de raio  $r$  no espaço de curvatura constante  $K$ .

O resultado acima foi melhorado no ano 2008 em [BM1]. Os autores mostraram que (ii) pode ser substituída por

- (ii')  $\mathcal{H}^{n-1}(B(x, r) \cap \text{Cut}(x)) = 0$ , onde  $\text{Cut}(x)$  é o *cut locus* de  $x$  e  $\mathcal{H}^{n-1}$  refere-se à medida de Hausdorff  $n - 1$  dimensional.

O Teorema 4.2.2, que é o Teorema Principal adaptado para bolas normais fornece uma estimativa explícita para  $\lambda_1$  de uma bola geodésica em  $\mathbb{Q}^n(K)$  em termos do raio da bola e de  $K$ . Ele afirma que esta estimativa também é válida para bolas de mesmo raio em  $M$  com  $\sup_M K = K$ .

Até aqui falamos apenas em estimativas para bolas normais de  $M$ . Essas estimativas podem ser aplicadas a domínios menores contidos em tais bolas. Contudo elas tendem a ser grosseiras, pois não levam em conta a geometria do domínio.

O Teorema Principal leva em conta mais explicitamente a geometria do domínio, uma vez que para estimar  $\lambda_1$ , a curvatura de uma das componentes conexas do bordo do domínio é muito importante. Assim enunciamos também teoremas que não se restringem a bolas geodésicas. O teorema de Barta fornece a seguinte estimativa para o primeiro autovalor.

**Teorema 2.0.7. (Barta, [B])** *Seja  $\Omega \subset M$  (variedade riemanniana compacta) um domínio de classe  $C^\infty$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função  $C^2$ , tal que  $f|_\Omega > 0$  e  $f|_{\partial\Omega} = 0$ . Então,*

$$\inf_D \frac{\Delta f}{f} \leq \lambda_1 \leq \sup_D \frac{\Delta f}{f}.$$

O próximo teorema pode ser visto como uma extensão do teorema de Barta tomando  $X = -\text{grad} \ln f$ .

**Teorema 2.0.8. (Bessa e Montenegro, [BM1])** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana. Então,*

$$\lambda_1 \geq \sup_{W^{1,1}(TM)} \left\{ \inf_M (\operatorname{div} X - |X|^2) \right\}.$$

*Se  $M$  for compacta com bordo suave e não-vazio, ocorre a igualdade acima.*

E um outro teorema envolvendo campos de vetores é o seguinte:

**Teorema 2.0.9. (Bessa e Montenegro, [BM2])** *Seja  $\Omega \subset M$  um domínio cujo fecho é compacto e a fronteira é não vazia. Seja  $\mathcal{X}(\Omega)$  o conjunto de todos os campos de vetores  $X$  com  $\|X\|_\infty < \infty$  e  $\inf \operatorname{div} X > 0$ . Defina*

$$c(\Omega) = \sup_{\mathcal{X}(\Omega)} \left\{ \frac{\inf \operatorname{div} X}{\|X\|_\infty} \right\}.$$

*Então,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{c(\Omega)^2}{4} > 0.$$

Um bom método de aplicar este teorema é considerar o campo  $X = \operatorname{grad} d$ , onde  $d$  é a distância a algum subconjunto conveniente de  $M$ . Para uma comparação com (1.0.3), tomamos a distância a  $N$ . O teorema acima fica sem aplicação, mas faz sentido se não ocorrer  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} d) > 0$ . Assim, para  $X = \operatorname{grad} d$ , obtém-se

$$\lambda_1 \geq \frac{c(\Omega)^2}{4} = \left( \frac{(n-1) C_K(R)}{2 S_K(R)} \right)^2.$$

No texto é feita essa estimativa para o laplaciano da função distância, ela está em nos teoremas (3.3.16) e nos dois próximos.

Ao contrário do resultado deste texto, as estimativas acima não são explícitas. Há ainda neste grupo, o Teorema de Cheeger, que fornece uma estimativa para  $\lambda_1$  dependendo de uma constante complicada de computar. Por isso, excluiu-se este resultado do texto. Ao procurar estimativas explícitas para  $\lambda_1$ , encontramos, entre outros, o seguinte teorema.

**Teorema 2.0.10. [Y]** *Seja  $M$  variedade riemanniana compacta com bordo e com  $\operatorname{Ric} M \geq (n-1)K \geq 0$ . Suponha que a curvatura média com respeito ao normal exterior de  $\partial M$  é não negativa. Então o primeiro autovalor de Dirichlet de  $M$  satisfaz*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{1}{4} \left\{ (n-1)K + \frac{\pi^2}{r^2} \right\},$$

*onde  $r$  é o raio da menor bola que pode ser posta dentro de  $M$ .*

Esses resultados relacionam-se a uma característica geométrica de  $M$  diferente da do Teorema Principal, uma limitação inferior para sua curvatura de Ricci. Porém, eles consideram também a geometria de  $\partial\Omega$ , por essa razão constam aqui. Ao longo do texto são feitas aplicações do Teorema Principal a casos particulares. A primeira delas é para o caso em que  $\Omega$  é a região entre dois elipsoides de  $\mathbb{R}^3$ , em (4.1.6). A outra considera, ainda em  $\mathbb{R}^n$ , anéis e fornece estimativas interessantes quando o raio do anel tende a infinito.

Outras comparações com resultados já conhecidos são feitas nas subseções intituladas "Casos particulares" do Capítulo 4.

# Capítulo 3

## Preliminares

Este capítulo foi escrito com a finalidade de fixar notações e apresentar os principais resultados a serem utilizados nas demonstrações ao longo do texto. Na primeira seção, fixa-se a notação. A segunda trata das preliminares para obter estimativas para a função distância a um ponto. Ela é uma espécie de motivação para a terceira seção, onde são obtidas estimativas para a função distância a uma subvariedade. Para finalizar, apresentamos, na Seção 4, o princípio do máximo para funções subharmônicas.

### 3.1 Notações

Gostaria aqui de fixar notações e apresentar os principais resultados a serem utilizados nas demonstrações ao longo do texto. Consideraremos  $M$  uma variedade riemanniana  $n$  dimensional com conexão riemanniana  $\nabla$ . O tensor de curvatura em  $M$  é dado por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

e a curvatura seccional de  $M$  associada a um plano contido em  $T_p M$  gerado pelos vetores  $u, v$  é:

$$K_p(u, v) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{|u|^2 |v|^2 - \langle u, v \rangle^2}.$$

Além disso, se  $N \subset M$  é uma subvariedade e  $p$  é um ponto de  $N$ , dado  $\eta \in (T_p N)^\perp$ , a segunda forma fundamental em  $p$ , associada ao vetor  $\eta$  é a aplicação:

$$S_\eta : T_p N \times T_p N \rightarrow T_p N, \text{ dada por}$$
$$S_\eta(u) = -\nabla_u \eta.$$

Tem-se que esta aplicação está bem definida e é uma forma bilinear simétrica. Para mais detalhes, sugere-se ao leitor [dC].

Denotaremos por  $\mathbb{Q}^n(K)$  as variedades riemannianas de curvatura seccional constante  $K$ . São elas:

- A esfera  $\mathbb{S}^n$  do  $\mathbb{R}^{n+1}$  de raio  $R = \frac{1}{K}$  se  $K > 0$ ;
- O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  se  $K = 0$ ;
- O espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n(K)$  se  $K < 0$ .

Suporemos alguma familiaridade do leitor com tais espaços e com resultados básicos a eles relacionados, assim como com os conceitos de derivada covariante, exponencial em variedades, geodésicas, bolas normais, segunda forma fundamental, curvatura média e curvaturas principais de subvariedades, gradiente de funções em variedades riemannianas.

Na próxima seção são enunciados alguns resultados úteis sobre campos de Jacobi. Eles não serão demonstrados, pois são bastante clássicos, mas constam neste texto por duas razões: serão muito utilizados e alguns deles são generalizados.

## 3.2 Distância a um ponto

### 3.2.1 Campos de Jacobi

**Definição 3.2.1.** *Um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\gamma$  é um campo de vetores que satisfaz, ao longo de  $\gamma$ :*

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0,$$

onde  $J'' = \nabla_{\gamma'} \nabla_{\gamma'} J$ .

A teoria de equações diferenciais ordinárias garante a existência e unicidade dos campos de Jacobi dadas as condições iniciais  $J(0)$  e  $J'(0)$ .

Os campos de Jacobi estão associados a variações por geodésicas de uma geodésica  $\gamma$ . Mais precisamente, se  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  é uma geodésica e  $J(t)$  é um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , existe uma superfície parametrizada  $f(s, t)$ , onde  $f(t, 0) = \gamma(t)$ , as curvas  $t \mapsto f(t, s)$  são geodésicas e  $J(t) = f_s(t, 0)$ . No caso em que  $J(0) = 0$ ,

$$f(s, t) = \exp_p t\alpha(s),$$

onde  $p = \gamma(0)$ ,  $\alpha$  é uma curva em  $T_p M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T_p M, \\ \alpha(0) &= \gamma'(0), \quad \alpha'(0) = J'(0). \end{aligned}$$

### Campos de Jacobi em $\mathbb{Q}^n(K)$

Seja  $\gamma$  uma geodésica em  $\mathbb{Q}^n(K)$ . Os campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$  são dados por

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t)U(t) + \cosh(\sqrt{-K}t)V(t) & \text{se } K < 0 \\ tU(t) + V(t) & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t)U(t) + \cos(\sqrt{K}t)V(t) & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

onde  $U$  e  $V$  são campos paralelos e ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = V(0)$ ,  $J'(0) = U(0)$ . É fácil ver que esses campos são de Jacobi e, de fato, eles são todos os campos de Jacobi em  $\mathbb{Q}^n(K)$ , pois formam um espaço vetorial de dimensão  $2n$ , assim como o espaço dos campo de Jacobi.

### Pontos conjugados e pontos críticos da exponencial

**Definição 3.2.2.** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica. O ponto  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, b]$  é dito conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$  se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  não identicamente nulo com  $J(0) = 0$  e  $J(t_0) = 0$ .*

**Teorema 3.2.3.** *Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica com  $\gamma(0) = p$ . O ponto  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, b]$  é conjugado de  $p$  ao longo de  $\gamma$  se, e somente se,  $v_0 = t_0\gamma'(0)$  é um ponto crítico de  $\exp_p$ .*

Este teorema é a Proposição 3.5 do Capítulo 5 de [dC]. Nesta referência, encontra-se sua demonstração.

Como consequência deste teorema, tem-se que um ponto é o centro de uma bola normal de raio  $r$  para qualquer  $r \leq R$ , onde  $R$  é a distância de  $p$  ao seu ponto conjugado mais próximo.

**Corolário 3.2.4.** *Em  $\mathbb{Q}^n(K)$  qualquer ponto é o centro de uma bola normal de raio tão grande quanto se queria se  $K \leq 0$  e de raio no máximo  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$  se  $K > 0$ .*

Os campos de Jacobi que se anulam em  $\gamma(0)$  em  $\mathbb{Q}^n(K)$  são dados por

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t)U(t) & \text{se } K < 0 \\ tU(t) & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t)U(t) & \text{se } K > 0 \end{cases},$$



onde  $U$  é um campo paralelo longo de  $\gamma$  com  $J'(0) = U(0)$ . O corolário decorre do fato que as funções  $t$ ,  $\sinh(\sqrt{-K}t)$  não se anulam para  $t > 0$ , enquanto  $\sin(\sqrt{K}t)$  tem seu primeiro zero positivo em  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ .

### 3.2.2 Primeiro lema do índice

Aqui enunciamos o lema do índice para campos de Jacobi que se anulam na origem. Sua demonstração pode ser encontrada no Capítulo 10 de [dC]. Mais adiante generalizaremos este lema para um tipo de campo de Jacobi que não necessariamente se anula na origem.

**Definição 3.2.5.** *Seja  $M$  variedade riemanniana e  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica. Dados  $V, W$  campos de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma$ , definimos*

$$I_b(V, W) = \int_0^b \langle V', W' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W \rangle dt,$$

a forma índice para os campos  $V$  e  $W$ .

**Observação 3.2.6.** *A forma índice é uma forma bilinear simétrica no conjunto dos campos de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma$ . Não entraremos em detalhes aqui, mas ela está associada a segunda derivada da energia de curvas que ligam  $\gamma(0)$  a  $\gamma(b)$ .*

O lema do índice afirma que os campos de Jacobi minimizam a forma índice para geodésicas que não tem pontos conjugados.

**Lema 3.2.7.** *(do índice) Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  uma geodésica sem pontos conjugados a  $\gamma(0)$  no intervalo  $(0, b]$ . Sejam  $V$  e  $J$  campos de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma$ , tais que  $J$  é um campo de Jacobi. Suponha também que:*

- i)  $\langle V, \gamma' \rangle = \langle J, \gamma' \rangle = 0$ ;
- ii)  $V(0) = J(0) = 0$ ;
- iii)  $V(b) = J(b)$ .

Então  $I_b(J, J) \leq I_b(V, V)$  e a igualdade ocorre se, e somente se,  $V \equiv J$ .

### 3.2.3 Distância a um ponto

**Lema 3.2.8.** Dado  $p \in M$ , seja  $B$  uma bola normal centrada em  $p$ . Considere

$$d: B \rightarrow \mathbb{R},$$

$$d(x) = \text{distância de } x \text{ a } p = |\exp_p^{-1} x|.$$

Temos que:

- (i)  $d$  é diferenciável em  $B \setminus \{p\}$ ;
- (ii)  $d^2$  é diferenciável em  $B$ ;
- (iii)  $|\text{grad } d| = 1$  e  $\text{grad } d$  é ortogonal às esferas geodésicas centradas em  $p$  e aponta para fora;
- (iv)  $\Delta d^2(p) = 2n$ .

Para a prova de (iv), usaremos o seguinte lema, cuja demonstração é imediata.

**Lema 3.2.9.** Seja  $M$  variedade riemannina. Sejam  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\alpha: I \rightarrow M$  uma curva diferenciável e  $E: M \rightarrow TM$  um campo de vetores de classe  $C^\infty$ . Então,

- (i)  $E(E(f)) = \langle \nabla_E \text{grad } f, E \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_E E \rangle$ ;
- (ii)  $\frac{d^2(f \circ \alpha)}{dt^2} = \langle \nabla_{\alpha'} \text{grad } f, \alpha' \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_{\alpha'} \alpha' \rangle$ .

**Demonstração:**

- (i) e (ii) Como  $d(x) = |\exp_p^{-1} x| = \sqrt{\langle \exp_p^{-1} x, \exp_p^{-1} x \rangle}$  e  $\exp$  é um difeomorfismo no domínio de  $d$ . Portanto  $d$  é diferenciável em

$$B \setminus \{x \in B | d(x) = 0\} = B \setminus \{p\}$$

e  $d^2$  é diferenciável em  $B$ .

- (iii) Como as esferas geodésicas são curvas de nível da função distância, vale a ortogonalidade. Dado  $x \in B$ , com  $d(x) = l$ , seja

$$\gamma: [0, l] \rightarrow M,$$

$$\gamma(0) = p, \gamma(l) = x$$

uma geodésica parametrizada por comprimento de arco. Então  $d(\gamma(t)) = t$ , pois  $B$  é bola normal e, derivando, tem-se que:

$$\langle \text{grad } d(\gamma(l)), \gamma'(l) \rangle = 1.$$

Portanto,  $\text{grad } d(x) = \gamma'(l)$  tem norma 1.

(iv) Como  $d^2$  é diferenciável em  $B$ , podemos calcular  $\Delta d^2(p)$ . Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico em  $p$ , então

$$\Delta d^2(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(d^2))(p).$$

Como  $\text{grad } d^2(p) = 0$ , pois  $p$  é ponto de mínimo de  $d^2$ , temos pelo Lema 3.2.9, que

$$\Delta d^2(p) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(v \circ \alpha_i)}{dt^2} \Big|_{t=0},$$

onde cada  $\alpha_i$  é uma curva diferenciável com  $\alpha_i(0) = p$ ,  $\alpha_i'(0) = E_i(p)$ . Sejam

$$\alpha_i(t) = \exp_p tE_i(p),$$

que satisfazem as condições acima e  $|\alpha_i'(t)| = 1 \ \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Temos que

$$d^2(\alpha_i(t)) = |\exp_p^{-1}(\alpha_i(t))|^2 = |\exp_p^{-1}(\exp_p tE_i(p))|^2 = t^2.$$

Daí

$$\Delta d^2(p) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(v \circ \alpha_i)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(t^2)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n 2 = 2n.$$

O importante na nossa estimativa será o laplaciano da distância. Note que, para  $E_1, \dots, E_n$  campos ortonormais numa vizinhança de  $q \in B \setminus \{p\}$ , com  $E_n = \text{grad } d$ , que é o vetor ortonormal as esferas geodésicas, tem-se

$$\begin{aligned} \Delta d(q) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \text{grad } d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i}(-\eta), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle S_\eta(E_i), E_i \rangle = (n-1)H_{S_{d(q)}(p)}. \end{aligned}$$

é a curvatura média não normalizada da esfera geodésica de centro  $p$ , raio  $d(q)$  e orientada com vetor normal apontando para dentro.

Estimar o laplaciano da função distância é uma aplicação do Teorema de Comparação do Hessiano para a função distância, que será enunciado a seguir. A referência aqui é [SY].

**Definição 3.2.10.** Dado  $q \in M$  e  $f \in C^2(M)$ , o hessiano da função  $f$  em  $q$  é definido por

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)_q &: T_q M \times T_q M \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Hess}(f)_q(u, v) &= \langle \nabla_u \text{grad } f, v \rangle. \end{aligned}$$

**Teorema 3.2.11.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  variedades riemannianas de dimensão  $n$ . Sejam  $p_1 \in M_1$ ,  $p_2 \in M_2$  e  $B_i$  bolas normais de centro  $p_i$  e de mesmo raio  $R$  para  $i = 1, 2$ . Considere ainda as funções distância aos pontos  $p_i$ , denotadas por  $d_i$ . Seja  $b < R$  e sejam*

$$\gamma_i : [0, b] \rightarrow M_i$$

*geodésicas parametrizadas por comprimento de arco com  $\gamma_i(0) = p_i$ . Suponha que as curvaturas seccionais  $K_i$  de  $M_i$  satisfaçam:*

$$K_1(u, \gamma'_1) \leq K_2(v, \gamma'_2)$$

$$\forall t \in [0, b], \forall u \in \{\gamma'_1\}^\perp, |u| = 1, \forall v \in \{\gamma'_2\}^\perp, |v| = 1.$$

*Então,*

$$\begin{aligned} \text{Hess}(d_1)_{\gamma_1(b)}(U, U) &\geq \text{Hess}(d_2)_{\gamma_2(b)}(V, V) \\ \forall U \in \{\gamma'_1(b)\}^\perp, |U| = 1, \forall V \in \{\gamma'_2(b)\}^\perp, |V| = 1. \end{aligned}$$

Para demonstrar este teorema, faremos uso da seguinte proposição:

**Proposição 3.2.12.** *Dado  $q \in B \setminus \{p\}$ , seja  $b = d(q)$ . Seja  $\gamma : [0, b] \rightarrow B$  geodésica ligando  $p$  a  $q$ ,  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(b) = q$ . Seja  $F \in T_q M \cap \{\gamma'(b)\}^\perp$ . Considere  $Y$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com  $Y(0) = 0$  e  $Y(b) = F$ . Então,*

$$\text{Hess}(d)_q(F, F) = \langle \nabla_F \text{grad } d, F \rangle = I(Y, Y),$$

*onde  $I$  é a forma índice para campos de Jacobi que se anulam na origem.*

**Demonstração:**

$$\text{Hess}(d)_{\gamma(t)}(F, F) = \langle \nabla_F \text{grad } d, F \rangle = \langle \nabla_Y \gamma', Y \rangle = \langle \nabla'_\gamma Y, Y \rangle,$$

pois

$$\nabla_Y \gamma' = \nabla_{\gamma'} Y + [Y, \gamma']$$

e sendo  $Y$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , o colchete

$$[Y, \gamma'] = 0.$$

Assim, escrevendo  $\nabla_{\gamma'} Y = Y'$ ,

$$\begin{aligned} \langle Y', Y \rangle &= \int_0^b \langle Y', Y' \rangle(t) dt = \int_0^b \langle Y', Y' \rangle(t) + \langle Y'', Y \rangle(t) dt \\ &= \int_0^b \langle Y', Y' \rangle(t) - \langle R(\gamma', Y)\gamma', Y \rangle(t) dt = I_b(Y, Y). \end{aligned}$$

**Demonstração do teorema:**

Dados  $U \in \{\gamma_1'(b)\}^\perp$ ,  $|U| = 1$ ,  $V \in \{\gamma_2'(b)\}^\perp$ ,  $|V| = 1$ , sejam  $J_i$  campos de Jacobi ao longo de  $\gamma_i$  com

$$J_i(0) = 0, \langle J_i, \gamma_i' \rangle = 0, J_1(b) = U, J_2(b) = V.$$

A existência de tais campos de Jacobi é garantida por teoremas sobre campos de Jacobi (Cap. 5 de [dC]). Pela proposição anterior,

$$\text{Hess}(d_1)_{\gamma_1(b)}(U, U) = I(J_1, J_1)$$

e o análogo vale para  $d_2$ .

Sejam  $\{E_1^i, \dots, E_n^i\}$  campos de vetores paralelos e ortonormais ao longo de  $\gamma_i$ , com

$$E_n^i = \gamma_i', E_1^1(\gamma_1(b)) = U \text{ e } E_1^2(\gamma_2(b)) = V,$$

que existem porque basta estender paralelamente uma base ortonormal de  $T_{\gamma_i(b)}M_i$  contendo  $\gamma_i'(b)$  ao longo de  $\gamma_i$ .

Seja  $\Phi$  uma função que associa a cada campo de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma_1$  um campo de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma_2$ .

$\Phi$  é definida do seguinte modo: cada campo  $V$  ao longo de  $\gamma_1$  se escreve de maneira única como

$$V(t) = \sum_{j=1}^n g_j(t) E_j^1(t).$$

Assim

$$\Phi V(t) = \sum_{j=1}^n g_j(t) E_j^2(t)$$

define bem a função  $\Phi$ . Além disso,  $\Phi$  satisfaz as seguintes propriedades de fácil verificação:

- i)  $\Phi \gamma_1' = \gamma_2'$ ;
- ii)  $\langle U, V \rangle = \langle \Phi U, \Phi V \rangle$ ;
- iii)  $(\Phi V)' = \Phi(V')$ .

Portanto, usando a hipótese sobre a curvatura,

$$\begin{aligned}
I_b(J_1, J_1) &= \int_0^b \langle J_1', J_1' \rangle - \langle R(\gamma_1', J_1)\gamma_1', J_1 \rangle(t) dt \\
&= \int_0^b \langle J_1', J_1' \rangle - |J_1|^2 \langle R(\gamma_1', \frac{J_1}{|J_1|})\gamma_1', \frac{J_1}{|J_1|} \rangle(t) dt \\
&= \int_0^b \langle J_1', J_1' \rangle - |J_1|^2 K_{\gamma_1(t)}(\gamma_1', J_1) dt \\
&\geq \int_0^b \langle (\Phi J_1)', (\Phi J_1)' \rangle - |\Phi(J_1)|^2 K_{\gamma_2(t)}(\gamma_2', \Phi(J_1)) dt \\
&= \int_0^b \langle (\Phi J_1)', (\Phi J_1)' \rangle - \langle R(\gamma_2', \Phi J_1)\gamma_2', \Phi J_1 \rangle(t) dt \\
&= I_b(\Phi J_1, \Phi J_1).
\end{aligned}$$

Note que  $\Phi J_1$  é um campo de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma_2$  com:

- i)  $\langle \Phi J_1, \gamma_2' \rangle = \langle J_1, \gamma_1' \rangle = 0$ .
- ii)  $\Phi(J_1(0)) = 0$ , pois  $J_1(0) = 0$ .
- iii)  $\Phi J_1(b) = \Phi E_1^1(b) = E_1^2(b) = J_2(b)$ .

Assim, pelo Lema do índice para campos de Jacobi que se anulam na origem (3.2.7), temos

$$I_b(\Phi J_1, \Phi J_1) \geq I_b(J_2, J_2)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Hess}(d_1)_{\gamma_1(b)}(U, U) &= I_b(J_1, J_1) \geq I_b(\Phi J_1, \Phi J_1) \\
&\geq I_b(J_2, J_2) \geq \text{Hess}(d_2)_{\gamma_2(b)}(V, V),
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema.

O corolário que segue é um caso particular do Teorema de Comparação do Hessiano.

**Corolário 3.2.13.** *Considere a função distância ao ponto  $p$  definida em uma bola normal  $B$  de centro  $p$  em uma variedade riemanniana  $M$  (ou em qualquer domínio onde  $d$  for difeomorfismo sobre sua imagem). Suponha que a curvatura seccional de  $M$  associada a planos que contem o vetor normal às esferas geodésicas de centro  $p$  seja limitada superiormente por  $K$ . Suponha ainda que se  $K > 0$ , o raio geodésico  $R$  de  $B$  é  $R \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ . Então, se  $q \in B$ ,*

$$\Delta d(q) \geq (n-1) \frac{C_K(d(q))}{S_K(d(q))},$$

$\forall q \in B \setminus \{p\}$ , onde

$$S_K(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}}, & \text{se } K < 0 \\ t, & \text{se } K = 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}}, & \text{se } K > 0. \end{cases}$$

e  $C_K(t) = \frac{d}{dt}S_K(t)$ .

**Observação 3.2.14.** *Vimos no Corolário 3.2.4 que as hipóteses sobre  $R$  e  $K$  garantem que, em  $\mathbb{Q}^n(K)$ ,  $B$  é uma bola normal. É uma consequência do teorema de Rauch, que na variedade  $M$ , cuja curvatura seccional é limitada superiormente por  $K$ , a bola  $B$  também é normal. Mais especificamente, essa consequência diz que "pontos conjugados ocorrem antes em espaços de curvatura maior." Para mais detalhes, sugerimos o Capítulo 10 de [dC].*

**Demonstração:**

Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  campos ortonormais numa vizinhança de  $q \in B \setminus \{p\}$ , com  $E_n = \text{grad } d$ . Logo

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \text{grad } d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} (\text{grad } d), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Hess}(d)_q(E_i, E_i).$$

Seja  $d_K$  a função distância a  $p'$  em  $\mathbb{Q}^n(K)$ . Pelo Teorema de comparação do hessiano,

$$\text{Hess}(d)_q(E_i, E_i) \geq \text{Hess}(d_K)_{q'}(E'_i, E'_i),$$

onde  $q'$  é tal que  $d_K(q') = d(q)$ . A existência de tais  $p'$  e  $q'$  é garantida pelo Corolário 3.2.4. Precisamos então estimar  $\text{Hess}(d_K)_{q'}(E'_i, E'_i)$ .

Pela Proposição 3.2.12,

$$\text{Hess}(d_K)_{q'}(E'_i, E'_i) = I_b(J, J),$$

onde  $J$  é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica  $\tau$  em  $\mathbb{Q}^n(K)$  que liga  $p'$  a  $q'$  com com

$$J(0) = 0, \quad \langle J, \tau' \rangle = 0 \text{ e } J(b) = E'_i.$$

Seja  $J$  esse campo. Então

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t)U(t) & \text{se } K < 0 \\ tU(t) & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t)U(t) & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

onde  $U$  é um campo paralelo ao longo de  $\tau$  com  $S_K(b)U(b) = \Phi J(b)$ . Tomando

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\sinh(\sqrt{-K}t)}{\sinh(\sqrt{-K}b)} U(t) & \text{se } K < 0 \\ \frac{t}{b} U(t) & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sin(\sqrt{K}t)}{\sin(\sqrt{K}b)} U(t) & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

podemos supor  $U$  unitário. Calculando  $I_b(J, J)$  tem-se

$$I_b(J, J) = \frac{C_K(d(q))}{S_K(d(q))},$$

que somando para  $i$  de 1 até  $n - 1$  resulta na desigualdade do enunciado.

**Proposição 3.2.15.** *Seja  $S \subset \mathbb{Q}^n(K)$  uma esfera geodésica de centro  $p$  e raio  $R$ . As curvaturas principais de  $S$  associadas ao vetor normal que aponta para  $p$  em qualquer ponto  $x$  e em qualquer direção de  $T_x S$  são dadas por*

$$\frac{C_K(R)}{S_K(R)}.$$

As curvaturas principais de  $S$  podem ser calculadas tomando um vetor unitário  $E \in T_x S$  e calculando, como observou-se ao longo desta seção,

$$\langle \nabla_E(-\text{grad } d), E \rangle = I_R(Y, Y),$$

onde  $Y$  é um campo de Jacobi ao longo da geodésica que liga  $p$  a  $x$ , que se anula em  $p$  e que tem  $Y(b) = E$ . Deste modo, a curvatura principal na direção de  $E$  é dada por:

$$I_R(Y, Y) = \frac{C_K(R)}{S_K(R)},$$

que não depende de  $E$ .

### 3.3 Distância a uma subvariedade

Aqui começamos a generalizar os resultados da seção anterior. Mostramos um segundo lema do índice que garante que um tipo especial de campos de Jacobi, definido a seguir, minimiza a forma índice. Por isso, ele será útil na estimativa do laplaciano da função distância. A referência para este resultado é [BC].



### 3.3.1 $N$ -campos de Jacobi

**Definição 3.3.1.** *Sejam  $N$  e  $P$  subvariedades de  $M$  e  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$  um segmento geodésico perpendicular a  $N$  e  $P$  em seus extremos  $\gamma(0) \in N$  e  $\gamma(b) \in P$ . Seja*

$$\mathcal{L} = \{V \mid V \text{ é campo de vetores } C^\infty \text{ por partes ao longo de } \gamma \text{ com} \\ V(0) \in T_{\gamma(0)}N \text{ e } V(b) \in T_{\gamma(b)}P\}.$$

Definimos a forma índice,  $I(V, W)$ , ao longo de  $\gamma$  para  $V, W \in \mathcal{L}$  por

$$I(V, W) = \int_0^b \langle V', W' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W \rangle(u) du - \langle S_{\gamma'(0)}V(0), W(0) \rangle \\ + \langle S_{\gamma'(b)}V(b), W(b) \rangle.$$

**Observação 3.3.2.** *Temos que  $I$  é uma forma bilinear simétrica em  $\mathcal{L}$ . Além disso,  $I$  pode ser reescrita como:*

$$I(V, W) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle V'(u_i^-) - V'(u_i^+), W(u_i) \rangle - \int_0^b \langle V'' + R(\gamma', V)\gamma', W \rangle(u) du \\ - \langle S_{\gamma'(0)}V(0) + V'(0), W(0) \rangle + \langle S_{\gamma'(b)}V(b) + V'(b), W(b) \rangle,$$

onde  $\{u_1, \dots, u_n\} \subset [0, b]$  são os pontos nos quais  $V$  não é  $C^\infty$ .

A observação decorre da igualdade

$$\langle V', W' \rangle = \langle V', W \rangle' - \langle V'', W \rangle$$

nos pontos onde  $V$  é diferenciável. Ela motiva a seguinte definição:

**Definição 3.3.3.** ( *$N$ -campo de Jacobi*) *Um campo de Jacobi  $V$  ao longo da geodésica  $\gamma$  é chamado  $N$ -campo de Jacobi se*

- i)  $\langle V, \gamma' \rangle \equiv 0$ ;
- ii)  $V(0) \in T_{\gamma(0)}N$
- iii)  $S_{\gamma'(0)}V(0) + V'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^\perp$ .

Denotaremos por  $S_N$  o conjunto dos  $N$ -campos de Jacobi ao longo de  $\gamma$ .

Como consequência da observação acima tem-se que  $S_N \cap S_P = \text{Ker}I$ .

**Exemplo 3.3.4.** *N-Campos de Jacobi associados às esferas geodésicas nos espaços de curvatura constante:*

Considere  $S_K(\rho) \subset \mathbb{Q}^n(K)$  uma esfera geodésica de raio  $\rho$ . Como visto na proposição 3.2.15, todas as curvaturas principais de  $S_K(\rho)$  são dadas por

$$\frac{C_K(\rho)}{S_K(\rho)} =: \alpha.$$

Seja  $\gamma_K : [0, b] \rightarrow \mathbb{Q}^n(K)$  uma geodésica partindo perpendicularmente de  $S_K(\rho)$ . Um  $S_K(\rho)$ -campo de Jacobi ao longo de  $\gamma_K$  é dado por

$$J(t) = \begin{cases} (\cosh(\sqrt{-K}t) - \frac{\alpha}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t))V(t) & \text{se } K < 0 \\ (1 - \alpha t)V(t) & \text{em } \mathbb{R}^n \\ (\cos(\sqrt{K}t) - \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t))V(t) & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

onde  $V$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $V(0) \in T_{\gamma(0)}N$ .

As condições i), ii) e iii) da definição se verificam facilmente para os três casos. Por isso, os campos acima são  $S_K(\rho)$ -campos de Jacobi. O fato de eles serem todos os campos deste tipo é uma consequência do próximo teorema.

**Teorema 3.3.5.**  *$S_N$  é um espaço vetorial de dimensão  $n - 1$ .*

**Demonstração:**

Claramente  $S_N$  é espaço vetorial.

Seja  $m = \dim N$  e seja  $\{e_1, \dots, e_m\}$  base ortonormal de  $T_{\gamma(0)}N$ . Então, por (iii) da Definição 3.3.3, se  $V$  é  $N$ -campo de Jacobi,

$$\langle S_{\gamma'(0)}V(0) + V'(0), e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (3.1)$$

Sejam

$$V_1 = \{V \in S_N | V(0) = 0\}$$

e

$$V_2 = \{V \in S_N | V'(0) \in T_{\gamma(0)}N\}.$$

Afirmo que  $S_N = V_1 \oplus V_2$ .

É claro que  $V_1 \oplus V_2 \subset S_N$ .

A soma é direta, pois

$$\begin{aligned} V \in V_1 \cap V_2 &\Rightarrow V(0) = 0 \stackrel{(3.1)}{\Rightarrow} \langle V'(0), e_i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ &\Rightarrow V'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^\perp \Rightarrow V'(0) \in (T_{\gamma(0)}N)^\perp \cap T_{\gamma(0)}N, \text{ pois } V \in V_2 \Rightarrow V \equiv 0. \end{aligned}$$

Falta verificar que  $S_N \subset V_1 \oplus V_2$  :

Dado  $V \in S_N$ , seja  $W$  o campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com

$$W(0) = V(0),$$

$$W'(0) = - \sum_{i=1}^m \langle S_{\gamma'(0)} V(0), e_i \rangle e_i \in T_{\gamma(0)} N.$$

Temos que  $W$  é  $N$ -campo de Jacobi e, portanto,  $W \in V_2$ . Por outro lado,  $V - W \in S_N$ , já que  $S_N$  é espaço vetorial. Além disso,  $(V - W)(0) = 0$ , logo  $V - W \in V_1$ . Assim

$$V = (V - W) + W \in V_1 \oplus V_2.$$

Note que  $\dim V_1 = n - m - 1$ , pois

$$V \in V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} V \text{ é de Jacobi ao longo de } \gamma, \\ V(0) = 0, \\ V'(0) \in (T_{\gamma(0)} N)^\perp \cap \{\gamma'(0)\}^\perp \end{cases}$$

e  $\dim (T_{\gamma(0)} N)^\perp \cap \{\gamma'(0)\}^\perp = n - m - 1$ .

Além disso,  $\dim V_2 = m$ , pois

$$V \in V_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V \text{ é de Jacobi ao longo de } \gamma, \\ V(0) \in T_{\gamma(0)} N \\ V'(0) = - \sum_{i=1}^m \langle S_{\gamma'(0)} V(0), e_i \rangle e_i \text{ (que fica determinado por } V(0)) \end{cases}$$

e  $\dim T_{\gamma(0)} N = m$ .

Portanto está mostrado que

$$\dim S_N = n - m - 1 + m = n - 1.$$

### Pontos Focais

O conceito de ponto focal é uma generalização do conceito de ponto conjugado.

**Definição 3.3.6.** *Seja  $N$  subvariedade de  $M$  e seja  $\gamma$  uma geodésica perpendicular a  $N$  em  $\gamma(0)$ . Dizemos que  $\gamma(b)$  é um ponto focal de  $N$ , se existe um  $N$ -campo de Jacobi não nulo que se anula em  $\gamma(b)$ .*

**Lema 3.3.7.** *Seja  $N$  subvariedade de  $M$  e seja  $\gamma$  uma geodésica perpendicular a  $N$ , tal que  $N$  não tem pontos focais ao longo de  $\gamma$ . Seja*

$$\{Y_1(t), \dots, Y_{n-1}(t)\}$$

*uma base de  $S_N$ . Então dado  $t_0 \in (0, b]$ ,*

$$\{Y_i(t_0)\}_{i=1}^{n-1}$$

*é base de  $T_\gamma(t_0)M \cap \gamma'(t_0)^\perp$ .*

*Além disso, se  $\{Y_1, \dots, Y_{n-m-1}\}$  é base de  $V_1$  e  $\{Y_{n-m}, \dots, Y_{n-1}\}$  é base de  $V_2$  ( $V_1$  e  $V_2$  definidos na demonstração do Teorema 3.3.5),  $\{Y_{n-m}(0), \dots, Y_{n-1}(0)\}$  é base de  $T_{\gamma(0)}N$ .*

**Demonstração:**

Dado  $t_0 \in (0, b]$ , basta mostrar que  $Y_i(t_0)_{i=1}^{n-1}$  é um conjunto linearmente independente (l.i.). Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  tais que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i(t_0) = 0.$$

Considere

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i(t).$$

Temos que  $Y \in S_N$  e  $Y(t_0) = 0$ . Como  $N$  não tem pontos focais ao longo de  $\gamma$ ,  $Y|_{[0, t_0]} \equiv 0$  e os  $\alpha_i$ s são todos nulos.

Para ver que  $\{Y_{n-m}(0), \dots, Y_{n-1}(0)\}$  é base de  $T_{\gamma(0)}N$ , considere

$$\phi : T_{\gamma(0)}N \rightarrow V_2,$$

$\phi(V)$  é o  $N$ -campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com

$$\phi(V)(0) = V \text{ e } \phi(V)'(0) = -S_{\gamma'(0)}V \in T_{\gamma(0)}N.$$

Temos que  $\phi$  é um isomorfismo de espaços vetoriais, portanto leva base em base.

**Corolário 3.3.8.** *Se  $N$  não tem pontos focais ao longo de  $\gamma$ , dado  $W \in T_{\gamma(b)}M \cap \gamma'(b)^\perp$ , existe e é único  $Y \in S_N$ , tal que  $Y(b) = W$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  tais que

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i(b).$$

Tomado

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i Y_i(t),$$

temos a existência. Se  $\tilde{Y}$  é outro campo nessas condições, a diferença  $Y - \tilde{Y} \in S_N$  será nula, pois  $N$  não tem pontos focais ao longo de  $\gamma$ .

### 3.3.2 Lema do Índice

O teorema desta seção generaliza o lema do índice, isto é, ele afirma que os  $N$ -campos de Jacobi minimizam a forma índice. Para a demonstração do próximo teorema, será utilizado o lema a seguir.

**Lema 3.3.9.** *Se  $Y$  e  $Z$  são  $N$ -campos de Jacobi, então  $\langle Y, Z' \rangle = \langle Y', Z \rangle$ .*

**Demonstração:**

A equação de Jacobi e a simetria do tensor de curvatura  $R$  garantem que

$$(\langle Y, Z' \rangle - \langle Y', Z \rangle)' = 0.$$

Mais precisamente,

$$\begin{aligned} (\langle Y, Z' \rangle - \langle Y', Z \rangle)' &= \langle Y', Z' \rangle + \langle Y, Z'' \rangle - \langle Y', Z' \rangle - \langle Y'', Z \rangle \\ &= \langle Y, Z'' \rangle - \langle Y'', Z \rangle = -\langle Y, R(\gamma', Z)\gamma' \rangle - \langle Y'', Z \rangle \\ &= -\langle Z, R(\gamma', Y)\gamma' \rangle - \langle Y'', Z \rangle \\ &= \langle Z, Y'' \rangle - \langle Y'', Z \rangle = 0, \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade da curvatura:

$$\langle Y, R(U, Z)W \rangle = \langle Z, R(W, Y)U \rangle.$$

Como  $Y$  e  $Z$  são  $N$ -campos de Jacobi,

$$\begin{aligned} \langle Y, Z' + S_{\gamma'(0)}Z \rangle(0) &= 0 \text{ e} \\ \langle Z, Y' + S_{\gamma'(0)}Y \rangle(0) &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle Y, Z' \rangle - \langle Y', Z \rangle(0) = -\langle Y, S_{\gamma'(0)}Z \rangle(0) + \langle Z, S_{\gamma'(0)}Y \rangle(0) = 0,$$

pela simetria da segunda forma fundamental.

**Teorema 3.3.10. (A desigualdade básica)** *Suponha que  $N$  não tem pontos focais ao longo de  $\gamma$  e lembre que  $\mathcal{L}$  é o conjunto dos campos de vetores ao longo de  $\gamma$ ,  $C^\infty$  por partes e perpendiculares às subvariedades  $N$  e  $P$  nos seus extremos. Dados  $V \in \mathcal{L}$ ,  $Y$  um  $N$ -campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , tal que  $Y(b) = V(b)$ , tem-se que  $I(V, V) \geq I(Y, Y)$  e a igualdade ocorre se, e somente se,  $V \equiv Y$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\{Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$  uma base de  $S_N$ . Suponhamos ainda que  $\{Y_1, \dots, Y_{n-m-1}\}$  é base de  $V_1 = \{V \in S_N | V(0) = 0\}$  e  $\{Y_{n-m}, \dots, Y_{n-1}\}$  é base de  $V_2 = \{V \in S_N | V'(0) \in T_{\gamma(0)}N\}$ .

Afirmção: Existem únicos  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  por partes, tais que

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(t)Y_i(t), \quad t \in [0, b].$$

Notemos primeiro que as funções  $f_i$  para  $i = n - m, \dots, n - 1$  estão bem definidas e são  $C^\infty$  por partes em  $[0, b]$ . Temos que  $\{Y_{n-m}, \dots, Y_{n-1}\}$  são  $N$ -campos de Jacobi que geram subespaços  $m$  dimensionais de  $T_{\gamma(t)}M \forall t \in [0, b]$ . Sejam  $E_1, \dots, E_{n-m-1}$  campos de vetores  $C^\infty$  por partes ao longo de  $\gamma$  que completam  $Y_{n-m}(t), \dots, Y_{n-1}(t), \gamma'(t)$  a uma base de  $T_{\gamma(t)}M$ . Como esses campos são  $C^\infty$  por partes, formam bases em cada ponto de  $\gamma$  e  $V$  é ortogonal a  $\gamma'$ ,

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n-m-1} g_i(t)E_i(t) + \sum_{i=n-m}^{n-1} f_i(t)Y_i(t)$$

determina  $f_i$  para  $i = n - m, \dots, n - 1$  de maneira única e com a regularidade afirmada. Seja

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n-m-1} g_i(t)E_i(t).$$

Queremos escrever

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n-m-1} f_i(t)Y_i(t).$$

Note que, assim como  $Y_i(0) = 0$ , tem-se que  $X(0) = 0$ , pois  $V(0) \in T_{\gamma(0)}N$ . Para  $t \in (0, b]$ , as funções  $f_i$  estão unicamente determinadas (o subespaço de  $T_{\gamma(t)}M$  gerado pelos campos  $Y_1, \dots, Y_{n-m-1}$  é o mesmo que os  $E_i$ 's geram) e são  $C^\infty$  por partes em  $(0, b]$ . Resta mostrar que elas se estendem continuamente a  $[0, b]$ . O argumento que demonstra esse fato é o mesmo apresentado na prova do Lema do Índice para campos que se anulam na origem ([dC], Lema 2.2

do Capítulo 10) e por ser um argumento de Análise na Reta, não será escrito aqui.

Continuando a prova do teorema, definimos os campos  $W$  e  $Z$ . Nos pontos onde  $V'$  existe, definimos,

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} f'_i Y_i \text{ e } Z = \sum_{i=1}^{n-1} f_i Y'_i,$$

de modo que

$$V' = W + Z.$$

Note que, para quase todo  $t \in [0, b]$ ,

$$\langle V, \sum_{j=1}^{n-1} f'_j Y'_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i f'_j \langle Y_i, Y'_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n-1} f_i f'_j \langle Y'_i, Y_j \rangle = \langle W, Z \rangle. \quad (3.2)$$

Usando (3.2) e que os  $Y_i$ s são campos de Jacobi, obtém-se que

$$\begin{aligned} \langle V, Z \rangle' &= \langle V', Z \rangle + \langle V, Z' \rangle = \langle Z + W, Z \rangle + \langle V, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i Y'_i + \sum_{i=1}^{n-1} f'_i Y''_i \rangle \\ &= \langle Z, Z \rangle + 2\langle W, Z \rangle - \langle V, R(\gamma', V)\gamma' \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\int_0^b \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle dt \\ &= \int_0^b \langle Z + W, Z + W \rangle + \langle V, Z \rangle' - \langle Z, Z \rangle - 2\langle Z, W \rangle dt \\ &= \int_0^b \langle V, Z \rangle' + \langle W, W \rangle dt \\ &= \langle V(b), Z(b) \rangle - \langle V(0), Z(0) \rangle + \int_0^b \langle W, W \rangle dt. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I(V, V) &= \int_0^b \{ \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle \} dt - \langle S_{\gamma'(0)}V(0), V(0) \rangle \\
&\quad + \langle S_{\gamma'(b)}V(b), V(b) \rangle \\
&= \langle V(b), Z(b) \rangle - \langle V(0), Z(0) \rangle + \int_0^b \langle W, W \rangle dt \\
&\quad - \langle S_{\gamma'(0)}V(0), V(0) \rangle + \langle S_{\gamma'(b)}V(b), V(b) \rangle \\
&= \langle V(b), Z(b) + S_{\gamma'(b)}V(b) \rangle - \langle V(0), Z(0) + S_{\gamma'(0)}V(0) \rangle \\
&\quad + \int_0^b \langle W, W \rangle dt.
\end{aligned}$$

Note que

$$Z(0) + S_{\gamma'(0)}V(0) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(0)Y_i(0) + f_i(0)Y_i'(0) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(0) \underbrace{(Y_i(0) + Y_i'(0))}_{\in (T_{\gamma(0)}N)^\perp}.$$

Logo  $\langle V(0), Z(0) + S_{\gamma'(0)}V(0) \rangle = 0$  e

$$I(V, V) = \langle V(b), Z(b) + S_{\gamma'(b)}V(b) \rangle + \int_0^b |W|^2 dt$$

Por outro lado,  $I(Y, Y) = \langle Y(b), Z(b) + S_{\gamma'(b)}V(b) \rangle$ , pois

$$Y \in S_N, Y(b) = V(b) \Rightarrow Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(b)Y_i(t),$$

de modo que os campos do tipo  $W$  e  $Z$  associados a  $Y$  (denotados por  $Z_Y$  e  $W_Y$ ) são dados por

$$W_Y(t) = 0 \text{ e } Z_Y(t) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(b)Y_i(t).$$

Portanto,

$$Z_Y(b) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(b)Y_i(b) = Z(b),$$

então

$$I(Y, Y) = \langle Y(b), Z_Y(b) + S_{\gamma'(b)}Y(b) \rangle + \int_0^b |W_Y|^2 dt = \langle V(b), Z(b) + S_{\gamma'(b)}V(b) \rangle,$$



já que  $Y(b) = V(b)$ . Assim,

$$I(V, V) - I(Y, Y) = \int_0^b |W|^2 dt \geq 0$$

e a igualdade ocorre, se e só se,  $W \equiv 0$ , ou seja, as funções  $f_i$ s são constantes e  $V = Y$ , o que conclui a prova do teorema.

Alguns autores definem a forma índice sem a parcela  $\langle S_{\gamma'(b)}V(b), W(b) \rangle$ , que também será utilizada ao longo do texto. Para diferenciar as definições, denotaremos a segunda por  $L$ . Desta forma,

$$L(V, W) = \int_0^b \langle V', W' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W \rangle(u) du - \langle S_{\gamma'(0)}V(0), W(0) \rangle. \quad (3.3)$$

A desigualdade básica também vale para  $L$ , pois  $V(b) = Y(b)$  implica

$$S_{\gamma'(b)}V(b) = S_{\gamma'(b)}Y(b).$$

### Pontos Focais $\times$ Pontos críticos da exponencial

Assim como os pontos conjugados de um ponto  $p \in M$  são valores críticos da aplicação  $\exp_p$  (Teorema 3.2.3), vamos observar que os pontos focais de uma subvariedade  $N$  correspondem a pontos críticos da exponencial normal, que é a exponencial restrita aos vetores ortogonais a  $N$ .

**Definição 3.3.11.** *O fibrado normal de  $N$  é o conjunto dos pares de pontos de  $N$  e vetores ortogonais a  $N$  :*

$$T(N)^\perp = \{(p, v) \mid p \in N, v \in T_p M \setminus T_p N\},$$

que é um subconjunto do fibrado tangente de  $M$ . Pode-se olhar a aplicação exponencial como

$$\exp : TM \rightarrow M, \exp(p, v) = \exp_p v.$$

A exponencial normal é a restrição da exponencial ao fibrado normal  $T(N)^\perp$ .

A próxima proposição não será demonstrada aqui, ela encontra-se no Capítulo 10 de [dC].

**Proposição 3.3.12.** *Um ponto  $p \in M$  é um ponto focal da subvariedade  $N$  se, e somente se, é um valor crítico da exponencial normal.*

### 3.3.3 Distância a uma subvariedade

Vamos voltar a considerar os conjuntos do tipo vizinhança normal como definido em (1.0.2).

**Definição 3.3.13.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa simplesmente conexa e seja  $N \subset M$ , subvariedade  $n - 1$  dimensional, compacta, simplesmente conexa e orientável. Fixe uma orientação em  $N$  de modo que para cada  $x \in N$ ,  $\eta(x)$  seja o vetor normal unitário. Seja*

$$\Lambda = \sup_{p \in N} \left\{ \sup \{ \langle \nabla_v v, \eta \rangle \mid v \in T_p N, |v| = 1 \} \right\}.$$

e seja  $R > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} E : N \times [0, R] &\rightarrow M \\ E(x, t) &= \exp_x t\eta(x), \end{aligned}$$

é um difeomorfismo sobre sua imagem. Definimos a imagem  $\Omega$  deste difeomorfismo como a vizinhança normal de  $N$  na direção  $\eta$  de largura  $R$  e curvatura  $\Lambda$ .

**Observação 3.3.14.** *No caso em que  $K$ , a curvatura seccional de  $M$ , satisfaz  $K \leq 0$  e  $\Lambda < 0$ , tem-se que para qualquer  $R > 0$ , a função  $E$  acima é um difeomorfismo. Deste modo, se  $N$  é uma subvariedade convexa e  $K \leq 0$ , existe vizinhança normal de  $N$  de qualquer largura positiva.*

Analogamente ao observado na parte da distância a pontos, uma extensão do Teorema de Rauch garante que pontos focais de hipersuperfícies ocorrem antes em esferas geodésicas de  $\mathbb{Q}^n(K)$  de curvatura  $\Lambda$ . Assim, como na seção anterior, aqui também as hipóteses sobre  $K$ ,  $R$  e  $\Lambda$  nos teoremas garantirão que  $E$  é um difeomorfismo sobre sua imagem. A referência para essa extensão do Teorema de Rauch é [W].

O lema análogo ao Lema 3.2.8 para a função distância a uma subvariedade é o seguinte resultado.

**Lema 3.3.15.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e seja  $N \subset M$ , subvariedade  $m$  dimensional como na definição acima. Seja  $A$  uma vizinhança normal de  $N$  de largura  $R$ . Seja*

$$\begin{aligned} d : A &\rightarrow \mathbb{R}, \\ d(y) &= \text{distância de } y \text{ a } N \end{aligned}$$

Então:

(i)  $d$  é diferenciável em  $A$ .

- (ii)  $|\text{grad } d| = 1$  e  $\text{grad } d$  é ortogonal às subvariedades de  $M$  paralelas a  $N$ .  
 Mais precisamente,  $\text{grad } d(q) \in (T_q N_{d(q)})^\perp$ , onde  $N_{d(q)} = E(N \times \{d(q)\})$ .  
 Além disso,  $\text{grad } d(q) = \gamma'(b)$ , onde  $q = E(x, b)$ ,  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ , é a geodésica que liga  $x$  a  $q$ , realizando a distância  $d(q)$ .

**Demonstração:**

A diferenciabilidade da função  $d$  é clara, pois

$$d(y) = |(\exp_p^\perp)^{-1}(y)|$$

e  $\exp^\perp$  é um difeomorfismo. A demonstração de (ii) não será feita aqui. Para tal, deve-se usar variação de energia e uma referência é o Capítulo 9 de [dC].

No que segue serão enunciados três teoremas análogos que se distinguem apenas com relação ao supremo da curvatura seccional (negativo, nulo ou positivo). Suas demonstrações são também semelhantes. Por essa razão, vê-se primeiro os três enunciados, depois a demonstração precisa do primeiro teorema e então comentários sobre onde as provas do segundo e terceiro caso requerem modificações.

Estes são teoremas que estimam o laplaciano da função distância a subvariedades. Não encontrou-se referências para suas demonstrações, no entanto, elas seguem o mesmo tipo de argumento da prova do Teorema de Comparação do Hessiano para a função distância a um ponto, o Teorema 3.2.11.

**Teorema 3.3.16.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e seja  $N \subset M$ , hipersuperfície orientada. Seja  $\Omega$  uma vizinhança normal de  $N$  de largura  $R$ , direção  $\eta$  e curvatura  $\Lambda$ . Suponha que  $\sup_\Omega K = K$  para algum  $K < 0$ . Suponha ainda que  $\Lambda < -\sqrt{-K}$ . Então, dado  $q \in \Omega$  com  $d(q) = b$ ,*

$$\Delta d_q \geq \sqrt{-K}(n-1) \coth\left(\sqrt{-K}(r+b)\right) = (n-1) \frac{C_K(r+b)}{S_K(r+b)}$$

onde  $r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth}\left(\frac{-\Lambda}{\sqrt{-K}}\right)$  e as funções  $C_K$  e  $S_K$  foram definidas no Corolário 3.2.13.

**Observação 3.3.17.** *A hipótese  $\sup_\Omega K = K$  pode ser substituída por uma condição mais fraca. Basta que*

$$K(\text{grad } d_q, v) \leq K$$

se  $v \in T_q M \forall q \in \Omega$ . Essa observação é válida na sua versão análoga para os próximos dois teoremas.

**Teorema 3.3.18.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e seja  $N \subset M$ , hipersuperfície orientada. Seja  $\Omega$  uma vizinhança normal de  $N$  de largura  $R$ , direção  $\eta$  e curvatura  $\Lambda$ . Suponha que  $\sup_{\Omega} K = 0$ . Então, dado  $q \in \Omega$  com  $d(q) = b$ ,*

$$\Delta d_q \geq (n-1) \frac{-\Lambda}{1-\Lambda b} = (n-1) \frac{C_0(-1/\Lambda + b)}{S_0(-1/\Lambda + b)}.$$

E finalmente, o terceiro teorema para o caso  $\sup_{\Omega} K > 0$ .

**Teorema 3.3.19.** *Seja  $M$  uma variedade riemanniana completa e seja  $N \subset M$ , hipersuperfície orientada. Seja  $\Omega$  uma vizinhança normal de  $N$  de largura  $R$ , direção  $\eta$  e curvatura  $\Lambda$ . Suponha que  $\Lambda < 0$  e  $\sup_{\Omega} K = K > 0$ . Então, dado  $q \in \Omega$  com  $d(q) = b$ , satisfazendo  $\sqrt{K}(r+b) < \pi$ , tem-se*

$$\Delta d_q \geq \sqrt{K}(n-1) \cot(\sqrt{K}(r+b)) = (n-1) \frac{C_K(r+b)}{S_K(r+b)},$$

onde  $r = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arccot} \left( \frac{-\Lambda}{\sqrt{K}} \right)$ .

**Observação 3.3.20.** *O  $r$  que aparece no enunciado do primeiro e do terceiro teoremas é o raio da esfera geodésica em  $\mathbb{Q}^n(K)$ , cuja curvatura média associada ao vetor normal que aponta na direção do seu centro é  $-\Lambda$ . No caso da curvatura positiva, uma esfera geodésica de raio  $r$  tem ponto focal a uma distância  $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$  do seu centro, por isso a hipótese  $\sqrt{K}(r+b) < \pi$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $E_1, \dots, E_n$  campos ortonormais numa vizinhança de  $q$  com  $E_n = \operatorname{grad} d$ . Assim,

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} (-\eta), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle S_{\eta}(E_i), E_i \rangle = H_{N_{d(q)}(p)}$$

é a curvatura média da hipersuperfície paralela a  $N$  passando por  $q$ , com vetor normal apontando para dentro. Essa caracterização de  $\Delta d$  não será utilizada, ela dá apenas uma relação entre  $H$  e  $\Delta d$ . Observemos que

$$\Delta d(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} d, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \gamma'(b), E_i \rangle,$$

onde  $q = E(x, b)$ ,  $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ , é a geodésica que liga  $x$  a  $q$ , realizando a distância  $d(q)$ .

Afirmação 1: Para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , seja  $J$  o  $N$ -campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com  $J(b) = E_i(\gamma(b))$ . Então,

$$\langle \nabla_{E_i} \gamma'(b), E_i \rangle = \langle J(b), J'(b) \rangle. \quad (3.4)$$

$$\langle \nabla_{E_i} \gamma'(b), E_i \rangle = \langle \nabla_{J(b)} \gamma'(b), J(b) \rangle = \langle \nabla_{\gamma'(b)} J(b), J(b) \rangle = \langle J(b), J'(b) \rangle,$$

onde na segunda igualdade foi usada a simetria da conexão e que  $[\gamma', J] = 0$ , que decorre de os campos de Jacobi estarem associados a variações da geodésica  $\gamma$ . (Ver Lema 4.1, Capítulo 10 de [dC]).

Afirmação 2:  $\langle J(b), J'(b) \rangle = L_b(J, J)$ .

Como  $J$  é um  $N$ -campo de Jacobi,

$$\begin{aligned} \langle J(b), J'(b) \rangle &= \int_0^b \langle J, J' \rangle'(u) du + \langle J(0), J'(0) \rangle = \\ &= \int_0^b \{ |J'|^2 - \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \}(u) du - \langle S_{\gamma'(0)} J(0), J(0) \rangle = L_b(J, J). \end{aligned}$$

Assim, para demonstrar o teorema, busca-se um estimativa por baixo de  $L_b(J, J)$ . Para obtê-la, levaremos o problema para a variedade de curvatura seccional constante  $K$ . A partir daqui, a demonstração fica diferente para cada caso.

Considere em  $\mathbb{Q}^n(K)$  a esfera geodésica de raio

$$r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth} \left( \frac{-\Lambda}{\sqrt{-K}} \right)$$

com vetor normal  $\nu$  apontando para fora. Denotaremos essa esfera por  $\bar{N}$ . Note que todas as curvaturas principais de  $\bar{N}$  associadas a  $\nu$  são iguais a  $\Lambda$ . Fixe  $z \in \bar{N}$  e tome

$$\tau : [0, b] \rightarrow \mathbb{Q}^n(K)$$

uma geodésica com

$$\tau(0) = z \text{ e } \tau'(0) = \nu.$$

Defina  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$  campos ortonormais paralelos ao longo de  $\tau$ ,  $e_n(t) = \tau'(t)$ . Observe que  $\bar{N}$  não tem pontos focais ao longo de  $\tau$ . De fato, o único ponto focal de uma esfera geodésica em  $\mathbb{Q}^n(K)$  é o seu centro. Portanto, existe um  $\bar{N}$ -campo de Jacobi  $Y$  ao longo de  $\tau$  com  $Y(b) = e_1(b)$ .

Dado um campo de vetores  $V$  ao longo de  $\gamma$ , podemos escrevê-lo como

$$V(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) E_i(t).$$

Assim, podemos definir  $\Phi V$  ao longo de  $\tau$  por

$$\Phi V(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) e_i(t).$$

A função  $\Phi$  satisfaz:

i.  $\langle V, W \rangle = \langle \Phi V, \Phi W \rangle,$

ii.  $\Phi(V') = (\Phi V)',$

para todo campo de vetores  $V$  ao longo de  $\gamma$ . Portanto,

$$\begin{aligned} L_b(J, J) &= \int_0^b \{ |J'|^2 - \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \}(u) du - \langle S_{\gamma'(0)} J(0), J(0) \rangle \\ &\geq \int_0^b \{ |J'|^2 - K|J|^2 \}(u) du - \Lambda |J(0)|^2 \\ &= \int_0^b \{ |\Phi J'|^2 - K|\Phi J|^2 \}(u) du - \Lambda |\Phi J(0)|^2 \\ &= L_b(\Phi J, \Phi J), \end{aligned}$$

pois  $\langle R_K(\tau', \Phi J)\tau', \Phi J \rangle = -K|\Phi J|^2$  e  $\bar{N}$  tem todas as curvaturas principais iguais a  $\Lambda$ . Do Teorema 3.3.10, a desigualdade básica,

$$L_b(\Phi J, \Phi J) \geq L_b(Y, Y),$$

onde  $Y$  é um  $\bar{N}$ -campo de Jacobi com  $Y(b) = e_1(b)$ . Vimos no Exemplo 3.3.4 que

$$Y(t) = (\cosh(\sqrt{-K}t) - \frac{\Lambda}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t))V(t),$$

com  $V$  paralelo ao longo de  $\tau$ ,  $V(0) \in T_{\tau(0)}\bar{N}$ . Como  $Y(b) = \Phi J(b)$  é unitário, tomando no lugar do  $Y$  acima,

$$Y(t) = \frac{\cosh(\sqrt{-K}t) - \frac{\Lambda}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t)}{\cosh(\sqrt{-K}b) - \frac{\Lambda}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}b)} V(t), \quad (3.5)$$

podemos supor  $V$  unitário. Com isso, tomando

$$A(t) = \cosh(\sqrt{-K}t) - \frac{\Lambda}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t),$$

pode-se calcular

$$\begin{aligned}
L_b(Y, Y) &= \frac{1}{A(b)^2} \int_0^b \{A'(t)^2 - K A(t)^2\} dt - \Lambda \frac{A(0)^2}{A(b)^2} \\
&= \frac{\frac{(-K+\Lambda^2)}{2\sqrt{-K}} \sinh(2\sqrt{-K}b) - \Lambda \cosh(2\sqrt{-K}b)}{\cosh(\sqrt{-K}b) - \frac{\Lambda}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}b)} \\
&= \sqrt{-K} \frac{(\sqrt{-K} - \Lambda)e^{\sqrt{-K}b} - (\Lambda + \sqrt{-K})e^{-\sqrt{-K}b}}{(\sqrt{-K} - \Lambda)e^{\sqrt{-K}b} + (\sqrt{-K} + \Lambda)e^{-\sqrt{-K}b}} \\
&= \sqrt{-K} \coth(\sqrt{-K}(r+b)),
\end{aligned}$$

onde  $r = \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth}\left(\frac{-\Lambda}{\sqrt{-K}}\right)$ . Assim,

$$\Delta d \geq (n-1)L_b(Y, Y) \geq \sqrt{-K}(n-1) \coth(\sqrt{-K}(r+b)),$$

o que conclui a prova do primeiro teorema.

Nos outros dois casos, o problema também deve ser levado para variedades de curvatura seccional constante zero e  $K$ .

De maneira análoga, tem-se no segundo teorema, que

$$L_b(J, J) \geq L_b(\Phi J, \Phi J) \geq L_b(Y, Y),$$

onde  $Y(t) = (1 - \Lambda t)V(t)$  é o  $\bar{N}$  campo de Jacobi em  $\mathbb{R}^n$  com  $\bar{N}$  esfera  $S^{n-1}$  de raio  $\frac{1}{\Lambda}$ , ou seja, todas as curvaturas principais iguais a  $\Lambda$  com relação ao normal exterior. Lembre que  $V$  é um campo paralelo ao longo de  $\tau$  com  $V(0) \in T_{\tau(0)}\bar{N}$ . Como  $|V(b)| = 1$ , tomando

$$Y(t) = \frac{1 - \Lambda t}{1 - \Lambda b} V(t) \tag{3.6}$$

podemos supor  $V$  unitário. Assim, calculando

$$\begin{aligned}
L_b(Y, Y) &= \int_0^b |Y'|^2(t) dt - \Lambda |Y(0)|^2 \\
&= \left(\frac{1}{1 - \Lambda b}\right)^2 \left\{ \int_0^b (-\Lambda)^2(u) du - \Lambda 1^2 \right\} \\
&= \frac{-\Lambda(1 - \Lambda b)^2}{1 - \Lambda b} = \frac{-\Lambda}{1 - \Lambda b} = \left(\frac{1}{-\Lambda} + b\right)^{-1} \\
&= H_{S^{n-1}\left(\frac{1}{-\Lambda} + b\right)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta d \geq (n-1) \frac{-\Lambda}{1-\Lambda b}$$

como queríamos mostrar.

No caso da curvatura positiva, o mesmo argumento nos leva a:

$$\Delta d \geq (n-1)L_b(Y, Y),$$

onde

$$Y(t) = \frac{(\cos(\sqrt{K}t) - \frac{\Lambda}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}t))}{(\cos(\sqrt{K}b) - \frac{\Lambda}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}b))} V(t),$$

com  $V$  paralelo e unitário ao longo de uma geodésica  $\tau$ . Novamente, calcula-se  $L_b(Y, Y)$ . Para tal, considere

$$A(t) = \cos(\sqrt{K}t) - \frac{\Lambda}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}t),$$

de modo que  $Y(t) = \frac{A(t)}{A(b)} V(t)$ . Então,

$$\begin{aligned} L_b(Y, Y) &= \frac{1}{A(b)^2} \int_0^b \{A'(t)^2 - KA(t)^2\} dt - \Lambda \frac{A(0)^2}{A(b)^2} \\ &= \frac{\frac{\Lambda^2 - K}{2\sqrt{K}} \operatorname{sen}(2\sqrt{K}b) + 2\Lambda \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}b) - \Lambda}{(\cos(\sqrt{K}b) - \frac{\Lambda}{\sqrt{K}} \operatorname{sen}(\sqrt{K}b))^2} \\ &= \sqrt{K} \cot(\sqrt{K}(r+b)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta d \geq (n-1)\sqrt{K} \cot(\sqrt{K}(r+b)),$$

onde  $r$  é o menor número real positivo que satisfaz  $-\Lambda = \sqrt{K} \cot(\sqrt{K}r)$ . Conclui-se assim a demonstração do terceiro teorema.

### 3.4 Princípios do Máximo para funções subharmônicas

**Teorema 3.4.1.** *Princípio forte do máximo em  $\mathbb{R}^n$  : Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto conexo e seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Se  $\Delta u \geq 0$  em  $\Omega$  e existe  $x_0 \in \Omega$ , tal que  $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$ , então  $u$  é constante.*



**Teorema 3.4.2.** *Princípio fraco do máximo em  $\mathbb{R}^n$  : Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto limitado e seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Se  $\Delta u \geq 0$  em  $\Omega$ , então  $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ .*

Os princípios do máximo para a equação de Laplace são resultados clássicos, mesmo na sua versão para variedades riemannianas. Usualmente sua demonstração é feita usando cartas coordenadas, já que o laplaciano em coordenadas é um operador diferencial elíptico ao qual também estão associados princípios forte e fraco do máximo.

Nas estimativas feitas neste trabalho utilizaremos apenas o princípio fraco do máximo, para o qual fizemos uma demonstração intrínseca (sem o uso das cartas coordenadas). Por esta razão, ela será apresentada a seguir.

**Teorema 3.4.3.** *Seja  $M$  variedade riemanniana compacta com bordo. Seja  $f \in C^\infty(M)$  uma função subharmônica, i. é.,  $\Delta f \geq 0$  em  $M$ . Então,  $\sup_M f = \sup_{\partial M} f$ .*

Para a prova, utilizaremos o resultado que segue.

**Lema 3.4.4.** *Seja  $M$  variedade riemanniana. Sejam  $f \in C^\infty(M)$ , tal que  $\Delta f > 0$  em  $M$ . Então  $f$  não assume máximo no interior de  $M$ .*

**Demonstração:**

Suponha por absurdo que existe  $x_0 \in \text{int}M$ ,  $f(x_0) = \sup_M f$ . Seja  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial geodésico em  $x_0$ . Então

$$\text{grad } f(x_0) = \sum_{i=1}^n df_{x_0} \cdot E_i(x_0) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{d(f \circ \alpha_i)}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

onde cada  $\alpha_i$  é uma curva diferenciável com  $\alpha_i(0) = x_0$ ,  $\alpha_i'(0) = E_i(x_0)$ . A última igualdade decorre de  $x_0$  ser ponto de máximo da função  $f \circ \alpha_i$ .

Note que para cada  $i = 1, \dots, n$ , pelo Lema 3.2.9,

$$\begin{aligned} E_i(E_i(f))(x_0) &= (\langle \nabla_{E_i} \text{grad } f, E_i \rangle + \langle \text{grad } f, \nabla_{E_i} E_i \rangle) \cdot x_0 \\ &= \langle \nabla_{E_i} \text{grad } f, E_i \rangle \cdot x_0 = \langle \nabla_{\alpha_i'} \text{grad } f, \alpha_i' \rangle \cdot x_0 \\ &= \left. \frac{d^2(f \circ \alpha_i)}{dt^2} \right|_{x_0} \leq 0, \end{aligned}$$

onde foi usado que  $\text{grad } f(x_0) = 0$  e novamente que  $x_0$  é ponto de máximo de  $f \circ \alpha_i$ . Logo,

$$\Delta f(x_0) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)) \cdot (x_0) \leq 0,$$

absurdo.

**Demonstração do teorema:**

Queremos mostrar que se  $\Delta f \geq 0$  em  $M$ , então  $\sup_M f = \sup_{\partial M} f$ .

Seja  $x_0 \in M$ ,  $f(x_0) = \sup_M f$ . Se  $x_0 \in \partial M$ , não há o que mostrar. Suponha, por absurdo, que  $x_0 \in \text{int}M$ . Seja

$$\mathcal{U} = \{U \subset M \mid U \text{ é aberto, } x_0 \in U, f(x_0) = \sup_{\partial U} f\}.$$

A mostrar:  $M \in \mathcal{U}$ .

Para isso vamos usar o Lema de Zorn. Assim, a demonstração ficará dividida em três partes:

Af. 1:  $\mathcal{U}$  é não vazio.

Af. 2:  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal em relação a ordem parcial da inclusão.

Af. 3:  $M \in \mathcal{U}$ .

Prova das afirmações:

Af. 1:  $\mathcal{U}$  é não vazio.

Seja  $B = B_\epsilon(x_0) \subset M$  uma bola normal centrada em  $x_0$ . Seja

$$v : B \rightarrow \mathbb{R}, \\ v(x) = (\text{dist}(x, x_0))^2.$$

Como vimos no Lema 3.2.8,  $v$  é diferenciável em  $B$  e

$$\Delta v(x_0) = 2n > 0.$$

Assim, como  $v \in C^\infty(M)$ , existe um aberto  $U \subset B$ ,  $x_0 \in U$ , tal que  $\Delta v > 0$  em  $U$ . Como  $\Delta f \geq 0$  em  $M$ ,  $\Delta(f + \epsilon v) > 0$  em  $U$  para qualquer  $\epsilon$  positivo. Assim, pelo Lema 3.4.4,  $\sup_U (f + \epsilon v) = \sup_{\partial U} (f + \epsilon v)$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .

Portanto, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , temos  $\sup_U f = \sup_{\partial U} f$ . Assim,  $U \in \mathcal{U}$ .

Af. 2:  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal em relação à ordem parcial da inclusão.

Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , uma cadeia totalmente ordenada em  $\mathcal{U}$ . Então, pelo Teorema de Lindelöf, existe uma subcadeia enumerável totalmente ordenada em  $\mathcal{U}$ , com

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \text{ onde } U_i \subset U_{i+1}.$$

Seja  $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Afirmando que  $V \in \mathcal{U}$ , isto é,  $V$  é aberto,  $x_0 \in V$ ,  $f(x_0) = \sup_{\partial V} f$ .

Basta mostrar que  $f(x_0) = \sup_{\partial V} f$ . Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $x_i \in \partial U_i$ , tal que  $f(x_i) = f(x_0)$ , que existe pois  $\partial U_i$  é compacto. Como  $M$  é compacta,  $(x_i)$  tem subsequência convergente  $(x_{i_k})$ . Seja  $x$  o limite dessa subsequência. Pela continuidade da função  $f$ ,  $f(x) = f(x_0)$ . Se  $x \in \text{int}V$ , existe  $\delta > 0$ , tal que a bola normal de raio  $\delta$ ,  $B_\delta(x) \subset V$ . Nesse caso, existe  $i_0$ , tal que

$$i \geq i_0 \Rightarrow B_\delta(x) \subset U_i.$$

Logo  $\text{dist}(x, x_i) \geq \delta \forall i \geq i_0$ , o que contradiz

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{i_k}.$$

Portanto  $x \in \partial V$  e, conseqüentemente,  $V \in \mathcal{U}$ .

Assim toda cadeia totalmente ordenada em  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal. Portanto, pelo Lema de Zorn,  $\mathcal{U}$  possui elemento maximal e está mostrada a af. 2.

Af. 3:  $M \in \mathcal{U}$ .

Seja  $W$  um elemento maximal de  $\mathcal{U}$ , então  $f(x_0) = \sup_{\partial W} f$ . Suponhamos, por absurdo,  $W \neq M$ . Por compacidade, existe  $y_0 \in \partial W$ , tal que

$$f(y_0) = \sup_{\partial W} f = f(x_0)$$

e  $y_0 \notin \partial M$ .

Seja  $z \in \partial W \setminus \partial M$ ,  $z \neq y_0$ . Então existe  $\delta > 0$ , tal que  $B_\delta(z) \subset M \setminus \{y_0\}$ , onde  $B_\delta(z)$  denota a bola normal de raio  $\delta$  centro  $z$ . Nesse caso  $y_0 \in \partial(W \cup B_\delta(z))$ , o que nos permite concluir que  $W \cup B_\delta(z) \in \mathcal{U}$ . Contradição. Portanto  $M$  é o único elemento maximal de  $\mathcal{U}$ .

Assim,  $f(x_0) = \sup_M f = \sup_{\partial M} f$ , o que conclui a demonstração do teorema.

# Capítulo 4

## Estimativas para o primeiro autovalor

### 4.1 Estimativa para domínios do tipo anel

Na introdução definimos (Definição 1.0.2) a vizinhança normal da hipersuperfície  $N$  na direção  $\eta$  de largura  $R$  e curvatura  $\Lambda$ .

Esta seção é destinada a obter estimativas  $C^0$  para soluções da equação de Poisson em  $\Omega$ . Mais precisamente, busca-se uma constante  $C$ , dependendo de  $\Omega$ , tal que se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , satisfaz  $\Delta u = f$  em  $M$  tem-se

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |f|.$$

Veremos que esta constante dependerá da curvatura de  $N$ ,  $\Lambda$ , da largura da vizinhança normal,  $R$ , da dimensão de  $M$  e de uma cota superior para a curvatura seccional de  $M$ . O teorema a ser provado nesta seção é o seguinte.

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $\Omega \subset M$  uma vizinhança normal da hipersuperfície  $N$  na direção  $\eta$  de largura  $R$  e curvatura  $\Lambda$ . Suponha  $\Lambda \leq 0$  e que  $\sup_{\Omega} K = K$ . Além disso, se  $K < 0$ ,  $\Lambda < -\sqrt{-K}$  e, se  $K > 0$ ,  $r_K + R$  é menor que o primeiro zero positivo da função  $S_K$ . Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , tal que  $\Delta u = f$  em  $\Omega$ . Então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |f|$$

$C$  é uma constante que depende apenas de  $n$ ,  $K$ ,  $R$  e  $\Lambda$  dada por

$$C = \int_0^R \frac{E_K(t)}{S_K^{n-1}(r_K + t)} dt,$$

onde

$$r_K = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth}\left(\frac{-\Lambda}{\sqrt{-K}}\right), & \text{se } K < 0 \\ \frac{1}{-\Lambda} & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arccot}\left(\frac{-\Lambda}{\sqrt{K}}\right) & \text{se } K > 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$S_K(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{-K}t)}{\sqrt{-K}} & \text{se } K < 0; \\ t & \text{se } K = 0; \\ \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{K}t)}{\sqrt{K}} & \text{se } K > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$E_K(t) = \int_0^t S_K^{n-1}(r_K + s) ds. \quad (4.3)$$

**Observação 4.1.2.** O teorema é válido com  $C = g(0)$ , onde  $g$  é uma função suave (em  $C^2([0, R])$ ) que satisfaz:

$$\begin{cases} (g'(r_K + t)S_K^{n-1}(r_K + t))' \leq -S_K^{n-1}(r_K + t) \\ g \geq 0 \text{ em } [0, R] \\ g'(0) \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Este fato também será provado na demonstração que segue.

**Observação 4.1.3.** Assim como foi comentado na Observação 3.3.17, basta que as curvaturas seccionais na direção radial de  $N$  sejam limitadas superiormente por  $K$ .

**Demonstração:**

Considere  $d$  a função distância a subvariedade  $N$ ,

$$\begin{aligned} d : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ d(\exp_x t\eta(x)) &= t. \end{aligned}$$

Defina  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$v(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_{\Omega} |f|.$$

Se  $g$  for uma função limitada e mostrarmos que  $u \leq v$  em  $\Omega$ , o teorema estará provado. Suporemos  $g$  tão suave quanto se necessite. Note que

$$u \leq v \text{ em } \Omega \Rightarrow |u| \leq v \text{ em } \Omega.$$

A ideia aqui é usar o Princípio Fraco do Máximo para a função  $v - u$  em  $\Omega$ . Para isso, analisemos  $v - u$  em  $\partial\Omega$  e  $\Delta(v - u)$  em  $\Omega$ :

- Dado  $y \in \partial\Omega$ ,  $v(y) - u(y) = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(d(y)) \sup_{\Omega} |f| - u(y) \geq 0$ , se  $g \geq 0$ ;
- $\Delta(v - u) = \Delta(g \circ d) \sup_{\Omega} |f| - f \leq (\Delta(g \circ d) + 1) \sup_{\Omega} |f| \leq 0$  se  $\Delta(g \circ d) \leq -1$ .

Observemos que

$$\Delta(g \circ d)(y) = g'(d(y))\Delta d(y) + g''(d(y)),$$

de modo que buscamos uma função  $g$  satisfazendo:

- (i)  $g \geq 0$  em  $[0, R]$
- (ii)  $g'(d(y))\Delta d(y) + g''(d(y)) \leq -1$ .

Como

$$\Delta d(y) \geq (n-1) \frac{C_K(r_K + d(y))}{S_K(r_K + d(y))},$$

se a função  $g$  for tal que  $g' \leq 0$ , (ii) decorre de

$$g'(d(y))(n-1) \frac{C_K(r_K + d(y))}{S_K(r_K + d(y))} + g''(d(y)) \leq -1, \quad (4.5)$$

que, usando fator integrante conclui-se ser equivalente a

$$(g'(t)S_K^{n-1}(r_K + t))' \leq -S_K^{n-1}(r_K + t), \quad (4.6)$$

onde  $t = d(y)$ .

Assim, se  $g : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  for não-negativa, com  $g' \leq 0$  e satisfizer (4.6), teremos  $u \leq v$  em  $\Omega$ . Portanto,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \sup_{\Omega} g(d(y)) \sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |u| + g(0) \sup_{\Omega} |f|,$$

já que  $g$  é decrescente em  $[0, R]$ .

Note que se

$$(g'(t)S_K^{n-1}(r_K + t))' \leq -S_K^{n-1}(r_K + t),$$

integrando em ambos os lados e usando a não negatividade de  $S_K$  e que  $g'(0) \leq 0$  temos que  $g' \leq 0$ . Assim, está mostrado que se  $g$  satisfizer (4.4),  $g(0)$  é a contante procurada no teorema.

Afirmação: Seja  $g$  a solução de

$$\begin{cases} (g'(t)S_K^{n-1}(r_K + t))' = -S_K^{n-1}(r_K + t) \\ g(R) = 0, \\ g'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

que existe e é única pela teoria de equações diferenciais ordinárias. Então  $g$  satisfaz (4.4) e  $g(0)$  é a constante  $C$  do enunciado do teorema. Além disso, dentre as soluções de (4.4),  $g$  é a que tem o menor supremo.

É claro que  $g$  satisfaz (4.6). Como já vimos,  $g'$  é não-positiva em  $(0, R)$ . Portanto,  $\inf_{[0, R]} g = g(R) = 0 \Rightarrow g$  é não negativa. Logo  $g$  é satisfaz (4.4).

Seja  $h$  uma solução de (4.4). Nesse caso,

$$(h'(t)S_K^{n-1}(r_K + t))' \leq -S_K^{n-1}(r_K + t),$$

que integrando  $[0, T]$ ,  $T \in [0, R]$  resulta em:

$$h'(T)S_K^{n-1}(r_K + T) - h'(0)S_K^{n-1}(r_K) \leq - \int_0^T S_K^{n-1}(r_K + s)ds = -E_K(T)$$

$$h'(T) \leq - \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} + h'(0) \frac{S_K^{n-1}(r_K)}{S_K^{n-1}(r_K + T)}.$$

Portanto  $h' \leq 0$  e  $h$  é decrescente. Como a constante procurada é o supremo de  $h$ , que buscamos o menor possível, deve-se escolher  $h(R) = \inf h = 0$ . Com isso, integrando em  $[0, R]$ , obtem-se que:

$$h(R) - h(0) \leq - \int_0^R \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT + h'(0) \int_0^R \frac{S_K^{n-1}(r_K)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT \Rightarrow$$

$$h(0) \geq \int_0^R \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT - h'(0) \int_0^R \frac{S_K^{n-1}(r_K)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT.$$

Como  $h'(0) \leq 0$ , para ter o lado direito da desigualdade acima o menor possível, deve-se escolher  $h'(0) = 0$ . Assim, tomando

$$h(t) = C - \int_0^t \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT = \int_t^R \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT,$$

temos

$$C = h(0) = \int_0^R \frac{E_K(T)}{S_K^{n-1}(r_K + T)} dT.$$

Note que  $h$  foi obtida para ter o menor supremo possível satisfazendo (4.4). Como  $h$  satisfaz (4.7), mostramos que usando barreiras associadas a função distância, a constante  $C$  é optimal.

**Corolário 4.1.4.** *Com  $\Omega \subset M$  satisfazendo as mesmas hipóteses do teorema acima, se  $\lambda_1$  é seu primeiro autovalor de Dirichlet, tem-se que*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\int_0^R \frac{E_K(t)}{S_K^{n-1}(r_K + t)} dt}.$$

### 4.1.1 Casos particulares

Para ilustrar, estão listadas abaixo as constantes  $C$  para alguns casos.

Caso  $K = 0$

Podemos calcular  $C$  explicitamente

$$C = \int_0^R \frac{E_0(t)}{S_0^{n-1}(r_0 + t)} dt,$$

onde

$$r_0 = \frac{1}{-\Lambda}, \quad S_0(t) = t \quad \text{e} \quad E_0(t) = \int_0^t (s + r_0)^{n-1} ds = \frac{(t + r_0)^n - r_0^n}{n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{n} \int_0^R \frac{(t + r_0)^n - r_0^n}{(t + r_0)^{n-1}} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^R \frac{(t + r_0)^n}{(t + r_0)^{n-1}} dt - \frac{1}{n} \int_0^R \frac{r_0^n}{(t + r_0)^{n-1}} dt \\ &= \begin{cases} \frac{(r_0 + R)^2 - r_0^2}{2n} + \frac{r_0^n}{n(n-2)} \left( \frac{1}{(R + r_0)^{n-2}} - \frac{1}{r_0^{n-2}} \right) & \text{se } n > 2 \\ \frac{(r_0 + R)^2 - r_0^2}{4} + \frac{r_0^2}{2} \ln \left( \frac{r_0}{r_0 + R} \right) & \text{se } n = 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.8}$$



Caso  $K = 1$  e  $n = 2$   
Aqui é necessário supor  $R < \pi$

$$C = \int_0^R \frac{E_1(t)}{S_1(r_1 + t)} dt.$$

e

$$E_1(t) = \int_0^t S_1(r_1 + s) ds, \text{ onde } S_1(t) = \text{sen } t.$$

$$E_1(t) = \int_0^t \text{sen}(r_1 + s) ds = \cos(r_1) - \cos(r_1 + t).$$

$$\begin{aligned} C &= \int_0^R \frac{\cos(r_1) - \cos(r_1 + t)}{\text{sen}(r_1 + t)} dt \\ &= \frac{\cos r_1}{2} \left[ \ln \left( \frac{1 - \cos(r_1 + R)}{1 + \cos(r_1 + R)} \right) - \ln \left( \frac{1 - \cos(r_1)}{1 + \cos(r_1)} \right) \right] - \ln \left( \frac{\text{sen}(r_1 + R)}{\text{sen}(r_1)} \right). \end{aligned}$$

Caso  $K = -1$ ,  $n = 2$  e  $r_{-1} = 1$

$$\begin{aligned} C &= -(1/2)e(2 \ln 2 - \ln(e^{2R} - 1) + \ln(e^R - 1) - \ln(e^R + 1) + e^{-2} \ln(e^R - 1) \\ &\quad - e^{-2} \ln(e^R + 1) - (\ln(e^{2R} - 1))e^{-2} + 2e^{-2} \ln 2 + 2Re^{-2}). \end{aligned}$$

O teorema fornece uma boa constante  $C$ , porém, exceto para o caso  $K = 0$ , obter  $C$  explicitamente é complicado. Principalmente se  $n$  for grande. Como basta que  $g$  satisfaça a desigualdade

$$(g'(t)S_K^{n-1}(r_K + t))' \leq -S_K^{n-1}(r_K + t),$$

com  $g'(0) \leq 0$  e  $g(R) = 0$ , para termos  $C = g(0)$  satisfazendo o teorema, podemos calcular  $C$  explicitamente se buscamos  $g$  solução da desigualdade, porém sem otimizá-la. Fazemos isso no próximo corolário.

**Corolário 4.1.5.** *Nas mesmas hipóteses do teorema e se,  $K > 0$ , supondo ainda que  $r_K + R \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ , podemos tomar*

$$C = \min \left\{ e^R - 1, \frac{R}{(n-1)} \frac{S_K(r_K + R)}{C_K(r_K + R)} \right\}.$$

Basta tomar

$$g(t) = \frac{(R-t)S_K(r_K + R)}{(n-1)C_K(r_K + R)}$$

ou

$$g(t) = e^R - e^t.$$

**Exemplo 4.1.6.** *Vizinhanças normais de elipsóides em  $\mathbb{R}^3$  :*

*Considere um elipsóide  $E$  de semi-eixos  $a \leq b \leq c$ . Considere uma vizinhança normal de  $E$  na direção exterior de largura  $R$ . Então  $\Lambda = \frac{-a}{c^2} \Rightarrow r = \frac{c^2}{a}$  e o teorema acima fornece*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \frac{1}{\left[ \frac{2rR + R^2}{6} + \frac{r^3}{3} \left( \frac{1}{r+R} - \frac{1}{r} \right) \right]} \\ &= \frac{6(r+R)}{3rR^2 + R^3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

*Como não estamos tratando de uma bola geodésica, muitos dos resultados citados em no Capítulo 2 não podem ser aplicados.*

*Aplicando o Teorema 2.0.9, para o campo  $X = \text{grad } d$ , onde  $d$  é a distância a  $E$ , e usando que*

$$\inf_E \Delta d = \frac{1}{r+R}$$

*do Teorema 3.3.18 obtem-se*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4(r+R)^2},$$

*que é uma estimativa pior do que (4.9) para quaisquer valores se  $r$  e  $R$ . Aplicando (2.0.8) também para o campo  $X = \text{grad } d$ , obtem-se*

$$\lambda_1 \geq \frac{1-r-R}{r+R},$$

*que faz sentido de  $r+R < 1$ . Porém mesmo neste caso, 4.9 é sempre uma estimativa melhor.*

*Este foi apenas um exemplo que achamos interessante colocar, de modo a familiarizar o leitor com o processo.*

**Exemplo 4.1.7.** *Façamos o raio interno de um anel de  $\mathbb{R}^n$  tender a  $\infty$ .*

*Este exemplo foi citado no Capítulo 2, no caso particular de  $\mathbb{R}^2$ . Observaremos aqui que também em  $\mathbb{R}^n$ , a estimativa obtida engloba domínios cujo*

volume  $n$ -dimensional é muito grande. Considere  $A$  a região entre duas esferas concêntricas de raios  $r$  e  $r + R$ . A estimativa do primeiro autovalor para este caso deve ser tomada com  $r_0 = r$  e  $R = R$ . Desse modo obtemos,

$$\lambda_1 \geq \begin{cases} \left\{ \frac{(r+R)^2 - r^2}{2n} + \frac{r^n}{n(n-2)} \left( \frac{1}{(R+r)^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) \right\}^{-1} & \text{se } n > 2 \\ \left\{ \frac{(r+R)^2 - r^2}{4} + \frac{r^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r+R}\right) \right\}^{-1} & \text{se } n = 2. \end{cases} \quad (4.10)$$

A estimativa de Faber-Kahn para o domínio  $A$  é

$$\lambda_1(A) \geq \frac{\lambda_1(B_1)}{2rR + R^2},$$

que tende a zero quando  $r$  tende a infinito. Mantendo  $R$  constante e fazendo  $r \rightarrow \infty$ , obtemos para qualquer  $n$  que a expressão acima tende a  $\frac{2}{R^2}$ .

**Observação 4.1.8.** Note que a função que dá as expressões acima

$$f(r) = \left\{ \frac{(r+R)^2 - r^2}{2n} + \frac{1}{n(n-2)} \left( \frac{r^n}{(R+r)^{n-2}} - \frac{r^n}{r^{n-2}} \right) \right\}^{-1}$$

é decrescente se  $n > 2$  e o mesmo vale para a análoga em  $n = 2$ .

Para verificar que

$$f(r) = \left\{ \frac{(r+R)^2 - r^2}{2n} + \frac{1}{n(n-2)} \left( \frac{r^n}{(R+r)^{n-2}} - \frac{r^n}{r^{n-2}} \right) \right\}^{-1} = \frac{1}{\phi(r)}$$

é decrescente, mostremos que seu denominador é crescente. Nesse caso, devemos olhar para a integral que o origina.

$$\phi(r) = \int_0^R \frac{E_0(t)}{S_0^{n-1}(r_0+t)} dt = \int_0^R \frac{\int_0^t (r+s)^{n-1} ds}{(r+t)^{n-1}} dt$$

Derivando em relação a  $r$ ,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_0^R \frac{d}{dr} \frac{\int_0^t (r+s)^{n-1} ds}{(r+t)^{n-1}} dt \\ &= \int_0^R \frac{(r+t)^{n-1} \frac{d}{dr} \int_0^t (r+s)^{n-1} ds - (n-1)(r+t)^{n-2} \int_0^t (r+s)^{n-1} ds}{(r+t)^{2n-2}} dt \\ &= \int_0^R \frac{(r+t)(n-1) \int_0^t (r+s)^{n-2} ds - (n-1) \int_0^t (r+s)^{n-1} ds}{(r+t)^n} dt. \end{aligned}$$

Para que  $\phi'$  seja não-negativo é suficiente que o integrando acima seja não-negativo. Deste modo, basta mostrar que:

$$\frac{(r+t)(n-1) \int_0^t (r+s)^{n-2} ds - (n-1) \int_0^t (r+s)^{n-1} ds}{(r+t)^n} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(n-1) \int_0^t (r+t)(r+s)^{n-2} - (r+s)^{n-1} ds \geq 0,$$

que é verdadeiro, pois o integrando é não negativo em  $[0, t]$ .

Como  $f(r)$  é decrescente e  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \frac{2}{R^2}$  obtemos para  $A$  qualquer anel de largura  $R$

$$\lambda_1(A) \geq \frac{2}{R^2}.$$

A estimativa (4.10) é melhor do que a estimativa dada pela Desigualdade de Faber-Kahn (Teorema 2.0.5) se  $r$  for suficientemente grande.

**Observação 4.1.9.** *Ao fazer  $r \rightarrow \infty$ , o anel de largura  $R$  tende a uma faixa (região entre 2 hiperplanos) de largura  $R$ . Desta forma, se  $\Omega$  está contido numa faixa de largura  $R$ ,*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{2}{R^2}.$$

**Exemplo 4.1.10.** *Anéis de  $\mathbb{R}^3$*

*No Capítulo 2 comparamos a estimativa acima com anéis de  $\mathbb{R}^2$ . Para anéis de  $\mathbb{R}^3$  vale uma propriedade que não é verdade em outras dimensões, o autovalor  $\lambda_1$  depende da largura do anel, mas não do seu raio interno. Por isso,  $\mathbb{R}^3$  se torna um espaço conveniente para analisar a estimativa do Teorema Principal.*

**Proposição 4.1.11.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  um anel de raio interno  $r$  e largura  $R$ ,*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r < |x| < r + R\}.$$

*Então sua primeira autofunção é*

$$u(x) = \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi(|x|-r)}{R} \right)}{|x|}$$

*e seu primeiro autovalor é*

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{R^2}.$$

**Demonstração:**

Como  $u$  é radialmente simétrica,

$$\Delta u(t) = u''(t) + \frac{2}{t}u'(t),$$

onde  $t = |x|$ . Note que

$$tu(t) = \text{sen} \left( \frac{\pi(t-r)}{R} \right),$$

que derivando duas vezes resulta em

$$tu''(t) + 2u'(t) = -\frac{\pi^2}{R^2}tu(t),$$

e dividindo por  $t$  temos

$$\Delta u(t) = -\frac{\pi^2}{R^2}u(t),$$

que conclui essa demonstração.

A estimativa para qualquer anel de largura  $R$  dada pelo Teorema Principal é

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{R^2},$$

que é menor que o autovalor real, mas tem crescimento de mesma ordem.

## 4.2 Estimativa para bolas normais

Para obter uma estimativa para bolas normais, fazemos  $r_K$  tender a zero no teorema acima. A demonstração do próximo teorema segue as mesmas ideias do teorema para anéis, mas utiliza o conceito de função superharmônica para funções  $C^0$  :

**Definição 4.2.1.** *Dada  $u \in C^0(M)$ , dizemos que  $u$  é superharmônica em  $M$  se para todo conjunto  $V \subset\subset M$  e para toda função  $h$  harmônica em  $V$  com  $u \geq h$  em  $\partial V$ , tem-se  $u \geq h$  em  $V$ .*

As funções superharmônicas de classe  $C^0$  satisfazem o Princípio do Máximo. Com isso, mostraremos o seguinte teorema.

**Teorema 4.2.2.** *Seja  $B \subset M$  uma bola normal de centro  $p \in M$  e raio  $R$ . Suponha que  $\sup_B K = K$ . Além disso, se  $K > 0$ ,  $R$  é menor que o primeiro*

zero positivo da função  $S_K$ . Seja  $u \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ , tal que  $\Delta u = f$  em  $B$ . Então:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |f|.$$

$C$  é uma constante que depende apenas de  $n$ ,  $K$  e  $R$  dada por

$$C = \int_0^R \frac{E_K(t)}{S_K^{n-1}(t)} dt,$$

onde as funções  $S_K$  são as usuais e

$$E_K(t) = \int_0^t S_K^{n-1}(s) ds. \quad (4.11)$$

**Observação 4.2.3.** Apesar de  $S_K(0) = 0$ , a constante  $C$  está bem definida, como é verificado na demonstração que segue.

**Demonstração:**

Seja

$$g(t) = \int_t^R \frac{\int_0^s S_K^{n-1}(\tau) d\tau}{S_K^{n-1}(s)} ds,$$

$t \in [0, R]$ . Note que  $g$  é solução de

$$\begin{cases} (g'(t)S_K^{n-1}(t))' = -S_K^{n-1}(t) \\ g(R) = 0, \\ g'(0) = 0, \end{cases}$$

Temos que  $g \in C^0([0, R]) \cap C^2((0, R))$ , pois  $g$  é dada por uma integral, cujo integrando é contínuo e limitado em  $[0, R]$ . A verificação disto é imediata exceto para  $t = 0$ , onde basta observar que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int_0^s S_K^{n-1}(\tau) d\tau}{S_K^{n-1}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S_K^{n-1}(s)}{(n-1)S_K^{n-2}(s)C_K(s)} = 0.$$

Assim, tomando  $v$  como definido no início da demonstração do teorema para domínios do tipo anel, temos que  $\Delta(v - u) \leq 0$  em uma bola normal de centro  $p$  e raio  $R$ , exceto em  $p$ . Mas a função  $v - u$  é superharmônica (no sentido para funções  $C^0$ ) em toda bola normal, portanto vale o Princípio do Máximo para  $v - u$  e

$$g(0) = \int_0^R \frac{\int_0^s S_K(t)^{n-1} dt}{S_K(s)^{n-1}} ds$$

é a constante  $C$  para a bola normal.

Vejamos com mais detalhes que  $v - u$  é superharmônica. Denotemos por  $w$  a função  $v - u$  e note que  $\sup_B w = w(p)$ , pois  $g$  é decrescente com  $d$  e  $d(p) = 0$ . Para verificar a superharmonicidade, suponhamos por absurdo que isso é falso. Então existem  $\Omega \subset\subset B$ ,  $h \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  harmônica com  $w \geq h$  em  $\partial\Omega$  e  $p_0 \in \Omega$ , tal que  $h(p_0) > w(p_0)$ . Seja

$$\delta = \sup_{\Omega} (h - w),$$

que é finito e positivo, pois as funções  $h$  e  $w$  são contínuas no compacto  $\Omega$  e sua diferença é positiva em  $p_0$ . Seja  $\bar{h} = h - \delta$ , que é harmônica e menor ou igual a  $w$ . Além disso, existe  $p_1 \in \Omega$ , tal que  $w(p_1) = \bar{h}(p_1)$ . Seja

$$\Omega' = \{x \in \Omega \mid w(x) = \bar{h}(x)\}.$$

Pela regularidade de  $\bar{h}$ ,  $p \notin \Omega'$ , portanto existe uma vizinhança  $V$  de  $\Omega'$  que não contém  $p$  com  $\Omega' \subset\subset V$ . Assim, em  $\partial V$ ,  $\bar{h} < w$ . Seja

$$\epsilon = \inf_{\partial V} (w - \bar{h})$$

e analisemos a função  $\bar{h} + \frac{\epsilon}{2}$ . Ela é harmônica e está abaixo de  $w$  no bordo de  $V$ , mas acima de  $w$  em  $p_0 \in V$ . Isso contradiz o fato de  $w$  ser superharmônica no sentido clássico em  $V$ , já que  $p \notin V$ . Conclui-se que  $w$  superharmônica e com isso, a prova do teorema.

### 4.2.1 Casos particulares

É mais fácil calcular a constante utilizando a fórmula do teorema, porém ela também pode ser obtida fazendo  $r_K \rightarrow 0$  nos casos particulares da seção anterior, o que resolve o caso  $K = 0$  :

Se  $K = 0$ , olhando a expressão de  $C$  em (4.8), obtemos

$$C = \frac{R^2}{2n}.$$

Portanto  $\lambda_1 \geq \frac{2n}{R^2}$ . É bem conhecido que em dimensão 2, como o primeiro zero da função de Bessel  $J_0$  é aproximadamente 2.4048, de modo que

$$\lambda_1 \simeq \frac{(2.4048)^2}{R^2}.$$

Para  $K = 1$ , fazendo a conta do enunciado do último teorema e supondo  $R < \pi$  :

- $n = 2 \Rightarrow C = \ln \left( \frac{2}{\cos R + 1} \right)$ ;
- $n = 3 \Rightarrow C = \frac{1}{2 \cos 2R - 2} (\cos 2R + R \sin 2R - 1)$ ;

Para  $K = -1$ ,  $n = 2$

$$C = -R - 2 \ln 2 + 2 \ln(e^R + 1).$$

### Comparando Resultados

No caso de bolas geodésicas em  $S^n$ , a estimativa que obtivemos, já havia sido obtida por Cámera em [Ca]. Para  $R < \frac{\pi}{2}$ , há uma estimativa melhor, cuja prova me foi sugerida pelo professor Gregório Pacelli Bessa. Faremos uso da seguinte proposição.

**Proposição 4.2.4.** *Seja  $M = [0, R] \times S^{n-1}$  uma variedade riemanniana rotacionalmente simétrica com métrica riemanniana  $dt^2 + f(t)^2 d\theta^2$ ,  $f : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função, tal que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(t) > 0$  se  $t \in (0, R]$ . Então, dada  $u : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_+$  contínua em  $M$ , defina a função*

$$T_u(t) = \int_t^R \frac{1}{f^{n-1}(\sigma)} \int_0^\sigma f^{n-1}(s) u(s) ds d\sigma.$$

Tem-se, então, que

$$\Delta T_u(t, x) = u(t).$$

A demonstração desta proposição é um cálculo simples indicado em [BB].

Para aplicar a proposição acima para estimar autovalores utilizamos o teorema de Barta (Teorema 2.0.7). Olhemos para uma esfera geodésica de raio  $R < \frac{\pi}{2}$  em  $S^2$  como  $[0, R] \times S^1$ . Nesse caso, a métrica é  $\sin^2(t) dt^2 + d\theta^2$ . Escolhendo a função  $u(t) = \cos t$ , temos pelo resultado de Barta que

$$\lambda_1 \geq \inf_{[0, R]} \frac{\cos t}{T_u(t)} = \inf_{[0, R]} \frac{2 \cos t}{\cos t - \cos r}.$$

Note que a função

$$\frac{2 \cos t}{\cos t - \cos r}$$

tem derivada

$$(\cos r) \frac{\sin t}{(\cos r - \cos t)^2} \geq 0$$

em  $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Portanto, ela é crescente e seu ínfimo ocorre em  $t = 0$ . Logo,

$$\lambda \geq \frac{2}{1 - \cos r}.$$

Essa é uma estimativa melhor que a obtida aqui para os casos  $R < \frac{\pi}{2}$ .



### 4.3 Estimativa para domínios multiplamente conexos

Nesta seção gostaríamos de analisar o caso em que  $M$  tem mais de um buraco e, com a função distância a fronteira de cada um desses buracos, obter a constante  $C$  do Teorema Principal. No teorema aqui demonstrado, pede-se como antes que  $\exp_x t\eta(x)$  seja um difeomorfismo sobre sua imagem, mas pede-se apenas que a imagem contenha o domínio em questão. Portanto, para obter  $C$ , poderíamos simplesmente escolher um buraco e usar o Teorema 1.0.3. A vantagem de considerar mais de um buraco é que isso pode nos levar a uma constante melhor.

Vamos então definir precisamente um domínio com buracos.

**Definição 4.3.1.** *Seja  $M$  variedade riemanniana  $n$ -dimensional compacta conexa. Sejam  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  abertos conexos de classe  $C^2$  de  $M$  dois a dois disjuntos. Dizemos então que*

$$\Omega = M \setminus \bigcup_{i=1}^s \Omega_i$$

*é um domínio multiplamente conexo.*

**Teorema 4.3.2.** *Seja  $\Omega = M \setminus \bigcup_{i=1}^s \Omega_i$  um domínio multiplamente conexo como definido acima. Suponhamos que para todo  $i = 1, \dots, s$ ,  $\Omega \subset M_i$ , onde  $M_i$  é uma vizinhança normal de  $\partial\Omega_i$  na direção de  $\eta_i$  (normal exterior de  $\Omega_i$ ) de curvatura  $\Lambda_i < 0$  e largura  $R_i$ . Suponha ainda que  $\sup_M K = K$  e que, se  $K < 0$ ,  $\Lambda_i < -\sqrt{-K}$  e, se  $K > 0$ ,  $r_K(\Lambda_i) + R_i$  é menor que o primeiro zero positivo da função  $S_K$ . Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , tal que  $\Delta u = f$  em  $\Omega$ . Então*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} |f|. \quad (4.12)$$

onde  $C$  é uma constante que depende de  $n$ ,  $R_i$ ,  $\Lambda_i$  e de  $K$ , que aparece na demonstração que segue.

**Demonstração:**

Sejam

$$r_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{arccoth} \left( \frac{-\Lambda_i}{\sqrt{-K}} \right), & \text{se } K < 0 \\ \frac{1}{-\Lambda_i}, & \text{se } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arccot} \left( \frac{-\Lambda_i}{\sqrt{K}} \right) & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

e sejam  $g_i : [0, R_i] \rightarrow \mathbb{R}$  cada solução de

$$\begin{cases} (g_i'(t)S_K^{n-1}(r_i + t))' = -S_K^{n-1}(r_i + t) \\ g_i(R_i) = 0, \\ g_i'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

Tem-se que

$$g_i(t) = \int_t^{R_i} \frac{\int_0^s S_K^{n-1}(r_i + \tau) d\tau}{S_K^{n-1}(r_i + s)} ds$$

é essa solução. Além disso, cada  $g_i$  é solução do problema do teorema anterior (4.7) em  $\Omega$ , assim  $\Delta(g_i \circ d_i) \leq -1$  em  $\Omega$ . Defina  $\Omega : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \min_i g_i(d_i(x))$ , onde  $d_i$  é a distância a  $\partial\Omega_i$ . Temos que a função  $v$  definida a partir desta  $G$ ,

$$v(y) = \sup_{\Omega} |u| + G(y) \sup_{\Omega} |f|$$

é tal que  $v - u$  é superharmônica no sentido contínuo apenas, por ser o mínimo de superharmônicas (referência em [GT]). Então, como no teorema do anel,

$$C = \sup_{\Omega} G$$

satisfaz a condição (4.12).

Assim concluímos a demonstração do último dos principais teoremas. Novamente, analisaremos um caso particular no que segue.

### 4.3.1 Caso particular

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio multiplamente conexo. Então,

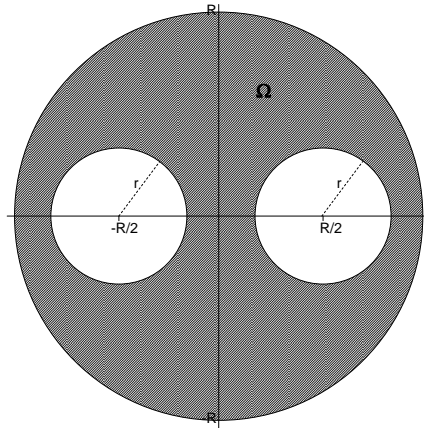
$$g_i(t) = \int_t^{R_i} \frac{\int_0^s (r_i + \tau) d\tau}{r_i + s} ds,$$

onde  $t$  é a distância a  $\partial\Omega_i$ ,  $r_i = \frac{1}{-\Lambda_i}$  e  $R_i = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Omega_i)$ . Assim,

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \int_t^{R_i} \frac{\int_0^s (r_i + \tau) d\tau}{r_i + s} ds \\ &= \int_t^{R_i} \frac{(r_i + s)^2 - (r_i)^2}{2(r_i + s)} ds = \frac{(r_i + s)^2}{4} - \frac{r_i^2}{2} \ln(r_i + s) \Big|_t^{R_i} \\ &= \frac{(r_i + R_i)^2 - (r_i + t)^2}{4} - \frac{r_i^2}{2} \ln \left( \frac{r_i + R_i}{r_i + t} \right) \end{aligned}$$

É bastante complicado achar o supremo da função  $G$ . Por isso, escolhemos mostrar um exemplo bastante simétrico, de modo a facilitar as contas e a visão do leitor sobre os fatos. Seja  $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$  e sejam  $B_1 = B_r\left(\left(-\frac{R}{2}, 0\right)\right)$ , e  $B_2 = B_r\left(\left(\frac{R}{2}, 0\right)\right)$ ,  $x_2 > 0$  duas bolas menores ( $r < \frac{R}{2}$ ) contidas em  $B$ . Tomamos  $\Omega = B \setminus (B_1 \cup B_2)$ . Assim,

$$r_1 = r_2 = r, \quad R_i = \frac{3R}{2} - r.$$



As funções  $g_i$  decrescem quando a distância a  $B_i$  aumenta e são tais que  $g_1(x, y) = g_2(-x, y)$ . Lembremos que a função  $G$  é o mínimo entre as  $g_i$ s. Assim,  $G = g_1$  em  $B \cap \{(x, y) \mid x > 0\}$  e  $G = g_2$  em  $B \cap \{(x, y) \mid x < 0\}$ . Como as funções  $g_i$ s decrescem ao se afastar de  $\partial B_i$ , o supremo de  $G$  ocorre em  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ , que é o ponto cujo máximo entre a distância a  $\partial B_1$  e  $\partial B_2$  é o menor dentre todos os pontos de  $\Omega$ . Temos que

$$\text{dist}((0, 0), \partial B_i) = \frac{R}{2} - r$$

Temos que

$$\text{dist}((0, 0), \partial B_i) = \frac{R}{2} - r.$$

Avaliando  $g_i$  em  $t = \frac{R}{2} - r$ , obtemos para  $i = 1$  e para  $i = 2$  que

$$\begin{aligned} g_i\left(\frac{R}{2} - r\right) &= \frac{\left(r + \frac{3R}{2} - r\right)^2 - \left(r + \frac{R}{2} - r\right)^2}{4} - \frac{r^2}{2} \ln \left( \frac{r + \frac{3R}{2} - r}{r + \frac{R}{2} - r} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2}{4} - \frac{r^2}{2} \ln \left( \frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R}{2}} \right) = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{2}{R^2 - r^2 \ln 3}. \quad (4.14)$$

A estimativa de Faber-Kahn para domínios desse tipo é:

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\lambda_1(B_1)}{R^2 - 2r^2} \quad (4.15)$$

Observamos que estimativa de Faber-Kahn é melhor do que (4.14) para este tipo de domínio.

Analisou-se domínios com dois buracos em  $\mathbb{R}^2$ , mas não foi encontrado um caso onde usar o Teorema para multiplamente conexos fornece uma estimativa boa para o primeiro autovalor do domínio. Muitas vezes mostrou-se melhor considerar uma bola que contenha o domínio e usar o Teorema para bolas (Teorema 4.2.2).

# Referências Bibliográficas

- [B] Barta, J.: “*Sur la vibration fondamentale d’une membrane*” C. R. Acad. Sci. 204, 1937, 472-473.
- [BB] Barroso, C. S., Bessa, G. P.: “*Lower Bounds for the First Laplacian Eigenvalue of Geodesic Balls of Spherically Symmetric Manifolds*” ArXiv: math/0601180v4 math.DG, 2006.
- [BC] Bishop, R., Crittenden, R.: “*Geometry of manifolds*” Academic Press, New York, 1964.
- [BM1] Bessa, G. P., Montenegro, J. F.: “*An Extension of Barta’s Theorem and Geometric Applications*” ArchivX Paper Id: math.DG/0308099. (2008)
- [BM2] Bessa, G. P., Montenegro, J. F.: “*Eigenvalue Estimates for Submanifolds with Locally Bounded Mean Curvature*” Annals of Global analysis and Geometry, 24: 279-290, 2003.
- [Ca] Cámara, G. A.: “*Some inequalities for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator*” [http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/22421/1/edicion\\_005.pdf](http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/22421/1/edicion_005.pdf) consultado em 22 de julho de 2010.
- [CG] Cheng, S. Y.: “*Eigenfunctions and eigenvalues of the Laplacian*” Am. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 27, part II, 1975, 185-193.
- [BCG] Betz, C., Camera, G. A., Gzyl, H.: “*Bounds for the first eigenvalue of a spherical cup*” Appl. Math. Optim. **10**, 193-202, (1983)
- [dC] do Carmo, Manfredo Perdigão: “*Geometria Riemmanina*” 3ed. IMPA (2005).
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.: “*Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*”, Springer-Verlag (1998).

- [LY] Li, P., Yau, S. T.: “*Estimate of eigenvalues of a compact Riemannian manifold*”, Proc. Symp. Pure Math., Vol 36, A. M. S. pp. 205-240.
- [P] Pedrosa, R. H. L.: “*Uma introdução a simetrização em Análise e Geometria*”, Colóquio Brasileiro de Matemática, 2005.
- [PMYC] Pak, E., Minn, H., Yoon, O.K., Chi, D.P.: “*On the first eigenvalue estimate of the Dirichlet and Neumann problem*”, Bull. Korean Math. Soc. **23** (1968), pp. 21-25.
- [SY] Schoen, R. e Yau, S-T: “*Lectures on Differential Geometry*” Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, Vol I, International Press (1994).
- [W] Warner, F.: “*Extensions of the Rauch comparison theorem to submanifolds*” Trans. A. M. S. (1966) 122, pp. 341-356
- [Y] Yang, D.: “*Lower bound estimates of the first eigenvalue for compact manifolds with positive ricci curvature*”, Pacific Journal of Mathematics, Vol 190, pp. 383-398 (1999).