

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Simulação Numérica de
Esteiras em Transição
Utilizando o Método dos
Contornos Virtuais**

por

Carlos Anissem Soares Moser

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Jorge Silvestrini
Orientador

Prof. Dr. Álvaro De Bortoli
Co-orientador

Porto Alegre, Maio de 2002.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Moser, Carlos Anissem Soares

Simulação Numérica de Esteiras em Transição Utilizando o Método dos Contornos Virtuais / Carlos Anissem Soares Moser.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2002.

68 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

Orientador: Silvestrini, Jorge; Co-orientador: De Bortoli, Álvaro

Dissertação: Matemática Aplicada
Modelo, Dissertação

Simulação Numérica de Esteiras em Transição Utilizando o Método dos Contornos Virtuais

por

Carlos Anissem Soares Moser

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Jorge Silvestrini

Co-orientador: Prof. Dr. Álvaro De Bortoli

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aristeu Silveira Neto
Fac.Eng.Mec./UFU

Prof. Dr. Paulo Zíngano
DMPA-PPGMAp/UFRGS

Prof. Dr. Argemiro Resende Secchi
Dep.Eng.Quím./UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
23 de Maio de 2002.

Prof. Dr. Vilmar Trevisan
Coordenador

AGRADECIMENTO

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram na realização deste trabalho.

Conteúdo

LISTA DE FIGURAS	IV
LISTA DE TABELAS	VII
LISTA DE ABREVIATURAS	VIII
RESUMO	IX
ABSTRACT	X
1 INTRODUÇÃO	1
2 METODOLOGIA NUMÉRICA	7
2.1 Equações Governantes	7
2.2 Condições de contorno do domínio computacional	7
2.3 Discretização temporal	8
2.4 Discretização espacial	10
2.4.1 Aproximação das derivadas espaciais	11
2.4.2 Representação matricial das equações	12
2.4.2.1 Condição periódica	13
2.4.2.2 Condição semi-periódica	14
2.4.3 Análise de Fourier do erro de diferenciação	16
2.4.4 Avaliação das derivadas	17
2.4.5 Aplicação de filtragem espacial	20
3 MÉTODO DOS CONTORNOS VIRTUAIS	23
3.1 Termo forçante de Goldstein	23
3.2 Tratamento do corpo imerso no escoamento	25
3.3 Técnicas de Projeção dos contornos imersos	27
3.3.1 Distribuição Gaussiana de Goldstein	28
3.3.2 Interpolação Bilinear	29

3.3.3	Aproximação Gaussiana Espectral	31
3.3.4	Redistribuição Gaussiana	33
4	RESULTADOS	35
4.1	Escoamento na esteira do cilindro circular	35
4.1.1	Regime laminar permanente	36
4.1.2	Regime laminar com desprendimento de vórtices	36
4.1.3	Regimes de transição e turbulência	37
4.1.4	Influência do escoamento no corpo imerso	38
4.1.4.1	Transferência de informações entre o contorno imerso e a malha	39
4.1.4.2	Movimento do fluido sobre o contorno imerso	42
4.1.4.3	Oscilações induzidas pelo desprendimento de vórtices na esteira	44
4.1.5	Perfis de velocidade	50
4.1.6	Avaliação da resposta temporal do termo forçante	52
4.1.7	Número de Strouhal	53
4.1.8	Coefficiente de arraste	54
4.2	Escoamento na esteira do prisma quadrado	55
4.2.1	Regime laminar permanente	55
4.2.2	Regime laminar com desprendimento de vórtices	56
4.2.3	Número de Strouhal	59
4.2.4	Coefficiente de arraste	60
4.3	Ordem de precisão das técnicas de projeção dos contornos imersos	61
5	CONCLUSÕES	63
	BIBLIOGRAFIA	65

Lista de Figuras

Figura 2.1	Esquema da condição de deslizamento sem fricção: função par (à esquerda) e função ímpar (à direita).	15
Figura 2.2	Número de onda modificado w' da derivada primeira em função do número de onda w , para: ——— derivação exata; -·-·- esquema explícito de segunda ordem; - - - esquema explícito de sexta ordem; - - - - esquema compacto de quarta ordem; esquema compacto de sexta ordem.	18
Figura 2.3	Número de onda modificado w'' da derivada segunda em função do número de onda w , para: ——— derivação exata; -·-·- esquema explícito de segunda ordem; - - - - esquema compacto de quarta ordem; esquema compacto de sexta ordem.	19
Figura 2.4	Função de transferência, $T(w)$, para filtros com sexta ordem de precisão: ——— filtro compacto; . . . filtro explícito.	22
Figura 3.1	Tratamento do corpo imerso no escoamento: (a) Contorno sólido, (b) corpo sólido, (c) fluxo contrário (por reflexão) e (d) diferenças de um único lado.	26
Figura 3.2	Corpo representado diretamente sobre a malha computacional. Localização dos nós da malha com relação ao contorno imerso.	28
Figura 3.3	Transferência de informações (via interpolação/extrapolação) de cada ponto do contorno imerso para os quatro nós adjacentes da malha.	30
Figura 3.4	Transferência de informações (via aproximação Gaussiana espectral) de cada ponto do contorno imerso para os nove nós adjacentes da malha.	32
Figura 3.5	Transferência de informações (via redistribuição Gaussiana) de cada ponto do contorno imerso para os cinco nós adjacentes da malha.	34
Figura 4.1	Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 40$, pela técnica de aproximação Gaussiana. Região de recirculação permanente na esteira, com a formação de vórtices simétricos contra-rotativos.	36
Figura 4.2	Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 50$, pela técnica de aproximação Gaussiana.	37

Figura 4.3	Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 100$. Desprendimento alternado de vórtices das partes inferior e superior do cilindro.	37
Figura 4.4	Campo de vorticidade na esteira do cilindro para Re : (a) 100, (b) 200 e (c) 300. Técnica de redistribuição Gaussiana. Malha com espaçamento $\Delta = D/32$ num domínio computacional $24D \times 12D$	39
Figura 4.5	Transferência de informações entre o contorno imerso e a malha de diferentes resoluções, $n_x \times n_y$, pelas técnicas: Aproximação Gaussiana para (+) 577×289 ; (*) 289×145 . Interpolação bilinear para (\times) 577×289 ; (\square) 289×145	40
Figura 4.6	Magnitude da velocidade do fluido, $\ \mathbf{u}_b\ $, em 300 pontos do contorno imerso, para $Re=100$. Domínio computacional: $24D \times 12D$. Espaçamentos da malha: ——— $\Delta = D/6$; - - - $\Delta = D/12$; $\Delta = D/24$	43
Figura 4.7	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$ em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana, empregando $N_b=300$ para: ——— $Re = 40$; ——— $Re = 50$	44
Figura 4.8	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$ em função do tempo, pela técnica de interpolação bilinear, empregando $N_b=200$ para: ——— $Re = 40$; ——— $Re = 50$	45
Figura 4.9	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$, em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana. $Re = 200$ para: ——— $N_b = 300$; ——— $N_b = 600$	46
Figura 4.10	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$, em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana para $N_b = 600$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400	47
Figura 4.11	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$ em função do tempo. Técnica de interpolação bilinear para $N_b = 200$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400	48
Figura 4.12	Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\ u_b\ _2$ em função do tempo. Técnica de redistribuição Gaussiana para $N_b = 300$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400	49
Figura 4.13	Perfis transversais da componente longitudinal da velocidade, u , a partir do centro do cilindro ($x/D = 0, y/D = 0$), para $Re = 50$. Técnicas de projeção dos contornos imersos: Interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e distribuição Gaussiana. . . .	50

Figura 4.14	Perfis transversais da componente longitudinal da velocidade, u , a partir do centro do cilindro ($x/D = 0, y/D = 0$) para $Re = 100, 200$ e 300 , pela técnica de redistribuição Gaussiana. Espaçamentos uniformes da malha: $\Delta = D/18$ (à esquerda) e $\Delta = D/32$ (à direita).	51
Figura 4.15	Amortecimento das oscilações da componente u da velocidade no contorno ($x/D = 0, y/D = 0.5$). $\alpha = -400, \beta = -15$ _____ ; $\alpha = -4000, \beta = -150$ - - - - - ; $\alpha = -40000, \beta = -1500$	52
Figura 4.16	Coefficiente de arraste médio em função do número de Reynolds. Comparação das técnicas de aproximação Gaussiana, interpolação bilinear e redistribuição Gaussiana com os estudos numéricos (Sai-ki e Biringen[25], Gresho <i>et al.</i> [8] e Persillon e Braza [20]) e com o trabalho experimental (Clift <i>et al.</i> [2]).	54
Figura 4.17	Linhas de corrente. Formação de bulbos contra-rotativos de recirculação na esteira do prisma quadrado para $Re = 50$	56
Figura 4.18	Linhas de corrente para $Re = 55$. Processo incipiente de desprendimento de vórtices na esteira do prisma quadrado.	56
Figura 4.19	Linhas de corrente para $Re = 100$. Separação do escoamento nos cantos à jusante do prisma quadrado.	57
Figura 4.20	Linhas de corrente para $Re = 125$. Formação de região de recirculação nas proximidades da face inferior do prisma quadrado.	58
Figura 4.21	Perfis transversais da componente u da velocidade, a partir da face superior do prisma quadrado ($x/D=0, y/D=0,5$). $Re = 50, 100, 125$ e 200	58
Figura 4.22	Campo de vorticidade na esteira do prisma quadrado para Re : (a) 60, (b) 100 e (c) 200. Técnica de redistribuição Gaussiana. Malha com espaçamento $\Delta = D/32$ num domínio computacional $24D \times 12D$	60
Figura 4.23	Norma l_2 do erro da componente u da velocidade em todo o campo do escoamento em função do número de pontos da malha na direção longitudinal. Comparação de $n_x = 97, 193$ e 385 com a solução considerada "exata", $n_x = 769$	62

Lista de Tabelas

Tabela 2.1	Coeficientes α_k e β_k para cada sub-passo de tempo.	9
Tabela 2.2	Parâmetros α , a e b para obter precisão espacial de sexta ordem.	11
Tabela 2.3	Eficiência de resolução $e_1(\varepsilon)$ na aproximação da derivada primeira pelos esquemas: (a) explícito de segunda ordem, (b) explícito de sexta ordem, (c) compacto de quarta ordem e (d) compacto de sexta ordem.	19
Tabela 2.4	Eficiência de resolução $e_2(\varepsilon)$ na aproximação da derivada segunda pelos esquemas: (a) explícito de segunda ordem, (b) explícito de sexta ordem, (c) compacto de quarta ordem e (d) compacto de sexta ordem.	20
Tabela 4.1	Relação $N_b \times N_m$ para maximizar a transferência de informações entre o contorno e a malha. Técnicas de interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana. Malhas com resolução $n_x \times n_y$: 289×145 e 577×289	41
Tabela 4.2	Transferência de informações dos N_b pontos do contorno para os nós adjacentes da malha, N_{adj} . Técnica de referência: Saiki e Biringen [25]. Técnicas implementadas: Interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana.	42
Tabela 4.3	Relação $St \times Re$. Comparação de resultados. Técnicas implementadas: 1. distribuição Gaussiana, 2. interpolação bilinear, 3. aproximação Gaussiana e 4. redistribuição Gaussiana. Estudos de Referência: 5. Saiki e Biringen (numérico), 6. Roshko (experimental) e 7. Persillon e Braza (numérico).	53
Tabela 4.4	Número de Reynolds (Re) \times Número de Strouhal (St), pelas técnicas: 1. Aproximação Gaussiana, 2. Ahmad Sohankar <i>et al.</i> [29].	61
Tabela 4.5	Número de Reynolds (Re) \times Coeficiente de arraste (C_D), pelas técnicas: 1. Aproximação Gaussiana. 2. Ahmad Sohankar <i>et al.</i> [29].	61

LISTA DE ABREVIATURAS

A	aresta do prisma quadrado
p	campo de pressão modificada
\mathbf{u}	campo de velocidade no escoamento
ω	campo de vorticidade
C_D	coeficiente de arraste
u	componente longitudinal da velocidade
v	componente transversal da velocidade
D	diâmetro do cilindro
$L_x \times L_y$	dimensões do domínio computacional
Δ	espaçamento da malha uniforme
f_S	freqüência de desprendimento de vórtices
d	largura projetada na direção transversal ao escoamento
$\ \mathbf{u}_b\ $	magnitude da velocidade no contorno imerso
$\ u_b\ _2$	norma- l_2 da componente u da velocidade no contorno imerso
Re	número de Reynolds
St	número de Strouhal
CFL	número de Courant-Friedrichs-Lewy
Δt	passo de tempo
$n_x \times n_y$	resolução da malha
t	tempo
\mathbf{f}	termo de força
u_∞	velocidade na corrente livre
\mathbf{n}	vetor normal
ν	viscosidade cinemática do fluido

RESUMO

Simulações Numéricas Diretas são executadas em um código numérico de alta precisão, resolvendo as equações de Navier-Stokes e da continuidade para regimes de escoamento incompressíveis num contexto da turbulência bidimensional. Este código utiliza um esquema compacto de diferenças finitas de sexta ordem na aproximação das derivadas espaciais. As derivadas temporais são calculadas usando o esquema de Runge-Kuta de terceira ordem com baixo armazenamento. Tal código numérico fornece uma representação melhorada para uma grande faixa de escalas de comprimento e de tempo.

As técnicas dos contornos imersos acopladas ao método dos contornos virtuais permitem modelar escoamentos não-estacionários sobre geometrias complexas, usando simplesmente uma malha Cartesiana uniforme. Por meio de procedimentos de aproximação/interpolação, as técnicas dos contornos imersos (aproximação Gaussiana, interpolação bilinear e redistribuição Gaussiana), permitem a representação do corpo sólido no interior do campo de escoamento, com a superfície não coincidindo com a malha computacional. O método dos contornos virtuais, proposto originalmente por Peskin, consiste, basicamente, na imposição na superfície e/ou no interior do corpo, de um termo de força temporal acrescentado às equações do momento.

A aplicação deste campo de força local leva o fluido ao repouso na superfície do corpo, permitindo obter as condições de contorno de não-deslizamento e de não-penetração de fluido na parede. A análise das oscilações induzidas no escoamento-contorno pelo processo de desprendimento de vórtices na esteira do cilindro circular e de geometrias retangulares na incidência, para números de Reynolds variando de 40 a 400, confirma a eficiência computacional e a aplicabilidade das técnicas implementadas.

ABSTRACT

Direct Numerical Simulations are performed with a high-accurate numerical code, solving the equations of Navier-Stokes and continuity for incompressible flows in the bidimensional turbulence context. This code employs a sixth-order compact finite difference scheme for the approximation of the spatial derivatives. The temporal derivatives are computed using the third order with low storage Runge-Kutta scheme. Such numerical code provides an improved representation of a wide range of length and time scales (spectral-like resolution) present in unsteady flows regimes.

The immersed boundary techniques coupled with the virtual boundary method allows to model unsteady flows over complex geometries using simple uniform Cartesian grids. By means of approximation/interpolation procedures, the immersed boundary techniques (Gaussian approximation, bilinear interpolation and Gaussian redistribution), allow the solid body representation within the flow field, with the surface not coinciding with the computational grid. The virtual boundary method, originally proposed by Peskin, consists, basically, in the imposition at the surface and/or inside the body, of a temporal forcing term added to the momentum equations.

The application of this local force field brings the fluid to rest on the body surface, allowing to attain the no-slip and the no-penetration walls boundary conditions. The analysis of the flow-boundary induced oscillations by the vortex shedding process in the wake of the circular cylinder and rectangular geometries at incidence, for Reynolds number ranging from 40 to 400, confirms the computational efficiency and applicability of the current techniques.

1 INTRODUÇÃO

A habilidade em modelar escoamentos sobre geometrias complexas se constitui num dos principais desafios da dinâmica dos fluidos computacional, visto que a maior parte dos problemas de escoamentos envolve algum tipo de geometria complexa. Configurações de escoamentos sobre geometrias do tipo *bluff-body*¹ surgem em numerosas aplicações industriais e situações ambientais, como por exemplo, na refrigeração de componentes e equipamentos eletrônicos, em grandes edificações e em estruturas técnicas: torres de refrigeração, chaminés, trocadores de calor, etc. Corpos do tipo *bluff-body* induzem instabilidades e mistura no escoamento, que podem ser usadas para melhorar a transferência de calor e de massa para o corpo e/ou para a sua vizinhança.

Nas simulações de escoamentos, em torno de geometrias complexas é empregada uma grande variedade de métodos numéricos. As principais exigências impostas à estes métodos, decorrem da necessidade de se obter simulações numéricas eficientes e precisas da enorme diversidade de escalas de comprimento presentes nos escoamentos não-estacionários [4]. Os métodos espectrais fornecem alta precisão, mas têm aplicação limitada à geometrias simples. Na representação de geometrias complexas, os métodos de diferenças finitas e de elementos finitos geralmente fornecem baixa precisão, exigindo malhas finas para se obter bons resultados. Os métodos de elementos finitos permitem trabalhar com geometrias complexas, mas geralmente têm custo computacional elevado na geração da malha. Os métodos de elementos espectrais podem ser usados para representar geometrias complexas; no entanto, a deformação da malha inerente à estes métodos leva à limitações no passo de tempo e ao agrupamento dos nós da malha de modo ineficiente. De modo geral, qualquer esquema computacional que necessite reconstruir a malha para acomodar

¹Corpo imerso no escoamento que, em circunstâncias normais, separa o escoamento a partir de uma grande área de seção transversal e produz uma esteira maciça atrás do corpo.

mudanças na geometria, incorre em falhas significativas na variação temporal da geometria.

Como alternativa para o uso de coordenadas generalizadas e transformação de coordenadas, Peskin [21] desenvolveu o método dos contornos virtuais, que permite representar o corpo no interior do escoamento pela aplicação de um termo forçante acoplado às equações de Navier-Stokes. Na década de setenta Peskin [21, 22] realizou simulações numéricas do escoamento do sangue na válvula mitral do coração, assumindo número de Reynolds muito baixos e escoamento bidimensional.

Em princípio, não é necessário fazer qualquer restrição na distribuição da velocidade, forma e/ou movimento do contorno: conseqüentemente, o método dos contornos virtuais permite a imposição de uma grande variedade de condições de contorno [30], incluindo superfícies livres, superfícies de fluido-fluido, fluido-sólido, etc. Saiki e Biringen [25] usaram o método do termo forçante [7] para calcular o escoamento ao redor de cilindros circulares estacionários e rotatórios. Recentemente, Mohd-Yusof [17] derivou uma formulação alternativa do termo forçante que não afeta a estabilidade das equações discretizadas no tempo.

É importante salientar que a introdução de forças em pontos pode originar alguns problemas na representação espectral de escoamentos não-estacionários, pois as singularidades tendem a induzir oscilações locais significativas. Para representar o corpo sólido no escoamento, Goldstein *et al.* [6] e Saiki e Biringen [25] usam forças. Contudo, estas forças induzem oscilações artificiais no campo do escoamento e restringem o passo de tempo computacional associado à estabilidade numérica. De fato, o campo de forças deveria ser obtido pela aplicação da força em todo o volume da célula formada pela malha, deixando de ser apenas o resultado de forças aplicadas em pontos do contorno.

Para forçar as condições de contorno de não-deslizamento e impermeabilidade, investigações do efeito de corpos sólidos imersos no interior do escoamento sugerem que o termo forçante seja aplicado tanto no contorno quanto nos pontos

do interior do corpo. Mohd-Yusof [17] sugeriu uma aproximação para avaliar as forças em métodos espectrais, em que o termo forçante é aplicado na superfície do corpo e/ou no interior do corpo. Esta aproximação não requer passo de tempo computacional muito pequeno, o que constitui importante vantagem em relação aos métodos anteriores. Fadlum *et al.*[3] aplicaram a aproximação de Mohd-Yusof [17] empregando o método de diferenças finitas numa malha co-localizada, mostrando que o termo de força temporal sugerido por Mohd-Yusof [17] é mais eficiente do que a força de realimentação² para escoamentos tridimensionais. Na aproximação de Fadlum *et al.* [3], a velocidade no primeiro nó da malha, no exterior do corpo, é obtida pela interpolação linear das velocidades entre o segundo nó da malha e o ponto do contorno, o que corresponde à aplicação do termo forçante no campo de escoamento.

O conceito do método dos contornos virtuais tem sido adotado juntamente com esquemas pseudo-espectrais [6]. Contudo, a restrição no passo de tempo, muitas vezes limita a aplicabilidade a escoamentos turbulentos e a outros escoamentos que dependem bastante do tempo. Segundo Yusof [17], esta restrição pode ser removida pela derivação do valor da força discretizado no tempo.

Na representação do contorno imerso³ no interior do escoamento são empregadas diversas técnicas de projeção: Goldstein *et al.* [7] definiram o contorno em pontos coincidentes com a malha computacional. Peskin [21, 22] e Goldstein *et al.* [6] consideraram o contorno imerso no interior da malha. Para interpolar e extrapolar informações entre o contorno imerso e a malha, Peskin [21] utilizou uma função coseno. Beyer [1] representou o contorno imerso com precisão de segunda ordem, com base na aplicação do método de Peskin [21]. Goldstein *et al.* [6] implementaram uma técnica de interpolação linear espectral das velocidades dos pontos da malha para os pontos do contorno imerso com o propósito de distribuir o efeito do termo forçante nos nós adjacentes da malha. Saiki e Biringen [25] utilizaram um esquema de interpolação/extrapolação bilinear com precisão de primeira ordem.

²Efeito conhecido pela sigla inglesa *feedback*.

³Contornos cujos pontos, normalmente, não coincidem com os nós adjacentes da malha.

A principal vantagem das técnicas de projeção dos contornos imersos está na habilidade de modelar geometrias, sem a necessidade de transformação de coordenadas, necessitando simplesmente de uma malha Cartesiana uniforme. No caso de geometrias móveis, a separação entre o contorno imerso e a malha elimina a necessidade de reconstrução da malha [30]. Assim, modificações na geometria da superfície requerem tão somente modificações nos dados de entrada, sem a necessidade de modificar o próprio código. Outra característica importante é a habilidade de localizar, nas proximidades do contorno imerso, um certo número de nós adjacentes da malha, permitindo resolver adequadamente as escalas de comprimento presentes nesta região do escoamento. Embora a malha Cartesiana uniforme permita simplificações consideráveis em relação as malhas adaptadas à geometria, ainda resta a necessidade fundamental de ajustar a quantidade de nós da malha, a fim de representar a grande variedade de escalas de comprimento e de tempo presentes no escoamento.

No caso de geometrias com área de seção transversal constante, expostas à corrente livre em escoamentos com velocidade u_∞ , o número de Reynolds é dado por $Re = u_\infty d/\nu$, onde d é a largura projetada na direção transversal ao escoamento (no cilindro circular o diâmetro e no prisma quadrado a aresta) e ν a viscosidade cinemática do fluido. Via de regra, ocorre separação significativa do escoamento para números de Reynolds acima da unidade. Nestas circunstâncias, existem duas camadas de livre cisalhamento que demarcam o contorno do domínio entre o escoamento e a esteira. Como na esteira, as partes mais internas se movem mais lentamente que as mais externas (que estão em contato direto com a corrente livre); as camadas de livre cisalhamento tendem à se dobrar, girando em forma de vórtices. Para números de Reynolds suficientemente elevados, devido aos mecanismos de instabilidade na esteira, ocorre o fenômeno do desprendimento de vórtices, conhecido como *vortex shedding*⁴.

⁴Desprendimento de vórtices caracterizado por uma situação periódica instável no escoamento, em que os vórtices se desprendem alternadamente das partes superior e inferior do corpo.

A frequência adimensional de desprendimento de vórtices, denominada número de Strouhal, é definida neste contexto como $St = f_S d / u_\infty$, onde f_S é a frequência de desprendimento de vórtices. As instabilidades gerados pelo processo de desprendimento de vórtices na região da esteira próxima ao corpo, originam flutuações nas forças de arraste e sustentação. A vibração no cilindro pode, entre outras coisas: (i) aumentar a força do vórtice, (ii) forçar a frequência de desprendimento a se igualar à frequência de vibração (por sincronização) e (iii) provocar o cisalhamento do corpo. Além disso, a flutuação de pressão associada é uma fonte de emissão acústica.

O primeiro tratamento matemático do desprendimento de vórtices foi dado, em 1911, por von Kármán [10]. A configuração na esteira em forma de duas fileiras de vórtices desencontrados (num sistema móvel de referência) é usualmente conhecida por *von Kármán vortex street*. Esta configuração se desenvolve na esteira de corpos do tipo *bluff-body* para uma ampla faixa de números de Reynolds, que vai de 50 à 1.10^6 [9]. Numa situação ideal de corrente livre no escoamento, o desprendimento de vórtices tem início para algum valor crítico específico do número de Reynolds, Re_{crit} , que depende da seção transversal da geometria e da incidência do escoamento.

O início do desprendimento de vórtices foi descrito por Provansal *et al.* [23] como uma oscilação auto-excitada de ciclo limitado na esteira. O Reynolds crítico é caracterizado pelo surgimento de uma bifurcação de Hopf supercrítica na esteira estacionária. Recentes avanços na teoria da estabilidade mostram que o fenômeno do desprendimento de vórtices resulta de uma instabilidade global absoluta [18, 26] em que as características do escoamento, para Reynolds próximo, mas acima de Re_{crit} , podem ser descritas pela equação de Stuart-Landau. Embora, recentemente tenham sido realizados progressos significativos (veja, por exemplo, Williamson [32] para uma revisão), ainda falta uma descrição completa do processo de desprendimento de vórtices.

Este trabalho tem como objetivos: desenvolver e a implementar numericamente técnicas de projeção dos contornos imersos. Estas técnicas serão acopladas ao método dos contornos virtuais [7], a fim de obter geometrias imersas no escoamento, sem a necessidade de aplicar qualquer condição de contorno no interior da geometria. Serão realizadas simulações numéricas diretas, DNS⁵, bidimensionais de escoamentos em torno do cilindro circular e do prisma quadrado nos regimes laminar, laminar como desprendimento de vórtices, transição e turbulência, para Reynolds variando de 40 a 400.

O capítulo 2 fornece uma descrição detalhada da metodologia numérica empregada neste trabalho. São apresentadas as equações governantes do escoamento: Navier-Stokes e continuidade, com as condições de contorno do domínio. Na discretização temporal das equações será empregado um esquema de Runge-Kutta de terceira ordem [33], enquanto que na discretização espacial será utilizado um esquema de diferenças finitas com sexta ordem de precisão [14]. A análise de Fourier permite comparar o erro de diferenciação associado à diferentes esquemas de discretização espacial. A filtragem espacial será aplicada visando eliminar as pequenas escalas de comprimento e reduzir as oscilações no campo do escoamento.

⁵Sigla inglesa, Direct Numerical Simulation

2 METODOLOGIA NUMÉRICA

2.1 Equações Governantes

No presente estudo, são realizadas simulações numéricas de escoamentos de fluidos viscosos em regime incompressível, resolvidas por meio das equações de Navier-Stokes e da continuidade, escritas num sistema de coordenadas Cartesianas, conforme representação a seguir:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \omega \times \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

Estas equações são adimensionalizadas pela largura d (projeção do contorno imerso na direção transversal ao escoamento) e pela velocidade uniforme na corrente livre u_∞ . Onde t é o tempo, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ o campo de velocidade, $\omega(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}$ o campo de vorticidade, $p(\mathbf{x}, t)$ o campo de pressão modificada e ν a viscosidade cinemática. O termo de força $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, que aparece na equação (2.1), permite extrapolar o efeito do campo de forças gerado no contorno imerso para todos os nós adjacentes da malha.

Nas simulações numéricas de escoamentos é utilizado o código computacional INCOMPACT3D. A seguir são apresentadas suas características principais. Para maiores informações, consulte a documentação do código [13].

2.2 Condições de contorno do domínio computacional

Para garantir que o escoamento do fluido não fique confinado (existência de evacuação) no domínio físico, é de fundamental importância a escolha adequada das condições de contorno do domínio computacional. Nos contornos laterais do domínio computacional é empregada a condição de periodicidade. Na entrada, para $x = 0$, é adotado um perfil de velocidade constante ($u = 1, v = 0$) sem perturbações.

Condições de contorno absorventes [28], derivadas das propriedades não reflexivas da equação da onda, são usadas no campo distante do contorno de saída do escoamento. Condições deste tipo permitem que os vórtices deixem o domínio naturalmente, minimizando os efeitos reflexivos e de realimentação. Estas condições de contorno de saída são obtidas quando se resolve a equação de convecção simplificada

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + U_b \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (2.3)$$

onde U_b é uma velocidade de convecção aproximada da estrutura principal na região de saída do escoamento, sendo a mesma em cada nó do contorno de saída. O valor de $U_b(t)$ é estimado a cada sub-passo de tempo como a metade da soma das velocidades máxima e mínima na direção da corrente.

2.3 Discretização temporal

Os termos de derivação temporal são calculados por meio de um esquema de Runge-Kutta de terceira ordem, dado por Williamson [33]. Este esquema apresenta como vantagens o reduzido armazenamento de dados, o ganho de tempo de cálculo e a elevada precisão.

Na discretização temporal da equação (2.1), introduzindo a função $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\omega \times \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}$, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) - \nabla p. \quad (2.4)$$

Integrando a equação (2.4) entre os tempos t_n e t_{n+1} :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \nabla p dt, \quad (2.5)$$

e fazendo

$$p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} p dt, \quad (2.6)$$

obtém-se diretamente

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt - \nabla p^{n+1}. \quad (2.7)$$

Na resolução da equação (2.7) deve-se levar em conta a condição de incompressibilidade. Desta forma, a equação deve ser resolvida em duas etapas, por meio da introdução de um campo de velocidades intermediário \mathbf{u}^* :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt, \quad (2.8)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \quad (2.9)$$

O campo de pressão é calculado tomando a divergência da equação (2.9). O cálculo é efetuado levando-se em conta a conservação da massa, dada pela equação (2.2), o campo de pressão p^{n+1} e a solução da equação de Poisson:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

A integração da equação (2.7) é efetuada em três sub-passos de tempo pelo esquema de avanço temporal

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt = \alpha_k \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}) + \beta_k \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-2}), \quad (2.11)$$

onde k é o índice de cada sub-passo de tempo ($k = 1, 2$ e 3), $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^n$ e $\mathbf{u}^3 = \mathbf{u}^{n+1}$.

A tabela 2.1 fornece os coeficientes α_k e β_k [33].

Tabela 2.1: Coeficientes α_k e β_k para cada sub-passo de tempo.

k	α_k	β_k
1	8/15	0
2	5/12	-17/60
3	3/4	-5/12

A condição de incompressibilidade é assegurada por meio da aplicação de um método de passo fracionado:

$$\frac{\mathbf{u}^{k*} - \mathbf{u}^{k-1}}{\Delta t} = \alpha_k \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}) + \beta_k \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-2}). \quad (2.12)$$

O campo de velocidade \mathbf{u}^k é corrigido pelo gradiente de pressão

$$\frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k*}}{\Delta t} = -\nabla p^k, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{u}^{k*} é a velocidade corrigida a cada sub-passo de tempo.

Após a dedução de uma equação de Poisson, obtida a partir da condição de incompressibilidade (2.2), aplica-se a equação

$$\nabla^2 p^k = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{k*}}{\gamma_k \Delta t}, \quad (2.14)$$

onde $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$

2.4 Discretização espacial

Os termos das derivadas espaciais são calculados por meio de um esquema de diferenças finitas com boa resolução espectral, desenvolvido por Lele [14], conhecido como esquema “Padé”. Este esquema apresenta as seguintes vantagens:

- possui comportamento quase espectral, pois o valor estimado da derivada é bem próximo do valor exato para uma ampla faixa de números de onda;
- permite obter elevada ordem de precisão formal no cálculo das derivadas espaciais;
- utiliza um domínio de dependência reduzida com relação aos esquemas clássicos, para uma dada ordem de precisão formal, o que limita o erro perto dos contornos do domínio;
- permite representar a grande variedade de escalas de comprimento dos escoamentos não-estacionários (transição e turbulência);
- permite associar o cálculo da derivada em um dado nó da malha ao cálculo da derivada nos nós vizinhos.

2.4.1 Aproximação das derivadas espaciais

Na aproximação das derivadas espaciais será empregada uma malha Cartesiana com espaçamento uniforme Δ , nas direções longitudinal e transversal ao escoamento, isto é, $\Delta = \Delta x = \Delta y$. Por simplicidade, representaremos apenas a diferenciação da variável x , na direção longitudinal. Indexando por i os nós da malha nesta direção, obtém-se $x_i = (i - 1)\Delta x$, onde $i = 1, 2, \dots, n_x$ e n_x o número de nós da malha. Considerando-se $f_i = f(x_i)$, os valores da função nos nós da malha, obtém-se:

A derivada primeira $f'_i = f'(x_i) = \frac{df_i}{dx}$ é aproximada por

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta x}. \quad (2.15)$$

A derivada segunda $f''_i = f''(x_i) = \frac{d^2 f_i}{dx^2}$ é escrita como

$$\alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta x^2}. \quad (2.16)$$

A fim de obter sexta ordem de precisão formal no esquema compacto de diferenciação espacial, deve-se empregar os valores dos coeficientes α , a e b fornecidos por Lele [14] na tabela 2.2.

Tabela 2.2: Parâmetros α , a e b para obter precisão espacial de sexta ordem.

equação	α	a	b
(2.15)	1/3	14/9	1/9
(2.16)	2/11	12/11	3/11

As equações (2.15) e (2.16) são válidas em todos os nós da malha, exceto nos contornos de entrada e de saída, para os nós $i = 1, 2$ (e $i = n_x, n_x - 1$). Para os nós $i = 1$ (e $i = n_x$) emprega-se os seguintes esquemas descentrados na aproximação das derivadas espaciais:

$$f'_1 + \alpha_1 f'_2 = \frac{1}{\Delta x} (a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3 + d_1 f_4), \quad (2.17)$$

$$f_1'' + \alpha_2 f_2'' = \frac{1}{\Delta x^2} (a_2 f_1 + b_2 f_2 + c_2 f_3 + d_2 f_4). \quad (2.18)$$

Para obter terceira ordem de precisão nas equações (2.17) e (2.18), utiliza-se os coeficientes [14]:

$$\alpha_1 = 2, \quad a_1 = -\frac{5}{2}, \quad b_1 = 2, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = 11, \quad a_2 = 13, \quad b_2 = -27, \quad c_2 = 15 \quad \text{e} \quad d_2 = -1.$$

Enquanto que para os nós $i = 2$ (e $i = n_x - 1$) emprega-se os seguintes esquemas centrados na aproximação das derivadas espaciais:

$$\alpha_3 f_1' + f_2' + \alpha_3 f_3' = a_3 \frac{f_3 - f_1}{2\Delta x}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_4 f_1'' + f_2'' + \alpha_4 f_3'' = a_4 \frac{f_3 - 2f_2 + f_1}{\Delta x^2}. \quad (2.20)$$

Obtém-se quarta ordem de precisão nas equações (2.19) e (2.20), utilizando os coeficientes [14]:

$$\alpha_3 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad a_4 = \frac{6}{5}.$$

2.4.2 Representação matricial das equações

Para resolver as equações (2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 e 2.20) deve-se resolver os seguintes sistemas de matrizes

$$\mathbf{A} f' = \frac{1}{\Delta x} \mathbf{B} f \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{A}' f'' = \frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{B}' f, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{A}' , \mathbf{B} e \mathbf{B}' são matrizes, cujas formas dependem das condições impostas nos contornos do domínio computacional. Distinguem-se dois tipos de condição de contorno do domínio:

2.4.2.1 Condição periódica

Se n é o número de nós da malha na direção x , então $f_{n+1} = f_n$ e $f_0 = f_n$. Neste caso, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são, respectivamente, tridiagonal cíclica e pentadiagonal.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & & & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & & & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & & & & & & -b & -a \\ -a & 0 & a & b & & & & & & -b \\ -b & -a & 0 & a & b & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -b & -a & 0 & a & b & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -b & -a & 0 & a & b \\ b & & & & & & -b & -a & 0 & a \\ a & b & & & & & & -b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

O mesmo procedimento é usado no calculo da derivada segunda:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & & & & & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & & & & & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} k & a & b & & & & & & b & a \\ a & k & a & & & & & & & b \\ b & a & k & a & b & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & b & a & k & a & b & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & b & a & k & a & b \\ b & & & & & & b & a & k & a \\ a & b & & & & & & b & a & k \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde $k = -2(a + b)$.

2.4.2.2 Condição semi-periódica

A segunda condição imposta nos contornos do domínio é a condição de deslizamento sem fricção (considerando $\frac{d\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{dn} = 0$, onde \mathbf{n} é o vetor normal). Esta condição pode ser vista como de simetria (ou de anti-simetria, de acordo com a paridade da função) no contorno do domínio. Distinguem-se dois tipos de condições, conforme a função f seja par ou ímpar. Neste caso as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} não são mais cíclicas, mas continuam sendo, respectivamente, tridiagonal e pentadiagonal

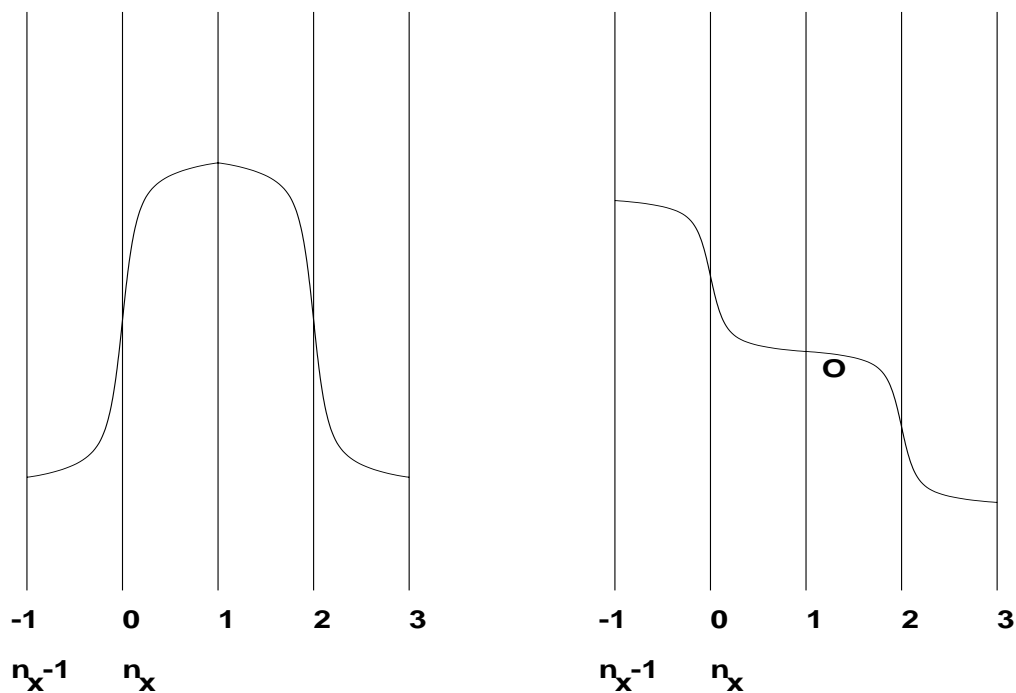


Figura 2.1: Esquema da condição de deslizamento sem fricção: função par (à esquerda) e função ímpar (à direita).

(condição importante, pois a inversão de uma matriz tridiagonal custa menos (em termos de cálculo) que a inversão de uma matriz cíclica). Para melhor compreender como as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são construídas, pode-se esquematizar as condições impostas nos contornos. A figura 2.1 mostra as condições de contorno para uma matriz tridiagonal, segundo a paridade da função considerada.

2π usando uma malha uniforme com N pontos, cujos valores exatos das derivadas primeira e segunda, respectivamente, são da forma $jwf(x_i)$ e $-w^2f(x_i)$. Por outro lado, as derivadas calculadas numericamente são da forma: $jw'f(x_i)$ e $-w''f(x_i)$, onde w' e w'' são os números de onda modificados das derivadas primeira e segunda, respectivamente.

Segundo Lele [14], o número de onda modificado para esquemas tridiagonais compactos de quarta e sexta ordens de precisão formal são:

- Para a derivada primeira:

$$w'(w) = \frac{a \sin(w) + (b/2) \sin(2w)}{1 + 2\alpha \cos(w)}, \quad (2.29)$$

onde $\alpha = 1/4$, $a = 3/2$ e $b = 0$, para o esquema de quarta ordem. Para o esquema de sexta ordem $\alpha = 1/3$, $a = 14/9$ e $b = 1/9$.

- Para a derivada segunda:

$$w''(w) = \frac{2a (1 - \cos(w)) + (b/2) (1 - \cos(2w))}{1 + 2\alpha \cos(w)}, \quad (2.30)$$

onde $\alpha = 1/10$, $a = 6/5$ e $b = 0$, para o esquema de quarta ordem. Para o esquema de sexta ordem $\alpha = 2/11$, $a = 12/11$ e $b = 3/11$.

A análise de Fourier fornece uma comparação entre os esquemas de diferenças finitas centrais: tridiagonais compactos e explícitos. Nas figuras 2.2 e 2.3 estão representados os números de ondas modificados w' e w'' em função do número de onda w . Verifica-se que os esquemas tridiagonais compactos fornecem valores do número de onda modificado mais próximos dos obtidos pela diferenciação exata para uma ampla faixa de números de onda.

2.4.4 Avaliação das derivadas

A derivada primeira "exata" no espaço de Fourier pode ser calculada por diversos esquemas de diferenciação. Considerando o intervalo $[2\pi/N, w_f]$ sobre

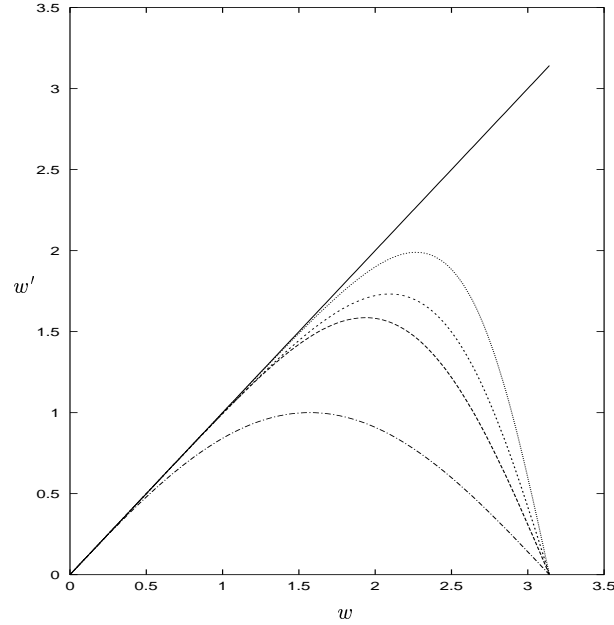


Figura 2.2: Número de onda modificado w' da derivada primeira em função do número de onda w , para: — derivação exata; - · - · - esquema explícito de segunda ordem; - - - esquema explícito de sexta ordem; - - - - esquema compacto de quarta ordem; · · · · · esquema compacto de sexta ordem.

o qual o número de onda modificado w' se aproxima do número de onda w , obtido pela diferenciação exata para uma tolerância especificada, o que permite definir um conjunto de ondas bem resolvido. Portanto, a menor onda bem resolvida, w_f , depende somente do esquema de diferenciação, não dependendo do número de pontos, N , usados na discretização. Assim, é possível definir um conjunto de ondas bem resolvido para uma tolerância especificada:

$$\frac{|w' - w|}{w} \leq \varepsilon, \quad (2.31)$$

onde a fração $r_1 \equiv 1 - w_f/\pi$ representa a parcela de ondas mal resolvidas pelo esquema de diferenciação, na aproximação da derivada primeira. A tabela 2.3 fornece a eficiência de resolução para diferentes esquemas de diferenciação, dada pela fração $e_1(\varepsilon) \equiv w_f/\pi = 1 - r_1$.

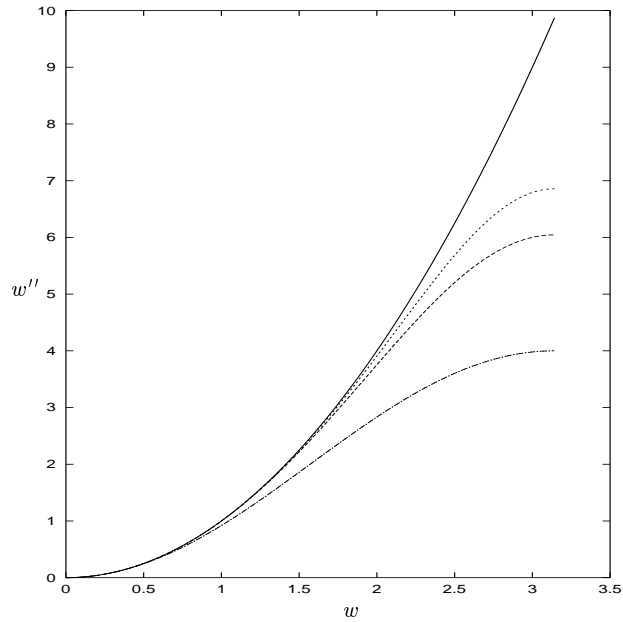


Figura 2.3: Número de onda modificado w'' da derivada segunda em função do número de onda w , para: — derivação exata; - · - · - esquema explícito de segunda ordem; - - - - - esquema compacto de quarta ordem; · · · · · esquema compacto de sexta ordem.

É importante salientar que a eficiência do esquema computacional é proporcional à eficiência de resolução do esquema de diferenciação, dependendo ainda das operações de contagem do algoritmo numérico e de sua implementação.

Na aproximação da derivada segunda, a análise do erro é feita de modo similar ao da derivada primeira. A derivada segunda exata $-w^2 f(x_i)$, obtida no espaço de Fourier, pode ser calculada por meio de diversos esquemas de diferenciação.

Tabela 2.3: Eficiência de resolução $e_1(\varepsilon)$ na aproximação da derivada primeira pelos esquemas: (a) explícito de segunda ordem, (b) explícito de sexta ordem, (c) compacto de quarta ordem e (d) compacto de sexta ordem.

Esquema	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
(a)	0,25	0,08	0,02
(b)	0,54	0,35	0,23
(c)	0,59	0,35	0,20
(d)	0,70	0,50	0,35

Considera-se $[2\pi/N, w_s]$ o intervalo em que o número de onda modificado w'' se aproxima do obtido por diferenciação exata, dentro de uma tolerância especificada. Este intervalo permite definir um conjunto de ondas bem resolvido (em que w_s corresponde à menor onda bem resolvida).

Desta forma, pode-se definir um conjunto de ondas bem resolvido para uma tolerância especificada:

$$\frac{|w'' - w^2|}{w^2} \leq \varepsilon. \quad (2.32)$$

onde a fração $r_2 \equiv 1 - w_s/\pi$ representa a parcela de ondas mal resolvidas pelo esquema da derivada segunda e a fração $e_2(\varepsilon) \equiv w_s/\pi = 1 - r_2$ fornece uma medida da eficiência de resolução do esquema de derivação. A tabela 2.4 permite comparar a eficiência de resolução, $e_2(\varepsilon)$, na aproximação da derivada segunda por diferentes esquemas de diferenciação.

Tabela 2.4: Eficiência de resolução $e_2(\varepsilon)$ na aproximação da derivada segunda pelos esquemas: (a) explícito de segunda ordem, (b) explícito de sexta ordem, (c) compacto de quarta ordem e (d) compacto de sexta ordem.

Esquema	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,001$
(a)	0,35	0,11	0,03
(b)	0,70	0,44	0,29
(c)	0,68	0,39	0,22
(d)	0,80	0,55	0,38

2.4.5 Aplicação de filtragem espacial

A filtragem espacial é aplicada nas simulações com o propósito de separar as grandes das pequenas escalas de comprimento. Tal separação permite eliminar as escalas inferiores a largura característica do filtro. A filtragem espacial é realizada a cada sub-passo de tempo nos termos não-linear e forçante (sem o termo de pressão): $-\omega \times \mathbf{u} + \mathbf{f}$, usando o filtro compacto para todos os nós da malha, exceto para os nós situados nos contornos do domínio computacional, dado pela resolução

do seguinte sistema de equações:

$$\alpha \widehat{f}_{i-1} + \widehat{f}_i + \alpha \widehat{f}_{i+1} = a f_i + \frac{b}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + \frac{c}{2}(f_{i+2} + f_{i-2}), \quad (2.33)$$

onde \widehat{f}_i representa o valor filtrado da função no nó x_i .

Segundo Lele [14], os coeficientes do filtro devem ser escolhidos de modo a preservar sexta ordem de precisão global na discretização espacial, afetando apenas as menores escalas do escoamento. Neste trabalho, emprega-se $\alpha = 0,45$, considerando que os valores de α próximos de 0,5 fazem com que o efeito de filtragem fique restrito as menores escalas de comprimento. Para esquemas tridiagonais compactos tem-se:

$$a = \frac{2 + 3\alpha}{4}, \quad b = \frac{6 + 7\alpha}{8} \quad e \quad c = \frac{6 + \alpha}{20}. \quad (2.34)$$

Na direção não-periódica dos esquemas descentrados, conforme as equações (2.17) e (2.18), nos contornos de entrada e de saída do domínio, impõe-se o filtro compacto da equação (2.35) sobre os primeiros e os últimos nós da malha, o qual fornece quarta ordem de precisão global na discretização espacial.

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1 &= \frac{15}{16} f_1 + \frac{1}{16} (4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - f_5) \\ \widehat{f}_2 &= \frac{3}{4} f_2 + \frac{1}{16} (f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \\ \widehat{f}_3 &= \frac{5}{8} f_2 + \frac{1}{16} (-f_1 + 4f_2 + 4f_4 - f_5). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Uma forma eficiente de otimizar os esquemas de filtragem pode ser obtida em termos da função de transferência associada à equação (2.33), como segue:

$$T(w) = \frac{a + b \cos(w) + c \cos(2w)}{1 + 2\alpha \cos(w)}, \quad (2.36)$$

onde w é o número de onda.

A figura 2.4 permite comparar o comportamento dos filtros compactos com relação ao dos filtros explícitos. Observa-se que os pequenos números de onda não são afetados pela filtragem, havendo um comportamento quase espectral similar ao dos esquemas compactos de derivação.

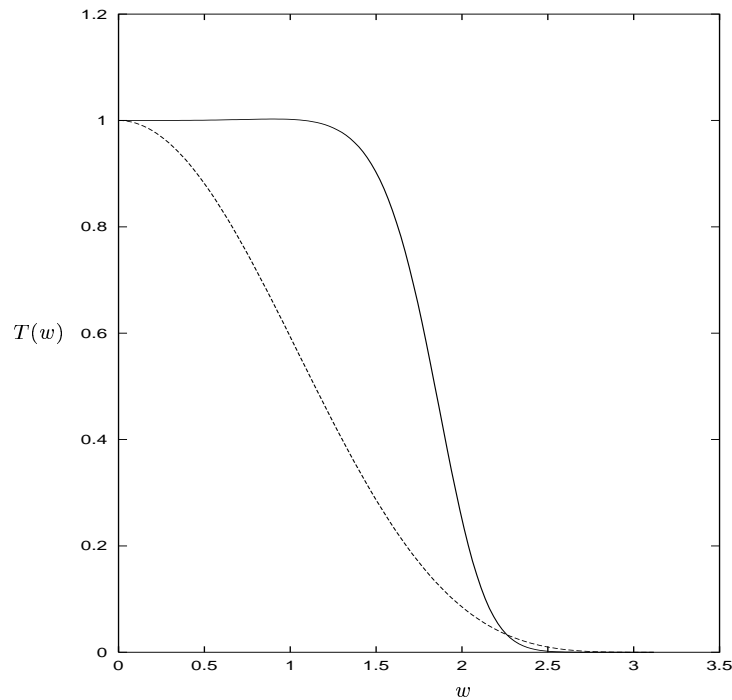


Figura 2.4: Função de transferência, $T(w)$, para filtros com sexta ordem de precisão: — filtro compacto; ... filtro explícito.

No próximo capítulo descreveremos o processo de modelagem de geometrias no interior do escoamento pelo método dos contornos virtuais [7], mostrando, segundo Von Terzi *et al.* [30], algumas alternativas de aplicação do termo forçante como: contorno sólido, corpo sólido, fluxo contrário (por reflexão) e diferenças de um único lado. Na seqüência, são descritas as técnicas de projeção dos contornos imersos denominadas: distribuição Gaussiana de Goldstein [7], interpolação bilinear de Saiki e Biringner [25], aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana.

3 MÉTODO DOS CONTORNOS VIRTUAIS

O fluido ao escoar sobre um corpo origina forças de pressão e cisalhamento na sua superfície e, em oposição ao escoamento, a superfície exerce no fluido forças de sinal contrário. Desta forma, por meio da aplicação de um conjunto adequado de forças em uma dada região do domínio, é possível modelar o escoamento do fluido como se ele estivesse passando sobre uma superfície sólida posicionada naquela região do escoamento. Assim, através da aplicação de um campo de forças externo, é possível impor certas condições de contorno sem a necessidade de especificar os valores dos parâmetros de contorno.

3.1 Termo forçante de Goldstein

A introdução do termo forçante $\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, t)$ na equação da quantidade do movimento, equação (2.1), permite a aplicação do campo de forças diretamente sobre a superfície do corpo. Desta forma, obtém-se um campo de forças através do efeito de realimentação da informação do campo de velocidades do escoamento do fluido. O simples efeito de realimentação da velocidade pode ser pensado como se o próprio campo de forças fosse capaz de aprender a simular a condição de contorno desejada. O termo forçante é calculado na forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, t) = \alpha \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t') dt' + \beta \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t), \quad (3.1)$$

onde t é o tempo e \mathbf{x}_s a coordenada de cada ponto da superfície do corpo.

Na equação (3.1) α e β são constantes livres negativas com dimensões $1/T^2$ e $1/T$, respectivamente. α determina a frequência de oscilação de realimentação do campo de velocidades e β o amortecimento. Estas constantes permitem ajustar o campo de forças de acordo com as frequências presentes no escoamento nas proximidades da superfície do corpo. Para escoamentos não-estacionários α deve ser suficientemente grande, de modo que a frequência natural resultante seja maior do

que as frequências mais elevadas presentes no escoamento. Isto faz com que o campo de forças possa suportar mudanças no escoamento próximo à superfície do corpo.

O método pelo qual é avaliada a integral no tempo, na equação (3.1), é que irá determinar o máximo valor de α . Diminuir α e aumentar β torna a solução numérica mais robusta e grandes passos de tempo são possíveis, contudo, o tempo de resposta do ciclo de controle é aumentado [30]. Conseqüentemente, a resposta temporal do ciclo de controle deve concordar com as menores escalas de tempo presentes no escoamento. Este fato pode introduzir alguma rigidez numérica¹ nas equações governantes [3], especialmente para $\beta = 0$. Isto implica que, para escoamentos não-estacionários, o tamanho do passo de tempo pode ser reduzido para valores pequenos, tornando a aplicação do método muito cara em termos computacionais.

Um argumento intuitivo para melhor compreender a ação do termo forçante é dado a seguir. Nas equações de Navier-Stokes (2.1), retendo-se somente o primeiro termo do lado esquerdo e o último termo do lado direito, obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \mathbf{f} = \alpha \int_0^t \mathbf{u} dt' + \beta \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) representa um oscilador harmônico simples com frequência

$$-\beta/(2\sqrt{|\alpha|}). \quad (3.3)$$

Isto implica que quando a velocidade \mathbf{u} se torna diferente de zero, o termo forçante \mathbf{f} traz \mathbf{u} de volta para zero na superfície do corpo.

Nas simulações numéricas realizadas, na equação (3.1) a integral no tempo é aproximada por uma soma de Riemann

$$\int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t') dt' \approx \sum_{j=1}^N \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t) \Delta t, \quad (3.4)$$

onde N é o número de passos de tempo e Δt é o tamanho deste passo de tempo.

O limite de estabilidade do passo tempo, Δt , deve satisfazer as seguintes condições:

¹Efeito conhecido por Stiffness, em que as equações requerem passos de tempo muito pequenos na integração temporal.

- Para o esquema de Runge-Kutta:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{3} \Delta}{1.989 u_\infty}, \quad (3.5)$$

sendo u_∞ a velocidade na corrente livre e Δ o espaçamento da malha.

- Para o método dos contornos virtuais:

$$\Delta t < \sqrt{3} \left(\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha k}}{\alpha} \right), \quad (3.6)$$

onde k é uma constante de ordem um, dependente do problema.

3.2 Tratamento do corpo imerso no escoamento

No tratamento do corpo imerso no escoamento é fundamental garantir que o campo do escoamento externo seja totalmente independente da condição adotada no interior do corpo. O método dos contornos virtuais, segundo von Terzi [30], fornece várias alternativas de aplicação do termo forçante para gerar um corpo imerso no interior do escoamento: contorno sólido, corpo sólido, fluxo contrário (por reflexão) e diferenças de um único lado. Estas técnicas estão representadas na figura 3.1, acompanhadas de uma descrição detalhada dada a seguir.

a) Contorno sólido

Peskin [21, 22] e Goldstein *et al.* [6] impuseram o termo forçante somente nos pontos que definem o contorno imerso. Deste modo, no interior do corpo não é imposta qualquer condição de contorno, permitindo o movimento do fluido no interior do corpo. No trabalho realizado por Peskin [21], este comportamento é desejável, visto que seus cálculos estão relacionados ao escoamento do sangue no interior do coração e o campo de escoamento externo é ignorado. Neste caso, a técnica de projeção deve ser aplicada somente no contorno imerso, não havendo qualquer correção no interior do corpo. Contudo, ao calcular o gradiente de velocidade na direção normal à parede pelo método das diferenças finitas, o uso de um ponto do interior do contorno causa uma previsão errônea da derivada.

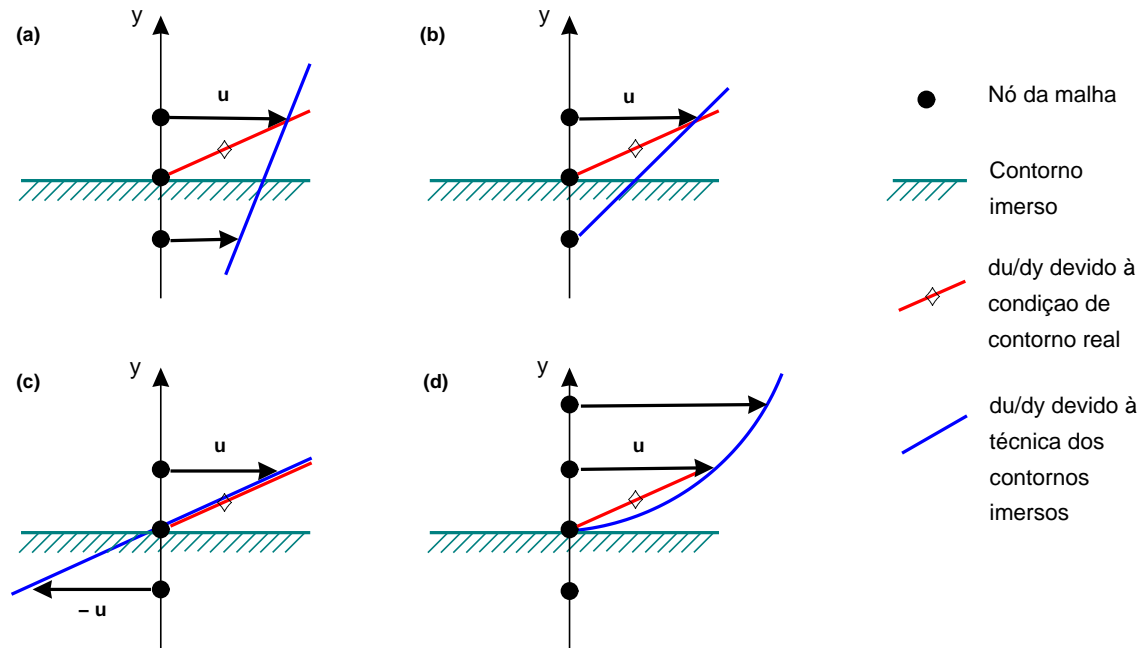


Figura 3.1: Tratamento do corpo imerso no escoamento: (a) Contorno sólido, (b) corpo sólido, (c) fluxo contrário (por reflexão) e (d) diferenças de um único lado.

b) Corpo sólido

Goldstein *et al.* [6] investigaram o efeito de corpos sólidos colocados no interior do campo do escoamento, os quais fisicamente não permitem escoamento interno. Este comportamento foi obtido pela imposição do termo forçante tanto nos pontos do contorno imerso quanto nos pontos do interior do corpo. O gradiente de velocidade na direção normal à parede é determinado erroneamente e a melhoria dos dados, nas proximidades do contorno, é muito fortuita. Além disso, este método pode se tornar computacionalmente caro para grandes geometrias imersas; embora, sempre possa ser diretamente implementado.

c) Fluxo contrário

Mohd-Yosof [17] propôs a aplicação de fluxo contrário, pela reflexão da velocidade do lado externo da parede para seu interior, por meio da inversão do sinal da velocidade. Essa técnica mantém segunda ordem de precisão formal e permite

avaliar a proposição da série de Taylor da inexistência de salto da derivada. Contudo, este método força implicitamente a derivada segunda para zero, o que pode distorcer a solução para escoamentos viscosos com elevado gradiente de pressão. Além disso, este método pode se tornar ambíguo para cantos convexos, causando problemas numéricos.

d) Diferenças de um único lado

Esta técnica está relacionada ao método proposto por LeVeque e Li [15]. Eles afirmam que os operadores de diferenças finitas aplicados ao contorno imerso violam a proposição da série de Taylor. Em vez de corrigir as diferenças finitas com condições de salto [15, 16, 31], o método recalcula a derivada usando os dados de somente um dos lados do contorno imerso. Teoricamente, para uma escolha adequada de diferenças de um único lado, esta aproximação pode, com a condição de salto, manter a ordem de precisão do esquema numérico no contorno imerso, analogamente ao tratamento dado aos contornos do domínio computacional.

3.3 Técnicas de Projeção dos contornos imersos

Na representação do contorno imerso no interior do escoamento são empregadas técnicas de projeção que, através de procedimentos de aproximação e interpolação, permitem transferir informações entre os pontos do contorno imerso e os nós adjacentes da malha. A transferência adequada de informações contorno/malha fornece as condições de contorno desejadas, permitindo representar o contorno imerso no interior do escoamento e resolver a grande variedade de escalas presentes no campo do escoamento nas adjacências do contorno imerso. Neste trabalho, as técnicas de distribuição Gaussiana de Goldstein *et al.* [7] e de interpolação bilinear de Saiki e Biringen [25] servirão como modelos de referência para o desenvolvimento de duas técnicas alternativas: aproximação Gaussiana espectral e redistribuição Gaussiana.

3.3.1 Distribuição Gaussiana de Goldstein

A distribuição Gaussiana de Goldstein [7] é usada para gerar corpos sólidos no interior de escoamentos instáveis. Esta técnica permite suavizar o efeito do campo de forças nas proximidades do contorno imerso. Assim, é possível gerar uma superfície suave, em vez de uma superfície irregular, que poderia resultar da aplicação de todo o efeito forçante nos nós da malha nas adjacências do contorno imerso. A suavização do campo de forças tem o efeito de espalhar a influência do contorno imerso sobre os nós adjacentes da malha. Assim, a localização do contorno imerso é incerta até a distância radial de uma malha.

Conforme ilustra a figura 3.2, esta técnica permite representar um corpo sólido diretamente sobre uma malha Cartesiana uniforme.

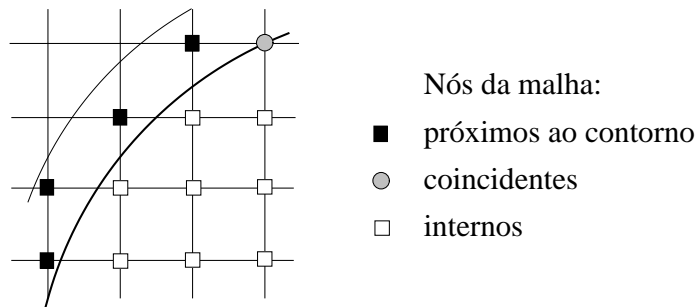


Figura 3.2: Corpo representado diretamente sobre a malha computacional. Localização dos nós da malha com relação ao contorno imerso.

A partir da distância radial $d(x)$ do contorno imerso à cada nó externo adjacente $\mathbf{x}(i, j)$, pode-se obter o coeficiente de distribuição Gaussiana

$$\varepsilon_s = e^{-\sigma d^2(x)}, \quad (3.7)$$

onde σ é uma constante usada para ajustar o efeito do espalhamento do campo de forças para as adjacências do contorno imerso.

O termo forçante é obtido pela aplicação direta do efeito de realimentação do campo de velocidades no escoamento. A fim de garantir as condições de

impermeabilidade e de não-deslizamento, deve-se impor $\varepsilon_s = 1$ nos nós situados no interior do corpo. De acordo com Goldstein *et al.* [7], os nós externos adjacentes ao contorno, situados a distância radial de uma malha, recebem 37% da força de realimentação aplicada sobre o contorno imerso, enquanto que os nós situados a duas malhas recebem apenas força 2%.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_s \left(\alpha \sum_{t=0}^{t_n} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \beta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.8)$$

onde n é o número de passos de tempo, $t_n = n\Delta t$ o tempo computacional e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ o campo de velocidades do fluido.

Esta técnica de projeção de contornos imersos foi empregada em simulações numéricas diretas de interações entre uma camada de mistura e a esteira ao redor do cilindro circular [27, 12].

3.3.2 Interpolação Bilinear

A técnica de interpolação bilinear [25] fornece a localização geométrica exata do contorno de modo independente da malha computacional, sem a necessidade de impor qualquer condição de contorno nos nós situados no interior do corpo. O contorno imerso é representado por N_b pontos uniformemente espaçados, de modo que cada ponto do contorno troca informações com quatro nós adjacentes da malha, conforme mostra a figura 3.3. Os quatro nós adjacentes: $\mathbf{x}(i, j)$, $\mathbf{x}(i + 1, j)$, $\mathbf{x}(i, j + 1)$ e $\mathbf{x}(i + 1, j + 1)$ têm índices inteiros e os pontos do contorno $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ tem índices reais, onde: $\{i \leq i_s \leq i + 1\}$, $\{j \leq j_s \leq j + 1\}$ e $s = 1, 2, \dots, N_b$. A quantidade de pontos N_b deve ser suficiente para permitir uma adequada transferência de informações (interpolação/extrapolação) entre o contorno e a malha.

O coeficiente de interpolação bilinear permite quantificar a transferência de informações entre um dado ponto do contorno imerso e os quatro nós adjacentes da malha. O produto dos coeficientes de interpolação linear, nas direções longitu-

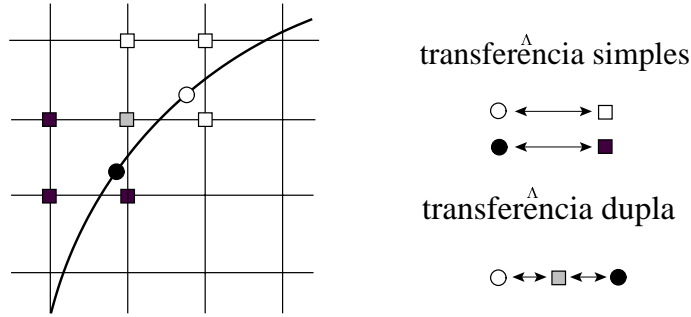


Figura 3.3: Transferência de informações (via interpolação/extrapolação) de cada ponto do contorno imerso para os quatro nós adjacentes da malha.

dinal e transversal da malha computacional, fornece o coeficiente de interpolação bilinear, conforme descrição feita a seguir:

- Coeficiente de interpolação linear na direção longitudinal:

$$d(i_s - i) = i_s - (i + 1) \quad \text{se } i < i_s \quad (3.9)$$

$$d(i_s - i) = i_s - (i - 1) \quad \text{se } i \geq i_s. \quad (3.10)$$

- Coeficiente de interpolação linear na direção transversal:

$$d(j_s - j) = j_s - (j + 1) \quad \text{se } j < j_s \quad (3.11)$$

$$d(j_s - j) = j_s - (j - 1) \quad \text{se } j \geq j_s. \quad (3.12)$$

- Coeficiente de interpolação bilinear:

$$d_{i,j}(\mathbf{x}_s) = d(i_s - i) d(j_s - j). \quad (3.13)$$

O campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t)$ no contorno imerso é obtido pela interpolação bilinear das velocidades do fluido $\mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t)$ de cada um dos quatro nós adjacentes da malha,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t) = \sum_{i,j}^{i+1,j+1} d_{i,j}(\mathbf{x}_s) \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t). \quad (3.14)$$

O método dos contornos virtuais de Goldstein *et al.* [7] permite obter o termo forçante de realimentação do campo de velocidades, $\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, t)$, em cada ponto $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ do contorno imerso,

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, t) = \alpha \sum_{t=0}^{t_n} \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t) \Delta t + \beta \mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t), \quad (3.15)$$

onde $t_n = n\Delta t$ e n é o número de passos de tempo.

A influência do campo de forças é transferida do contorno imerso para os nós adjacentes da malha, produzindo uma espessura efetiva do contorno imerso da ordem de uma célula da malha, isto é, $O(\Delta x, \Delta y)$. Deste forma, cada nó adjacente $\mathbf{x}(i, j)$ recebe informações de um certo número de pontos do contorno imerso. Considerando-se $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ um ponto do contorno imerso no intervalo de transferência de informações contorno/malha $[\mathbf{x}_{s_i}, \mathbf{x}_{s_f}]$, onde $1 \leq s_i \leq s \leq s_f \leq N_b$, obtém-se as parcelas de força $d_{i,j}(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, t)$, transferidas pelo campo de forças do contorno imerso para a malha. Conseqüentemente, a força $\mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t)$ transferida do intervalo de pontos do contorno $[s_i, s_f]$ para um dado nó adjacente $\mathbf{x}(i, j)$, corresponde à média aritmética das parcelas de força, conforme a expressão dada a seguir:

$$\mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t) = \frac{1}{N} \sum_{s=s_i}^{s_f} d_{i,j}(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, t), \quad (3.16)$$

onde $N = s_f - s_i + 1$.

3.3.3 Aproximação Gaussiana Espectral

A técnica de aproximação Gaussiana espectral [19] fornece a localização geométrica exata do contorno de modo independente da malha computacional, sem a necessidade de impor qualquer condição de contorno nos nós situados no interior do corpo. O contorno imerso é representado por N_b pontos uniformemente espaçados. A quantidade de pontos N_b deve ser suficiente para permitir uma adequada transferência de informações entre o contorno e a malha. Cada ponto do contorno troca informações com nove nós adjacentes da malha, conforme mostra a figura 3.4. Os nove nós adjacentes $\mathbf{x}(i+m, j+n)$ ($-1 \leq m, n \leq 1$) têm índices inteiros, enquanto

que os pontos do contorno $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ tem índices reais, onde: $\{i - 1 \leq i_s \leq i + 1\}$, $\{j - 1 \leq j_s \leq j + 1\}$ e $s = 1, 2, \dots, N_b$.

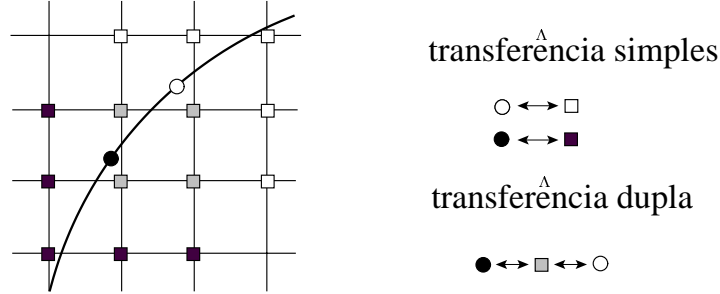


Figura 3.4: Transferência de informações (via aproximação Gaussiana espectral) de cada ponto do contorno imerso para os nove nós adjacentes da malha.

O coeficiente de aproximação Gaussiana permite quantificar a transferência de informações entre um dado ponto do contorno imerso e os nove nós adjacentes da malha.

Considerando o nó adjacente $\mathbf{x}(i, j)$ localizado a uma distância $d_{i,j}(\mathbf{x}_s)$ do ponto do contorno imerso $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$, obtém-se o coeficiente de aproximação Gaussiana

$$\varepsilon_{i,j}(\mathbf{x}_s) = e^{-\sigma d_{i,j}^2(\mathbf{x}_s)}, \quad (3.17)$$

onde σ é uma constante usada para ajustar a influência do campo de forças produzido no ponto $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ do contorno imerso e $d_{i,j}(\mathbf{x}_s)$ a distância entre $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ e o nó da malha $\mathbf{x}(i, j)$, obtida por:

$$d_{i,j}^2(\mathbf{x}_s) = (i - i_s)^2 + (j - j_s)^2. \quad (3.18)$$

O campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t)$ no contorno imerso corresponde à média aritmética ponderada das velocidades do fluido, $\mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t)$, na malha com-

putacional:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_s, t) = \frac{\sum_{i-1, j-1}^{i+1, j+1} \varepsilon_{i,j}(\mathbf{x}_s) \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t)}{\sum_{i-1, j-1}^{i+1, j+1} \varepsilon_{i,j}(\mathbf{x}_s)}, \quad (3.19)$$

tendo como fator de ponderação o coeficiente de aproximação Gaussiana, $\varepsilon_{i,j}(\mathbf{x}_s)$, de cada nó adjacente da malha.

O termo forçante de Goldstein [7], dado pela equação (3.1), é empregado para determinar a força de realimentação da velocidade $\mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t)$. Esta força é transferida para o nó $\mathbf{x}(i, j)$, de um conjunto de pontos do contorno imerso: $[\mathbf{x}_{s_i}, \mathbf{x}_{s_f}]$, que varia conforme a posição relativa contorno/malha.

$$\mathbf{f}_{i,j}(\mathbf{x}_s, t) = \sum_{s=s_i}^{s_f} \varepsilon_{i,j}(\mathbf{x}_s) \left(\alpha \sum_{t=0}^{t_n} \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \beta \mathbf{u}_{i,j}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (3.20)$$

onde $(1 \leq s_i \leq s \leq s_f \leq N_b)$ e n é o número de passos de tempo ($t_n = n\Delta t$).

3.3.4 Redistribuição Gaussiana

A redistribuição Gaussiana foi concebida com base em duas características fundamentais das técnicas de projeção dos contornos imersos:

- como na distribuição Gaussiana, a transferência de informações contorno/malha é feita com base na distância radial entre o contorno imerso e os nós adjacentes da malha;
- como na aproximação Gaussiana espectral e na interpolação bilinear, fornece a localização geométrica exata do contorno imerso, de modo independente da malha computacional, sem a necessidade de impor qualquer condição de contorno nos nós situados no interior do corpo.

A combinação destas características torna eficiente a transferência de informações entre o contorno e a malha. As informações são transferidas dos nós adjacentes da

malha para as suas respectivas posições radiais sobre o contorno imerso e, posteriormente, redistribuídas para os pontos do contorno imerso.

A técnica de redistribuição Gaussiana permite representar o contorno imerso usando N_b pontos uniformemente espaçados. Conforme mostra a figura 3.5, cada ponto do contorno necessita trocar informações com apenas cinco nós adjacentes da malha, denotados por $\mathbf{x}(i, j)$, $\mathbf{x}(i - 1, j)$, $\mathbf{x}(i + 1, j)$, $\mathbf{x}(i, j - 1)$ e $\mathbf{x}(i, j + 1)$ com índices inteiros, enquanto que os pontos do contorno imerso $\mathbf{x}_s(i_s, j_s)$ têm índices reais, onde: $\{i - 1 \leq i_s \leq i + 1\}$, $\{j - 1 \leq j_s \leq j + 1\}$ e $s = 1, 2, \dots, N_b$.

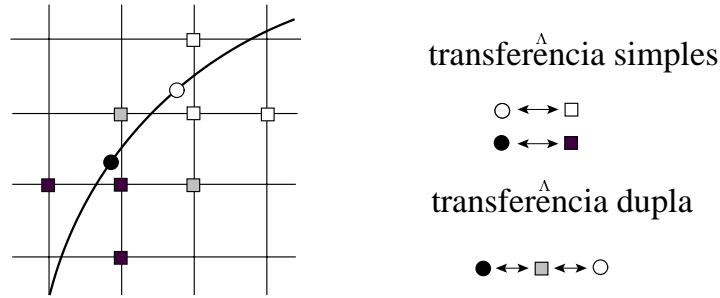


Figura 3.5: Transferência de informações (via redistribuição Gaussiana) de cada ponto do contorno imerso para os cinco nós adjacentes da malha.

O coeficiente de redistribuição Gaussiana é equivalente ao utilizado pela técnica de distribuição Gaussiana, dado pela equação (3.7), enquanto que o campo de velocidades e o termo forçante de realimentação da velocidade no contorno imerso são calculados pelas equações (3.19) e (3.20), utilizando os mesmos procedimentos de cálculo da técnica de aproximação Gaussiana espectral.

No capítulo 4 são fornecidos os resultados de simulações numéricas de escoamentos nos regimes laminar, laminar com desprendimento de vórtices, transição e turbulência ao redor do cilindro circular e do prisma quadrado, que permitem calibrar as técnicas de projeção desenvolvidas.

4 RESULTADOS

Os resultados qualitativos e quantitativos fornecidos neste capítulo, têm o propósito de indicar a eficiência das técnicas de projeção dos contornos imersos. Foram realizadas simulações numéricas de escoamentos em torno do cilindro circular e do prisma quadrado, para números de Reynolds no intervalo $40 \leq Re \leq 400$, nos domínios computacionais $24D \times 12D$, $16D \times 12D$ e $16D \times 8D$ utilizando malhas com espaçamento uniforme $\Delta = D/6, D/12, D/18, D/24, D/32$ e $D/48$. Os valores de $\alpha = -8000$ e $\beta = -8$, usados no cálculo do termo forçante, foram ajustados para que o campo de forças possa suportar as mudanças no escoamento próximo à superfície do corpo.

4.1 Escoamento na esteira do cilindro circular

A princípio, o escoamento ao redor do cilindro circular pode parecer bem simples, visto que, para baixos números de Reynolds, o escoamento é bidimensional e as condições de contorno são relativamente simples. Contudo, à medida que aumenta o número de Reynolds, o escoamento passa por sucessivas mudanças de regime. Desta forma, a complexidade aumenta, visto que o escoamento passa a ser determinado pela interação de três camadas cisalhantes: a camada limite, a camada de livre cisalhamento e a esteira; surgem efeitos sutis por causa das diferentes propriedades de estabilidade destas três camadas. Conseqüentemente, este escoamento aparentemente simples é muito rico em fenômenos físicos. Com este propósito estudaremos nas seções a seguir os regimes de escoamento ao redor do cilindro circular.

4.1.1 Regime laminar permanente

Conforme mostra a figura 4.1, para $Re = 40$, no regime laminar permanente a esteira desenvolve uma região constituída de dois bulbos de recirculação permanente, contendo vórtices contra-rotativos simetricamente posicionados.

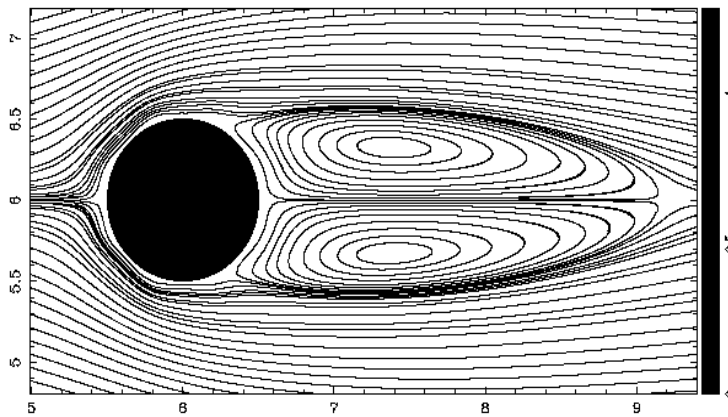


Figura 4.1: Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 40$, pela técnica de aproximação Gaussiana. Região de recirculação permanente na esteira, com a formação de vórtices simétricos contra-rotativos.

4.1.2 Regime laminar com desprendimento de vórtices

Com o aumento do número de Reynolds para 50 (fig. 4.2), crescem as tensões viscosas na esteira, aumentando o comprimento de formação dos bulbos de recirculação. Em decorrência da elevação das tensões viscosas surgem instabilidades na região de recirculação permanente, fazendo com que os bulbos comecem a oscilar fora de fase. O nível das oscilações cresce, levando a um incipiente desprendimento de vórtices na esteira [32]. De acordo com os resultados qualitativos mostrados nas figuras 4.1 e 4.2, verifica-se que o processo de desprendimento de vórtices na esteira, certamente, tem início para Reynolds entre 40 e 50. Tal número de Reynolds, que caracteriza a transição do regime laminar permanente para o regime laminar com desprendimento de vórtices, denomina-se número de Reynolds crítico, Re_{crit} . Estudos da transição, realizados por Williamson [32], fornecem $Re_{crit} = 47$.

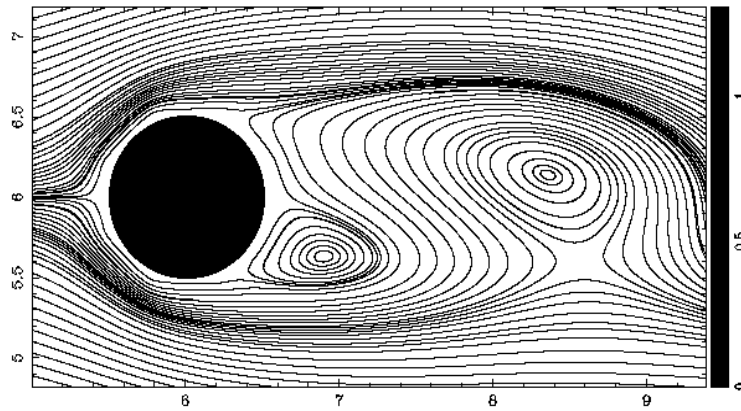


Figura 4.2: Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 50$, pela técnica de aproximação Gaussiana.

Desta forma, para $Re > Re_{crit}$, verifica-se que as oscilações se tornam periódicas em todo o campo do escoamento, conforme mostra a figura 4.3 para $Re = 100$.

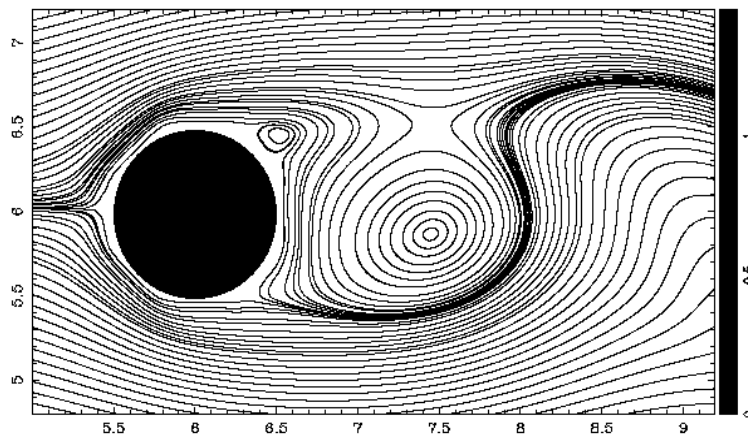


Figura 4.3: Linhas de corrente do escoamento ao redor do cilindro para $Re = 100$. Desprendimento alternado de vórtices das partes inferior e superior do cilindro.

4.1.3 Regimes de transição e turbulência

O número de Reynolds crítico, Re_{trans} , que caracteriza a passagem do regime laminar com desprendimento de vórtices para o regime de transição, tem

grande variação na literatura: $140 < Re_{trans} < 194$. Resultados mais precisos, obtidos recentemente, fornecem $Re_{trans} = 194$. Segundo Williamson [32], à medida que aumenta o número de Reynolds, surgem duas descontinuidades na formação da esteira. Estas descontinuidades caracterizam a transição para a turbulência, que se manifesta pela variação do número de Strouhal para o mesmo valor do número de Reynolds. Este fenômeno, por ser de natureza tridimensional, não será investigado neste trabalho.

Na figura 4.4 está representado o campo de vorticidade do escoamento na esteira do cilindro circular. Utiliza-se a técnica de redistribuição Gaussiana, para uma ampla faixa de números de Reynolds ($Re = 100, 200$ e 300), variando do regime laminar de desprendimento de vórtices ao regime de turbulência. As simulações numéricas são realizadas num domínio computacional $24D \times 12D$, utilizando o espaçamento de malha $\Delta = D/32$. Observa-se que os vórtices se desprendem alternadamente das partes superior e inferior do cilindro, com a formação de duas fileiras de vórtices desencontrados em toda essa faixa de número de Reynolds. Esta configuração do campo de vorticidade do escoamento é conhecida por *von Kármán vortex street*. À medida que aumenta o Reynolds ocorre o aumento da instabilidade do escoamento nas adjacências do contorno imerso, induzindo o crescimento no nível das oscilações do campo de vorticidade à montante (na frente) do cilindro.

4.1.4 Influência do escoamento no corpo imerso

Com o propósito de avaliar a eficiência das técnicas de projeção dos contornos imersos, será estudada a influência do campo do escoamento no contorno imerso. As técnicas de projeção devem evitar que as oscilações naturais produzidas no campo do escoamento possam causar oscilações muito intensas no contorno imerso, induzindo à formação de grandes recirculações no interior do corpo. No regime laminar permanente, veremos que os bulbos de recirculação na esteira não produzem oscilações no campo de velocidade do fluido no contorno imerso, mas são capazes de induzir à formação de pequenas recirculações no interior do corpo. Nos

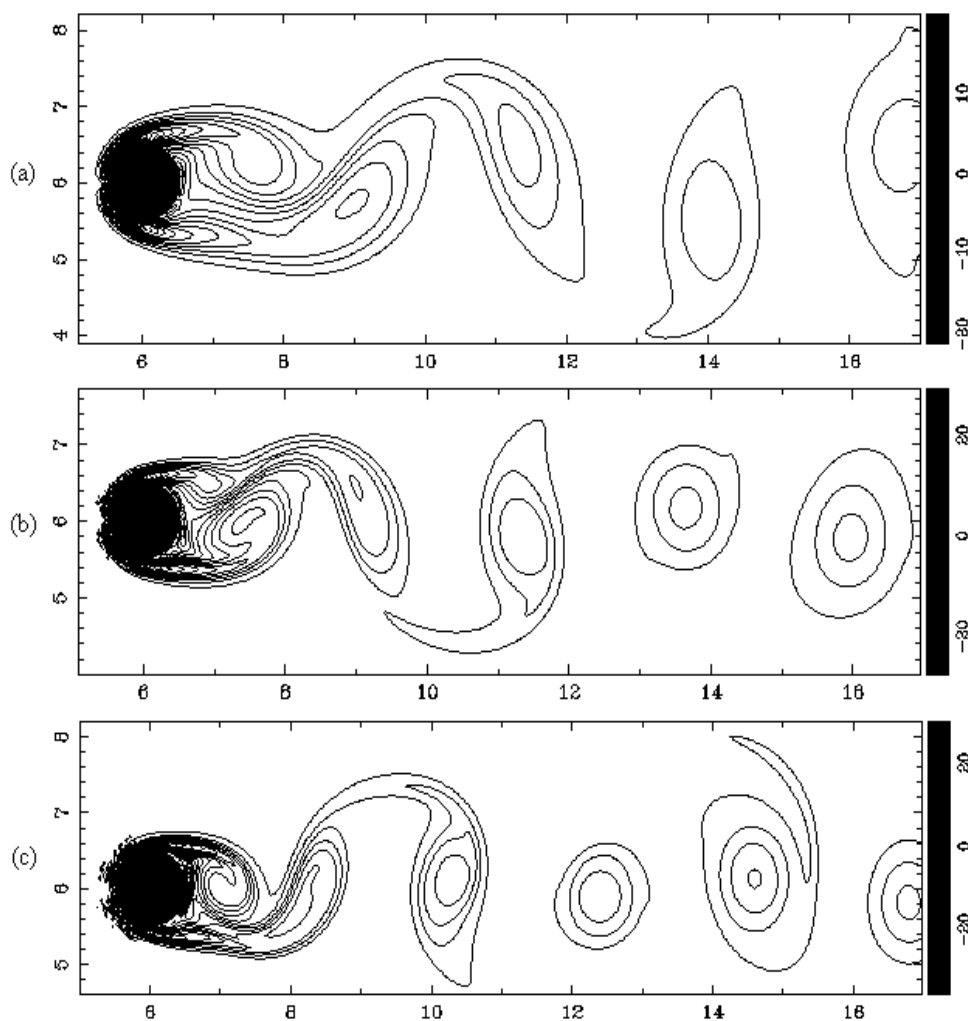


Figura 4.4: Campo de vorticidade na esteira do cilindro para Re : (a) 100, (b) 200 e (c) 300. Técnica de redistribuição Gaussiana. Malha com espaçamento $\Delta = D/32$ num domínio computacional $24D \times 12D$.

regimes com desprendimento de vórtices (laminar, transição e turbulência), veremos que as instabilidades geradas pelo processo de desprendimento de vórtices na esteira podem induzir à formação de recirculações consideráveis no interior do corpo.

4.1.4.1 *Transferência de informações entre o contorno imerso e a malha*

A seguir veremos que a transferência de informações entre o contorno imerso e a malha depende do espaçamento da malha, da técnica de projeção e do

número de pontos usados para representar o contorno imerso. A figura 4.5 fornece uma comparação da capacidade de transferência de informações contorno/malha, empregando as técnicas de projeção (aproximação Gaussiana e interpolação bilinear) na representação do cilindro circular, para diferentes espaçamentos de malha. Observa-se que a técnica de aproximação Gaussiana apresenta maior capacidade de

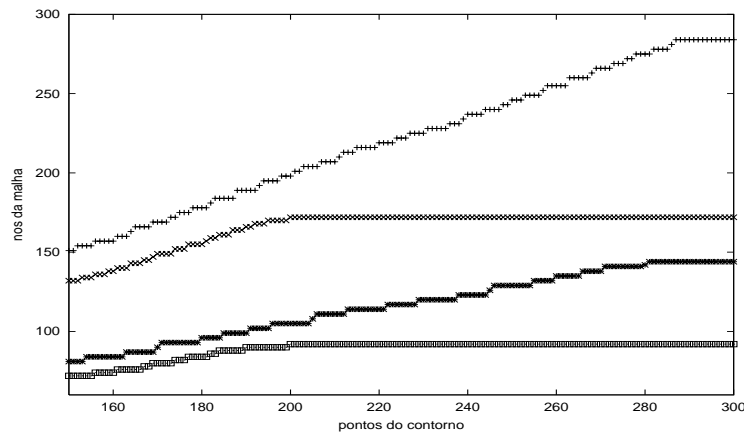


Figura 4.5: Transferência de informações entre o contorno imerso e a malha de diferentes resoluções, $n_x \times n_y$, pelas técnicas: Aproximação Gaussiana para (+) 577×289 ; (*) 289×145 . Interpolação bilinear para (x) 577×289 ; (□) 289×145 .

transferência informações, pois cada ponto do contorno transfere informações de nove nós adjacentes da malha. À medida que aumenta o número de pontos do contorno, observa-se o aumento da transferência de informações contorno/malha, permitindo relacionar o contorno imerso com maior número de nós adjacentes da malha. No entanto, a partir de certa quantidade de pontos do contorno N_b , verifica-se que não ocorre aumento de transferência de informações da malha para o contorno. Do ponto de vista geométrico, pode-se dizer que ocorre uma saturação da capacidade de transferência de informações entre o contorno imerso e a malha.

Para maximizar a transferência de informações entre o contorno e a malha é imprescindível definir a quantidade de pontos, N_b , necessários para representar o contorno imerso. Tal quantidade deve permitir a transferência de informações para a maior quantidade possível de nós adjacentes da malha, N_m . A tabela 4.1 fornece a relação $N_b \times N_m$, pelas técnicas de aproximação Gaussiana, interpolação bilinear e

redistribuição Gaussiana para malhas com resolução $n_x \times n_y$: 289×145 e 577×289 , no domínio computacional $16D \times 8D$. Com o refinamento da malha, a transferência de informações entre o contorno e a malha aumenta consideravelmente. Pela técnica de interpolação bilinear, mantendo fixo $N_b = 200$, observa-se que N_m passa de 92 para 172, enquanto que por aproximação Gaussiana, com um pequeno aumento de N_b , de 281 para 287, a transferência de informações é quase duplicada, N_m passa de 144 para 284. De modo similar, pela redistribuição Gaussiana, com um pequeno aumento de N_b de 230 para 236, a transferência de informações quase dobrou, com N_m passando de 105 para 208.

Tabela 4.1: Relação $N_b \times N_m$ para maximizar a transferência de informações entre o contorno e a malha. Técnicas de interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana. Malhas com resolução $n_x \times n_y$: 289×145 e 577×289 .

	$n_x \times n_y$			
	289×145		577×289	
Malha				
Técnica	N_b	N_m	N_b	N_m
Interpolação bilinear	200	92	200	172
Aproximação Gaussiana	281	144	287	284
Redistribuição Gaussiana	230	105	236	208

Desta forma, a malha impõe uma limitação geométrica na interpolação de informações do campo de velocidades do escoamento para o contorno imerso. Considera-se que o aumento no número de pontos do contorno imerso, a partir de certa quantidade N_b , não melhora a transferência de informações da malha para o contorno imerso e que a interpolação da velocidade para um dado ponto do contorno imerso é feita a partir da mesma quantidade de nós da malha. Por outro lado, aumentando o número de pontos do contorno, a partir de N_b , é possível melhorar a extrapolação das informações do contorno para a malha, pois no cálculo do campo de forças, em um dado nó adjacente da malha, dispõe-se de informações de maior número de pontos no contorno imerso.

A tabela 4.2 fornece uma comparação entre as técnicas de projeção dos contornos imersos com relação à necessidade de transferência de informações

entre o contorno imerso e os nós adjacentes da malha. Nos estudos numéricos de Saiki e Biringen [25], usando interpolação bilinear, foram empregados 1441 pontos para representar o contorno imerso, onde cada ponto troca informações com 4 nós adjacentes da malha. Portanto, foram efetuadas 5764 transferências de informações do contorno para a malha. Contudo, neste trabalho, a aplicação da mesma técnica de interpolação bilinear necessita de apenas 200 pontos para representar o contorno, reduzindo de 5764 para 800 transferências de informações. Por outro lado, a técnica de aproximação Gaussiana necessita de 600 pontos para representar o contorno imerso, sendo que cada ponto troca informações com 9 nós adjacentes da malha, totalizando 5400 transferências de informação.

Com o propósito de reduzir a transferência de informações entre o contorno e malha, foi desenvolvida a técnica de redistribuição Gaussiana. Esta técnica permite representar o contorno imerso, com resultados qualitativos e quantitativos similares a aproximação Gaussiana, utilizando apenas 300 pontos. Cada ponto do contorno troca informações com 5 nós adjacentes da malha. Assim, a redistribuição Gaussiana necessita de apenas 1500 transferências de informação contorno/malha.

Tabela 4.2: Transferência de informações dos N_b pontos do contorno para os nós adjacentes da malha, N_{adj} . Técnica de referência: Saiki e Biringen [25]. Técnicas implementadas: Interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana.

Técnica	N_b	N_{adj}	$N_b \times N_{adj}$
Saiki e Biringen [25]	1441	4	5764
Interpolação bilinear	200	4	800
Aproximação Gaussiana	600	9	5400
Redistribuição Gaussiana	300	5	1500

4.1.4.2 Movimento do fluido sobre o contorno imerso

Na investigação do movimento do fluido sobre o contorno imerso será avaliada a magnitude da velocidade, $\|\mathbf{u}_b\|$, definida pela seguinte expressão:

$$\|\mathbf{u}_b\| = \sqrt{u_b^2 + v_b^2}, \quad (4.1)$$

onde u_b e v_b representam, respectivamente, as componentes longitudinal e transversal do campo de velocidades do fluido em cada ponto do contorno imerso.

A técnica de aproximação Gaussiana foi aplicada num domínio computacional $24D \times 12D$, para os espaçamentos da malha: $\Delta = D/6$, $D/12$ e $D/24$, com a finalidade de investigar a evolução espacial de $\|\mathbf{u}_b\|$ em 300 pontos do contorno imerso, para $Re=100$, conforme mostra a figura 4.6. Convencionou-se, no cilindro circular, variação angular no sentido anti-horário, de 0° à 360° , a partir do ponto de estagnação. Para $\Delta = D/6$, observa-se a formação de picos de grande magnitude.

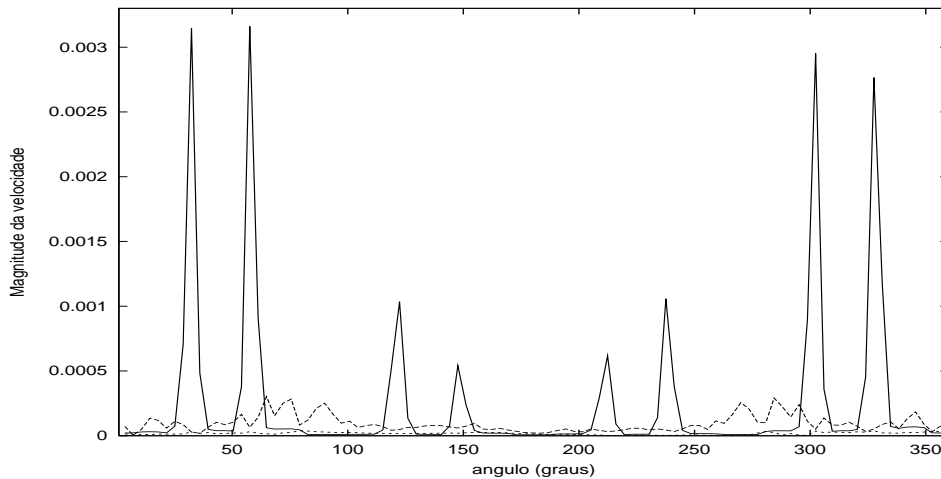


Figura 4.6: Magnitude da velocidade do fluido, $\|\mathbf{u}_b\|$, em 300 pontos do contorno imerso, para $Re=100$. Domínio computacional: $24D \times 12D$. Espaçamentos da malha: ——— $\Delta = D/6$; - - - $\Delta = D/12$; $\Delta = D/24$.

Estes picos evidenciam a existência de movimentação do fluido em certas regiões do contorno imerso. Com o refinamento da malha para $\Delta = D/12$ os picos são quase que totalmente eliminados. Observa-se, para o espaçamento $\Delta = D/24$, que ocorre uma enorme redução na magnitude da velocidade, atingindo valores da ordem $O(10^{-5})$.

4.1.4.3 Oscilações induzidas pelo desprendimento de vórtices na esteira

A fim de avaliar as oscilações induzidas pelo desprendimento de vórtices na esteira, será utilizada a norma- l_2 da componente longitudinal da velocidade do fluido no contorno imerso, definida por:

$$\|u_b\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} (u_i)^2}, \quad (4.2)$$

onde u_i representa a componente longitudinal da velocidade do fluido num ponto i do contorno imerso ($i = 1, \dots, N_b$), sendo N_b o número de pontos empregados para representar o contorno imerso.

Na figura 4.7 estão representadas, para $Re = 40$ e 50 , as curvas de $\|u_b\|_2$. Estas curvas de evolução temporal foram obtidas pela aplicação da técnica de aproximação Gaussiana, usando $N_b=300$.

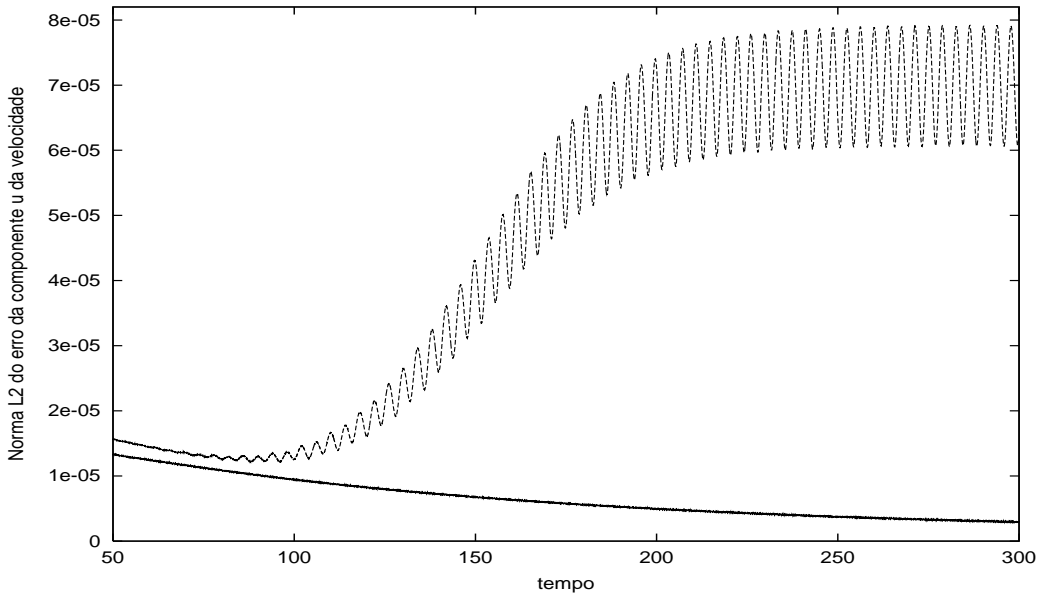


Figura 4.7: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$ em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana, empregando $N_b=300$ para: ——— $Re = 40$; - - - - - $Re = 50$.

O coeficiente de estreitamento da Gaussiana, $\sigma = 20$, permite restringir o espalhamento do campo de forças somente aos nós adjacentes da malha que se situam numa estreita faixa das proximidades do contorno imerso.

Observa-se, para $Re = 50$, que as oscilações aumentam a partir do tempo $t = 70$, tendendo a se estabilizar para $t \geq 250$. No entanto, para $Re = 40$, como não há desprendimento de vórtices na esteira, a curva de $\|u_b\|_2$ tende a se estabilizar sem oscilações após um longo tempo de simulação.

Mediante a aplicação da técnica de interpolação bilinear em 200 pontos do contorno imerso, para $Re = 40$ e 50 , obtém-se as curvas de $\|u_b\|_2$ representadas na figura 4.8. Para $Re = 50$, constata-se um aumento considerável do nível das

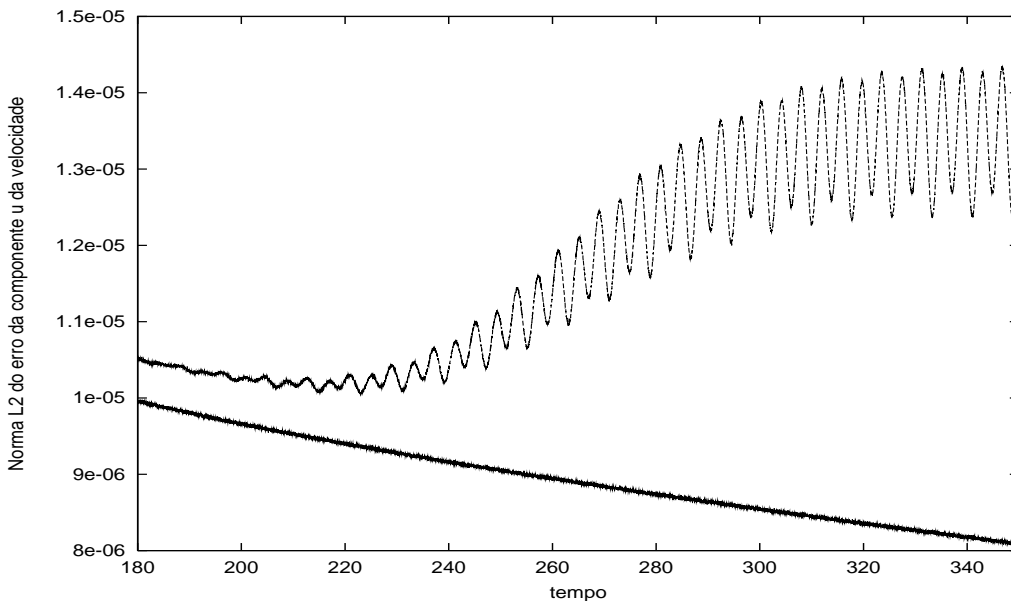


Figura 4.8: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$ em função do tempo, pela técnica de interpolação bilinear, empregando $N_b=200$ para: — $Re = 40$; - - - $Re = 50$.

oscilações a partir do tempo $t = 180$, tendendo a se estabilizar para $t \geq 330$. Por outro lado, para $Re = 40$, a curva de $\|u_b\|_2$ tende a se estabilizar sem oscilações após um longo tempo de simulação, pois não há desprendimento de vórtices na esteira. Estes resultados concordam plenamente com os obtidos anteriormente pela técnica de aproximação Gaussiana. Assim, pode-se concluir que as oscilações de $\|u_b\|_2$ no

contorno imerso são induzidas por instabilidades geradas no escoamento durante o processo de desprendimento de vórtices na esteira. Portanto, o desprendimento se torna periodicamente estacionário a partir do momento em que as oscilações $\|u_b\|_2$ se estabilizam.

Com a elevação do número de Reynolds, devido ao desprendimento de vórtices, aumentam as instabilidades na esteira. Como decorrência, há um aumento considerável no nível das oscilações de $\|u_b\|_2$ no contorno imerso. Uma forma de manter estas oscilações em níveis aceitáveis é aumentar a extrapolação do campo de força para a malha, através do aumento no número de pontos do contorno imerso. Assim, conforme mostra a figura 4.9 para $Re = 200$ e $\sigma = 20$, o aumento de N_b de 300 para 600 fornece uma redução considerável no nível das oscilações no contorno. Para $N_b = 600$, observa-se que a curva de evolução temporal de $\|u_b\|_2$ oscila entre valores muito próximos de zero para $t \geq 50$, com ordem de magnitude $O(10^{-5})$ e com amplitude muito pequena.

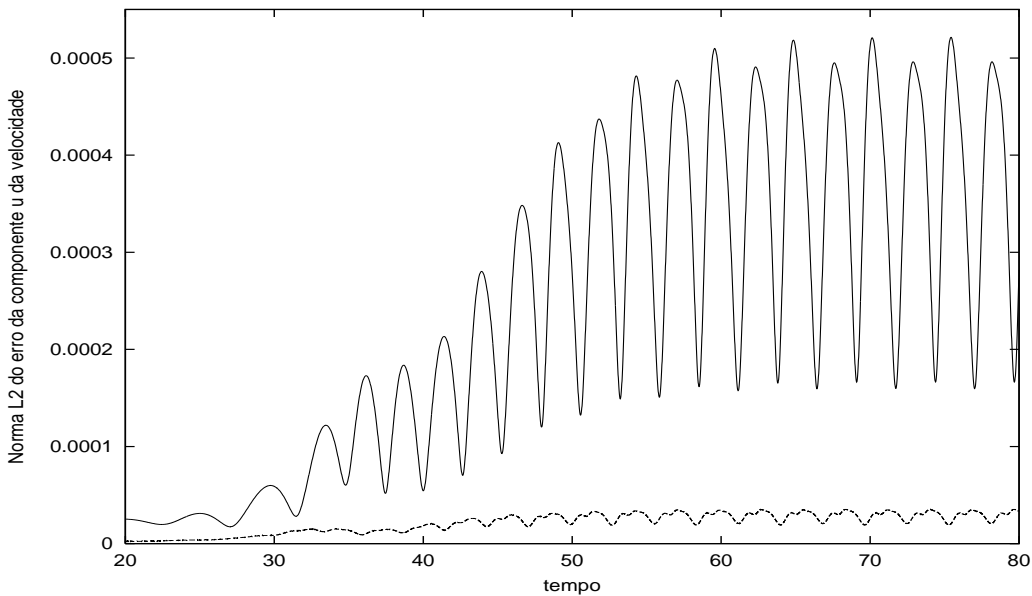


Figura 4.9: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$, em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana. $Re = 200$ para:
 ----- $N_b = 300$; ————— $N_b = 600$.

A análise do nível das oscilações de $\|u_b\|_2$, para uma ampla faixa de números de Reynolds ($Re = 100, 200, 300$ e 400), permite uma avaliação do nível de eficiência das técnicas de projeção dos contornos imersos.

A aplicação da aproximação Gaussiana, para $N_b = 600$ e $\sigma=20$, torna o escoamento completamente desenvolvido em toda essa faixa de números de Reynolds para $t \geq 70$. Conforme mostra a figura 4.10, à medida que o Reynolds aumenta ocorre uma pequena elevação no nível das oscilações de $\|u_b\|_2$; contudo, ainda se mantém a mesma ordem de magnitude $O(10^{-5})$.

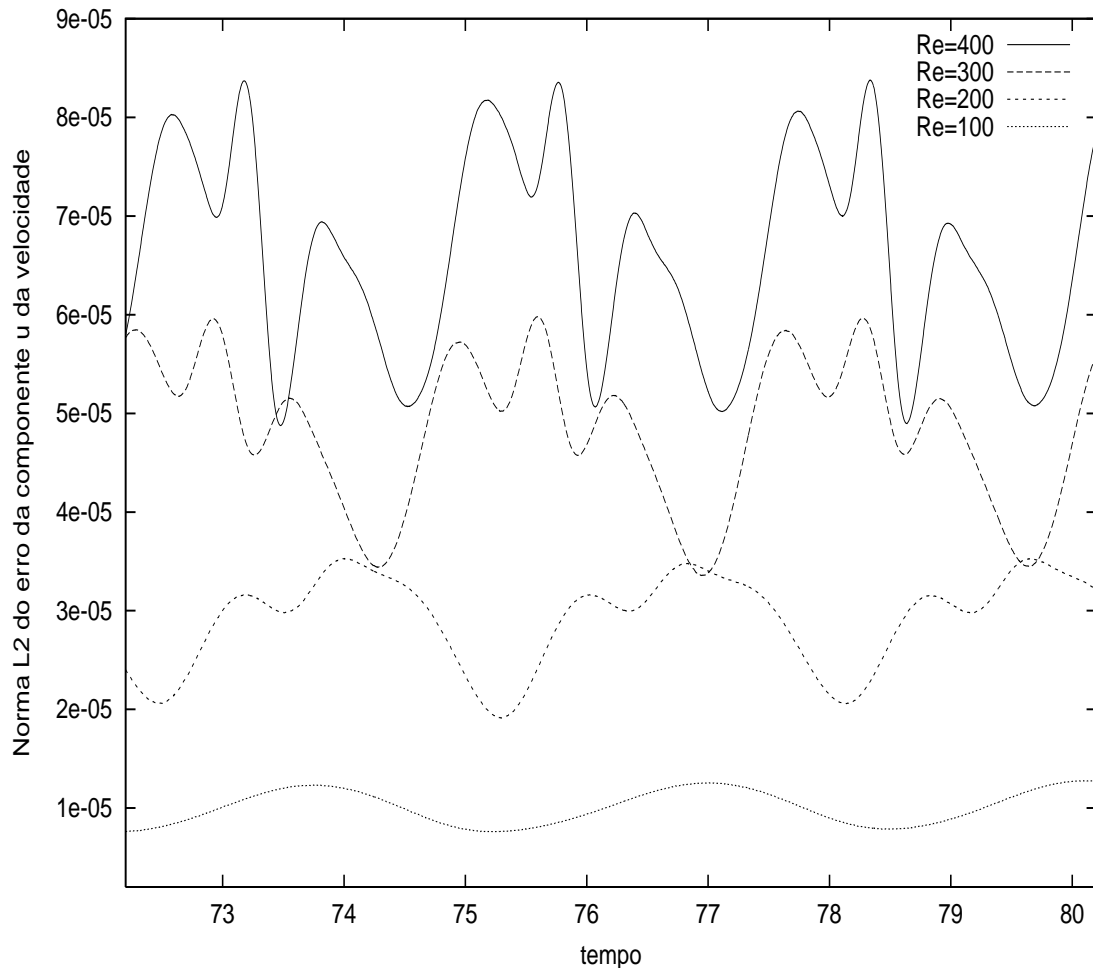


Figura 4.10: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$, em função do tempo, pela técnica de aproximação Gaussiana para $N_b = 600$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400 .

Pela aplicação da técnica de interpolação bilinear, para $N_b = 200$, conforme mostra a figura 4.11, o escoamento leva mais tempo para se tornar completamente desenvolvido do que por aproximação Gaussiana, ou seja $t \geq 105$, o que implica num custo computacional mais elevado. Verifica-se, também, que com o aumento do Re , de 100 para 400, ocorre um aumento considerável no nível de $\|u_b\|_2$, atingindo a ordem de magnitude de $O(10^{-4})$, bem superior a ordem de $O(10^{-5})$ obtida por aproximação Gaussiana.

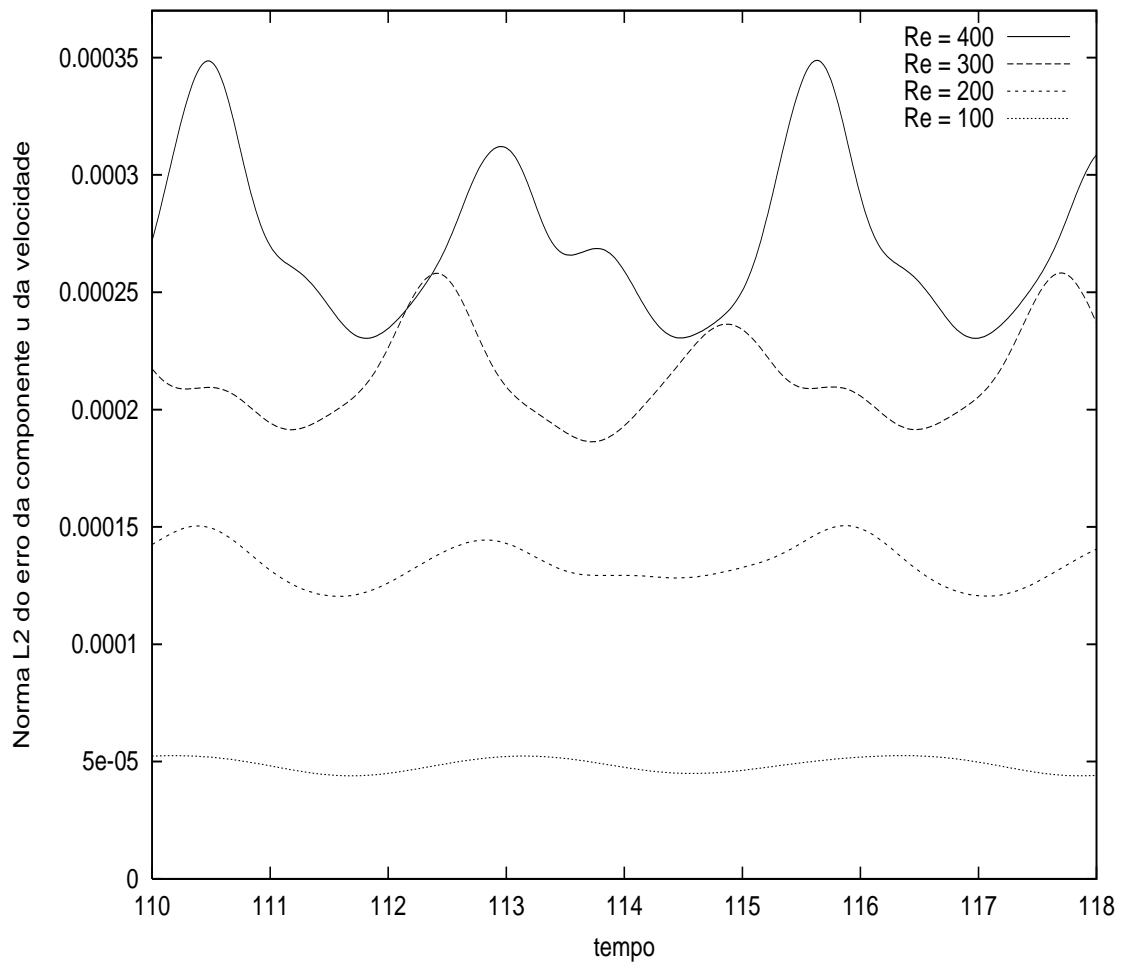


Figura 4.11: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$ em função do tempo. Técnica de interpolação bilinear para $N_b = 200$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400.

Conforme mostra a figura 4.12, a aplicação da técnica de redistribuição Gaussiana, para $N_b = 300$, permite que o escoamento se torne completamente desenvolvido para $t \geq 75$. Numa comparação entre as técnicas de projeção, observa-se que a redistribuição Gaussiana necessita de menor tempo computacional para tornar o escoamento desenvolvido do que a interpolação bilinear e mantém as oscilações de $\|u_b\|_2$ em níveis similares aos obtidos por aproximação Gaussiana, isto é, com ordem de magnitude de $O(10^{-5})$ em toda a faixa de número de Reynolds.

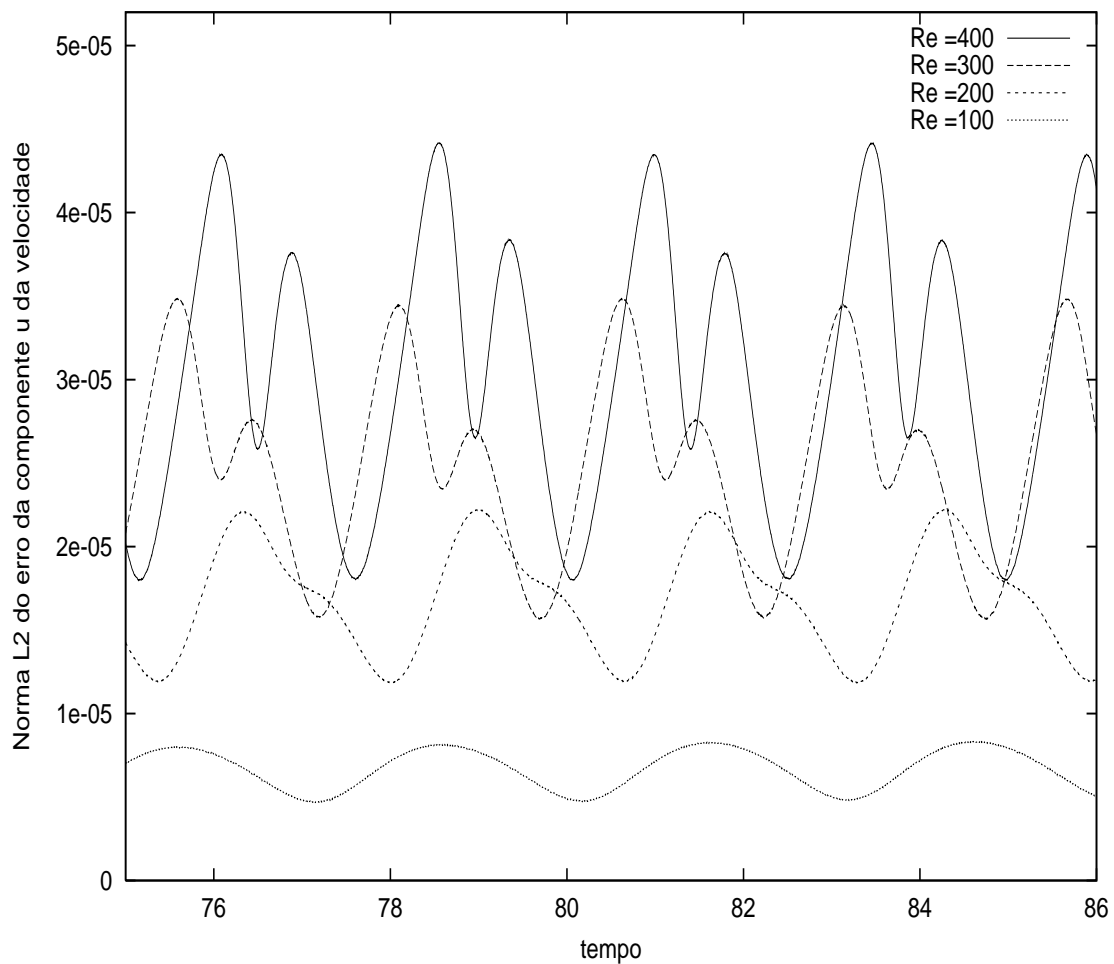


Figura 4.12: Norma- l_2 do erro da componente u da velocidade, $\|u_b\|_2$ em função do tempo. Técnica de redistribuição Gaussiana para $N_b = 300$ e $Re = 100, 200, 300$ e 400 .

4.1.5 Perfis de velocidade

Na figura 4.13 estão representados, para $Re = 50$, os perfis transversais da componente u da velocidade, a partir do centro do cilindro ($x/D = 0, y/D = 0$) num domínio computacional $(24D, 12D)$ para $\Delta = D/18$. Estes perfis foram obtidos pela aplicação das técnicas de projecção dos contornos imersos. Observa-se que a técnica de distribuição Gaussiana fornece $u \approx 0$ tanto no contorno imerso quanto no interior do cilindro, devido à aplicação do termo forçante de Goldstein *et al.*[7] nos pontos do contorno imerso e nos nós da malha situados no interior do cilindro. Enquanto isto, as técnicas de aproximação Gaussiana e interpolação bilinear permitem obter $u \approx 0$ apenas nos pontos do contorno imerso, pois o termo forçante somente é aplicado nesses pontos.

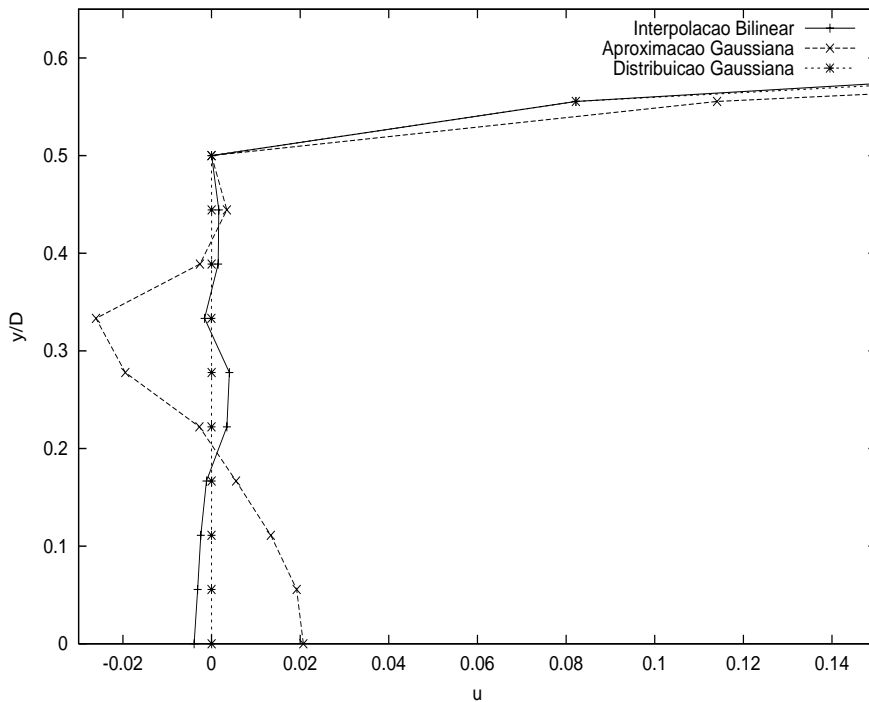


Figura 4.13: Perfis transversais da componente longitudinal da velocidade, u , a partir do centro do cilindro ($x/D = 0, y/D = 0$), para $Re = 50$. Técnicas de projecção dos contornos imersos: Interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e distribuição Gaussiana.

A técnica de redistribuição Gaussiana é empregada para representar os perfis transversais da componente u da velocidade, a partir do centro do cilindro ($x/D = 0$, $y/D = 0$) para $Re = 100$, 200 e 300 com diferentes espaçamentos de malha. Conforme mostra a figura 4.14, a técnica fornece $u \simeq 0$ no ponto do contorno ($x/D = 0$, $y/D = 0,5$) para espaçamentos de malha $\Delta = D/18$ e $D/32$, verificando-se a condição de contorno de não-deslizamento. Contudo, à medida que aumenta o número de Reynolds, ocorre um aumento da velocidade no interior do cilindro. Observa-se, com o refinamento da malha de $\Delta = D/18$ para $\Delta = D/32$, que é possível reduzir consideravelmente a velocidade no interior do cilindro.

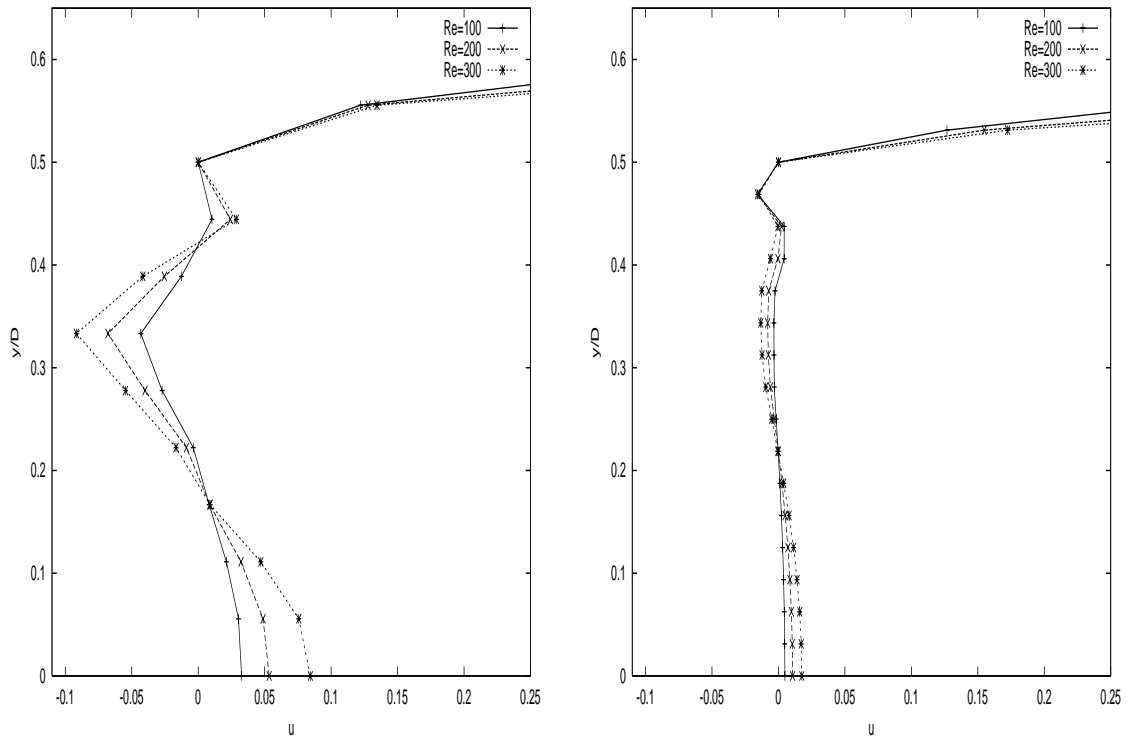


Figura 4.14: Perfis transversais da componente longitudinal da velocidade, u , a partir do centro do cilindro ($x/D = 0$, $y/D = 0$) para $Re = 100$, 200 e 300, pela técnica de redistribuição Gaussiana. Espaçamentos uniformes da malha: $\Delta = D/18$ (à esquerda) e $\Delta = D/32$ (à direita).

4.1.6 Avaliação da resposta temporal do termo forçante

Com o propósito de avaliar a resposta temporal do termo forçante, dado pela equação (3.1), para diferentes combinações dos parâmetros α/β : $\alpha = -400, \beta = -15$; $\alpha = -4000, \beta = -150$; $\alpha = -40000, \beta = -1500$, foi realizada uma simulação numérica do escoamento em torno do cilindro circular, utilizando uma malha com espaçamento $\Delta = D/6$. A escolha do ponto do contorno imerso ($x/D = 0, y/D = 0.5$), cuja localização coincide com a malha computacional, permite forçar diretamente (e localmente) sobre a malha a condição de contorno de não-deslizamento, sem a necessidade de aplicar qualquer técnica de projeção. Isso permite avaliar a resposta temporal do termo forçante sem erros implícitos inerentes às técnicas projeção.

Observa-se, na figura 4.15, que a taxa de amortecimento da resposta temporal da velocidade é mais elevada para $\alpha = -40000$ e $\beta = -1500$, num tempo computacional um pouco menor do que 1, o que implica numa maior dissipação viscosa das perturbações no escoamento próximo à superfície [7]. Verifica-se, com a

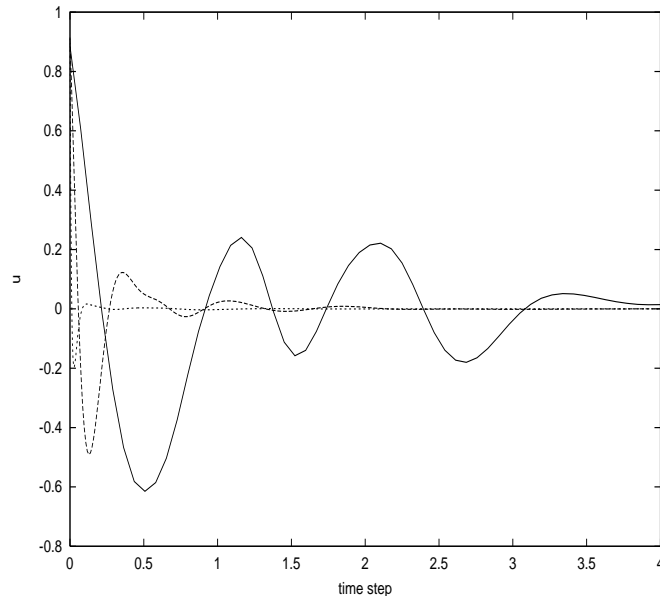


Figura 4.15: Amortecimento das oscilações da componente u da velocidade no contorno ($x/D = 0, y/D = 0.5$). $\alpha = -400, \beta = -15$ ----- ; $\alpha = -4000, \beta = -150$ - · - · - ; $\alpha = -40000, \beta = -1500$

aplicação de valores mais elevados para α e β , que a condição de contorno de não-deslizamento é rapidamente atingida. Este teste sugere que os valores mais elevados dos coeficientes permitem responder mais rápido a qualquer instabilidade no campo do escoamento nas proximidades do contorno imerso e agir com maior eficiência, reforçando as condições de não-deslizamento.

4.1.7 Número de Strouhal

A tabela 4.3 fornece os valores do número de Strouhal em função do Reynolds, para uma ampla faixa de números de Reynolds, num domínio computacional $(24D, 12D)$ para $\Delta = D/18$. É possível constatar que os resultados obtidos pelas técnicas de projeção dos contornos imersos (distribuição Gaussiana de Goldstein [7], interpolação bilinear, aproximação Gaussiana e redistribuição Gaussiana) apresentam boa concordância com os estudos numéricos realizados por Saiki e Biringen [25] e Persillon e Braza [20] e com o estudo experimental de Roshko [24], em toda a faixa de números de Reynolds.

Tabela 4.3: Relação $St \times Re$. Comparação de resultados. Técnicas implementadas: 1. distribuição Gaussiana, 2. interpolação bilinear, 3. aproximação Gaussiana e 4. redistribuição Gaussiana. Estudos de Referência: 5. Saiki e Biringen (numérico), 6. Roshko (experimental) e 7. Persillon e Braza (numérico).

Re	Técnicas implementadas				Estudos de Referência		
	1	2	3	4	5	6	7
50	0,131	0,129	0,132	0,132	0,139	0,122	-
65	0,144	0,142	0,149	0,146	0,152	0,143	-
100	0,163	0,162	0,165	0,166	0,171	0,167	0,165
200	0,186	0,182	0,190	0,189	0,197	-	0,198
300	0,195	0,189	0,201	0,198	-	-	0,209
400	0,201	0,194	0,212	0,204	0,220	0,205	-

Com o propósito de avaliar a influência do refinamento da malha, foram realizadas simulações para $\Delta = D/32$. Usando a técnica de redistribuição Gaussiana obteve-se para $Re = 100, 200$ e 300 , respectivamente, $St = 0,171, 0,199$ e $0,212$.

4.1.8 Coeficiente de arraste

O coeficiente de arraste médio é obtido considerando a perda de momento do fluido em todo o domínio computacional, definido por Goldstein *et al.*[7] na forma:

$$C_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{u}_\infty}{\mathbf{u}_i} \left(1 - \frac{\mathbf{u}_\infty}{\mathbf{u}_i} \right) dy, \quad (4.3)$$

onde \mathbf{u}_∞ e \mathbf{u}_i representam, respectivamente, as velocidades do fluido na corrente livre e numa seção transversal nas proximidade do contorno de saída, onde $i = 1, 2, \dots, n_x$.

A figura 4.16 fornece o coeficiente de arraste médio em função do número de Reynolds. Verifica-se uma boa concordância entre os resultados obtidos

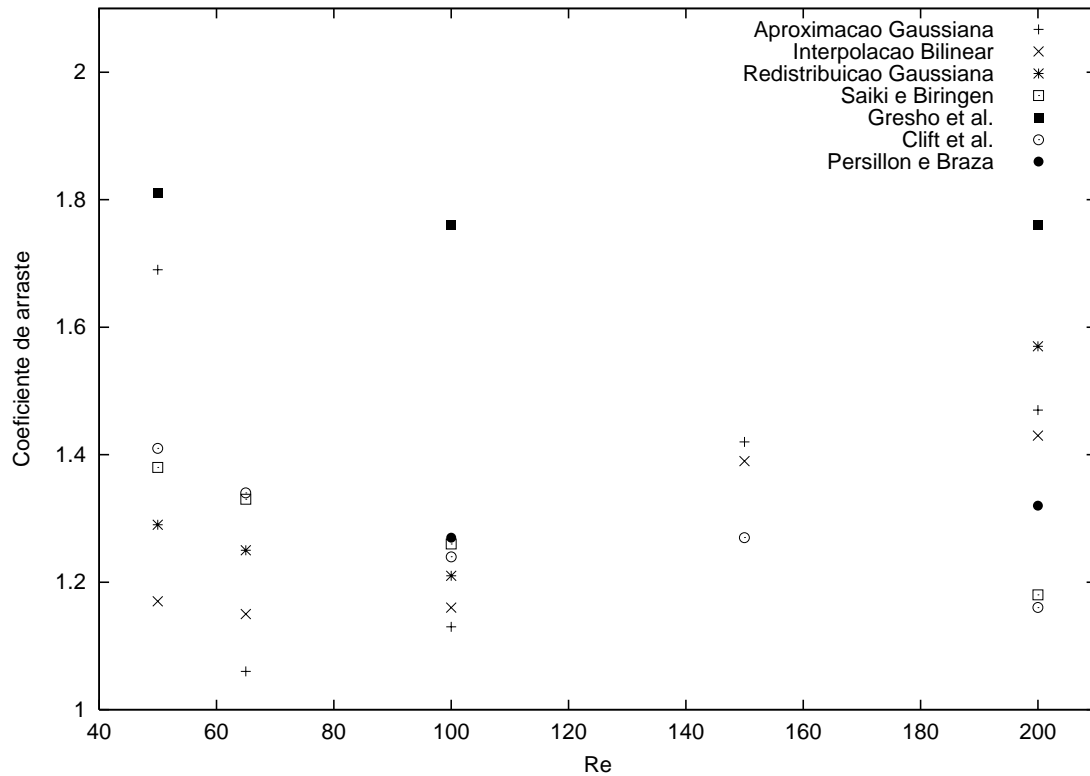


Figura 4.16: Coeficiente de arraste médio em função do número de Reynolds. Comparação das técnicas de aproximação Gaussiana, interpolação bilinear e redistribuição Gaussiana com os estudos numéricos (Saiki e Biringen[25], Gresho *et al.*[8] e Persillon e Braza [20]) e com o trabalho experimental (Clift *et al.*[2]).

pela aplicação das técnicas de projeção implementadas (aproximação Gaussiana, interpolação bilinear e redistribuição Gaussiana) e os estudos numéricos realizados por Saiki e Biringen[25], Gresho *et al.*[8] e Persillon e Braza [20] e o trabalho experimental de Clift *et al.*[2].

4.2 Escoamento na esteira do prisma quadrado

O prisma quadrado é representado pela aplicação das técnicas de aproximação Gaussiana espectral e redistribuição Gaussiana em 200 pontos uniformemente espaçados do contorno imerso. No cálculo do termo forçante, dado pela equação (3.1), utiliza-se o coeficiente de estreitamento da Gaussiana, $\sigma = 15$. Este valor permite restringir a região de influência do campo de forças e limitar seu espalhamento à uma estreita faixa da malha nas adjacências do contorno imerso. De modo que, os nós adjacentes situados a distância de uma malha do contorno imerso não recebem nenhuma força. Nas próximas seções estudaremos os regimes de escoamento ao redor do prisma quadrado.

4.2.1 Regime laminar permanente

No regime laminar permanente o escoamento é estável, ocorrendo a formação de dois bulbos de recirculação permanente na esteira. Estes bulbos são contra-rotativos e estão simetricamente posicionados em cada lado da esteira, com grande comprimento de formação. Conforme mostra a figura 4.17, os bulbos de recirculação desenvolvem vórtice estacionários, caracterizando o escoamento em regime laminar permanente para $Re = 50$. Observa-se que a separação do escoamento ocorre nos cantos do prisma quadrado localizados à jusante (atrás).

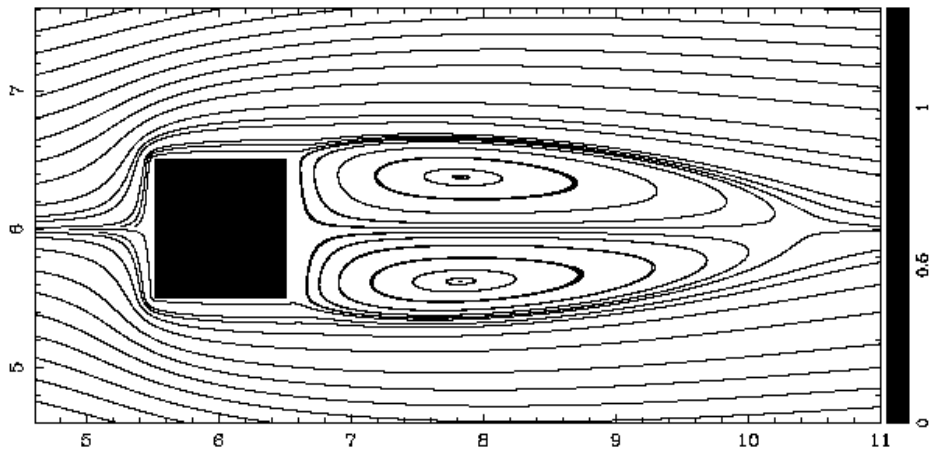


Figura 4.17: Linhas de corrente. Formação de bulbos contra-rotativos de recirculação na esteira do prisma quadrado para $Re = 50$.

4.2.2 Regime laminar com desprendimento de vórtices

Com o aumento do Reynolds para 55 ocorre um aumento da instabilidade do escoamento levando a um incipiente desprendimento de vórtices na esteira, conforme mostra a figura 4.18.

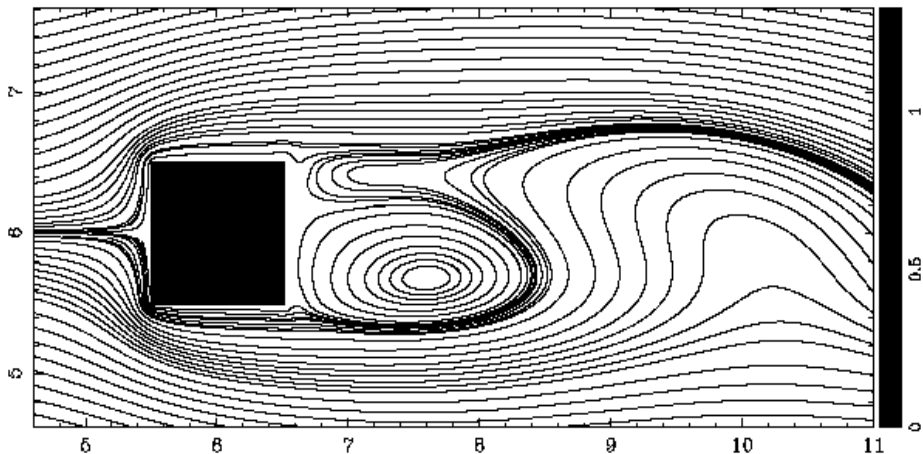


Figura 4.18: Linhas de corrente para $Re = 55$. Processo incipiente de desprendimento de vórtices na esteira do prisma quadrado.

Com base nos resultados qualitativos mostrados nas figuras 4.17 e 4.18, o número de Reynolds crítico, Re_{crit} , que caracteriza o início do processo de desprendimento de vórtices está situado no intervalo $50 \leq Re_{crit} \leq 55$. Portanto, os resultados fornecidos pela técnica de aproximação Gaussiana apresentam boa concordância com o estudo de análise de estabilidade numérica de Kelkar e Patankar [11], que fornece $Re_{crit} = 53$.

Conforme mostra a figura 4.19, para $Re = 100$, a separação do escoamento ocorre nos cantos do prisma quadrado localizados à montante. No escoamento

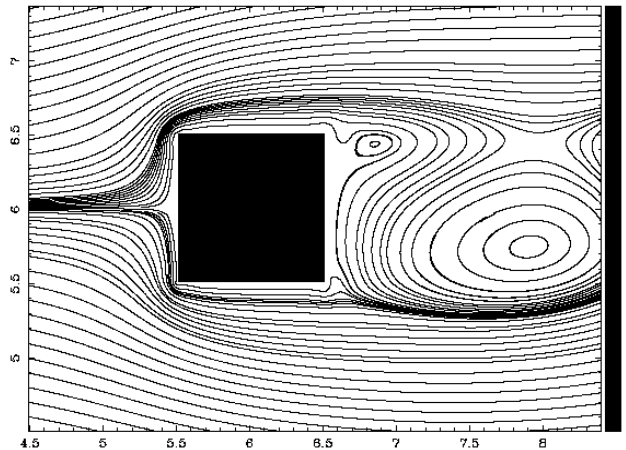


Figura 4.19: Linhas de corrente para $Re = 100$. Separação do escoamento nos cantos à jusante do prisma quadrado.

ao redor do prisma quadrado, os cantos constituem pontos de separação natural do escoamento. Segundo os estudos de Sohankar *et al.* [29], devido à viscosidade do fluido, para $Re \leq 125$, a contribuição da fricção para o arraste é positiva, tornando-se negativa acima deste valor, o que causa o deslocamento do ponto de separação do escoamento dos cantos localizados à jusante (atrás) para os cantos à montante (na frente).

Com o aumento do número de Reynolds para 125 é possível observar, na figura 4.20, que aumentam as forças de desprendimento de vórtices e surge uma pequena região de recirculação nas proximidades da face inferior do prisma quadrado.

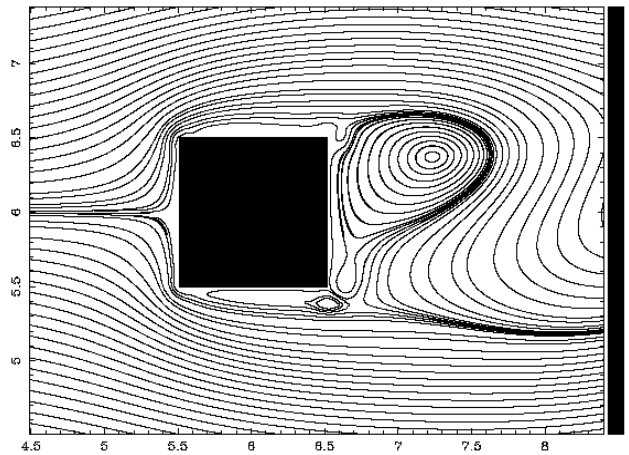


Figura 4.20: Linhas de corrente para $Re = 125$. Formação de região de recirculação nas proximidades da face inferior do prisma quadrado.

Para valores mais elevados do número de Reynolds, esta região de recirculação aumenta gradualmente nas proximidades das faces superior e inferior do prisma quadrado.

Na figura 4.21 são mostrados, a partir da face superior do prisma quadrado, os perfis transversais da componente u da velocidade para $Re = 50, 100, 125$ e 200. A descontinuidade dos perfis, deve-se à discretização da velocidade a partir

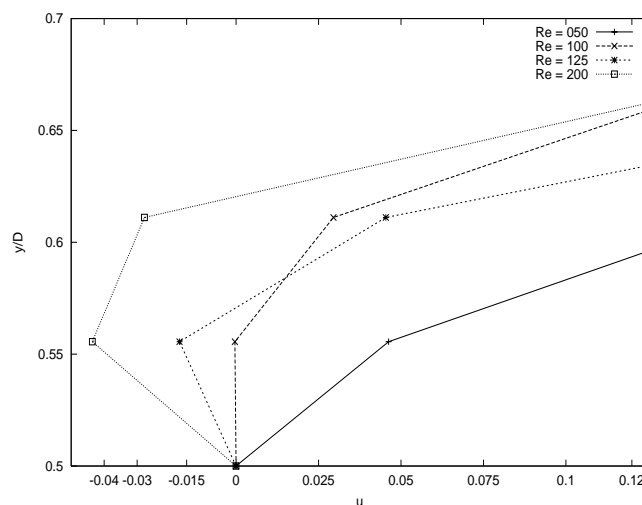


Figura 4.21: Perfis transversais da componente u da velocidade, a partir da face superior do prisma quadrado ($x/D=0$, $y/D=0,5$). $Re = 50, 100, 125$ e 200.

dos nós da malha. Observa-se, para $Re \leq 100$, que os perfis de velocidade tem valores positivos, enquanto que, para $Re > 100$, eles se tornam negativos nos nós adjacentes ao contorno. Desta forma, os perfis transversais de velocidade permitem identificar a formação de uma região de recirculação nas proximidades das faces do prisma quadrado, caracterizando o deslocamento do ponto de separação do escoamento, dos cantos localizados à jusante para os cantos à montante.

Encontra-se representado na figura 4.22 o campo de vorticidade do escoamento na esteira do prisma. Utiliza-se a técnica de redistribuição Gaussiana, para uma ampla faixa de números de Reynolds ($Re = 60, 100$ e 200), nos regimes de escoamento com desprendimento de vórtices. As simulações numéricas são realizadas num domínio computacional $24D \times 12D$, utilizando o espaçamento de malha $\Delta = D/32$. Observa-se que os vórtices se desprendem alternadamente das partes superior e inferior do cilindro, com a formação de duas fileiras de vórtices descontrados (*von Kármán vortex street*) em toda essa faixa de número de Reynolds. A medida que aumenta o Reynolds ocorre o aumento da instabilidade do escoamento nas adjacências do contorno imerso, induzindo o crescimento no nível das oscilações do campo de vorticidade nos cantos à montante (na frente) do prisma quadrado.

4.2.3 Número de Strouhal

A tabela 4.4 fornece a relação $St \times Re$. Verifica-se que os resultados fornecidos por aproximação Gaussiana, para o espaçamento da malha $\Delta = D/18$, apresentam boa concordância com os estudos numéricos realizados por Ahmad Sohankar *et al.* [29], para $Re \leq 125$. No entanto, para Reynolds mais elevados, os valores do Strouhal são menores do que os obtidos por Ahmad Sohankar. É possível evitar este problema, por meio do refinamento da malha para $\Delta = D/32$, obtendo $St = 0,150$ para Reynolds 200.

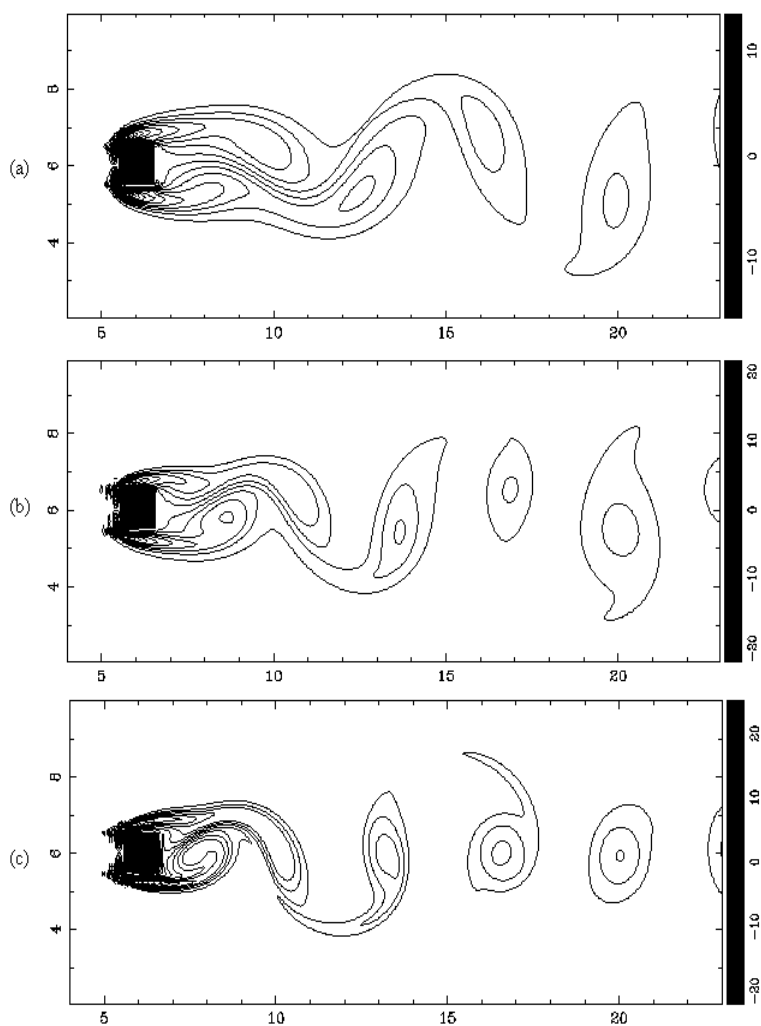


Figura 4.22: Campo de vorticidade na esteira do prisma quadrado para Re : (a) 60, (b) 100 e (c) 200. Técnica de redistribuição Gaussiana. Malha com espaçamento $\Delta = D/32$ num domínio computacional $24D \times 12D$.

4.2.4 Coeficiente de arraste

O coeficiente de arraste médio é obtido da mesma forma que no cilindro circular, isto é, considerando a perda de momento do fluido em todo o domínio computacional, definido por Goldstein *et al.*[7] na equação (4.3). A tabela 4.5 fornece o coeficiente de arraste médio em função do número de Reynolds. Os resultados obtidos por aproximação Gaussiana são comparados com os fornecidos pelos estudos

Tabela 4.4: Número de Reynolds (Re) \times Número de Strouhal (St), pelas técnicas:
1. Aproximação Gaussiana, 2. Ahmad Sohankar *et al.* [29].

Re	55	60	100	125	175	200
1	0,120	0,129	0,147	0,152	0,148	0,137
2	0,120	0,123	0,145	0,155	0,165	0,165

numéricos de Ahmad Sohankar *et al.* [29]. Contudo, verifica-se discrepância nos valores obtidos para Reynolds mais elevados, $Re \geq 200$.

Tabela 4.5: Número de Reynolds (Re) \times Coeficiente de arraste (C_D), pelas técnicas:
1. Aproximação Gaussiana. 2. Ahmad Sohankar *et al.* [29].

Re	50	55	60	100	125	130	200
1	1,443	1,442	1,079	1,236	1,481	1,524	2,203
2	1,605	1,600	1,573	1,444	1,416	-	1,424

4.3 Ordem de precisão das técnicas de projeção dos contornos imersos

Com o propósito de determinar a ordem de precisão das técnicas de projeção, foram efetuadas simulações usando quatro malhas diferentes: 97×49 , 193×97 , 385×197 e 769×385 . Considera-se a malha mais refinada (769×385) como solução "exata", a fim de calcular os erros das soluções obtidas nas outras malhas. Como um caso representativo dos parâmetros do escoamento, a norma l_2 do erro da componente u da velocidade foi calculada em todo o campo do escoamento. A figura 4.23 fornece uma comparação da ordem de precisão global obtida pelas técnicas de projeção. No cilindro circular, a aplicação da técnica de aproximação Gaussiana fornece a ordem de precisão de 1,634, enquanto que por interpolação bilinear obtém-se 1,468. No prisma quadrado, o termo forçante foi aplicado diretamente sobre a malha (sem interpolação), resultando na ordem de precisão de 1,631. Fadlun *et al.* [3], usando as técnicas de interpolação de células de volume fracionado, obteve valores similares da ordem de precisão.

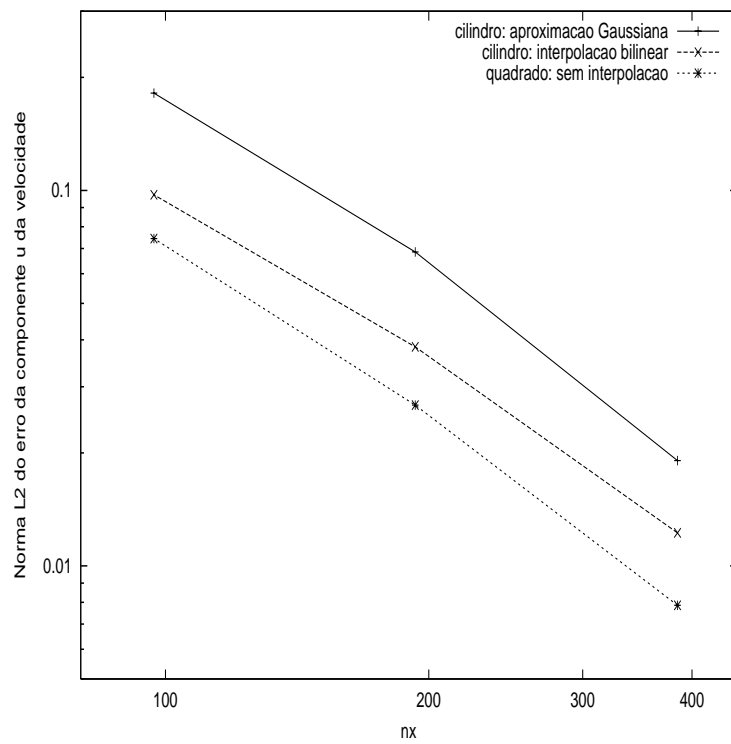


Figura 4.23: Norma l_2 do erro da componente u da velocidade em todo o campo do escoamento em função do número de pontos da malha na direção longitudinal. Comparação de $n_x = 97, 193$ e 385 com a solução considerada "exata", $n_x = 769$.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram introduzidas novas técnicas de projeção de contornos imersos: aproximação Gaussiana espectral e redistribuição Gaussiana. O acoplamento destas técnicas ao método dos contornos virtuais [7] permite modelar geometrias no interior de escoamentos empregando, simplesmente, uma malha Cartesiana uniforme. A modelagem é obtida pela aplicação do campo de forças em pontos do contorno imerso (via realimentação do campo de velocidades do escoamento), sem a necessidade de impor quaisquer condições de contorno no interior da geometria.

As técnicas de projeção permitem transferir o efeito do campo de forças gerado no contorno imerso para os nós adjacentes da malha. Nos estudos numéricos de Saiki e Biringen [25], por interpolação bilinear, são efetuadas 5764 transferências de informação contorno/malha (1441 pontos do contorno, 4 nós adjacentes/ponto). Enquanto que, por redistribuição Gaussiana, são necessárias apenas 1500 transferências (300 pontos do contorno, 5 nós adjacentes/ponto), o que proporciona uma redução significativa na transferência de informações e, como decorrência, na quantidade de cálculos (custo computacional).

Pela técnica de distribuição Gaussiana de Goldstein [7], os nós situados a distância radial de um espaçamento de malha, Δ , recebem 37% da força aplicada no contorno imerso. Pelas técnicas de aproximação e redistribuição Gaussiana, estes nós não recebem força alguma, o que permite limitar a região de espalhamento do campo de forças à uma estreita faixa nas adjacências do contorno imerso, evitando que a geometria adquira dimensões inadequadas.

A calibragem das técnicas de projeção foi obtida por meio de simulações numéricas bidimensionais (por DNS) de escoamentos ao redor do cilindro circular e do prisma quadrado, utilizando um código de cálculo de alta precisão [14]. Através da avaliação de resultados obtidos nos regimes de escoamento (do regime laminar à

turbulência), observa-se boa concordância com diversos estudos numéricos e experimentais.

No intuito de dar continuidade à este trabalho, serão realizadas simulações numéricas de escoamentos ao redor de aerofólios, de estruturas móveis e da interação fluido-estrutura. A utilização de esquemas de interpolação com boa resolução espectral [14], deverá permitir a redução do nível das oscilações presentes no escoamento à montante das geometrias, para elevados números de Reynolds. Isto, possivelmente, também deverá permitir uma melhor compreensão dos mecanismos físicos de geração e de propagação do ruído, em escoamentos turbulentos cisalhantes livres ("ruído de turbilhões" [5], "efeitos de convecção-refração", etc ...).

Bibliografia

- [1] BEYER, R. A computational model of the cochlea using the immersed boundary method. *J. Comp. Phys.* 98 (1992), 145–162.
- [2] CLIFT, R., GRACE, J. R., AND WEBER, M. E. *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, NY, 1978.
- [3] FADLUN, E., VERZICCO, R., ORLANDI, P., AND MOHD-YUSOF, J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *J. Comp. Phys.* 161 (2000), 35–60.
- [4] FERZIGER, J. H., AND PERIC, M. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1996.
- [5] FORTUNÉ, V. *Étude par simulation numérique directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2000.
- [6] GOLDSTEIN, D., AND ADACHI, T. *Modeling a Flow between Concentric Cylinders with an External Force Field*. 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, 1993.
- [7] GOLDSTEIN, D., HANDLER, R., AND SIROVICH, L. Modeling a no-slip boundary with an external force field. *J. Comp. Phys.* 105 (1993), 354–366.
- [8] GRESHO, P., CHAN, R., UPSON, C., AND LEE, R. A modified finite element method for solving the time-dependent, incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 4 (1984), 557–598.
- [9] GRIFFIN, O. M. A note on bluff body vortex formation. *J. Fluid Mech* 258 (1995), 217–224.
- [10] KÁRMÁN, T. V. Über den mechanismus des widerstandes, den ein bewegter körper in einer flüssigkeit erzeugt. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Klasse II* (1911), 509–517.

- [11] KELKAR, K., AND PATANKAR, E. Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder. *Int. J. Num. Methods in Fluids* 14 (1992), 327–341.
- [12] LAMBALLAIS, E., AND SILVESTRINI, J. Direct numerical simulation of interaction between a mixing layer and a wake. *Second Int. Symp. on turbulence and shear flow phenomena, to appear in Journal of turbulence* (2001).
- [13] LAMBALLAIS, E., AND SILVESTRINI, J. Documentação do código computacional INCOMPACT3D. Tech. rep., Université de Poitiers, 2001.
- [14] LELE, S. Compact finite difference method with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.* 103 (1996), 16–42.
- [15] LEVEQUE, R. J., AND LI, Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.* 31, 4 (1994), 827–862.
- [16] LI, Z., AND LAI, M. C. The immersed interface method for the navier-stokes equations with singular forces. Tech. rep., North Carolina State University, 2000.
- [17] MOHD-YUSOF. Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulation of flow in complex geometries. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research* (1997), 317–324.
- [18] MONKEWITZ, P., WILLIAMSON, C., AND MILLER, G. Phase dynamics of kármán vortices in cylinder wakes. *Phys. Fluids* 8 (1996), 91–120.
- [19] MOSER, C. A. S., SILVESTRINI, J. H., AND DE BORTOLI, A. L. Numerical simulation on the transition of the cylinder wake based on the virtual boundary method. *XXII CILAMCE - Ibero-Latin American Congress of Computational Methods in Engineering* (Dec 2001).

- [20] PERSILLON, H., AND M., B. Physical analysis of the transition to turbulence in the wake of a circular cylinder by three-dimensional navier-stokes simulation. *J.Fluid Mech.* 365 (1998), 23–88.
- [21] PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *J. Comp. Phys.* 25 (1977), 220–252.
- [22] PESKIN, C. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comp. Phys.* 25 (1977), 220–252.
- [23] PROVANSAL, M., MATHIS, C., AND BOYER, L. Bénard-von kármán instability: transient and forced regimes. *J. Fluid Mech* 182 (1987), 1–22.
- [24] ROSHKO, A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. *NACA*, TN 2913 (1954), 1–25.
- [25] SAIKI, E., AND BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: Application of a virtual boundary method. *J. Comp. Phys.* 123, 36 (1996), 450–465.
- [26] SCHUMM, M., BERGER, E., AND MONKEWITZ, P. Self-excited oscillations in the wake of two-dimensional bluff bodies and their control. *J. Fluid Mech.* 253 (1994), 17–35.
- [27] SILVESTRINI, J., AND LAMBALLAIS, E. Direct numerical simulation with virtual cylinders. *Int. Journal of Comp. Fluid Dynamics (in press)* (2002).
- [28] SIROVICH, L. Initial and boundary value problems in dissipative gas dynamics. *Phys. Fluids* 10 (1967), 24–30.
- [29] SOHANKAR, A., NORBERG, C., AND DAVIDSON, L. A numerical study of unsteady two-dimensional flow around rectangular cylinders at incidence. Internal report Nr. 96/25, Chalmers University of Technology, 1996.
- [30] VON TERZI, D., LINNICK, M., SEIDEL, J., AND FASEL, H. Immersed boundary techniques for high-order methods. *AIAA-01-2918* (2001), 1–9.

- [31] WIEGMANN, A., AND BUBE, K. The explicit-jump immersed interface method: Finite difference methods for pdes with piecewise smooth solutions. *SIAM J. Numer. Anal* 37, 3 (2000), 827–862.
- [32] WILLIAMSON, C. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann.Rev.Fluid Mech.* 28 (1996), 477–539.
- [33] WILLIAMSON, J. Low-storage runge-kutta schemes. *J. Comp. Phys.* 35 (1980), 48–56.