

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

**Pedro Felipe Vergo Scheffer**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA PAREDE DE UM  
RESERVATÓRIO CILÍNDRICO DE CONCRETO ARMADO  
ATRAVÉS DA ABORDAGEM CINEMÁTICA DA ANÁLISE  
LIMITE**

Porto Alegre  
junho 2010

**PEDRO FELIPE VERGO SCHEFFER**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA PAREDE DE UM  
RESERVATÓRIO CILÍNDRICO DE CONCRETO ARMADO  
ATRAVÉS DA ABORDAGEM CINEMÁTICA DA ANÁLISE  
LIMITE**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de  
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal  
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Engenheiro Civil

**Orientador: Samir Maghous**

Porto Alegre  
junho 2010

**PEDRO FELIPE VERGO SCHEFFER**

**ANÁLISE DE ESTABILIDADE DA PAREDE DE UM  
RESERVATÓRIO CILÍNDRICO DE CONCRETO ARMADO  
ATRAVÉS DA ABORDAGEM CINEMÁTICA DA ANÁLISE  
LIMITE**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 15 de julho de 2010

Prof. Samir Maghous  
Dr., École Nationale des Ponts et Chaussées  
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt  
Coordenadora

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade de São Paulo

**Prof. Jean Marie Désir (UFRGS) (UFRGS)**  
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Samir Maghous (UFRGS)**  
Dr. pela École Nationale des Ponts et Chaussées

Dedico este trabalho a minha família, por todo o apoio dado durante o Curso de Graduação, e, mais ainda, durante a produção deste Trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao Prof. Samir Maghous, orientador deste trabalho, por sua dedicação, seus esclarecimentos e os comentários diretos que ajudaram muitas vezes a retomar o rumo do trabalho.

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho e ao Prof. Jean Marie Désir, integrantes da banca examinadora, por suas arguições e sugestões que colaboraram na qualificação deste trabalho.

Agradeço à Prof. Carin M. Schmitt, pelas constantes revisões, correções e sugestões quanto à forma, escrita e apresentação do trabalho.

Agradeço a minha família por todo o apoio dado durante a elaboração do trabalho, e por tolerar as pilhas de materiais espalhados pela casa, as noites de sono adiado e a constante presença de música na casa.

Agradeço aos meus colegas e amigos por todo o apoio moral e motivação dadas nos momentos difíceis.

Há muitas maneiras de avançar, mas só uma maneira de  
ficar parado.

*Franklin D. Roosevelt*

## RESUMO

SCHEFFER, P. F. V. **Análise de estabilidade de uma parede de um reservatório de concreto armado através da aproximação cinemática da análise limite**. 2010. 53 f. Trabalho de Diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Visto a grande importância da reservação de líquidos em diversas áreas, como o saneamento e a indústrias químicas, com reservatórios e tanques executados em concreto armado, este trabalho é dedicado à análise de estabilidade da parede dessas estruturas, que é a parte mais solicitada quando estão apoiadas ou enterradas. Considera-se a parede como uma casca cilíndrica, submetida a pressões hidrostáticas internas, causadas pelo líquido reservado, e externas, para o carregamento de solo. São mostradas formulações para a verificação de estruturas existentes e para uma relação ótima entre as resistências à tração e flexão da estrutura, baseadas na abordagem cinemática da análise limite. Essas formulações representam a estrutura no estado limite último. Embora não represente um critério suficiente para uma estrutura de reservatório, essa análise é mais simples de ser executada que uma análise de estado limite de serviço que exija o uso da elasticidade, além de permitir de forma mais simples uma comparação do comportamento da estrutura usando as resistências normal e de flexão como variáveis. Como critério de resistência do concreto armado, é usado um critério simplificado do tipo Rankine, que limita a resistência apenas nas tensões principais. O método exige que se considere para a estrutura um comportamento no estado rígido-perfeitamente plástico. É apresentado então o mecanismo de ruptura ótimo para diferentes condições de contorno, relacionando o carregamento atuante, as propriedades geométricas da estrutura e as condições de resistência.

Palavras-chave: reservatórios; concreto armado; análise limite.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: delineamento da pesquisa .....	13
Figura 2: tipos de reservatório (corte): (a) enterrado; (b) apoiado; (c) elevado .....	16
Figura 3: modelo simplificado para dimensionamento de reservatório .....	18
Figura 4: geometria do tubo cilíndrico .....	20
Figura 5: faixa longitudinal segundo os paralelos .....	21
Figura 6: envoltória de resistência para concreto no plano 12 .....	26
Figura 7: sistema de coordenadas para um tanque cilíndrico .....	29
Figura 8: condições de contorno da estrutura para borda: (a) simplesmente apoiada, (b) rotulada e (c) engastada .....	31
Figura 9: campos de velocidade para mecanismos de ruptura com borda simplesmente apoiada: (a) sem formação de rótulas, $C_1$ e (b) com formação de uma rótula, $C_2$ .....	31
Figura 10: campos de velocidade dos mecanismos para borda com translação nula com formação de: (a) uma rótula, (b) duas rótulas e (c) três rótulas .....	32
Figura 11: identificação das rótulas .....	40
Figura 12: solução das equações de $k_1$ x $k_2$ dependendo da condição de contorno da borda, com a identificação do mecanismo ótimo para cada trecho da solução ..	42
Figura 13: sentido das variáveis para o caso de pressão interna .....	49
Figura 14: curvas de $N_1$ x $M_1$ para diferentes raios do reservatório .....	51

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: variáveis constantes para o caso analisado .....	50
Quadro 2: variação do raio por caso .....	51



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
<b>2 MÉTODO DE PESQUISA</b> .....	11
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA .....	11
2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	11
<b>2.2.1 Objetivo principal</b> .....	11
<b>2.2.3 Objetivo secundário</b> .....	12
2.3 PRESSUPOSTOS .....	12
2.4 DELIMITAÇÕES .....	12
2.5 LIMITAÇÕES .....	12
2.6 DELINEAMENTO DA PESQUISA .....	13
<b>3 RESERVATÓRIOS</b> .....	15
3.1 CLASSIFICAÇÃO DE RESERVATÓRIOS .....	16
<b>3.1.1 Reservatórios enterrados</b> .....	17
<b>3.1.2 Reservatórios apoiados</b> .....	18
3.3 MÉTODOS DE CÁLCULO .....	18
<b>4 ANÁLISE LIMITE</b> .....	24
4.1 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA .....	24
4.2 ABORDAGEM ESTÁTICA .....	26
4.3 ABORDAGEM CINEMÁTICA .....	26
4.4 RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS EM CONCRETO ARMADO .....	29
<b>4.4.1 Mecanismos de ruptura</b> .....	30
<b>4.4.2 Carregamento do reservatório</b> .....	33
<b>4.4.3 Determinação do trabalho externo</b> .....	35
<b>4.4.4 Determinação do trabalho resistente máximo</b> .....	36
<b>4.4.5 Limites superiores do carregamento</b> .....	42
<b>4.4.6 Condição de estabilidade para a estrutura</b> .....	43
<b>5 RESULTADOS</b> .....	45
5.1 INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA .....	45
5.2 INFLUÊNCIA DA RELAÇÃO ENTRE AS RESISTÊNCIAS .....	48
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	52
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	53

## 1 INTRODUÇÃO

A necessidade de acúmulo de líquidos para diferentes fins levou a humanidade a desenvolver estruturas que pudessem realizar essa tarefa. Para isso, são usados tanques e reservatórios em diversas áreas, como a de saneamento ou a petroquímica. Torna-se interessante, portanto, estudar o comportamento de tais estruturas de forma que, com esse conhecimento, seja possível fazer projetos mais econômicos e eficientes.

Os reservatórios são divididos, estruturalmente, em elevados, apoiados e enterrados. Os primeiros apresentam maior influência do vento, enquanto os últimos incluem carregamento devido ao empuxo do solo.

A vantagem da forma cilíndrica em relação a outros possíveis formatos de reservatório é que, sob o efeito de pressões hidrostáticas, a principal solicitação nas suas paredes é a de tração, apresentando solicitações devido à flexão na direção ortorrádial apenas na consideração dos efeitos de borda. Quaisquer outros formatos apresentam parcela considerável de solicitações devido à flexão das paredes nas duas direções do plano da casca em toda estrutura.

A teoria da análise limite permite avaliar a carga de ruptura de estruturas, com conseqüente verificação do seu fator de segurança. Por outro lado, é possível usar os carregamentos determinados para encontrar a resistência mínima necessária para a estrutura. No caso de estruturas de concreto armado, os custos da estrutura são reduzidos ao se minimizar a taxa de armadura empregada.

Neste trabalho, será dimensionada a armadura de um reservatório em concreto armado cilíndrico apoiado e enterrado com o uso das ferramentas da análise limite depois de estabelecida a fundamentação teórica sobre o comportamento de estruturas de reservatório e a teoria da análise limite.

No primeiro capítulo do trabalho foi apresentada a introdução ao tema e a descrição dos capítulos constituintes do trabalho.

O segundo capítulo trata do método de pesquisa usado, envolvendo a questão de pesquisa, com seus objetivos, pressupostos, limitações e delimitações, finalizando com o delineamento da pesquisa.

O terceiro capítulo trata da pesquisa bibliográfica referente aos métodos de dimensionamento de reservatórios, sendo de importância a introdução do método de solução geral de cascas cilíndricas.

O quarto capítulo envolve a formulação da teoria da análise limite e a aplicação do teorema cinemático no problema de cascas cilíndricas.

No quinto capítulo são mostrados e comentados os resultados da análise.

No sexto capítulo são realizadas as considerações finais do trabalho, assim como propostos os temas de continuação do trabalho.

## **2 MÉTODO DE PESQUISA**

### **2.1 QUESTÃO DE PESQUISA**

A questão de pesquisa é: qual o comportamento de uma casca cilíndrica de concreto armado submetido a pressões hidrostáticas ou geostáticas, quando analisado sob a abordagem cinemática da análise limite?

### **2.2 OBJETIVOS DO TRABALHO**

#### **2.2.1 Objetivo principal**

O objetivo principal deste trabalho é a determinação do comportamento no instante da ruptura de uma casca cilíndrica de parede de um reservatório em concreto armado submetida a solicitações hidrostáticas e geostáticas segundo a abordagem cinemática da análise limite.

#### **2.2.2 Objetivos secundários**

O objetivo secundário do trabalho é obter a formulação que verifica a segurança de um reservatório cilíndrico de concreto armado.

## 2.3 PRESSUPOSTOS

Assume-se como válido o comportamento das estruturas determinado pelo teorema cinemático da análise limite, ou seja, as estruturas se comportam como sendo rígidas-perfeitamente plásticas. Considera-se que, para os carregamentos aplicados nesse trabalho, os momentos fletores segundo os eixos radial e axial podem ser desprezados, visto que seus valores são muito pequenos quando comparados com as outras solicitações internas.

## 2.4 DELIMITAÇÕES

O trabalho foi delimitado a um tanque em concreto armado de forma cilíndrica submetido ao carregamento interno de água e carregamento externo de solo, sendo obtidas as formulações gerais dos mecanismos de ruptura para a análise cinemática.

## 2.5 LIMITAÇÕES

As limitações da pesquisa são:

- a) a estrutura estará submetida a apenas os carregamentos axissimétricos hidrostático interno, representando o líquido reservado, e geostático externo, representando o carregamento de solo, considerando que os níveis do líquido reservado e do solo estejam no topo da parede;
- b) os carregamentos serão linearmente variáveis de acordo com a altura, ou seja, tanto o conteúdo reservado quanto o solo são considerados materiais homogêneos;
- c) as condições de contorno se aplicam apenas à borda inferior. A borda superior é considerada livre para todos os casos.

## 2.6 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Conforme ilustrado na figura 1, a pesquisa foi delineada em:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) determinação das variáveis que envolvem o problema analisado;
- c) equacionamento das funções que determinam a segurança da estrutura analisada ou a taxa de armadura ótima segundo o teorema estático da análise limite;
- f) dimensionamento da estrutura segundo o método geral de solução de cascas cilíndricas
- g) comparação dos resultados;
- h) conclusões.

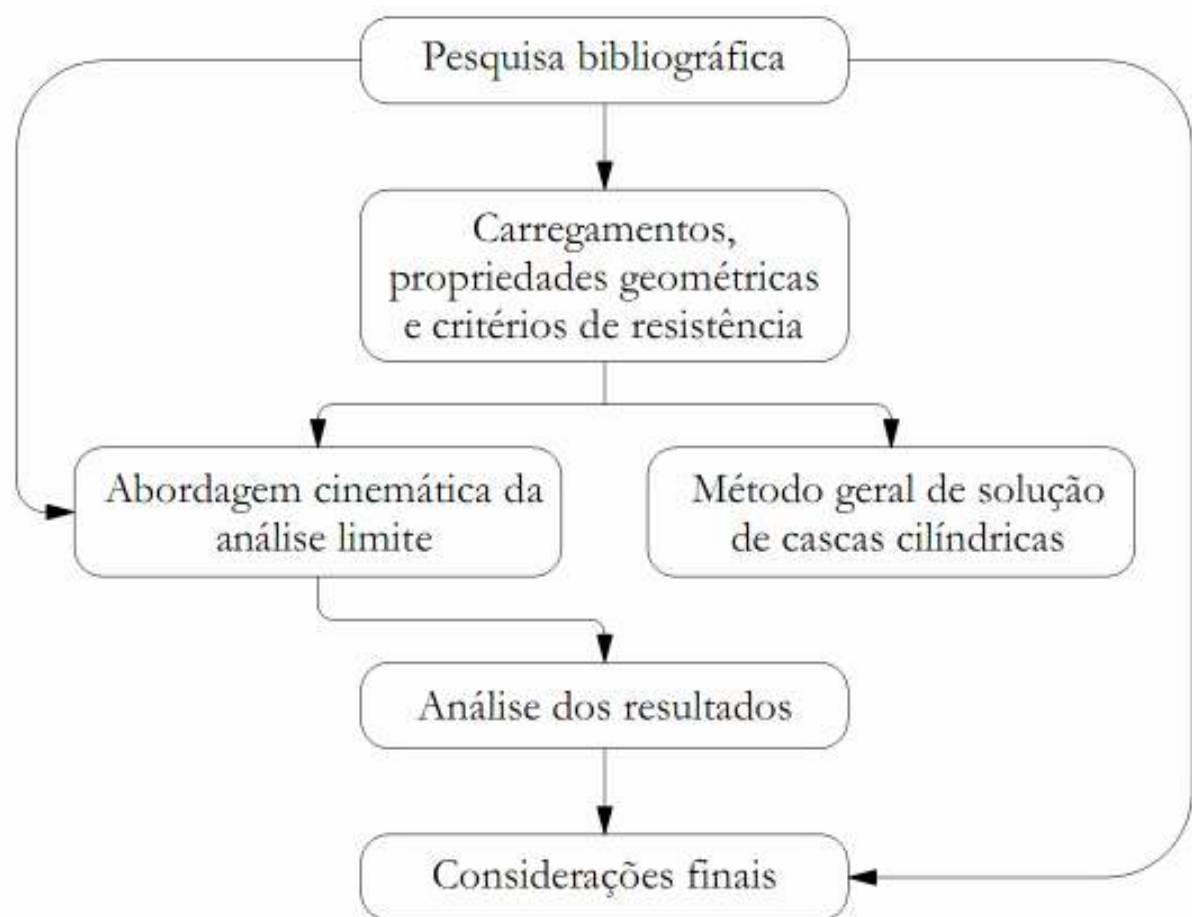


Figura 1: delineamento da pesquisa

A **pesquisa bibliográfica** se destinou à revisão da teoria da análise limite e do estudo das considerações para o dimensionamento de reservatórios cilíndricos, incluindo-se aí a pesquisa do método usado para o cálculo segundo a teoria da elasticidade.

A **determinação das variáveis** envolveu as propriedades geométricas da casca, o critério de resistência do concreto, os carregamentos atuantes na estrutura e a vinculação externa da casca.

Na etapa de **equacionamento das funções da estrutura** foi feita a determinação das equações que regem o comportamento da estrutura segundo a abordagem cinemática da análise limite. Esta consiste na determinação da segurança da estrutura de acordo com as descontinuidades do campo de velocidades da estrutura, ou seja, através dos possíveis mecanismos de ruptura da estrutura.

No **método geral de solução de cascas cilíndricas** é mostrada a formulação baseada na teoria da elasticidade para o cálculo de cascas cilíndricas, que representa o método comumente usado para o dimensionamento de paredes de reservatórios cilíndricos.

Na **comparação de resultados** foram relacionados os diferentes métodos para o dimensionamento da estrutura de acordo com a taxa de armadura exigida.

Nas **conclusões** foram analisados os mecanismos ótimos de ruptura da estrutura, e alguns benefícios de se conhecer o comportamento da estrutura no estado limite último assim como as limitações de realizar o dimensionamento através dessa abordagem.

### 3 RESERVATÓRIOS

Reservatórios são estruturas cuja função é o armazenamento de algum líquido. De acordo com Kirby et al.<sup>1</sup> (1956 apud GUIMARÃES, 1995, p. 1), os primeiros reservatórios de que se tem notícia são as cisternas construídas em rochas sãs, desde 25 séculos a.C., pela civilização precursora da grega.

Com o desenvolvimento tecnológico da sociedade, enumeraram-se mais usos para os reservatórios. Como listam Guerrin e Lavaur (2003, p. 1), os reservatórios não somente armazenam água, como também produtos alimentícios ou hidrocarbonetos.

Os reservatórios têm grande importância nos sistemas de saneamento. Suas funções abrangem tanto a área de abastecimento de água tratada à população, quanto o uso em estações de tratamento de água e esgotos. Dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística mostram que, no ano de 2007, 84,3% dos domicílios no Brasil eram servidos por rede geral de abastecimento de água (BRASIL, 2009a). No entanto, apenas 52% eram servidos por rede coletora de esgotos (BRASIL, 2009b). Esse dado já demonstra o quão necessárias e volumosas devem ser as obras de saneamento no Brasil.

É interessante considerar que uma pequena parte do esgoto recolhido é tratada, como pode ser visto no exemplo de Porto Alegre. Dados do Departamento Municipal de Água e Esgotos de Porto Alegre apresentam a porcentagem de população da cidade abastecida com água tratada como 100% (PORTO ALEGRE, 2009a). Mas a população atendida com o serviço de coleta de esgotos é de 85%. Contudo, desse esgoto coletado, há capacidade de tratar apenas 27%, sendo realmente tratados somente 20% do esgoto (PORTO ALEGRE, 2009b). Já há projeto de uma nova estação de tratamento de esgotos na cidade, assim como há em vários locais do País, de forma a suprir a demanda.

---

<sup>1</sup> KIRBY, R.S. et al. **Engineering in history**. New York: McGraw-Hill, 1956.



### 3.1 CLASSIFICAÇÃO DE RESERVATÓRIOS

Os reservatórios podem ser classificados de diferentes formas, dependendo dos critérios usados para a classificação e da utilidade desta. As classificações consideram, em geral, a função e o modelo estrutural do reservatório. Considerando como líquido reservado apenas água (bruta, tratada ou servida), serão apresentadas algumas classificações de forma a se contextualizar a pesquisa.

Hanai<sup>2</sup> (1981 apud GUIMARÃES, 1995, p. 3) diferencia os reservatórios segundo:

- a) método construtivo, como reservatórios elevados, enterrados ou de superfície (apoiados), como visto na figura 2;
- b) volume reservado, sendo pequenos para volumes abaixo de 500 m<sup>3</sup>, médios até 5000 m<sup>3</sup> e grandes acima deste valor.
- c) uso, como reservatórios de acumulação ou de equilíbrio.

Dacach<sup>3</sup> (1979 apud GUIMARÃES, 1995, p. 3), quanto ao uso, ainda inclui a reserva de incêndio.

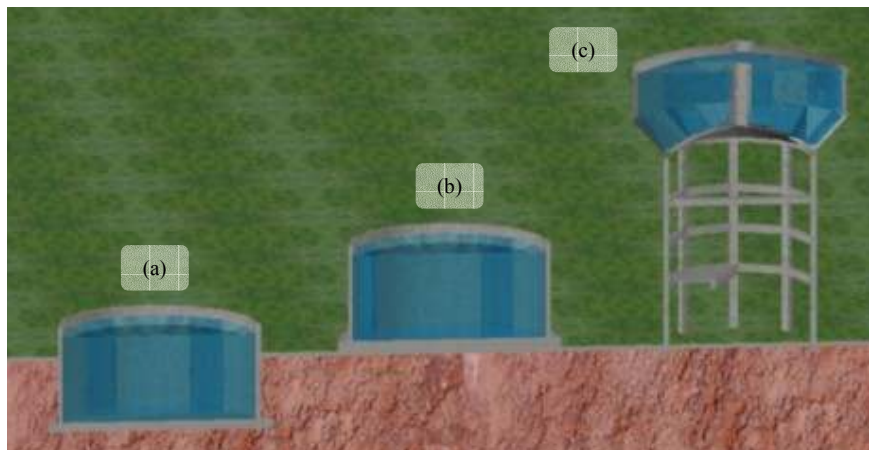


Figura 2: tipos de reservatório (corte): (a) enterrado (b) apoiado e (c) elevado.

<sup>2</sup> HANAI, J. B. **Reservatórios de parede ondulada**. 1977. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos.

<sup>3</sup> DACACH, N. G. **Sistemas urbanos de água**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

Guerrin e Lavaur (2003, p.13-15) generalizam os usos dos reservatórios, considerando a mistura de produtos químicos (dentro do escopo do trabalho, como ocorre em estações de tratamento de água ou esgotos) e para uso esportivo, como em piscinas. Quanto ao método construtivo, o autor diferencia os reservatórios ao nível do solo (apoiados) e os elevados sobre pilares, estruturas e edifícios, não considerando os reservatórios enterrados.

De fundamental importância ao comportamento estrutural é a classificação quanto à forma, que pode ser usada para definir quais os melhores métodos de cálculo a utilizar. Guerrin e Lavaur (2003, p. 14) mencionam reservatórios quadrados, retangulares, cilíndricos ou de forma qualquer. Os dois primeiros tipos apresentam maior facilidade construtiva, e de disposição no terreno. Já os reservatórios cilíndricos são mais eficientes na resistência às solicitações, visto que não sofrem de momento ao redor do eixo angular, sendo principalmente solicitados à tração.

Relacionada especificamente aos reservatórios cilíndricos é a classificação apresentada por Ramanjaneyulu et al. (1993, p. 205, 209-214), que diferencia os reservatórios segundo o comportamento no instante da ruptura. A diferenciação dos reservatórios é então quanto à quantidade de rótulas plásticas circulares formadas no instante da ruptura, sendo os reservatórios denominados:

- a) curtos, quando apresentando apenas uma rótula, na base;
- b) médios, quando apresentando duas rótulas;
- c) compridos, quando apresentando três rótulas plásticas no instante da ruptura.

### 3.1.1 RESERVATÓRIOS ENTERRADOS

Reservatórios enterrados, como se pode inferir pelo nome, são aqueles construídos abaixo da cota do terreno. A diferença deste para os outros tipos de reservatório, é que deve ser considerada a ação do solo na superestrutura do reservatório, e não somente nas fundações. Portanto, as propriedades do solo devem ser levadas em contas na hora de considerar os carregamentos atuantes nas paredes do reservatório.

Entre as informações necessárias para o estudo do reservatório, está a presença de água no solo. Caso o nível de água seja elevado no terreno, pode ocorrer a flutuação do reservatório, ou seja, a separação da base do reservatório da superfície do solo.

### 3.1.2 RESERVATÓRIOS APOIADOS

Reservatórios apoiados podem ser considerados reservatórios enterrados com pressão externa desprezável, quando possuem pouca altura, ou estiverem localizados em região de regime eólico menos intenso.

### 3.2 MÉTODOS DE CÁLCULO

Existem diversos métodos que podem ser aplicados para o cálculo das solicitações atuantes em reservatórios de concreto armado, e seu consequente dimensionamento. Estes métodos variam entre mais simplificados e mais complexos, e podem ser adequados a diferentes tipos de estruturas, variando de acordo com as condições de contorno.

Uma das formas simplificadas descritas por Guerrin e Lavour (2003, p. 207-208), para o dimensionamento de paredes de reservatório com deslocamentos livres se baseia simplesmente do equilíbrio de forças na parede do reservatório, como representado na figura 3, e explicitado na equação 1. A área de aço  $A$  deve estar em equilíbrio com o retângulo  $aa'bb'$ .

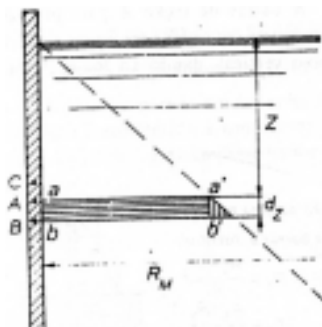


Figura 3: modelo simplificado para dimensionamento de reservatório (GUERRIN; LAVOUR, 2003, p. 206)

Desta forma:

$$A\bar{\sigma}_a = \varpi R Z dZ \quad (\text{equação 1})$$

Onde:

A = área de uma barra de armadura;

$\bar{\sigma}_a$  = tensão de escoamento do aço;

$\varpi$  = porcentagem de aço;

R = raio do reservatório;

Z = nível de água sobre o retângulo;

dZ = altura do retângulo.

É importante lembrar que o método acima é válido somente para quando se considerar a água como líquido reservado.

A solução geral para o problema do cálculo de tubos cilíndricos, quando considerados como uma casca delgada, pode ser encontrada em Guerrin e Lavour (2003, p. 209) e Guimarães (1995, p. 38). Para solução, considera-se a rigidez do cilindro como uma soma das parcelas de vigas sobre base elástica, no sentido longitudinal, e anéis circulares no sentido dos paralelos do cilindro.

A espessura e a pressão do tubo podem ser variáveis ao longo do comprimento do tubo. Entretanto, ao longo dos paralelos, devem se manter constantes. Podem ainda atuar forças radiais de cisalhamento e momentos nos planos dos paralelos, desde que distribuídos uniformemente nos paralelos. Para o tubo ser considerado uma casca delgada, deve ter uma relação espessura/raio expressa máxima igual à mostrada na equação 2. A figura 4 mostra o sentido positivo das pressões atuantes no tubo.

$$\left(\frac{h}{r}\right)_{\max} = \frac{1}{20} \quad (\text{equação 2})$$

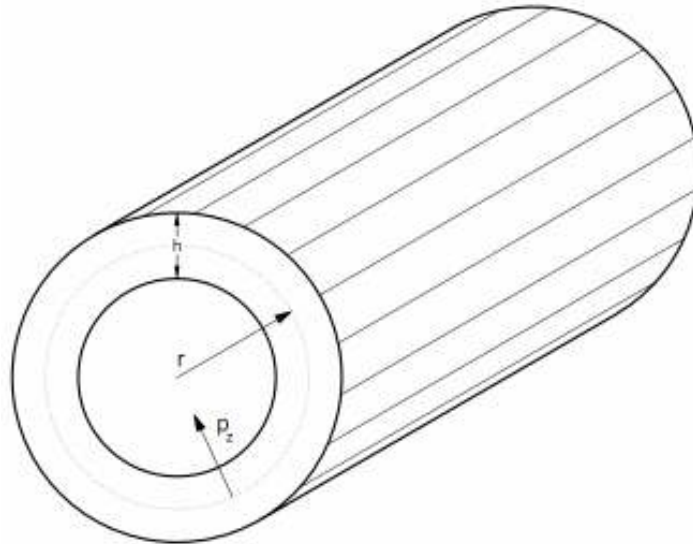


Figura 4: geometria do tubo cilíndrico (adaptado de GUIMARÃES, 1995, p. 38)

Onde:

r: raio médio da parede do cilindro;

$p_z$ : pressão atuante no cilindro, considerando a direção ao centro do cilindro como positiva;

h: espessura do cilindro.

Para as faixas transversais, segundo os paralelos, as deformações se dão apenas na direção radial, mantendo-se a seção circular. Portanto, as deformações devem ser iguais no mesmo paralelo. Porém, em paralelos diferentes, pode haver diferença nas deformações, o que gera o efeito da flexão de viga sob apoio elástico no sentido longitudinal. Aplicando-se uma pressão  $\rho$  distribuída uniformemente no paralelo, no sentido negativo em relação a  $p_z$ , se obtêm a figura 5. Lembrando que  $p_z$  e  $\rho$  são constantes no paralelo, mas podem variar no sentido longitudinal. Na equação 3 é feito o equilíbrio das forças  $N_\theta$  com a projeção da pressão  $\rho$ . A tensão normal à seção das paredes do cilindro,  $\sigma_\theta$ , é dada pela equação 4. Então, considerando-se a deformação específica radial do paralelo da forma que é dada na equação 5,

para uma faixa com base  $b$  unitária, pode-se obter a relação do deslocamento radial com a pressão atuante no cilindro, mostrada na equação 6.

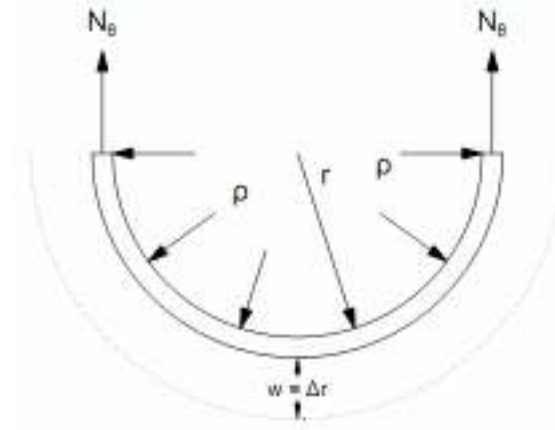


Figura 5: Faixa segundo os paralelos (adaptado de GUIMARÃES, 1995, p. 39)

As equações são:

$$2N_{\theta} = \int_0^{\pi} \rho r \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \rightarrow N_{\theta} = \rho r \quad (\text{equação 3})$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{bh} \quad (\text{equação 4})$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{w}{r} \quad (\text{equação 5})$$

$$\rho = \frac{Eh}{r^2} w \quad (\text{equação 6})$$

Onde:

$\sigma_{\theta}$ : tensão normal atuando na direção dos paralelos;

$N_\theta$ : força normal atuando na direção dos paralelos;

b: base da faixa do anel;

h: espessura do cilindro;

$\alpha$ : ângulo de  $\rho$  em relação a  $N_\theta$ , considerando  $\alpha=0$  quando  $\rho$  é perpendicular a  $N_\theta$ ;

$\varepsilon_\theta$ : deformação específica da faixa do paralelo;

$\Delta r$ : variação do raio do anel;

w: deslocamento radial da parede do cilindro, sendo  $w = \Delta r$ ;

E: módulo de elasticidade do material constituinte do cilindro.

As faixas longitudinais, segundo os meridianos, comportam-se como vigas apoiadas continuamente sobre base elástica, sendo o deslocamento w proporcional à ação de carregamento. Considerando y como o eixo longitudinal do cilindro, e conseqüentemente da viga, é dada a equação diferencial da viga em flexão na equação 7. Como a viga está apoiada sobre uma base elástica cuja rigidez é a rigidez de flexão da parede, o expressão que denota a rigidez da seção é dado por  $(1-\nu^2)/EI$ . A rigidez para flexão de placas é dada pelo termo D (equação 8), o que em conjunto com a relação dada pela equação 6 resulta na equação diferencial final dada na equação 9, com o termo  $\beta$  sendo explicitado na equação 10. A equação 11 mostra a solução geral da equação diferencial. Desta forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{(1-\nu^2)}{EI} p \rightarrow \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{(1-\nu^2)}{EI} (p_z - \rho) \quad (\text{equação 7})$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{equação 8})$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4\beta^4 w = \frac{p_z}{D} \quad (\text{equação 9})$$

$$\beta = \frac{[3(1-\nu^2)]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{rh}} \quad (\text{equação 10})$$

$$w = \frac{p_z r^2}{Eh} + e^{\beta y} (C_1 \cos \beta y + C_2 \sin \beta y) + e^{-\beta y} (C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \quad (\text{equação 11})$$

Onde:

w: deslocamento radial da parede do cilindro;

y: eixo longitudinal do cilindro;

v: coeficiente de Poisson do material constituinte;

E: módulo de elasticidade do material constituinte;

I: momento de inércia à flexão do elemento de viga;

p: pressão atuante no sistema;

$\rho$ : parcela da pressão resistida pela faixa do paralelo (anel);

$p_z$ : parcela da pressão resistida pela faixa longitudinal (viga fletida);

h: espessura da parede do cilindro;

D: rigidez à flexão de placas;

$C_i$ : coeficientes de integração.



## 4 ANÁLISE LIMITE

A análise limite é uma abordagem usada para o dimensionamento e verificação de estruturas no Estado Limite Último. O objetivo da análise limite é determinar se a estrutura suportará às cargas aplicadas sem romper ou se ocorrerá a ruptura. Para isso, as estruturas devem ser analisadas além do limite elástico. As ferramentas da análise limite conferem diretamente o resultado buscado, o que apresenta vantagem sobre as ferramentas que seguem a elasticidade, que exigem que se façam cálculos não-lineares por passos de forma a obter o estado da estrutura no instante do colapso, sendo bastante trabalhoso. É importante ressaltar que a análise limite trabalha apenas com as tensões limites, enquanto que pela análise elástica se consideram inclusive as deformações elásticas limites para os materiais. A determinação do colapso, ou não, da estrutura é feita após a avaliação dos campos de carga suportáveis da estrutura.

A análise limite envolve diversas áreas de aplicação nas Engenharias Civil e Mecânica, abrangendo as áreas de estruturas metálicas, de concreto e outros compósitos, estabilidade de taludes, fundações, túneis e processos de extrusão e laminagem. É mais usual encontrar as aplicações da análise limite na área geotécnica.

Para que se possa assegurar a estabilidade das estruturas, devem ser verificados simultaneamente o equilíbrio do sistema estrutural e a adequação das solicitações às condições de resistência dos materiais.

### 4.1 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Os critérios de resistência representam o conjunto de esforços internos admissíveis pelo material considerado. Eles determinam, portanto, quais são as limitações existentes sobre os esforços externos.

A formulação matemática dos critérios de resistência depende do tipo de elemento usado, se elemento de barra, placa, casca ou sólido. Para a determinação do critério de resistência a ser

usado, podem ser executados ensaios laboratoriais para determinar a resistências dos elementos. Alternativamente, podem ser realizadas análises teóricas das peças, de forma que se obtenha o critério de resistência a partir do conhecimento do material constituinte e da morfologia dos elementos.

Para estruturas de concreto armado, é usual adotar um critério de resistência simplificado, como o usado por Save (1984, p. 353) e Ramanjaneyulu et al. (1993, p. 206), mostrado na figura 6 e na equação 12.

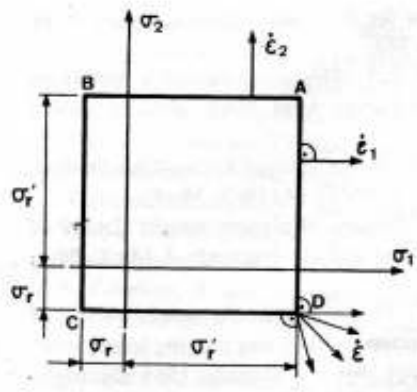


Figura 6: envoltória de resistência para concreto no plano 12 (SAVE, 1984, p. 358)

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \begin{cases} -\sigma_i - \sigma_r, & \sigma_i < 0 \\ \sigma_i - \sigma_{r'}, & \sigma_i > 0 \end{cases}, \quad f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \quad (\text{equação 12})$$

Onde:

$\underline{\underline{\sigma}}$  : tensor de tensões;

$\sigma_i$  : tensão principal;

$\sigma_r$  : resistência à tração do concreto;

$\sigma_{r'}$  : resistência à compressão do concreto.

## 4.2 ABORDAGEM ESTÁTICA

A abordagem estática da análise limite aproxima-se da superfície de ruptura da estrutura pelo limite inferior. Pode-se então dizer que é uma abordagem que determinará os carregamentos limites a favor da segurança.

O campo de tensões da estrutura será estaticamente admissível para as forças aplicadas se satisfizer a todas as condições de equilíbrio e de contorno estáticas para essa carga. Este campo será plasticamente admissível se não violar a condição de escoamento em qualquer ponto, ou seja, se o critério de resistência for válido em qualquer ponto da estrutura. Denotando-se as forças aplicadas por  $\vec{Q}$ , se o campo de tensões para as cargas  $\lambda\vec{Q}$  for estaticamente e plasticamente admissível, o fator de carga correspondente a tal campo é chamado de multiplicador estático, denotado por  $\lambda_e$ . (SAVE, 1984, p. 344). Se  $\lambda^+$  designa o valor limite do multiplicador de carga, tem-se a relação da inequação 1:

$$\lambda_e \leq \lambda^+ \quad (\text{inequação 1})$$

## 4.3 ABORDAGEM CINEMÁTICA

A abordagem cinemática aproxima-se da superfície de ruptura através do teorema do limite superior da análise limite. Isso significa que as cargas encontradas estarão contra a segurança. Entretanto, segundo Lubliner<sup>4</sup> (1990, apud PASQUALI, 2008, p. 34), muitas vezes as estimativas de carga limites seguem somente essa abordagem, pois é mais fácil supor campos de velocidades que supor campos de tensão, necessários para a abordagem estática.

Denotando como  $\vec{Q}$  o vetor de cargas para a estrutura e  $\vec{q}$  o vetor das deformações generalizadas na estrutura, o trabalho virtual externo é definido como o produto escalar desses dois vetores. Para obter a potência virtual (equação 13), faz-se  $\dot{q} = \partial\vec{q}/\partial t$ , sendo t uma medida de tempo (SAVE, 1984, p. 343):

<sup>4</sup> LUBLINER, J. **Plasticity theory**. New York: Macmillan, 1990.

$$P_{ext} = \vec{Q} \cdot \dot{\vec{q}} \quad (\text{equação 13})$$

O trabalho virtual de deformação corresponde ao trabalho das forças internas da estrutura, do qual pode se derivar a potência resistente máxima do sistema dada pela equação 14. As funções  $\pi$  representam funções de apoio do critério de resistência (PASQUALI, 2008, p. 34):

$$P_{rm} = \int_{\Omega} \pi(\vec{x}, \underline{\underline{d}}(\vec{x})) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}), [[\vec{v}(\vec{x})]]) d\Sigma \quad (\text{equação 14})$$

Onde:

$P_{rm}$ : potência resistente máxima;

$\pi$ : função de apoio do critério de resistência;

$\underline{\underline{d}}$ : tensor de taxa de deformações virtuais;

$\Omega$ : domínio geométrico ocupado pela estrutura;

$\Sigma$ : conjunto das superfícies de descontinuidade de  $\vec{v}$ ;

$[[\vec{v}]]$ : campo de descontinuidade de velocidade;

$\vec{n}$ : vetor normal à superfície  $\Sigma$ ;

$\vec{x}$ : vetor de posição.

Como está sendo considerado o material como rígido-perfeitamente plástico, não ocorrem deformações elásticas na estrutura, somente plásticas, portanto,  $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}}$ , sendo  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}^p}}$  o tensor das taxas de deformações plásticas.

Denotando por  $\vec{Q}$  o vetor das forças aplicadas, e por  $\vec{v}$  um campo de velocidade virtual,  $\vec{v}$  será cinematicamente admissível se for compatível com as condições de contorno

cinemáticas. Adicionalmente,  $\vec{v}$  é chamado de relevante se as funções de apoio correspondentes tiverem valores finitos (inequações 2 e 3):

$$\pi(\bar{x}, \underline{d}(\bar{x})) < +\infty \quad (\text{inequação 2})$$

$$\pi(\bar{x}, \bar{n}(\bar{x}), \llbracket \vec{v}(\bar{x}) \rrbracket) < +\infty \quad (\text{inequação 3})$$

Estas condições se interpretam no contexto da plasticidade associada através da regra de fluxo plástico do material, dada na equação 15.

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\chi} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}; \quad \dot{\chi} \geq 0 \quad (\text{equação 15})$$

Onde:

$\dot{\chi}$ : multiplicador plástico.

Considerando tal campo de velocidade, o mecanismo de ruptura, o teorema cinemático da análise limite fornece uma condição necessária para que a carga seja suportável (inequação 4):

$$P_{ext} = \vec{Q} \cdot \dot{\vec{q}} \leq P_{rm} \quad (\text{inequação 4})$$

Esta desigualdade fornece um fator de carga  $\lambda_c$ , chamado de multiplicador cinemático, com uma relação com  $\lambda_+$  dada na inequação 5:

$$\lambda^+ \geq \lambda_c \quad (\text{inequação 5})$$

A combinação das abordagens estática e cinemática conduz à seguinte relação (inequação 6):

$$\lambda_e \leq \lambda^+ \leq \lambda_c \quad (\text{inequação 6})$$

#### 4.4 RESERVATÓRIOS CILÍNDRICOS EM CONCRETO ARMADO

Para o uso da análise limite em reservatórios de concreto armado, deve-se considerar que as tensões principais em cilindros são a tensão circunferencial e longitudinal (respectivamente  $\theta$  e  $z$ , como visto na figura 7), sendo assim possível aplicar o critério de resistência para concreto armado, como visto na inequação 7.

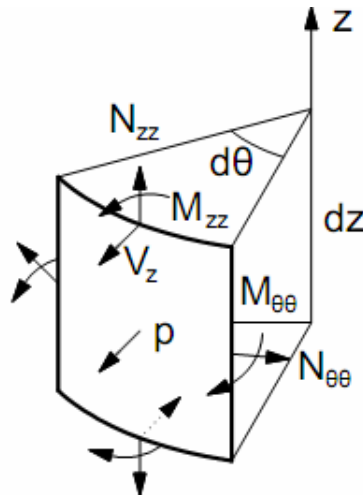


Figura 7: sistema de coordenadas para um tanque cilíndrico (adaptado de DE BUHAN; CORFDIR, 1996, p. 922)

$$f(\underline{\sigma}) \leq 0 \rightarrow \begin{cases} -\sigma_r \leq \sigma_z \leq \sigma_r, \\ -\sigma_r \leq \sigma_\theta \leq \sigma_r, \end{cases} \quad (\text{inequação 7})$$

Fundamentalmente, isto significa que as solicitações externas induzem níveis de tensão radiais que podem ser desprezados quando consideradas as tensões axial e ortorrádial. É importante lembrar que as tensões somente são consideradas desacopladas porque, segundo o critério de resistência adotado, as solicitações em uma direção não terão qualquer interação nas direções ortogonais. Outros critérios de resistência poderiam exigir que essa interação fosse definida.

Em estruturas de concreto armado, a resistência dos elementos estruturais será definida pela resistência do concreto e sua seção, assim como pela resistência do aço e sua taxa de armadura na seção de concreto. Como isso pode resultar em um número grande de variáveis, Save (1984, p. 356) ressalta que, considerando que o reforço está à disposição do projetista, é mais interessante fazer o projeto de forma a minimizar o volume de aço na armadura. A espessura do concreto é dada de acordo com as limitações necessárias sobre as deformações elásticas ou fissuração.

Dessa forma, pode-se definir o critério de resistência a ser adotado no trabalho como (inequação 8):

$$\begin{cases} -N_t \leq N_{\theta\theta} \leq N_c \\ -M_n \leq M_{zz} \leq M_p \end{cases} \quad (\text{inequação 8})$$

Onde:

$N_{\theta\theta}$  : esforços de membrana na direção ortorrádial da casca;

$N_c$  : resistência à compressão do concreto,  $N_c = \sigma_r \cdot h$

$N_t$  : resistência à tração da armadura,  $N_t = \sigma_{aço} \cdot A_\theta$

$M_{zz}$  : momentos fletores na direção de  $\omega$  ;

$M_n$  : momento fletor resistente considerando a tração da superfície externa;

$M_p$  : momento fletor resistente considerando a tração da superfície interna.

#### 4.4.1 Mecanismos de ruptura

Para realizar a análise da estrutura segundo seus mecanismos de ruptura, estes devem ser definidos previamente. A figura 8 mostra os diferentes tipos de condições de apoio consideradas para o desenvolvimento dos mecanismos de ruptura para a estrutura.

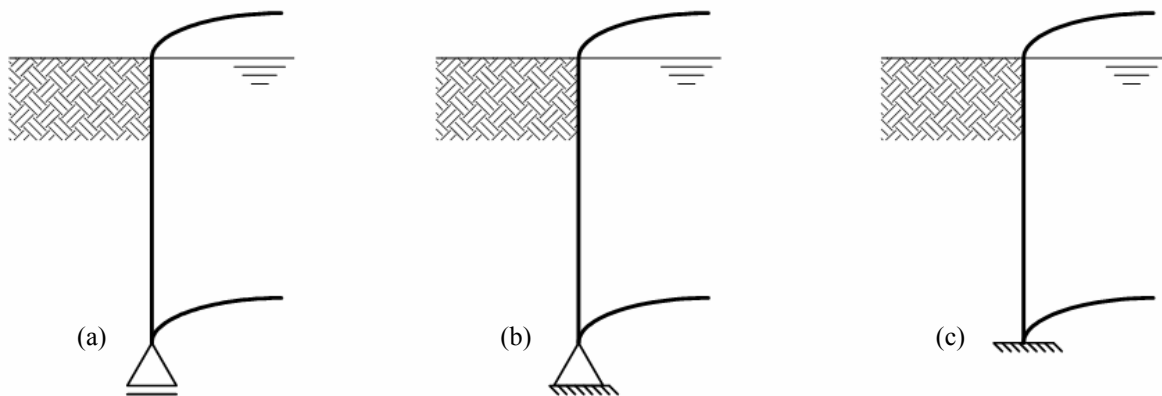


Figura 8: condições de contorno da estrutura para borda: (a) simplesmente apoiada; (b) rotulada e (c) engastada.

A condição de contorno de para a borda simplesmente apoiada vai apresentar mecanismos de ruptura diferentes das outras condições, visto que a translação no fundo, região com o maior carregamento, e de maiores solicitações, está livre. Por conveniência, estes mecanismos serão chamados de  $C_1$ , quando não há formação de rótulas plásticas e  $C_2$  para quando houver formação de uma rótula. As representações desses casos estão na figura 9, com as funções de velocidade dadas nas equações 16 para  $C_1$  e 17 para  $C_2$ .



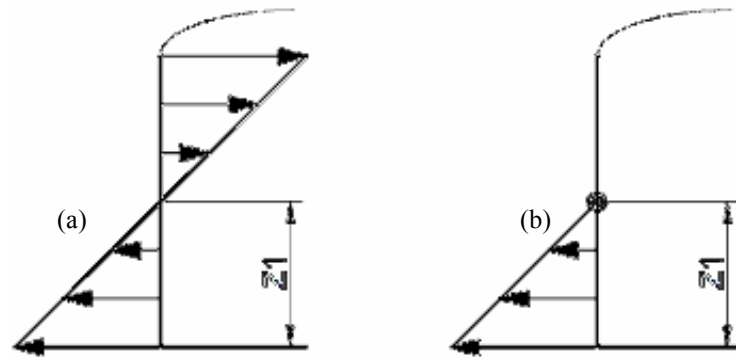


Figura 9: campos de velocidade para os mecanismos de ruptura com borda simplesmente apoiada, sendo (a) sem formação de rótulas,  $C_1$  e (b) com a formação de uma rótula,  $C_2$ .

$$v_{C_1}(z) = \alpha \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \quad 0 \leq z \leq H \quad (\text{equação 16})$$

$$v_{C_2}(z) \begin{cases} \alpha \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) & 0 \leq z \leq z_1 \\ 0 & z_1 \leq z \leq H \end{cases} \quad (\text{equação 17})$$

Onde:

$v(z)$ : velocidade em função da altura;

$z$ : altura do ponto;

$H$ : altura total do reservatório.

Para as condições de borda rotulada e engastada, a primeira rótula surgirá obrigatoriamente no vínculo da parede com o fundo do reservatório. A diferença entre as condições é que, no caso do apoio simples, essa rótula não é considerada na soma dos trabalhos internos (resistentes) da estrutura. Os mecanismos com seus respectivos campos de velocidade estão na figura 10, sendo chamados de  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$ , de acordo com o número de rótulas formadas. As funções de velocidades são dadas, respectivamente, pelas equações 18, 19, e 20.

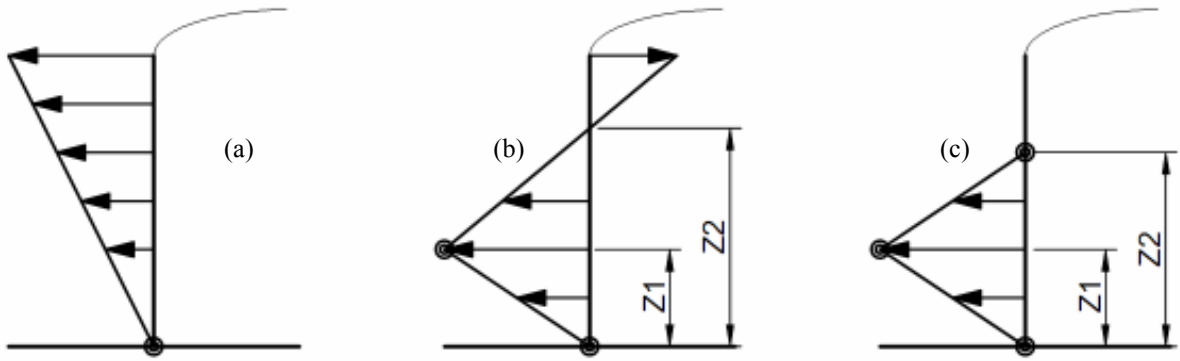


Figura 10: campos de velocidade dos mecanismos para borda com translação nula, com formação de (a) uma rótula, (b) duas rótulas e (c) três rótulas.

$$v_{c_3}(z) = \alpha \left( \frac{z}{H} \right) \quad 0 \leq z \leq H \quad (\text{equação 18})$$

$$v_{c_4}(z) = \begin{cases} \alpha \left( \frac{z}{z_1} \right) & 0 \leq z \leq z_1 \\ \alpha \left( 1 - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) & z_1 \leq z \leq H \end{cases} \quad (\text{equação 19})$$

$$v_{c_5}(z) = \begin{cases} \alpha \left( \frac{z}{z_1} \right) & 0 \leq z \leq z_1 \\ \alpha \left( 1 - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) & z_1 \leq z \leq z_2 \\ 0 & z_2 \leq z \leq H \end{cases} \quad (\text{equação 20})$$

#### 4.4.2 Carregamento do reservatório

Os carregamentos do reservatório, como são pressões hidrostáticas, podem ser equacionados como (equação 21):

$$p(z) = P \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \quad (\text{equação 21})$$

Onde:

$p(z)$  : pressão em função da altura;

$P$  : pressão máxima no fundo do reservatório;

$z$  : altura do ponto;

$H$  : altura total do reservatório.

A pressão máxima gerada pelos carregamentos de líquidos é dada pela equação 23:

$$P_{liq} = \gamma H \quad (\text{equação 23})$$

Onde:

$P_{liq}$  : pressão máxima no fundo do reservatório;

$\lambda$  : peso específico do líquido.

No caso de haver um carregamento de solo, como em um reservatório enterrado, será considerado um material sem coesão, usando o critério de resistência de Mohr-Coulomb, dado pela inequação 8, resultando nos coeficientes de pressão de terra ativo e passivo da equação 24:

$$f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \text{sen} \varphi \leq 0 \quad (\text{inequação 8})$$

$$K_a = \frac{(1 - \text{sen } \varphi)}{(1 + \text{sen } \varphi)} = K_p^{-1} \quad (\text{equação 24})$$

Onde:

$\underline{\underline{\sigma}}$  : tensor de tensões em um ponto do solo;

$\varphi$  : ângulo de atrito do material;

$K_a$ : coeficiente de empuxo ativo;

$K_p$ : coeficiente de empuxo passivo.

O que resulta na equação 25 para as pressões do solo:

$$P_{solo} = \lambda \gamma_{solo} H \quad (\text{equação 25})$$

Onde:

$\lambda$  : coeficiente de tensões compreendido no intervalo  $K_a \leq \lambda \leq K_p$  ;

$\gamma_{solo}$  : peso específico do solo.

Como as funções variam linearmente tendo  $p(H) = 0$ , a estrutura sempre estará submetida a uma pressão atuante que compreenderá a soma dos carregamentos internos e externos. Considerando como positiva a pressão dentro do reservatório, pode-se definir o termo P da equação 21 como mostrado na equação 26:

$$P = P_{liq} - P_{solo} \quad (\text{equação 26})$$

### 4.4.3 Determinação do trabalho externo

A determinação do trabalho externo para essa estrutura consiste em resolver a integração da equação 27 para cada mecanismo de ruptura dado. É importante notar que  $P$  é considerado em valores absolutos na análise de estabilidade. O sinal de  $P$  é importante na determinação das condições de resistência da estrutura.

$$We = 2\pi R \int_0^H p(z)v(z)dz \quad (\text{equação 27})$$

Onde:

$We$  : trabalho realizado pelas forças externas;

$R$  : raio do reservatório.

A solução dessa integral para cada um dos mecanismos está dado nas equações de 28 a 32:

$$We_{c_1} = \pi R P H \alpha \left( 1 - \frac{H}{3z_1} \right) \quad (\text{equação 28})$$

$$We_{c_2} = \pi R P z_1 \alpha \left( 1 - \frac{z_1}{3H} \right) \quad (\text{equação 29})$$

$$We_{c_3} = \pi R P z_1 \alpha \left( 1 - \frac{z_1}{3H} \right) \quad (\text{equação 30})$$

$$We_{c_4} = \frac{\pi R P \alpha}{3(z_2 - z_1)} \left( z_1 z_2 \left( \frac{z_1}{H} - 3 \right) + H(3z_2 - H) \right) \quad (\text{equação 31})$$

$$We_{c_s} = \frac{\pi R P z_2 \alpha}{3H} (3H - z_1 - z_2) \quad (\text{equação 32})$$

Onde:

$\alpha$  : constante positiva.

#### 4.4.4 Determinação do trabalho resistente máximo

A determinação do trabalho resistente máximo,  $P_{rm}$ , necessita da formulação prévia das funções de apoio dos critérios de resistência, que relacionam o critério de resistência com o campo de velocidades e descontinuidades de cada mecanismo de ruptura. A função de apoio para o domínio geométrico do reservatório é dada pela equação 33 (DE BUHAN; CORFDIR, 1996, p. 924):

$$\Pi(v, \omega) = \sup \left\{ V_z \left( \frac{dv}{dz} - \omega \right) + N_{\theta\theta} \frac{v}{R} + M_{zz} \frac{d\omega}{dz} \right\} \quad (\text{equação 33})$$

Onde:

$\Pi$  : função de apoio do critério de resistência para o domínio geométrico da estrutura;

$(v, \omega)$  : campo cinematicamente admissível de velocidades radiais e taxas de rotação normais à casca;

$V_z$ : esforço cortante ao longo da altura do reservatório.

Adotando a condição de Kirchhoff-Love,  $\omega = dv/dz = v'$ , é possível determinar  $\Pi$  usando o critério de resistência. De outra forma, essa função tende ao infinito, pois não há limitações aos esforços cortantes. Considerando também que todos os campos de velocidade variam linearmente, só mudando o comportamento nas descontinuidades,  $v''$  é nulo. Por fim, os limites superiores das funções de apoio são obtidos fazendo com que os esforços atuantes na

estrutura se igualem à resistência. Isso implica que, quando o campo de velocidades for positivo, será considerada a resistência de membrana à tração, e quando for negativo, a resistência à compressão. As funções de apoio ficam então como mostradas nas equações 35 a 39, sendo que  $N_1$  e  $N_2$  assumem os valores dados na equação 34, dependendo da resultante de  $P$  ser positiva (sentido de dentro para fora da casca) ou negativa (de fora para dentro), segundo o eixo dado como positivo na figura 7.

$$P < 0 \begin{cases} N_1 = N_c \\ N_2 = N_t \end{cases} \quad (equação 34)$$

$$P > 0 \begin{cases} N_1 = N_t \\ N_2 = N_c \end{cases}$$

$$\Pi_{C_1} = \begin{cases} \frac{\alpha N_1}{R} \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) & 0 \leq z \leq z_1 \\ \frac{\alpha N_2}{R} \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) & z_1 \leq z \leq H \end{cases} \quad (equação 35)$$

$$\Pi_{C_2} = \begin{cases} \frac{\alpha N_1}{R} \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) & 0 \leq z \leq z_1 \\ 0 & z_1 \leq z \leq H \end{cases} \quad (equação 36)$$

$$\Pi_{C_3} = \begin{cases} \frac{\alpha N_1}{R} \frac{z}{H} & 0 \leq z \leq H \end{cases} \quad (equação 37)$$

$$\Pi_{C_4} = \begin{cases} \frac{\alpha N_1}{R} \frac{z}{z_1} & 0 \leq z \leq z_1 \\ \frac{\alpha N_1}{R} \left( 1 - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) & z_1 \leq z \leq z_2 \\ -\frac{\alpha N_2}{R} \left( 1 - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) & z_2 \leq z \leq H \end{cases} \quad (\text{equação 38})$$

$$\Pi_{C_5} = \begin{cases} \frac{\alpha N_1}{R} \frac{z}{z_1} & 0 \leq z \leq z_1 \\ \frac{\alpha N_1}{R} \left( 1 - \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) & z_1 \leq z \leq z_2 \\ 0 & z_2 \leq z \leq H \end{cases} \quad (\text{equação 39})$$

O restante das funções de apoio geométricas corresponde às descontinuidades do campo de velocidades e rotação. Serão consideradas, portanto, as rótulas formadas nos mecanismos. As funções têm a forma apresentada na equação 40:

$$\Pi_R([v]_i, [\omega]_i) = \sup \{ V_z [v]_i + M_{zz} [\omega]_i \} \quad (\text{equação 40})$$

Onde:

$$[v]_i = v_i - v_{i-1}$$

$$[\omega]_i = \omega_i - \omega_{i-1}$$

Como não estão sendo consideradas descontinuidades no campo de velocidades, apenas no de rotações,  $[v]_i = 0$ . Lembrado então que  $\omega = v'$  a função de apoio para as descontinuidades fica como na equação 41:



$$\Pi_R([v]_i, [\omega]_i) = M_{zz}[\omega]_i \quad (\text{equação 41})$$

Considerando que o momento resistente vai ser mobilizado de acordo com a face que for tracionada, os valores de  $M_1$  e  $M_2$  serão os mostrados na equação 42, e as equações para cada rótula mostrada na figura 11 são dadas nas equações 43 a 46:

$$P < 0 \begin{cases} M_1 = M_n \\ M_2 = M_p \end{cases} \quad (\text{equação 42})$$

$$P > 0 \begin{cases} M_1 = M_p \\ M_2 = M_n \end{cases}$$

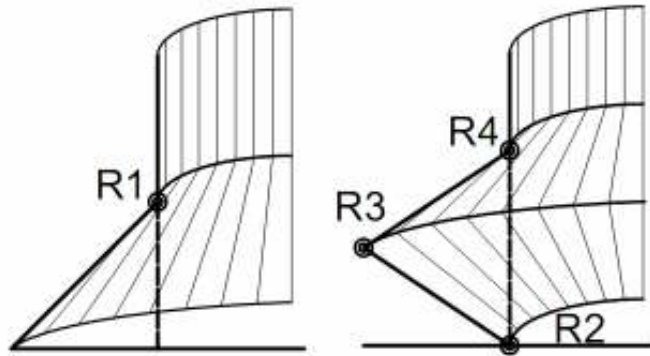


Figura 11: identificação das rótulas

$$\Pi_{R1} = M_1 \frac{\alpha}{z_1} \quad (\text{equação 43})$$

$$\Pi_{R2} = \begin{cases} M_1 \frac{\alpha}{H} & C_3 \\ M_1 \frac{\alpha}{z_1} & C_4, C_5 \end{cases} \quad (\text{equação 44})$$

$$\Pi_{R_3} = M_2 \alpha \left( \frac{1}{z_2 - z_1} + \frac{1}{z_1} \right) \quad (\text{equação 45})$$

$$\Pi_{R_4} = \frac{M_1 \alpha}{z_2 - z_1} \quad (\text{equação 46})$$

O trabalho resistente para cada caso será a adição de  $\Pi_C$  integrado na geometria com a soma dos  $\Pi_R$  integrados nas descontinuidades, como visto na equação 47. Para os casos estudados, os trabalhos resistentes são dados nas equações 48 a 52.

$$W_{rm} = 2\pi R \left( \int_0^H \Pi_1 dz + \Pi_2 \right) \quad (\text{equação 47})$$

$$W_{rm_{c1}} = \alpha \pi \left[ N_1 (3z_1) + N_2 \left( \frac{H^2}{z_1} + 2H - 3z_1 \right) \right] \quad (\text{equação 48})$$

$$W_{rm_{c2}} = \alpha \pi \left[ N_1 (z_1) + M_1 \left( \frac{R}{z_1} \right) \right] \quad (\text{equação 49})$$

$$W_{rm_{c3}} = \begin{cases} \alpha \pi N_1 H & \text{apojada} \\ \alpha \pi \left[ N_1 H + M_1 \left( \frac{2R}{H} \right) \right] & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 50})$$

$$W_{m_{c_4}} = \begin{cases} \alpha\pi \left[ N_1 z_2 + N_2 \left( \frac{H^2 - 4Hz_2 - 3z_2^2}{z_2 - z_1} \right) + M_2 \frac{2R}{z_1} \frac{z_2}{z_2 - z_1} \right] & \text{apoiada} \\ \alpha\pi \left[ N_1 z_2 + N_2 \left( \frac{H^2 - 4Hz_2 - 3z_2^2}{z_2 - z_1} \right) + M_1 \frac{2R}{z_1} + M_2 \frac{2R}{z_1} \frac{z_2}{z_2 - z_1} \right] & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 51})$$

$$W_{m_{c_5}} = \begin{cases} \alpha\pi \left[ N_1 z_2 + M_1 \frac{2R}{z_2 - z_1} + M_2 \frac{2R}{z_1} \frac{z_2}{z_2 - z_1} \right] & \text{apoiada} \\ \alpha\pi \left[ N_1 z_2 + M_1 \frac{2R}{z_1} \frac{z_2}{z_2 - z_1} + M_2 \frac{2R}{z_1} \frac{z_2}{z_2 - z_1} \right] & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 52})$$

#### 4.4.5 Limites superiores do carregamento

Para garantir a estabilidade da estrutura, o trabalho resistente deve ser maior ou igual ao trabalho externo. A pressão P pode ser isolada da equação do trabalho externo, de forma que se pode obter então a pressão máxima suportável pela estrutura, como mostrado nas equações seguintes:

$$W_{rm} \geq W_e = P \frac{W_e}{P} \rightarrow P \leq \frac{W_{rm}}{W_e/P} \quad (\text{equação 53})$$

$$P_{c_1} \leq \frac{1}{HR \left( z_1 - \frac{H}{3} \right)} \left[ 3N_1 z_1^2 + N_2 \left( H^2 + 2Hz_1 - 3z_1^2 \right) \right] \quad (\text{equação 54})$$

$$P_{c_2} \leq \frac{1}{1 - \frac{z_1}{3H}} \left[ N_1 \frac{1}{R} + M_1 \frac{2}{z_1} \right] \quad (\text{equação 55})$$

$$P_{C_3} \leq \begin{cases} N_1 \frac{3}{R} & \text{apoiada} \\ N_1 \frac{3}{R} + M_1 \frac{6}{H^2} & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 56})$$

$$P_{C_4} \leq \begin{cases} \frac{3H \left[ N_1 \frac{z_2}{R} (z_2 - z_1) + N_2 \frac{(H - z_2)^2}{R} + 2M_2 \frac{z_2}{z_1} \right]}{z_2 (z_1^2 - 3z_1 H + 3H^2) - H^3} & \text{apoiada} \\ \frac{3H \left[ N_1 \frac{z_2}{R} (z_2 - z_1) + N_2 \frac{(H - z_2)^2}{R} + M_1 \frac{2}{z_1} (z_2 - z_1) + M_2 \frac{z_2}{z_1} \right]}{z_2 (z_1^2 - 3z_1 H + 3H^2) - H^3} & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 57})$$

$$P_{C_5} \leq \begin{cases} \frac{3H \left[ N_1 z_1 (z_2 - z_1) + M_1 2R \frac{z_1}{z_2} + M_2 2R \right]}{z_1 R (z_2 - z_1) (3H - z_2 - z_1)} & \text{apoiada} \\ \frac{3H \left[ N_1 z_1 (z_2 - z_1) + M_1 2R + M_2 2R \right]}{z_1 R (z_2 - z_1) (3H - z_2 - z_1)} & \text{engastada} \end{cases} \quad (\text{equação 58})$$

No caso de se realizar uma verificação de um reservatório, falta somente encontrar os pontos  $z_1$  e  $z_2$  indicados nas figuras 9 e 10 e nas equações acima. Os valores a serem adotados são os pontos onde a função é mínima, ou seja,  $dP/dz_1 = 0$  para os casos  $C_1$  e  $C_2$ , e  $\partial P/\partial z_1 = 0, \partial P/\partial z_2 = 0$  para os casos  $C_4$  e  $C_5$ .

No caso  $C_1$ , o valor de  $z_1$  é dado pela equação 59. Para o caso particular de  $N_1 = N_2$ , encontra-se o valor da equação 60, o mesmo encontrado por de Buhan e Corfdir (1996, p. 925):

$$z_1 = \frac{H}{3} \left( 1 + \frac{\sqrt{N_1 + 5N_1 N_2 + 4N_2}}{N_1 + N_2} \right) \quad (\text{equação 59})$$

$$z_1 = \frac{H}{3} \left( 1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) \approx 0.86H \quad (\text{equação 60})$$

#### 4.4.6 Condição de estabilidade para a estrutura

A combinação das abordagens cinemáticas, considerando os mecanismos de  $C_1$  a  $C_5$  fornece uma condição necessária para a estabilidade da estrutura, dada pela equação 61:

$$P \leq \min(P_{C_1}, P_{C_2}, P_{C_3}, P_{C_4}, P_{C_5}) \quad (\text{equação 61})$$

Vale salientar que a condição acima pode ser empregada tanto num cálculo de verificação da estrutura quanto num cálculo de dimensionamento da mesma.

## 5 RESULTADOS

A partir da formulação apresentada no capítulo anterior, é possível realizar diferentes análises do problema da estabilidade do reservatório, que serão abordados nesse capítulo. Podem ser analisadas as influências da geometria (altura e diâmetro) ou da distribuição das resistências na estabilidade, identificando os mecanismos ótimos de ruptura para cada caso.

### 5.1 INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA

Embora a análise da influência da geometria seja simples de ser realizada no caso em que a borda inferior tem deslocamentos livres, o mesmo não ocorre quando há restrição ao deslocamento, o que implica na formação obrigatória de uma rótula neste ponto. As variáveis  $z_1$  e  $z_2$  para o mecanismo ótimo não podem ser encontradas explicitamente para todos os casos, sendo conveniente estabelecer variáveis adimensionais para facilitar a análise. Como o objetivo desta seção é analisar a influência da geometria, o problema também será simplificado de forma que  $N_c=N_t$  e  $M_p=M_n$ , assim reduzindo as variáveis do problema em duas, fazendo  $N_1=N_2=N_0$  e  $M_1=M_2=M_0$ . Nota-se que essas relações são válidas para materiais isotrópicos, e também é possível armar a seção de concreto de forma que essas relações de resistência sejam alcançadas. No entanto, aqui essa relação é feita somente porque torna mais simples a visualização da influência da geometria.

$$k_1 = \frac{PR}{N_0} \quad (\text{equação 62})$$

$$k_2 = \frac{M_0 R}{N_0 H^2} \quad (\text{equação 63})$$

$$z_1 = \begin{cases} \eta H & C_1, C_2 \\ \zeta \eta H & C_3, C_4, C_5 \end{cases} \quad (\text{equação 64})$$

$$z_2 = \eta H \quad C_3, C_4, C_5 \quad (\text{equação 65})$$

Estabelecidas essas variáveis, e definindo os domínios de  $\eta$  e  $\zeta$ , é possível definir os valores de  $k_1=f(k_2)$ . A solução ótima dessa equação depende de encontrar os valores de  $\eta$  e  $\zeta$  que minimizam a função, e encontrar, para cada valor de  $k_2$ , qual o mecanismo que apresenta o menor valor para  $k_1$ , o que leva às relações dadas abaixo, a equação 66 para os mecanismos de borda livre, equação 67 para borda apoiada e equação 68 para engastada, estando o domínio das funções representado nas equações 69 e 70:

$$k_1 = \min \left\{ 3 \frac{(1-2\eta+2\eta^2)}{3\eta-1}, 3-\eta \left( 1+k_2 \frac{2}{\eta^2} \right) \right\} \quad (\text{equação 66})$$

$$k_1 = \min \left\{ 3, 3 \frac{\eta(\zeta\eta-2\eta+2)-1-k_2(2\zeta)}{1-\eta[3+\zeta\eta(\zeta\eta-3)]}, 3 \frac{\eta^2(\zeta-1)-k_2 \frac{2(1+\zeta)}{\zeta}}{\eta^2(1-\zeta)(\eta\zeta+\eta-3)} \right\} \quad (\text{equação 67})$$

$$k_1 = \min \left\{ 3(1+k_2), 3 \frac{\eta^2(\zeta-2)-1+2\eta-k_2 \frac{2(2-\zeta)}{\zeta}}{1+\eta(-1+3\zeta\eta-\zeta^2\eta^2)}, 3 \frac{\zeta-1-k_2 \frac{4}{\eta^2\zeta}}{(1-\zeta)(\eta\zeta+\eta-3)} \right\} \quad (\text{equação 68})$$

$$\begin{aligned} 0 < \eta < 1, & \quad C_1, C_2, C_5 \\ \eta > 0, & \quad C_4 \end{aligned} \quad (\text{equação 69})$$

$$0 < \zeta < 1 \quad C_5 \quad \text{(equação 70)}$$

$$\zeta < \frac{1}{\eta} \quad C_4$$

Os mecanismos estão representados em ordem crescente de  $C_1$  a  $C_5$  acima, portanto, os únicos casos em que  $\eta$  pode ser maior que 1 é para a expressão central das equações 67 e 68. A solução dessas equações é mostrada de forma gráfica na figura 12:

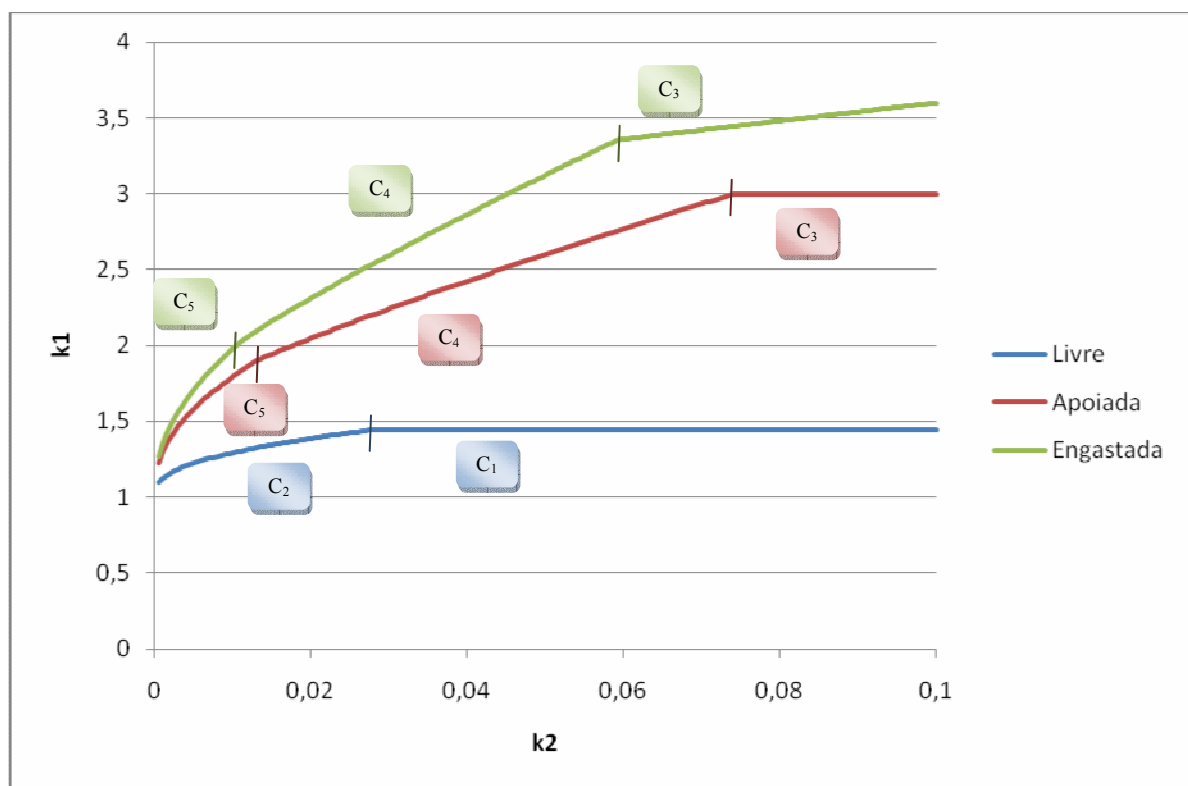


Figura 12: solução das equações de  $k_1 \times k_2$  dependendo da condição de contorno da borda, com a identificação do mecanismo ótimo para cada trecho da solução

Pela definição de  $k_2$ , o valor muda com a relação de  $R/H^2$ , ou seja, a altura reduz ao quadrado para valores maiores. Pode-se dizer, então, que os mecanismos para valores maiores de  $k_2$  são para cilindros mais curtos, e os valores menores para cilindros mais longos. À medida que se reduz a altura do cilindro, é reduzido o número de rótulas plásticas formadas.

Da mesma forma que se podem fazer conclusões sobre a relação entre o raio e a altura, se ambos forem mantidos fixos, é possível interpretar esses resultados com a relação entre a



resistência à flexão e a resistência normal. Quanto maior for a resistência à flexão em relação à resistência normal da estrutura, menos rótulas plásticas serão formadas na ruptura da estrutura. Se  $M_0$  for muito maior que  $N_0$ , a influência desse se anula para os casos onde há borda livre ou apoio simples, com a formação do mecanismo de ruptura dependendo somente da resistência aos esforços normais. Já para o caso de borda engastada, a influência da resistência à flexão é pequena na estabilidade da estrutura, embora ainda exista.

## 5.2 INFLUÊNCIA DA RELAÇÃO ENTRE AS RESISTÊNCIAS

Como visto anteriormente, a relação entre as resistências à flexão e aos esforços normais influencia na estabilidade da estrutura. Será apresentada então a influência da relação entre as resistências à tração, compressão e flexão para o caso de um cilindro com borda livre. Torna-se interessante variar as resistências ao se considerar que, no concreto armado, essa relação é definida pelo projetista, assim sendo possível otimizar o desempenho da estrutura.

Considerando que os critérios de resistência variam com o sentido da resultante da pressão, se voltada para o interior ou o exterior do cilindro, podemos obter duas soluções diferentes. No caso de uma verificação das estruturas, é possível conhecer a segurança da estrutura com o uso das equações 54 a 57, encontrando os valores de  $z_1$  e  $z_2$  que minimizem as funções. Entretanto, para um caso de dimensionamento, a quantidade de variáveis é maior, o que aumenta a complexidade do problema, mas também permite que relações entre as variáveis sejam estabelecidas.

Para o caso da resultante de pressões estar direcionada para fora do cilindro (como um cilindro apoiado, submetido somente à pressão hidrostática interna),  $N_1$  representa a resistência à compressão da seção de concreto,  $N_2$  a resistência à tração conferida à seção pela armadura,  $M_1$  a resistência à flexão quando a fibra interna da seção estiver tracionada, e  $M_2$  a resistência à flexão quando a fibra interna da seção estiver comprimida. Os sentidos das variáveis estão representados na figura 13 com as equações mostradas em seguida:

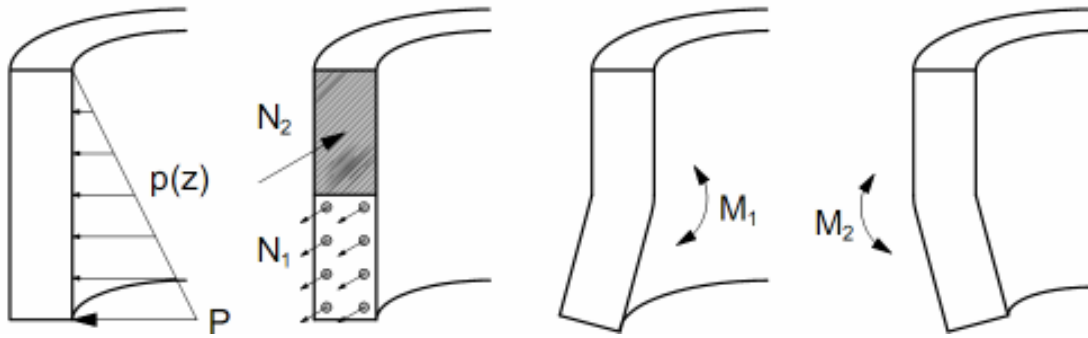


Figura 13: sentido das variáveis para o caso de pressão interna.

$$N_1 = \sup \left\{ \frac{PR}{4} \frac{8N_2 + 3PR}{PR + 3N_2}, PR \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{3M_1}{2PH^2}} \right) \right\} \quad (\text{equação 71})$$

$$N_2 = f_{cd} e \quad (\text{equação 72})$$

$$M_1 = \frac{2H^2}{3P^2 R^3} (PR - N_1)^3 \quad (\text{equação 73})$$

Onde:

$e$  : espessura do cilindro.

Considera-se que  $P$ ,  $R$ ,  $H$ ,  $f_{cd}$  e  $e$  sejam definidas pelo projeto. A partir desse equacionamento, é possível estudar o  $N_1$  necessário, já que é a variável que está presente nos dois mecanismos de ruptura possíveis para a estrutura. Como  $N_2$  é fixo,  $N_1=f(N_2)$  é constante, para o caso de ocorrer o mecanismo de ruptura  $C_1$ , sem a formação de rótula plástica, e  $N_1=f(M_1)$  quando ocorrer o mecanismo  $C_2$ . Considerou-se para os seguintes casos  $M_1$  variando de zero até o maior momento suportado pela seção sem necessitar de armadura dupla em um caso de flexão simples, já que estão sendo consideradas as solicitações em direção ortogonal como independentes, e o valor encontrado será usado apenas como uma referência, encontrado através da solução das equações 74 e 75.

$$M_d = 0,85 \cdot y_{lim} \cdot b \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,5 \cdot y_{lim}) \quad (\text{equação 74})$$

$$y_{lim} = 0,8x_{lim} = 0,8 \frac{0,0035d}{f_{yd} / 2,1 \cdot 10^6 + 0,0035} \quad (\text{equação 75})$$

Onde:

$M_d$ : momento fletor de projeto em kgf.cm;

$x_{lim}$ : distância limite da linha neutra à face de fibras comprimidas da seção em cm;

$d$ : distância do eixo da armadura tracionada à face de fibras comprimidas da seção em cm;

$b$ : base da seção

$f_{cd}$ : resistência de projeto do concreto, em kgf/cm<sup>2</sup>;

$f_{yd}$ : resistência de projeto do aço em kgf/cm<sup>2</sup>.

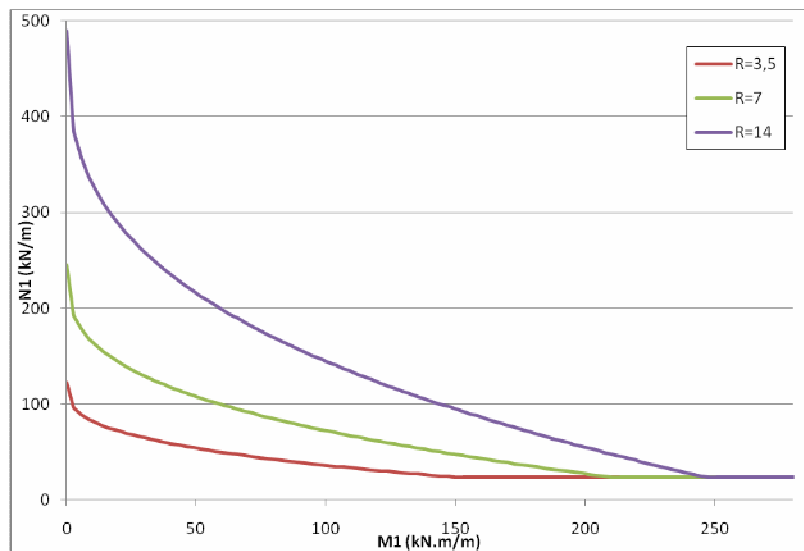
Para ilustrar esses casos, serão considerados três tanques como exemplos desse dimensionamento, que serão usados também para os casos das outras vinculações, de forma que possam ser comparados. Os quadros seguintes explicitam os casos considerados.

Variável	Valor e unidade
Espessura (t)	25 cm
d	21,5 cm
fck	30 MPa
fyk	500 MPa
$P_{interna}$	10 kN/m <sup>2</sup>
H	3,5 m

Quadro 1: variáveis constantes para os casos analisados.

Variável	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
R	3,5 m	7 m	14 m

Quadro 2: variação do raio por caso.

Figura 14: curvas de  $N_1 \times M_1$  para diferentes raios do reservatório

A figura 14 representa a necessidade de resistência à tração de acordo com a resistência à flexão da estrutura. Pode-se observar que, quanto maior for o raio (ou seja, quanto mais curto for o cilindro), maior é a necessidade de resistência à tração da estrutura em relação à resistência à flexão. Outra observação importante é que existe uma resistência à flexão limite, a partir da qual o mecanismo limite da estrutura deixa de ser  $C_2$  e começa a ser  $C_1$ , sem influência da resistência à flexão, e também que esse limite de resistência à tração será o mesmo, independentemente do raio do cilindro.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A abordagem cinemática da estrutura permite que se obtenha o comportamento da estrutura no instante da ruptura analisando seus diferentes mecanismos. O fato de um campo de velocidades ser cinematicamente admissível para a estrutura é uma condição necessária para a estabilidade, mas ainda não suficiente. Torna-se necessário, portanto, completar a análise usando a abordagem estática da análise limite, que estabelece um limite inferior para a resistência, ou seja, representa uma condição suficiente de resistência para que a estrutura seja estável.

Embora a abordagem cinemática não seja uma condição suficiente de resistência para a estabilidade da estrutura, a análise dos seus resultados permite que se possa adotar parâmetros no projeto que otimizem a resistência da estrutura. É possível analisar a estrutura segundo suas relações geométricas, altura e raio, segundo a resistência necessária para cada solicitação atuante na estrutura, ou verificar para a resistência máxima. Desta forma, é possível usar essa abordagem para otimizar uma estrutura, definido a melhor relação entre as variáveis em um projeto.

Com isso, as sugestões para os trabalhos que continuem esse estudo são:

- a) analisar a parede cilíndrica de um reservatório através da abordagem estática da análise limite, de forma a obter uma condição suficiente de resistência para a estrutura;
- b) fazer um estudo de otimização da estrutura para um carregamento imposto.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 1992/2007**: domicílios servidos de rede coletora de esgoto (percentual). Brasília, DF, 2009a. Disponível em: <[http://www.ibge.gov.br/series\\_estatisticas/exibedados.php?idnivel=BR&idserie=FED155](http://www.ibge.gov.br/series_estatisticas/exibedados.php?idnivel=BR&idserie=FED155)>. Acesso em 25 nov. 2009.

\_\_\_\_\_. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios 1992/2007**: domicílios servidos de rede geral de abastecimento de água (percentual). Brasília, DF, 2009b. Disponível em: <[http://www.ibge.gov.br/series\\_estatisticas/exibedados.php?idnivel=BR&idserie=FED152](http://www.ibge.gov.br/series_estatisticas/exibedados.php?idnivel=BR&idserie=FED152)>. Acesso em 25 nov. 2009.

DE BUHAN, P.; CORFDIR, A. Limit design of axisymmetric shells with application to cellular cofferdams. **Journal of Engineering Mechanics**, Boulder, v. 122, n. 10, p.921-929. Oct. 1996.

GUERRIN, A.; LAVAUUR, R. C. **Tratado de concreto armado**: reservatórios, caixas d'água, piscinas. São Paulo: Hemus, 2003. v. 5.

GUIMARÃES, A. E. P. **Indicações para projeto e execução de reservatórios cilíndricos em concreto armado**. 1995. 153 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PASQUALI, P. R. Z. **Análise limite de estruturas através de uma formulação em elasticidade não-linear**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

PORTO ALEGRE. Departamento Municipal de Água e Esgotos. **Números da cidade**: água. Porto Alegre, RS, 2009a. Disponível em < <http://www.portoalegre.rs.gov.br/dmae/>><sup>5</sup>. Acesso em 25 nov. 2009.

\_\_\_\_\_. Departamento Municipal de Água e Esgotos. **Números da cidade**: esgotos. Porto Alegre, RS, 2009b. Disponível em < <http://www.portoalegre.rs.gov.br/dmae/>><sup>6</sup>. Acesso em 25 nov. 2009.

RAMANJANEYULU, K.; GOPALAKRISHNAN, S.; APPA RAO, T.V.R.S. Collapse loads of reinforced concrete cylindrical water tanks using limit analysis approach. **Computers & Structures**, Oxford, v. 48, n. 2, p. 205-217, July 1993.

SAVE, M. Limit analysis and design of containment vessels. **Nuclear Engineering and Design**, Amsterdam, v. 79, n. 3, p. 343-361, June 1984.

<sup>5</sup> Acessar através do menu: <água> e então <dados>.

<sup>6</sup> Acessar através do menu: <esgotos> e então <dados>.