UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANÁLISE DE EXPERIÊNCIAS PRODUZIDAS EM UMA OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP

GUSTAVO DEWES WAGNER

Porto Alegre
2023

GUSTAVO DEWES WAGNER

ANÁLISE DE EXPERIÊNCIAS PRODUZIDAS EM UMA OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientadora:
Profª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana

Porto Alegre
2023

CIP - Catalogação na Publicação

Dewes Wagner, Gustavo
ANÁLISE DE EXPERIÊNCIAS PRODUZIDAS EM UMA OFICINA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP / Gustavo Dewes Wagner. -- 2023.
111 f.
Orientador: Marilaine de Fraga Sant'Ana.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática e Estatística, Licenciatura em Matemática, Porto Alegre, BR-RS, 2023.

1. Resolução de Problemas. 2. OBMEP. 3. Papel do professor. 4. Materiais manipulativos. I. de Fraga Sant'Ana, Marilaine, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Pura e Aplicada

Análise de experiências produzidas em uma oficina de Resolução De Problemas a partir de questões da OBMEP

Gustavo Dewes Wagner

Banca examinadora:

Prof.ª Dr.ª Marilaine de Fraga Sant'Ana
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.ª Dr.ª Luisa Rodríguez Doering
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

Prof.º Dr.º Jean Carlo Pech de Moraes
Instituto de Matemática e Estatística - UFRGS

AGRADECIMENTOS

A velocidade da evolução fisiológica humana não conseguiu acompanhar a evolução que ocorreu na sociedade nos últimos tempos. O passar dos anos fez com que o ser humano se tornasse mal adaptado ao mundo em que atualmente vive. Esse ambiente tornou comum o ato de relacionar o conceito de felicidade a prazeres momentâneos.

Ter uma visão hedônica sobre tal conceito é justamente o que afasta determinado indivíduo da possibilidade de construir uma vida com propósito, produtividade e saúde, porque gera uma dissonância cognitiva entre o que se quer e o que se faz. Nesse caso, a única possibilidade é a infelicidade, a frustração, a angústia e a ansiedade em relação ao futuro.

Sentir-se feliz ao comer algo ou ao ganhar algum dinheiro são exemplos de prazeres: sensações boas provocadas por determinado resultado que provém de determinadas experiências. Pode-se dizer que tais momentos trazem alegria, mas qual é o sentimento que fica quando essas experiências momentâneas se acabam? Não seria o conceito de felicidade algo muito mais amplo do que isso?

A concepção do conceito de felicidade que particularmente carrego comigo se aproxima da definição do Eudemonismo, que pressupõe busca constante pelo desenvolvimento virtuoso através de valores ao qual me alinho, tais como justiça, bons relacionamentos, saúde, honestidade e ajuda às pessoas que estão por perto.

Será que somos nós que fazemos planos para a vida ou a vida que faz planos para a gente? Partindo do pressuposto de uma vida digna, com acesso às necessidades básicas, como alimentação saúde e educação, independente de qual seja a resposta, cabe a nós cumprirmos o nosso papel, fazer a nossa parte, de acordo com a nossa essência, nossa índole e nosso caráter, buscando a felicidade não em um ponto final, mas sim no processo.

No entanto, nenhuma busca por desenvolvimento virtuoso ocorre de forma estritamente individualista. Por isso, quero aproveitar esse espaço para agradecer a todos que fizeram parte de minha jornada até o presente momento e dar destaque principalmente:

Aos meus pais, Otávio e Elsa, pelo carinho, apoio e auxílio em manter excelentes condições para que meus estudos pudessem sempre ser a prioridade de minha vida;

Ao meu irmão Alisson, por me incentivar no gosto pelos estudos desde muito cedo, tornando o processo divertido. Nunca me esquecerei disso. Também a ele e a sua esposa, Andréia, por me darem as oportunidades que contribuíram para que eu conseguisse cumprir com as obrigações de minha vida no início da graduação;

Ao meu irmão Bruno e sua esposa Bruna, por serem meu refúgio e ponto de confiança plena dos últimos anos;

Ao meu sobrinho e afilhado, Arthur, por me fazer me sorrir mais, mesmo nos dias mais difíceis;

Ao meu primo Augusto e sua esposa Gabriela, por todo o apoio prestado, com moradia, conselhos e principalmente companhia na capital;

Aos meus amigos da graduação, Anthony e Iago, por muitas vezes serem o motivo das idas para os campi;

À minha amiga Roberta, que conheci dentro da universidade e que vou levar para a vida, pela presença, pelas conversas e pelos bons conselhos nos momentos difíceis;

Aos meus amigos Bruno e Luís Fernando, por serem colegas de curso os quais pude me inspirar por muitas vezes e que também foram parceiros de trabalhos de muitas disciplinas;

À Isaac, por me apoiar, me incentivar e me inspirar, mas também, principalmente, por me fazer enxergar a beleza e o sentido da vida através do amor;

Aos mestres, com carinho, por incentivarem o meu desenvolvimento e paixão pela educação e pela matemática, me transmitindo muito mais que conhecimento, sendo inspirações e referências em como cultivar o afeto nas relações professor-aluno. Um obrigado especial aos professores e professoras Andréia Dalcin, Marilaine Sant'ana, Marcus Basso, Rodrigo Braga, Elisabete Búrigo, Maria Cecília, Rogério Steffenon, Graciela Piacentini e Fabio Kruse.

A conclusão deste trabalho marca o fim da graduação. Esse é um ponto importante, mas não interromperá a busca constante pelo desenvolvimento virtuoso. Espero que as boas relações possam continuar a fazer parte do progresso, que apesar de não-linear, é contínuo.

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade analisar as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas em Matemática a partir de questões da primeira fase das edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Os dados coletados para a pesquisa foram produzidos em uma oficina de turno inverso, aplicada com alunas do oitavo e nono anos do ensino fundamental de uma escola municipal na cidade de Igrejinha, Rio Grande do Sul. Sob um viés qualitativo, e apoiados principalmente nas teorias de Pólya (2006), mas também de Allevato e Onuchic (2021) e Dante (2003), analisamos não somente a habilidade das alunas em resolver o que foi proposto, mas também alguns pontos que estiveram presentes durante a prática, como o papel do professor na aplicação da metodologia, as relações professor-aluna, o uso de expressões não matematicamente corretas que as alunas criaram durante os encontros para externalizar seus pensamentos acerca da resolução dos problemas e o uso de materiais manipulativos como recurso potencializador quando agregado à metodologia de Resolução de Problemas, por exemplo.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. OBMEP. Papel do professor. Materiais manipulativos.

ABSTRACT

The purpose of this work is to analyze the potential of the Problem Solving methodology in Mathematics based on questions from the first phase of the editions of the Brazilian Mathematics Olympiad for Public Schools (OBMEP). The practical activities were applied with students from the eighth and ninth grades of elementary school at a municipal school in the city of Igrejinha, Rio Grande do Sul. Under a qualitative bias, and based mainly on the theories of Pólya (2006), but also Allevato and Onuchic (2021) and Dante (2003), we analyzed not only the students' ability to solve what was proposed, but also some points that were present during the practice, such as the teacher's role while applying the methodology, the teacher-student relationships, the use of non-mathematically correct expressions that the students created during the meetings to externalize their thoughts about problem solving and the use of manipulatives materials as a potential resource when added to the Problem Solving methodology, for example.

Keywords: Problem Solving. OBMEP. Teacher's role. Manipulative materials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha[1] trajetória nos níveis escolares do ensino fundamental, sempre tive facilidade com os conteúdos matemáticos propostos em sala de aula. Gostava de me sentir desafiado e por esse motivo costumava pesquisar por problemas, jogos, questões e desafios que me fizessem pensar fora da caixa.

Fiquei encantado quando descobri a existência das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), porque entendi que existiam problemas propostos para alunos da minha idade que eu não conseguia resolver. Se isso acontecia, mesmo sendo apenas uma criança, significava que era possível ultrapassar a fronteira das quatro paredes da sala de aula, e me aprofundar em mares desconhecidos, tentando entender como resolver os problemas encontrados.

Entretanto, costumava me aventurar sozinho, pois não tinha o entendimento de que poderia pedir ajuda para meus professores para trilhar esse caminho. Eu tinha receio de ocupá-los para além das aulas. Era algo que fazia por gostar dos desafios da OBMEP, mas sem saber das possibilidades que ela poderia abrir.

Mais tarde, já durante a graduação em Licenciatura em Matemática, na UFRGS, pude participar como professor do Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP, em 2019. Foi uma experiência muito agregadora e motivante, porque além dos aprendizados que tive como docente, estive trabalhando com o tema que eu mais gostava.

Ou seja, desde que descobri a OBMEP nos anos finais do ensino fundamental, ela sempre esteve presente em minha vida. Com o passar do tempo, a afinidade pelos problemas e materiais que fui estudando tornou-se algo inerente à forma como me enxergo como indivíduo e cidadão do mundo, fazendo com que cada vez mais eu queira estudar, compreender e explorá-los.

Por esse motivo, surgiu a ideia da oficina realizada, que analisamos[2] neste trabalho. A prática realizada teve como objetivo incentivar alunos do ensino básico a se desafiarem por meio das questões disponíveis nos materiais da OBMEP, buscando trabalhar conceitos matemáticos para além da sala de aula, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas.

---

[1] Nessa parte do texto, escrevo na primeira pessoa do singular, pretendendo descrever minha trajetória pessoal.

[2] Adoto a forma de escrita na primeira pessoa do plural, assumindo que as ações tomadas dizem respeito aos combinados em conjunto com a professora orientadora do trabalho.

Além disso, com a oficina, apresentamos as potencialidades da OBMEP para além dos prêmios simbólicos como medalhas e menções honrosas, que podem abrir portas para uma carreira acadêmica de sucesso dentro da área da matemática ou da tecnologia, por meio de bolsas em universidades e em programas de iniciação científica.

Para isso, trabalhamos com cinco alunas do oitavo e nono ano de uma escola municipal de ensino fundamental de Igrejinha/RS, durante seis encontros presenciais que ocorreram no turno inverso àquele que as alunas tinham aulas, em que foram propostas tarefas envolvendo questões presentes em provas da primeira fase da OBMEP. Utilizamos a metodologia da Resolução de Problemas para embasar a análise dos caminhos percorridos pelas alunas ao resolverem as soluções das questões propostas, buscando responder a seguinte pergunta: Quais as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas envolvendo questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas na sala de aula?

A escolha da metodologia de Resolução de Problemas se deu devido a importância que esta tem no processo de aprendizagem da matemática, ideia defendida por autores como Polya, Onuchic e Allevato, por exemplo. Onuchic (1999) evidencia a importância desta metodologia sobre as que foram utilizadas no passado da educação matemática, pois a Resolução de Problemas faz com que os alunos atuem como participantes ativos do processo de ensino (ibid. p. 203). Silveira (2001), defende que a resolução de um problema exercita a criação significativa dos alunos em utilizar a matemática.

Onuchic e Allevato (2011, p. 82) defendem, ainda, que a metodologia faz com que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar matematicamente, desenvolvendo estratégias em diferentes problemas.

Polya, em 1945, teve o seu livro “how to solve it” publicado pela primeira vez, que mais tarde foi traduzido para o português como “A arte de resolver problemas”. Nele, o autor descreve as quatro etapas da Resolução de Problemas matemáticos: Compreender o problema, construir um plano de ação, executar o plano, rever a solução.

No referencial teórico deste trabalho, trazemos com mais detalhes os argumentos que embasam a utilização desta metodologia no ensino de matemática, além de contextualizá-la historicamente de maneira breve. Também apresentamos algumas ideias acerca das definições dos termos problema e exercício, segundo Silva e Silveira, que já escreveram sobre essa metodologia. Então, falamos sobre como a aplicação da metodologia ocorreu na oficina, por meio dos quatro passos descritos por Pólya, descrevemos a metodologia utilizada na proposta da oficina que foi desenvolvida, detalhando como os dados foram produzidos, e de que forma foram analisados. A seguir, descrevemos com detalhes os diálogos e acontecimentos de sete problemas propostos ao longo dos seis encontros, que são analisados no capítulo 6, em pontos como as relações professor-aluna, o papel do professor na aplicação da metodologia e a concretude como ferramenta para pensamento, por exemplo.

2 A OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), promovida com recursos do Ministério da Educação (MEC) e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações (MCTI).

Segundo dados da página de apresentação do site[3], a OBMEP tem seis principais objetivos: (1) estimular e promover o estudo da matemática; (2) contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; (3) Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; (4) Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; (5) Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; (6) Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Atualmente o público-alvo da OBMEP é majoritariamente composto por alunos do sexto ano do ensino fundamental até o último ano do ensino médio. Estes são divididos em três níveis na realização de duas fases da prova. O nível 1 conta com participantes do sexto e sétimo ano. O nível 2 conta com participantes do oitavo e nono ano. O nível 3 conta com participantes do Ensino Médio. Além destes níveis, o projeto conta também com a OBMEP Nível A, que no ano de 2022 realizou sua terceira edição, tendo como público-alvo os alunos do quarto ou quinto ano do ensino fundamental, ou alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) que estejam cursando série escolar que corresponda ao quarto ou quinto ano do ensino fundamental. Por fim, a OBMEP ainda aplicou em 2022 a primeira edição destinada aos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental: a Olimpíada Mirim.

Nos níveis 1, 2 e 3, os alunos das escolas inscritas participam de uma prova da primeira fase, composta por vinte questões de múltipla escolha, cada uma com cinco alternativas. Os alunos que obtiverem a melhor pontuação na primeira fase (ficando entre os 5

---

[3] Disponível em <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm> Acesso em 27 set. 2022.

e 8% melhor índice de acertos em cada escola, em cada nível[4]), são convidados a participarem da segunda fase, uma prova com seis questões, cada uma com três itens, em que o aluno precisa apresentar respostas descritivas, detalhando os cálculos e estratégias utilizadas para chegar aos resultados obtidos. Cada questão conta com critérios de pontuação e são corrigidas por comissões regionais. Após traçada uma nota de corte, as provas são encaminhadas para uma correção nacional unificada, em que são estabelecidos os alunos premiados. Todas as provas e soluções estão disponíveis no site[5].

Os alunos com as melhores classificações na segunda fase recebem medalhas de ouro, prata ou bronze, ou menções honrosas. O prêmio depende da classificação atingida. Em 2022, foram 575 medalhas de ouro, 1775 medalhas de prata, 5175 medalhas de bronze e 51900 menções honrosas distribuídas ao total. Professores, escolas e secretarias municipais também recebem prêmios de acordo com a colocação dos seus alunos, com cursos de aperfeiçoamento, livros, recursos audiovisuais e materiais didáticos e manipulativos, por exemplo.

Além dos prêmios simbólicos, os alunos premiados com a medalha de ouro são convidados para participarem do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) da OBMEP no ano seguinte em que realizaram a edição da prova em que obtiveram a devida premiação, com a possibilidade de incentivo financeiro por meio de bolsa mensal concedida pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

O PIC propicia aos alunos a possibilidade de entrar em contato com interessantes questões do ramo da matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-os para um futuro desempenho profissional e acadêmico[6]. Existem polos presenciais, com encontros que geralmente acontecem aos sábados. O programa também conta com modalidade a distância, com aulas virtuais, preparadas para os alunos que residem em regiões em que não existam polos presenciais próximos. Uma parte dos materiais utilizados pelos alunos no PIC está disponível para acesso gratuito no site da OBMEP[7].

Além de ter um programa voltado para os alunos, a OBMEP também possui um programa voltado para os professores das escolas públicas municipais e estaduais, chamado de OBMEP Na Escola, com o objetivo de estimular estudos mais aprofundados e a adoção de

---

[4] Esse número depende do número de alunos inscritos em cada um dos níveis. Informação disponível no regulamento da 17ª edição, realizada em 2022, disponível em <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em 27 set. 2022.
[5] Disponível em http://www.obmep.org.br/provas.htm Acesso em 27 set. 2022.
[6] Disponível em http://www.obmep.org.br/pic.htm. Acesso em 27 set. 2022.
[7] Disponível em http://www.obmep.org.br/apostilas.htm Acesso em 27 set. 2022.

novas práticas didáticas nas salas de aula. Estes professores são orientados no desenvolvimento de conteúdos que seguem a prática didática da Resolução de Problemas.

Por fim, a OBMEP difunde diversos materiais gratuitos sobre diversos assuntos que abordam a matemática. No site, existem 15 edições do Banco de Questões da OBMEP, publicadas anualmente de 2006 até 2020, com questões que possibilitam alunos e professores estudarem o estilo de questões abordadas nas provas. Também é possível encontrar centenas de vídeo-aulas nos canais organizados pela OBMEP no YouTube. É o caso do canal do PIC[8], do canal Portal da Matemática OBMEP[9] e do canal Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo[10]. Os assuntos abordados passam por álgebra, teoria dos números, combinatória, geometria, cálculo, teoria dos grafos e recorrências, por exemplo.

[8] Disponível em https://www.youtube.com/user/PICOBMEP Acesso em 27 set. 2022
[9] Disponível em https://www.youtube.com/user/MPTOBMEP Acesso em 27 set. 2022
[10] Disponível em https://www.youtube.com/user/PolosOlimpicos Acesso em 27 set. 2022

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Na introdução do livro "O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado", Ellenberg (2015) cria uma narrativa para exemplificar uma situação que a maioria dos professores de matemática já passou em algum momento, em que uma aluna pergunta-o: "Quando será que vou usar isso?".

O respaldo da resposta dada no livro está em argumentar que, mesmo que a aluna não esteja almejando uma carreira com orientação matemática, ela pode usar a matemática em algum momento e que, provavelmente, já está usando, mesmo que não dê a ela esse nome (ibid., p. 10). O autor complementa que: "A matemática está entrelaçada à nossa forma de raciocinar. E deixa você melhor em muita coisa. [...] Matemática é a ciência de como não estar errado em relação às coisas. […] Com as ferramentas da matemática à mão, você pode entender o mundo de maneira mais profunda, consistente e significativa." (ibidem, p. 10-11)

Essa resposta se complementa ao longo do livro, que mostra exemplos de problemas de política, medicina, comércio e teologia, por exemplo, que são enfrentados no dia a dia com respaldo da matemática, e se distanciam das listas de exercícios repetitivos, que estimulam apenas a mecanização dos algoritmos envolvidos.

Bagatini (2010, p. 10), considera em uma situação semelhante à do livro que "a suposta "inutilidade" do que se aprende em matemática torna seu aprendizado desgastante e possivelmente sem graça, implicando assim, muitas vezes, em desestímulo ao estudar esta disciplina". Como sugestão de estratégia que se coloca de encontro à problemática exposta, o autor apresenta o argumento de que "um currículo que enfatize a Resolução de Problemas pode despertar no aluno a vontade por aprender, pois assim ele verá utilidade no que está sendo ensinado e no que a matemática vista em sala de aula poderá ser usada em sua vida" (ibid., p. 10).

A primeira obra que de fato difundiu essa metodologia foi escrita por George Pólya, que viveu entre 1887 e 1985, publicada pela primeira vez em inglês, no ano de 1945, com o título *"How to Solve It?"*. O autor foi considerado um inovador ao discutir o tema. Suas ideias foram utilizadas como embasamento para muitas pesquisas que vieram a ser realizadas posteriormente.

Entretanto, o assunto ganhou notoriedade apenas em 1980. Os Parâmetros Curriculares Nacionais exibem a justificativa para que isso tenha ocorrido neste ano, argumentando que:

> "Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics — NCTM —, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação". Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentaram pontos de convergência, como: (1) direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores; (2) importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; (3) ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas; (4) importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos; (5) necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação" (BRASIL, 1998, p. 20).

Mais tarde, ao final do século XX, a metodologia ganhou evidência na publicação dos PCN's (1998) e em trabalhos de autores como Schoenfeld (1996), Onuchic (1999) e Dante (2000), que estão presentes como referenciais teóricos deste trabalho. Ou seja, a Resolução de Problemas ganhou destaque ao longo da história da educação matemática e abriu portas para que muitas outras pesquisas sobre o tema fossem realizadas.

Em 2018, a Resolução de Problemas também foi evidenciada ao longo da BNCC, quando esta propõe, por exemplo, que um aluno que ingressa no ensino médio deve desenvolver novos conhecimentos que estimulem "processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 529).

Existem diferentes definições acerca da definição de um problema, segundo diferentes autores. Para Polya (2006), um indivíduo está diante de um problema quando se depara com uma questão que não pode dar resposta, ou quando são sabe resolver o que é proposto com os conhecimentos já adquiridos previamente. Para Onuchic (1999), a concepção de problema está ligada a qualquer situação que leve o aluno a pensar, por ser desafiador e não trivial. Nos PCN's a definição dada é de que "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p.41).

Ressaltamos que todas essas definições entram em consonância ao argumentar que a Resolução de Problemas é uma metodologia utilizada para resolver uma situação ao qual determinado sujeito não sabe como proceder de imediato. É nesse aspecto que um problema se diferencia de um exercício. Para Silva (2009, p. 226), "os exercícios servem para consolidar e automatizar técnicas, habilidades e procedimentos que serão, posteriormente, utilizados para solucionar problemas". Para Silveira (2001) "o exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade/ conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de um algoritmo CONHECIDO, de uma fórmula CONHECIDA". O autor ainda diferencia exercício de problema, afirmando que "O exercício envolve mera aplicação e o problema necessariamente envolve invenção ou/e criação significativa." (ibid.)

Ao aplicar a metodologia, o professor deve estar ciente de que:

> "o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho" (PÓLYA, 2006, p. 1).

Ou seja, cabe ao professor conduzir o aluno na sua jornada em busca da solução do problema proposto, utilizando-se de perguntas sutis, que o façam associar os conhecimentos já adquiridos com as informações que possui sobre o problema. É dessa forma que o aluno compreende aos poucos o funcionamento da metodologia, e passa a utilizá-la a seu favor, questionando o professor sobre pontos específicos.

Onuchic (1999, p. 210-211) argumenta que na Resolução de Problemas "o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia o ensino é fruto de um processo mais amplo [...]"

Para Pólya (2006), a resolução de um problema por meio da metodologia proposta passa por quatro fases. A primeira delas diz respeito a compreender o problema. A segunda trata sobre o estabelecimento de um plano. Na terceira fase, executa-se o plano estabelecido anteriormente, e, por fim, faz-se um retrospecto sobre o caminho percorrido, com a finalidade de verificar se os passos realizados fazem sentido e se o problema foi resolvido.

Já Onuchic e Allevato (2021) defendem que o professor atue como mediador, questionador e gerador de situações ao longo do desenvolvimento da Metodologia, que se dá em um número maior do que o proposto por Polya: (1) Proposição do problema gerador, (2) Leitura individual; aluno recorre aos conhecimentos prévios, (3) Em pequenos grupos, alunos discutem e aprimoram compreensões, (4) Alunos em grupos, resolvem o problema, (5) Professor incentiva e observa, (6) Alunos apresentam resoluções, (7) Em plenária, professor e alunos discutem ideias, concepções, (8) Busca de consenso sobre as resoluções, (9) Professor formaliza o conteúdo matemático, (10) Proposição e resolução de novos problemas (2021, p. 48-51).

Também é possível mencionar o que outros autores discutem sobre o tema. Dante (2005, p. 30, apud. TREVISAN, p. 237), por exemplo, definiu cinco metas a serem atingidas quando a metodologia de Resolução de Problemas é aplicada: fazer o aluno pensar, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, levar os alunos a conhecer as aplicações da matemática e tornar as aulas de matemática mais interessantes e motivadoras.

Onuchic e Allevato (2011, p. 82) argumentam que a metodologia de Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas, com "capacidade de pensar matematicamente e utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos."

Schoenfeld (1996 apud CASCALHO; TEIXEIRA; MEIRELES, 2015), segue com ideias consonantes, quando afirma que o professor deve ajudar os alunos a aprender e a pensar matematicamente. Na perspetiva deste autor, pensar matematicamente significa: "(a) ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair, e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações), e (b) ter as ferramentas do ofício para matematizar com sucesso" (p. 68).

Nesse contexto, os problemas da OBMEP se apresentam como possível meio de aplicar a Resolução de Problemas de forma significativa. Dante (2003) define seis tipos de exercícios e problemas. Entre eles, estão os problemas padrão, que objetivam a aplicação direta de algum algoritmo, e os problemas-processo ou heurístico, que, segundo o autor:

> "São problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que

poderá levá-lo à solução. Por isso, tornam-se mais interessantes do que os problemas-padrão" (Dante, 2003, pg. 17-18).

Podemos observar as características de problemas heurísticos descritos por Dante na prova da OBMEP, como mostra o exemplo da Figura 1 abaixo:

Figura 1: OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13[11]


Uma formiguinha passeia em uma malha formada por triângulos equiláteros de lado 1 cm, como na figura. Ela parte do ponto *P* para o ponto *Q*, e sempre que encontra um vértice da malha, muda de direção, fazendo um giro de 60°. Ela repete sempre dois giros para a direita e um para a esquerda, percorrendo o caminho vermelho da figura. Em qual ponto da malha a formiguinha vai estar após percorrer 1000 cm?

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)[12]

Este foi um dos problemas aplicados na oficina realizada como parte deste trabalho e que será descrita nos próximos capítulos. Ressaltamos que a questão envolve vários passos para que seja possível obter a resposta para a pergunta presente no enunciado. Portanto, é plausível que se utilize os quatro passos propostos por Pólya dentro da metodologia de Resolução de Problemas como uma estratégia para atingir esse objetivo, iniciando por montar um plano de ação, que começa com traçar corretamente o caminho percorrido pela formiguinha, perceber que este caminho forma um ciclo, compreender qual o comprimento de um ciclo (18cm), obter o resto da divisão de 1000cm por 18cm e, por fim, contar esse valor a partir do ponto inicial.

Este problema trabalha com a relação de conceitos de diferentes áreas da matemática, pois é necessário ter o entendimento do significado de conceitos como soma dos ângulos

[11] Terceiro problema proposto no primeiro encontro da oficina.
[12] Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em 27 set. 2022.

internos de um triângulo, propriedades dos ângulos internos de um triângulo equilátero, bem como a habilidade de visão espacial quando pensamos no ponto de vista da formiguinha do problema para executar os giros conforme manda o enunciado. Também é necessário compreender e aplicar o conceito de resto da divisão e saber realizar a operação em questão.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 4), os educadores matemáticos se diferenciam dos matemáticos pois “realizam seus estudos utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas”, enquanto “os matemáticos estão preocupados em produzir novos conhecimentos e ferramentas matemáticas que possibilitam o desenvolvimento da matemática pura e aplicada”. Goldenberg (2020, p. 19), aproxima-se dessa ideia quando argumenta que as pesquisas desenvolvidas na área das ciências sociais lidam com “emoções, valores, subjetividades” e visam “à compreensão interpretativa das experiências dos indivíduos dentro do contexto em que foram vivenciadas”.

Objetivando responder a pergunta “Quais as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas envolvendo questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas na sala de aula?”, a abordagem metodológica deste trabalho é caracterizada como a de uma pesquisa qualitativa. Para Goldenberg (2020, p. 58), o viés qualitativo consiste em “descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos”. Fiorentini, Garnica e Bicudo (2019, p. 111) apontam para a mesma direção, quando argumentam que “o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões”.

Bogdan e Biklen (1999, p. 47-51), por sua vez, apresentam uma definição para a investigação qualitativa por meio de cinco características: (1) a fonte dos dados é o ambiente natural; (2) a investigação é descritiva; (3) o interesse é mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados; (4) a análise de dados é realizada de forma indutiva; (5) o significado das ações e das análises tem importância vital.

Como parte deste trabalho, realizamos uma oficina de turno inverso ao qual as alunas que participaram tinham aulas. A oficina apresentou 26 diferentes problemas de diferentes anos da primeira fase da OBMEP (edições entre 2009 e 2022), ao longo de seis encontros, para um grupo de seis alunas do oitavo e nono anos do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Igrejinha/RS. O convite para a participação dos encontros da oficina foi feito para os alunos de duas turmas do oitavo ano e duas turmas de nono ano da escola em questão, sob a condição de participação voluntária, sem nenhum benefício financeiro, ou de qualquer outro tipo. Também foi esclarecido que o desempenho na oficina não prejudicaria e nem contribuiria para algum tipo de avaliação das disciplinas do ensino regular ao qual os participantes faziam parte.

O nome da escola e os verdadeiros nomes das alunas não aparecem neste trabalho, a fim de proteger suas identidades. Essa participação se deu em consonância com a Carta à Direção da Escola, cujo propósito é coletar a autorização para a execução da pesquisa no ambiente da instituição de ensino; o Termo de Consentimento Informado, que solicitou a autorização, aos responsáveis pelos alunos, para a participação na pesquisa como voluntários; o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), entregue aos estudantes cujo objetivo é a concordância do aluno como integrante da pesquisa. Os três documentos se encontram nos apêndices B e C.

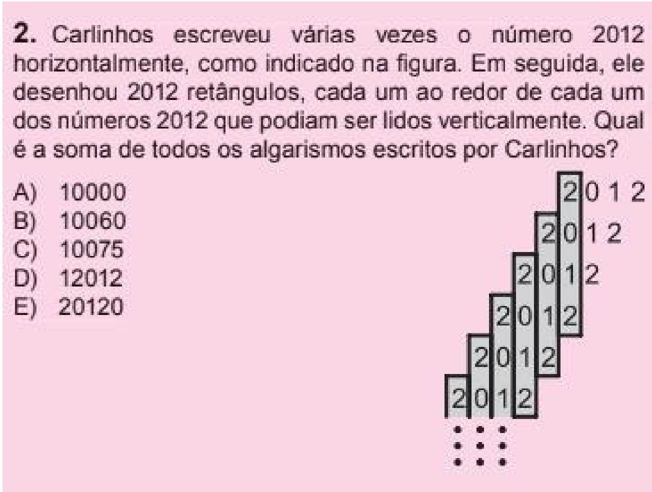
Os dados produzidos na prática desta pesquisa foram registrados por meio da captação de vídeo e áudio dos encontros ocorridos e também de anotações próprias do professor-pesquisador que atuou frente ao grupo. Na análise, presente no capítulo 6 deste trabalho, buscamos utilizar a triangulação dos dados, definida por Goldenberg (2020, p. 69) como "a combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno" com o objetivo de "abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo" (ibid.).

A análise se dá não somente sobre a habilidade das alunas em resolver os problemas propostos, mas também como elas reagiram ao trabalhar com o passo a passo proposto na metodologia, evidenciado no referencial teórico deste trabalho, porque entendemos que é necessário compreender quais são as facilidades e as dificuldades em cada parte do processo, a fim de responder a pergunta diretriz definida. Também analisamos o papel do professor e as potencialidades de ferramentas para pensamento como recurso agregador à metodologia de Resolução de Problemas, como o uso de materiais manipulativos, por exemplo.

Todos os problemas abordados na oficina estão presentes no Apêndice A, apresentado no fim deste trabalho. A seguir, apresentamos alguns deles, e na sequência, a escolha é justificada.

A Figura 2 mostra um problema envolvendo contagem, tema recorrente nas provas da OBMEP.

Figura 2: OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 2[13]

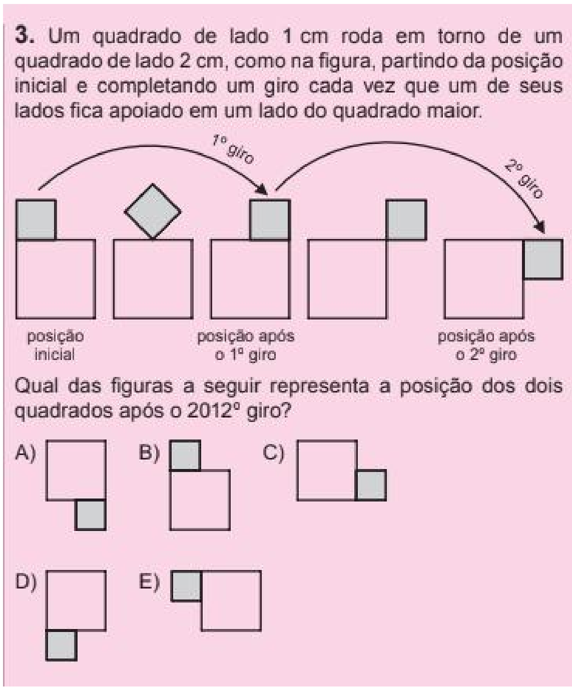

2. Carlinhos escreveu várias vezes o número 2012 horizontalmente, como indicado na figura. Em seguida, ele desenhou 2012 retângulos, cada um ao redor de cada um dos números 2012 que podiam ser lidos verticalmente. Qual é a soma de todos os algarismos escritos por Carlinhos?

A) 10000
B) 10060
C) 10075
D) 12012
E) 20120

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial da OBMEP)

A Figura 3 abaixo mostra outro problema de contagem, dessa vez com uma abordagem que envolve a geometria das figuras presentes

Figura 3: OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 3[14]


3. Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

A) B) C) D) E)

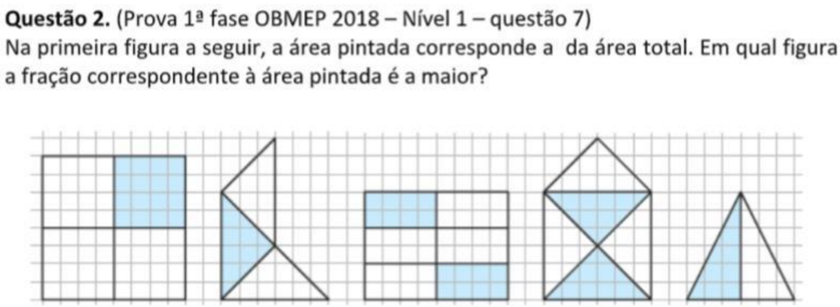
Fonte: Provas e Soluções (Site oficial da OBMEP)

[13] Quinto problema aplicado no quinto encontro da oficina.
[14] Primeiro problema aplicado no primeiro encontro da oficina.

Os dois problemas permitem que o aluno realize uma redução da quantidade de passos, podendo auxiliar na análise dos padrões que acontecem no início e no fim do esquema proposto no problema da Figura 2, ou então no ciclo de giros que o quadrado menor realiza de forma recursiva no problema apresentado na Figura 3. Este processo pode ser realizado de diferentes maneiras, que trazem diferentes potencialidades para a construção de argumentos lógico-matemáticos que são utilizados ao traçar um plano de resolução.

Na Figura 4 abaixo, exibimos um problema envolvendo a noção do conceito de área de figuras planas e de fração.

Figura 4: OBMEP 2018 – Nível 1 – 1ª fase – Questão 7

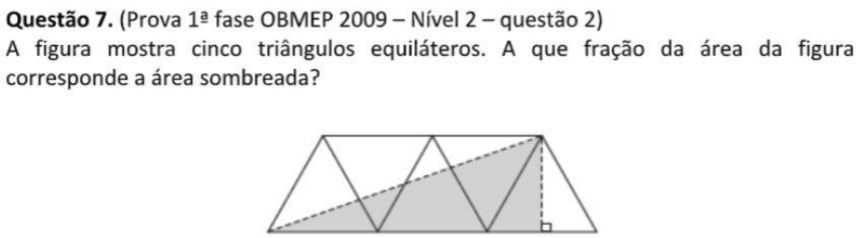

Questão 2. (Prova 1ª fase OBMEP 2018 – Nível 1 – questão 7)
Na primeira figura a seguir, a área pintada corresponde a da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial da OBMEP)

Observe que, neste caso, é dado um plano quadriculado, para que o aluno possa compreender as dimensões de cada figura, apesar de não existir nenhuma medida ou unidade de medida explícita no problema.

Na Figura 5 abaixo, um problema semelhante é apresentado, também envolvendo a noção de área de uma figura plana

Figura 5: OBMEP 2009 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 2


Questão 7. (Prova 1ª fase OBMEP 2009 – Nível 2 – questão 2)
A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área sombreada?

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial da OBMEP)

Ressaltamos que os problemas sobre áreas apresentados não solicitam que o aluno calcule o valor das áreas sombreadas, mas sim que ele tenha apenas uma noção elementar do que significa a área de uma figura plana, e de como essa característica se mantém quando transladamos parte da figura, por exemplo.

Os problemas selecionados para a oficina foram determinados por cumprirem um ou mais dos critérios que elencamos a seguir:

(1) abordar diferentes áreas da matemática, como álgebra, análise combinatória, geometria e aritmética, por exemplo;

(2) possuir a possibilidade de ser resolvido de diferentes maneiras, por meio de diferentes planos de ação;

(3) ter a possibilidade de ser facilitado ou dificultado, de acordo com o desempenho e habilidades observados nas alunas;

(4) permitir a aplicação e validação de conceitos matemáticos por meio de questões norteadoras que não necessariamente estavam relacionadas à pergunta exibida no enunciado;

(5) possibilitar o trabalho com materiais manipulativos ou materiais de apoio visual.

5 DADOS COLETADOS

A apresentação dos dados coletados está separada de acordo com cada um dos seis encontros. A descrição está baseada nas gravações de áudio e vídeo realizadas. Para que a análise das potencialidades proposta traga mais relevância para a ação das alunas durante as atividades, de fato, evidenciamos que os progressos parciais e discussões sobre os problemas propostos também fazem parte da descrição. Os nomes utilizados neste texto para identificar as alunas são fictícios, com o propósito de preservar as suas identidades.

Os problemas são identificados ao longo do texto com uma legenda da letra E, que significa “encontro”, concatenada a um número de 1 a 6, que significa a qual dos seis encontros o problema se refere, a letra P, que significa “problema”, e um último número que indica qual a ordem (cronológica) que o problema foi apresentado. Portanto, por exemplo, E1P1 representa o primeiro problema (P1) do primeiro encontro (E1).

5.1 O primeiro encontro

No primeiro encontro, quatro problemas foram propostos. Nesta seção, serão descritos dois deles. Cinco alunas estiveram presentes: Amanda, Bruna, Cecília, Daniela e Fernanda. Todas entraram e sentaram no fundo da sala, em mesas individuais. Em um primeiro momento, expliquei[15] brevemente como se daria o funcionamento da oficina. Destaco aqui a importância que foi dada ao comunicar que nenhum acontecimento da oficina influenciaria qualquer tipo de avaliação que culminaria em aprovação ou reprovação das alunas em alguma das disciplinas do ensino regular.

Em uma fala seguinte, propus que mantivéssemos o ambiente como um espaço acolhedor, respeitoso e aberto para quaisquer dúvidas que as alunas pudessem vir a ter em algum momento da oficina, não só sobre os problemas em si, mas também sobre a OBMEP

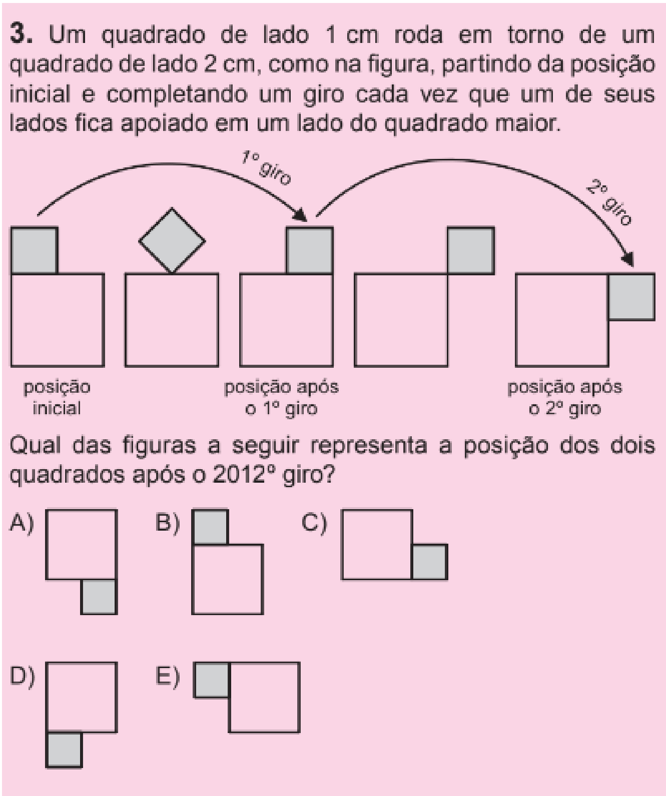
[15] A descrição dos dados produzidos está na primeira pessoa do singular, visto que o relator desta parte é o professor, pesquisador e mediador da oficina e também autor deste trabalho.

como um todo e as portas que ela pode abrir na carreira acadêmica de um estudante por meio de bolsas de estudo, por exemplo.

Antes de começar a propor os problemas deste primeiro encontro, ainda expliquei, de forma bem breve, a metodologia que utilizaríamos e apresentei um contexto histórico a partir da obra clássica de George Pólya (2006), descrevendo os quatro passos propostos pelo autor na resolução de um problema.

Anunciei que entregaria uma folha com o primeiro problema (E1P1) proposto para o encontro, apresentado abaixo, e que elas poderiam trabalhar individualmente ou com outras colegas da oficina, conforme preferência própria.

Figura 3: OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 3[16]


3. Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Depois que o problema foi apresentado, Cecília sentou-se junto de Daniela, para que trabalhassem em dupla. Elas eram colegas no turno regular da escola, em uma turma do 8º ano.

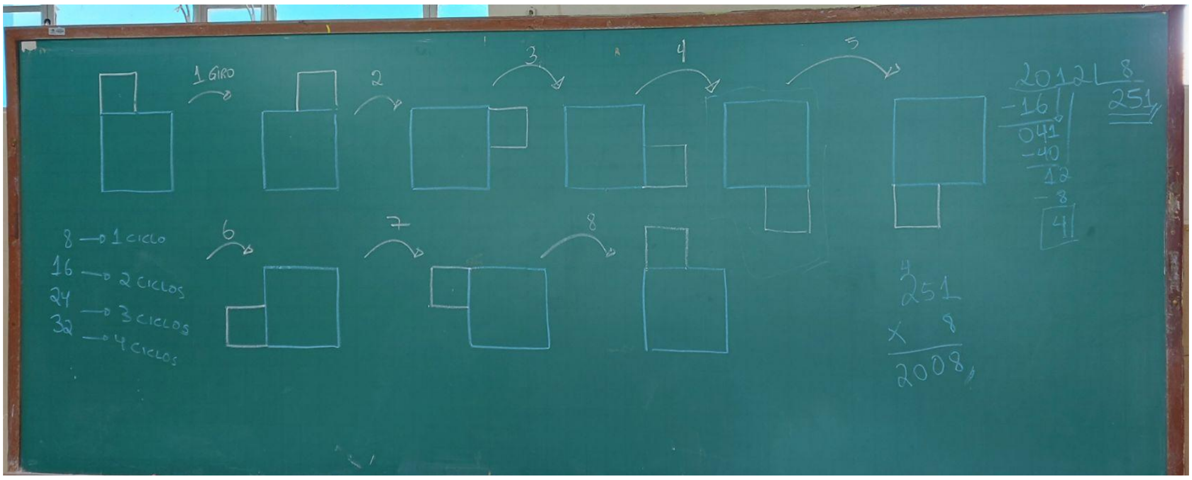
[16] Trazemos novamente a Figura 3 nessa parte do texto, com o intuito de facilitar a leitura.

As alunas tiveram um tempo inicial para trabalhar em cima do problema, a fim de interpretá-lo (1º passo da metodologia) e traçar um plano buscando a sua solução (2º passo). Depois de aproximadamente seis minutos de silêncio, questionei se alguma ideia havia surgido, e fui colocado à frente de mais silêncio. Propus que tentássemos pensar juntos, na tentativa de reduzir o problema, entendendo em qual posição o quadrado menor se encontra em relação ao quadrado maior depois de cada um dos primeiros giros. Representei esses posicionamentos em forma de desenho, no quadro. Depois, com as alunas tendo a possibilidade de enxergar o que os primeiros giros implicavam, perguntei quantos giros eram necessários para que o quadrado menor voltasse para a sua posição inicial. Daniela respondeu: "oito", e lhe disse que sua resposta estava correta. Expliquei que, se a cada 8 giros o quadrado menor voltava para a posição inicial, esse comportamento era algo cíclico, e que esse ciclo se repetia muitas vezes até que o 2012º giro acontecesse.

Nesse momento, esperava que as alunas relacionassem os giros que eram múltiplos de oito com a quantidade de ciclos de oito giros. Para isso, escrevi no quadro os quatro primeiros múltiplos, e relacionei o primeiro múltiplo (8) com o primeiro ciclo, o segundo múltiplo (16) com o segundo ciclo, e assim sucessivamente. Ainda expliquei um exemplo, dizendo que se quisesse encontrar a posição do quadrado menor após 25 giros, eu poderia partir de onde o quadrado estava após 24 giros (posição inicial) e girar mais uma vez. Trouxe o problema novamente para a discussão, perguntando então como eu poderia descobrir a posição do quadrado menor após o 2012º giro. Daniela respondeu: "2012 dividido por 8". Perguntei o que as demais alunas pensavam a respeito, e obtive apenas uma resposta, de Cecília, que concordou com o pensamento. Pedi que elas fizessem esse cálculo, e me disseram que 2012/8 = 251,5. Perguntei o que significava o "vírgula cinco", e nenhuma delas respondeu. Então, resolvi no quadro o mesmo cálculo que solicitei que elas fizessem no papel, utilizando o algoritmo da divisão. Perguntei se elas haviam feito dessa forma e todas disseram que sim. Porém, parei o desenvolvimento do cálculo antes do último passo da divisão, em que divide-se 4 por 8 para obter-se o "vírgula cinco". Então, no algoritmo da divisão, eu obtive que 2012 dividido por 8 é igual a 251 e deixa resto 4. Expliquei que o "251" representava "251 ciclos de 8 giros". Para tornar mais evidente o número total de giros após 251 ciclos, escrevi 251 x 8 no algoritmo da multiplicação e resolvi, para mostrar que totalizavam 2008 giros. Nesse momento, a intenção era que as alunas percebessem que 2012 = 251 * 8 + 4. Questionei, então, onde o quadrado menor estaria posicionado depois de 251 ciclos de 8 giros, ou seja, depois do 2008, e Daniela respondeu “no início”. Confirmei que estava certa, e concluí o argumento mostrando que para entender onde o quadrado menor estaria posicionado após o 2012º giro, bastava girá-lo mais 4 vezes, e que esse 4 era proveniente “do resto da divisão de 2012 por 8”. Evidenciei, ainda, que o número de ciclos (neste caso, 251) não era algo relevante para determinar a posição do quadrado menor, porque independente de quantos ciclos fossem realizados, no fim de cada um deles o quadrado estaria na posição original de início.

Por fim, apliquei a última fase da resolução de um problema segundo Pólya, e fiz um retrospecto da solução apresentada, junto com as alunas. A imagem do quadro ao fim da resolução do problema aparece abaixo:

Figura 6: Quadro da sala de aula após o fim da explicação do problema E1P1



Fonte: Acervo do autor.

No retrospecto, identifiquei os passos realizados: primeiro vimos como a situação proposta se comportava nos primeiros passos, identificamos que era um processo cíclico, identificamos quantos passos formam um ciclo, entendemos que a cada oito giros o quadrado menor voltava para a posição inicial, dividimos 2012 por 8 e contamos 4 giros (resto da divisão) a partir da figura inicial. Depois do retrospecto, perguntei o que as alunas tinham achado do problema, e Amanda respondeu “difícil”, enquanto as demais ficaram em silêncio. Tentei tranquilizá-las, dizendo que, aos poucos, iríamos entendendo e relacionando problemas, e isso tornaria o processo de resolução mais fácil. Evidenciei que em alguns problemas da OBMEP, quando o enunciado apresenta um número muito grande de passos, provavelmente teremos que dividir esse número por algum número menor, representado pelo número de passos que possivelmente compõem algo cíclico, e entender que contar o número obtido no resto da divisão é a chave para encontrar a resposta. Essa é uma característica de recursão, presente em diferentes problemas.

No momento da aplicação do problema, a minha visão era de que as alunas não estavam engajadas em participar do passo-a-passo da resolução. Imagino que isso tenha acontecido por conta da dificuldade inicial de criar um vínculo na relação professor-aluna, por se tratar do primeiro encontro. Consegui fazer poucas provocações e questionamentos em que as respostas delas fizeram parte, de fato, da construção lógica da solução. Porém, em retrospecto, analisando a gravação, percebi que em alguns momentos era possível ter dado mais intervalos para que as alunas tivessem tentado resolver algum passo intermediário, ao menos, por si mesmas.

O segundo problema que será descrito nesta parte do texto foi o terceiro problema proposto no primeiro encontro (E1P3). O enunciado está apresentado abaixo:

Figura 1: OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13[17]

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Dessa vez, propus que as cinco alunas presentes trabalhassem em um único grupo, com a finalidade de discutirem ideias sobre a resolução. Elas juntaram as mesas e eu entreguei a cada uma uma folha com o enunciado e também uma folha preenchida em sua totalidade com uma malha triangular, impressa.

[17] Trazemos novamente a Figura 3 nessa parte do texto, com o intuito de facilitar a leitura.

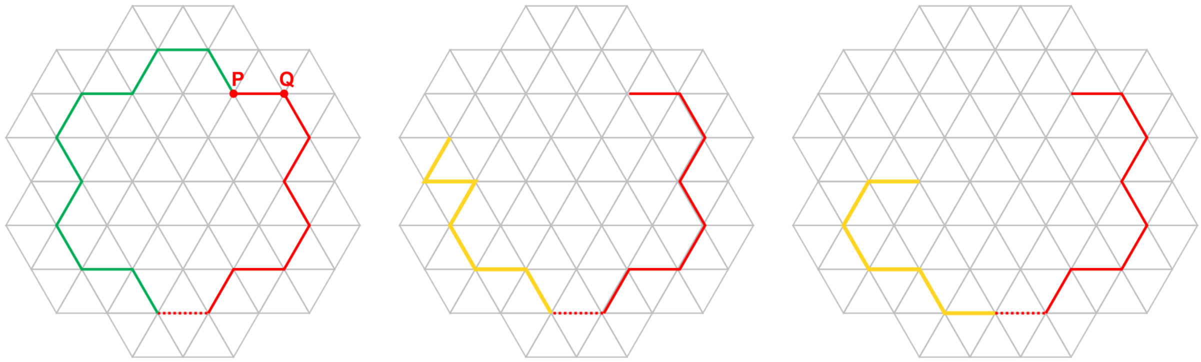
Depois de aproximadamente três minutos de silêncio, perguntei se alguma ideia de possível caminho para iniciarmos a solução havia surgido. Daniela, nesse momento, fez um comentário não relacionado com a pergunta: “Esse (problema) aqui é desse ano”. Respondi: “Desse ano? E você conseguiu resolver?”, ela riu, enquanto disse “não”. Depois de mais três minutos, senti a necessidade de intervir, e perguntei a elas qual era o primeiro passo necessário para começar a resolver o problema, a fim de iniciar o esboço do plano de resolução. Daniela respondeu ironicamente: “Desenhar uma formiga”. Eu, então, lhe disse que essa era uma boa opção, mas que também poderia representar a formiga com um ponto, e que mais importante que a formiga era o caminho que ela percorria.

Para promover uma interação, pedi que alguma das alunas fizesse o favor de ler o enunciado do problema. Cecília se prontificou e começou a ler. Quando terminou, me dei conta que havia negligenciado o primeiro passo da metodologia segundo Pólya: verificar se as alunas haviam compreendido o enunciado. Fiz questão, então, de explicar os conceitos que estavam presentes no texto, como “equilátero” e “vértice” (quando questionadas, nenhuma aluna sabia explicar o significado destes), assim como “soma dos ângulos internos de um triângulo” e “medida dos ângulos internos de um triângulo equilátero” (que todas afirmaram que compreendiam). Esses conceitos se faziam necessários para entender que a formiga caminharia sempre sobre a malha triangular. Para obter o desenho correto deste caminho, bastava agora entender como a formiga girava ao se mover, conforme descrito no enunciado. Nesse momento, disponibilizei mais tempo para que as alunas pudessem tentar obter o caminho correto, como primeiro passo do plano de ação que havíamos traçado e estávamos executando juntos. Sugeri, ainda, que pensassem que elas eram a formiga, e comentei que o fato de se imaginarem andando sobre a malha poderia auxiliá-las a desenhar o caminho correto.

Alguns minutos depois, os desenhos começaram a surgir nas folhas que elas tinham recebido, mas nenhum deles estava correto. Durante a execução do desenho, as alunas se confundiam, faziam um dos giros para o lado errado, e acabavam se perdendo. A Figura 9[18] abaixo mostra o desenho correto à esquerda, e dois exemplos de desenhos incorretos, à direita, feitos por Cecília e Amanda, respectivamente:

[18] Existe registro fotográfico dos desenhos, porém, como estão em baixa qualidade, preferiu-se representá-los com uma imagem desenhada digitalmente.

Figura 7: Comparação do desenho do caminho correto com as tentativas de desenho das alunas



Fonte: Elaborado pelo autor.

A linha vermelha mostra o início do caminho dado no problema, a linha verde, na representação mais à esquerda, mostra o caminho correto e a linha amarela, na representação do centro e da direita mostram os caminhos desenhados pelas alunas.

Nesse momento, percebendo as dificuldades encontradas, sugeri que todas ficassem em pé, para que pudéssemos executar um exercício[19] semelhante, colocando-as no lugar da formiga, utilizando o chão da sala de aula formado por azulejos quadrados. Pedi para que imaginassem que cada lado do azulejo media 1 cm. Essa seria nossa unidade de medida. Para adaptar o problema durante esse exercício, era necessário que os giros realizados fossem de 90º, e não de 60º, mas a ideia era que elas entendessem como andar e girar, sempre andando um centímetro, executando um giro de 90º para a direita, andando mais um centímetro, executando mais um giro de 90º para a direita, andando mais um centímetro, executando um giro de 90º para a esquerda, e repetindo esse processo até entender qual caminho seria desenhado. Pedi que elas fizessem isso por si mesmas, e questionei qual caminho seria formado. Cecília respondeu prontamente: “Um quadrado”. Pedi para que ela testasse sua hipótese, caminhando.

Essa proposta não se mostrou efetiva em um primeiro momento, quando provoquei que tentassem realizá-la individualmente. Percebendo isso, sugeri então que apenas uma delas andasse, enquanto as outras passassem as instruções. Além disso, sugeri que marcassem os segmentos percorridos no chão, deixando canetas, réguas, lápis e tesouras (o que tínhamos à disposição no momento) ao longo do caminho percorrido.

[19] O termo é utilizado para descrever apenas um processo executado no meio da resolução do problema

Daniela foi a escolhida para andar. Eu anunciei o primeiro passo, dizendo para que ela andasse uma unidade de medida para frente, e assim ela fez. Perguntei para as outras meninas qual era o próximo passo, e Amanda disse “girar para a direita”. Nessa hora, Daniela gira para a direita e anda, e eu intervenho para dizer que ela ainda não deveria andar, apenas girar. E era esse o ponto que eu queria que elas entendessem, pois era onde todas estavam errando em algum momento, ao interpretar que “girar” significava “girar e andar”. Ou seja, elas andavam 1 unidade de medida para frente, giravam e andavam 1 unidade de medida para frente, andavam mais 1 unidade de medida para frente, giravam e andavam 1 unidade de medida para frente, e assim sucessivamente, andando duas vezes entre cada giro, em algum momento.

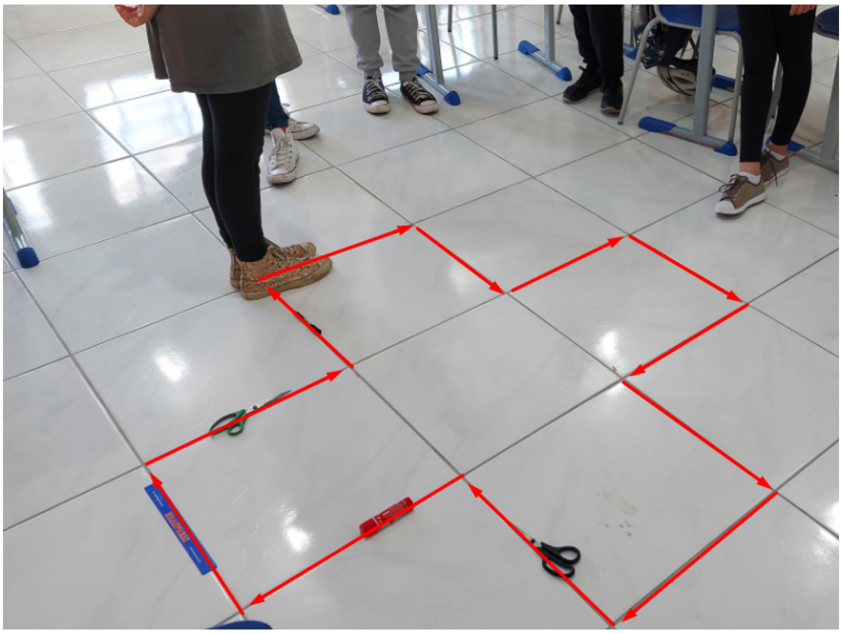
Outra confusão que ocorreu foi que, em algum momento durante a tentativa prévia de desenho do caminho na folha, com a instrução “andar” dada, as meninas andavam e giravam, executando dois giros consecutivos de uma vez só. Isso aconteceu também durante o processo de tentar marcar o caminho no chão, mas Cecília interviu e comentou “é apenas uma vez para a direita”, quando Daniela executou dois giros consecutivos, sem andar entre eles. Quando entenderam esses pontos, as alunas passaram a marcar o caminho corretamente, da seguinte maneira:

Figura 8: Registro do exercício descrito sendo executado pelas alunas

Fonte: Acervo do autor.

Perguntei se elas entenderam a ideia, e Daniela, que estava caminhando, respondeu “sim, vai formar uma cruzinha”. Eu afirmei que ela estava certa, e ao terminar o exercício, marcando todos os passos, o registro fotográfico do chão não foi realizado, mas o caminho percorrido está indicado na imagem abaixo:

Figura 9: Registro final do exercício descrito executado



Fonte: Acervo do autor.

Tendo esclarecido essa parte, sugeri que voltássemos a olhar para o papel, tentando novamente desenhar o caminho percorrido pela formiga. Daniela passou a utilizar a estratégia de partir de um ponto de vista frontal e permanecer nele o tempo todo, girando a folha e não o seu ponto de vista. Quando terminou o desenho, entendeu que a cada 18 centímetros percorridos a formiga voltava para a posição inicial. Relacionou com o problema anterior (E1P1) e dividiu 1000 cm por 18, a fim de obter o resto. No entanto, executou o algoritmo da divisão de maneira incorreta nessa primeira tentativa. A relação com um problema correlato, como ocorreu, também é tratada por Pólya (2006):

> É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: *Conhece um problema correlato?*" (PÓLYA, 2006, p. 41).

As demais alunas ainda demoraram um pouco mais para conseguir finalizar o desenho. Depois que todas entenderam o caminho percorrido e encontraram 18 cm como medida de um ciclo, logo realizaram a divisão, assim como Daniela. Todas obtiveram 10 cm como resto da divisão e contaram esse valor a partir do ponto de partida, obtendo corretamente o ponto final em que a formiga finalizou o seu percurso.

Feito isso, perguntei ao grupo o que tinham achado do problema, e Daniela respondeu: “Essa foi mais difícil, mas foi legal”. Eu respondi “Bom, o importante é que seja legal. Qual é a parte mais difícil?” e todas me responderam que era “(desenhar) o caminho”. Comentei que desenhar o caminho exige visão espacial, para entender como a formiga executa os giros.

Em retrospecto, argumentei que o primeiro passo é a leitura e compreensão do problema (1º passo de acordo com a metodologia proposta por Pólya), que tinha termos que as alunas não conheciam. Também era necessário saber como a formiga gira. Traçamos um plano de ação (2º passo), começando por desenhar o caminho, sem confundir-se no meio do processo (3º passo). Então, caímos em um ciclo, e aí associamos esse problema ao padrão que compreendemos no caso do E1P1 (voltando para o 2º passo da metodologia, entendendo qual o próximo passo do plano de ação). Realizamos a divisão, obtivemos o resto, e contamos o valor obtido a partir do ponto inicial (novamente 3º passo). Terminamos com esse retrospecto (4º passo).

Como provocação adicional, propus que pensássemos onde a formiga pararia caso andasse 2000 cm em vez de apenas 1000 cm. Bruna logo respondeu, de forma incorreta, que a formiga pararia no mesmo lugar que parou quando andou 1000 cm a partir do ponto inicial. Perguntei se as suas colegas concordavam e três delas disseram que sim, com exceção de Amanda, que disse que a formiga pararia no mesmo ponto em que partiu, também de maneira incorreta. Propus que elas investigassem suas hipóteses, pensando sobre como fizemos o procedimento pro caso dos 1000 cm e repetissem para o caso dos 2000 cm.

Logo as alunas iniciaram o processo de cálculo para obter o resto da divisão de 2000 cm por 18 cm, e levaram alguns minutos para obter a resposta correta e entender onde a formiga pararia. Mas a provocação em questão não era sobre esse procedimento, e sim sobre determinar rapidamente qual era esse valor, já que, nesse momento, era sabido que o resto da divisão de 1000 por 18 é igual a 10.

Expliquei, então, que existe um jeito mais rápido de pensar sobre esse cálculo, pois, se 1000 deixa resto 10 na divisão por 18, 2000 que é o dobro de 1000 deixa resto 20, que é o dobro de 10. Ainda posso dividir 20 por 18 mais uma vez, obtendo resto 2. Então, 2000 dividido por 18 deixa resto 2. Ou seja, a cada 1000 cm que a formiga andar sobre o caminho desenhado, ela vai parar 10 cm à frente no caminho em relação onde parou na marca dos 1000 cm anteriores.

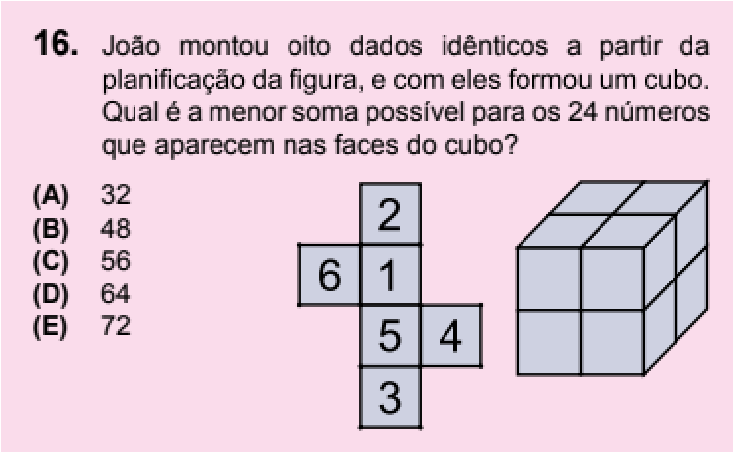
Esse último passo, com a exposição de uma dica para facilitar o segundo cálculo, não pareceu ser muito bem recebido pelas alunas. Possivelmente isso ocorreu porque não existiu curiosidade para responder a pergunta adicional realizada, já que o problema inicialmente proposto havia sido resolvido após a realização de vários passos debatidos em grupo. Mesmo assim, considero que a aplicação deste problema proporcionou boas provocações a respeito da visão espacial necessária para traçar o caminho da formiga, principalmente com o exercício realizado. Também foi possível identificar que a associação deste problema com o E1P1 ocorreu sem dificuldades, imediatamente após o caminho correto percorrido pela formiga ter sido obtido.

5.2 O segundo encontro

No segundo encontro, três problemas foram propostos. Nesta seção, será descrito o último deles. Quatro alunas estiveram presentes: Amanda, Cecília, Daniela e Elisa. Quando as alunas entraram na sala, já havia preparado um grupo de mesas para que elas pudessem trabalhar em conjunto, pois julguei que essa dinâmica funcionou melhor do que a proposta de trabalho individual do início do primeiro encontro.

O terceiro problema desse encontro (E2P3) tratou sobre a visão espacial de um cubo, e também sobre o conceito de planificação. O enunciado está apresentado abaixo:

Figura 10: E2P3 - OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 16



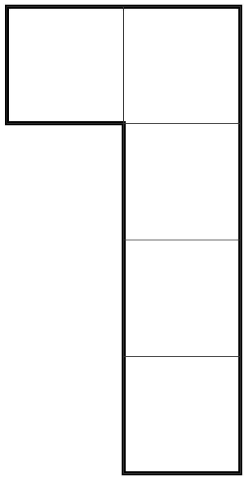
Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Além da folha que continha o enunciado, entreguei uma folha impressa com malha quadriculada para cada aluna, e lhes disse que poderiam usar ela para desenhar, recortar e montar cubos, se quisessem usar esse recurso como apoio para resolver a questão. Daniela logo começou a desenhar e recortar um cubo planificado. Amanda usou o termo “muita mão” para descrever que tal tarefa era muito trabalhosa de ser realizada. Cecília e Elisa permaneceram encarando a folha por alguns instantes, sem executar nenhuma ação.

Sugeri que cada aluna fizesse dois cubos, para que pudéssemos juntos montar um cubo maior, formado por oito cubos menores, e enxergar nele os números de cada face. Ainda fiz uma provocação de que gostaria que cada um dos oito cubos fosse montado a partir de uma planificação diferente, mas esse desafio não pareceu agradá-las. Propus então pensarmos sobre quantas planificações diferentes é possível formar com um cubo. Nesse momento, Amanda então questionou “(o termo) planificação é a ordem dos números?”. Respondi que planificação é a figura que obtenho quando abro um cubo e coloco-o sobre a mesa, enquanto fazia um gesto com as mãos que ilustrava o cubo sendo aberto. Apontei para a imagem do enunciado e disse que aquela era uma planificação possível de um cubo, mas que existem mais planificações possíveis.

Buscando encontrar alguns exemplos, iniciei mostrando uma situação em que a planificação não forma um cubo, pois seria uma figura de apenas cinco faces, conforme mostra Figura 13 abaixo:

Figura 11: Representação do exemplo dado sobre planificação que não forma cubo

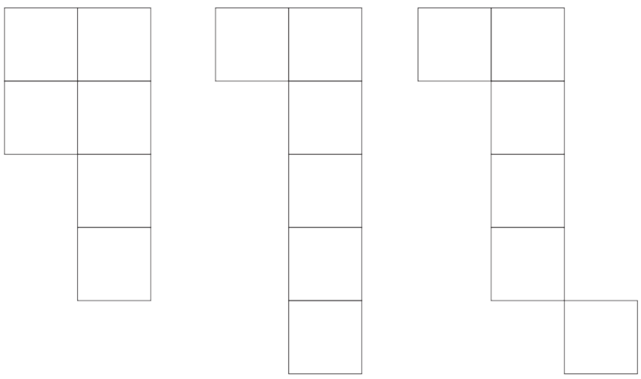


Fonte: Elaborado pelo autor.

Perguntei se essa planificação formava um cubo e as alunas me disseram que não. Perguntei o motivo e me disseram que era porque existiam apenas cinco faces representadas. Entendi que elas compreendiam o primeiro requisito que uma figura planificada precisa para representar um cubo: ter seis faces.

Daí pra frente, desenhei um quadradinho a mais, adjacente à representação anterior, em diferentes posições, questionando, em cada caso, se o desenho representava a planificação de um cubo. A Figura 14 abaixo mostra as três primeiras representações:

Figura 12: Representação do exemplo dado sobre planificação

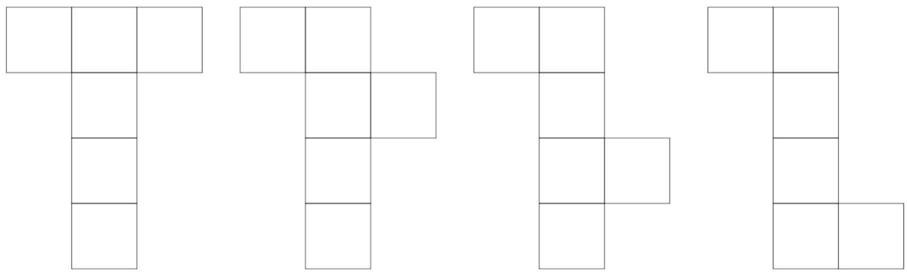


Fonte: Elaborado pelo autor.

Todas as alunas concordaram entre si que nenhuma dessas representações é uma possível planificação de cubo. Perguntei por que isso acontecia, e Daniela respondia sempre muito rápido e corretamente, antes do restante do grupo. As respostas foram justificadas: As duas representações mais à esquerda não poderiam ser utilizadas para representar a planificação do cubo porque era necessário que existisse ao menos um quadradinho na parte da direita, com uma aresta em comum com algum dos outros quatro quadradinhos que ficam na parte central da representação. A representação mais a direita, mesmo tendo um quadrado que fica na direita, possui apenas um vértice como intersecção ao restante da figura, e seria necessário ao menos uma aresta em comum, portanto não poderia ser escolhido.

Em seguida, apresentei mais alguns desenhos, um a um, conforme Figura 15 abaixo:

Figura 13: Representação do exemplo dado sobre planificação

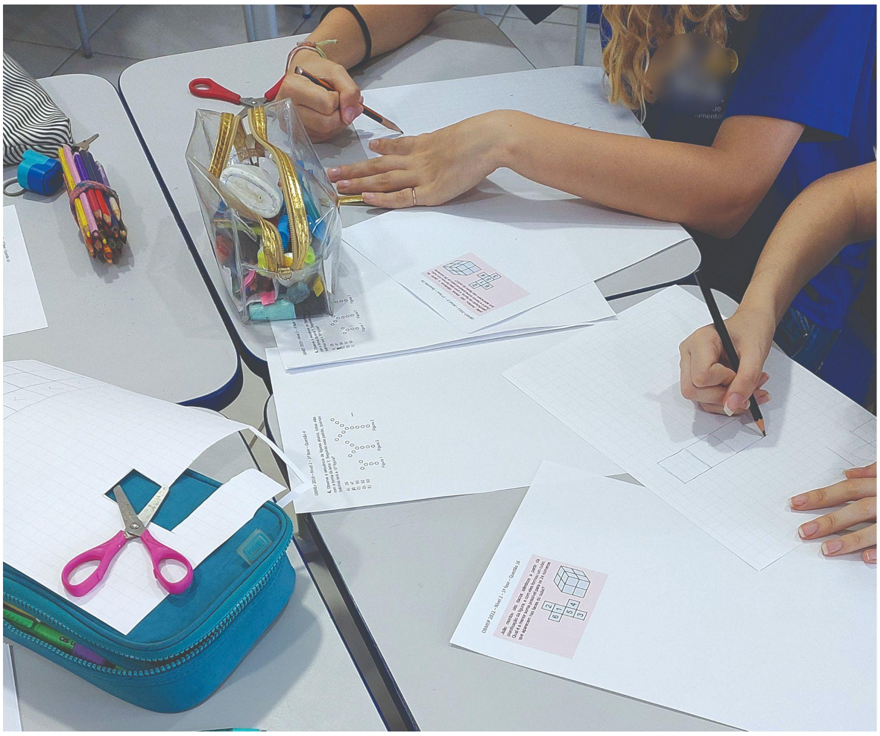


Fonte: Elaborado pelo autor.

Todas as alunas concordaram entre si que todas essas representações eram possíveis planificações de um cubo.

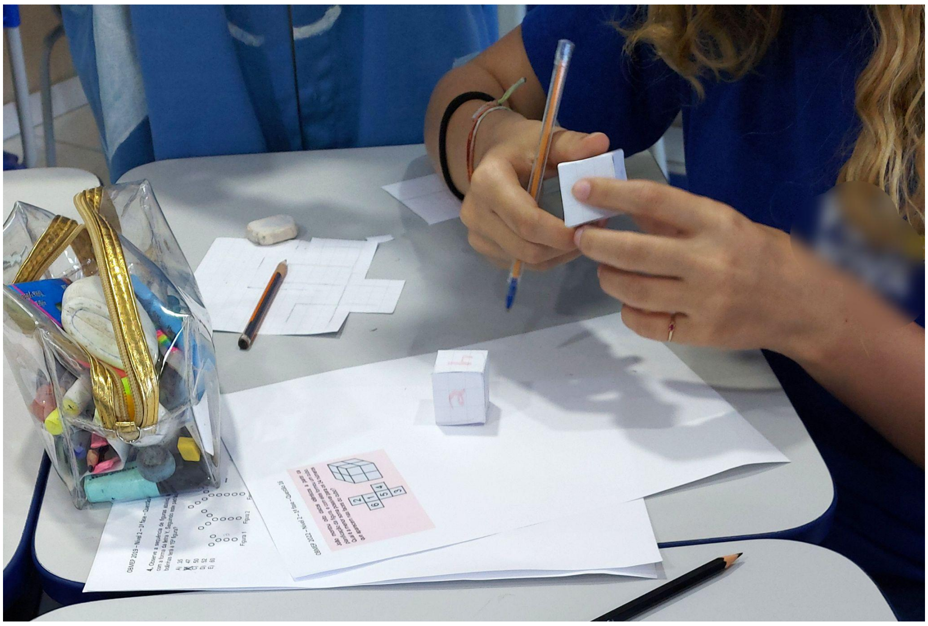
Depois disso, as alunas trabalharam na produção dos cubos. Além de Daniela, nenhuma das alunas procurou por planificações diferentes. As demais alunas desenharam na folha quadriculada a planificação conforme era trazido pelo problema. As Figuras 16 e 17 abaixo mostram as alunas montando os cubos:

Figura 14: Alunas da oficina desenhando a planificação dos cubos na folha quadriculada



Fonte: Acervo do autor.

Figura 15: Alunas da oficina montando os cubos que desenharam



Fonte: Acervo do autor.

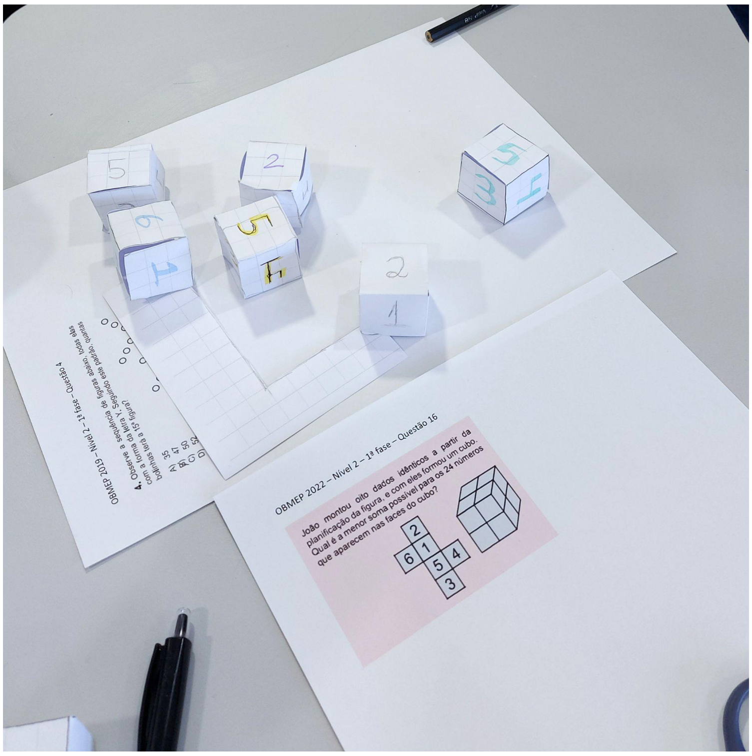
Um fato curioso é que nenhuma das alunas escreveu os números nas faces antes de montar o cubo, conforme mostrado na planificação do enunciado. Daniela terminou o primeiro cubo feito pelo grupo e escreveu os números somente após tê-lo montado.

Amanda terminou o segundo cubo feito pelo grupo, e pegou o dado de Daniela para copiar a ordem correta que os números deveriam ser preenchidos. Intervi para dizer que gostaria que ela tentasse fazer esse passo olhando apenas para o enunciado, e assim ela fez.

Enquanto terminavam de montar os oito cubos, Cecília perguntou onde eu tinha cursado o ensino médio, e como tinha sido. Amanda, que estava terminando o ensino fundamental poucas semanas depois do período em que a oficina foi realizada, se interessou pelo assunto e fez mais algumas indagações. Percebi a situação como uma oportunidade para criar vínculo de professor-aluna, e aproveitei para que conversássemos um pouco sobre o assunto.

Alguns minutos se passaram, e mais cubos foram ficando prontos. A Figura 18 abaixo, registrada no meio do processo, mostra o resultado de seis deles:

Figura 16: Seis dos oito cubos produzidos pelas alunas



Fonte: Acervo do autor.

Tendo terminado de montar os oito cubos, voltamos a olhar para o enunciado. Juntei os oito cubos formando um cubo só, conforme mostrado no problema, de forma genérica, para que as alunas visualizassem como os números ficariam expostos, e ocorreu o seguinte diálogo:

Gustavo: Como posso ver qual a menor soma possível?

Cecília: Pra cada… tipo… nesse de cima tem que ficar uma soma pequena, no lado também, em todas…

Gustavo: Só que os números que aparecem aqui (apontando para as laterais de um dos cubos menores) dependem dos números que aparecem aqui (apontando para o topo do cubo), né? Alguma sugestão?

Cecília: E se eu fizer os mesmos números que estão nessa de cima, fazer embaixo, fazer vice-versa dos lados

Gustavo: Pode ser, quer tentar? Mostra aí um exemplo.

Cecília: Vamos dizer que essa soma (aponta para lateral do cubo maior) seria igual a de cima.

Gustavo: Então aqui eu teria 1, 2, 3, 5, aqui 6, 6, 4, 1, aqui 6, 2, 4 ,1, aqui 6, 1, 4, 6, aqui 6, 1, 4, 2 e aqui 6, 6, 4, 5. E agora?

Daniela: Tem que dar 24 o resultado das somas de todos os números ali.

Gustavo: Tem certeza?

Cecília: Não, tem que ser o menor.

Gustavo: Lê ali a pergunta "qual a menor soma possível para os 24 números que aparecem nas faces do cubo?"

Houve um curto momento de silêncio…

Gustavo: Então o que seria ideal? Se eu conseguisse fazer aparecer só 1, 2 e 3, que são os menores números, né?

Daniela: Não podem se repetir os números?

Gustavo: Eu não consigo botar (o número) 1 aqui (aponta pra face superior de um dos cubos menores do topo), 1 aqui (aponta para uma das faces laterais do mesmo cubo menor), 1 aqui (aponta para a outra face lateral do mesmo cubo menor), né? Nesse cubo aqui o (número) 1 só aparece uma vez. Agora, eu consigo botar 1, 2 e 3 no mesmo cubo? Fazer eles aparecerem num canto assim?

Cecília: hm, sim.

Gustavo: Consigo? Como?

Cecília: Acho que sim.

Elisa: Se colocar todos os 1’s pra cima…

Cecília: Não, pode ser assim ó, porque o 3 vai ficar aqui, do lado vai ficar o 2.

Gustavo: E aqui (mostrando a outra face aparente) vai ficar o 6 (indicando um problema, já que não queríamos que a face com o número 6, de valor alto, ficasse aparente).

Amanda: Não tem como colocar (fazer aparecer) o 3. O 3 é o inverso do 6.

Gustavo: O 3 é o inverso do 6?

Amanda: Pois é.

Gustavo: O 3 não é o inverso do 6, ó (mostra um dos cubos menores). O 3 é o inverso do 1. Isso é uma coisa interessante pra gente pensar: quais são os inversos aqui, olhando para essa figura (aponta para a planificação do enunciado)?

Cecília: O 2 é inverso do 4? Não… do 5 acho.

Gustavo: O 2 é inverso do 5 ou do 4?

Cecília: Acho que é do 5.

Amanda: O 2 é inverso do 3.

Gustavo: O 2 é inverso do 3?

Amanda: O 1 é inverso do 3.

Gustavo: O 1 é inverso do 3?

Amanda: É.

Gustavo: Então esse aqui ó (aponta pro 1 na planificação do enunciado) é inverso desse aqui ó (aponta pro 3 na planificação do enunciado). Faz sentido…

Cecília: O 4 é inverso do 6.

Gustavo: O 4 é inverso do 6. E o 5 é oposto do 2, consequentemente .

Tendo determinado os opostos, voltamos a olhar para a figura dos oito cubos posicionados como um cubo maior, para perceber que, das seis faces de cada cubo menor, três delas apareciam e três delas não apareciam. Além disso, se um número aparece, o seu oposto não aparece. Determinamos 3 pares de números opostos. Perguntei qual número de cada par seria preferível que aparecesse para atingir a menor soma dos 24 números, e me disseram que no caso do par 2 e 5 de números opostos, era melhor que o 2 aparecesse. No caso do 6 e do 4, era melhor que o 4 aparecesse. No caso do 1 e do 3, era melhor que o 1 aparecesse. Perguntei, então, se era possível posicionar os dados fazendo aparecer 1, 2 e 4 em cada um dos oito dados. As alunas passaram a mexer nos dados empilhados, procurando obter essa representação e viram que era possível. Quando perguntei qual era a soma dos 24 números que apareciam, Cecília somou as faces: “Em cima tá dando 4, desse lado tá dando 9, desse lado 14, aqui 12, aqui 12 também, e embaixo 5”. Obtemos 56 como resposta, depois de alguns instantes realizando o processo de somar esses números. Perguntei “essa é a menor (soma possível)?”, e todas me responderam que sim. Perguntei “Por que?”, e me disseram que em cada dado estava representado a menor soma possível das três faces que eram mostradas. Então disse “cada dado contribui com 1 + 2 + 4 para a soma total, certo?”, todas concordaram. Perguntei “quantos dados são”, todas responderam “oito”. Perguntei “(Quanto é) 8*7?” Elisa começou a responder: “Sessenta e…”, Cecília interrompeu: “não, é 56”. Elisa: “É, 56”. Questionei “Então tá certo?”, e me responderam “Sim”.

Fiz uma nova provocação: “Quais são as outras quinas de números possíveis de serem formadas em cada dado? Ou melhor, se eu pedisse qual a maior soma possível, em vez da menor, vocês saberiam fazer?

Cecília: É só pegar o 5, o 6 e o 3.

Daniela: É, é só fazer ao contrário.

Gustavo: E aí, qual é a maior soma possível?

Silêncio…

Amanda: 24

Gustavo: 24?

Amanda: É, aqui em cima seriam quatro (vezes a face) 6.

Gustavo: Tá, mas aí eu teria 24 aqui no topo, mas o que eu quero saber é qual que é a maior soma possível de todos os lados.

Elisa: Teria que somar todos esses números aqui (apontando pro 3, 5 e 6) e fazer vezes oito.

Gustavo: Isso aí, tá certo! Então eu faria 3+5+6 = 14. Faço 14 vezes 8, isso?

Todas: Isso.

Gustavo: Então 112, que é exatamente o dobro de 56, olha só que loucura.

Gustavo: O que acharam dessa?

Elisa: Eu achei mais fácil.

Daniela: Mentalmente seria muito mais difícil.

Cecília: É

Amanda: É, com os cubinhos fica fácil de fazer, mas na prova assim…

Gustavo: Tá, entendi. Exige muita visão tridimensional. Eu posso fazer um retrospecto desse problema da seguinte forma: consigo encontrar em todos os dados uma quina com três números iguais? Sim, então eu só preciso multiplicar por 8 o valor de uma das quinas. Agora qual que é o menor valor de quina que eu consigo obter, considerando planificação dada no problema? Aí eu tenho que pensar com uma visão tridimensional pra conseguir montar o cubo na minha cabeça e montar as quinas.

Depois de tratar sobre este último problema no encontro em questão, ainda ocorreu uma conversa sobre como estavam funcionando as aulas na escola durante o ano.

Gustavo: Vocês estudam de manhã, né? Até que horas? 11:45?

Amanda: 11:20.

Gustavo: 11:20?

Cecília e Vitória: 7:20 até 11:50.

Cecília: O oitavo ano.

Amanda: É, o oitavo para mais tarde.

Cecília: Só o oitavo.

Gustavo: Para mais tarde? Como assim para mais tarde?

Amanda: Por causa da pandemia.

Cecília: É, teve uma prova que a gente foi muito "ruim", daí a gente recupera português e matemática. Aí só sexta a gente sai às 11:20.

Daniela: No resto dos dias a gente sai com a aula de matemática estendida por meia hora.

Cecília: É, matemática e português.

Gustavo: É mesmo? Para recuperar a carga horária?

Daniela: Uhum, eles contaram que a gente não tem recuperação e por conta disso tem um pessoal que tá fazendo igual porque faltou muita aula.

Mudando de assunto, questionei sobre como a matemática estava sendo abordada na escola.

Elisa: Agora a gente não tá fazendo muita coisa. Só trabalho de vídeo.

Amanda: Porque vocês tem que fazer trabalho de vídeo?

Elisa: Era pra dar meio que uma aula, explicando num vídeo algum assunto, tipo agora era números decimais.

Amanda: Mas com qual finalidade?

Elisa: Pra mostrar o vídeo pro sexto ano.

Amanda: Pra ensinar o sexto ano?

Cecília: Sei lá, a gente tinha que criar um roteiro, alguma coisa assim, aí o último vídeo foi pro sexto ano.

Amanda: Mas ele explicou por que?

Elisa: Não.

Cecília: Sei lá.

Gustavo: Vocês não conseguem entender o porquê?

Amanda: É, pode ser que ele fez elas gravarem o vídeo para elas falarem do que elas entenderam.

Daniela: É, pra gente relembrar também (o conteúdo), já que o nosso sexto ano foi online.

Cecília: É, aí a gente vai ter que fazer uma atividade para eles.

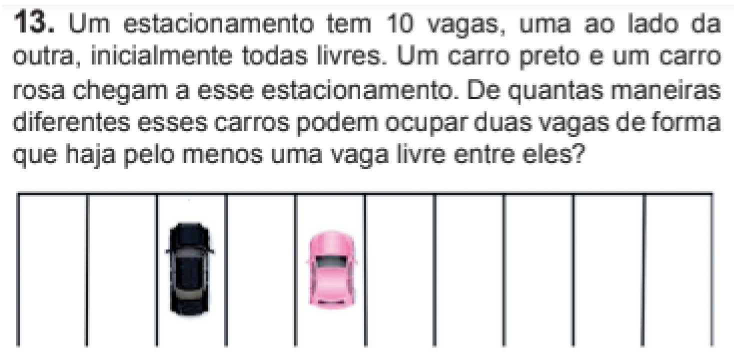
Em seguida, tratando do convite que as alunas haviam recebido para participar da oficina, comentei que é legal participar dos projetos que surgem na escola, mesmo que não exista nenhum benefício de auxílio financeiro ou influência na nota das avaliações do ensino regular, porque o aprendizado e a experiência são fatores suficientes para despertar o interesse em participar desse tipo de atividade. Expliquei que na faculdade existem oportunidades desse tipo, às vezes com bolsa, às vezes sem, e dei o exemplo da iniciação científica, como oportunidade para mencionar que a OBMEP também tem seu próprio programa de iniciação científica, em que medalhistas são convidados a participar em algum polo da região ou na forma online.

5.3 O terceiro encontro

No terceiro encontro, quatro problemas foram propostos. Nesta seção, será descrito o terceiro problema (E3P3). Cinco alunas estiveram presentes: Amanda, Bruna, Cecília, Daniela e Elisa. Neste dia a escola pediu que ficássemos em uma sala diferente, que era conhecida como “Laboratório de Aprendizagem”, segundo a diretora. Ali, existia apenas uma mesa, maior, que comportava até sete pessoas sentadas.

O problema tratou sobre análise combinatória, abordando uma situação em um estacionamento de 10 vagas, onde 2 carros seriam estacionados. O enunciado está apresentado abaixo:

Figura 17: E3P3 - OBMEP 2018 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13


13. Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Além de disponibilizar uma folha com o enunciado impresso para cada uma das alunas, disponibilizei uma folha em branco para que elas pudessem representar o estacionamento em forma de desenho, se assim desejassem. Também coloquei no centro da mesa dois carrinhos de brinquedo, um preto e um branco.

Depois de três minutos, Amanda questiona: “Tem que ter só uma vaga entre eles ou pode ter mais?”. Daniela intervém: “Pelo menos uma”. Todas as cinco alunas olham para mim, como se esperassem a confirmação ou correção da colocação feita por Daniela. Eu confirmo que é isso mesmo.

Questionei se alguma delas tinha alguma ideia do que poderia ser feito para começar a resolver a questão, ou se tinham algum palpite de como chegar no resultado. Ocorre o seguinte diálogo:

Bruna: 10 vezes 2?

Gustavo: 10 vezes 2 dá 20. Por que 20?

Bruna: 10 vagas e 2 carros.

Gustavo: O que vocês acham do palpite da Bruna?

Cecília: Acho que pode ser mais, porque eles (os carros) podem ocupar mais de uma vez a (mesma) vaga. Tipo, o carro preto ocupar uma vez uma vaga e o carro rosa ocupar em outra vez essa mesma vaga.

Gustavo: Você acha que é mais, então. Quanto mais? A Bruna disse 20. Você acha que vai ser 30, 40, 50, 200, 300?

Cecília: 40, por aí.

Gustavo (para as demais): O que vocês acham?

Amanda: Uns 100.

Elisa: Eu tentei fazer a conta e deu 14. Aí ela (Cecília) falou que ia trocar os carros, aí seria 28.

Gustavo: Muito bom, já temos o raciocínio de trocar os carros. Isso é Importante.

Daniela: Não tenho certeza, eu saí contando nos dedos mesmo. Não tenho ideia de cálculo ainda.

Gustavo: Então vamos fazer o seguinte: eu vou deixar vocês pensando mais um pouco e vou desenhar aqui um estacionamento.

Elisa (para as demais colegas): O que vocês pensaram?

Gustavo (para Elisa): Conta pra elas a tua ideia de fazer "vezes dois". Por vezes dois? Essa parte é importante.

Elisa: Como assim "vezes dois"?

Gustavo: Você falou que era 14, aí a colega te falou alguma coisa, e você chegou a conclusão de que era "vezes dois".

Elisa: Tá, eu fiz todas as possibilidades que eu acho que pode ser e deu 14. 14 possibilidades que eu achei, que eu não lembro agora, e aí ela falou que podia se repetir ao contrário. 14 mais 14, 28.

Bruna: Mas eu consegui 22.

Gustavo: 22?

Daniela: Eu consegui 36. Mas se fosse desse jeito seria muito mais.

Bruna: Porque muito mais?

Amanda: É por que não precisa haver só uma vaga entre eles, pode ser que um esteja aqui no início e um no final

Cecília: É, entendeu? Daí eles podem ir indo.

Elisa: Ah…

Gustavo: Tá, então vocês entenderam que se o preto estiver aqui e o rosa estiver aqui é uma possibilidade. Se o preto estiver no lugar do rosa e o rosa no lugar do preto é outra, por isso que ela fez "vezes dois". Sim?

Todas: Tá.

Gustavo: Então, se eu perguntar pra vocês quantas possibilidades existem para que os carros estejam distanciados com exatamente uma vaga entre eles, em vez de pelo menos uma?

Daniela: Muitas.

Gustavo: Não são tantas…

Amanda: Exatamente uma, acho que não são tantas.

Daniela: Contei 72.

Cecília e Amanda: Com uma só?

Daniela: O que?

Cecília e Amanda: De vagas entre eles?

Daniela: Não, todas.

Cecília e Amanda: É, mas agora ele perguntou com uma só.

Daniela obteve a resposta correta do problema proposto, mas aparentemente não tinha certeza de que estava certa. Inicialmente ela obteve 36 possibilidades, e depois que as colegas mencionaram que era necessário fazer "vezes dois", ela obteve 72. Antes de anunciar que Daniela estava certa quis que elas entendessem o que era necessário para obter esse valor.

Gustavo. Tá, tentem responder essa pergunta primeiro, vamos reduzir o problema. Com exatamente uma vaga entre eles, quantas são as possibilidades?

Daniela: 16.

Gustavo: 16? Por que?

Bruna: Não, tem mais de 16.

Bruna e Daniela conversam entre si, bem como Cecília, Amanda e Elisa. Elas apontam para o desenho do estacionamento no enunciado e contam as possibilidades em voz alta, uma para as outras. Depois de alguns instantes, volto a questioná-las.

Gustavo: Com exatamente uma vaga entre eles, quantas são as possibilidades?

Daniela: 16

Gustavo: Por que?

Elisa: Contei 7.

Cecília: Não sei, porque ela (Daniela) falou…

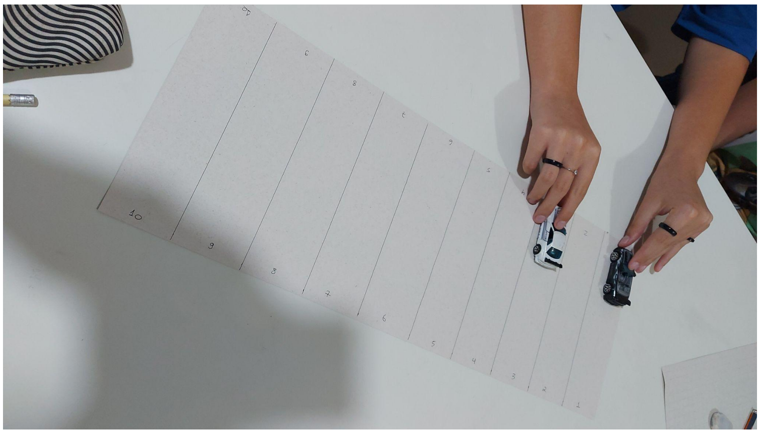
Gustavo: Por que ela falou?

Elisa: Como vão ser 16 se só tem 10 vagas?

Cecília tenta convencer Elisa que acredita que seja mais que 7. Elisa argumenta como chegou em 7 mostrando alguns desenhos que realizou. Cecília observa e responde dizendo que ela não dobrou o valor obtido, operação que representa a troca dos dois carrinhos entre si nas 7 possibilidades possíveis. Elisa diz que então teria que ser 14. Cecília responde: “Eu entendi, mas acho que dá mais.”

No centro da mesa coloquei um desenho maior para representar um estacionamento em que as alunas poderiam posicionar os carrinhos nas vagas para explicar o raciocínio para as demais colegas.

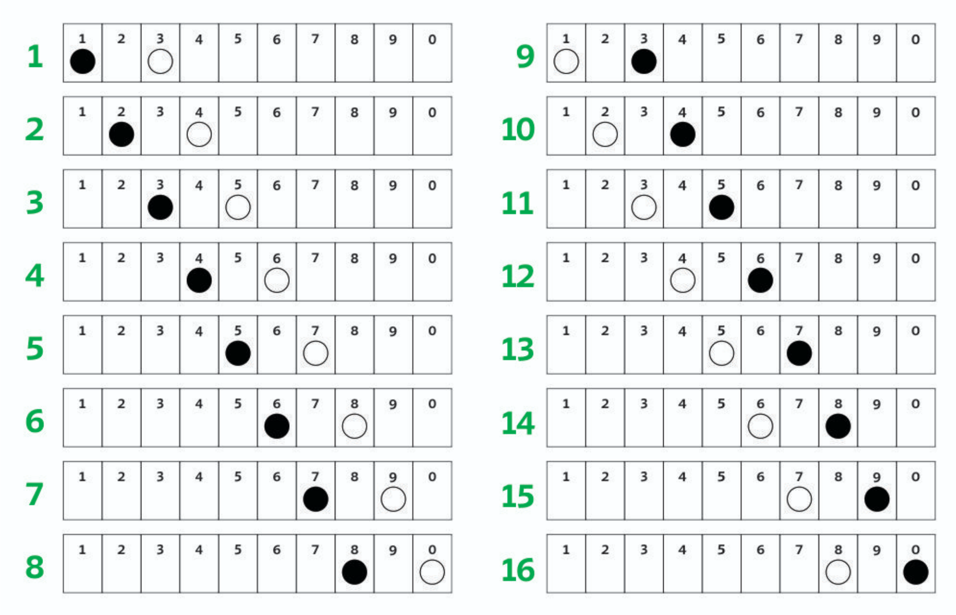
Figura 18: Uma das alunas utilizando a representação e os carrinhos para explicar seu raciocínio



Fonte: Acervo do autor.

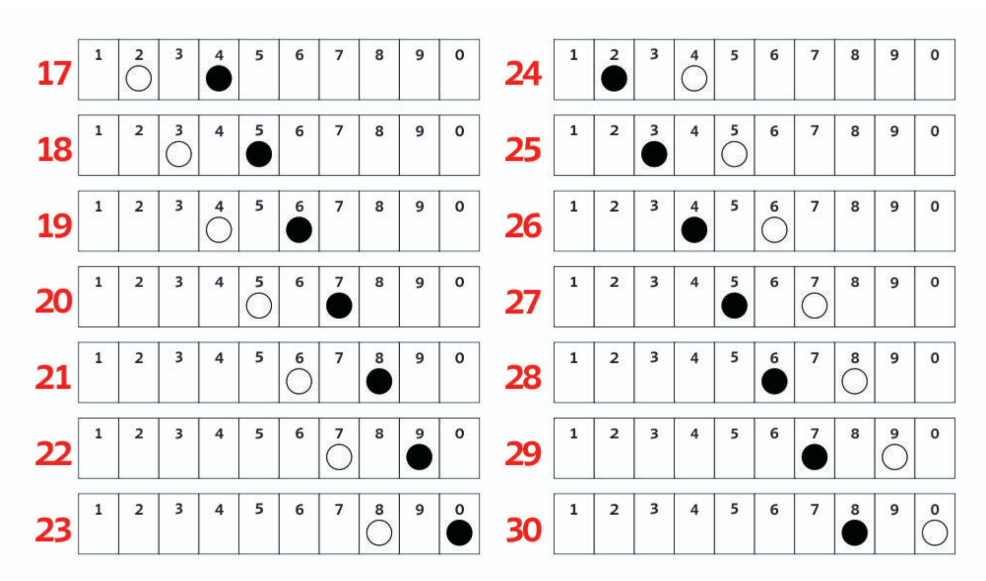
Amanda tomou iniciativa e mostrou 30 possibilidades. As 16 primeiras estão representadas na Figura 21 abaixo. As 14 seguintes estão representadas na Figura 22 abaixo:

Figura 19: As 16 primeiras representações mostradas por Amanda



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20: As 14 representações seguintes mostradas por Amanda



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como era possível visualizar apenas uma representação por vez, Amanda não percebeu que as 14 últimas representações que mostrou já haviam sido mostradas nas 16 primeiras.

Daniela: Eu não sei, eu acho que tu contou mais vezes.

Bruna: Não, é que ela trocou os carros.

Cecília: Trocou as posições.

Olho para Daniela e digo: “Explica”.

Ela pega os dois carrinhos e mostra as 8 primeiras posições possíveis da mesma forma que Amanda havia mostrado (Figura 21). Quando termina as 8, diz “se fizer assim (troca os carrinhos de posição) é só fazer vezes dois, dá 16.”

Amanda: E depois trocar pelo os que a gente não tinha usado antes.

Cecília pega os carrinhos com as mãos e, posicionando sobre o estacionamento representado, tenta explicar que, na concepção dela, fazer as representações de 1 a 8, nessa ordem, não é a mesma coisa que fazer as representações de 8 a 1.

Daniela responde: Mas a gente já fez assim. A gente fez um de cada. Se começar daqui (carrinhos nas vagas 1 e 3) ou começar daqui (carrinhos nas vagas 10 e 8), não vai fazer diferença, a gente já fez esse aqui.

Bruna concorda. Cecília e Amanda não. Amanda explica novamente seu raciocínio, sem perceber que está repetindo algumas posições.

Intervenho, sugerindo que seja feito um exercício em que Amanda mostraria as possíveis posições de acordo com a forma que pensa, enquanto outra aluna registraria numa folha as vagas que cada carro estaria posicionado em cada uma das possibilidades ditadas por Amanda.

Amanda começa a ditar e Bruna começa a registrar por escrito. Assim que Amanda dita a 18ª possibilidade ocorre o diálogo a seguir:

Gustavo: Tem mais algum?

Amanda: Tem mais.

Gustavo: Qual?

Amanda: Começar assim e…

Gustavo: Começar como? Com branco no 2 e preto no 4?

Amanda: É.

Gustavo: Branco no 2 e preto no 4 já foi?

Bruna revisa a lista das 18 possibilidades registradas e responde: “já foi”.

Gustavo: Então tu tá repetindo. Tem mais algum?

Elisa: Como já foi?

Amanda: Já foi?

Cecília: Ah sim, porque quando tu começou aqui (branco no 1 e preto no 3), daí tu foi assim (move os dois carrinhos pro lado, colocando o branco no 2 e preto no 4) daí já foi no 2, daí não faz sentido.

Gustavo: Tem mais algum?

Daniela: Com uma vaga de distância já foi todas

Gustavo: Alguém tem mais algum palpite?

Cecília: Aqui repetiu o número (aponta para a lista)

Gustavo: Onde?

Cecília: Aqui tem um 5 e aqui tem outro.

Gustavo: Tá, mas aqui o 5 tava no branco e o preto tava no 3. E aqui o 5 tava no branco e o preto tava no 7.

Cecília: Acho que foi todas então.

Bruna testa mais algumas possibilidades, mas percebe que todas já estão presentes na lista que foi feita.

Confirmo, então, que a resposta é realmente 16, e repasso o que fizemos.

Pergunto: E agora, se eu tiver exatamente duas (vagas entre os carros)?

Daniela posiciona os carrinhos e encontra 14 possibilidades (7 vezes 2). Pergunto se as outras alunas concordam, e todas dizem que sim.

Pergunto “E se eu tiver exatamente três (vagas entre os carros)?”. Elas pensam. Eu digo: “façam com os carrinhos”, e logo me dizem que são 12 possibilidades (6 vezes 2).

Começo a escrever uma lista:

“Exatamente 1 vaga entre os carros: 16 possibilidades

Exatamente 2 vagas entre os carros: 14 possibilidades

Exatamente 3 vagas entre os carros: 12 possibilidades”

Pergunto em que momento essa lista vai terminar, e não demoram muito para me dizer que ela vai até o 8, de “Exatamente 8 vagas entre os carros”. Faço uma pergunta de cada vez, questionando quantas possibilidades existem caso existam 4, 5, 6, 7 e 8 vagas entre os carros. As alunas percebem que o número de possibilidades diminui 2 unidades quando o número de vagas entre os carros aumenta em 1 unidade e me dizem que devo preencher a lista da seguinte forma:

"Exatamente 4 vagas entre os carros: 10 possibilidades

Exatamente 5 vagas entre os carros: 8 possibilidades

Exatamente 6 vagas entre os carros: 6 possibilidades

Exatamente 7 vagas entre os carros: 4 possibilidades

Exatamente 8 vagas entre os carros: 2 possibilidades"

Feito isso, pergunto o que preciso fazer para responder a pergunta do problema inicialmente proposto.

Daniela: Somar tudo isso aqui (apontando para as possibilidades).

Amanda, Cecília e Elisa concordam. Bruna fica reflexiva.

Eduarda soma os 8 valores e obtém 72 como resposta. Depois, ocorre o diálogo:

Gustavo: Existe alguma configuração que os carros vão estar estacionados dentro da restrição de ter exatamente 1 vaga entre eles e também ter exatamente 4 vagas entre eles?

Amanda: Não.

Gustavo: Não, né? é impossível. Se eu listar todas essas 72 possibilidades, nenhuma delas vai estar repetida. Então são 72 diferentes. Existe possibilidade alguma fora essas?

Daniela: Não.

Gustavo: Não existe. Então são 72.

Daniela: Eu tinha falado que era 72!

Gustavo: Muito bem. Essa foi legal, não foi?

Cecília, Amanda, Bruna: Foi.

Trabalhar com esse problema foi muito proveitoso. O trabalho em grupo foi essencial para que as alunas pudessem traçar e executar um plano. As alunas foram todas muito participativas e pela primeira vez, na oficina, ocorreram diálogos e questionamentos entre elas que partiram de inquietações próprias. Ou seja, nem sempre precisei intervir para provocar discussão ou debate.

Em retrospecto, vejo que os questionamentos que fiz a fim de provocá-las a elaborarem um plano de ação foram colocados nos momentos certos. Antes de saberem como definir qualquer possibilidade de caminho, questionei sobre uma estimativa ou palpite de quantas possibilidades elas imaginavam que seriam a resposta do problema.

Depois, já trilhando um início de caminho para a resolução, Elisa percebeu, a partir do comentário de Cecília, que era necessário fazer "vezes dois", indicando a troca de posição entre os dois carrinhos.

Depois, reduzimos o problema, para tentar entender que ele poderia ser dividido em diferentes casos que, quando unidos, apresentavam a solução do problema em sua totalidade.

O desenho do estacionamento e os dois carrinhos de brinquedo também foram essenciais para dar concretude às ideias de Amanda, e fazê-la perceber que estava repetindo posições na sua listagem de possibilidades. Ou seja, aqui, o material físico foi notado como uma excelente possibilidade de ferramenta para auxiliar o caminho percorrido na resolução do problema.

5.4 O quarto encontro

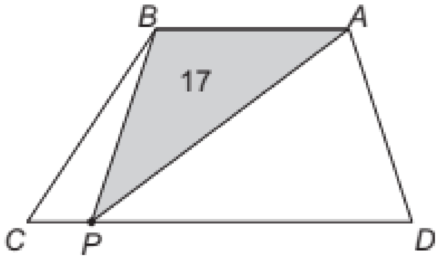
No quarto encontro, quatro alunas estiveram presentes: Amanda, Bruna, Cecília e Daniela. O trabalho em grupo foi continuado, da mesma forma como aconteceu nos encontros anteriores.

Quatro problemas foram propostos. Nesta seção, será descrito o quarto problema (E4P4), que tratou de conceitos da geometria plana, tais como triângulo, trapézio, base e altura dessas figuras. Ele está enunciado a seguir:

Figura 21: E4P4 - OBMEP 2018 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 11

11. No trapézio *ABCD* da figura, os lados *AB* e *CD* são paralelos e o comprimento de *CD* é o dobro do comprimento de *AB*. O ponto *P* está sobre o lado *CD* e determina um triângulo *ABP* com área igual a 17. Qual é a área do trapézio *ABCD*?

A) 32
B) 34
C) 45
D) 51
E) 68



Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Os primeiros argumentos feitos a respeito deste problema estavam relacionados com as informações sobre o triângulo. Daniela enunciou em voz alta: “A área do triângulo é base vezes altura dividido por dois”. Isabel disse: “a base de baixo é o dobro da base de cima”.

Questionei: "Onde está a base e onde está a altura desse triângulo?”

As alunas argumentaram que a base do triângulo era BA e a base do trapézio era CD. Questionei novamente sobre qual era a altura do triângulo. Todas, em um primeiro momento, responderam “PB”. Mas logo Cecília disse: “Ou PA”, em um tom de voz que insinuava que qualquer uma das duas alternativas postas poderia representar a altura do triângulo. Bruna concorda, mas Amanda e Daniela entendem que a altura tem que ser representada apenas por um dos dois segmentos. Daniela justifica este argumento, dizendo que PA é maior que PB.

Gustavo: E qual é a altura do trapézio?

Amanda: É CD ou AD.

Proponho uma reflexão. Fico de pé, ereto, e digo “se eu tenho 1,70m, e me inclino para o lado (faço o movimento), a minha altura vai diminuir?”

Amanda: Tua altura não, mas…

Cecília: Vai. Vai sim.

Bruna: A altura dele vai continuar a mesma, ele só vai estar inclinado.

Cecília: Ah, a tua altura vai continuar a mesma.

Gustavo: Tá, mas qual que é o significado de altura?

Cecília: É o comprimento do teu pé até a tua cabeça.

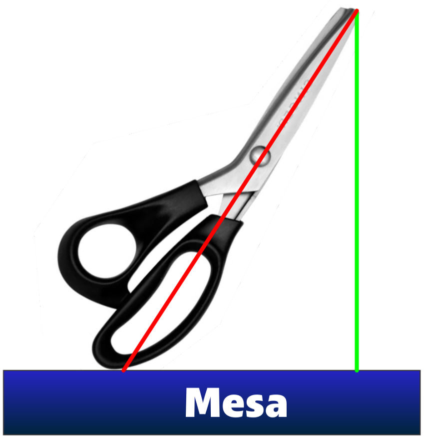
Gustavo (inclinado para o lado): Na linha do meu corpo, ou na linha que desce reto no chão?

Cecília: A que desce reto no chão.

Tentei representar uma reta e um plano usando as mãos, enquanto dizia: Em matemática, o significado de altura é o valor da medida (dedo) que é perpendicular ao plano (mão) em que um objeto está apoiado. Por exemplo, a altura do chão até o teto é uma reta que vai cruzar "retinho" o chão, e ir até o teto (enquanto apontava).

Para dar mais um exemplo, pego uma tesoura e coloco-a sobre a mesa, inclinada, como mostra a representação da Figura 24 abaixo, apontando para um segmento imaginário, representado pela cor verde, enquanto explico que essa seria a altura da tesoura, e não o segmento em vermelho:

Figura 22: Representação do exemplo dado, para mostrar o conceito de altura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Amanda: Tem que ser reto (perpendicular), então.

Gustavo: Isso. Tem que ser reto. Então a altura desse triângulo, qual que é?

Bruna: BP?

Amanda: Não sei, (BP) não é reto, é levemente diagonal.

Gustavo: Se é levemente diagonal, então esse segmento não representa a altura, certo?

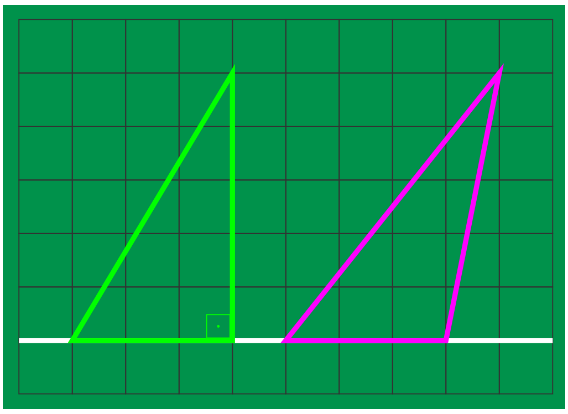
Amanda: Isso.

Gustavo: Então não existe nenhum segmento na figura que represente a altura?

Cecília: Não.

A Figura 25 abaixo mostra uma representação de uma explicação dada em seguida, no quadro, que possui malha quadriculada, envolvendo dois triângulos desenhados. Enquanto realizava o desenho, expliquei que a base de cada triângulo teria três unidades de medida.

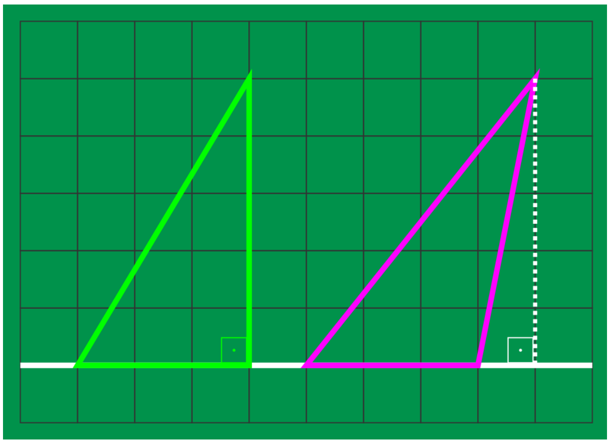
Figura 23: Representação de um exercício sobre áreas de triângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sem dificuldades, as alunas apontaram corretamente a altura do triângulo verde, quando questionadas. Porém, não conseguiram identificar corretamente a altura do triângulo rosa. Expliquei para elas que, em alguns casos, era possível que o segmento que representa a altura ficasse fora do triângulo, quando representada passando pelo vértice mais acima do triângulo, que foi o que ocorreu neste caso, e desenhei o segmento em questão, pontilhado em branco, conforme mostra a Figura 26 abaixo:

Figura 24: Representação de um exercício sobre áreas de triângulos

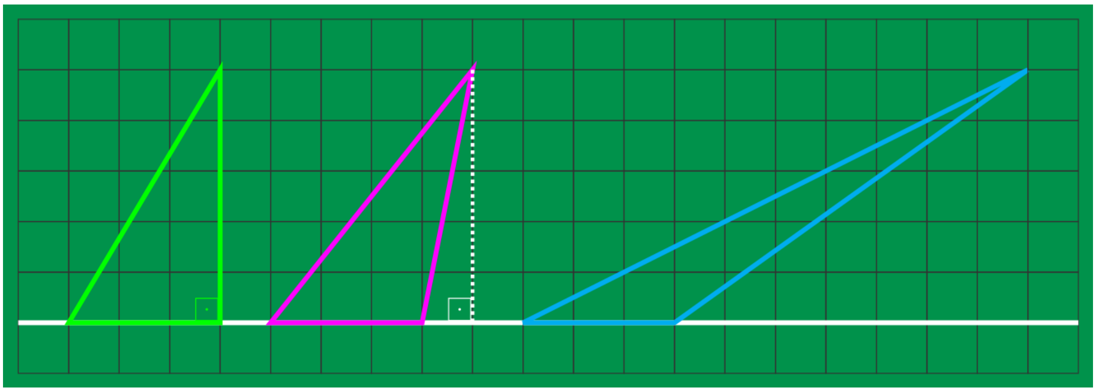


Fonte: Elaborado pelo autor.

Perguntei se as alturas eram iguais, e todas responderam que sim. Argumentei, novamente, que ambas as bases tinham três unidades de medida. Depois, perguntei se os triângulos verde e rosa possuíam a mesma área. Bruna, Cecília e Amanda responderam que não. Daniela respondeu que sim. Eu disse “Sim, as áreas são iguais. Se as bases e as alturas têm a mesma medida, as áreas também têm a mesma medida”.

Por fim, desenhei o triângulo azul, conforme representado na Figura 27 abaixo:

Figura 25: Representação de um exercício sobre áreas de triângulos

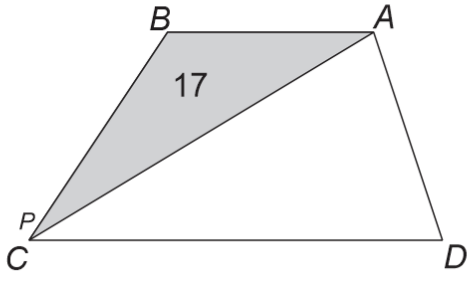


Fonte: Elaborado pelo autor.

Argumentei que, se a base possuísse três unidades de medida, o triângulo azul teria a mesma área dos outros dois triângulos, observando que a posição do vértice mais acima do triângulo azul está sobre a mesma linha horizontal do vértice mais acima dos triângulos verde e rosa (definindo uma altura de mesma medida).

Entender este fato se fazia importante, porque nesse problema, independente da posição do ponto P sobre o segmento CD, o triângulo APB continuaria tendo área igual a 17. A partir daí, redesenhamos a figura do problema, colocando o ponto P na mesma posição do vértice C do trapézio, conforme mostra a Figura 28 abaixo:

Figura 26: Nova representação da figura apresentada no problema



Fonte: Elaborado pelo autor.

Posto isso, provoquei a continuação da resolução do problema, perguntando qual das duas áreas era maior, a do triângulo APB (agora igual a ABC) ou a do triângulo ACD. Todas as alunas me responderam que a área de ACD era maior. Perguntei quão maior. Amanda respondeu: “acho que só um pouquinho maior”. Nenhuma das demais alunas sugeriu alguma outra resposta.

Como o problema solicitava a área do trapézio, primeiro me assegurei em confirmar que todas entendiam que a área do trapézio ABCD poderia ser escrita como a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD.

Perguntei se a altura do triângulo ACD era igual a altura do triângulo ABC. Daniela respondeu que sim e quando incentivada a justificar sua resposta, utilizou os desenhos que já estavam no quadro.

Então, propus que as alunas escrevessem as duas relações que determinavam as áreas dos triângulos ABC e ACD, mas elas ficaram confusas, sem entender o que eu estava sugerindo.

No quadro, escrevi as duas relações iniciais, com as quais as alunas concordaram:

$$Área\,\Delta_{ABC} = \frac{base\,\Delta_{ABC} * altura}{2} \qquad Área\,\Delta_{ACD} = \frac{base\,\Delta_{ACD} * altura}{2}$$

Depois, perguntei quais eram as bases dos triângulos ABC e ACD, respectivamente. Daniela respondeu AB e CD. Então escrevi:

$$Área\,\Delta_{ABC} = \frac{AB * altura}{2} \qquad Área\,\Delta_{ACD} = \frac{CD * altura}{2}$$

A seguir, perguntei o que poderia ser feito a partir desse momento. Nenhuma sugestão surgiu durante um minuto de silêncio. Pedi se alguma das alunas poderia fazer o favor de reler o enunciado do problema para todos. Amanda leu. Destaquei a parte que diz que “CD é o dobro do comprimento de AB” e, fazendo a substituição, explicando o passo-a-passo e já tendo a justificativa de Daniela de que a altura de ABC e ACD eram de mesma medida, escrevi:

$$Área\,\Delta_{ACD} = \frac{2 * AB * altura}{2} = 2 * Área\,\Delta_{ABC}$$

Como a área de ABC já era conhecida (17), era possível afirmar que

$$\acute{A}rea\ \Delta_{ABC} = 2 * 17 = 34$$

Agora, sabendo a medida da área dos triângulos ABC e ACD, era possível calcular a área do trapézio ABCD, que, como visto anteriormente com as alunas, é igual a soma dessas duas áreas, ou seja: 17 + 34 = 51

Esse foi um problema considerado difícil, em que as alunas tiveram muita dificuldade, o que me fez intervir e provocar com questionamentos muitas vezes, guiando um plano de ação que acabou não sendo definido por elas. No entanto, acredito que o fato de fazer compreender a noção de altura das figuras geométricas envolvidas foi a parte mais relevante da aplicação deste problema.

5.5 O quinto encontro

No quinto encontro, quatro alunas estiveram presentes: Amanda, Bruna, Cecília e Elisa. Continuamos trabalhando em grupo. Seis problemas foram propostos. Logo que iniciamos as atividades, as alunas aparentavam estar desmotivadas e sem vontade de colocar esforço para resolver os problemas que seriam propostos. Para tentar contornar essa situação, propus quatro problemas que envolviam um número menor de passos para serem solucionados[20]. Mesmo assim, não consegui encontrar meios de fazer com que este desânimo desocupasse o ambiente. Quando provocadas a responderem algum passo intermediário, mesmo que simples, era difícil obter alguma resposta que fosse coerente.

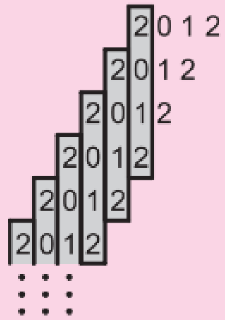
Nesta seção, será descrito o quinto problema proposto (E5P5), enunciado a seguir:

[20] Vide Apêndice A.

Figura 2: OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 2[21]

2. Carlinhos escreveu várias vezes o número 2012 horizontalmente, como indicado na figura. Em seguida, ele desenhou 2012 retângulos, cada um ao redor de cada um dos números 2012 que podiam ser lidos verticalmente. Qual é a soma de todos os algarismos escritos por Carlinhos?

A) 10000
B) 10060
C) 10075
D) 12012
E) 20120



Fonte: Provas e Soluções (Site oficial da OBMEP)

Depois que entreguei a folha com o problema impresso, fiquei em silêncio, esperando que elas realizassem a leitura. Elisa perguntou: "a soma de todos os algarismos seria a soma de todos os 2, do 0, do 1…"

Gustavo: Isso, o 2012 possui 4 algarismos: 2, 0, 1 e 2. Cada vez que eu somar uma vez os algarismos de 2012, eu estou somando 2+1+0+2, que é igual a 5.

Amanda: Ele escreveu o número 2012 por 2012 vezes?

Gustavo: Não sei, quantas vezes ele escreveu "2012"?

Amanda: Ele desenhou 2012 retângulos.

Gustavo: Isso significa que ele escreveu o número 2012 por 2012 vezes?

Bruna, Cecília e Elisa: Sim.

Gustavo: Sim? Todo mundo concorda? Por que?

Bruna: Por que tá escrito ali

Gustavo: Tá escrito que foram 2012 retângulos, né? Cada retângulo tem o número 2012 escrito uma vez. Mas fora do retângulo tem mais dígitos escritos, não tem?

Bruna e Elisa: Uhum.

Gustavo: E o que isso significa? Que o número 2012 foi escrito mais ou menos do que 2012 vezes.

Elisa: Mais

Gustavo: Mais. Quantas vezes mais.

---

21 Trazemos novamente a Figura 2 nessa parte do texto, com o intuito de facilitar a leitura.

Amanda: Não entendi.

Gustavo: Olha só. Ele fez 2012 retângulos, mas nem todos os dígitos estão dentro dos retângulos. Se ele fez 2012 retângulos, significa que dentro dos 2012 retângulos, o número 2012 aparece 2012 vezes. Mais os dígitos que estão fora.

Amanda: Mais esses aqui? Ou tem que fazer tudo dos outros? (apontando para os dígitos das três primeiras linhas que não estão dentro de nenhum dos retângulos).

Gustavo: Mais esses. E aí a gente ainda tem que entender como vai se comportar lá no final. Como podemos reduzir esse problema?

Elisa: 2012 vezes 3?

Gustavo: Porquê vezes 3?

Elisa: Porque tá faltando retângulo nessas três aqui de cima (apontando para os dígitos das três primeiras linhas que não estão dentro de nenhum dos retângulos).

Gustavo: Como é que vai ser lá no final? Tem dois jeitos de resolver essa questão. Um dos jeitos é olhar pra quantas linhas ele escreveu. Quantas foram?

Elisa: 2012.

Gustavo: Não é 2012.

Amanda: É mais, né?

Gustavo: É mais, por causa desse argumento que te falei. Se são 2012 retângulos, tem que ter mais de 2012 linhas. Outro jeito de pensar é “o que está dentro dos retângulos” e “o que está fora”, e somar esses dois valores.

Depois de um minuto de silêncio, continuamos o diálogo:

Amanda: Eu só não entendi como que a gente vai descobrir quantos números (dígitos) tem fora dos retângulos.

Gustavo: O que vai acontecer quando acabar os retângulos?

Amanda: Por que eles tem que acabar?

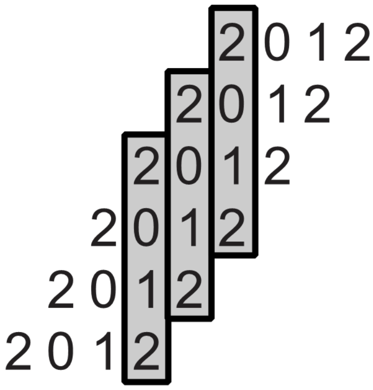
Gustavo: Porque eles são finitos, né?

Bruna: Vai acabar com o número 2?

Gustavo: Vamos tentar desenhar aqui.

Em uma folha, fiz a seguinte representação:

Figura 27: Representação para auxiliar a explicação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Continuei explicando, enquanto mostrava a folha:

Gustavo: Reduzi o problema. Se eu tiver 1, 10, 1.000 retângulos desenhados, o que vai mudar é a parte do meio, certo?

Todas: Uhum.

Gustavo: As duas “pontas” (apontando para os dígitos que aparecem fora dos retângulos), vão ficar iguais, não vão?

Amanda: Sim.

Gustavo: Então os números (dígitos) que estão fora não dependem da quantidade de retângulos aqui do meio, porque vai começar assim, tendo esses números (dígitos) fora (apontando para os dígitos à direita, fora dos retângulos) e vai terminar assim (apontando para os dígitos à esquerda, fora dos retângulos) tendo esses números (dígitos) fora. Então se eu somar os algarismos que estão fora, que não dependem do número de retângulos, quanto que dá?

Amanda: Ah, somar? Só isso?

Gustavo: Por enquanto sim. Aqui eu estou usando a estratégia de separar os dígitos que estão dentro dos retângulos dos que estão fora. Eu quero somar o que está fora, depois somar o que está dentro, e somar esses dois valores, porque aí eu vou ter somado todos os algarismos.

Amanda: Somando todos os de fora dá 14.

Gustavo: Tem certeza?

Cecília: Não, dá 15.

Amanda: É, 15.

Escrevo: “O que está fora dá (soma) 15”.

Gustavo: Agora como eu somo o que está dentro dos 2012 retângulos?

Cecília: Dá 15.

Amanda: 2012 vezes 2012?

Gustavo: Deem uma lida no problema de novo.

Cecília: O que está dentro ali dá 15.

Gustavo: Nesse caso que tenho 3 retângulos, né?

Cecília: É.

Gustavo: Por que dá (soma) 15?

Cecília: Sei lá, eu só contei.

Gustavo: Contou (somou)? Um por um?

Cecília: Sim

Gustavo: E seria viável fazer dessa forma pros 2012 retângulos?

Amanda e Cecília: Não

Gustavo: Como é que eu posso fazer, então?

Amanda: Vezes.

Gustavo: O que vezes o que?

Bruna: 15 vezes 2012.

Pego as duas folhas: a que tem a representação do problema reduzido, e a folha com o problema original impresso.

Gustavo: Tá, gente, vamos pensar assim ó: independente da quantidade de retângulos, o que está fora vai somar 15. Só falta eu somar o que está dentro. Aqui eu tenho o caso do problema reduzido (apontando), e aqui eu tenho o problema não reduzido, que tem 2012 retângulos. Como que eu posso fazer essa multiplicação de 2012 retângulos? 2012 retângulos vezes a soma do que?

Amanda: Dos de fora?

Gustavo: Não

Elisa: Dos algarismos?

Gustavo: Dos algarismos de quem?

Bruna e Elisa: De 2012.

Gustavo: De um retângulo então.

Amanda: No caso, vezes cinco, então?

Gustavo: Exatamente, isso aqui (2 + 0 + 1 + 2) vale (soma) quinze. Nesse caso aqui (apontando pro problema reduzido) você falou que deu 15 (dentro dos retângulos). O resultado 15 não é 5 vezes 3? Cada retângulo soma 5, e eu tenho 3 retângulos, então soma 15. Agora, quantos retângulos eu tenho no problema original?

Bruna: 6.

Gustavo: 2012.

Amanda: 2012 vezes 5?

Gustavo: 2012 vezes 5. Então o que está fora soma 15. O que está dentro soma 2012*5. Qual é a soma de todos os algarismos?

Amanda: 10.060.

Elisa: 15.060.

Cecília: Não, 10.060.

Amanda: Calma, deixa eu fazer de novo… É, 10.060.

Elisa: Ah, então eu fiz errado.

Gustavo: 10.060 é o que?

Amanda: Da soma que tá aqui dentro?

Gustavo: Da soma que tá dentro dos 2012 retângulos.

Amanda: Isso.

Gustavo: Aí eu tenho que somar o que tá fora ainda.

Amanda: 10.075.

Gustavo: Isso aí, essa é a resposta.

Cecília: Achei mais difícil essa…

Gustavo: Vocês deram uma travada no conceito de multiplicação só. Porque eu tenho 2012 retângulos iguais. Cada um deles contribui com uma mesma parcela na soma. Uma multiplicação é isso, não é? Quando eu faço 3 vezes 4, eu to fazendo 4 + 4 + 4. Eu estou somando o mesmo valor repetidas vezes. Aqui (apontando pro problema original) eu também estou somando o mesmo valor repetidas vezes. Qual o valor? Cinco. Quantas vezes? 2012. Por isso que é uma multiplicação. Deu pra entender bem?

Amanda, Cecília e Elisa: Sim.

Gustavo: Tá, e se eu quisesse pensar na quantidade de linhas que ele escreveu? Vocês tinham falado que eram 2012, e eu disse que era mais.

Elisa: Não teria que fazer a soma dos algarismos do 10.075?

Gustavo: Somar os algarismos do 10.075? Por quê? Daria 13. O que é esse 13?

Cecília: Tem que fazer vezes 2012?

Gustavo (apontando pro problema reduzido): Para desenhar três retângulos, eu precisei fazer seis linhas, né? Quantas linhas a mais do que retângulos eu tenho?

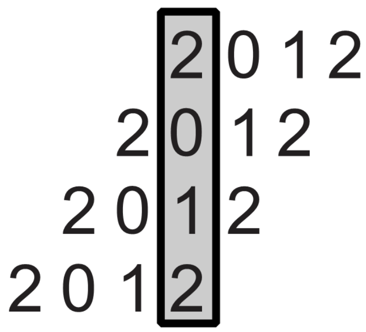
Amanda: O dobro.

Gustavo: Tá, nesse caso é o dobro, mas são seis linhas e três retângulos, então são três linhas a mais do que retângulos, né?

Amanda: Sim.

Gustavo: E se eu olhar pro meu problema só até o primeiro retângulo, quantas linhas eu tenho que ter pra poder ter um retângulo? (apontando para a representação feita no papel, conforme mostra a Figura abaixo):

Figura 28: Representação para auxiliar a explicação



Fonte: Elaborado pelo autor.

Elisa: Três.

Gustavo: Não, pra uma, duas, três, quatro. Vamos de novo: pra desenhar um retângulo vertical ao redor de 2012 eu preciso de quatro linhas (apontando para cada uma das quatro linhas). Se eu quiser desenhar dois retângulos, quantas linhas eu preciso?

Elisa: Oito.

Gustavo. Não, eu preciso de só mais uma, porque se tiver mais uma eu vou desenhar meu retângulo aqui. (enquanto escreve mais uma linha com 2012, e desenha mais um retângulo). Porque eu já tenho essa parte inicial. Agora cada linha a mais que eu escrever com o 2012, eu consigo desenhar um retângulo a mais. Escrevo mais uma vez, desenho mais um retângulo. Então a diferença entre a quantidade de linhas e quantidade de retângulos será sempre a mesma, que é quanto?

Elisa: 2012?

Gustavo: A diferença de linhas para quantidade de retângulos. Quantas linhas eu tenho pra quantos retângulos?

Bruna: Quatro pra um.

Gustavo: Isso, ou cinco para dois, ou seis para três, ou sete para quatro. Qual que é a diferença?

Amanda: Dois.

Bruna: Um.

Gustavo: Não gente, são três. Olha só, pra ter um retângulo eu preciso ter quatro linhas. Para ter dois retângulos eu preciso ter cinco linhas. Para ter três retângulos, eu preciso ter seis linhas. Se eu continuar essa lista, quantas linhas eu preciso pra ter 2012 retângulos?

Bruna: 2013.

Gustavo: Um pouquinho mais.

Amanda: Teria que fazer 2012 mais 3.

Gustavo: Isso, Que é quanto?

Amanda e Bruna: 2015.

Gustavo: Isso aí!

Gustavo: Então pra 2012 retângulos, que é o caso do problema, ele escreveu 2015 linhas. Em cada linha, aparece o número 2012, em que a soma dos algarismos é 5, né? Que é 2 + 0 + 1 + 2. Então qual conta que eu posso fazer pra chegar no resultado?

Silêncio…

Gustavo: Quantas linhas são?

Amanda: 2015.

Gustavo: Vezes…?

Bruna: Três.

Gustavo: Por que três?

Amanda: Vezes quatro, não?

Gustavo: Por que quatro?

Amanda: Porque eram quatro linhas.

Gustavo: Mas eu não quero multiplicar linha vezes linha. Eu quero multiplicar o número de linhas vezes quanto soma cada linha. Porque olha só, na primeira linha soma 5. Na segunda soma 5. Na terceira soma 5. Se eu for acumulando, vai ser 5, 10, 15, 20, 25…

Amanda: Então 2015 vezes 5.

Gustavo: E 2015 vezes 5, impressionantemente, dá 10.075, que é o que a gente encontrou antes. Mas antes, a gente separou em duas somas, que é o que estava dentro, mais as duas partes que estavam fora. E agora eu fiz uma conta só: 2015 linhas vezes 5. Entenderam? Difícil?

Amanda: Mais ou menos.

Bruna: Complicado.

Mesmo tendo compreendido as duas formas apresentadas para realizar a soma de todos os algarismos, as alunas tiveram dificuldades para entender como realizar a operação da multiplicação.

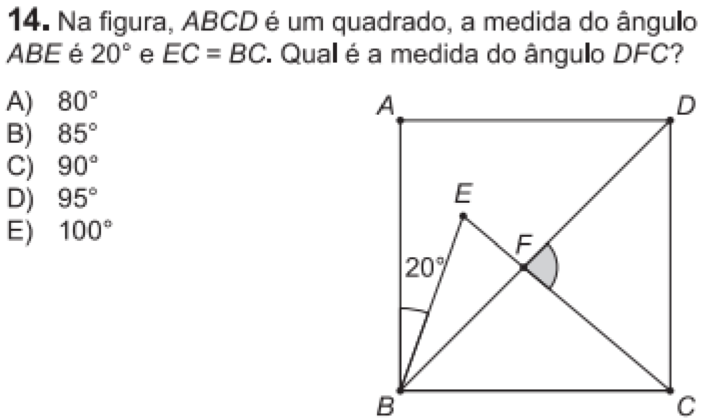
Gustavo: Eu vi que vocês têm bastante dificuldade na hora de definir a multiplicação. Porque vocês já tinham entendido o conceito, mas não tinham entendido que eu tinha que multiplicar. Quando isso acontece, a gente tem que parar e olhar lá para a definição de multiplicação. Que é somar parcelas iguais repetidas vezes. O segredo está em que as parcelas são iguais. Que nem na divisão, quando a gente divide, a gente divide em parcelas iguais. Na multiplicação, quando a gente soma, a gente está somando parcelas iguais.

É possível evidenciar que neste problema as alunas apresentaram muita dificuldade, inclusive para responder os questionamentos que guiavam a resolução. Possivelmente, isso ocorreu por conta da necessidade de abstração algébrica, diferente da abstração da geometria do problema abordado na seção 5.4, em que existe uma figura dando suporte para a visualização do que está se passando durante a execução do plano de ação. Este ponto será retomado com mais aprofundamento no capítulo 6, destinado à análise dos dados produzidos.

5.6 O sexto encontro

No sexto encontro, cinco alunas estiveram presentes: Amanda, Bruna, Cecília, Daniela e Elisa. Continuamos o trabalho em grupo, novamente na sala que a escola costuma chamar de laboratório de aprendizagem. Cinco problemas foram propostos. Nesta seção, será descrito o segundo problema proposto (E6P2), enunciado a seguir:

Figura 29: E6P2 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 14



14. Na figura, *ABCD* é um quadrado, a medida do ângulo *ABE* é 20° e *EC* = *BC*. Qual é a medida do ângulo *DFC*?

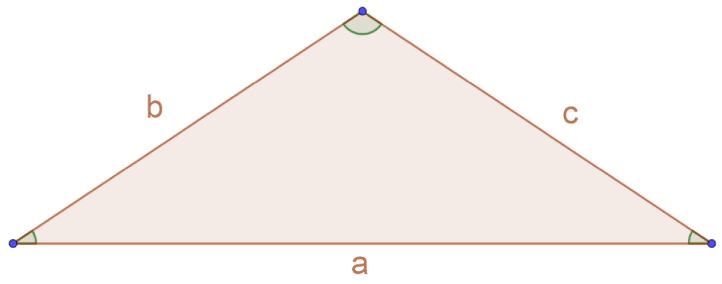
A) 80°
B) 85°
C) 90°
D) 95°
E) 100°

Fonte: Provas e Soluções (Site oficial OBMEP)

Antes de começarmos a olhar para o problema, me certifiquei de que as alunas tivessem conhecimento sobre os conceitos de ângulo reto e soma dos ângulos internos de um triângulo. Além disso, ainda foi necessário dar uma breve explicação sobre as propriedades do triângulo isósceles. No quadro, escrevi que existem dois tipos de classificações de triângulos: "quanto aos ângulos" e "quanto aos lados". No primeiro, escrevi que um triângulo pode ser reto se possui um dos ângulos igual a 90º, obtusângulo se um dos ângulos for maior que 90º e acutângulo se todos os três ângulos forem menores que 90º. Quanto aos lados, escrevi que o triângulo pode ter os três lados com mesma medida, e se isso acontece, o chamamos de equilátero (consequentemente, os seus três ângulos internos possuem a mesma medida, iguais a 60º). Se apenas dois dos lados possuem a mesma medida, o chamamos de isósceles. Se nenhum dos lados possui a mesma medida, o chamamos de escaleno.

Explicitei, ainda, que durante a resolução do problema proposto, seria necessário usar uma propriedade que diz que um triângulo isósceles possui dois ângulos de mesma medida, e identificar a posição desses ângulos. Desenhei um exemplo no quadro, conforme representado na Figura 33 abaixo:

Figura 30: Representação para auxiliar explicação de exemplo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Expliquei que, neste exercício, consideraríamos que as arestas b e c possuem a mesma medida. Questionei onde estavam os ângulos iguais, e as alunas responderam com facilidade que são os dois ângulos que aparecem na parte mais abaixo da figura.

Com essa propriedade esclarecida, era possível iniciar o processo de resolução do problema proposto. Já com a folha em mãos, depois de aproximadamente um minuto de silêncio, os diálogos começaram.

Amanda: Eu só achei esse (ângulo) aqui, mas…

Gustavo: Qual que tu achou?

Amanda: Esse aqui. É aquele que tem só dois lados iguais.

Gustavo: Qual triângulo tem dois lados iguais? o DFC?

Amanda: É

Gustavo: Tem certeza?

Amanda: Não.

Gustavo: Por que tu acha que DFC é um triângulo que tem dois lados iguais.

Amanda: Porque esse (DF) e esse (FC) parecem iguais.

Gustavo: A gente não pode assumir que isso é verdade. Inclusive, isso não é verdade. A gente só pode assumir como verdade o que está no enunciado, e partir disso. Então vou desenhar aqui no quadro pra gente tentar traçar um plano pra resolver esse problema. Se isso que tu tiver me falando for verdade, F tem que ser ponto central do quadrado. E ele não é. Ele é quase, mas não é. Vou desenhar mais ou menos aqui.

Depois de representar o desenho do problema no quadro, continuo a explicação:

Gustavo: Vou fazer algumas perguntas e eu não vou responder elas, porque eu quero que vocês pensem. Vou perguntando os valores de alguns ângulos pra gente tentar chegar no valor do ângulo que estamos procurando, que é esse aqui (apontando pra DFC).

Termino de desenhar o quadrado, e releio o enunciado, em voz alta, para extrair as informações dadas.

Gustavo: EB é igual a BC. O que isso significa?

Silêncio

Gustavo: O que isso significa? Lembra da propriedade do triângulo isósceles? Se eu tenho um triângulo com dois lados iguais, eu tenho que ter… - ninguém responde, e depois de alguns segundos eu continuo - Dois ângulos iguais. Quais são os ângulos iguais?

Amanda: Os de baixo.

Gustavo: Quais de baixo?

Bruna: EB

Gustavo: EB o que? Pra determinar um ângulo eu preciso de três vértices, por exemplo aqui, ABE determina esse ângulo. DFC determina esse ângulo. Quais são as três letras que determinam os ângulos iguais, aqui, no caso?

Elisa: BEC.

Gustavo. BEC, isso? Esse ângulo é igual a qual?

Bruna: B.

Gustavo: B o quê?

Após alguns segundos de silêncio:

Gustavo: Um ângulo é determinado por três vértices, certo? Tu quer pegar esse ângulo aqui (aponta pra EBC)

Bruna faz que sim, com a cabeça.

Gustavo: Então, no caso, é EBC. Tá, então vocês estão me dizendo que esses dois ângulos (EBC e BEC) são iguais, porque esses dois lados (segmentos EC e BC) são iguais? Tem certeza? Não é esse ângulo aqui (ECB) que é igual a esse (BEC)?

Elisa: Não.

Gustavo: É isso aí mesmo, tá certo. Agora, quanto mede EBC?

Bruna: 20.

Gustavo: 20? Por que 20?

Bruna: Porque aquele outro ângulo lá (ABE) também é 20.

Gustavo: Tá, vamos pensar o seguinte…

Daniela: 70.

Gustavo: Por que 70?

Daniela: Porque o quadrado tem 90 graus ali no canto, então se ABC tem 90, e ABE tem 20, então EBC tem 70.

Gustavo: Isso aí! Se aqui (ABC) tem 90 e aqui (ABE) tem 20, então aqui (EBC) tem 70. Tá, e agora qual ângulo eu consigo descobrir?

Daniela: C.

Gustavo: Qual ângulo C? Um ângulo é determinado por 3 pontos, lembra? Qual ângulo que tu tá querendo me dizer?

Daniela: BCE.

Gustavo: Esse aqui? Quanto que mede esse ângulo?

Cecília: 20

Gustavo: 20?

Daniela: 40.

Gustavo: Por que 40?

Daniela: Porque tirou 140 de 180.

Gustavo: Tá, o argumento que a Daniela está utilizando é que o triângulo BEC tem que somar 180 nos ângulos internos. Se eu tenho 70 (EBC) mais 70 (BEC), falta 40 (medida de BCE) pra fechar 180. Se eu tenho 40 aqui (BCE), quanto que fica aqui (FCD)?

Cecília: 50.

Gustavo: 50 né, pra fechar o 90. Agora dá uma olhada: Essa linha que vem do D até o B é a diagonal do quadrado. Se isso acontece, ela divide esse ângulo reto (ADC) em duas partes iguais, que vale quanto?

Cecília: 45.

Gustavo: 45. Agora se eu olhar para DFC, eu sei esse ângulo (FCD), eu sei esse ângulo (CDF) e ele tá me perguntando quanto vale esse ângulo (DFC), que é quanto?

Daniela: 45.

Gustavo: 45 (DFC) + 45 (CDF) + 50 (DCF), dá 180?

Bruna: Não.

Gustavo: Então não é 45. Quanto que é?

Daniela: 85?

Gustavo: 85? Algum outro palpite? Alguém achou outro valor? Cecília? Quanto que vale esse ângulo aqui?

Cecília: Não sei.

Gustavo: É só calcular, gente. Fez a conta? (Olhando para Bruna).

Bruna: Sim, 85.

Gustavo: 85, então tá certo. Outra coisa que é legal da gente ver aqui, são ângulos opostos pelos vértices. Depois do ponto F, essa linha (CF) continua até o E (a fim de explicar, sem usar termos tão específicos, que C, F e E são colineares). A mesma coisa acontece com a linha que vem do D, passa pelo F e vai até o B. Então a gente diz que os ângulos DFC e EFC são opostos pelo vértice F, e possuem o mesmo valor. Se aqui (DFC) e aqui (EFB) vale 85, quanto que vale esse ângulo aqui (DFE)?

Bruna: 70?

Gustavo: Não é 70. Lembra quanto vale o ângulo em uma reta assim? (Apontando para a representação de um ângulo raso desenhado no quadro).

Daniela: 180.

Gustavo: Então uma volta completa tem 360º, certo? Então eu posso pensar que somando os 4 ângulos (BFE, EFD, DFC e BFC) eu preciso de 360. Ou também, de outro jeito, posso pensar que somando dois ângulos (apontando para DFC e BFC), por exemplo, eu preciso de 180º. Então 85 (DFC) mais quanto que é 180?

Bruna: 95.

Gustavo: Então aqui (BFC) é 95. E aqui (EFD) também né? Porque esses dois ângulos são opostos pelo vértice? O que acharam dessa?

Daniela: Legal.

Dessa vez, novamente foram abordados conceitos da geometria que eram necessários para a interpretação do enunciado e resolução do problema, como no caso de identificar ângulos de mesma medida em um triângulo isósceles, mas o problema também oportunizou a abordagem de conceitos como “ângulo oposto pelo vértice”, que não faziam necessariamente parte do processo de resolução.

É possível evidenciar que as alunas Bruna e Daniela não se apropriaram da linguagem formal da matemática para se referirem a um ângulo. Elas simplesmente diziam o nome do vértice em que o ângulo aparecia. Este ponto será retomado no capítulo 5, posto a seguir.

6 ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

Este capítulo é destinado à análise e discussão acerca do relato dos acontecimentos dos seis encontros realizados, descritos no capítulo anterior, tendo como aporte teórico os referenciais desenvolvidos ao longo do texto nos capítulos 3 e 4.

Nesse sentido, utilizamos os diálogos das transcrições e os registros dos passos utilizados durante as resoluções dos problemas propostos para evidenciar diferentes aspectos que fizeram parte dos encontros realizados.

Organizamos as análises em subcategorias, apresentadas aqui como subcapítulos, na tentativa de evidenciar diferentes pontos em cada parte da escrita que vem a seguir, mas gostaríamos de deixar claro que essas experiências se apresentam de forma síncrona, pois se entrelaçam, dando sentido à prática realizada, quando vista como um todo.

6.1 As relações professor-aluna[22]

Iniciamos a análise evidenciando que existiu uma resistência muito forte nos dois primeiros encontros por parte das alunas participantes da oficina, por conta da não existência prévia de vínculo entre elas e o professor-pesquisador. Tendo apenas seis encontros planejados, esse era um aspecto que precisava ser superado com urgência, para que os dados pudessem ser produzidos e para que a pesquisa pudesse ser realizada com relevância.

Felizmente, algumas estratégias agregadas ao passar do tempo tiveram resultado positivo para superar essa adversidade. O silêncio que pairava pela sala de aula nos primeiros encontros após os questionamentos que tinham o propósito de direcionar a elaboração ou execução de um plano de ação, deixou de existir quando a proximidade foi sendo criada e o medo de expor uma resposta errada, consequentemente, foi sendo deixado de lado, contribuindo com o engajamento das alunas durante as resoluções dos problemas.

A criação de proximidade aconteceu, inicialmente, por meio de conversas que não se relacionavam com os problemas propostos, nem sobre parte específica matemática. Foram

[22] Referimo-nos às relações do professor com cada uma das alunas.

diálogos que trataram, em geral, sobre como ocorre o ensino médio e sobre as possibilidades de escolas da região que as alunas poderiam escolher para cursar esse nível escolar, por exemplo. Os desafios e acontecimentos na escola durante a retomada do ensino presencial pós pandemia da Covid-19, bem como a linha do tempo de uma carreira acadêmica também tiveram espaço como assuntos de alguns desses diálogos..

Apesar de entender que esses momentos de conversa eram propícios a favor do estreitamento de laços nas relações professor-aluna, característica essencial para desenvolver uma boa execução da prática deste trabalho de pesquisa, dosar a quantidade de conversa passou a ser desafiador, pois não se queria que ocorresse o afastamento da proposta inicial da oficina por conta de diálogos muito extensos que não fossem relacionados aos problemas propostos.

6.2 Os dois papéis do professor

Na maior parte do tempo, o papel do professor se dividia em duas imagens que, em alguns momentos, coexistiam, em uma espécie de dualidade. A primeira delas era atuando como membro adicional do grupo (como alguém próximo às alunas participantes); a segunda, era atuando como orientador (em uma representação que se aproximava mais da ideia de professor/orientador, que guia o percurso realizado pelas alunas).

A parte da orientação, mais ligada, de fato, à imagem de *professor*, se dava nos momentos em que eram realizados esclarecimentos de conceitos prévios necessários para iniciar a traçar o plano de ação, ou então questionamentos que guiavam o processo de resolução, bem como o incentivo de justificar as respostas fornecidas pelas alunas a tais questionamentos e o teste das hipóteses apresentadas por elas.

Podemos relacionar essa parte da análise com as características que Onuchic (1999) atrela ao papel do professor ao trabalhar com a metodologia:

> "O papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários." (ONUCHIC, 1999, p. 216)

A esta imagem, é possível também relacionar os momentos em que o professor explica pensamentos corretos de alguma das alunas para as demais. Um exemplo disso acontece quando Daniela, no segundo problema do sexto encontro (E6P2), entende que a medida do ângulo solicitado é 40º porque os dois outros ângulos do triângulo EBC já eram conhecidos, iguais a 70º, mas ela simplesmente responde 40º "*Porque tirou 140 de 180*". Ela fez o raciocínio correto, mas não explicou. O professor teve, então, o papel importante de realizar a explicação para as demais alunas.

Também reforçamos o destaque dessa imagem quando eram propostos problemas e utilização de materiais concretos, como no caso da construção dos cubos, por exemplo, para facilitar os caminhos percorridos nas resoluções dos problemas apresentados.

Por outro lado, a imagem do professor-pesquisador se aproximava à representação como membro do grupo quando se utilizava linguagens definidas pelas próprias alunas, mesmo que na teoria essa linguagem se colocasse de maneira incorreta, para dar significado ao processo resolutivo de uma questão mais evidente enfrentada nos problemas, como no caso da utilização do termo "inverso" de um número, quando, na verdade, a aluna se referia ao número presente na face oposta da mencionada.

6.3 A concretude como ferramenta para pensamento

O terceiro problema apresentado no segundo encontro, descrito no capítulo anterior (E2P3, Figura 12), aborda diferentes conceitos da matemática, como as possíveis planificações de um cubo e faces opostas de um cubo. Queremos destacar a fala de Daniela, que responde: "*Mentalmente seria muito mais difícil*" quando as alunas foram questionadas sobre suas opiniões a respeito do problema em questão.

A proposta de analisar diferentes planificações, desenhá-las em uma folha, recortar e montar os cubos para auxiliar a resolver o problema, permitiu que as alunas pudessem conjecturar e testar hipóteses a respeito do que era pedido. As questões propostas pelo professor neste momento guiavam um pensamento que poderia ser testado em um material concreto, gerando visualização de ideias.

Algo parecido ocorreu durante a aplicação do quarto problema apresentado no quarto encontro (E4P4, Figura 23), em que, depois de ter o conceito matemático de altura explicado, as alunas tinham a possibilidade de enxergar uma adaptação do desenho originalmente apresentado no problema, porque existia apoio visual da figura que dava sentido a identificar qual dos dois triângulos que formavam o trapézio era maior.

Entretanto, o mesmo não acontece durante a aplicação do quinto problema apresentado no quinto encontro (E5P5), em que as alunas apresentaram muita dificuldade para responder corretamente até mesmo às questões mais simples, que guiaram o processo de resolução. Fez-se necessário aplicar o conceito da multiplicação com elementos que não estavam visíveis no enunciado, e que também não poderiam ser obtidos em uma representação simplificada. Era necessário entender o padrão que ocorria no problema. Houve a tentativa de explicá-lo de duas formas diferentes e nenhuma delas se mostrou efetiva.

A abstração algébrica, que envolve o conceito da multiplicação. Possivelmente, isso ocorreu por conta da necessidade de abstração algébrica, diferente da abstração da geometria do problema abordado no quarto encontro (E4P4), em que existe uma figura dando suporte para a visualização do que está se passando durante a execução do plano de ação.

Outro problema que pode ser utilizado para evidenciar como o apoio visual contribuiu para o andamento dos passos intermediários que levaram ao entendimento e resolução do problema originalmente proposto foi o caso do terceiro problema do primeiro encontro (E1P3), em que as alunas foram incentivadas a caminharem e girarem pela sala, conforme instruções, marcando o percurso e dando espaço para que a visualização em primeira pessoa como a personagem que percorre o caminho contribuísse com o entendimento da questão, não ficando presa à tentativa de resolver o problema apenas utilizando lápis e papel.

6.4 As relações aluna-alunas

Também faz-se importante evidenciar as relações aluna-aluna presentes no ambiente, que foram estreitadas ao longo dos encontros. Foi apenas no terceiro encontro, durante a aplicação do terceiro problema (E3P3), que surgiram diálogos entre elas, que questionavam ideias e passos intermediários do problema que estava sendo abordado.

Nessa oportunidade, ocorreu um problema que julgamos ter sido um dos mais proveitosos entre todos os problemas propostos, pois houve o surgimento de hipóteses e testes sendo realizados por vontades próprias das alunas. Também houve o debate dessas ideias e tentativa de convencimento entre as próprias alunas, sem tanta interferência do professor. Este comportamento gerou uma construção de um plano de ação executado que foi sendo edificado, até obtermos juntos a resposta final.

Vale, ainda, ressaltar que com o passar dos encontros, o medo de errar foi se extinguindo, possibilitando que os momentos de silêncio se tornassem menos frequentes, mesmo que para expor uma resposta incoerente. Isso contribuiu para a produção significativa dos dados descritos.

6.5 A utilização de linguagem própria

Em diferentes momentos, ao longo da oficina, podemos evidenciar que as alunas utilizaram de uma linguagem que não é a linguagem formal da matemática, para atribuir significado a elementos envolvidos nos problemas abordados.

Isso aconteceu, por exemplo, na aplicação do terceiro problema do segundo encontro (E3P2), quando Amanda utiliza o termo *inverso* (de um número), para se referir ao que na verdade era a face oposta de determinada face de um cubo. Cecília utiliza o mesmo termo para expor suas ideias. Neste momento, o professor se apropria da linguagem, e passa a realizar a explicação utilizando esse mesmo termo, pois estabelece que, naquele momento, o fato mais importante era a compreensão de outro conceito, que envolvia a possibilidade de quinas que apareciam no cubo exposto no problema.

Algo parecido acontece no quarto problema do quarto encontro (E4P4), quando queremos definir a altura de determinado objeto em matemática, utilizando um segmento que é posicionado de forma perpendicular à base das figuras em questão. Para isso, o foco se distancia da utilização do termo “perpendicular” e se aproxima do termo “reto”, e suas variações.

No segundo problema do sexto encontro (E2P6), Bruna e Daniela utilizam apenas a letra que representa um vértice quando questionadas sobre qual ângulo estão se referindo em suas falas. Possivelmente, isso acontece também por conta do apoio visual que existe na figura. As alunas não se apropriam da linguagem matemática para fazer referência a determinado ângulo. Quando questionadas a qual ângulo BEC tem mesma medida, Bruna, querendo se referir a EBC, fala apenas "B", pois o ângulo está nesse vértice. Não há a compreensão imediata de que um ângulo é definido por três vértices. A aluna simplesmente aponta para o vértice em que o ângulo aparece junto, pois tem o apoio visual para isso.

6.6 Os quatro passos não são necessariamente ordenados

Aqui, queremos evidenciar que em determinados momentos, a aplicação dos quatro passos propostos por Pólya (2006) não são necessariamente ordenados, principalmente quando falamos da elaboração de um plano (2º passo) e execução desse plano (3º passo).

Esse comportamento ocorre logo no primeiro encontro quando, no terceiro problema (E1P3), as alunas são solicitadas a se colocarem em pé para realizar um exercício que é visto como passo intermediário da resolução do problema como um todo. Inicialmente, houve o entendimento de que era necessário desenhar o caminho, que é um ato atrelado a traçar um plano (2º passo da metodologia). Porém, existiu muita dificuldade na tentativa de execução desse plano (3º passo da metodologia). Então, uma nova maneira de tentar entender o caminho percorrido é proposta, voltando para a parte em que um plano é traçado (2º passo). Depois, ao conseguir executar essa parte do plano (3º passo), faz-se necessário novamente interpretar o problema a partir das novas informações obtidas (1º passo), traçar (2º passo) e executar (3º passo) um novo plano, para então somente ir ao encontro da resposta final do problema, e finalmente revisar a solução encontrada (4º passo).

6.7 As autocríticas de professor para professor

Logo no primeiro problema proposto no primeiro encontro (E1P1), para tentar criar uma dinamicidade e quebrar o silêncio que permeava o espaço, ocorreu a explicação demasiada dos pontos e conceitos envolvidos. A aversão ao silêncio pode ser a justificativa para que isso tenha ocorrido. Porém, esse silêncio muitas vezes era (e é) necessário no processo de resolução de um problema. É esperado que haja tempo para que os raciocínios, debates e construções de passos lógicos se façam presentes. A primeira autocrítica se dá nesse sentido, de que, durante a aplicação de alguns problemas, a oficina se pode fazer parecer com uma proposta voltada à explicação da solução de tais problemas, e não, de fato, à resolução deles.

Nesse sentido, evidenciamos que por se tratar de uma primeira experiência do professor aplicando os problemas selecionados nos moldes da oficina proposta, muitos pontos não ocorreram conforme planejado no momento em que os problemas foram selecionados. Acreditamos que isso seja normal no processo do planejamento e execução de práticas voltadas para o ensino de matemática. Cabe ao professor saber lidar e adaptar as situações para que essas situações possam ser proveitosas para o aprendizado dos alunos envolvidos.

Ressaltamos, por exemplo, que no quarto problema do quarto encontro (E4P4), por exemplo, o tempo dedicado a compreender o significado de *altura* em matemática foi maior do que o processo de resolução do problema que ocorreu depois disso, ainda assim com muita dificuldade por parte das alunas. Entretanto, o problema mostrou uma aplicação prática, possibilitando até mesmo um trabalho com uma nuance de abstração, mostrando que triângulos de mesma base e altura possuem mesma área, possivelmente criando sentido, significado e utilidade sobre um conceito matemático que as alunas poderão aplicar em outros problemas que encontrarem. Ou seja, o fato de as alunas terem demonstrado compreender o conceito de altura se sobressaiu ao objetivo de resolver o problema com facilidade.

A segunda autocrítica apresentada se volta para a negligência que ocorreu na aplicação do terceiro problema do primeiro encontro (E1P3), em que o primeiro passo da metodologia foi negligenciado: a compreensão do problema. Após a entrega da folha com o enunciado e a disponibilidade de alguns minutos para as alunas lerem, interpretarem e compreenderem o problema, a primeira fala do professor se deu diretamente questionando se alguma ideia havia surgido e qual era o primeiro passo necessário para começar a resolver o problema, porém as alunas nem sequer compreendiam os conceitos apresentados no enunciado, como “vértice” e “equilátero”, fundamentais na resolução do problema. Não importava, então, quanto tempo o professor tivesse disponibilizado para as alunas resolverem o problema, sem essa compreensão inicial isso não seria possível.

Como terceira autocrítica, queremos evidenciar a não previsibilidade de demasiada dificuldade em alguns problemas que foram selecionados e aplicados durante a oficina. Como exemplo, apresentamos o quinto problema do quinto encontro (E5P5), que possui a fragilidade em não apresentar e possibilitar apoio visual, requerendo uma abstração algébrica, ponto que se colocou como adversidade para as alunas. Algo parecido ocorre com o segundo problema do sexto encontro (E6P2), em que é necessário a aplicação do que decorre da definição de triângulo isósceles, que também julgamos ponto de adversidade enfrentado pelas alunas, e que não se demonstrou ser entendido com apenas um exemplo/exercício aplicado junto das explicações dadas.

Por outro lado, queremos apresentar também as ideias que julgamos terem dado certo. A primeira delas é o trabalho com as diferentes planificações de um cubo na aplicação do terceiro problema do segundo encontro (E2P3). As alunas não conseguiram imediatamente responder a pergunta do enunciado do problema mesmo tendo os cubos montados, porém o desenho, recorte e montagem dos cubos serviu para a compreensão do conceito de planificação deles. As alunas puderam compreender o conceito de *planificação* em matemática, além de entender exemplos de critérios de uma figura plana que determina ou não a planificação de um cubo.

A proposta apresentada no terceiro problema do primeiro encontro (E1P3) também se demonstrou efetiva, proporcionando às alunas diferentes representações do ato de caminhar e girar sobre as malhas em questão (triangular no papel e quadrada no chão da sala), alternando entre o lápis e o papel e o ambiente da sala de aula.

Também colocamos aqui como ponto positivo os questionamentos sobre estimativas realizados pelo professor para as alunas, em que elas eram provocadas a responder apenas com as suas intuições, um valor que pensavam ser próximo da resposta final de alguns problemas ou questionamentos. Foi o caso das possibilidades do E3P3 e de quão maior um triângulo era em relação ao outro no E4P4. Esses questionamentos instigaram a curiosidade das alunas e possibilitam a afinidade pela investigação, buscando compreender se suas estimativas iniciais estavam corretas ou não. Essa curiosidade é ponto chave para o engajamento no processo de resolução dos problemas.

Ainda olhando para o E3P3, a proposta do professor em listar as possibilidades dos carrinhos se demonstrou efetiva para esclarecer ideias contrárias que estavam sendo apresentadas pelas alunas e ainda fazer com que elas compreendessem por conta própria onde estava o erro nas concepções de suas ideias.

Os questionamentos propostos após a resolução de alguns problemas se mostraram efetivos para que o professor realizasse a inferência sobre a compreensão das alunas dos conceitos que tinham acabado de serem abordados. Isso servia para validar as respostas que elas forneciam, quando diziam que tinham compreendido tais conceitos. Foi o caso do E2P3, em que elas realmente compreenderam as quinas possíveis no cubo e os pares de números em faces opostas e também o caso do E5P5 que, pelo contrário, o professor notou que elas não compreenderam a explicação, apesar de falarem que haviam compreendido.

Esses questionamentos também serviam para apresentar conceitos que não necessariamente estavam envolvidos na execução do plano de resolução de um problema, mas que são importantes dentro da matemática. Como exemplo, citamos o E1P3, em que o professor quis fazer compreender formas mais práticas de obter o resto da divisão de 2000 por 18, já tendo realizado a divisão de 1000 por 18.

6.8 As críticas aos problemas

Finalizamos o capítulo de análises com críticas a dois dos problemas abordados neste trabalho. A primeira delas é em relação ao enunciado da questão que envolve a formiguinha (OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13, E1P3), que se dá pelo fato de que há muitas informações desnecessárias na questão. Os conceitos de geometria envolvidos, como “triângulo equilátero” e “giro de 60º”, não são necessários se classificarmos essa questão como sendo de aritmética. Era possível utilizar apenas um enunciado que mostrasse qual das três decisões que a formiguinha toma quando encontra um vértice, antes de continuar andando: não virar, virar a direita ou virar a esquerda.

Podemos utilizar os acontecimentos descritos no capítulo 5 para evidenciar que, na aplicação deste problema, as alunas tiveram muita dificuldade em interpretar o enunciado por não conhecerem tais conceitos.

Por outro lado, gostaríamos de ressaltar como ponto positivo o possível cuidado que houve em utilizar um dado diferente do dado comum no enunciado da questão 16 da prova de

2022, nível 2, 1ª fase (E2P3), para que não houvesse o favorecimento de quem já conhece o dado comum (que tem como pares de faces opostas o 1 e o 6; o 2 e o 5; o 3 e o 4).

7 CONCLUSÕES

Seguindo a interrogação inicial: "Quais as potencialidades da metodologia de Resolução de Problemas envolvendo questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas na sala de aula?", procuramos encontrar algumas evidências da relevância da metodologia para o ensino de matemática por meio do trabalho com problemas propostos na primeira fase das edições da OBMEP, durante a realização de uma pesquisa com caráter qualitativo.

Mediante os quatro passos propostos por Pólya (2006), apresentamos problemas que produziram experiências analisadas a partir dos diálogos, expressões das alunas e habilidade em compreender e aplicar conceitos matemáticos que fizeram parte da execução.

Há indícios que o uso da metodologia contribuiu para a construção de conceitos matemáticos que as alunas participantes ainda não tinham conhecimento e que foram utilizados durante a resolução de determinados problemas propostos, criando sentido e ampliando o conceito de utilidade da matemática, atingindo um dos objetivos propostos neste trabalho.

Notamos que, inicialmente, a não existência do vínculo entre o professor pesquisador e as alunas se mostrou como aspecto que conteve a participação das alunas na oficina. Com o passar do tempo e utilizando-se de estratégias a fim de estreitar laços, a conexão foi sendo criada, as alunas foram perdendo o medo de externalizar respostas erradas e passaram a se envolver com a oficina, tendo participação ativa na tentativa de resolver a maioria dos problemas propostos.

Durante a análise, foi possível destacar quais foram os pontos que deram sentido ao papel do professor em executar os passos propostos na metodologia. Evidenciamos o fato (e a importância) do professor ter se apropriado da linguagem utilizada pelas alunas, que se distanciavam da linguagem formal da matemática, para que pudesse ser dado sentido a passos importantes dos processos resolutivos de determinados problemas.

Salientamos que os quatro passos propostos por Pólya (2006) não são estritamente ordenados, e que em muitas vezes se fez necessário transitar entre plano de ação, execução do plano de ação e revisão do que foi executado durante a execução de passos intermediários que guiavam a resolução dos problemas.

A utilização de materiais manipulativos, de desenhos e a alternância entre o papel e o mundo real se mostraram ferramentas efetivas quando agregadas à metodologia, possibilitando que as alunas tivessem apoio visual durante a resolução dos problemas. Essa foi a principal potencialidade identificada durante esse trabalho de pesquisa.

A análise, investigação e evidência destes critérios contribuíram para a compreensão do que está envolvido quando a resolução de problemas é aplicada.

Consideramos que o objetivo de incentivar as alunas participantes a se desafiarem por meio das questões disponíveis nos materiais da OBMEP, trabalhando conceitos matemáticos para além da sala de aula, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas foi atingido.

Em resumo, concluímos que da prática realizada emergiu uma experiência que gerou impacto positivo na formação do professor pesquisador, em aspectos pessoais mas também em sua visão subjetiva como educador. Existe interesse em continuar trabalhando com o tema, a fim de aprofundar a pesquisa na metodologia utilizada, mas também investigar novos referenciais que possam dar sustentação à análise de situações específicas que ocorreram durante a realização da oficina.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (org.). **Resolução de problemas: teoria e prática.** Jundiaí: Paco, 2021.

APOSTILAS UTILIZADAS NO PIC – OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apostilas.htm> Acesso em 28 set. 2022.

APRESENTAÇÃO - OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm> Acesso em 28 set. 2022.

BAGATINI, Alessandro. **Olimpíadas de Matemática, altas habilidades e resolução de problemas.** Orientador: Marilaine de Fraga Sant'Ana. 2010. 82 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/29144> Acesso em: 27 set. 2022.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa Em Educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução: Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos; Telmo Mourinho Baptista.Porto: Porto Editora, 1999. 335 p. (Colecção Ciências da Educação). Título original: Qualitative Research for Education. ISBN: 9720341122.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 07 mar. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 07 mar. 2023.

CASCALHO, J. M.; TEIXEIRA, R.; MEIRELES, R. F. **Da Resolução de Problemas à Explicitação do Raciocínio Matemático:** Uma Experiência em Contexto de Estágio. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 17, n. 2, p. 232-256, 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20243/pdf> Acesso em: 07 mar. 2023.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo: Editora Ática. 2003.

ELLENBERG, Jordan. **O Poder do Pensamento Matemático:** A Ciência de Como Não Estar Errado. Tradução: George Schlesinger. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2015. 536 p. Título original: How Not To Be Wrong (The Power of Mathematical Thinking). ISBN: 9788537814215.

FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Orgs. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L; 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências Em Educação Matemática). ISBN: 9788551305898.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos Teóricos e Metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. 228 p. (Coleção formação de professores). ISBN: 9788574961477.

GOLDENBERG, Mirian. **A Arte de Pesquisar:** Como Fazer Pesquisa Qualitativa em Ciências Sociais. 16. ed. Rio de Janeiro: Record, 2020. 111 p. ISBN: 9788501049650

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Fundação Editora da Unesp, 1999. p. 199-218. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/~nedir/disciplinas-Pagina/Lourdes_Onuchic_Resol_Problemas.pdf> Acesso em 07 mar. 2023.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**. 2011, p. 73-98. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf> Acesso em 12 out 2022.

PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas:** Um Novo Aspecto do Método Matemático. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p. Título original: "How to Solve It" A New Aspect of Mathematical Method. ISBN: 8571931364.

PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA JR. (PIC) – OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/pic.htm> Acesso em 28 set 2022.

PROVAS E SOLUÇÕES - OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em 28 set 2022.

REGULAMENTO - OBMEP. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm> Acesso em 28 set 2022.

SCHROEDER T. L, LESTER JR F. K, 1989. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving in **New Directions for Elementary School Matematics**. National Council Teachers Of Mathematics. Disponível em <https://archive.org/details/newdirectionsfor0000unse_i4w2/mode/2up?view=theater> Acesso em 22 mar. 2023.

SILVA, Maria José de Castro. As Relações Entre A Aprendizagem Da Matemática e A Resolução de Problemas. **Anuário da Produção Acadêmica Docente**, Valinhos, v. II, n. 3, p. 223-232, 2008. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/1562/1/v.2,%20n.3,%202008-223-232.pdf> Acesso em: 22 mar. 2023.

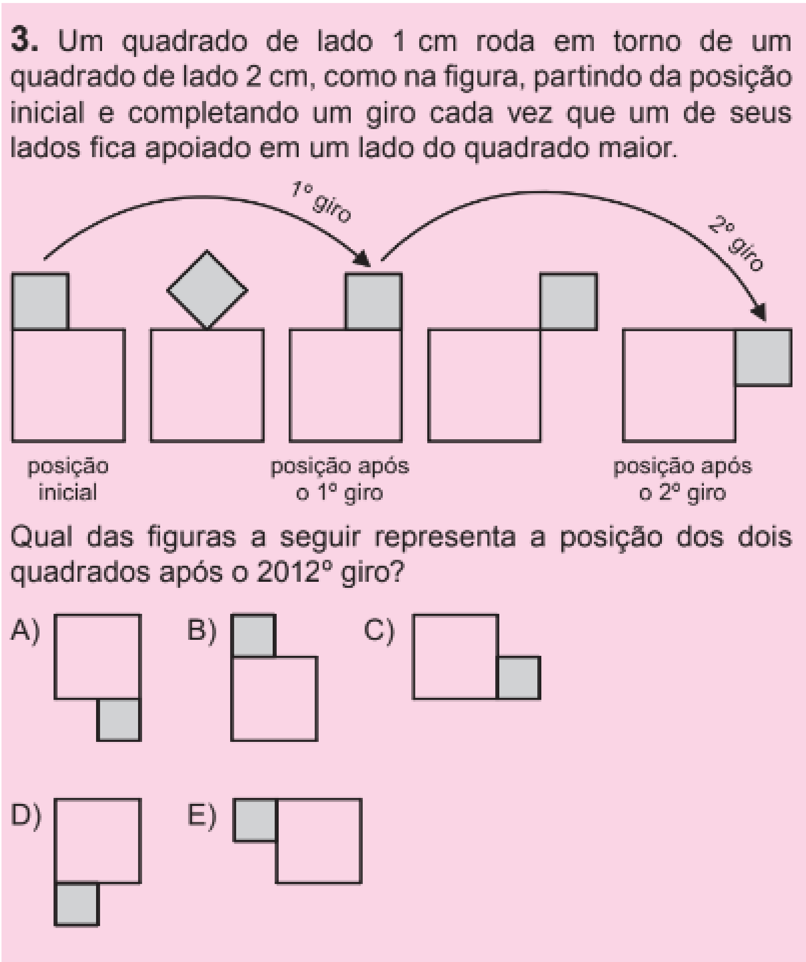
SILVEIRA, J. F. Porto da. O que é um problema matemático?. *In:* J. F. Porto da Silveira. **Matemática Elementar.** Porto Alegre, 14 mar. 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html> Acesso em: 22 mar. 2023.

TREVISAN, Maria Helena de Oliveira. A Resolução de Problemas Como Metodologia de Ensino Para o Conteúdo de Geometria Plana no Contexto Escolar. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE**, 2016. Curitiba: SEED/PR., 2018. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uenp_mariahelenadeoliveiratrevisan.pdf> Acesso em 22 mar. 2023. ISBN 978-85-8015-093-3

APÊNDICE A - Problemas selecionados

Neste apêndice, apresentamos os 26 problemas selecionados. Conforme descrito ao longo do trabalho, o número que acompanha a letra E indica em qual encontro o problema foi aplicado e o número que acompanha a letra P indica qual foi a ordem que o problema foi apresentado no referido encontro. E3P4, por exemplo, indica o quarto problema proposto, no terceiro encontro realizado.

E1P1 - OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 3

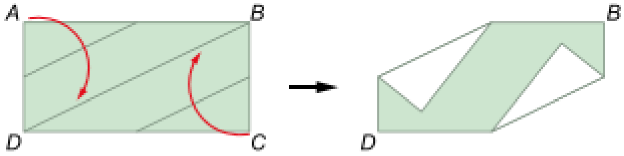


3. Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado de lado 2 cm, como na figura, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior.

Qual das figuras a seguir representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?

E1P2 - OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 7

7. Uma folha de papel retangular *ABCD*, de 10 cm por 20 cm, tem uma face colorida e o verso branco. Foram feitas duas dobras nessa folha, levando-se os pontos *A* e *C* sobre a diagonal *BD*, de modo que as dobras ficaram paralelas a essa diagonal, como mostrado na figura abaixo.

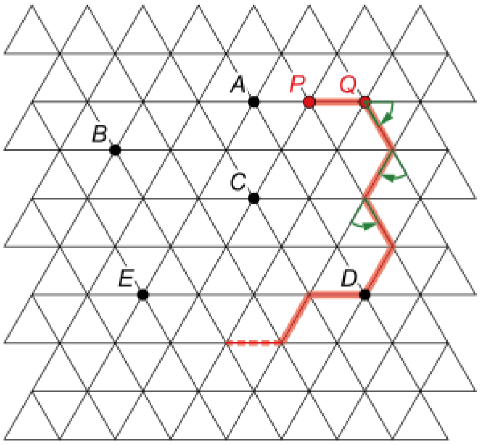


Qual é a área da região colorida que fica visível após as dobras?

(A) 25 cm²
(B) 50 cm²
(C) 75 cm²
(D) 100 cm²
(E) 125 cm²

E1P3 - OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13

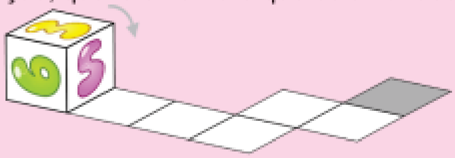
13. Uma formiguinha passeia em uma malha formada por triângulos equiláteros de lado 1 cm, como na figura. Ela parte do ponto *P* para o ponto *Q*, e sempre que encontra um vértice da malha, muda de direção, fazendo um giro de 60°. Ela repete sempre dois giros para a direita e um para a esquerda, percorrendo o caminho vermelho da figura. Em qual ponto da malha a formiguinha vai estar após percorrer 1000 cm?



(A) *A*
(B) *B*
(C) *C*
(D) *D*
(E) *E*

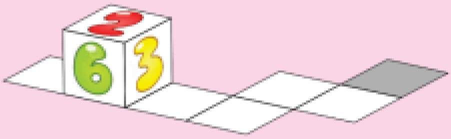
E1P4 - OBMEP 2016 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 2

2. A soma dos números das faces opostas de um dado é sempre 7. O dado da figura é girado sucessivamente sobre o caminho indicado até parar na última posição, destacada em cinza. Nessa posição, qual é o número que está na face superior do dado?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

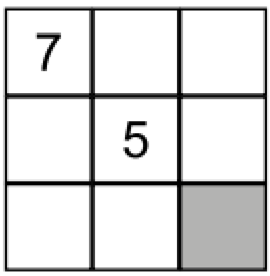
Após o primeiro giro:



E2P1 - OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 6

6. Júlia escreveu os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 em um tabuleiro 3 × 3, sem repetições, e observou que a soma dos números em cada um dos seus quatro subtabuleiros 2 × 2 era igual a 20. Os números 7 e 5 foram escritos como na figura abaixo. Qual é o número que foi escrito na casa destacada na cor cinza?

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 8
(E) 9



E2P2 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 4

4. Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?

A) 35
B) 47
C) 50
D) 52
E) 60

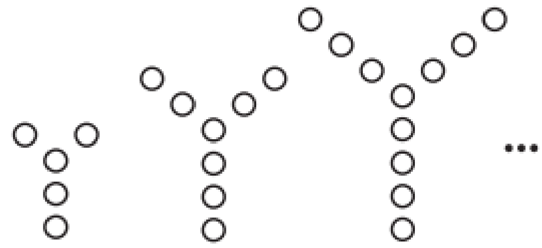
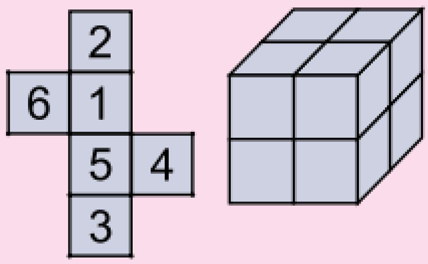


Figura 1 Figura 2 Figura 3

E2P3 - OBMEP 2022 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 16

16. João montou oito dados idênticos a partir da planificação da figura, e com eles formou um cubo. Qual é a menor soma possível para os 24 números que aparecem nas faces do cubo?

(A) 32
(B) 48
(C) 56
(D) 64
(E) 72



E3P1 - OBMEP 2018 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 9

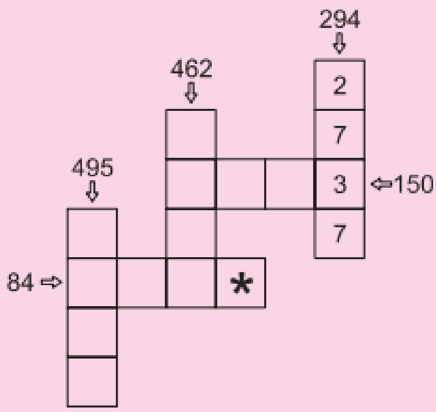
9. Maria escolheu um número inteiro. Ela somou a esse número os três números ímpares imediatamente inferiores e os dois números pares imediatamente superiores a ele e obteve 1414 como resultado. Qual é a soma dos algarismos do número que Maria escolheu?

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

E3P2 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 3

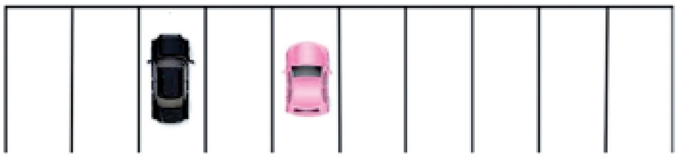
3. As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com * ?

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 11



E3P3 - OBMEP 2018 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 13

13. Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



A) 56
B) 70
C) 71
D) 72
E) 80

E3P4 - OBMEP 2017 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 4

4. Na sequência 1, 5, 4, −1, −5, ... cada termo, a partir do segundo, é igual à soma de seus dois vizinhos; por exemplo: $5 = 1 + 4$, $4 = 5 + (-1)$ e $-1 = 4 + (-5)$. Qual é a soma dos 1000 primeiros termos dessa sequência?

A) 0
B) 1
C) 4
D) 9
E) 10

E4P1 - OBMEP 2017 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 14

14. Pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 2. Qual é a área do quadrado *ABCD* da Figura 2?

A) $16\ cm^2$
B) $25\ cm^2$
C) $36\ cm^2$
D) $49\ cm^2$
E) $64\ cm^2$

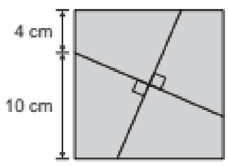


Figura 1

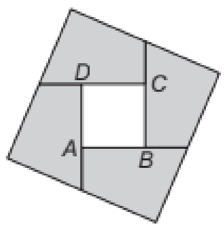
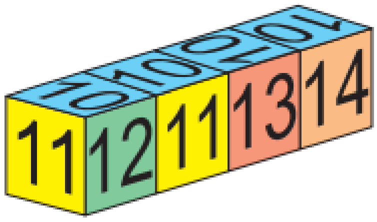


Figura 2

E4P2 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 11

11. Os quatro dados da figura são idênticos, e há três pares de faces em contato. Qual é o valor da soma dessas faces?

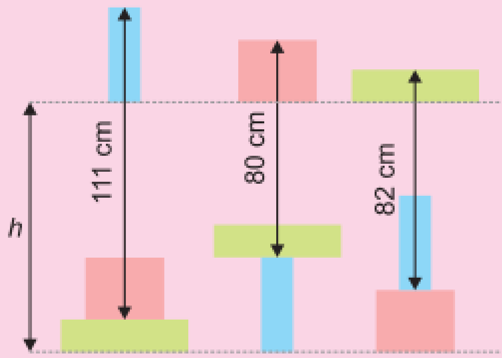
A) 73
B) 74
C) 75
D) 76
E) 77



E4P3 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 17

17. Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos. Qual é o valor de *h*?

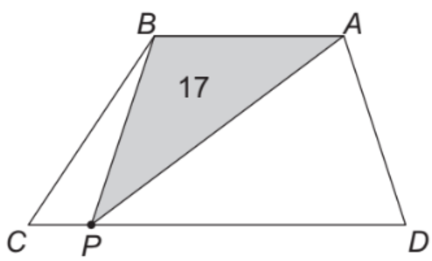
A) 88 cm
B) 89 cm
C) 90 cm
D) 91 cm
E) 92 cm



E4P4 - OBMEP 2018 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 11

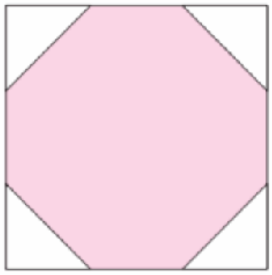
11. No trapézio *ABCD* da figura, os lados *AB* e *CD* são paralelos e o comprimento de *CD* é o dobro do comprimento de *AB*. O ponto *P* está sobre o lado *CD* e determina um triângulo *ABP* com área igual a 17. Qual é a área do trapézio *ABCD*?

A) 32
B) 34
C) 45
D) 51
E) 68



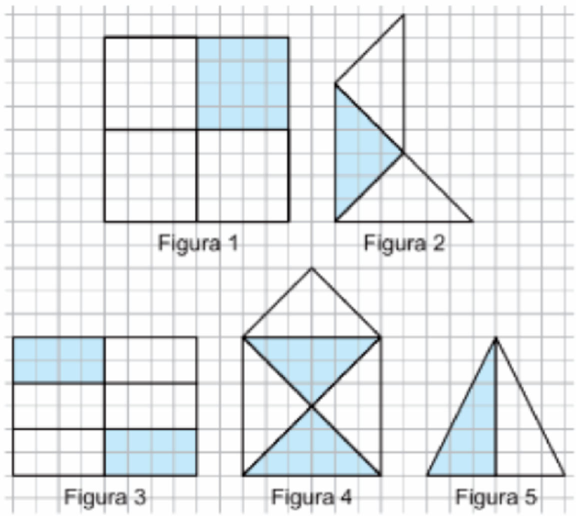
E5P1 - OBMEP 2018 - Nível 1 - 1ª fase - Questão 5

5. A área da figura destacada em rosa é 28 cm^2, e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes iguais. Qual é a área do quadrado?



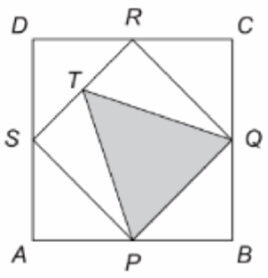
E5P2 - OBMEP 2018 - Nível 1 - 1ª fase - Questão 7

7. Na Figura 1 a área pintada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?



E5P3 - OBMEP 2009 - Nível 1 - 1ª fase - Questão 10

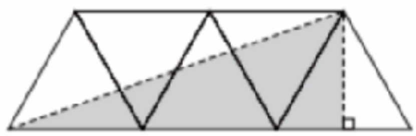
10. Na figura, o quadrado *ABCD* tem área 40 cm². Os pontos *P, Q, R* e *S* são pontos médios dos lados do quadrado e *T* é o ponto médio do segmento *RS*. Qual é a área do triângulo *PQT*?



E5P4 - OBMEP 2009 - Nível 2 - 1ª fase - Questão 2

Nível 2 - 2009

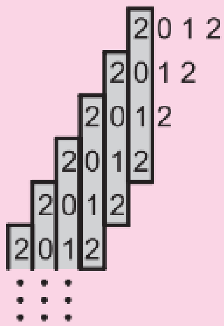
2. A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área sombreada?



E5P5 - OBMEP 2012 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 2

2. Carlinhos escreveu várias vezes o número 2012 horizontalmente, como indicado na figura. Em seguida, ele desenhou 2012 retângulos, cada um ao redor de cada um dos números 2012 que podiam ser lidos verticalmente. Qual é a soma de todos os algarismos escritos por Carlinhos?

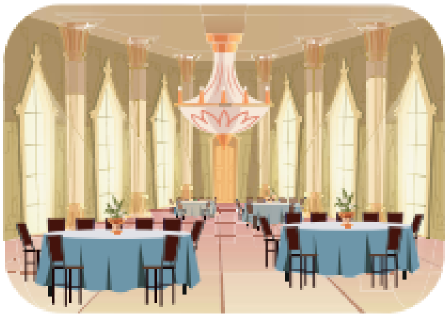
A) 10000
B) 10060
C) 10075
D) 12012
E) 20120



E5P6 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 6

6. Uma festa de casamento será realizada em um salão que comporta no máximo 200 pessoas. O organizador sabe que, se distribuir 8 convidados por mesa, uma mesa ficará com apenas um convidado. O mesmo irá ocorrer se ele distribuir 6 ou 7 convidados por mesa. Se ele distribuir 9 convidados por mesa, uma mesa ficará com menos do que 9 pessoas. Quantas pessoas ficarão nessa mesa?

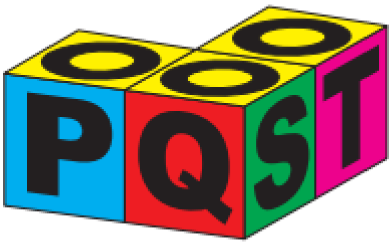
A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 7



E6P1 - OBMEP 2017 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 15

15. Zequinha tem três dados iguais, com letras **O**, **P**, **Q**, **R**, **S** e **T** em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra **T**?

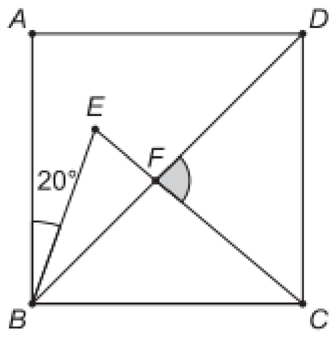
A) **S**
B) **R**
C) **Q**
D) **P**
E) **O**



E6P2 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 14

14. Na figura, *ABCD* é um quadrado, a medida do ângulo *ABE* é 20° e *EC* = *BC*. Qual é a medida do ângulo *DFC*?

A) 80°
B) 85°
C) 90°
D) 95°
E) 100°



E6P3 - OBMEP 2016 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 3

3. Joãozinho fez duas dobras em uma folha de papel quadrada, ambas passando pelo centro da folha, como indicado na Figura 1 e na Figura 2. Depois ele fez um furo na folha dobrada, como indicado na Figura 3.

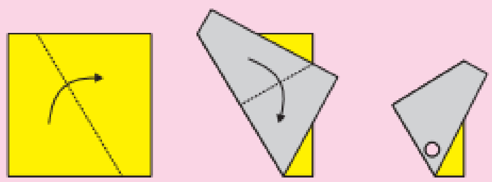
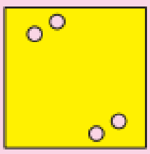
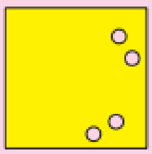
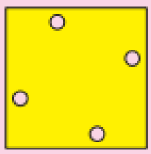


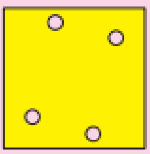
Figura 1 Figura 2 Figura 3

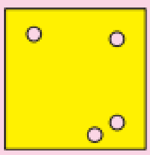
Qual das figuras abaixo representa a folha desdobrada?

A) 

B) 

C) 

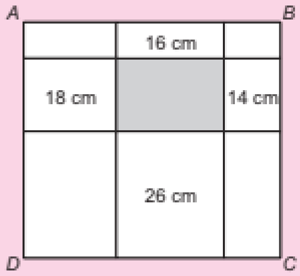
D) 

E) 

E6P4 - OBMEP 2016 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 17

17. O retângulo *ABCD* foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo *ABCD* é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?

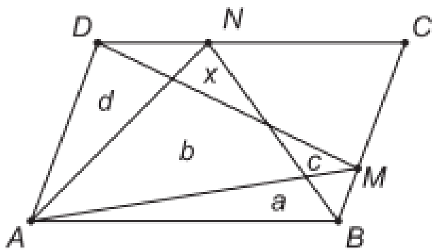
A) 15 cm
B) 19 cm
C) 20 cm
D) 22 cm
E) 24 cm



E6P5 - OBMEP 2019 – Nível 2 – 1ª fase – Questão 12

12. No paralelogramo *ABCD* da figura, os pontos *M* e *N* são pontos dos lados *BC* e *CD*, respectivamente. As áreas *a*, *b*, *c* e *d* são conhecidas. Qual é o valor da área *x*?

A) $c + d - a$
B) $a + c + d - b$
C) $a + c + d - 2b$
D) $a + d - b$
E) $a + c - d$



APÊNDICE B - Modelo de Carta de Anuência

Neste apêndice está o modelo da Carta de Anuência, assinada pela Diretora da escola em que a pesquisa foi realizada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Porto Alegre, 14 de outubro de 2023.

Prezada Professora _______________________, Diretora da Escola _____________________________,

O aluno Gustavo Dewes Wagner, atualmente é graduando regularmente matriculado no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Como parte das exigências do Departamento de Matemática Pura e Aplicada para obtenção do título de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, o graduando está desenvolvendo um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). O TCC produzido deve resultar em material didático de qualidade que possa ser utilizado por outros professores de Matemática. Neste sentido, torna-se extremamente importante realizar experimentos educacionais e, por esta razão, estamos solicitando a sua autorização para que este trabalho possa ser desenvolvido na escola sob sua Direção.

Em caso de manifestação de sua concordância, por favor, registre sua ciência ao final deste documento, o qual está sendo encaminhado em duas vias.

Enquanto pesquisador e professor responsável pela orientação do desenvolvimento do TCC pelo graduando, reitero nosso compromisso ético com os sujeitos dessa pesquisa colocando-nos à disposição para quaisquer esclarecimentos durante e após a realização da coleta de dados. Para tanto, deixo à disposição o seguinte telefone de contato: (xx) xxxxx.xxxx

Agradecemos a sua atenção.

Cordialmente,

____

Marilaine de Fraga Sant'Ana

Professora do Departamento de Matemática Pura e Aplicada

____

Professora Diretora da ____________________________

APÊNDICE C - Modelo dos termos assinados pelas participantes e responsáveis

Neste apêndice, estão modelos dos termos referentes às concessões de uso dos trabalhos realizados durante as práticas da oficina, a serem usados como fontes de dados para a presente pesquisa. São inclusos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, assinado pelos sujeitos da pesquisa e o Termo de Consentimento Informado, assinado pelos responsáveis dos alunos.

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TALE

Você está sendo convidado(a) a participar como voluntário do projeto de pesquisa "RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP: UMA PROPOSTA DE OFICINA NO TURNO INVERSO" sob responsabilidade do professor/pesquisador da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) Gustavo Dewes Wagner. O estudo será realizado com material didático elaborado com questões da OBMEP. As atividades serão realizadas em seis encontros presenciais, durante o turno inverso ao que os(as) alunos(as) tem aulas regulares, ou seja, no turno da tarde. Os encontros serão gravados através de áudio e vídeo, que serão utilizados para descrição de relato em texto no trabalho escrito. Sua participação se dará na tentativa de resolver os problemas propostos e na discussão deles com o grande grupo. Trataremos também sobre as questões que envolvem a metodologia em questão para tentar compreender quais são as potencialidades que ela nos possibilita no ensino de matemática. Poderá haver o risco de se sentir cansado(a), envergonhado(a) ou desconfortável ao participar dos encontros, caracterizado pela duração dos mesmos e pelas gravações em áudio e vídeo que serão realizadas.

Os seus pais (ou responsáveis) autorizaram você a participar desta pesquisa, caso você deseje. Você não precisa se identificar e está livre para participar ou não. Caso inicialmente você deseje participar, posteriormente você também está livre para, a qualquer momento, deixar de participar da pesquisa. O responsável por você também poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Você não terá nenhum custo e poderá consultar o(a) pesquisador(a) responsável sempre que quiser, por e-mail ou pelo telefone da instituição, para esclarecimento de qualquer dúvida.

Todas as informações por você fornecidas e os resultados obtidos serão mantidos em sigilo, e estes últimos só serão utilizados para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você será informado de todos os resultados obtidos, independentemente do fato de estes poderem mudar seu consentimento em participar da pesquisa. Você não terá quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre os eventuais resultados decorrentes da pesquisa. Este estudo é importante porque seus resultados fornecerão informações para analisar as experiências ao se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas em matemática, evidenciando suas potencialidades e problemáticas, ampliando o debate sobre o tema.

Diante das explicações, se você concorda em participar deste projeto de pesquisa, forneça o seu nome e coloque sua assinatura a seguir.

Nome:____

Data: _____________________, ______ de ________________de 20____

___________________________________ ___________________________________

Participante Pesquisador(a) responsável

OBS.: Termo apresenta duas vias, uma destinada ao participante e a outra ao pesquisador.

Nome Pesquisador(a): Gustavo Dewes Wagner
Cargo/função: Professor pesquisador
E-mail: gustavodewes@gmail.com
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Endereço: xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
Telefone: (xx) xxxxx.xxxx

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. _____________, responsável pelo(a) aluno(a) _____________________________________, da turma __________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS A PARTIR DE QUESTÕES DA OBMEP: UMA PROPOSTA DE OFICINA NO TURNO INVERSO, desenvolvida pelo(a) pesquisador Gustavo Dewes Wagner. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela Profª Dra. Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, por meio do telefone xx xxxxx‑xxxx ou e‑mail xxxxxxx@xxxxxxxx.
Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:
‑ Incentivar alunos do ensino básico a se desafiarem por meio das questões disponíveis nos materiais da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), buscando trabalhar conceitos matemáticos para além da sala de aula, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas;
‑ Mostrar as potencialidades que a Olimpíada tem além dos prêmios simbólicos como medalhas e menções honrosas, podendo abrir portas para uma carreira acadêmica de sucesso dentro da área da matemática ou da tecnologia, por meio de bolsas em universidades e em programas de iniciação científica.
Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.
A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de resolução de materiais, questionários etc, bem como da participação em oficina, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos ou filmagens, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Esses dados ficarão armazenados por pelo menos cinco anos após o término da investigação.
Cabe ressaltar que a participação nesta pesquisa não infringe as normas legais e éticas. No entanto, poderá ocasionar algum constrangimento dos entrevistados ao precisarem responder a algumas perguntas sobre o desenvolvimento de seu trabalho na escola. A fim de amenizar este desconforto será mantido o anonimato das entrevistas. Além disso, asseguramos que o estudante poderá deixar de participar da investigação a qualquer momento, caso não se sinta confortável com alguma situação
Como benefícios, esperamos com este estudo, produzir informações importantes sobre a aplicabilidade da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de matemática, a fim de que o conhecimento construído possa trazer contribuições relevantes para a área educacional.

A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.
Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável no endereço xxxxxxxxx telefone xxxxxxx ou e-mail xxxxxxxxxx
Qualquer dúvida quanto a procedimentos éticos também pode ser sanada com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), situado na Av.Paulo Gama, 110 - Sala 317, Prédio Anexo 1 da Reitoria - Campus Centro, Porto Alegre/RS - CEP: 90040-060 e que tem como fone 55 51 3308 3738 e email etica@propesq. ufrgs.br
Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

Porto Alegre, ______ de ______________ de _________.

Assinatura do responsável:

Assinatura do pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa: