

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Programa de Pós-Graduação em Economia

OSVALDO CANDIDO DA SILVA FILHO

*Cópuas Tempo-Variantes em Finanças*

Porto Alegre

2010

OSVALDO CANDIDO DA SILVA FILHO

## *Cópuas Tempo-Variantes em Finanças*

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do título de Doutor em Economia.

*Orientador:* Dr. Flávio Augusto Ziegelmann

Porto Alegre

2010



OSVALDO CANDIDO DA SILVA FILHO

## *Cópuas Tempo-Variantes em Finanças*

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito para obtenção do título de Doutor em Economia.

**Aprovada em: 23 de abril de 2010.**

### *Banca examinadora*

---

Prof. Dr. Flávio Augusto Ziegelmann - Orientador  
PPGE-UFRGS

---

Prof. Dr. Pedro Alberto Morettin  
IME-USP

---

Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira  
EES-FGV/SP

---

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal  
PPGE-UFRGS

*À minha pequena família, o grupo  
mais encantador, desafiador,  
apoiador e cômico que a  
imaginação poderia inventar.*

# *Agradecimentos*

Mesmo ante a impossibilidade de agradecer a todos aqueles que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão deste trabalho, expresso minha gratidão ao Professor Flávio Augusto Ziegelmann pela orientação paciente, pelo aprendizado e pela amizade, que foram fundamentais para a execução deste trabalho; à banca examinadora pelos comentários, críticas e sugestões; à minha esposa Priscilla Golzio pela dedicação, paciência e incentivo; aos amigos de longa data e amigos conquistados durante o curso de Doutorado; às secretárias do PPGE Iara Machado, Maria DeLourdes, Cláudia Gomes, Raquel Klaudat e Aline Gandon pelo trabalho eficiente de apoio, e à CAPES pelo suporte financeiro.

# *Resumo*

A modelagem da estrutura de dependência é de grande importância em todos os ramos da economia onde há incerteza. Ela é um elemento crucial na análise de risco e para a tomada de decisão sob incerteza. As cópulas oferecem aos agentes que se deparam com este problema um poderoso e flexível instrumento para modelar a estrutura de dependência entre variáveis aleatórias e que é preferível ao instrumento tradicional baseado na correlação linear. Neste estudo, nós analisamos a dinâmica temporal da estrutura de dependência entre índices de mercados financeiros internacionais e propomos um novo procedimento para capturar a estrutura de dependência ao longo do tempo. Adicionalmente, estudamos alguns fatos estilizados sobre índices de mercados financeiros como a relação entre volume-volatilidade e retorno-volatilidade.

**Palavras-chave:** Dependência assimétrica. Cópulas tempo-variantes. *Skewed-t* GARCH. Mudança de Markov.

# *Abstract*

Modelling dependence is of key importance to all economic fields in which uncertainty plays a large role. It is a crucial element of risk analysis and decision making under uncertainty. Copulas offer economic agents facing uncertainty a powerful and flexible tool to model dependence between random variables and often are preferable to the traditional, correlation-based approach. In this work we analyze the time dynamics of the dependence structure between broad stock market indices and propose a novel procedure to capture dependence structure over time. Additionally, we study some stylized facts about stock market indexes such as volume-volatility and return-volatility relations.

**Keywords:** Asymmetric dependence. Time-varying copulas. Skewed-t GARCH. Markov switching.



# *Lista de Figuras*

Figura 1	Dependência caudal - BOVESPA/IPCMX . . . . .	41
Figura 2	Dependência caudal - BOVESPA/S&P500 . . . . .	41
Figura 3	Dependência caudal - BOVESPA/FTSE100 . . . . .	42
Figura 4	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-S&P500) . . . . .	63
Figura 5	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-FTSE100) . . . . .	63
Figura 6	Dinâmica da dependência (BOVESPA-S&P500) . . . . .	64
Figura 7	Dinâmica da dependência (BOVESPA-FTSE100) . . . . .	64
Figura 8	Box plot - erro na dependência (cópula Normal) . . . . .	65
Figura 9	Box plot - erro na dependência caudal inferior (cópula SJC) . . . . .	65
Figura 10	Box plot - erro dependência caudal superior (cópula SJC) . . . . .	66
Figura 11	Quadrado dos retornos e volatilidade realizada . . . . .	81
Figura 12	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação volume-volatilidade (BOVESPA) . . . . .	82
Figura 13	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação volume-volatilidade (S&P500) . . . . .	82
Figura 14	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação retorno-volatilidade (BOVESPA) . . . . .	83
Figura 15	Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação retorno-volatilidade (S&P500) . . . . .	83

# *Lista de Tabelas*

Tabela 1	Estatísticas descritivas para o log-retorno de FTSE100, BOVESPA, IPCMX e S&P500 . . . . .	37
Tabela 2	Resultados para as distribuições marginais . . . . .	37
Tabela 3	Critérios de informação para as cópulas estimadas . . . . .	38
Tabela 4	Resultados para as estimações das cópulas . . . . .	39
Tabela 5	P-valor para a distância quadrática de Mahalanobis entre dados originais e simulados - média ao longo das 100 replicações . . . . .	40
Tabela 6	Percentual de violação do VaR ( $N/T$ ), testes de Christoffersen (CT) e Kupiec (KT) . . . . .	40
Tabela 7	Estatísticas descritivas para o log-retorno de FTSE100, BOVESPA e S&P500	61
Tabela 8	Resultados para as distribuições marginais . . . . .	61
Tabela 9	Resultados para as estimações das cópulas . . . . .	62
Tabela 10	Estatísticas descritivas . . . . .	80
Tabela 11	Parâmetros para a dependência volume-volatilidade . . . . .	80
Tabela 12	Parâmetros para a dependência retorno-volatilidade . . . . .	81

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas: Applications to Value at Risk</b>	<b>16</b>
2.1	Introduction . . . . .	17
2.2	Conditional copulas . . . . .	18
2.2.1	<i>Basic concepts</i> . . . . .	19
2.2.2	<i>Estimation</i> . . . . .	21
2.2.3	<i>Tail dependence and parametric copulas</i> . . . . .	22
2.3	Modelling dependence between market indexes: definitions and first empirical results	25
2.3.1	<i>Data description</i> . . . . .	25
2.3.2	<i>Modelling the marginal distributions</i> . . . . .	25
2.3.3	<i>Copula Modelling</i> . . . . .	27
2.4	Goodness-of-fit test . . . . .	28
2.5	Dependence analysis . . . . .	30
2.6	VaR Calculation and evaluation through copulas . . . . .	31
2.7	Final remarks . . . . .	33
2.8	References . . . . .	35
2.9	Tables . . . . .	37
2.10	Figures . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Dinâmica da dependência Usando Cópulas Tempo-Variantes com Mudança de Regime</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	44
3.2	Cópulas: conceitos básicos . . . . .	45
3.3	Modelo cópula-GARCH . . . . .	48
3.4	Estimação . . . . .	49
3.4.1	<i>Estimação da cópula</i> . . . . .	50

3.4.2	<i>Erro-padrão estimado: bootstrap por blocos</i>	51
3.5	Exemplos numéricos: simulação de Monte Carlo	52
3.6	Análise dos dados empíricos	55
3.6.1	<i>Distribuições marginais</i>	56
3.6.2	<i>Cópulas</i>	56
3.7	Considerações finais	57
3.8	Referências	59
3.9	Tabelas	61
3.10	Figuras	63
<b>4</b>	<b>Verificando Alguns Fatos Estilizados Sobre Índices De Mercados Financeiros</b>	
	<b>Usando Cópulas Tempo-Variantes</b>	<b>67</b>
4.1	Introdução	68
4.2	Cópulas e dependência caudal	70
4.3	Estimação	71
4.4	Dados e medida de volatilidade	73
4.5	Resultados	74
4.5.1	<i>Dependência volume-volatilidade futura</i>	75
4.5.2	<i>Dependência retorno-volatilidade futura</i>	76
4.6	Considerações finais	77
4.7	Referências	78
4.8	Tabelas	80
4.9	Figuras	81
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>84</b>
	<b>Referências</b>	<b>86</b>

# 1 *Introdução*

O presente trabalho de tese foi motivado pelo reconhecimento, por diversos autores, de que muitas variáveis econômicas não são normalmente distribuídas, principalmente quando se tratam de dados financeiros<sup>1</sup>. Essas variáveis exibem caudas-pesadas (*fat-tails*), e/ou assimetria, e trabalhos recentes sugerem a existência de uma “dependência assimétrica”, onde alguns pares de variáveis são mais altamente interdependentes em movimentos decrescentes do que em movimentos ascendentes. Além disso, como observado em Christoffersen (2006), essa “dependência assimétrica” pode ser variante ao longo do tempo.

A presença dessas características é inevitável quando tratamos de variáveis como os retornos dos ativos em mercados financeiros. A estrutura de dependência nesses mercados tem importantes implicações quando lidamos com alocação de carteiras, gestão de risco, precificação de ativos e *hedging*. Isso indica a importância em capturar e mensurar toda a extensão dessa dependência assimétrica.

Modelos econométricos em finanças têm sido úteis para o entendimento da incerteza subjacente a variabilidade dos retornos financeiros, na medição de risco para carteiras de ativos e na tomada de decisões baseadas nas preferências em relação ao risco. A precificação de ativos financeiros, por exemplo, precisa de uma pré-avaliação das medidas de riscos, que frequentemente requerem uma análise de dependência, as quais são baseadas em modelos estatísticos aplicados aos dados observados. A introdução de novos instrumentos e produtos financeiros aumenta a complexidade da estrutura de dependência entre os ativos o que exige cada vez mais, uma maior precisão no estudo das estruturas e medidas de dependência.

As principais características sobre dados financeiros, ou fatos estilizados, apontadas e estudadas por estes modelos são: (i) caudas pesadas - identificadas na distribuição incondicional dos retornos; (ii) agrupamento de volatilidade - fenômenos de alta volatilidade tendem a se aglomerarem no tempo; (iii) correlação entre o volume negociado do ativo e sua volatilidade; (iv) assimetria nos ganhos/perdas - observa-se uma maior amplitude nas perdas, em movimentos decrescentes, do que nos ganhos, em movimentos ascendentes; dentre outros<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Ver por exemplo Daal, Naka e Yu (2004) e Malevergne e Sornette (2006).

<sup>2</sup>Ver Conti (2001).

A despeito desses fatos, em finanças, frequentemente assume-se normalidade multivariada quando se trata de análise de carteiras, ou portfólios, com a finalidade de se obter resultados simples. Entretanto, esse suposto é violado na prática. Retornos financeiros, como dito anteriormente, tendem a ser leptocúrticos (SANCETTA; SATCHELL, 2001). Portanto, dados estes fatos sobre retornos financeiros, é essencial construir distribuições multivariadas que permitam avaliar essas variáveis admitindo estes diferentes padrões de dispersão, assimetria e casos onde há eventos extremos (caudas-pesadas). Ao assumir distribuições elípticas (Gaussiana, *t-student*) lidamos com medidas lineares de correlação, associação ou dependência, entre os retornos financeiros, que podem não capturar completamente as relações de dependência entre os dados. Particularmente, essas medidas lineares de correlação não capturam eventos extremos, ou seja, as caudas da distribuição.

Deflagrada a crise do *sub-prime* e a subsequente evaporação da liquidez internacional, acadêmicos, profissionais, governos, filósofos, jornalistas começaram a procurar por causas e falhas que levaram a essa crise que rapidamente tornou-se sistêmica. Apesar das várias explicações que apareceram, uma parece ser compartilhada por muitos agentes: o risco não foi medido e nem avaliado adequadamente, além de ter sido ofuscado pelos instrumentos de securitização, *tranching* e outros subjacentes ao mercado de crédito. O fato é que parece ter havido uma certa deficiência, ou negligência, em capturar o risco na ocorrência de eventos extremos no mercado. Isto pode ser atribuído ao uso frequente de modelos baseados em distribuições elíptica que não é capaz de mensurar as realizações conjuntas nas caudas.

Portanto, é notória a necessidade de considerar medidas de dependência mais gerais e distribuições que levem em conta o comportamento dos retornos financeiros como descrito anteriormente. Assim, propomos a utilização de cópulas para lidar com estas questões.

As Cópulas são funções que ligam uma função de distribuição multivariada a suas distribuições marginais de qualquer dimensão. Elas possuem todas as informações relevantes a respeito da estrutura de dependência entre variáveis aleatórias. Isso permite uma maior flexibilidade na modelagem de distribuições multivariadas e de suas marginais. Primeiro, porque há mais informações sobre as marginais do que sobre a multivariada conjunta. Segundo, a metodologia das cópulas permite derivar distribuições conjuntas a partir das marginais, mesmo quando essas marginais não são normais. E terceiro, é possível separar as características de cada marginal do efeito de dependência entre as variáveis.

As estruturas de dependência e as derivações de distribuições multivariadas têm sido estudadas por Clemen e Reilly (1999), Mendes e Moretti (2002), Embrechts, Mcneil e Strauman (2002), Embrechts, Hoeing e Juri (2003), Hurd, Salmon e Schleicher (2005), dentre outros. Esses estudos, em sua grande maioria, admitem estruturas de dependência e distribuições mul-

tivariadas estáticas. Ou seja, admitem que as relações de dependência entre as variáveis são constantes ao longo do tempo.

Ainda há uma pequena literatura referente ao estudo de estruturas de dependência, e também, da própria distribuição multivariada variando no tempo. Assim, a proposta desse trabalho de tese é descrever parcialmente a teoria das cópulas e realizar três ensaios aplicando uma versão dinâmica dessa teoria em finanças.

No primeiro ensaio, nós utilizamos a teoria de cópulas condicionais (PATTON, 2004, 2006) para analisar estruturas de dependência tempo-variantes entre ativos financeiros e calcular medidas de risco. Admitimos que essa variação da estrutura de dependência segue uma equação de evolução específica. O uso das cópulas em sua versão condicional é conveniente pois a estrutura de dependência e o comportamento das séries temporais (principalmente econômicas) podem ser capturados através de distribuições condicionais às observações passadas. O que pode ser notado, a título de exemplo, nos modelos GARCH, amplamente utilizados em finanças.

Assim, discutimos também a modelagem dos ativos individualmente, através de modelos de variância condicional (modelos da família GARCH), para chegar a uma forma para as distribuições marginais. Em seguida, ajustamos uma distribuição multivariada, a partir de uma cópula com parâmetros variantes no tempo, calculamos o VaR (*Value-at-Risk*) e realizamos alguns testes de aderência e de *goodness-of-fit* para as cópulas selecionadas. Aplicamos essa metodologia para analisar a dependência entre o índice BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e os índices FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*), IPCMX (*Índice de Precios y Cotizaciones da Bolsa Mexicana de Valores*) e S&P500 (*Standard and Poor's 500 index*).

Neste ensaio, foi possível notar alguns resultados interessantes que contribuíram para o desenvolvimento dos demais ensaios. O modelo utilizado foi bem sucedido ao capturar a evolução ao longo do tempo da estrutura de dependência entre os índices de mercados financeiros supracitados. Pudemos notar que houve uma mudança sensível no grau de dependência entre os mercados, que aumentou consideravelmente a partir do final de 2006 e primeiro semestre de 2007, período no qual considera-se que teve início a recente crise financeira. Esse resultado indicou a possibilidade da dependência, além de assimétrica, ser não linear e estar sujeita a mudanças de padrão aleatórias. Isto nos deu subsídio para o desenvolvimento do segundo ensaio.

No segundo ensaio, propomos uma nova dinâmica para o parâmetro de dependência diferente daquela que tem sido usada na literatura. Além de permitir que o parâmetro de dependência varie de forma determinística, seguindo um processo ARMA restrito, como em Patton (2006), permitimos também que ele varie de forma estocástica, seguindo uma cadeia de

Markov de primeira ordem com dois estados. Essa extensão do modelo para inclusão de um processo de Markov escondido, ou não observado, nos permite observar mais de perto, de maneira mais generalizada e com uma maior flexibilidade as estruturas de dependência assimétricas entre variáveis aleatórias sem perdas em termos de tratabilidade do modelo.

Através de dados simulados, comparamos o desempenho do modelo proposto com o utilizado no primeiro ensaio. Além disso, aplicamos também este modelo a dados reais, visando analisar a dependência entre o índice BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e os índices FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*) e S&P500 (*Standard and Poor's 500 index*).

A possível existência de não linearidade na dinâmica do parâmetro de dependência que levantamos no primeiro paper, foi capturada, na aplicação à dados reais, pelo modelo com cadeia de Markov escondida que propomos neste segundo ensaio. O modelo identificou dois regimes distintos: um com maior dependência e outro com menor dependência. O regime de maior dependência coincide com o período de crise financeira internacional (considerando o período mais recente), iniciada em 2006/2007. Embora ambos os modelos (sem mudança e com mudança) tenham identificado o aumento sensível da interdependência entre os mercados financeiros, o modelo com mudança sugere que este aumento é uma mudança de estado inerente ao processo, o que confere uma não linearidade na dinâmica da dependência.

No experimento com dados simulados, onde comparamos o modelo com e sem mudança de regime, avaliamos duas estruturas de dependências distintas. Uma estrutura simétrica dada pela cópula Normal, cujo parâmetro de dependência é o coeficiente de correlação linear, e a outra onde admitimos a presença de dependência nas caudas tanto inferior quanto superior que variam independentemente uma da outra. Essa estrutura é dada pela cópula Joe-Clayton Simetrizada (SJC). Percebemos que o modelo que estamos propondo, que introduz certa não linearidade no parâmetro de dependência capturada pela cadeia de Markov, apresentou um bom desempenho quando comparado ao modelo sem mudança de regime. Além disso, os resultados indicam que este modelo apresenta uma dispersão (em relação ao erro médio do parâmetro de dependência) menor que o modelo sem mudança.

Por último, no terceiro ensaio, estudamos a relação dinâmica entre os retornos de ativos financeiros, seu volume negociado e sua volatilidade. Para tanto utilizamos o modelo que desenvolvemos no ensaio anterior. Os resultados encontrados parecem confirmar os fatos estilizados sobre o efeito informacional da variável volume negociado do ativo e a existência do *leverage effect*, do ponto de vista da metodologia das cópulas. Eles também indicam que esses efeitos parecem ocorrer com mais frequência em períodos de bonança e calma do que em períodos de crises financeiras.



Nos três ensaios demos ênfase a dependência caudal. Acreditamos que o uso de cópulas no contexto que descrevemos acima sobre dados financeiros, em conjunto com este tipo de medida de dependência, é perfeitamente adequado, pois o método permite que calculemos medidas de dependência nas caudas diretamente a partir da função cópula, e esta medida não é afetada pelas marginais além de ser invariante a quaisquer transformações, lineares e não lineares.

# Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas: Applications to Value at Risk

Oswaldo Candido da Silva Filho

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Programa de Pós-Graduação em Economia – PPGE*

Flávio Augusto Ziegelmann

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Departamento de Estatística e Programa de Pós-Graduação em Economia – PPGE*

Michael J. Dueker

*Russell Investments*

---

## Abstract

In this paper, we analyze the time dynamics of the dependence structure between broad stock market indices from the United States (S&P500), Britain (FTSE100), Brazil (BOVESPA) and Mexico (PCMX). We specifically investigate the dependence between BOVESPA and each one of the other previous three indexes. We employ Patton's (2006) conditional copula setting and additionally observe the impact of different copula functions on Value at Risk (VaR) estimation for a simple portfolio. We conclude that the dependence between BOVESPA and other financial market indexes has intensified since the beginning of 2007. Furthermore in our case the particular form of the copula form does not seem to be crucial for VaR estimation, since all copulas lead to significant VaR estimates. Finally, to identify which copula functions lead to the best fit to the data we apply a goodness-of-fit test based on a parametric bootstrap. We find that the best fits are obtained via the time constant t-student and the time-varying Normal copulas.

*Keywords:* Asymmetric dependence, Time-varying copulas, Value at Risk (VaR), Skewed-t GARCH, Bootstrap test.

*JEL Classification:* C15, C46, G15.

---

## 1. Introduction

The features of financial data that multivariate models should aim to capture are: (i) heavy tails in the returns unconditional distribution, i.e., returns distributions tends to be leptokurtic ([33]); (ii) volatility clustering, which means that large absolute returns tend to occur in bunches rather than with equal spacing across time; (iii) correlation between the volume of traded assets and their volatility; (iv) asymmetry between gains and losses such that the largest absolute returns are disproportionately negative (see [6]).

Despite these facts, multivariate normality is often assumed in finance when it comes to portfolio analysis ([32]). If one restricts the analysis to elliptical distributions (Gaussian, t-student), one deals with measures of linear dependence between the financial returns, which may not completely capture the type of dependence present in the data. Hence there is a need to build multivariate distributions that allow one to model data with different patterns of dispersion, where asymmetry, heavy-tails and other financial returns behavior are accommodated. It is also necessary to consider broader measures of dependence that take into account the cross-sectional behavior of financial returns.

Our approach here is to use copulas to deal with the issues raised above. We analyze the dependence structure between financial assets and additionally compute the Value at Risk (VaR), which is of considerable importance in risk management (see for instance [22]). The effect of the different copulas on VaR estimation is studied. Furthermore we try to identify the best copula fit via a parametric bootstrap method suggested by [1]) in a more general context.

In the copula literature, the issues of dependence structures and multivariate distributions derivations have been studied by [5, 28, 10, 8, 17], among others. In their great majority however, these studies assume that the dependence relations among the variables are constant over time.

More recently we can see the emergence of time-varying conditional copulas. In [27], the dependence parameter is conditioned on the position of combined past observations in the unit square to which they belong, i.e., the unit square is divided into several subgroups and then the dependence parameter is estimated for each subgroup. Using Gaussian and t-student copulas, the VaR is calculated for Argentinean and Brazilian financial market indexes.

[19] in turn uses an adaptive approach known as local change point detection analysis (LCPD), which is based on the assumption that there is a local time homogeneity, i.e., for every moment in time there is an interval in which the dependence parameter is approximately constant. This approach is used in the analysis of dependence between some pairs of assets comprised in the DAX index (Deutscher AKTIEN-Index). [31] seems to be the first to extend the theorem of [35] on copulas for a conditional version. The author illustrates his approach estimating and evaluating time-varying conditional densities of the exchange rates German mark/dollar and yen/dollar returns.

Taking into account these initial considerations, the aim of this study is to measure the dependence structure between BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) and the following three indexes: FTSE100 (Financial Times and London Stock Exchange Index),

IPCMX (Índice de Precios y Cotizaciones da Bolsa Mexicana de Valores) and S&P500 (Standard and Poor 500 Index). To capture this dependence structure we use four conditional copulas with time-varying parameters: Symmetrized Joe Clayton, Rotated Gumbel, Normal and T-student. The time dynamics of the dependence parameter follow those proposed by [31]. We evaluate the copulas fit via a parametric bootstrap method, as mentioned previously. Therefore, using the approach of conditional densities estimated via copulas, we compute the Value at Risk (VaR) for the portfolios formed by the indexes in question.

An interesting result we have found is that the dependence between these stock market indexes intensified near the end of 2006. This result coincides with or slightly precedes the beginning of the actual worldwide financial crisis. Beginning in mid-2004, the Federal Reserve began to gradually raise its short-term interest-rate instrument to a maximum of 5.25 per cent in July 2006 and then maintained the federal funds rate at this level until September 2007, when a drop in interbank lending prompted the Federal Reserve to loosen monetary policy. A basic feature of the early part of the subprime crisis is that banks did not know much about each other's exposures to subprime mortgage-backed securities and this uncertainty resulted in a reduction in interbank lending and a surge in concern about counterparty risk.

The first victim of the crisis was a major bank in UK. Northern Rock sought and received liquidity support from the UK government in September 2007. In February 2008, Northern Rock was nationalized. On September 7, 2008, US government nationalized (placed into conservatorship) the two US home mortgage lenders, Fannie Mae and Freddie Mac. On September 14, 2008, the US investment bank Lehman Brothers filed for bankruptcy and its attendant default on commercial paper heralded a much more severe chapter in the crisis, as investors became wary of commercial paper and money-market funds—two fundamental building blocks of the financial system.

The rest of the paper is structured as follows. In Section 2 we present a summary of the theory of conditional copulas and their estimation via maximum likelihood. We also describe the parametric forms used in this work. In Section 3 we describe the stock-price data, the statistical model, the marginal distributions of the indexes and we report the estimates for the copulas and their dependence parameters. Section 4 evaluates the goodness of fit of our copula functions using the parametric bootstrap. In Section 5 we analyze the time dynamics of the dependence parameters. Section 6 discusses the implications of our estimates for Value at Risk (VaR) calculations. We illustrate the estimation VaR for copula-based models and we propose a particular portfolio constructed from these four stock-market indexes. Lastly, some closing comments are presented.

## 2. Conditional copulas

Copulas are often defined in literature as distribution functions whose marginal distributions are uniform in the interval  $[0,1]$ . That is, for an  $n$ -dimensional vector  $U$  in the unit cube, a copula can be informally defined as

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n) \quad (1)$$

where  $U_i$  is a random variable with uniform distribution in  $[0, 1]$  and  $u_i$  is a realization of  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Combining this with the fact that continuous random variables can be transformed into uniform variables by their probability integral transform, copulas can be used to achieve structures of multivariate dependence from the marginal distributions.

### 2.1. Basic concepts

Formally, we can define a copula as follows:

**Definition 1.** *An  $n$ -dimensional copula is a function  $C$  with domain  $[0, 1]^n$ , such that<sup>1</sup>:*

1.  $C$  is grounded and  $n$ -increasing.
2.  $C$  has marginal distributions  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , where  $C_k(\mathbf{u}) = u_k$  for every  $\mathbf{u}$  in  $[0, 1]^n$ .

Equivalently, an  $n$ -copula (or  $n$ -dimensional copula) is a function  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  with the following properties:

3. For all  $\mathbf{u}$  in  $[0, 1]^n$ ,  $C(\mathbf{u}) = 0$ , if at least one coordinate of  $\mathbf{u}$  is 0 and  $C(\mathbf{u}) = u_k$ , if all the coordinates of  $\mathbf{u}$  are 1 except  $u_k$ ,
4. For all  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  in  $[0, 1]^n$  such that  $a_i \leq b_i$ , for every  $i$ ,  $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$  where  $V_C$  is called  $C$ -volume.

One of the main results of the theory of copulas is Sklar's Theorem (1956) which we state below.

**Theorem 1.** (Sklar's Theorem)<sup>2</sup> *Let  $X_1, \dots, X_n$  be random variables with distribution functions  $F_1, \dots, F_n$ , respectively, and joint distribution function  $H$ . Then, there is a  $C$  such that,*

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (2)$$

for every  $x_1, \dots, x_n \in \bar{\mathbb{R}}$ <sup>3</sup>. If  $F_1, \dots, F_n$  are all continuous, then  $C$  is unique; otherwise  $C$  is determined only on  $\text{Im}F_1 \times \dots \times \text{Im}F_n$ . Reciprocally, if  $C$  is an  $n$ -copula and  $F_1, \dots, F_n$  are distribution functions, then the function  $H$ , defined above is an  $n$ -dimensional distribution function with marginals  $F_1, \dots, F_n$ .

**Corollary 1.** *Let  $H$  be an  $n$ -dimensional distribution function with continuous marginals  $F_1, \dots, F_n$ , and copula  $C$  (where  $C$  is defined as in Theorem 1). Thus, for any  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  in  $[0, 1]^n$ ,*

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>See [9] e [29] for more details.

<sup>2</sup>The proof of Sklar's Theorem can be found in [35], [34] e [29].

<sup>3</sup> $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  is the extended real line.

<sup>4</sup>See [29] and [26], for cases without the assumption of continuity.

where  $F_1^{(-1)}$  is the generalized inverse<sup>5</sup>.

The theorem above allows more flexibility for modeling multivariate distributions. Since a copula is a function that binds a multivariate distribution function to its marginal distributions of any dimension, it possesses all the relevant information about the dependence structure between the random variables. This adds greater flexibility in modeling multivariate distributions and their marginals.

In many cases, the dependence pattern and the general dynamics of a time series can be captured through conditional distributions on past observations, as observed by [31] and [27]. Thus, the extension of Sklar's theorem for the conditional case can prove to be very useful. According to [31], the Sklar's theorem for the conditional case is defined as follows:

**Theorem 2.** (*Sklar's Theorem - Conditional case*) Let  $X_i|W$ , for  $i = 1, \dots, n$ , be random variables with conditional distribution functions  $F_i$ , respectively, and conditional joint distribution function  $H$  of  $X|W$ , where  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  and  $W$  has support  $\Omega$ . Then there is a copula  $C$  such that, for any  $\mathbf{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n$  and  $\mathbf{w} \in \Omega$

$$H(x_1, \dots, x_n|\mathbf{w}) = C(F_1(x_1|\mathbf{w}), \dots, F_n(x_n|\mathbf{w})|\mathbf{w}). \quad (4)$$

If  $F_1, \dots, F_n$  are all continuous then  $C$  is unique, otherwise it is determined only on  $\text{Im}F_1 \times \dots \times \text{Im}F_n$ . Reciprocally, if  $C$  is an  $n$ -copula and  $F_1, \dots, F_n$  are distribution functions then  $H$ , as defined above is a conditional  $n$ -dimensional distribution function with marginals  $F_1, \dots, F_n$ .

**Corollary 2.** Let  $H$  be an  $n$ -dimensional conditional distribution function with continuous conditional marginals  $F_1, \dots, F_n$  and copula  $C$  (where  $C$  is defined as in Theorem 2). Thus, for any  $\mathbf{u}$  in  $[0, 1]^n$  and  $\mathbf{w} \in \Omega$ ,

$$C(u_1, \dots, u_n|\mathbf{w}) = H(F_1^{(-1)}(u_1|\mathbf{w}), \dots, F_n^{(-1)}(u_n|\mathbf{w})). \quad (5)$$

Note that the information set  $W^6$  must be the same for all the marginals and the copula. Otherwise, the Definition 1 does not hold and  $C$  is not a "real" copula in the original sense since it violates the third assumption in this definition. In that case, we would have a *pseudo-copula* as defined by [14]. These authors establish Sklar's theorem version for *pseudo-copula*.

---

<sup>5</sup>Let  $F : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow I$  be a function of univariate distribution. The generalized inverse (or quasi-inverse) of  $F$ ,  $F_1^{(-1)}$ , is given by

$$F^{(-1)}(t) = \begin{cases} \sup_{x \in \bar{\mathbb{R}}} \{F(x) = 0\}, & t = 0 \\ \inf_{x \in \bar{\mathbb{R}}} \{F(x) \geq t\}, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

<sup>6</sup>Note that the vector  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  is a realization of the random variable  $W \in \Omega$ , which will be defined later.

The conditional density function associated with the distribution function in (4) can be obtained easily, since  $F_1, \dots, F_n$  and  $C$  are  $n$  differentiable. Considering the two-dimensional case, one can write the conditional density function as follows:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2|\mathbf{w}) &\equiv \frac{\partial^2 H(x_1, x_2|\mathbf{w})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial F_1(x_1|\mathbf{w})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2(x_2|\mathbf{w})}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 C(F_1(x_1|\mathbf{w}), F_2(x_2|\mathbf{w})|\mathbf{w})}{\partial u_1 \partial u_2} \\ &= f_1(x_1|\mathbf{w}) \cdot f_2(x_2|\mathbf{w}) \cdot c(u_1, u_2|\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (6)$$

where  $u_1 = F_1(x_1|\mathbf{w})$  e  $u_2 = F_2(x_2|\mathbf{w})$ .

The previous result will be used below for deriving maximum likelihood estimators.

## 2.2. Estimation

We can rewrite the density function (6) as follows:

$$h_t(x_1, x_2|\mathbf{w}; \theta_h) = f_{1t}(x_1|\mathbf{w}; \theta_1) \cdot f_{2t}(x_2|\mathbf{w}; \theta_2) \cdot c_t(u_1, u_2|\mathbf{w}; \theta_c) \quad (7)$$

where  $\theta_h = [\theta'_1, \theta'_2, \theta'_c]$  is a vector of parameters of the joint density.

The functional form (7) suggests that the statistical modeling of the conditional density function  $h$  can be decomposed into two problems: (i) identify the conditional distribution of the marginals for  $X_1$  e  $X_2$ , and (ii) establish a functional form for the copula  $C$ . Thus, the log-likelihood function is given by

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \log h_t(x_{1t}, x_{2t}|\mathbf{w}; \theta_h) &= \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(x_{1t}|\mathbf{w}; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(x_{2t}|\mathbf{w}; \theta_2) + \sum_{t=1}^T \log c_t(u_1, u_2|\mathbf{w}; \theta_c) \\ \ell(\theta_h) &= \ell_{f_1}(\theta_1) + \ell_{f_2}(\theta_2) + \ell_c(\theta_c) \end{aligned} \quad (8)$$

with the maximum likelihood estimator defined as

$$\hat{\theta}_{hMLE} = \max_{\theta \in \Theta} \ell(\theta_h) \quad (9)$$

Note that obtaining the maximum likelihood estimator (MLE) can be computationally very intensive, especially in the context we propose here, i.e., assuming the parameter  $\theta_c$  varying over time. However, the estimation of the parameters in (8) can be divided into two stages, using the inference method inference function of marginals (IFM) proposed by [21]. The method consists of estimating the parameters of the marginals,  $\hat{\theta}_1$  and  $\hat{\theta}_2$ , in a first step, and estimating the parameter  $\hat{\theta}_c$ , in a second step, using  $\hat{\theta}_1$  and  $\hat{\theta}_2$ . That is,

$$1^\circ \text{ step: estimate } \hat{\theta}_i = \underset{\theta_i}{\operatorname{argmax}} \ell_{f_i}(\theta_i) = \underset{\theta_i}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \log f_{it}(x_{it}|\mathbf{w}; \theta_i), \quad i = 1, 2;$$

2° step: estimate  $\hat{\theta}_c = \underset{\theta_c}{\operatorname{argmax}} \ell(\theta_c) = \underset{\theta_c}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \log c_t(F_{1t}(x_{1t}|\mathbf{w}; \hat{\theta}_1), F_{2t}(x_{2t}|\mathbf{w}; \hat{\theta}_2)|\mathbf{w}; \theta_c)$ , given the 1° step.

Just as the MLE, the estimator by IFM is asymptotically normal and consistent, supporting our choice for this method here<sup>7</sup>.

### 2.3. Tail dependence and parametric copulas

Copulas frequently used in financial literature assume elliptical forms, mostly Gaussian (Normal) and T-student. They are called elliptical because they are associated with a quadratic form of correlation between the marginals. The dependence structure associated with this family of copulas is the well known Pearson correlation coefficient, which belongs to the interval  $[-1,1]$ . As a result, these distributions are symmetric.

Other copulas that have been used are Archimedean, which, depending on the functional form of the generating factor<sup>8</sup> associated with them, may have the dependence measure belonging to the most diverse ranges of variation. An example may be given by the copulas used in the extreme value theory (EVT), where we can cite the [15] copula. It allows only positive dependence structures (or the upper tail dependence), for which the parameter belongs to the interval  $[1, +\infty)$ . This diversity of copula functions with specific dependence structures would make it impossible to compare different functional forms for copulas. To make this comparison possible we focus on a dependence measure known as Tail Dependence<sup>9</sup> which is defined below.

**Definition 2.** *If the limit  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pr [U_1 \leq \varepsilon | U_2 \leq \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pr [U_2 \leq \varepsilon | U_1 \leq \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon, \varepsilon)/\varepsilon = \tau^L$  exists, the copula  $C$  has a lower tail dependence if  $\tau^L \in (0, 1]$ . Otherwise, the copula  $C$  has no lower tail dependence. If the limit  $\lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr [U_1 > \delta | U_2 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr [U_2 > \delta | U_1 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} (1 - 2\delta + C(\delta, \delta)) / (1 - \delta) = \tau^U$  exists, the copula  $C$  has upper tail dependence if  $\tau^U \in (0, 1]$ . Otherwise, the copula  $C$  has no upper tail dependence.*

We use this measure having in mind the financial stylized facts and also due to the results we have found for the marginal distributions which show some left asymmetry. This may also suggest an asymmetry to the left in the bivariate distribution.

To capture the dependence time dynamics in the dependence parameter follow [31], where the parameter in question evolves according to an equation with a functional form defined *a priori*. This functional form will be described later in accordance with the selected copulas.

---

<sup>7</sup>Ver [21], [20] e [31] for details.

<sup>8</sup>This generating factor for Archimedean copulas needs to meet some criteria like convexity, among others in order to also satisfy the assumptions on copulas seen in the previous section. See [29].

<sup>9</sup>Other measures of dependence have been used to try to compare the dependence between copulas, as the measures of concordance Kendall's  $\tau$ , Spearman's  $\rho$  and the Gini's co-graduation index. For further details see [3], [29], [31].



In this paper, we use four bivariate copulas to analyze the dependence between the indexes: Rotated Gumbel, SJC (Symmetrized Joe-Clayton), Normal and T-Student. Their definitions follow below.

**Rotated Gumbel Copula** (RGC) (or Survival Gumbel Copula), which is the complement (“Probability of survival”) of the Gumbel copula. The RGC has the following form:

$$C_{RGC}(u_1, u_2|\theta) = u_1 + u_2 - 1 + C_G(1 - u_1, 1 - u_2|\theta)$$

where  $C_G$  corresponds to the Gumbel copula:

$$C_G(u_1, u_2|\theta) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \theta \in [1, \infty)$$

The time dynamics equation for the dependence parameter in RGC,  $\theta_t$ , is given by<sup>10</sup>:

$$\theta_t = \Lambda\left(\omega_G + \beta_G \theta_{t-1} + \alpha_G \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|\right)$$

The RGC has only lower tail dependence ( $\tau^U = 0$ ) which can be obtained by  $\tau^L = 2 - 2^{1/\theta}$ .

**Symmetrised Joe-Clayton Copula** (SJC), defined in [31], takes the form

$$C_{SJC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 0.5 \cdot (C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2|\tau^U, \tau^L) + u_1 + u_2 - 1),$$

where  $C_{JC}$  is the Joe-Clayton copula, also called “BB7”, given by

$$C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 1 - \left(1 - \{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\}^{-1/\gamma}\right)^{-1/\kappa}$$

with  $\kappa = 1/\log_2(2 - \tau^U)$ ,  $\gamma = -1/\log_2(\tau^L)$  and  $\tau^U, \tau^L \in (0, 1)$ .

The SJC has an upper and lower tail dependence parameters. Its own dependence parameters,  $\tau^U$  and  $\tau^L$ , are the measures of dependence on the upper and lower tail, respectively. Furthermore,  $\tau^U$  and  $\tau^L$  range freely and are not dependent on each other. The time dynamics equations for the parameters  $\tau^U$  e  $\tau^L$  are

$$\tau_t^U = \Lambda\left(\omega_U + \beta_U \tau_{t-1}^U + \alpha_U \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|\right)$$

and

$$\tau_t^L = \Lambda\left(\omega_L + \beta_L \tau_{t-1}^L + \alpha_L \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|\right)$$

---

<sup>10</sup> $\Lambda(\cdot)$  and  $\tilde{\Lambda}(\cdot)$ , which appear hereafter, are logistic transformations to keep the parameter in their proper intervals.

**Normal Cópula (N):** we can define the Normal Copula associated with the bivariate normal as follows:

$$C_N(u_1, u_2|\rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds, \rho \in (-1, 1)$$

where the dependence parameter  $\rho$  is the coefficient of linear correlation. Its dynamic equation is

$$\rho_t = \Lambda \left( \omega_N + \beta_N \rho_{t-1} + \alpha_N \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$$

The Normal copula does not have tail dependence, that is,  $\tau^L = \tau^U = 0$ .

**Cópula T-student (T):** it is associated with the bivariate t-student and is given by

$$C_T(u_1, u_2|\rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left( 1 + \frac{r^2 - 2\rho rs + s^2}{\nu(1-\rho^2)} \right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dr ds$$

where the parameters  $\rho$  e  $\nu$  are the coefficient of linear correlation and the degrees of freedom, respectively. In addition, their time evolution is given by

$$\rho_t = \Lambda \left( \omega_{1T} + \beta_{1T} \rho_{t-1} + \alpha_{1T} \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T_\nu^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot T_\nu^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$$

and

$$\nu_t = \tilde{\Lambda} \left( \omega_{2T} + \beta_{2T} \nu_{t-1} + \alpha_{2T} \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T_\nu^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot T_\nu^{-1}(u_{2,t-j}) \right)$$

T-copula has symmetrical tail dependence with,  $\tau^L = \tau^U = 2T_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$ , where  $T_{\nu+1}$  is the t-student cumulative distribution with  $\nu + 1$  degrees of freedom.

Please note that the above evolution equations follow a kind of restricted ARMA (1,10) process, which is composed of an autoregressive component, to capture any persistence of dependence, and a *forcing variable*. Following [31], this forcing variable is the mean absolute difference between  $u_{1t}$  and  $u_{2t}$  over the previous 10 observations (to the copulas RGC and SJC) and the mean of the result of  $\Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j})$  and  $T_\nu^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot T_\nu^{-1}(u_{2,t-j})$ <sup>11</sup>, the transformed variables, for the Normal and T over the previous 10 observations.

The idea, or intuition, behind this forcing variable is to capture the combined movement of the transformed marginals processed over 10 past observations. If  $u_{1t}$  and  $u_{2t}$  are comonotonic (have a perfect positive association), the distance between them is close to zero<sup>12</sup>. Then, this mean absolute difference gives an idea of how the data behave in relation

<sup>11</sup>Where  $\Phi^{-1}$  and  $T_\nu^{-1}$  are the inverse of the Normal and t-student c.d.f.

<sup>12</sup>For elliptical copulas, we used the mean of marginal transformed products but, the idea is the same. The purpose of the introduction of these products has been to make the results comparable. See [31].

to co-monotonicity. In other words, “*the expectation of this distance measure is inversely related to the concordance ordering of copulas; under perfect positive dependence it will equal zero, under independence it equals 1/3, and under perfect negative dependence it equals 1/2.*” ([31]).

### 3. Modelling dependence between market indexes: definitions and first empirical results

In this section we start by describing our data set and highlighting its main features. Then, in our first modelling stage, we model and estimate the marginals of the four studied indexes considering both their conditional mean and variance. In the next stage, we estimate several copulas.

#### 3.1. Data description

In our analysis, we use four indexes of financial markets: FTSE100 (Financial Times and London Stock Exchange Index), BOVESPA (*Índice da Bolsa de Valores de São Paulo*), IPCMX (*Índice de Precios y Cotizaciones da Bolsa Mexicana de Valores*) and S&P500 (Standard and Poor 500 Index). The data is composed of daily observations, comprising the period from January 1st, 1999 to February 20th, 2008, with a total of 2103 points. During this period, Brazil went on to adopt both flexible exchange rates and formal inflation targets. In this sample, Brazil also faced events that disturbed the world markets in general, such as the terrorist attacks on September 11th, 2001, Brazilian presidency elections in the end of 2002 and the real estate crisis in the United States that started in 2007.

Table 1 shows some descriptive statistics for the log-returns of such data. We can see that this data usually shows signals of both negative asymmetry and kurtosis excess (except BOVESPA which shows positive asymmetry). Also according to Jarque-Bera test statistics, there is evidence that the log-returns are not normally distributed. Meanwhile, estimated mean and standard deviation are visually very similar. These statistics are in line with what is described in the literature on financial data.

The estimates of multivariate patterns are performed in pairs. More precisely, the estimation of the joint distribution via copulas is carried out between the BOVESPA and each of the other indexes in pairs. These results will be discussed later. The main goal at this point is to measure and evaluate the dependence structure between the BOVESPA and the other indexes. These are then the guidelines for the following discussions.

#### 3.2. Modelling the marginal distributions

We study several models for the marginals, both the conditional mean and for the conditional variance. For this univariate setting we assume normal, t-student and t-skewed errors, with the mean equations following autoregressive and/or moving averages processes, and variance equations following EGARCH, TGARCH and PGARCH processes, among

others<sup>13</sup>. The choice of the most appropriate model for the marginals is made taking into consideration the probability integral transform. That is, if the marginal is well specified, then the probability integral transform of the residuals will have uniform distribution  $[0, 1]$ , a result needed to identify conditional copulas

Another important result when dealing with copulas is that the information set to which the model is conditioned upon must be the same for each marginal and underlying copula. To test the validity of this assumption, we add lagged log-returns from other variables and conditional residuals from other models<sup>14</sup>, into the mean and variance equations, that is, we estimate models to the marginals as follows:

$$\begin{aligned} X_{it} &= ARMA(1, 1) + \gamma_{x_j1}X_{jt-1} + \gamma_{x_j2}\varepsilon_{jt-1} + \varepsilon_{it} \\ \sigma_{x_{it}}^2 &= \omega_{x_i} + \beta_{x_i}\sigma_{x_{it-1}}^2 + \alpha_{x_i}\varepsilon_{it-1}^2 + \gamma_{x_j22}\varepsilon_{jt-1}^2, \quad j \neq i \end{aligned}$$

where  $\varepsilon_{it}$  and  $\varepsilon_{it-1}$  are the residuals and one lagged residuals of the model  $i$  and  $\varepsilon_{jt}$  and  $\varepsilon_{jt-1}$  are the residuals and one lagged residuals of the model  $j$ . Note that the vector of information to which the marginals have been conditioned upon is  $\mathbf{w} = (X_{1t-1}, X_{2t-1}, \varepsilon_{1t-1}, \varepsilon_{2t-1})$ .

The results of these estimates are such that all coefficients  $\gamma$ 's are not statistically significant. That is, according to our analysis, the log-return of IBOV is not affected conditionally by the sets of information from the other indexes. Therefore, this suggests that the information passed on from the behavior of other indexes does not affect neither the conditional mean nor the conditional variance of IBOV (given its own information set) and may be dropped from the marginal modeling and, consequently, from the estimates of underlying copulas<sup>15</sup>.

Thus, the indexes log-returns could be modeled, individually, as ARMA (1,1)-GARCH (1,1) processes with skewed-t errors<sup>16</sup> $(\nu_t, \lambda_t)$ . That is,

$$\begin{aligned} X_{it} &= ARMA(1, 1) + \varepsilon_{it} \\ \sigma_{x_{it}}^2 &= \omega_{x_i} + \beta_{x_i}\sigma_{x_{it-1}}^2 + \alpha_{x_i}\varepsilon_{it-1}^2 \\ \varepsilon_{it} &\sim \text{skewed-t}(\nu_i, \lambda_i) \end{aligned} \tag{10}$$

where the skewed-t density is given by:

$$g(z|\nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z \geq -a/b \end{cases}$$

with the constants  $a$ ,  $b$  and  $c$  defined as

$$a = 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1}\right), b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

---

<sup>13</sup>The estimates of these models will not be reported here due to physical space limitations, but the authors make them accessible if requested.

<sup>14</sup>We estimated the bivariate distribution of the pairs.

<sup>15</sup>See [31].

<sup>16</sup>The Skewed-t GARCH model was defined by [16].

where the parameters  $\nu$  and  $\lambda$  representing the degrees of freedom and asymmetry, respectively.

Table 2<sup>17</sup> shows the results of the marginals fit. We can see that all marginals seem to be asymmetric because for all sets the parameter  $\lambda_i$  is significantly different of 0. The equation specified for the variance is also significant (except for the constant  $\omega_{x_i}$  which is not significant - nevertheless we choose not to remove it from the model, due to its long-term interpretation and to that the properties of least squares estimation can be hold). Moreover, there is no autocorrelation in the residuals, neither in the square of the residuals, as shown by Q of Ljung-Box statistics, which indicates that the model is well specified.

In addition, the Kolmogorov-Smirnov tests, used to test the marginal probability transform indicates no evidence that they are not uniform [0,1]. This result allows us to consider that the marginal distributions are adequately specified, a necessary condition to our estimation.

### 3.3. Copula Modelling

With the results from the marginal distributions fit, we start choosing the most appropriate copula function to express the bivariate distribution between the IBOV and each of the other indexes. The focus of our analysis via copulas is to observe the behavior over time of the dependence parameter for each copula function used. However, this dependence parameter is different for each function. That is, each copula function captures specific properties of this structure associated with the marginals. We here use those copulas described previously.

Table 3<sup>18</sup> shows the information criteria used to initially select<sup>19</sup> the copulas above (regarding the dependence structure between BOVESPA and the other indexes). They are the Bayesian Information (BIC), Akaike Information (AIC) and the negative log-likelihood (LL)<sup>20</sup>. According to these criteria, we observe that the SJC copula is the function that best fits the pairs BOVESPA/S&P500 and BOVESPA/IPCMX, while the T-copula fits better the pair BOVESPA/FTSE100. Note that, for a specific pair of indexes, all criteria select (smaller value) the same copula as having the best fit. This was possibly because the sample is relatively large (2103 records). Among the evaluated copulas, the Normal is one with the “worst” fit.

---

<sup>17</sup>All estimates in this study were made using the toolboxes statistics e optimization (Matlab 7<sup>®</sup>), UCSD-GARCH toolbox provided by Kevin Shepard (University of Oxford - Department of Economics), the copula toolbox provided by Andrew Patton (University of Oxford - Department of Economics) and some functions created by the authors for the Matlab 7<sup>®</sup> software.

<sup>18</sup>Besides these four time-variants copula, we estimated nine others copula: the four static copula corresponding to the time-variant used and the Frank, Clayton, Rotated Clayton, Plackett and Gumbel copulas, too static. However, the time-varying copulas have the best results according to information criteria AIC, BIC and LL. As the proposal's work is to discuss the dependence over time did not report these results (available upon request).

<sup>19</sup>A goodness-of-fit test criterion will be discussed in details in the next section.

<sup>20</sup>Note that the sign of the value of the maximum likelihood is negative. This happened because in our computational routines we minimize the negative of likelihood, just for convenience.

Table 4 presents the results of the parameter estimates for the time-varying copula. From them we can make the following observations about the dependence structure:

1. Normal copula - for the pair BOVESPA/FTSE100 all estimates are significant. For the other pairs, only the estimation  $\beta_N$  is significant. This suggests a first-order autocorrelation for the dependence parameters;
2. T and RGC copulas - the significance of the estimates provides evidence that these copulas match well with the pairs in question (only the estimates to  $\beta_G$  in the relation BOVESPA/IPCMX,  $\beta_{2T}$  to BOVESPA/S&P500 and  $\alpha_{1T}$  to BOVESPA/FTSE100 are not significant);
3. SJC copula - the significance of the estimates seems to confirm the selection made by the information criteria AIC, BIC and LL. This copula fits well the pairs BOVESPA/IPCMX and BOVESPA/S&P500;
4. For the pair BOVESPA/S&P500, considering the copula selected by the information criteria, the SJC copula, the only non-significant parameter is  $\beta_L$ . This suggest lack of autocorrelation in the lower tail;
5. All estimated coefficients for the forcing variable, which tries to capture the combined movement of the marginal probability transforms, are significant for the copula indicated by the information criteria (except for the T-copula in the pair BOVESPA/FTSE100). This may indicate that this combined behavior in earlier periods is important for the dependence analysis.

These results allow us to conclude that the joint distributions of the studied pairs must be asymmetric. Also it appears that the functional forms of the employed copulas capture tail dependence.

#### 4. Goodness-of-fit test

Despite AIC, BIC and LL information criteria results in Table 3 indicate which copula could be a good choice, their values are very close among the copulas. Beside this, these information criteria reveals nothing about how good is the model fits to the data. Thus, the problem of deciding which of these copulas is the best “guess” for the data generating process remains. In other words, it is necessary to conduct a more detailed assessment to make our final choice. Some tests of goodness-of-fit have been implemented in the literature to allow the model choice based on copula functions. In this context, some tests of goodness-of-fit have been implemented in the literature<sup>21</sup>.

In line with this, here we use a simulation-based method via parametric bootstrap. The test we employ follows the methodology proposed by [1], which is used in the context of copulas by [30].

The approach is designed to simulate data from the candidate models, re-estimate the models using the simulated data and compute the log-likelihood estimates, comparing

---

<sup>21</sup>See for instance [13] e [7].

them with the original log-likelihood estimates. The models with good fits are those whose log-likelihoods in the simulated data are close to the original log-likelihoods. In other words, we follow the following steps:

1. Estimation of parameters for the candidate models using observed data and computation of the maximum likelihood for each model;
2. Simulation of a set of samples using each model in the previous step, re-estimation of the models using these samples and computation of the log-likelihood;
3. Comparison of the log-likelihood of the simulated data with the original log-likelihood.

As stated by [30], the joint distribution of the log-likelihood estimators is approximately Normal, based on the central limit theorem. Thus, the square Mahalanobis distance can be used to compare the models. This distance is given by

$$D_k^2 = (\boldsymbol{\lambda} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k)S^{-1}(\boldsymbol{\lambda} - \bar{\boldsymbol{\lambda}}_k)', \quad k = 1, \dots, m,$$

where  $\boldsymbol{\lambda}$  is the vector of original maximum log-likelihood estimates from the observed data,  $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_k$  is the vector maximum log-likelihood estimate averages from the simulated data to the model  $k$  and  $S$  is the sample covariance matrix. Assuming normality for these likelihoods,  $mD_k^2$  has distribution  $F_{m, B-1}$  (distribution  $F$  with  $m$  and  $B - 1$  degrees of freedom where  $B$  is the number of simulated samples) under the null hypothesis of which the  $k - th$  model is correct. (See [24]).

Table 5 shows the averaged p-value for the Mahalanobis distance over 100 simulated samples of size 2103 (size of the observed data). We can see that the T-student copula with constant parameters and Normal time-variant copula have a good fit to the data (the null hypothesis, which is discussed above, is not rejected) in all pairs analyzed for each different source of simulated data. The T-student time-variant copula shows a good fit for all pairs except to the pair BOVESPA/S&P500.

In BOVESPA/IPCMX, the copula T-student, RGC and SJC time-variant show a good fit when the data are from the SJC copulas and RGC, that is, when the original copula displays tail dependence (higher and lower asymmetry). When the origin is a copula without tail dependence (Normal) or with symmetric tail dependence (T-student), the T-student, RGC and SJC copulas do not have a good adherence to the data ( $p - value < 0.10$ , the null hypothesis, which the copula is correct, is rejected).

For the pair BOVESPA/S&P500, the copula RGC is chosen only when the data comes from the RGC itself. The SJC is indicated when the origin is a copula that has tail dependence (higher and lower), in this case, the SJC and RGC. When the origin is an elliptical copula, only the constant T-student, T-student time-variant and Normal time-variant are chosen.

Observing the results for the pair BOVESPA/FTSE100, we notice that the T-student time-variant does not have a good fit whatever the origin of the data is. The SJC copula is chosen when the data origin is different from Normal copula, that is, when the data comes from T-student, RGC and SJC. The RGC copula is chosen only when the data origin is the SJC copula or the RGC copula.

We conclude that, even in an asymmetric dependence and time-variant context, T-student constant copula is a good choice when it comes to fitting the data. Similarly, the Normal time-variant copula also offers a good fit to the data. More extreme copulas, as RGC and SJC copulas, which have lower and upper tail dependence, offer a good fit only when the data shows some asymmetric dependence.

## 5. Dependence analysis

Figure 1 mshows the time dynamics of the dependence parameters of the four time-varying copulas on the pair BOVESPA/IPCMX. In panel (a) we have the tail dependence dynamics for the T-copula with symmetric tail dependence (lower and upper). The dependence coefficient for the T-copula (constant) was 0.1613. The evolution of this parameter over time is rather erratic. Some periods are worth to be highlighted, as for instance between the first semester of 1999 and the second semester of 2001, and also from mid 2006 to early 2008, where the dependence seems more unstable.

In panel (b) we have the dependence parameter for the RGC copula (which shows only lower tail dependence), whose constant coefficient is 0.4425. The evolution of this parameter over time is around this constant most of the observed sample. However, this behavior changes from mid-2006, when the dependence starts rising above 0.4425.

In Panel (c) we have the lower tail dependence for SJC copula. The coefficient of lower tail dependence (constant SJC) is 0.3952. Between January 1999 and mid-2000, that rate fluctuates around this value. Since then, the evolution of this parameter remains below this constant until January 2006, when it rises and remains around 0.6.

The coefficient of higher tail dependence for SJC copula is shown in Panel (d). The value for the constant is 0.3140, lower than the 0.3952 constant of the lower tail dependence. This result is confirmed by the evolution over time. This was already expected due to the typical behavior of higher dependence on lower tails in financial markets. However, the dependence on the higher tail seems to be very volatile and not very informative.

In the Panel (e) we have the evolution of the linear correlation coefficient for Normal copula. The value for the constant is 0.5529 and time evolution takes place around this constant, overcoming it only from 2007 onwards.

Figure 2 shows the estimated dependence structures for the case BOVESPA/S&P-500. We may notice in all those plots that all estimated copulas (except the Normal) indicate an existence of tail dependence between BOVESPA and S&P500. The T-copula (constant) registers a coefficient of 0.0923 and its evolution along time, shown on Panel (a), is around this constant coefficient, which indicates that this copula captures relatively low tail dependence time dynamics.

The RGC copula in Panel (b), which measures the dependence in the lower tail, captures a constant coefficient of 0.4487. The time evolution of the parameter fluctuates around that constant except from mid 2006 onwards. From that moment on, the dependence becomes greater than that recorded previously, and above the constant value.

This behavior is also captured by another copula. The SJC copula (Panels c and d) reveals constant coefficients of 0.3974 and 0.3331 in the lower and higher tail, respectively,



and their time evolution show an increase with the parameters overcoming those constants from mid 2006. The dependence in the higher tail becomes greater than the dependence in the lower tail from the second half of 2006. This result is reverse to that expected, since an increased dependence in the lower tail is more commonly found than in higher tail. The linear correlation coefficient has a similar behavior, it is around the constant coefficient, 0.5716, and from 2006 the correlation starts to overcome this constant (But at a lower intensity than for the other copulas).

The dependence structure between BOVESPA and FTSE100 seems more volatile than in the earlier pair. As we can see in Figure 3, the T-copula estimates a constant dependence of 0.02382, while the evolution of the parameter of the varying T-copula (Panel a) ranges from 0 to 0.17. In other words, we can infer that there is a lower dependence time dynamic.

The linear correlation coefficient estimated by the Normal copula (Panel e) evolves around the constant 0.3656. This correlation is lower than those shown for BOVESPA/IPCMX and BOVESPA/S&P500. This lower association between BOVESPA/FTSE100, is also captured by another copula. The dependence in the lower tail given by the RGC copula (Panel b) remains constant around its corresponding 0.2889. And the lower and higher dependence dynamics given by the SJC copula (Panels c and d) remain around their constant coefficients 0.2446 and 0.0999, respectively.

All these dependence parameters are lower than those found for the pairs BOVESPA/IPCMX and BOVESPA/S&P500. This indicates that the dependence between BOVESPA and FTSE100 indexes is lower than both the dependence between the BOVESPA and IPCMX, and the dependence between BOVESPA and S&P500.

Considering the dependence structure that is picked up for these three evaluated pairs, we notice that the degrees of association between the BOVESPA and the other indexes in question seem to have increased from 2006, suggesting a greater interconnection among these markets.

In addition to observing how the time evolution of the dependence structure in each copula processes, we also evaluate the performance of each copula regarding to the calculation of VaR. Considerations on the VaR from copulas will be presented in the next section.

## 6. VaR Calculation and evaluation through copulas

To calculate the Value at Risk we construct portfolios with the three pairs of indexes previously analyzed. The composition of the portfolio is chosen arbitrarily as  $X_{P,t} = 0,5X_{1,t} + 0,5X_{2,t}$ , which means saying that the portfolio is composed by 50% of each index. Other portfolios choices should not interfere on our analysis.

VaR is defined in the following manner:  $VaR(\alpha)_t = \inf_s \{s : F_{P,t}(s) \geq \alpha\}$ , that is, it is the largest loss associated with the portfolio, taking into account a level of significance  $\alpha$  at a time horizon of  $t$  (in our case, 1 day). To calculate the VaR we need to know the portfolio distribution  $F_{P,t}$  and choose the quantile associated to  $\alpha$ . Although  $F_{P,t}$  can be calculated theoretically from the marginal conditional distributions, it is complicated

to reach a closed analytical form for the joint distribution. For this reason we choose to estimate the  $\alpha$  quantiles of  $F_{P,t}$  via simulation.

Hence, we follow the procedure described below:

- Simulate the joint data via the subjacent copula for each fixed  $t$  and obtain estimates for the  $VaR(\alpha)_t$ ;
- Calculate the proportion of the values of  $X_{P,t}$  which in the sample are smaller than  $\widehat{VaR}(\alpha)_t$ . If the marginal distributions and the copula were well specified, this proportion should be close to  $\alpha$ .

To simulate random vectors from copulas, we used the conditional sampling *conditional sampling*<sup>22</sup> method as follows

Let the conditional distribution of  $U_2$  given  $U_1$  be

$$c_{u_1}(u_2) = P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = F_{U_2|U_1}(u_2|u_1) = \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \Delta u_1, u_2) - C(u_1, u_2)}{\Delta u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$$

where  $c_{u_1}(u_2)$  is the partial derivative of the copula function in relation to  $u_1$ . It allows us to generate pairs  $(u_1, u_2)$  in the following manner:

1. Generate two independent  $Uniform(0,1)$  random variables,  $u_1$  e  $t$ ;
2. Consider  $u_2 = c_{u_1}^{(-1)}(t)$ , where  $c_{u_1}^{(-1)}$  is the inverse generalized of  $c_{u_1}$ ;
3. Note that as  $c_{u_1}(t) = F_{U_2|U_1}(t|u_1)$  and  $t$  is an observation of a standard uniform random variable,  $u_2 = c_{u_1}^{(-1)}(t)$  is an observation of the random variable  $U_2|U_1 = u_1$ . Hence we have that the pair  $(u_1, u_2)$  is an observation of the random vector  $(U_1, U_2)$  which has the joint distribution  $C$ ;
4. Transform the uniform random vector  $(u_1, u_2)$  into the desired vector  $(x_1, x_2)$ , using the inverses  $x_1 = F_1^{(-1)}(u_1)$  and  $x_2 = F_2^{(-1)}(u_2)$ , where  $F_1$  and  $F_2$  are the estimated marginal distributions.

Observe that the marginal distributions  $F_1$  and  $F_2$  fare defined as an ARMA(1.1) plus a skewed t- GARCH(1.1). Thus, to obtain the log-returns after simulating the vector  $(u_1, u_2)$ , we use  $(x_1, x_2) = \hat{\mu}_{t,1} + y_{t,1} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{x_1,t}^2}$ ,  $\hat{\mu}_{t,2} + y_{t,2} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_{x_1,2}^2}$ , where  $y_{t,i}$  is the *skewed - t* $(\nu_i, \lambda_i)$  inverse of  $(u_1, u_2)$  and  $\hat{\mu}_{t,1}$ ,  $\hat{\sigma}_{x_1,t}^2$ ,  $\hat{\nu}_i$  and  $\hat{\lambda}_i$  are estimated according to (10).

To test the VaR estimates we used the Kupiec [23] and the Chistoffersen [4] tests. These tests have the same idea. If the probability of exceeding the VaR is  $P^\alpha = \Pr(X_{P,t} < VaR_t(\alpha))$ , the test is conducted under the null hypothesis  $P^\alpha = \alpha$  against the alternative hypothesis  $P^\alpha \neq \alpha$ .

Kupiec test, also called unconditional coverage, is a likelihood ratio test defined as

---

<sup>22</sup>For more details about generation of random vectors via copulas see [29] e [3].

$$\begin{aligned}
LR_K &= -2 \cdot \ln [(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2 \cdot \ln [(1 - N/T)^{T-N} (N/T)^N] \\
LR_K &\sim \chi^2(1)
\end{aligned}$$

where  $N$  is the number of times in which the VaR is exceeded,  $T$  is the size of the sample,  $\alpha$  is the level of significance and  $N/T$  is the estimated proportion of excesses which we call  $\hat{P}^\alpha = N/T$ .

The conditional coverage test by Christoffersen, is also a likelihood ratio test which is given by

$$\begin{aligned}
LR_C &= -2 \ln [(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2 \ln [(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}], \quad \pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}} \\
LR_C &\sim \chi^2(2)
\end{aligned}$$

where  $n_{ij}$  is the number of observations with  $i$  value followed by  $j$  with  $i, j = 0, 1$  (0 means no VaR violation and 1 VaR violation<sup>23</sup>), and  $\pi_{ij}$  are the corresponding estimated probabilities. The test considers the estimated proportion of excesses  $\hat{P}^\alpha = \pi_{01} = \pi_{11}$ , which means that, if the  $N$  losses are independent, the probability of observing a new violation of VaR if has occurred a violation, or not, in the earlier instant must be the same.

In our experiment for the VaR computation we simulate 1000 replications for each  $t$  and for each of the three portfolios. Table 6 shows the results of Christoffersen and Kupiec tests for the VaR calculated on the basis of our simulations. At first, all copulas can be considered to lead to good approximations of the joint distribution in estimating the VaR, as shown by the CT and KT tests (the null hypothesis could not be rejected). This result is consistent with others in the literature. When the marginals are well specified, the underlying copula has a minor role in the context of VaR estimation. As noted by [25], [2] and [11], it is sufficient to obtain good VaR estimates with a constant Normal copula.

The only significant result (setting the level of significance of the test at 10%) according to the CT test is the estimated VaR for RGC copula, in which case, considering a VaR at 5%, the null hypothesis is rejected.

Another interesting result is that taking into account the VaR estimates at 1%, the SJC and RGC copula estimates seem more aggressive<sup>24</sup> than the estimates for the Normal and T copulas (more conservative). At 5%, estimates are conservative for all copulas, apart from the BOVESPA/&SP500 portfolio, where the estimates are aggressive at both 1% and 5%.

## 7. Final remarks

In this paper we estimate time-varying copula functions to capture the dependence structure and its time dynamics between four diverse stock price indexes from the United

---

<sup>23</sup>A VaR violation occurs if  $X_{P,t} < VaR_t(\alpha)$ .

<sup>24</sup>We consider as aggressive the VaR estimates whose estimated quantile is more extreme than the theoretical VaR, otherwise VaR is considered as conservative.

State, the United Kingdom, Brazil and Mexico. We study pairwise dependence structures in two steps. First, we fit a univariate ARMA plus skewed-t GARCH models to the marginal distributions and test their residuals using the Kolmogorov-Smirnov test. We consider the fit to be good if we accept that the probability integral transform for these residuals are Uniform  $(0, 1)$  random variables. For the four indexes under study, according to KS test, we find that these marginals are well adjusted and also asymmetric.

In a second step, using estimates of the marginals, we fit four different time-varying copula functions, Rotated Gumbel, SJC (Symetrized Joe-Clayton), Normal and T-Student, to estimate the joint distribution of the indexes pairs and observe the behavior of their dependence structures. We point out that there is evidence of an asymmetric dependence between BOVESPA and the other indexes. Considering the information criteria AIC, BIC and LL, the SJC copula is indicated as the most appropriate function for the pairs BOVESPA/IPCMX and BOVESPA/S&P500. This suggests the existence of different tail dependences. For the pair BOVESPA/FTSE100, the copula indicated by the information criteria is the T-student. The Normal copula shows the worst result in all pairs.

Another noticeable result from the time dynamics of the dependence parameter estimates is that the dependence seems to be affected by prior co-movements among the marginal distributions. That is, as the estimates for the forcing variable are significant for the copula indicated by the information criteria, knowing the joint movement of all the lagged marginals in prior periods may be important to make inferences about the dependence at time  $t$ .

The information criteria AIC, BIC and LL do not enable us to conclude which copula gives us the best fit to the data. Moreover, the values of those criteria are close to each other. For this reason, we use a test of goodness of fit based on a parametric bootstrap and the square distance of Mahalanobis to verify which copulas best fit the data. We then see that the constant T-student and the time-varying Normal copulas have the best fit to the data regardless its origin. The copulas with asymmetric dependence structures are chosen only when the original data are also from a copula with asymmetric dependence.

Additionally, we evaluate the impact of different copulas on the Value at Risk (VaR) estimation. To do this, we calculate the VaR from simulations of the conditional joint distribution derived from the fitted copulas. All the time-varying conditional copulas show a good performance according to the tests of Kupiec and Christoffersen, which may indicate that, when dealing with time-varying copulas, the copula functional form does not have much relevance in the VaR estimation. With these tests, we also believe that the SJC and RGC copulas, at the significance level of 1%, show more aggressive estimates, as they indicate more extreme quantiles than those expected for a particular level, while the Normal and T copulas provide more conservative estimates, i.e., estimated quantiles are less extreme than the VaR for fixed level (except for the pair BOVESPA/S&P500, where all estimates, at 1% and 5%, are aggressive).

With regard to VaR results, [12] found out that the VaR estimates may be very poor and suffer from computational problems when estimating GARCH models in small samples, as also discussed in [18]. When the sample dimension increases, the biases in the volatility parameters are much smaller, whereas those ones in the copula parameters

remain almost unchanged or even increase. In this case, copula misspecifications do play a role. However, he shows that these effects depend heavily on the sign of dependence: if it is positive, the biases are much smaller and the effects on quantile estimation are much more limited, if not completely offset by marginals misspecifications. Furthermore, in case of positive dependence, different dependence structures can be used with small differences in terms of VaR estimates.

## References

- [1] ALLCROFT, D. J., AND C. A. GLASBEY (2003): “A simulation-based method for model evaluation,” *Statistical Modelling*, 1(3), 1–13.
- [2] CHEN, X., Y. FAN, AND A. PATTON (2004): “Simple tests for models of dependence between multiple financial time series with applications to U.S. equity returns and exchange rates,” Discussion Paper 483, Financial Markets Group, London School of Economics.
- [3] CHERUBINI, U., E. LUCIANO, AND W. VECCHIATO (2004): *Copula methods in finance*, Wiley Finance. John Wiley & Sons, Ltd.
- [4] CHRISTOFFERSEN, P. (1998): “Evaluating interval forecasts,” *International Economic Review*, 39.
- [5] CLEMEN, R. T., AND T. REILLY (1999): “Correlations and copulas for decision and risk analysis,” *Management Science*, 45(2).
- [6] CONTI, R. (2001): “Empirical properties of asset returns: Stylized Facts And Statistical Issues,” *Quantitative Finance*, 1.
- [7] DOBRIÉ, J., AND F. A. SCHMIDT (2007): “Goodness-of-fit test for copulas based on Rosenblatts transformation,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(9).
- [8] EMBRECHTS, P., A. HOEING, AND A. JURI (2003): “Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risk,” *Finance Stochastic*, 7(2), 145–167.
- [9] EMBRECHTS, P., F. LINDSKOG, AND A. MCNEIL (2003): *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance* chap. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. Elsevier.
- [10] EMBRECHTS, P., A. MCNEIL, AND D. STRAUMAN (2002): *Risk Management: Value at Risk and Beyond* chap. Correlation and dependency in risk management. Cambridge.
- [11] FANTAZZINI, D. (2006): “Dynamic copula modelling for Value at Risk,” Discussion paper, Department of Economics and Quantitative Methods. University of Pavia.
- [12] ——— (2009): “The effects of misspecified marginals and copulas on computing the Value at Risk: A Monte Carlo study,” *Computational Statistics and Data Analysis*, Article in press.
- [13] FERMANIAN, J.-D. (2005): “Goodness-of-fit tests for copulas,” *Journal of Multivariate Analysis*, 95(1).
- [14] FERMANIAN, J.-D., AND O. SCAILLET (2004): “Some statistical pitfalls in copula modelling for financial applications,” Paper 108, FAME.
- [15] GUMBEL, E. J. (1960): “Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions,” *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*.
- [16] HANSEN, B. (1994): “Autoregressive conditional density estimation,” *International Economic Review*, (35), 705–730.
- [17] HURD, M., M. SALMON, AND C. SCHLEICHER (2005): “Using copulas to construct bivariate foreign exchange distributions with an application to the sterling exchange rate index,” Discussion Paper 5114, CEPR.
- [18] HWANG, S., AND P. L. V. PEREIRA (2006): “Small sample properties of Garch estimates and persistence,” *The European Journal of Finance*, 12, 473–494.
- [19] IGNATIEVA, E. (2005): “Adaptive estimation of time varying copulae,” Master’s thesis, Humboldt University, Berlin, Germany.
- [20] JOE, H. (1997): *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall, London.
- [21] JOE, H., AND J. XU (1996): “The estimation method of inference functions for margins for multivariate models,” Technical Report 166, University of British Columbia, Department of Statistics.

- [22] JORION, P. (1997): *Value at Risk*. McGraw-Hill, New York.
- [23] KUPIEC, P. (1995): “Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models,” *Journal of Derivatives*, 2.
- [24] MARDIA, K. V., J. T. KENT, AND J. M. BIBBY (1979): *Multivariate Analysis*. Academic Press, New York.
- [25] MARSHAL, R., AND A. ZEEVI (2002): “Beyond correlation: extreme co-movements between financial assets,” Discussion paper, Columbia University.
- [26] MARSHALL, A. (1996): *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*chap. Copulas, marginals and joint distributions. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.
- [27] MENDES, B. V. D. M. (2005): “Computing conditional VaR using time-varying copulas,” *Revista Brasileira de Finanças*, 3(2).
- [28] MENDES, B. V. M., AND A. MORETTI (2002): “Improving financial risk assessment through dependency,” *Statistical Modelling*, 2(2).
- [29] NELSEN, R. (2006): *An introduction to copulas*. Springer-Verlag, New York.
- [30] NIKOLOULOPOULOS, A. K., AND D. KARLIS (2008): “Copula model evaluation based on parametric bootstrap,” *Computational Statistics and Data Analysis*, (52), 3342–3353.
- [31] PATTON, A. J. (2006b): “Modelling asymmetric exchange rate dependence,” *International Economic Review*, 2(47), 527–556.
- [32] SANCETTA, A. (2004): “Copula based Monte Carlo integration in financial problems,” *Faculty of Economics, University of Cambridge*.
- [33] SANCETTA, A., AND S. E. SATCHELL (2001): “Bernstein approximations to the copula function and portfolio optimization,” Working Papers in Economics 0105, Faculty of Economics, University of Cambridge, Cambridge.
- [34] SCHWEIZER, B., AND A. SKLAR (1983): “Probabilistic metric spaces,” *Elsevier Science*.
- [35] SKLAR, A. (1959): “Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges,” *Publications de l’Institut de Statistique de L’Université de Paris*, 8, 229–231.

## 8. Tables

	FTSE100	BOVESPA	IPCMX	S&P500
Mean	4.25E-06	0.00106	0.00097	4.24E-05
Median	0.00046	0.00134	0.00137	0.00043
Maximum	0.05904	0.28832	0.07493	0.05574
Minimum	-0.0606	-0.1223	-0.0966	-0.06
Std. deviation	0.01197	0.02064	0.0154	0.01176
Asymmetry	-0.1934	1.00909	-0.1102	-0.0579
Kurtosis	5.61255	22.1473	5.91558	5.39423
Jarque-Bera	611.183	32481.9	749.125	503.47

Table 1: Descriptive statistics for the log-return of FTSE100, BOVESPA, IPCMX e S&P500

$\hat{\theta}_i \setminus i$	BOVESPA	S&P500	FTSE100	IPCMX
Constant	0.000008 (0.468769)	0.001013** (0.048358)	-0.000006 (0.513455)	0.000971* (0.099809)
AR(1)	0.679380*** (0.000003)	0.029651 (0.452238)	0.645140*** (0.00495)	0.006686 (0.494612)
MA(1)	-0.728150*** (0.00000)	0.006085 (0.490953)	-0.714080*** (0.001347)	0.076289 (0.438495)
$\omega_{x_i}$	0.000018 (0.184044)	0.000002 (0.485211)	0.000002 (0.48097)	0.000008 (0.339417)
$\sigma_{x_{it-1}}^2$	0.889050*** (0.00000)	0.884700*** (0.00000)	0.846700*** (0.00000)	0.853870*** (0.00000)
$\varepsilon_{it-1}^2$	0.059046*** (0.000006)	0.105970* (0.061746)	0.138190** (0.040622)	0.114880*** (0.004179)
$\nu_i$	10.913000** (0.017838)	8.253 (0.282134)	25.518 (0.36407)	6.521100** (0.022394)
$\lambda_i$	-0.094223*** (0.009916)	-0.121500** (0.037019)	-0.186970** (0.043904)	-0.058466** (0.030758)
$Q(20)$	0.2085	0.1616	0.1697	0.3687
$Q^2(20)$	0.9536	0.7299	0.9999	0.5721
K-S Test	0.7895	0.4845	0.8901	0.904

Note: (\*\*\*), (\*\*), (\*) - significant to 1%, 5% and 10% respectively.

Table 2: Results for the marginal distributions

BOVESPA/IPCMX			
	AIC	BIC	LL
<b>SJC</b>	<b>-859.37</b>	<b>-859.35</b>	<b>-429.69</b>
T-student (Constant)	-815.92	-815.91	-407.96
T-student	-814.86	-814.84	-407.43
RGC	-806.02	-806.01	-403.01
Normal	-798.46	-798.45	-399.23
BOVESPA/S&P500			
	AIC	BIC	LL
<b>SJC</b>	<b>-900.06</b>	<b>-900.04</b>	<b>-450.03</b>
RGC	-871.55	-871.54	-435.78
T-student	-858.29	-858.28	-429.15
T-student (Constant)	-848.84	-848.83	-424.42
Normal	-839.55	-839.54	-419.78
BOVESPA/FTSE100			
	AIC	BIC	LL
<b>T-student</b>	<b>-327.1</b>	<b>-327.09</b>	<b>-163.55</b>
SJC	-325.66	-325.65	-162.83
RGC	-320.53	-320.52	-160.27
T-student (Constant)	-315.53	-315.53	-157.77
Normal	-310.9	-310.89	-155.45

Table 3: Information criteria for the estimated copulas



	BOVESPA/IPCMX	BOVESPA/S&P500	BOVESPA/FTSE100		BOVESPA/IPCMX	BOVESPA/S&P500	BOVESPA/FTSE100
Coefficient				Coefficient			
	<i>Normal Copula</i>				<i>RGC Copula</i>		
$\omega_N$	0.32985 (0.180793)	0.29049 (0.456175)	1.1404*** (0.00000)	$\omega_G$	1.2547* (0.094347)	0.22174*** (0.00000)	1.6272*** (0.00000)
$\beta_N$	0.30842*** (0.000001)	0.14164* (0.059382)	0.46722*** (0.00000)	$\beta_G$	-0.088719 (0.64798)	0.42721*** (0.00000)	-0.58258*** (0.000002)
$\alpha_N$	1.3809 (0.216226)	1.6408 (0.432687)	-1.4715*** (0.008836)	$\alpha_G$	-1.6997* (0.054397)	-0.67107*** (0.00000)	-1.3053*** (0.00000)
	<i>SJC Copula</i>				<i>T Copula</i>		
$\omega_U$	1.1837*** (0.00000)	-1.7856*** (0.00000)	0.81694 (0.202516)	$\omega_{1T}$	0.088213*** (0.0035)	-0.221410*** (0.00000)	0.61559* (0.09121)
$\beta_U$	-9.5459*** (0.00000)	-1.218*** (0.00000)	-9.8472 (0.287845)	$\beta_{1T}$	0.12931*** (0.00000)	0.04212*** (0.00000)	0.16211*** (0.00000)
$\alpha_U$	-0.23711*** (0.00000)	3.9466*** (0.00000)	-3.2542 (0.190973)	$\alpha_{1T}$	1.9503*** (0.00000)	2.6157*** (0.00000)	0.21939 (0.478026)
$\omega_L$	-1.96*** (0.00000)	-1.7261*** (0.00000)	2.1506*** (0.00000)	$\omega_{2T}$	5.0*** (0.00000)	-1.9957*** (0.00000)	0.49135*** (0.00000)
$\beta_L$	-0.36862*** (0.00000)	-0.76518 (0.22684)	-9.1768 (0.161564)	$\beta_{2T}$	-0.79866*** (0.00000)	0.23787 (0.323869)	1.7421*** (0.00000)
$\alpha_L$	4.0532*** (0.00000)	3.6656*** (0.00000)	-5.0038*** (0.00000)	$\alpha_{2T}$	-0.070309*** (0.00000)	-0.047506*** (0.00000)	-0.059946*** (0.00000)

Note: (\*\*\*), (\*\*), (\*) - significant to 1%, 5% and 10% respectively. Between brackets  $p$ -value ( $H_0$ : parameter = 0).

Table 4: Results for the copulas estimates

BOVESPA/IPCMX				
Simulated	Original			
	Normal	T-student	SJC	RGC
T-student (constant)	0.23896	0.49149	0.99933	0.38096
Normal	0.76012	0.70262	0.83687	0.16422
RGC	<b>0.00000</b>	<b>0.00018</b>	0.99684	0.99348
SJC	<b>0.00000</b>	<b>0.00012</b>	0.99112	0.73583
T-student	<b>0.00000</b>	<b>0.00072</b>	0.96545	0.25739
BOVESPA/S&P500				
Simulated	Original			
	Normal	T-student	SJC	RGC
T-student (constant)	0.99998	0.97519	0.99984	0.59851
Normal	0.97429	0.7658	0.46346	0.18092
RGC	<b>0.00001</b>	<b>0.00015</b>	0.08636	0.99879
SJC	<b>0.00012</b>	<b>0.00386</b>	0.8279	0.90641
T-student	0.99989	0.75362	0.18559	0.96044
BOVESPA/FTSE100				
Simulated	Original			
	Normal	T-student	SJC	RGC
T-student (constant)	0.46333	0.93894	0.90943	0.89095
Normal	0.82397	0.99951	0.29606	0.51042
RGC	<b>0.00000</b>	0.08059	0.49235	0.91765
SJC	<b>0.00023</b>	0.97065	0.98718	0.97968
T-student	<b>0.00000</b>	<b>0.01518</b>	<b>0.00106</b>	0.05808

Table 5: P-value for the square distance of Mahalanobis between original data and simulated - average over 100 replications

Copula	$\alpha$	BOVESPA/IPCMX			BOVESPA/S&P500			BOVESPA/FTSE100		
		$N/T$	CT	KT	$N/T$	CT	KT	$N/T$	CT	KT
SJC copula	1%	0.86%	0.31917	0.4973	0.76%	0.541711	0.25064	0.86%	0.31917	0.4973
	5%	5.04%	0.840436	0.92833	4.76%	0.127464	0.60698	5.19%	0.957962	0.69798
RJC copula	1%	0.71%	0.657784	0.16425	0.71%	0.657784	0.16425	0.71%	0.657784	0.16425
	5%	5.14%	0.911038	0.7726	4.95%	<b>0.076883</b>	0.9122	5.57%	0.940408	0.24176
T copula	1%	1.09%	0.293145	0.66898	0.95%	0.195182	0.82165	1.00%	0.191056	0.9965
	5%	5.04%	0.840436	0.92833	4.76%	0.685832	0.60698	5.09%	0.918889	0.84962
Normal copula	1%	1.09%	0.293145	0.66898	0.90%	0.239465	0.65262	1.09%	0.293145	0.66898
	5%	5.09%	0.67137	0.84962	5.00%	0.256511	0.99201	5.19%	0.903686	0.69798

Note: The values shown for the tests are their respective p-value.

Table 6: VaR violation percentage ( $N/T$ ), Christoffersen (CT) and Kupiec (KT) Tests

## 9. Figures

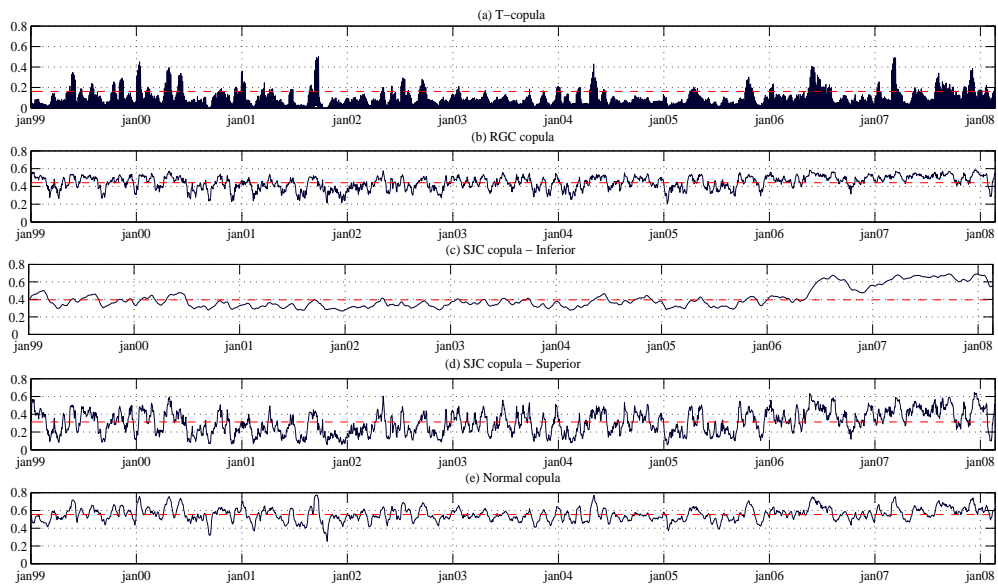


Figure 1: Tail dependence - BOVESPA/IPCMX

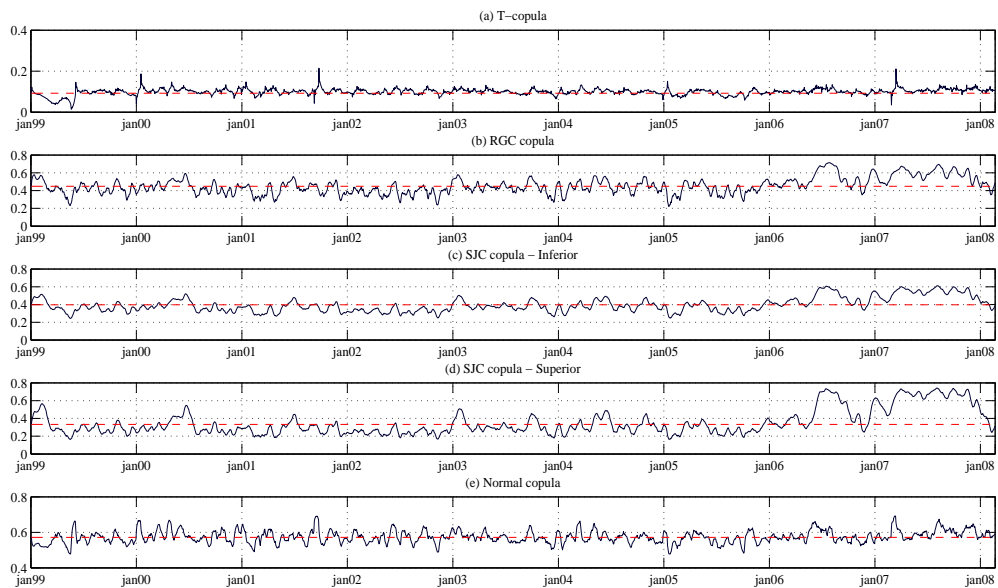


Figure 2: Tail dependence - BOVESPA/S&P500

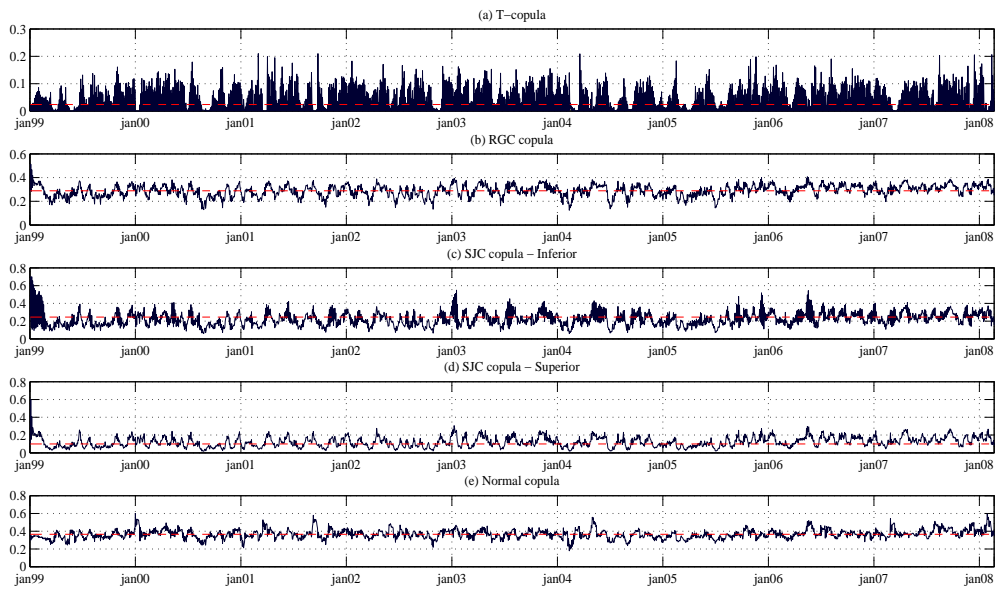


Figure 3: Tail dependence - BOVESPA/FTSE100

# Dinâmica da Dependência Usando Cópulas com Mudança de Regime

Oswaldo Candido da Silva Filho

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Programa de Pós-Graduação em Economia - PPGE*

Flávio Augusto Ziegelmann

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS  
Departamento de Estatística e Programa de Pós-Graduação em Economia – PPGE*

---

## Resumo

Neste trabalho, utilizando cópulas condicionais tempo-variantes como introduzido em Patton (2006), propomos uma nova abordagem para mensurar a dinâmica da dependência incorporando a ela uma mudança markoviana. Ou seja, o parâmetro de dependência foi permitido variar deterministicamente, de acordo com uma equação de evolução, e também de acordo com um processo estocástico de Markov, onde o termo de intercepto da equação de evolução da dependência segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois regimes. Foram feitas algumas simulações de Monte Carlo para comparar os modelos com e sem mudança de regime e uma aplicação do modelo proposto a dados reais, onde o erro padrão para as estimativas foram computados via *block bootstrap*.

*Palavras-chave:* Dependência assimétrica, Cópulas, *Markov switching*, *Block bootstrap*.

*Códigos JEL:* C15, C46, G15.

---

## 1. Introdução

O estudo das estruturas de dependência entre mercados financeiros internacionais tem atraído o interesse de pesquisadores, tanto no campo teórico quanto empírico, e de profissionais. Visando controlar os riscos que se deparam, gerentes de carteiras de ativos e reguladores precisam levar em consideração a dependência entre os ativos no mercado financeiro internacional por exemplo. Questões como a existência de estruturas de dependência assimétricas, como uma maior dependência em determinado período ou mercado, têm forte influência na avaliação e gestão do risco. Além disso, os benefícios advindos da diversificação internacional de ativos podem, também, ser consideravelmente afetados por estas estruturas de dependência assimétricas. Assim, determinar apropriadamente a estrutura de dependência entre ativos é de grande importância na gestão de carteiras e risco, precificação de opções e *hedging*.

Ativos nos mercados financeiros internacionais tendem a apresentar dependência assimétrica, como atestado em [6]. Isso significa que em tempos de crise os retornos dos índices tendem a ser mais dependentes do que em tempos de bonança. Além disso, o processo gerador desses retornos pode ser não linear, não estacionário com caudas pesadas, e as distribuições marginais podem ser assimétricas, leptocúrticas e/ou apresentar heterocedasticidade condicional. Assim, é necessário construir modelos flexíveis o bastante para lidar com essas características. Para lidar com os problemas de heterocedasticidade e caudas pesadas nas distribuições marginais, têm sido utilizados modelos da família GARCH, como descrito em [8], [4] e [12], porém ainda considerando principalmente distribuições elípticas.

Para lidar com estruturas de dependência assimétricas na distribuição multivariada de variáveis aleatórias, principalmente financeiras, tem crescido consideravelmente a utilização de modelos baseados em funções cópula. A principal característica desses modelos é a possibilidade de dividir o problema de identificação da distribuição conjunta em dois componentes: densidades marginais e estrutura de dependência. A modelagem consiste em especificar primeiramente as distribuições marginais, onde é possível explorar muito bem os fatos estilizados sobre variáveis financeiras de forma unidimensional (como a utilização dos modelos GARCH referidos acima), e segundo, determinar a função cópula apropriada, que caracteriza completamente a estrutura de dependência entre as variáveis.

Recentemente, alguns autores têm trabalhado características como não normalidade e a dinâmica da dependência ao longo do tempo, utilizando modelos baseados em cópulas. [23], a partir da definição de cópula condicional, estuda a estrutura de dependência não linear permitindo o parâmetro de dependência variar ao longo do tempo de maneira análoga aos modelos de variância condicional, sendo as marginais modeladas como processos GARCH. [17] utilizam esses modelos cópula-GARCH de maneira semelhante para estudar a estrutura de dependência entre mercados financeiros internacionais. Outros autores têm considerado também modelos com mudança de regime para cópulas condicionais, como [6], [28] e [24]. Eles encontraram significativa assimetria na estrutura de dependência entre os retornos.

Neste trabalho, propomos um novo procedimento para capturar a estrutura de dependência ao longo do tempo. Em nosso modelo, além do parâmetro de dependência ser permitido variar deterministicamente de acordo com [23], ele também muda de acordo com

um processo estocástico markoviano, onde o termo de intercepto da dependência segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois regimes.

Em nossa abordagem, estimamos no primeiro estágio modelos *skewed-t* GARCH para as distribuições marginais, enquanto no segundo estágio estimamos o parâmetro de dependência via copulas. Para avaliar a estrutura de dependência utilizamos a medida de dependência caudal. A escolha do modelo *skewed-t* GARCH univariado para as distribuições marginais assegura que qualquer assimetria encontrada na estrutura de dependência multivariada reflete a própria dependência e não devendo ser atribuída a alguma má especificação na modelagem das marginais.

Observe que o nosso processo de estimação, via máxima verossimilhança, ocorre em dois estágios. Devido a essa divisão no processo, o modelo não leva em consideração a incerteza sobre os estimadores simultaneamente. Assim, devido aos efeitos das estimativas dos parâmetros dos modelos GARCH no primeiro passo, a matriz de variâncias-covariâncias assintótica para os estimadores das cópulas em nosso caso pode ser diferente daquela para estimadores resultantes do uso de verossimilhanças completas. Assim, visando obter erros padrão adequados, calculamos a matrix de variâncias-covariâncias, e portanto os erros-padrão para os estimadores, via *block bootstrap*.

Através de simulações de Monte Carlo, comparamos o modelo proposto àquele sem mudança de regime, utilizado em [30], no intuito de avaliar o desempenho dos modelos. Aplicamos nosso modelo também a dados reais, visando medir e avaliar a estrutura de dependência entre o índice BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e os índices FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*) e S&P500 (*Standard and Poor 500 index*).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: nas seções 2 e 3, são apresentados aspectos metodológicos sobre as cópulas, dependência caudal e o modelo copula-GARCH; na seção 4 discutimos os procedimentos de estimação em um contexto com mudança de regime e também a obtenção dos erros-padrão adequados via *block bootstrap*; na seção 5 aplicamos o modelo proposto a dados simulados e comparamos os resultados aos obtidos com o modelo sem mudança de regime; na seção 6 é feita uma aplicação empírica a dados reais sobre os retornos de índices de mercados financeiros, e na última seção são apresentadas algumas considerações finais.

## 2. Cópulas: conceitos básicos

De acordo com [29], uma cópula  $n$ -dimensional  $C(u_1, \dots, u_n)$  é uma função de distribuição multivariada com domínio  $[0, 1]^n$ , cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo  $[0, 1]$ . E que, para toda distribuição conjunta  $H(x_1, \dots, x_n)$  com marginais  $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ , podemos escrever

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (1)$$

Se  $F_1, \dots, F_n$  são todas contínuas, então  $C$  é uma única cópula associada a  $H$  e pode ser obtida da seguinte forma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (2)$$

onde  $u_1 = F_1(x_1), \dots, u_n = F_n(x_n)$ .

A função densidade associada à função de distribuição conjunta em (1) pode ser obtida facilmente, pois  $F_1, \dots, F_n$  e  $C$  são  $n$ -diferenciáveis. Assim, para o caso bivariado, essa função densidade é dada por

$$h(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \prod_{i=1}^2 f_i(x_i) \quad (3)$$

onde  $h$  é a função densidade associada a  $H$ ,  $f_i$  é função densidade para cada marginal e  $c$  é a densidade cópula, que derivada a partir de (1) é dada por:

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{h(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2))}{\prod_{i=1}^2 f_i(F_i^{(-1)}(u_i))} \quad (4)$$

As cópulas freqüentemente utilizadas na literatura em finanças assumem formas elípticas, são as cópulas gaussiana (Normal) e *t-student*. São chamadas elípticas porque estão associadas a uma forma quadrática de correlação entre as marginais. A estrutura de dependência associada a essa família de cópulas é o bem conhecido coeficiente de correlação de Pearson, que pertence ao intervalo  $[-1, 1]$  (-1 perfeita correlação negativa e 1 perfeita correlação positiva). Como consequência dessas características, essas distribuições são simétricas.

Outras cópulas que têm sido utilizadas são as arquimedianas, que, dependendo da forma funcional do fator gerador<sup>1</sup> associado a elas, podem ter a medida de dependência pertencendo aos mais diversos intervalos de variação. Um exemplo pode ser dado pelas cópulas utilizadas na teoria de valores extremos (EVT - *Extreme Value Theory*), onde podemos citar a cópula de [11] que permite apenas estruturas de dependência positivas (ou na cauda superior), cujo parâmetro pertence ao intervalo  $[0, +\infty)$ . Essa diversidade de funções cópula com estruturas específicas de dependência impossibilitaria uma comparação entre diferentes formas funcionais para cópulas. Para tornar possível esta comparação demos ênfase a uma medida de dependência conhecida como *Tail dependence*<sup>2</sup> (dependência caudal)<sup>3</sup>, que é definida a seguir.

**Definição 1.** Se  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[U_1 \leq \epsilon, U_2 \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[U_2 \leq \epsilon, U_1 \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(\epsilon, \epsilon)}{\epsilon} = \tau^L$  existe, a cópula  $C$  possui dependência na cauda inferior se  $\tau^L \in (0, 1]$ . Caso contrário, a cópula  $C$  não possui dependência na cauda inferior. Da mesma maneira, se o limite  $\lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr[U_1 > \delta, U_2 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr[U_2 > \delta, U_1 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{(1-2\delta+C(\delta, \delta))}{1-\delta} = \tau^U$  existe, a cópula  $C$  possui dependência na cauda superior se  $\tau^U \in (0, 1]$ . Caso contrário, a cópula  $C$  não possui dependência na cauda superior.

---

<sup>1</sup>Esse fator gerador, para cópulas arquimedianas, precisa satisfazer certos critérios como convexidade entre outros. Ver [21] para maiores detalhes.

<sup>2</sup>Para maiores detalhes ver [5], [21], [23]

<sup>3</sup>Outras medidas de dependência têm sido utilizadas para tentar comparar a dependência entre cópulas, como as medidas de concordância como  $\tau$  de Kendall,  $\rho$  de Spearman e o índice de cograduação de Gini, ver [21].



O uso do conceito de dependência caudal nos permite investigar qual modelo é capaz de reproduzir fatos empíricos sobre mercados financeiros. Podemos pensar o coeficiente de dependência caudal como sendo a probabilidade de um evento extremo ocorrer em um mercado dado que este evento extremo ocorre em um outro mercado. Além disso, a dependência caudal é completamente definida pela estrutura de dependência, neste caso a cópula associada, e não é afetada pelas variações nas distribuições marginais.

Existe um grande número de formas funcionais as quais a cópula  $C$  pode assumir. Em [21] podemos encontrar diversos exemplos e saber como construir uma função cópula. Para nossos propósitos vamos testar quatro formas funcionais específicas com características distintas. São elas<sup>4</sup>:

*Cópula de Gumbel* - A estrutura de dependência associada a esta cópula é apenas caudal superior.

$$C_G(u_1, u_2|\theta) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad \theta \in [0, +\infty)$$

*Cópula de Gumbel (Rotated)* - Que possui estrutura de dependência caudal inferior apenas.

$$C_{RG}(u_1, u_2|\theta) = u_1 + u_2 - 1 + C_G(1 - u_1, 1 - u_2|\theta), \quad \theta \in [0, +\infty)$$

*Cópula Joe-Clayton simetrizada*

$$C_{SJC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 0.5 \cdot (C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2|\tau^U, \tau^L) + u_1 + u_2 - 1)$$

onde  $C_{JC}$  é a cópula de Joe-Clayton, também chamada "BB7", dada por

$$C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 1 - \left(1 - \left\{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\right\}^{-1/\gamma}\right)^{-1/\kappa}, \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= 1/\log_2(2 - \tau^U), \\ \gamma &= -1/\log_2(\tau^L) \quad \text{e} \quad \tau^U, \tau^L \in (0, 1). \end{aligned}$$

Essa cópula possui dependência caudal tanto inferior quanto superior que são independentes entre si. Além disso,  $\tau^U$  e  $\tau^L$  representam as medidas de dependência caudal superior e inferior, respectivamente.

*Cópula Normal* - A cópula Normal não possui dependência caudal e a medida de dependência é o coeficiente de correlação linear.

$$C_N(u_1, u_2|\rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds, \quad \rho \in (-1, 1).$$

---

<sup>4</sup>Apresentaremos apenas a forma bivariada das cópulas, pois, as utilizaremos nessa dimensão.

*Cópula t-student* - Da mesma forma que a cópula Normal, a cópula t-student tem como medida de dependência o coeficiente de correlação linear. Porém, essa cópula, apresenta dependência caudal simétrica. Ou seja, a dependência nas caudas tanto inferior quanto superior é simétrica.

$$C_t(u_1, u_2 | \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{r^2 - 2\rho rs + s^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dr ds$$

### 3. Modelo cópula-GARCH

Considerando  $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})$  um vetor bidimensional de séries temporais, podemos representar o nosso modelo cópula-GARCH como

$$H(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}_t) = C_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t} | \mu_1, h_{1t}), F_2(x_{2t} | \mu_2, h_{2t})) \quad (5)$$

sendo  $C_{\theta_{ct}}$  a função cópula com parâmetro de dependência associado,  $\theta_{ct}$ , variante no tempo e  $F_i(x_{it} | \mu_i, h_{it})$ ,  $i = 1, 2$ , as distribuições marginais que seguem um processo GARCH univariado padrão

$$\begin{aligned} x_{it} &= \mu_i + h_{it}^{1/2} \varepsilon_{it} \\ h_{it} &= \omega_i + \beta_i h_{it-1} + \alpha_i \varepsilon_{it-1}^2 \end{aligned}$$

onde  $h_{it}$  é a variância condicional de  $x_{it}$  dadas as informações passadas,  $\varepsilon_{it}$  é uma variável independente e identicamente distribuída com  $\omega_i, \beta_i, \alpha_i > 0$  e  $\alpha_i + \beta_i < 1$  para assegurar  $h_{it} > 0$  e covariância estacionária, respectivamente. Admitimos, também, que o termo aleatório segue uma distribuição *skewed-t*,  $\varepsilon_{it} \sim \text{skewed-t}(\nu_i, \lambda_i)$ , onde a densidade *skewed-t* é dada por

$$g(z | \nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z \geq -a/b \end{cases}$$

as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são

$$a = 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1}\right), b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

com os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  representando os graus de liberdade e assimetria, respectivamente. Assim, a função de distribuição condicional para cada marginal é dada por  $F_i(x_{it} | \mu_i, h_{it}) = \text{skewed-t}_{\nu_i, \lambda_i}\left((x_{it} - \mu_i)h_{it}^{-1/2}\right)$

Como dito anteriormente, o parâmetro de dependência é permitido variar ao longo do tempo. A sua evolução temporal segue um processo ARMA(1,10) restrito onde o intercepto muda de acordo com uma cadeia de Markov de primeira ordem, ou seja,  $\theta_{ct, S_t} =$

$\Lambda(\omega_c^{S_t} + \beta_c \theta_{ct-1} + \psi_t)$  e  $S_t \sim \text{Markov}(P)$  onde  $S_t$  pode assumir dois estados e  $P$  é uma matriz (2x2) de transição entre esses estados e a cadeia de Markov (ou processo de Markov) é irreduzível e ergódica<sup>5</sup>.  $\psi_t$  é uma "variável forçada" definida como a média absoluta da diferença entre  $u_1$  e  $u_2$  para as cópulas RGC e SJC, dada por  $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|$  e a média dos produtos  $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j})$  e  $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T_\nu^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot T_\nu^{-1}(u_{2,t-j})$ <sup>6</sup> para as cópulas Normal e T ao longo de 10 períodos (Ver [23]).  $\Lambda(\cdot)$  é uma transformação logística específica para cada função cópula no intuito de manter o parâmetro de dependência no intervalo adequado à cada função cópula especificada acima. Além disso,  $\theta_{ct}$ , como medida de dependência, vai apresentar as características das cópulas descritas na subseção anterior. Porém, vamos trabalhar apenas com a dependência caudal através das transformações apropriadas de acordo com a definição 1 (exceto com a cópula Normal, que não apresenta dependência caudal).

#### 4. Estimação

Podemos escrever a função de log-verossimilhança da seguinte maneira:

$$l(\theta|\mathbf{x}_t) = \sum_{t=1}^T \log \left( c_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t}|\theta_1), F_2(x_{2t}|\theta_2)|\theta_{ct,S_t}) \prod_{i=1}^2 f_{it}(x_{it}|\theta_i) \right) \quad (6)$$

onde  $\theta_i = \mu_i, h_{it}$ ,  $i = 1, 2$ , e  $\theta$  representa o vetor composto por todos os parâmetros do modelo.

A avaliação da função de log-verossimilhança em (6) pode ser computacionalmente muito intensiva devido à existência de vários processos não observados como  $h_{1t}$ ,  $h_{2t}$  e  $S_t$ . Como (6) é uma função separável, podemos utilizar o método de máxima verossimilhança em dois estágios ou, em outras palavras, podemos utilizar o método inferência iniciando pelas marginais (*Inference from the Margins*), IM, proposto por [16].

Este método consiste em estimar em um primeiro estágio os parâmetros das distribuições marginais univariadas e, utilizando essas estimativas, estimar em um segundo estágio o parâmetro de dependência entre as marginais. Essa abordagem tornou populares os modelos cópula-GARCH<sup>7</sup>, onde as marginais são modeladas como seguindo um processo GARCH univariado e a estrutura de dependência é especificada a partir da escolha da função cópula. Assim, podemos estimar em uma primeira etapa as distribuições para as marginais, separadamente, de acordo com a forma descrita anteriormente, e em uma segunda etapa estimar a estrutura de dependência utilizando as estimativas para as marginais.

A estimação das distribuições marginais é direta, pois segue o processo de estimação dos modelos GARCH tradicionais. Porém, a estimação do parâmetro de dependência através da cópula merece algumas discussões adicionais, pois  $\theta_{ct}$  depende da variável discreta  $S_t$ , com as características definidas acima, que é não-observável. Para a estimação do segundo estágio utilizaremos o filtro de Kim descrito em [19].

<sup>5</sup>Ver [18] para maiores detalhes.

<sup>6</sup>Onde  $\Phi^{-1}$  e  $T_\nu^{-1}$  são as inversas da Normal e *t-student c.d.f.*

<sup>7</sup>Para mais detalhes ver [7], [28], [14], [2], [23], [17].

#### 4.1. Estimação da cópula

A log-verossimilhança em (6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
l(\theta|\mathbf{x}_t) &= \sum_{t=1}^T \log \left( c_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}, \theta_1), F_2(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}, \theta_2)|\theta_{ct, S_t}) \prod_{i=1}^2 f_{it}(x_{it}|\mu_i, h_{it}, \theta_i) \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}; \theta_2) \\
&\quad + \sum_{t=1}^T \log c_t(u_{1t}, u_{2t}|\mu_1, \mu_2, h_{1t}, h_{2t}; \theta_{ct, S_t}) \\
l(\theta|\mathbf{x}_t) &= \ell_{f_1}(\theta_1) + \ell_{f_2}(\theta_2) + \ell_c(\theta_{ct, S_t})
\end{aligned}$$

onde  $\ell_{f_1}(\theta_1) = \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}; \theta_1)$ ,  $\ell_{f_2}(\theta_2) = \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}; \theta_2)$  e  $\ell_c(\theta_{ct, S_t}) = \sum_{t=1}^T \log c_t(u_{1t}, u_{2t}|\mu_1, \mu_2, h_{1t}, h_{2t}; \theta_{ct, S_t})$ , e  $\ell_{f_1}(\theta_1)$  e  $\ell_{f_2}(\theta_2)$  são as funções de log-verossimilhança que foram utilizadas para estimar os parâmetros das distribuições marginais no primeiro estágio do processo de estimação.

Assim, podemos passar para a estimação de  $\ell_c(\theta_{ct, S_t})$ . Reescrevendo  $\ell_c(\theta_{ct, S_t})$ , levando em consideração as variáveis não observadas e decompondo  $c_t$ , temos:

$$\ell_c = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{S_t=0}^1 c_t(u_1, u_2|S_t, w_{t-1}) \Pr[S_t|w_{t-1}] \right) \quad (7)$$

Como os estados  $S_t$  são não observados, para avaliar a log-verossimilhança em (7), precisamos calcular os pesos  $\Pr[S_t|w_{t-1}]$  para  $S_t = 0$  e  $S_t = 1$ , pois, estamos considerando apenas dois estados. Aplicando o filtro de Kim temos o seguinte algoritmo de filtragem que deve ser iterado para  $t = 1, \dots, T$ :

##### (a) Predição de $S_t$

$$\Pr[S_t = l|w_{t-1}] = \sum_{k=0}^1 p_{kl}^{t-1} \Pr(S_{t-1} = k|w_{t-1})$$

para  $l = 0, 1$  e  $p_{kl}^{t-1} = \Pr(S_t = l|S_{t-1} = k, w_{t-1})$ , que é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado  $k$  e  $l$ .

##### (b) Filtragem de $S_t$

$$\Pr(S_t = l|w_t) = \frac{c_t(u_1, u_2|S_t = l, w_{t-1}) \Pr[S_t = l|w_{t-1}]}{\sum_{k=0}^1 c_t(u_1, u_2|S_t = k, w_{t-1}) \Pr[S_t = k|w_{t-1}]}$$

onde  $w_t = [w_{t-1}, u_{1t}, u_{2t}]$ . Em  $t = 1$ , o filtro é inicializado usando as probabilidades estacionárias de  $S_t$  para  $\Pr(S_0 = k|w_0)$ .

O filtro descrito acima nos dá a distribuição de probabilidade de  $S_t$  dadas as informações até  $t$ . Porém, como estamos lidando com séries temporais, é oportuno conhecer a distribuição de  $S_t$  dado o conjunto de informação completo da amostra, ou seja, podemos melhorar as estimativas dentro da amostra utilizando todo  $T$  (em contraste à predição e à filtragem), já que em séries temporais podemos extrair do futuro informações sobre o passado.

Assim, calculamos as probabilidades suavizadas de  $S_t$  dadas por  $\Pr(S_t = l|w_T) = \sum_{k=0}^1 \Pr(S_t = l, S_T = k|w_T)$ , onde  $\Pr(S_t = l, S_T = k|w_T)$  pode ser obtida recursivamente a partir das probabilidades filtradas. Esse processo de suavização funciona como um algoritmo *backward-smoothing* como segue:

1. Dado o processo de filtragem supracitado, obtemos  $\Pr(S_t = l|w_t)$  para  $l = 0, 1$  e  $t = 1, \dots, T$ .
2. Então podemos inicializar o algoritmo de suavização em  $t = T$  e retroceder no tempo recursivamente, sendo  $\Pr(S_T = l|w_T)$  igual a probabilidade filtrada em  $t = T$ .
3. Para cada  $t = T-1, T-2, \dots, 1$ , a distribuição de probabilidade suavizada  $\Pr(S_t = l|w_T)$  é dada por

$$\Pr(S_t = l|w_T) = \sum_{k=0}^1 \frac{p_{lk}(t) \Pr(S_t = l|w_t) \Pr(S_{t+1} = k|w_T)}{\sum_{j=0}^1 p_{jk}(t) \Pr(S_t = j|w_t)}$$

onde  $p_{lk}(t) = \Pr(S_{t+1} = k|S_t = l, w_t)$  é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado  $l$  e  $k$ .

Em  $t = 0$  o algoritmo suavizador nos dá  $\Pr(S_0 = l|w_T)$  que podemos utilizar como valor inicial no algoritmo de filtragem. Assim, completamos o algoritmo *forward-filtering-backward-smoothing* e podemos maximizar (7) em relação aos parâmetros do modelo diretamente de forma numérica.

#### 4.2. Erro-padrão estimado: bootstrap por blocos

Observe que o estimador por IFM de  $\theta, \hat{\theta}$ , foram obtidos através da solução de

$$\left( \frac{\partial \ell_{f_1}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell_{f_2}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \ell_c}{\partial \theta_{ct, S_t}} \right)' = 0$$

separadamente, ou seja, estimamos primeiro os parâmetros para as marginais e na sequência os parâmetros da cópula.

Assumindo que certas condições de regularidade para estimadores por máxima verossimilhança são satisfeitas, tanto para o modelo multivariado quanto para as marginais, os parâmetros estimados via IFM podem ser considerados assintoticamente normais multivariados (Ver [15] e [22]). Logo, temos que

$$\sqrt{T} \left( \hat{\theta} - \theta_0 \right) \rightarrow \mathbf{N} \left( 0, \mathcal{G}^{-1}(\theta_0) \right),$$

onde  $\mathcal{G}(\theta_0)$  é a matriz de informação de [10].

Definindo a função *score* para nosso problema como

$$s(\theta) = \left( \frac{\partial \ell_{f_1}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell_{f_2}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \ell_c}{\partial \theta_{ct, S_t}} \right)',$$

a matriz de Godambe será dada por  $\mathcal{G}(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})'$ , onde  $D = \mathbf{E}[\partial s(\theta)/\partial \theta]$  e  $V = \mathbf{E}[s(\theta)s(\theta)']$ .

A estimação dessa matriz de variância-covariância envolve o cálculo de muitas derivadas em funções de inferência (em nosso caso funções *score* para as funções de verossimilhança) o que pode ser muito tedioso devido a intensidade computacional requerida. Além disso, o maior problema na aplicação do método IFM é a perda de eficiência (em termos de consistência dos estimadores e normalidade assintótica quando comparado ao método de máxima verossimilhança completa) nas estimações, pois a estimação dos parâmetros das marginais, primeiro passo do processo, ignora a relação de dependência entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$  na estimação de  $\hat{\theta}_{ct, S_t}$  (ver [20]).

Assim, para calcular os erros-padrão adequados utilizamos o método *block bootstrap*<sup>8</sup> para estimar a matriz de variância-covariância. O tamanho ótimo do bloco foi calculado de acordo com [26] e [27]. Em outras palavras, usamos o seguinte procedimento:

1. Obter as estimativas dos parâmetros via IFM (como descrito nas subseções anteriores).
2. Amostrar  $n/l$  sub-amostras (com reposição) a partir das observações e gerar uma série temporal de tamanho  $n$ . Onde  $l$  é o tamanho do bloco.
3. Reestimar os parâmetros utilizando a série temporal gerada.
4. Repetir os passos (2) e (3)  $R$  vezes.
5. Usando a matriz de variância-covariância  $R^{-1} \sum_{r=1}^R (\hat{\Omega}(r) - \hat{\Omega})(\hat{\Omega}(r) - \hat{\Omega})'$ , onde  $\hat{\Omega}(r)$  é o vetor de parâmetros estimados em cada replicação  $r$  e  $\hat{\Omega}$  é o vetor de parâmetros obtidos em (1), calcular os erros-padrão para os parâmetros.

## 5. Exemplos numéricos: simulação de Monte Carlo

Nesta seção, nós consideramos dados simulados para avaliar o modelo proposto. Estes dados foram obtidos de duas origens distintas: (i) simulados a partir de um modelo com mudança markoviana (2 regimes), ou seja, a partir do modelo cópula-GARCH

---

<sup>8</sup>Estimamos dois tipos de procedimentos para a aplicação do *block bootstrap*: *stationary bootstrap* (SB) e *non-overlapping block bootstrap* (NBB). Os resultados que apresentamos referem-se ao NBB. Dado o tamanho da amostra utilizada, a variância das estimativas tanto via SB quanto NBB tendem a serem iguais, porém, o viés no NBB é menor (para maiores detalhes ver [25] e [13]).

tempo-variante descrito nas seções anteriores, e (ii) simulados a partir de um modelo sem mudança de regime (1 regime), também baseado no modelo cópula-GARCH tempo-variante descrito em [23] e aplicado a índices de mercados financeiros por [30]. No experimento, foram utilizadas séries temporais bivariadas, geradas a partir das cópulas Normal e Joe-Clayton Simetrizada (SJC), de tamanho  $T = 1000$ ,  $T = 2000$ ,  $T = 5000$ <sup>9</sup>, replicadas 1000 vezes. Escolhemos apenas as cópulas Normal e SJC neste exercício de simulação visando observar o desempenho do modelo quando não há dependência caudal e quando há a presença de dependência nas caudas inferior e superior independentes entre si.

A dinâmica da dependência para os dois modelos é dada por:

#### *Cópula Normal*

Modelo 1 (com mudança de regime):

$$\rho_{ct}(S_t) = \Lambda([0.1 \cdot (1 - S_t) + 0.5 \cdot S_t]) + 1.6 \cdot \rho_{ct-1} - 0.06 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j})$$

onde  $S_t = 0$  ou  $1$ .

Modelo 2 (sem mudança de regime):

$$\rho_{ct} = \Lambda(0.3 + 0.14 \cdot \rho_{ct-1} + 1.6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j}))$$

#### *Cópula SJC*

Modelo 1 (com mudança de regime):

$$\begin{aligned} \tau_{ct}^L(S_t) &= \Lambda([0.3 \cdot (1 - S_t) + 1.1 \cdot S_t]) - 0.5 \cdot \tau_{ct-1}^L - 3 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \\ \tau_{ct}^U(S_t) &= \Lambda([0.9 \cdot (1 - S_t) + 2.6 \cdot S_t]) - 2 \cdot \tau_{ct-1}^U - 6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \end{aligned}$$

onde  $S_t = 0$  ou  $1$ .

Modelo 2 (sem mudança de regime):

$$\begin{aligned} \tau_{ct}^L &= \Lambda(-1.7 - 0.8 \cdot \tau_{ct-1}^L + 3.6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|) \\ \tau_{ct}^U &= \Lambda(-1.8 - 1.2 \cdot \tau_{ct-1}^U + 4 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|) \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>A amostra começou a ser contada depois que as 1000 primeiras observações foram descartadas. A razão disso foi prevenir quanto a algum efeito dos valores iniciais sobre os parâmetros

De posse dos dados simulados, estimamos modelos com e sem mudança de regime e calculamos o erro médio entre a dinâmica da dependência original e estimada. Para comparar os modelos apresentamos os resultados através de gráficos do tipo *box plot*. As figuras de 5 a 7 mostram estes gráficos. No lado esquerdo das figuras está indicado o modelo de origem dos dados simulados e nas colunas o tamanho das amostra. As caixas representam os valores dos 1000 erros médios (um para cada réplica) correspondentes a cada modelo estimado. Para simplificar o exercício, admitimos também que acertamos a forma funcional da cópula, assim, dada a função cópula utilizada para a geração dos dados nos modelos 1 e 2, estimamos modelos com e sem mudança de regime com a mesma forma funcional do modelo original e comparamos os resultados.

Na figura 5 temos os resultados para a cópula Normal. Podemos observar que quando os dados se originam de um modelo sem mudança de regime (Modelo 2) o modelo sem mudança apresenta o melhor desempenho. A mediana está próxima a zero, a variabilidade de erro médio é menor que no modelo com mudança e essa variabilidade parece ser simétrica, como indicado pela divisão proporcional da caixa e dos alongamentos em torno da mediana<sup>10</sup>. Enquanto que no modelo com mudança a mediana é maior que a encontrada no modelo sem mudança, a variabilidade do erro médio também é maior e a dispersão desse erro é assimétrica à direita, indicando que o modelo com mudança tende a subestimar a dependência entre as variáveis. Esse resultado é o esperado e ele se mantém quando o tamanho da amostra aumenta.

Na segunda linha, na mesma figura, quando o modelo de origem apresenta mudança de regime (Modelo 1). Percebemos que a mediana para os dois modelos estimados são próximas uma da outra e próximas de zero independentemente do tamanho da amostra. Na amostra com  $T = 1000$ , o modelo sem mudança apresenta uma dispersão maior que no modelo com mudança e essa dispersão tende a apresentar uma certa assimetria à esquerda, indicando uma superestimação do parâmetro de dependência. Essa assimetria diminui quando o tamanho da amostra aumenta. Quando a amostra tem tamanho  $T = 2000$ , esses resultados se mantêm. Nos dois casos, como esperado, o modelo com mudança apresenta um melhor desempenho, pois mostrou uma menor variabilidade. Quando  $T = 5000$ , o modelo sem mudança passa a apresentar uma variabilidade menor que no modelo com mudança e um melhor desempenho. Esse último resultado é contrário ao esperado.

As figuras 6 e 7 apresentam os *box plots* para os parâmetros de dependência caudal inferior e superior, respectivamente, associados a cópula SJC. Com relação a dependência na cauda inferior (figura 6), percebemos que quando o modelo de origem não tem mudança de regime (Modelo 2) a mediana para os dois modelos estimados é menor que zero, a variabilidade do erro médio tende a ser simétrica e o modelo com mudança de regime apresenta uma menor dispersão quando o tamanho da amostra aumenta. Além disso, o posicionamento das caixas abaixo de zero indica que ambos os modelos superestimam a dependência caudal inferior. O modelo sem mudança obteve um melhor desempenho do que o modelo com

---

<sup>10</sup>O alongamento, além da caixa, representa o valor mais extremo dentro de uma extensão de 1.5 vezes o intervalo interquartil (entre primeiro e o terceiro quartil), representado pela caixa. O corte no retângulo na altura da mediana representa o intervalo de confiança a 95% para a mesma.



mudança pois a mediana é mais próxima de zero e, para o tamanho da amostra  $T = 1000$ , apresenta uma menor variabilidade. Quando o tamanho da amostra aumenta o melhor modelo continua sendo aquele sem mudança, porém a variabilidade dos erros no modelo com mudança tende a diminuir.

Quando processo gerador dos dados é o modelo com mudança de regime (Modelo 1), notamos, através da segunda linha de gráficos na figura 6, que o erro médio em relação ao modelo sem mudança apresenta uma mediana maior que zero e uma variabilidade maior que o modelo com mudança de regime. O modelo com mudança mostra uma mediana próxima a zero. O erro médio em ambos os modelos apresenta uma dispersão simétrica como indica o posicionamento da caixa e os alongamentos divididos de maneira proporcional em torno da mediana. Esse resultado se mantém a medida que o tamanho da amostra aumenta. Dado que a variabilidade do erro no modelo com mudança é menor, como pode ser visto pela menor amplitude da caixa e dos alongamentos, e a mediana é mais próxima de zero, o modelo com mudança apresenta um melhor desempenho.

Observando os resultados para a dependência caudal superior (figura 7), percebemos que quando a origem dos dados é um modelo sem mudança de regime (Modelo 2), o modelo com mudança de regime, apesar de apresentar uma menor variabilidade, tende a superestimar o parâmetro de dependência caudal superior, como indicado pela mediana negativa e o posicionamento da caixa abaixo de zero, independentemente do tamanho da amostra. O modelo sem mudança mostra uma mediana próxima de zero e a variabilidade do erro médio tende a diminuir quando o tamanho da amostra aumenta. A distribuição do erro em ambos os modelos tende a ser simétrica. Assim, o melhor modelo é o sem mudança que apresenta uma mediana mais próxima de zero.

Quando o modelo originário possui mudança de regime (Modelo 1), o modelo sem mudança tende a superestimar o parâmetro de dependência caudal superior como pode ser constatado pela posição abaixo de zero tanto da caixa quanto da mediana. O erro em ambos os modelos tem uma distribuição simétrica e o grau de dispersão diminui quando o tamanho da amostra aumenta. Neste caso, o modelo com mudança é a melhor escolha. Isto é confirmado pela menor amplitude tanto da caixa quanto dos alongamentos, quando comparado ao modelo sem mudança, além dessa amplitude diminuir quando o tamanho da amostra aumenta.

Uma característica que podemos notar no modelo que propomos é que o erro médio tende a ter uma variabilidade menor que o modelo sem mudança de regime, exceto quanto a distribuição é Normal e o processo gerador dos dados é um modelo sem mudança de regime.

## 6. Análise dos dados empíricos

Para nossa análise, utilizamos três índices de mercados financeiros: FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*), BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e S&P500 (*Standard and Poor 500 index*). Todos os dados são de frequência diária compreendendo o período de 1º de Janeiro de 1999 a 10 de Julho de 2009, totalizando 2435 observações. A Tabela 1 mostra algumas estatísticas descritivas para as três

séries. Elas mostram sinais claros de não normalidade com assimetria negativa, exceto para BOVESPA, e coeficiente de curtose acima de 3 para todas as séries.

### 6.1. Distribuições marginais

Os resultados para cada *skewed-t* GARCH univariado são apresentados na Tabela 2. Podemos perceber que o coeficiente de assimetria é negativo e significativo para todas as séries. A assimetria negativa que encontramos captura o fato de que a distribuição das marginais apresenta cauda pesada à esquerda (cauda inferior). Ou seja, grandes retornos negativos, como observado em períodos de crise, são mais prováveis que grandes retornos positivos de mesma magnitude. Observe também que o baixo valor dos graus de liberdade, e também dos respectivos desvios-padrão, para o termo de perturbação dos retornos do BOVESPA e S&P500 indicam que eles possuem caudas mais extensas, neste caso, a utilização da distribuição Normal não seria apropriada. Além disso, o elevado valor de  $\beta_i$  (acima de 85%) indica uma alta persistência na volatilidade. Portanto, torna-se claro que a utilização das distribuições multivariadas Normal ou *t-student* não seriam apropriadas para descrever a distribuição conjuntas dos retornos em questão.

Podemos notar também que não há autocorrelação nos resíduos, nem nos quadrados dos resíduos, como mostrado pela estatística Q de Ljung-Box, o que pode indicar que o modelo está bem especificado. Além disso, os testes Kolmogorov-Smirnov (KS), Berkowitz (Berk) e Anderson-Darling (AD), que utilizamos para testar as marginais transformadas, não indicou evidências de que elas não sejam uniformes(0,1).

### 6.2. Cópulas

A Tabela 3 mostra os resultados para as estimações das quatro cópulas, descritas anteriormente, com mudança de regime. Pudemos verificar que ambos os regimes, de alta e baixa dependência, são persistentes, como as elevadas probabilidades  $p$  e  $q$  indicam. Notamos também uma expressiva mudança no intercepto da dependência entre os regimes de baixa e de alta dependência.

Nas figuras 1 e 2 temos as probabilidades suavizadas, considerando o regime de alta dependência, para os pares de índices BOVESPA-S&P500 e BOVESPA-FTSE100, respectivamente. Podemos observar que a partir de 2006 a relação de dependência entre ambos pares saltou para um regime de alta dependência. Note que, a partir nesse momento começam a aparecer os primeiros indícios do que viria a ser uma das maiores crises financeiras já vista.

Observando as figuras 3 e 4, onde estão representadas as dinâmicas da dependência<sup>11</sup> capturadas pelas cópulas estimadas, podemos notar a mudança no grau de dependência a partir de 2006. No painel (a) de cada figura temos a correlação de Pearson ( $\rho$  de Pearson), que o parâmetro de dependência da cópula Normal. Note que este parâmetro sai de algo

---

<sup>11</sup>Já estamos considerado a datação dos regimes a partir das probabilidades suavizadas mostradas nas figuras 1 e 2.

em torno de 0.5 e 0.2 para 0.8 e 0.6 a partir de 2006, nos pares BOVESPA-S&P500 e BOVESPA-FTSE100 respectivamente.

O mesmo comportamento pode ser observado para os parâmetros de dependência caudal, nas cópulas *t-student*, SJC e *rotated* Gumbel (painéis (b), (c) e (d)). Na cópula *t-student*, o parâmetro de dependência caudal, que é o mesmo para ambas as caudas, situou-se em torno de zero até pouco antes de 2006, quando passa para em média 0.25, no par BOVESPA-S&P500, e 0.1, no par BOVESPA-FTSE100. Esse resultado pode sugerir que o regime de baixa dependência não apresenta dependência nas caudas, ao passo que no regime de alta dependência a dependência caudal passa a ser positiva.

Os parâmetros de dependência caudal inferior captados pelas cópulas SJC e *rotated* Gumbel mostraram uma magnitude maior do que aqueles encontrados na cópula *t-student*, provavelmente devido a simetria imposta pela forma funcional (elíptica) desta última. Ambos os parâmetros,  $\tau^L$  e  $\theta$  (parâmetros de dependência caudal inferior associados às cópulas SJC e *rotated* Gumbel, respectivamente), apresentaram resultados semelhantes no par BOVESPA-S&P500, permanecendo em torno de 0.4 no regime de baixa dependência e 0.6 no regime de alta dependência. No par BOVESPA-FTSE100, o parâmetro  $\theta$  apontou para uma dependência caudal inferior, no regime de baixa dependência, maior do que o parâmetro  $\tau^L$  (em média 0.2 e 0.1, respectivamente). No regime de alta dependência, ambos os parâmetros situaram-se em torno de 0.4 porém, o parâmetro  $\tau^L$  apresenta, aparentemente, uma volatilidade maior do que  $\theta$ .

Com relação à dependência na cauda superior,  $\tau^U$ , associada a cópula SJC, podemos dizer que, para o par BOVESPA-S&P500, no regime de baixa dependência, ele situou-se em torno de 0.3 e em torno de 0.6 no regime de alta dependência. Para o BOVESPA-FTSE100, ele permaneceu próximo de zero e em torno de 0.3 nos regimes de baixa e alta dependência, respectivamente.

De acordo com os resultados encontrados, podemos verificar que: (i) BOVESPA apresenta uma maior relação de dependência com o S&P500 do que com o FTSE100, pois, os parâmetros de dependência estimados para o par BOVESPA-S&P500 apresentaram magnitude maior que os estimados para o par BOVESPA-FTSE100; (ii) a dependência caudal relativamente mais baixa encontrada no regime de baixa dependência, pode indicar que, nesse regime, pode não haver dependência nas caudas ou esta é simétrica. Neste caso, pode haver não apenas uma mudança no parâmetro de dependência ao longo do tempo mas, também, uma mudança na própria estrutura de dependência. Ou seja, a forma funcional da multivariada conjunta pode mudar ao longo do tempo, alternando entre uma forma simétrica, sem dependência caudal ou com uma baixa dependência caudal, (que é o caso das distribuições elípticas) e uma forma com uma estrutura de dependência mais extrema, como a cópula *rotated* Gumbel, que utilizamos neste trabalho.

## 7. Considerações finais

Tratamos neste trabalho a importante questão da modelagem da estrutura de dependência entre variáveis aleatórias através de funções cópulas com parâmetros que variam ao longo do tempo. O modelo proposto incluiu um novo procedimento para capturar a

evolução temporal do parâmetro de dependência, que além de variar deterministicamente também incorpora uma mudança estocástica através de uma cadeia da Markov de primeira ordem. Tal procedimento, tanto em dados reais quanto em dados simulados, se mostrou flexível, apropriado e ofereceu boas intuições sobre a dinâmica da dependência ao longo do tempo entre índices de mercados financeiros.

No exercício com dados simulados, que utilizamos como uma maneira de avaliar e extrair mais informações sobre o modelo que propomos. Pudemos perceber que o modelo com mudança de regime e distribuição não elíptica não somente reproduziu adequadamente as características empíricas comumente encontradas em retornos de índices de mercados financeiros, como foi bem sucedido nas estimações dessas características. Percebemos indiretamente também, que retornos negativos extremos são *tail-dependent*, possui uma dependência caudal, enquanto retornos positivos extremos são *tail-independent*, tendem a ser independentes.

No experimento com dados reais, tentamos captar a estrutura de dependência, e sua evolução temporal, entre o índice BOVESPA e os índices S&P500 e FTSE100. Para isso, admitimos assimetrias nas caudas da distribuição conjunta e utilizamos a medida de dependência caudal como principal parâmetro de nossa análise. Isso é feito devido a possível assimetria e excesso de curtose encontrados nas distribuições marginais.

Conduzimos nossa análise de forma a observar a estrutura de dependência, bivariada, associada aos pares BOVESPA/S&P500 e BOVESPA/FTSE100 em dois passos. Primeiro, ajustamos modelos *skewed t*-GARCH, univariados, para as marginais e testamos, utilizando os testes de Kolmogorov-Smirnov (KS), Berkowitz (Berk) e Anderson-Darling (AD), se a transformada integral de probabilidade dos resíduos poderia ter distribuição uniforme (0,1). Para os três índices em estudo, segundo os testes, pudemos considerar que estas marginais foram bem ajustadas e que devem ser assimétricas, como mostraram as estimativas, significativas segundo seu p-valor, para  $\lambda_i$ ,  $i = \text{BOVESPA, S\&P500 e FTSE100}$ .

Em um segundo momento, utilizando as estimativas para as marginais, ajustamos quatro diferentes funções cópulas tempo-variantes com mudança de regime, *Rotated Gumbel*, *SJC (Symetrized Joe-Clayton)*, Normal e *T-student*, para estimar a distribuição conjunta dos pares supracitados e observar o comportamento da suas estruturas de dependência. Com esse modelo pudemos identificar dois regimes distintos: um com alta dependência e outro com baixa dependência. Além da diferença em termos de magnitude dos parâmetros, podemos inferir que tanto a assimetria quanto a curtose podem ser diferentes entre os regimes. Ou seja, o regime com alta dependência também pode ter maior assimetria e caudas mais pesadas. Isto pode sugerir que além de uma dependência assimétrica, onde o parâmetro de dependência muda ao longo do tempo, podemos ter a própria estrutura de dependência mudando ao longo do tempo<sup>12</sup>. Embora tenhamos identificado os regimes como alta e baixa dependência, levando em consideração apenas as medidas de dependência nas caudas, se observarmos a cópula Normal notamos que, em ambos os regimes, o BOVESPA possui uma elevada relação de dependência com os demais índices (neste caso levando em consideração o  $\rho$  de Pearson).

Para evitar problemas relacionados ao processo de estimação em dois estágios (pois,

---

<sup>12</sup>Ver [9] para uma aplicação relacionada a estrutura de dependência mudando ao longo do tempo

dessa forma, o modelo não leva em consideração a incerteza sobre os estimadores simultaneamente), calculamos a matriz de variância-covariância através do método *block bootstrap*.

Assim, de acordo com estas considerações, o procedimento que propomos para medir a dinâmica da dependência entre variáveis aleatórias, que em outras palavras estende o modelo descrito em [23] através da introdução de uma cadeia de Markov escondida, que captura mudanças de regime não observadas, é adequado na medição e avaliação de estrutura de dependências que apresentam características assimétricas como nos índices de mercados financeiros que tratamos neste trabalho.

## Referências

- [1] ANDERSON, T. W., AND D. A. DARLING (1952): “Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes,” *Ann. Math. Statistics*, 23, 193–212.
- [2] BARTRAM, S., S. TAYLOR, AND Y. H. WANG (2007): “The euro and European financial market integration,” *Journal of Banking and Finance*, 31, 1461–1481.
- [3] BERKOWITZ, J. (2001): “Testing density forecasts with applications to risk management,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 489–501.
- [4] BOLLERSLEV, T. (1986): “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, (94), 238–276.
- [5] CHERUBINI, U., E. LUCIANO, AND W. VECCHIATO (2004): *Copula methods in finance*, Wiley Finance. John Wiley & Sons, Ltd.
- [6] CHOLLETE, L., A. HEINEN, AND A. VALDESOGO (2008): “Modeling international financial returns with a multivariate regime switching copula,” MPRA Paper 8114, Munich Personal RePEc Archive.
- [7] DIAS, A., AND P. EMBRECHTS (2004): “Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance,” .
- [8] ENGEL, R. (1982): “Autoregressive conditional heteroskedasticity models with estimation of variance of United Kingdom inflation,” *Econometrica*, (50), 987–1007.
- [9] GARCIA, R., AND G. TSAFAK (2009): “Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets,” *CIRANO Scientific series*.
- [10] GODAMBE, V. P. (1960): “An optimal property of regular maximum likelihood estimation,” *Ann. Math. Statist.*, 31, 1208–1211.
- [11] GUMBEL, E. J. (1960): “Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions,” *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*.
- [12] HANSEN, B. (1994): “Autoregressive conditional density estimation,” *International Economic Review*, (35), 705–730.
- [13] HÄRDLE, W., J. HOROWITZ, AND J.-P. KREISS (2001): “Bootstrap methods for time series,” *Working Paper*.
- [14] HU, L. (2006): “Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach,” *Applied Financial Economics*, 10, 717–729.
- [15] JOE, H. (1997): *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall, London.
- [16] JOE, H., AND J. XU (1996): “The estimation method of inference functions for margins for multivariate models,” Technical Report 166, University of British Columbia, Department of Statistics.
- [17] JONDEAU, E., AND M. ROCKINGER (2006): “The copula-GARCH model of conditional dependencies: an international stock market application,” *Journal of International Money and Finance*, (25), 827–853.
- [18] KEMENY, J. G., AND J. L. SNELL (1960): *Finite markov chains*. Springer-Verlag.
- [19] KIM, C.-J., AND C. NELSON (1999): *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*. MIT press.
- [20] LIUA, Y., AND R. LUGER (2009): “Efficient estimation of copula-GARCH models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2284–2297.
- [21] NELSEN, R. (2006): *An introduction to copulas*. Springer-Verlag, New York.

- [22] PATTON, A. J. (2006a): “Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths,” *Journal of Applied Econometrics*, 21, 147–173.
- [23] ——— (2006b): “Modelling asymmetric exchange rate dependence,” *International Economic Review*, 2(47), 527–556.
- [24] PELLETIER, D. (2006): “Regime-switching for dynamic correlation,” *Journal of Econometrics*, (131), 445–473.
- [25] POLITIS, D. N. (2003): “The Impact of Bootstrap Methods on Time Series Analysis.,” *Statist. Science*, 18, 219–230.
- [26] POLITIS, D. N., AND H. WHITE (2004): “Automatic block-length selection for the dependent bootstrap,” *Econometric Reviews*, 23(1), 53–70.
- [27] POLITIS, D. N., H. WHITE, AND A. J. PATTON (2007): “Correction: Automatic block-length selection for the dependent bootstrap,” *Working Paper*.
- [28] RODRIGUEZ, J. (2007): “Measuring financial contagion: a copula approach,” *Journal of Empirical Finance*, (14), 401–423.
- [29] SCHWEIZER, B., AND A. SKLAR (1983): “Probabilistic metric spaces,” *Elsevier Science*.
- [30] SILVA FILHO, O. C., AND F. A. ZIEGELMANN (2009): “Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas: Applications to Value at Risk (VaR),” in *Fourth Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, São Paulo-Rio de Janeiro.

## 8. Tabelas

	FTSE100	BOVESPA	S&P500
Média	-0.000145	0.000814	-0.000139
Mediana	0.000254	0.001153	0.000399
Máximo	0.093842	0.288325	0.109572
Mínimo	-0.092646	-0.122260	-0.094695
Desvio-padrão	0.013911	0.022353	0.014360
Assimetria	-0.126056	0.725801	-0.105590
Curtose	8.541590	16.91562	9.911983

Tabela 1: Estatísticas descritivas para o log-retorno de FTSE100, BOVESPA e S&P500

	BOVESPA	S&P500	FTSE100
$\omega_i$	0.000014 (0.000000)	0.000001 (0.000000)	0.000002 (0.000000)
$\alpha_i$	0.066197 (0.000151)	0.10867 (0.004137)	0.13823 (0.005505)
$\beta_i$	0.8985 (0.000112)	0.88685 (0.001158)	0.85403 (0.003215)
$\nu_i$	10.175 (2.8345)	8.0198 (1.3563)	17.519 (30.143)
$\lambda_i$	-0.095352 (0.000989)	-0.09229 (0.003451)	-0.13125 (0.007569)
$Q^2(10)$	0.5294	0.2237	0.9935
$Q^2(20)$	0.8995	0.6886	0.9918
KS	0.2758	0.1832	0.3544
Berk	0.2507	0.2296	0.1273
AD	0.3910	0.3520	0.1790

Tabela 2: Resultados para as distribuições marginais

Estimativas dos modelos *skewed-t* GARCH univariados com a média omitida. Erros padrão entre parênteses. As três últimas linhas mostram os testes de *goodness-of-fit* para a transformada integral de probabilidade das marginais. KS é o p-valor para o teste de Kolmogorov-Smirnov, Berk é o p-valor para o teste de Berkowitz proposto em [3] e AD é teste de Anderson-Darling [1] para uniformidade.

BOVESPA/S&P500		BOVESPA/FTSE100	BOVESPA/S&P500		BOVESPA/FTSE100
Coeficiente			Coeficiente		
<i>Normal</i>			<i>Rotated Gumbel</i>		
$\omega_c^0$	4.5861 (0.3185)	0.1121 (0.0024)	$\omega_c^0$	0.3332 (0.0097)	-0.8897 (0.0274)
$\omega_c^1$	2.4842 (0.1708)	0.4596 (0.0463)	$\omega_c^1$	-1.089 (0.1282)	-1.5898 (0.0765)
$\beta_c$	-2.7011 (0.0881)	1.6026 (0.2491)	$\beta_c$	0.3754 (0.0957)	0.5981 (0.0276)
$\alpha_c$	0.0409 (0.0184)	-0.0639 (0.0112)	$\alpha_c$	-0.4409 (0.1361)	-0.5403 (0.0891)
$p$	0.9949 (0.0004)	0.9828 (0.0038)	$p$	0.9939 (0.0003)	0.9895 (0.0006)
$q$	0.9868 (0.0009)	0.9837 (0.0042)	$q$	0.9899 (0.0006)	0.9877 (0.0007)
logL	616.7258	246.4187	logL	580.8390	240.8120
Coeficiente			Coeficiente		
<i>Joe-Clayton Simetrizada</i>			<i>T-student</i>		
$\omega_{c,U}^0$	0.8662 (1.7861)	-0.6244 (1.3647)	$\omega_c^0$	1.3325 (0.0921)	1.0723 (0.0802)
$\omega_{c,U}^1$	2.6533 (0.5051)	2.2947 (0.6377)	$\omega_c^1$	2.5377 (0.1704)	1.9853 (0.4438)
$\beta_{c,U}$	-2.090 (1.2702)	-4.9323 (0.0952)	$\beta_c$	-0.5090 (0.0726)	-1.5101 (0.0305)
$\alpha_{c,U}$	-6.0344 (1.3270)	-9.9576 (0.5492)	$\alpha_c$	0.1390 (0.0244)	0.1768 (0.0017)
$\omega_{c,L}^0$	0.2843 (0.1754)	-4.5779 (1.2767)	$\nu^0$	22.7868 (2.0186)	18.7491 (2.6023)
$\omega_{c,L}^1$	1.1107 (0.8702)	-0.7192 (0.2104)	$\nu^1$	11.4656 (0.2288)	12.2976 (0.0937)
$\beta_{c,L}$	-0.5226 (1.7343)	-4.1666 (0.7124)	-	-	-
$\alpha_{c,L}$	-2.9645 (1.5617)	8.3531 (1.8906)	-	-	-
$p$	0.9974 (0.0002)	0.9924 (0.0005)	$p$	0.9957 (0.0003)	0.9993 (0.0001)
$q$	0.9989 (0.0001)	0.9895 (0.0007)	$q$	0.9984 (0.0001)	0.9995 (0.0000)
logL	594.8453	246.4440	logL	618.8957	250.2763

Tabela 3: Resultados para as estimações das cópulas



## 9. Figuras

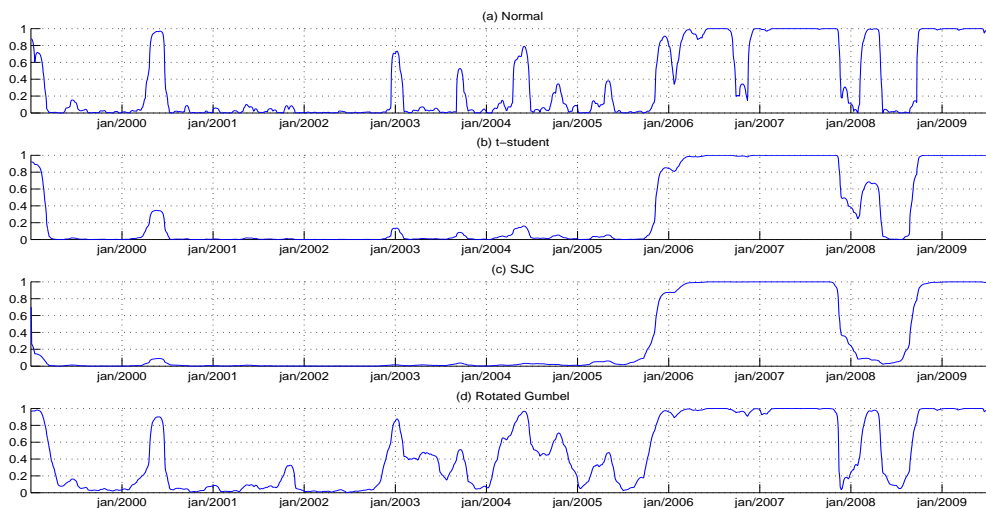


Figura 1: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-S&P500)

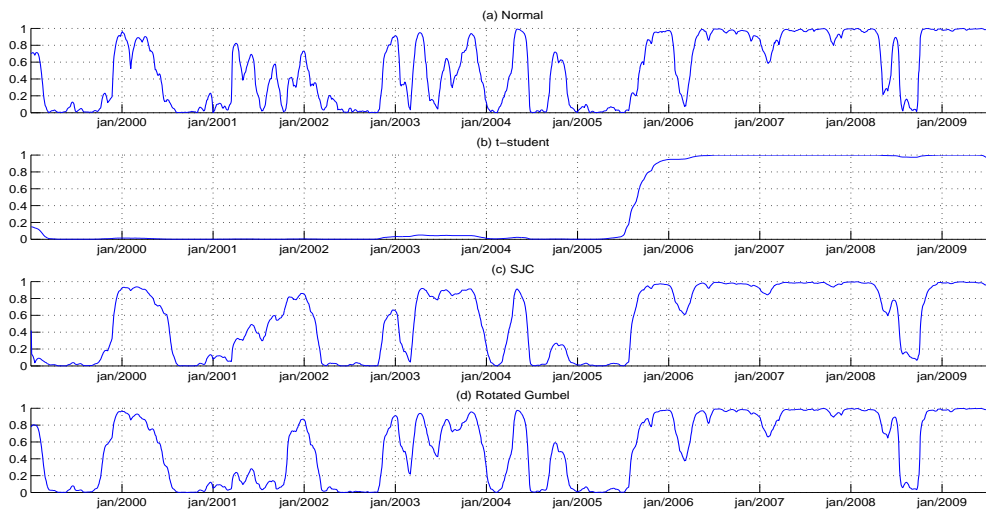


Figura 2: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-FTSE100)



Figura 3: Dinâmica da dependência (BOVESPA-S&P500)

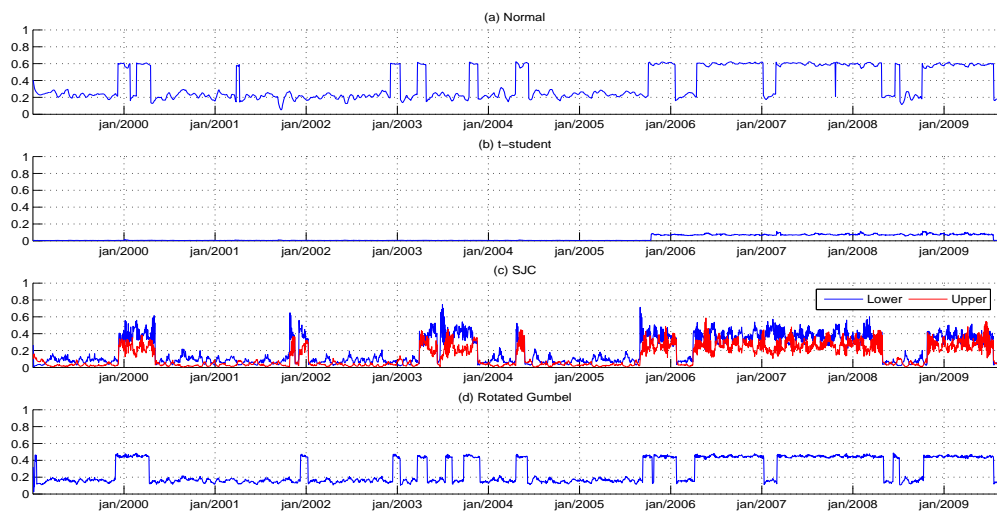


Figura 4: Dinâmica da dependência (BOVESPA-FTSE100)

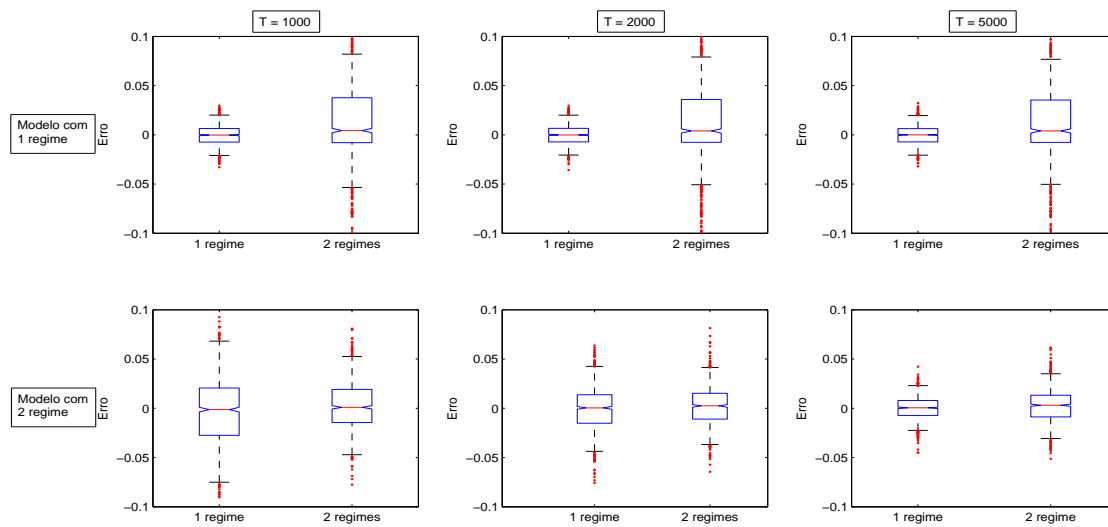


Figura 5: Box plot - erro na dependência (cópula Normal)

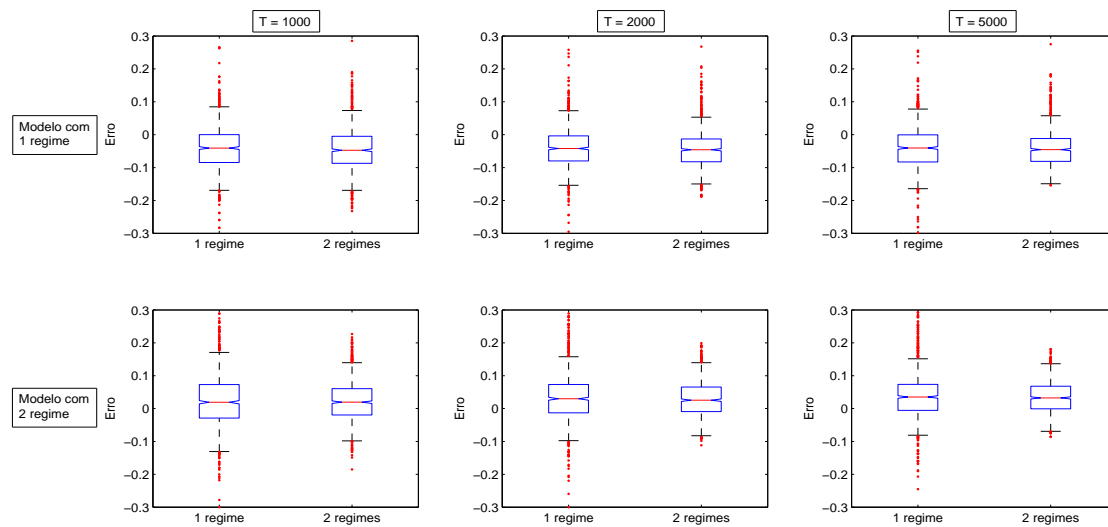


Figura 6: Box plot - erro na dependência caudal inferior (cópula SJC)

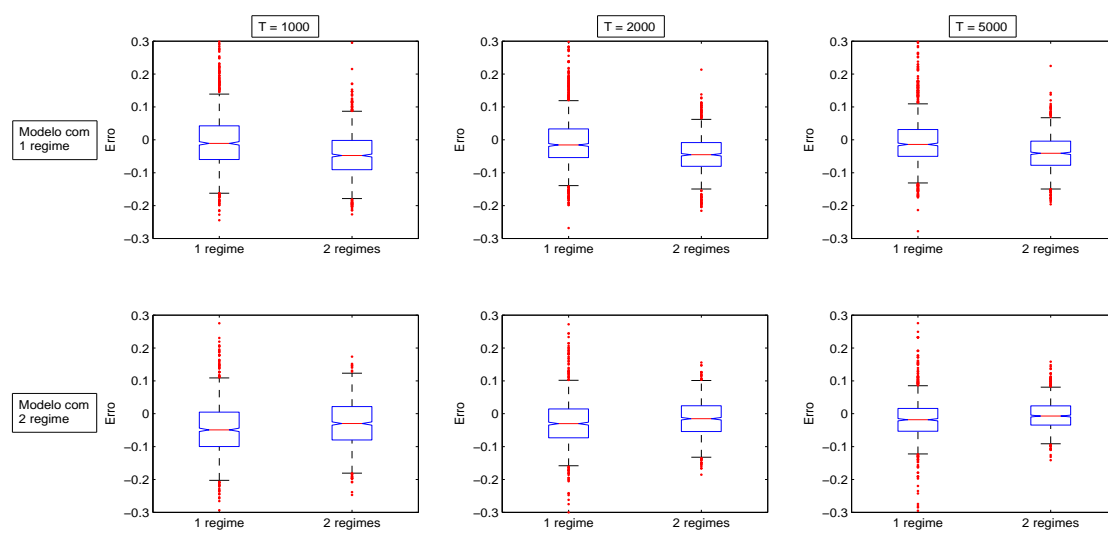


Figura 7: Box plot - erro dependência caudal superior (cópula SJC)

# Verificando Alguns Fatos Estilizados Sobre Índices de Mercados Financeiros Usando Cópulas Tempo-Variantes

Oswaldo Candido da Silva Filho  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS*  
*Programa de Pós-Graduação em Economia - PPGE*

Flávio Augusto Ziegelmann  
*Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS*  
*Departamento de Estatística e Programa de Pós-Graduação em Economia - PPGE*

---

## Resumo

O intuito desse trabalho é medir e avaliar as relações volume negociado do ativo e sua volatilidade e retorno do ativo e sua volatilidade utilizando a metodologia das cópulas. Analisamos estas relações através de uma versão dinâmica dessa metodologia onde o parâmetro de dependência varia de acordo com uma equação de evolução dinâmica, na qual o intercepto segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois estado.

*Palavras-chave:* Dependência caudal, Cópulas, Parâmetros tempo-variantes, *Markov switching*.

*Códigos JEL:* C15, C46, G15.

---

## 1. Introdução

Neste trabalho estudamos a relação dinâmica entre os retornos de ativos financeiros, seu volume negociado e sua volatilidade. Tanto o volume negociado quanto a volatilidade têm atraído a atenção de acadêmicos e profissionais. Isso indica a importância potencial dessas variáveis como indicadores do comportamento do mercado financeiro. Obviamente, se os mercados fossem informacionalmente eficientes, ou seja, se todas as informações estivessem completamente contidas nos preços dos ativos, estudar a relação entre retorno, volume e volatilidade seria inútil. No entanto, anomalias nesses mercados são numerosas. Assim, tanto o volume negociado quanto a volatilidade dos ativos podem servir como indicadores úteis quanto ao grau de informação sobre os preços dos ativos que é apreendido pelos agentes e, com isso, eles podem ter algum poder de previsão sobre o comportamento futuro desses preços.

Alguns fatos estilizados mostram uma relação positiva entre volume negociado e volatilidade dos ativos e, também, uma correlação negativa entre retorno e volatilidade (a volatilidade aumenta quando o preço das ações cai). Além disso, estas relações tendem a mudar ao longo do tempo. (Ver [5] e [8]).

Existe uma vasta literatura que lida com questões relativas à microestrutura dos mercados financeiros. [25] reportam que a relação entre retornos dos ativos e seu volume negociado está associada ao comportamento dos agentes e ao conjunto de informação que possuem. Por outro lado, como analisado por [1], [19], [16] e [28], há uma forte correlação entre volume e volatilidade dos ativos. O que estes autores sugerem é que existe uma clara relação (contemporânea) entre volume negociado e volatilidade do ativo. O que estaria de acordo com a hipótese SIAH (*sequential information arrival hypothesis*) onde os valores defasados do volume negociado provém um componente de predição para a volatilidade corrente.

A hipótese SIAH assume que os investidores reagem diferentemente à novas informações e, por conta disso, o mercado leva algum tempo para atingir um novo equilíbrio. Isso pode gerar defasagens (*lead/led*) na relação entre volume-volatilidade. Segundo [29], seguindo essa linha de raciocínio, os agentes (investidores) reagem à notícias. Entretanto, o mercado financeiro se move dramaticamente mesmo na ausência de notícias públicas. Ou seja, os preços dos ativos parecem ser muito voláteis para serem justificados apenas por mudanças nos fundamentos.

Logo, se os investidores realizam transações mesmo quando não há novas informações (ou notícias públicas), então o “excesso” de negociações (volume negociado) pode ser acompanhado no período subsequente por uma maior volatilidade no retornos. O que implica em rejeitar a hipótese SIAH.

Uma outra hipótese, que também considera o fluxo de informações no mercado, é a hipótese de “mistura de distribuições”. Essa hipótese considera que a dependência dos retornos e do volume está associada a uma variável fluxo de informações. Como há um consenso de que o volume negociado é autocorrelacionado, uma implicação da teoria é de que a volatilidade do ativo é positivamente relacionada ao volume negociado defasado ([11]). Portanto, o primeiro fato estilizado que vamos analisar é a relação entre volume negociado

de um ativo e a volatilidade futura do retorno desse ativo.

Sobre a relação entre volatilidade e retorno do ativo, podemos citar [6] que investigou o chamado *leverage effect*, que corresponde a existência de uma correlação negativa entre retornos passados e sua volatilidade futura. O estudo empírico dos autores mostra que, para ativos individuais este efeito é moderado enquanto para índices de mercados financeiros o efeito é mais forte. Este efeito tem sido estudado de várias maneiras, ver por exemplo [21], [9], [27], dentre outros. Porém, apesar da existência de vários estudos sobre este efeito, ele tem sido menos investigado do que o *clustering effect* da volatilidade recentemente. Além disso, grande parte dos estudos sobre a relação retorno-volatilidade tem sido feita a partir de modelos de volatilidade condicional. Estes modelos apontam que essa relação é assimétrica: elevados retornos negativos tem uma efeito maior sobre o aumento da volatilidade do que elevados retornos positivos de mesma magnitude. O segundo fato estilizado que pretendemos estudar é a relação entre retorno e volatilidade futura, porém demos ênfase ao efeito dos elevados retorno negativos (elevadas perdas) sobre o aumento da volatilidade.

Assim, pretendemos avaliar a estrutura de dependência entre o negativo dos retornos dos ativos e a sua volatilidade, medida pela volatilidade realizada, e a estrutura de dependência entre o volume negociado e a volatilidade dos retornos. Isso porque, levando em consideração os fatos estilizados mencionados, em ambos os pares poderemos ter uma associação positiva entre as variáveis em questão. Como os efeitos que estamos estudando ocorre nos extremos da distribuição conjunta, podemos utilizar as medidas de dependência caudal. Essa metodologia é um tanto semelhante à utilizada em [18] no que diz respeito à entrada dos dados.

A primeira distinção que pode ser feita em relação aos modelos comumente usados na literatura é que, para atingir nosso objetivo, utilizamos modelos baseados em cópulas com parâmetros de dependência variando no tempo. Estes modelos podem representar uma boa alternativa aos frequentemente utilizados modelos da família GARCH, pois modelos baseados em cópulas permitem considerar medidas de dependência mais gerais e são mais flexíveis ao lidarmos com algumas características das séries temporais financeiras: assimetria, excesso de curtose e dependência assimétrica.

O modelo que propomos, por outro lado, difere daqueles baseados em cópulas já utilizados, pois, além de permitir que o parâmetro de dependência varie de forma determinística, seguindo um processo ARMA(1, 10) restrito, como em [20], ele também varia de forma estocástica, seguindo uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois estados. Esta evolução nos permite capturar não linearidades na evolução da dependência ao longo do tempo.

O uso de cópulas neste contexto é perfeitamente adequado, pois o método permite que calculemos medidas de dependência nas caudas diretamente a partir da função cópula, e esta medida não é afetada pelas marginais e é invariante a quaisquer transformações, lineares e não lineares.

O estudo está dividido em cinco seções além desta breve introdução. A duas seções seguintes tratam do modelo utilizado e algumas considerações sobre os procedimentos de estimação, as seções 4 e 5 tratam dos dados utilizados e dos resultados empíricos e, na sequência, algumas considerações finais.

## 2. Cópulas e dependência caudal

Uma cópula  $C$  é uma função de distribuição multivariada cujas marginais são distribuições uniformes no intervalo  $[0, 1]$ . Adaptando essa definição de uma função cópula à variáveis aleatórias,  $C$  é uma função que liga uma função de distribuição multivariada,  $H$ , à suas funções de distribuição marginais unidimensionais  $(F_1, \dots, F_n)$ . Isso graças ao teorema de Sklar (1959)<sup>1</sup>, onde  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

A função  $C$  é única se, e somente se,  $(F_1, \dots, F_n)$  são contínuas.

Neste trabalho estamos interessados em medir a dinâmica da dependência entre volume-volatilidade e o negativo dos retornos-volatilidade. Seja  $X_t$ ,  $Y_t$  e  $Z_t$  volume negociado, negativo do retorno do ativo e volatilidade, respectivamente. Assim, a relação volume-volatilidade é definida como a dependência entre  $X_{t-1}$  e  $Z_t$  e a relação retorno-volatilidade é definida como a dependência entre  $Y_{t-1}$  e  $Z_t$ . Se  $u_1 = F_1(x_{t-1})$ ,  $u_2 = F_2(y_t)$  e  $u_3 = F_3(z_t)$  são as distribuições marginais para o volume negociado, o negativo do retorno e para a volatilidade, e  $H(x_{t-1}, z_t)$  e  $H(y_{t-1}, z_t)$  são as distribuições conjuntas para os pares volume-volatilidade e retorno-volatilidade, respectivamente, então, de acordo com o teorema acima, existe uma função cópula  $C(\cdot)$  tal que, para todo  $x, y$  e  $z \in \mathbb{R}$ ,

$$H(x_{t-1}, z_t) = C(F_1(x_{t-1}), F_3(z_t))$$

e

$$H(y_{t-1}, z_t) = C(F_2(y_{t-1}), F_3(z_t)).$$

Ainda de acordo com este teorema, podemos dizer que a distribuição conjunta pode ser decomposta em duas partes: suas funções de distribuições marginais univariadas, e a função cópula associada, que captura a estrutura de dependência nos pares supracitados. Com isso, a cópula nos permite de forma conveniente modelar as distribuições marginais e a estrutura de dependência entre as variáveis aleatórias separadamente.

De acordo com as cópulas que selecionamos e com nosso objetivo, utilizamos o conceito de dependência caudal para avaliar a estrutura dependência em nosso conjunto bivariado de dados. Esse conceito nos permite medir a dependência nas caudas inferior e superior da distribuição bivariada. Segundo [14], a dependência caudal é dada por:

*Se um cópula bivariada  $C$  é tal que  $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \lambda_U$  existe, então a cópula  $C$  possui dependência na cauda superior se  $\lambda_U \in (0, 1]$ . Da mesma maneira, se  $C$  é tal que  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u,u)}{u} = \lambda_L$  existe, então a cópula  $C$  possui dependência na cauda inferior se  $\lambda_L \in (0, 1]$ .*

A dependência caudal mede a probabilidade de ambas as variáveis se localizarem na cauda inferior ou superior da distribuição conjunta. Como esta medida é obtida a partir

---

<sup>1</sup>ver [24] e [23]



da função cópula, o parâmetro de dependência não é afetado pelas distribuições marginais, assim, podemos comparar diferentes funções cópulas.

Em nossa análise de dependência utilizamos diferentes funções cópulas. Começamos pela cópula Joe-Clayton Simetrizada ([20]) que possui dependência caudal tanto inferior quanto superior. Este resultado preliminar indicou a inexistência de dependência na cauda inferior, ou seja,  $\lambda_L$  não foi significativamente diferente de zero. Portanto, focamos a análise em cópulas com dependência caudal superior apenas. No restante do trabalho utilizamos as cópulas Gumbel e *Rotated* Clayton, dadas por:

Cópula de Gumbel:

$$\begin{aligned} C(u, v|\theta) &= \exp[-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}], \\ \text{onde } \theta &= 1/\log_2(2 - 2^{\lambda_U}). \end{aligned}$$

Cópula *Rotated* Clayton:

$$\begin{aligned} C(u, v|\theta) &= u + v - 1 + [(1 - u)^{-\theta} + (1 - v)^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, \\ \text{onde } \theta &= 1/\log_2(\lambda_U). \end{aligned}$$

Adicionalmente, permitimos o parâmetro de dependência caudal variar ao longo do tempo de acordo com um processo ARMA(1,10) restrito<sup>2</sup> com mudança de regime. Ou seja, a dependência caudal superior segue a seguinte dinâmica:

$$\lambda_U = (1 + \exp(-w_t))^{-1}, \quad (1)$$

$$w_t = \omega(S_t) + \beta \cdot w_{t-1} + \alpha \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|, \text{ e} \quad (2)$$

$$S_t \sim \text{Markov}(P). \quad (3)$$

Essa dinâmica possui um componente autoregressivo, para capturar a persistência no parâmetro de dependência, uma variável que mede a diferença absoluta entre as marginais transformadas e um intercepto que segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com 2 estados e com matriz de transição  $P$ . A transformação logística serve apenas para manter o parâmetro de dependência caudal no intervalo  $[0, 1]$ .

### 3. Estimação

Como estamos interessados apenas no efeito do negativo dos retorno-volatilidade e na relação volume-volatilidade, modelamos as distribuições marginais de forma não-paramétrica. Em outros termos, para evitar distorções ao assumir uma forma paramétrica para as distribuições marginais, consideramos funções de distribuição acumulada empírica (ecdf) para

---

<sup>2</sup>Ver [20] e [18].

as marginais. Em seguida, utilizamos o método de máxima verossimilhança para obter o parâmetros das cópulas.

Esse método é conhecido como CML - *Canonical Maximum Likelihood* - e é baseado no conceito de “transformação empírica das marginais”. A idéia é aproximar a distribuição marginal paramétrica desconhecida através de funções de distribuição empíricas definidas da seguinte forma:

$$\hat{F}_n(\cdot) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T 1_{[X_{nt} \leq \cdot]} \text{ para } n = 1, \dots, N,$$

onde  $1_{[X_{nt} \leq \cdot]}$  é uma função indicadora. De maneira geral, o método CML é implementado em dois estágios:

1. transformar o conjunto de dados inicial em variáveis uniformes usando a ecdf, ou seja,  $\hat{u}_t = (\hat{u}_1^t, \hat{u}_2^t, \hat{u}_3^t) = [\hat{F}_1(X_t), \hat{F}_2(Y_t), \hat{F}_3(Z_t)]$ ;
2. estimar o vetor de parâmetros da cópula via máxima verossimilhança usando as marginais transformadas no passo anterior. Logo,

$$\hat{\lambda}_U^{CML} = \operatorname{argmax}_{\lambda_U} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \hat{u}_3^t; \lambda_U(S_t)), \quad (4)$$

$$\hat{\lambda}_U^{CML} = \operatorname{argmax}_{\lambda_U} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_2^t, \hat{u}_3^t; \lambda_U(S_t)), \quad (5)$$

onde  $c$  é a densidade cópula.

Note que os estados,  $S_t$ , em (3.4) e (3.5) não são observados. Portanto, não podemos estimar diretamente os parâmetros das cópulas como descrito no passo 2. Escrevendo a função de verossimilhança para este problema temos:

$$\ell(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{S_t=0}^1 c(u_1, u_3 | S_t, \lambda_{t-1}) \Pr[S_t | \lambda_{t-1}] \right) \quad (6)$$

$$\ell(\lambda) = \sum_{t=1}^T \log \left( \sum_{S_t=0}^1 c(u_2, u_3 | S_t, \lambda_{t-1}) \Pr[S_t | \lambda_{t-1}] \right) \quad (7)$$

Para avaliar a log-verossimilhança em (6), precisamos calcular os pesos  $\Pr[S_t | \lambda_{t-1}]$  para  $S_t = 0$  e  $S_t = 1$ , pois, estamos considerando apenas dois estados. Aplicando o filtro de Kim ([15]) temos o seguinte algoritmo de filtragem que deve ser iterado para  $t = 1, \dots, T$ :

### (a) Predição de $S_t$

$$\Pr[S_t = l | \lambda_{t-1}] = \sum_{k=0}^1 \varepsilon_{kl}^{t-1} \Pr(S_{t-1} = k | \lambda_{t-1})$$

para  $l = 0, 1$  e  $\varepsilon_{kl}^{t-1} = \Pr(S_t = l | S_{t-1} = k, \lambda_{t-1})$ , que é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado  $k$  e  $l$ .

## (b) Filtragem de $S_t$

$$\Pr(S_t = l | \lambda_t) = \frac{c_t(u_1, u_3 | S_t = l, \lambda_{t-1}) \Pr[S_t = l | \lambda_{t-1}]}{\sum_{k=0}^1 c_t(u_1, u_3 | S_t = k, \lambda_{t-1}) \Pr[S_t = k | \lambda_{t-1}]}$$

onde  $\lambda_t = [\lambda_{t-1}, u_{1t}, u_{3t}]$ . Em  $t = 1$ , o filtro é inicializado usando as probabilidades estacionárias de  $S_t$  para  $\Pr(S_0 = k | \lambda_0)$ .

O filtro descrito acima nos dá a distribuição de probabilidade de  $S_t$  dadas as informações até  $t$ . Porém, como estamos lidando com séries temporais, é oportuno conhecer a distribuição de  $S_t$  dado o conjunto de informação completo da amostra, ou seja, para  $T$ . Assim, precisamos calcular as probabilidades suavizadas de  $S_t$  dadas por  $\Pr(S_t = l | \lambda_T) = \sum_{k=0}^1 \Pr(S_t = l, S_T = k | \lambda_T)$ , onde  $\Pr(S_t = l, S_T = k | \lambda_T)$  pode ser obtida recursivamente a partir das probabilidades filtradas. Esse processo de suavização funciona como um algoritmo *backward-smoothing* como segue:

1. Dado o processo de filtragem supracitado, obtemos  $\Pr(S_t = l | \lambda_t)$  para  $l = 0, 1$  e  $t = 1, \dots, T$ .
2. Então podemos inicializar o algoritmo de suavização em  $t = T$  e retroceder no tempo recursivamente, sendo  $\Pr(S_T = l | \lambda_T)$  igual a probabilidade filtrada em  $t = T$ .
3. Para cada  $t = T-1, T-2, \dots, 1$ , a distribuição de probabilidade suavizada  $\Pr(S_t = l | \lambda_T)$  é dada por

$$\Pr(S_t = l | \lambda_T) = \sum_{k=0}^1 \frac{\varepsilon_{lk}(t) \Pr(S_t = l | \lambda_t) \Pr(S_{t+1} = k | \lambda_T)}{\sum_{j=0}^1 \varepsilon_{jk}(t) \Pr(S_t = j | \lambda_t)}$$

onde  $\varepsilon_{lk}(t) = \Pr(S_{t+1} = k | S_t = l, \lambda_t)$  é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado  $l$  e  $k$ .

Em  $t = 0$  o algoritmo suavizador nos dá  $\Pr(S_0 = l | \lambda_T)$  que podemos utilizar como valor inicial no algoritmo de filtragem. Assim, completamos o algoritmo *forward-filtering-backward-smoothing* e podemos maximizar (6) em relação aos parâmetros do modelo diretamente de forma numérica<sup>3</sup>.

## 4. Dados e medida de volatilidade

Utilizamos em nossa análise empírica dados diários sobre o volume negociado e log-retorno do índice BOVESPA (Índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e do S&P500 (*Standard and Poor's 500*). A medida de volatilidade diária foi construída a partir de dados intradiários para ambos os índices, como descrito abaixo. A amostra cobre o período diário que vai de 13 de maio de 2004 a 08 de outubro de 2009, para o BOVESPA, e de 13 de dezembro

---

<sup>3</sup>Desenvolvemos o filtro apenas para a equação (6). O procedimento para a equação (3.7) é o mesmo.

de 2004 a 08 de outubro de 2009, para o S&P500. Na construção da volatilidade diária a amostra possui periodicidade de 15 minutos<sup>4</sup>.

A medida de volatilidade utilizada foi a *volatilidade realizada*. Essa medida, na ausência de ruído devido a microestrutura do mercado, pode ser definida como sendo o somatório dos quadrados dos log-retornos intra-diários em dado intervalo. E, neste caso, esta medida seria um estimador<sup>5</sup> adequado para a *volatilidade integrada*,  $\int_{t_0}^{t_1} \sigma_s^2 ds$ , quando o intervalo intra-diário (sub-intervalos entre  $t_0$  e  $t_1$ ) tende a infinito<sup>6</sup>. Porém, se levarmos em consideração o ruído de microestrutura do mercado, que pode ocorrer por vários meios inclusive ao nível de transação (que acontecem em intervalos discretos) e *bid-ask spread*, nesse ambiente, a volatilidade realizada observada pode ser viesada e inconsistente com a volatilidade integrada<sup>7</sup>. Para evitar esse problema, nós utilizamos a volatilidade realizada re-escalonada de acordo com [13], ou seja:

$$RV_t^c = w \sum_{h=1}^H r_{h,t}^2 \quad (8)$$

onde  $H$  é o número de observações intra-diárias,  $w = \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2 / \sum_{t=1}^T RV_t$ ,  $R_t$  é o log-retorno diário,  $T$  é o tamanho da amostra diária,  $\bar{R} = T^{-1} \sum_{t=1}^T R_t$  e  $RV_t$  é o somatório dos quadrados dos log-retornos intra-diários.

Optamos por este procedimento de escalonamento da volatilidade realizada, pois ele garante que a média amostral da medida resultante seja igual a variância estimada dos retornos diários. Tal fato é pertinente neste caso, já que não estamos discutindo efeitos de microestrutura de mercado diretamente.

A Tabela 1 mostra algumas estatísticas descritivas dos dados que estão sendo utilizados. Podemos observar que todas as séries, tanto para o BOVESPA quanto para o S&P500, apresentam características semelhantes. O volume negociado e a volatilidade realizada apresentam excesso de curtose e assimetria positiva, enquanto os retornos apresentam também excesso de curtose, porém assimetria negativa. Tais resultados também estão em acordo com os fatos estilizados sobre estas séries. Na Figura 1 plotamos o quadrado dos retornos e a volatilidade realizada. Note que a volatilidade realizada é bem menos volátil do que o quadrado dos retornos.

## 5. Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados encontrados para a estrutura de dependência nos pares volume-volatilidade futura e retorno-volatilidade futura<sup>8</sup>, conforme definido na

---

<sup>4</sup>Todos os dados utilizados foram obtidos junto a CMA *trade solution* ([www.cma.com.br](http://www.cma.com.br)).

<sup>5</sup>Volatilidade realizada latente.

<sup>6</sup>Ver [4] e [22].

<sup>7</sup>Para maiores detalhes ver [3] e [17].

<sup>8</sup>Estimamos também modelos para analisar a dinâmica da dependência entre volume negociado e retorno dos ativos. Porém, os resultados não foram conclusivos e não serão reportados. Existem diversas hipóteses

seção 4.2. Primeiro, analisaremos os parâmetros estimados para a equação que define a dinâmica da dependência caudal superior e em seguida observaremos graficamente a evolução desta dependência ao longo do tempo.

### 5.1. Dependência volume-volatilidade futura

Examinando os resultados contidos na Tabela 2, percebemos que há uma diferença visível na relação de dependência entre o volume negociado e a volatilidade futura entre os regimes (que são persistentes, como indicam as elevadas probabilidades de transição para ambos os índices). O parâmetro de intercepto no regime de maior dependência chega a ser mais que o dobro do intercepto no regime de menor dependência, para ambos os índices e ambas as cópulas. Notamos também que:

1. Para o índice S&P500, o parâmetro  $\beta$ , associado ao componente autoregressivo na dinâmica da dependência, foi estatisticamente significativo e com sinal negativo, o indicando que o relacionamento entre volume e volatilidade pode não ser persistente ao longo do tempo;
2. No índice BOVESPA, o parâmetro  $\beta$  apresentou-se negativo quando a cópula utilizada é a Gembel e positivo quando a cópula é a *rotated* Clayton;
3. O parâmetro  $\alpha$  reflete o efeito da distância em relação ao perfeito co-movimento (quando essa distância entre as variáveis é zero) na dinâmica da dependência, considerando os 10 períodos defasados. Esse parâmetro foi negativo e significativo para ambos os índices e cópulas utilizados. O que indica que a distância em relação ao perfeito co-movimento pode reduzir o parâmetro de dependência. Ou seja, quanto maior a distância menor será o parâmetro de dependência.

Observando a evolução da dependência entre volume-volatilidade nas Figura 2 e 3, percebemos que ela é positiva. O volume têm algum efeito sobre a volatilidade futura dos índices. Este efeito parece ser maior no S&P500 do que no BOVESPA. Tal resultado parece estar em concordância com alguns resultados encontrados na literatura onde o volume negociado é utilizado como *proxy* para a taxa de chegada de informação, geralmente em modelos da família (G)ARCH. Alguns autores<sup>9</sup>, nessa linha, encontraram evidências de que a inclusão no modelo do volume negociado pode reduzir a persistência na volatilidade dos retornos. Contudo, apesar de haver uma relação positiva entre volume e volatilidade, tal

---

para essa relação como a "visibilidade" do ativo ([12]), onde um elevado volume, não usual, de um ativo o torna mais "visível" podendo levar ao aumento dos retornos subsequentes; ou a existência de investidores irracionais que subestimam as informações contidas no fluxo de transações elevando assim, a liquidez. Neste caso, o elevado volume poderia ser um indicativo de que o ativo está sobre-valorizado, diminuindo o retorno subsequente ([2]). Um outro aspecto a se considerar seria que o efeito do volume sobre o retorno se dê indiretamente via volatilidade.

<sup>9</sup>Como [7], [26] e [10]

relação não explica completamente a persistência na volatilidade. Ou seja, o volume negociado reduz apenas parcialmente a persistência na volatilidade e não a elimina completamente, pois, o processo de chegada de informação é incompleto devido a existência de informações privadas, volatilidade de abertura, efeito dia da semana, etc.

### 5.2. Dependência retorno-volatilidade futura

A Tabela 3 apresenta os parâmetros estimados para a dinâmica da dependência caudal superior nas cópulas Gumbel e *rotated* Clayton, para os índices BOVESPA e S&P500. Essa dinâmica, de acordo com o discutido em seções anteriores, foi estimada através de um modelo com mudança markoviana. Podemos observar que o modelo identificou dois regimes distintos, onde a dependência é maior em um dos regimes, e persistentes, como indicam os elevados valores das probabilidades  $p$  e  $q$ . Notamos também que:

1. Para o índice BOVESPA, a diferença absoluta entre os interceptos em cada regime é de 0.58 na cópula Gumbel e de 0.88 na *rotated* Clayton, ou seja, a dependência entre o negativo dos retornos do índice e sua volatilidade futura aumenta sensivelmente quando estamos no regime de maior dependência;
2. Podemos notar também que essa dependência pode ser persistente ao longo do tempo, como indica o parâmetro do componente autoregressivo,  $\beta$ , positivo e significativo;
3. Ainda com relação ao BOVESPA, o parâmetro  $\alpha$ , relativo a média absoluta da diferença entre as marginais, também foi positivo e significativo. Isso indica que a distância em relação ao perfeito co-movimento, ou a distância em relação a um evento extremo (neste caso, elevado retorno e elevada volatilidade ou baixo retorno e baixa volatilidade), defasada ao longo de 10 períodos pode aumentar a dependência corrente entre retorno e sua volatilidade.
4. Considerando o S&P500, observamos que a diferença entre os interceptos ao longo dos regimes, que foi de 0.16 para a cópula de Gumbel e de 0.21 para a *rotated* Clayton, foi menor que a encontrada no BOVESPA;
5. Da mesma maneira que no BOVESPA, o parâmetro  $\beta$  foi positivo e significativo. Apontando para uma persistência ao longo do tempo. Considerando esse parâmetro de forma absoluta, notamos que o componente autoregressivo parece ter uma efeito maior sobre a dependência (podendo haver uma maior persistência) no S&P500 do que no índice BOVESPA;
6. O parâmetro  $\alpha$ , ao contrário do que ocorreu com o BOVESPA, não se apresentou significativo, embora positivo, sugerindo que a distância em relação ao perfeito co-movimento defasada não afeta a dinâmica da dependência retorno-volatilidade para o S&P500.

As Figuras 4 e 5 mostram as probabilidades suavizadas, para o regime de maior dependência, e a evolução da dependência caudal ao longo do tempo, para as cópulas utilizadas. Ambas as cópulas apresentaram resultados semelhantes, indicando que o efeito

retorno-volatilidade é volátil e persistente (pelo menos visualmente). Porém, a cópula Gumbel tende a indicar uma dependência maior no regime de menor dependência do que a *rotated* Clayton, e a *rotated* Clayton, por outro lado, tende a indicar uma dependência maior no regime de maior dependência.

Ainda observando as probabilidades suavizadas nas Figuras 4 e 5 notamos que, mesmo não sendo possível, diretamente, associar os regimes que identificamos a acontecimentos históricos, a ocorrência do regime de alta dependência parece mais provável quando os mercados funcionam “*bem*”, ou seja, a economia não está em ambiente de crise econômica.

## 6. Considerações finais

Neste trabalho analisamos as relações de dependência entre volume-volatilidade e retorno-volatilidade para os índices BOVESPA e S&P500. Para isso utilizamos modelos baseados em funções cópulas onde o parâmetro de dependência foi permitido variar ao longo do tempo de forma estocástica, de acordo com uma cadeia de Markov de primeira ordem e dois estados não observados, e de forma determinística, seguindo um processo ARMA (1,10) restrito. Foram ajustadas funções de distribuição empíricas acumuladas (ecdf) para a modelagem das marginais, e em seguida estimamos o parâmetro de dependência caudal utilizando as cópulas Gumbel e *rotated* Clayton. A medida de volatilidade utilizada foi a volatilidade realizada calculada a partir de dados intradiários, com intervalos de 15 minutos, e re-escalada de acordo com [13].

Observamos que existe uma relação positiva entre o volume negociado do ativo e a volatilidade dos seus retornos. Essa relação volume-volatilidade pode não ser persistente ao longo do tempo, ou seja, tende a diminuir de um período para outro, e o distanciamento entre as marginais em relação ao perfeito co-movimento, nos 10 períodos anteriores, diminui o efeito volume-volatilidade. Estes resultados parecem confirmar as teorias de “fluxo de informações”, onde o volume defasado, como *proxy* para este fluxo informacional, é positivamente relacionado com a volatilidade corrente do ativo e fornece informações relevantes para sua predição.

Para analisar a relação retorno-volatilidade, avaliamos a estrutura de dependência entre o negativo dos retornos e sua volatilidade. Os resultados obtidos apontam para a existência de uma relação positiva entre o negativo dos retornos e sua volatilidade, ou seja, elevadas perdas (elevado negativo dos retornos) tendem a gerar uma maior volatilidade *ex post*. Além disso, esse efeito tende a ser persistente ao longo do tempo. O que é confirmado pela literatura sobre o tema.

Note que, estes resultados se aplicam a ambos os regimes identificados porém, estes efeitos ocorrem com maior ou menor intensidade dependendo do regime que vigora. Embora seja difícil associar diretamente os regimes de alta e baixa dependência que identificamos a partir do nosso modelo com períodos de “*boom*” ou crise, percebemos que a ocorrência dos efeitos que analisamos é mais acentuada em períodos de “*boom*”, ou seja, quando os mercados não estão enfrentando turbulências.

O trabalho apresentado contribui para a literatura na medida em que adiciona novas evidências da existência de uma relação de dependência significativa entre volume-

volatilidade e retorno-volatilidade sob a perspectiva de modelos baseados em cópulas.

## Referências

- [1] ANDERSEN, T. G. (1996): “Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility,” *Journal of Finance*, 51, 169–204.
- [2] BAKER, M., AND J. STEIN (2004): “Market Liquidity as a Sentiment Indicator,” *Journal of Financial Markets*, 7, 271–299.
- [3] BANDI, F. M., AND J. R. RUSSELL (2005): “Microstructure noise, realized volatility and optimal sampling,” Working paper, Graduate School of Business, The University of Chicago.
- [4] BARNDORFF-NIELSEN, O. E., AND N. SHEPHARD (2002): “Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models,” *Journal of the Royal Statistical Society*, B 64, 253–280.
- [5] BLACK, F. (1976): “Studies of Stock Price Volatility Changes,” *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pp. 177–181.
- [6] BOUCHAUD, J.-P., A. MATACZ, AND M. POTTERS (2001): “Leverage Effect in Financial Markets: The Retarded Volatility Model,” *Physical Review Letters*, 87.
- [7] CHEN, G.-M., M. FIRTH, AND O. M. RUI (2001): “The Dynamic Relation Between Stock Returns, Trading Volume, and Volatility,” *Financial Review*, 33, 153–174.
- [8] CHRISTIE, A. A. (1982): “The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects,” *Journal of Financial Economics*, 10, 407–432.
- [9] CHRISTOFFERSEN, P., AND F. DIEBOLD (2003): “Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics,” Working paper, McGill University and University of Pennsylvania.
- [10] GALLAGHER, L., AND D. KIELY (2005): “Volume and GARCH Effects for Dual-Listed Equities: Evidence from Irish Equities,” *The Irish Accounting Review*, 12, 63–82.
- [11] GERLACH, R., C. W. S. CHEN, D. S. Y. LIN, AND M. H. HUANG (2006): “Asymmetric Responses of International Stock Markets to Trading Volume,” *Physica A*, 360, 422–444.
- [12] GERVAIS, S., R. KANIEL, AND D. MINGELGRIN (2001): “The High Volume-Return Premium,” *The Journal of Finance*, LVI, 877–918.
- [13] HANSEN, P. R., AND A. LUNDE (2006): “Realized Variance and Market Microstructure Noise,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 371–417.
- [14] JOE, H. (1997): *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall, London.
- [15] KIM, C.-J., AND C. NELSON (1999): *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*. MIT press.
- [16] MANGANELLI, S. (2005): “Duration, volume and volatility impact of trades,” *Journal of Financial Markets*, 8, 377–399.
- [17] MYKLAND, P. A., AND L. ZHANG (2009): “The Econometrics of High Frequency Data,” Discussion paper, Hong Kong University of Science and Technology.
- [18] NINGA, C., D. XU, AND T. S. WIRJANTO (2008): “Modeling the leverage effect with copulas and realized volatility,” *Finance Research Letters*, 5, 221–227.
- [19] OMRAM, M. F., AND E. MACKENZIE (2000): “Heteroscedasticity in stock returns data revisited: volume versus GARCH effects,” *Applied Financial Economics*, 10, 553–560.
- [20] PATTON, A. J. (2006b): “Modelling asymmetric exchange rate dependence,” *International Economic Review*, 2(47), 527–556.
- [21] POON, S.-H., AND C. GRANGER (2003): “Forecasting volatility in financial markets: a review,” *Journal of Economic Literature*, 41.
- [22] PROTTER, P. (2005): *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [23] SCHWEIZER, B., AND A. SKLAR (1983): “Probabilistic metric spaces,” *Elsevier Science*.
- [24] SKLAR, A. (1959): “Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges,” *Publications de l’Institut de Statistique de L’Université de Paris*, 8, 229–231.



- [25] WANG, C., AND S. CHIN (2004): “Profitability of Return and Volume-Based Investment Strategies In China’s Stock Market,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 12, 541–564.
- [26] WANG, P., AND A. LIU (2005): “Stock Return Volatility and Trading Volume: Evidence from the Chinese Stock Market,” *Journal of Chinese Economic and Business Studies*, 3, 39–54.
- [27] WU, G. (2001): “The determinants of asymmetric volatility,” *Review of Financial Studies*, 14.
- [28] XU, X. E., P. CHEN, AND C. WU (2006): “Time and dynamic volume-volatility relation,” *Journal of Banking and Finance*, 30, 1535–1558.
- [29] ZHONG, M., A. DARRAT, AND D. ANDERSON (2003): “Do U.S. Stock Prices Deviate from Their Fundamental Values?: Some New Evidence,” *Journal of Banking and Finance*, 27, 673–697.

## 7. Tabelas

	Volume	retorno	Volatilidade
<b>BOVESPA</b>			
Média	3457086	0.0906	4.2914
Mediana	3011461	0.1539	2.2527
Desvio-padrão	2258600	2.0719	8.0241
Curtose	10.6947	8.3569	59.2607
Assimetria	1.8180	-0.0358	6.6275
<b>S&amp;P500</b>			
Média	3.56E+09	-0.0090	2.3396
Mediana	2.92E+09	0.0793	0.6665
Desvio-padrão	1.75E+09	1.5297	5.6227
Curtose	3.5011	13.0920	64.9548
Assimetria	1.0059	-0.2348	6.6159

Tabela 1: Estatísticas descritivas

	BOVESPA		S&P500	
	Gumbel	<i>Rotated</i> Clayton	Gumbel	<i>Rotated</i> Clayton
$\omega_0$	0.7664 (0.1174)	0.5701 (0.0100)	1.2809 (0.3240)	1.2972 (0.1371)
$\omega_1$	1.9573 (0.1039)	1.1845 (0.0469)	2.112 (0.4425)	2.6832 (0.1470)
$\beta$	-0.591 (0.0583)	0.1986 (0.0671)	-0.3323 (0.1640)	-0.3109 (0.0173)
$\alpha$	-0.3246 (0.1962)	-1.2612 (0.0748)	-1.2942 (0.7372)	-2.8141 (0.8279)
$p$	0.9565 (0.2245)	0.9527 (0.2272)	0.9773 (0.3045)	0.9823 (0.2173)
$q$	0.9744 (0.1865)	0.9681 (0.2423)	0.9701 (0.2888)	0.9495 (0.2598)

Nota: Entre parênteses o erro-padrão

Tabela 2: Parâmetros para a dependência volume-volatilidade

	BOVESPA		S/ & P500	
	Gumbel	Rotated Clayton	Gumbel	Rotated Clayton
$\omega_0$	-0.8629 (0.1475)	-0.9783 (0.0052)	-0.4382 (0.0710)	0.412 (0.0469)
$\omega_1$	-0.2827 (0.1121)	-0.1016 (0.0512)	-0.2799 (0.051)	0.1976 (0.1215)
$\beta$	0.3268 (0.0599)	0.2074 (0.0032)	0.5406 (0.0554)	0.4538 (0.1229)
$\alpha$	1.3629 (0.415)	2.3729 (0.0065)	0.2783 (0.2631)	0.2684 (0.3041)
$p$	0.9181 (0.4309)	0.9251 (0.1141)	0.9981 (0.04)	0.999 (0.1875)
$q$	0.9897 (0.2071)	0.989 (0.1295)	0.9987 (0.0846)	0.9989 (0.2151)

Nota: Entre parênteses o erro-padrão

Tabela 3: Parâmetros para a dependência retorno-volatilidade

## 8. Figuras

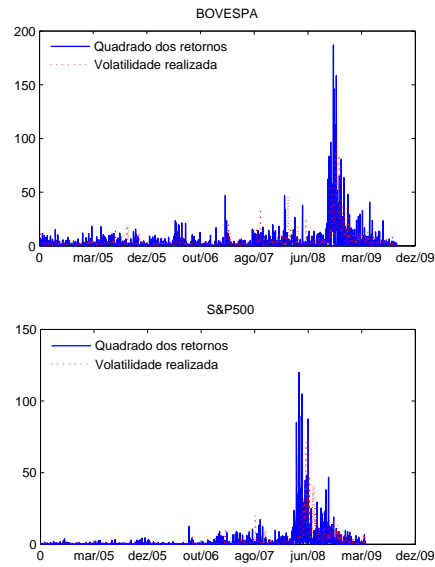


Figura 1: Quadrado dos retornos e volatilidade realizada

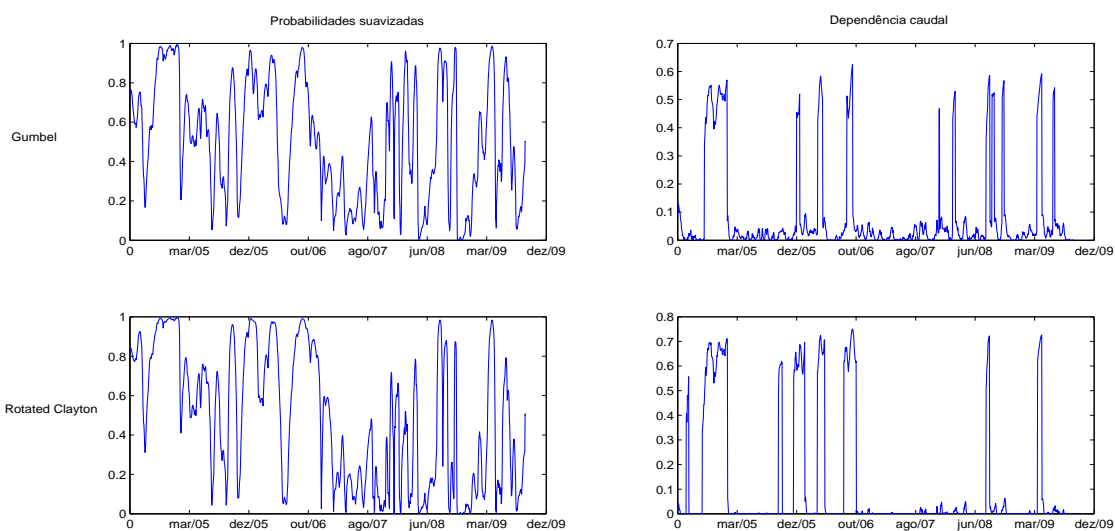


Figura 2: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação volume-volatilidade (BOVESPA)

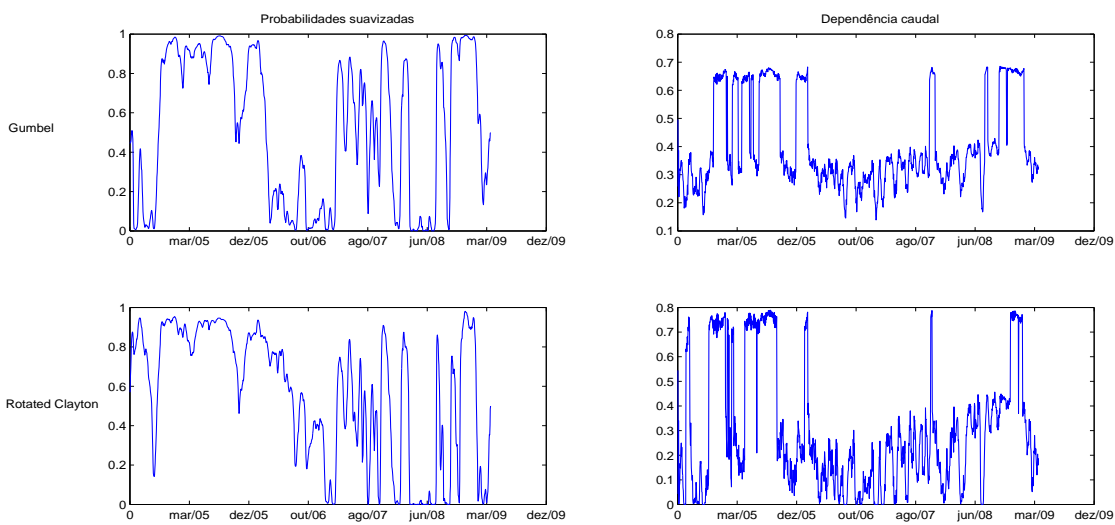


Figura 3: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação volume-volatilidade (S&P500)

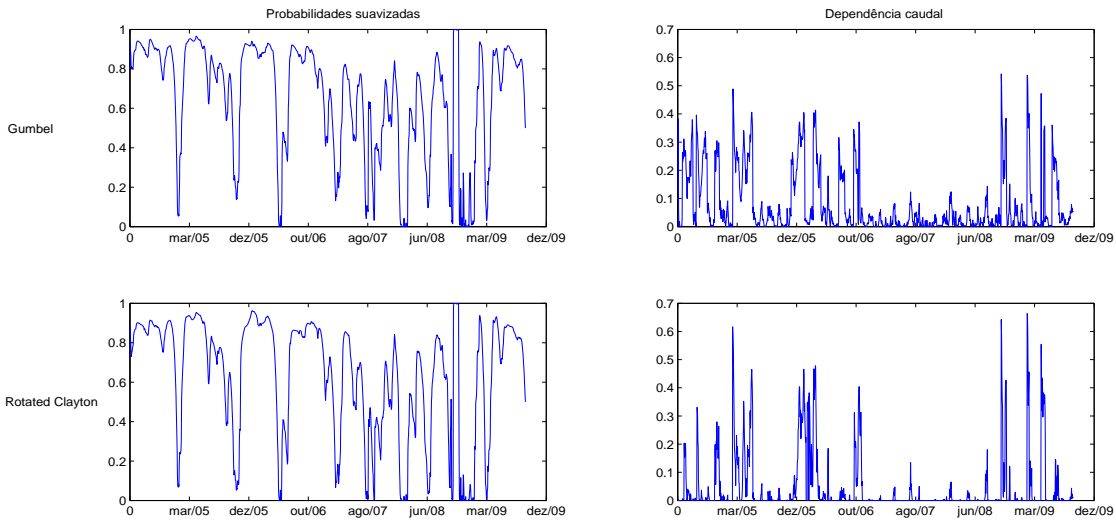


Figura 4: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação retorno-volatilidade (BOVESPA)

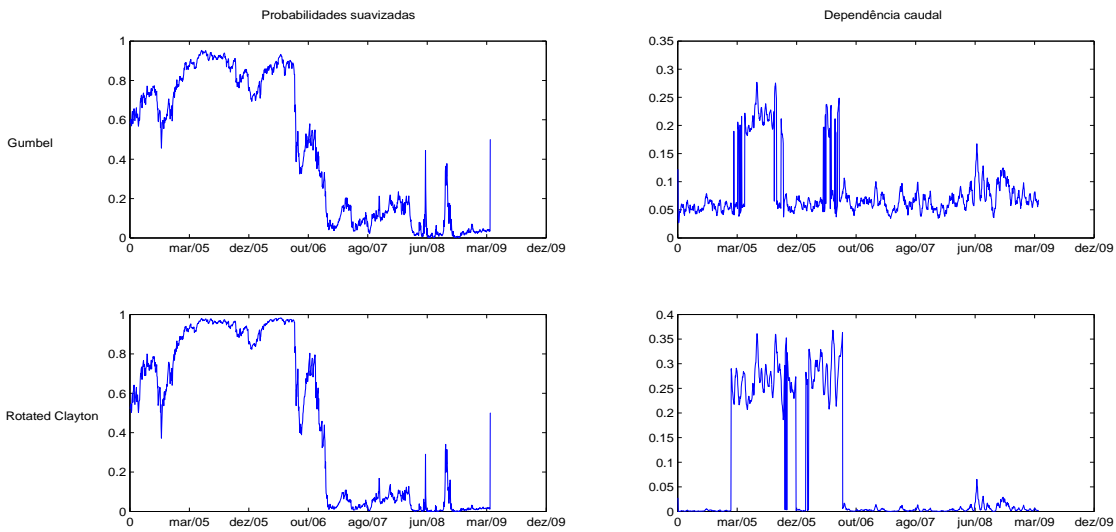


Figura 5: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência e dependência caudal para a relação retorno-volatilidade (S&P500)

## 5 *Conclusão*

Nós focamos nesta tese questões sobre assimetria e não-linearidade nas estruturas de dependência entre variáveis aleatórias. Mais precisamente, levando em consideração os fatos estilizados, analisamos a estrutura de dependência entre retornos de ativos financeiros. Observamos que quando se trata deste tipo de série temporal tanto as distribuições marginais quanto a multivariada conjunta apresentam características como assimetria, caudas pesadas e a relação de dependência, além de assimétrica, pode mudar ao longo do tempo. Por esta razão demos ênfase em nosso trabalho a medida de dependência caudal.

A discussão em torno destas questões foi feita através do uso da metodologia das cópulas (ou funções cópulas) cujo parâmetro de dependência varia ao longo do tempo. Seguindo essa linha de raciocínio, elaboramos três ensaios.

No primeiro ensaio, apresentamos os principais resultados e características das cópulas, sua extensão para a versão condicional e fizemos algumas considerações a cerca do método de estimação em dois estágios, utilizado em toda a tese. Modelamos as marginais como um processo GARCH com erros *skewed-t* e utilizamos as cópulas na análise das estruturas de dependência entre os retornos dos índices de mercados financeiros de alguns países, percebendo que a dependência entre esses índices se torna maior a partir do final de 2006 e início de 2007, quando teve início a mais recente crise financeira mundial. Este resultado está alinhado aos encontrados por vários autores: a dependência entre os mercados financeiros se torna mais intensa em momentos de crise devido ao efeito contágio. Em seguida discutimos sobre a escolha da forma funcional apropriada para representar a distribuição conjunta dos retornos e realizamos um teste de *goodness-of-fit*, o qual revelou que as cópulas elípticas apresentam um bom ajustamento aos dados. Por fim, testamos o impacto da escolha da forma funcional da cópula no cálculo do Valor em Risco (VaR) e concluímos que, no contexto de cópulas com parâmetros tempo-variantes, a escolha da função cópula não tem influência significativa sobre este cálculo.

No segundo ensaio, propomos um novo procedimento para capturar a evolução do parâmetro de dependência. Neste procedimento, nós introduzimos uma cadeia de Markov escondida à equação de evolução utilizada no primeiro ensaio para capturar a existência de estados não observados. A introdução desse processo markoviano foi motivada pelos resultados

encontrados no ensaio anterior, onde visivelmente percebemos uma mudança no padrão de dependência a partir de 2007. Isto indicou a possibilidade de existirem “quebras” na dinâmica do parâmetro de dependência. Assim, modelamos a dinâmica do parâmetro de dependência como um processo ARMA(1,10) restrito, onde o termo de intercepto segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois estados não observados. Essa extensão do modelo nos permitiu generalizar e flexibilizar o estudo das estruturas de dependência assimétricas e não lineares sem, no entanto, gerar perdas em relação a tratabilidade do modelo. Visando comparar o modelo que propomos com o desenvolvido no primeiro ensaio, implementamos simulações de Monte Carlo, comparando os erros médios do parâmetro de dependência (diferença média entre a dependência original e a estimada) em cada amostra, percebemos que o modelo que estamos propondo apresentou um bom desempenho quando comparado ao modelo sem mudança de regime. Além disso, os resultados indicam que este modelo apresenta uma dispersão (em relação ao erro médio do parâmetro de dependência) menor que o modelo sem mudança. Assim, o nosso modelo oferece uma alternativa interessante, pois ele mostrou-se adequado para capturar e mensurar estruturas de dependência assimétricas e não lineares.

No terceiro ensaio, analisamos as relações volume negociado-volatilidade do ativo e retorno-volatilidade do ativo utilizando o modelo descrito no segundo artigo, onde a dinâmica da dependência é dada por um processo ARMA(1,10) restrito com o termo de intercepto seguindo uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois estados não observáveis. Com essa aplicação foi possível adicionar novas evidências da ocorrência dos dois efeitos supracitados. Pudemos observar indícios de que estes efeitos ocorrem com mais frequência em momentos nos quais os mercados financeiros funcionam bem, ou seja, não estão em estado de crise.

## *Referências*

- ALLCROFT, D. J.; GLASBEY, C. A. A simulation-based method for model evaluation. *Statistical Modelling*, v. 1, n. 3, p. 1–13, 2003.
- ANDERSEN, T. G. Return volatility and trading volume: an information flow interpretation of stochastic volatility. *Journal of Finance*, v. 51, p. 169–204, 1996.
- ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes. *Ann. Math. Statistics*, v. 23, p. 193–212, 1952.
- BAKER, M.; STEIN, J. Market liquidity as a sentiment indicator. *Journal of Financial Markets*, v. 7, p. 271–299, 2004.
- BANDI, F. M.; RUSSELL, J. R. *Microstructure noise, realized volatility and optimal sampling*. [S.l.], 2005.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E.; SHEPHARD, N. Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society, B* 64, p. 253–280, 2002.
- BARTRAM, S.; TAYLOR, S.; WANG, Y. H. The euro and european financial market integration. *Journal of Banking and Finance*, v. 31, p. 1461–1481, 2007.
- BERKOWITZ, J. Testing density forecasts with applications to risk management. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 5, p. 489–501, 2001.
- BLACK, F. Studies of stock price volatility changes. *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, p. 177–181, 1976.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, n. 94, p. 238–276, 1986.
- BOUCHAUD, J.-P.; MATA CZ, A.; POTTERS, M. Leverage effect in financial markets: The retarded volatility model. *Physical Review Letters*, v. 87, 2001.
- CHEN, G.-M.; FIRTH, M.; RUI, O. M. The dynamic relation between stock returns, trading volume, and volatility. *Financial Review*, v. 33, p. 153–174, 2001.
- CHEN, X.; FAN, Y.; PATTON, A. *Simple tests for models of dependence between multiple financial time series with applications to U.S. equity returns and exchange rates*. [S.l.], 2004.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. *Copula methods in finance*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2004. (Wiley Finance).
- CHOLLETE, L.; HEINEN, A.; VALDESOGO, A. *Modeling international financial returns with a multivariate regime switching copula*. [S.l.], 2008.



- CHRISTIE, A. A. The stochastic behavior of common stock variances: Value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, v. 10, p. 407–432, 1982.
- CHRISTOFFERSEN, P. Evaluating interval forecasts. *International Economic Review*, v. 39, 1998.
- CHRISTOFFERSEN, P. *Value-at-Risk models*. [S.l.], 2006.
- CHRISTOFFERSEN, P.; DIEBOLD, F. *Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics*. [S.l.], 2003.
- CLEMEN, R. T.; REILLY, T. Correlations and copulas for decision and risk analysis. *Management Science*, v. 45, n. 2, 1999.
- CONTI, R. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, v. 1, 2001.
- DAAL, E.; NAKA, A.; YU, J.-S. *Volatility clustering, leverage effects and jumps dynamics in emerging Asian equity markets*. [S.l.], 2004.
- DIAS, A.; EMBRECHTS, P. Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance. 2004.
- DOBRIÉ, J.; SCHMIDT, F. A. Goodness-of-fit test for copulas based on rosenblatts transformation. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 51, n. 9, 2007.
- EMBRECHTS, P.; HOEING, A.; JURI, A. Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risk. *Finance Stochastic*, v. 7, n. 2, p. 145–167, 2003.
- EMBRECHTS, P.; LINDSKOG, F.; MCNEIL, A. Handbook of heavy tailed distributions in finance. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Elsevier, 2003. cap. Modelling dependence with copulas and applications to risk management.
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A.; STRAUMAN, D. Risk management: Value at risk and beyond. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Cambridge, 2002. cap. Correlation and dependency in risk management.
- ENGEL, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity models with estimation of variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, n. 50, p. 987–1007, 1982.
- FANTAZZINI, D. *Dynamic copula modelling for Value at Risk*. [S.l.], 2006.
- FANTAZZINI, D. The effects of misspecified marginals and copulas on computing the value at risk: A monte carlo study. *Computational Statistics and Data Analysis*, Article in press, 2009.
- FERMANIAN, J.-D. Goodness-of-fit tests for copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 95, n. 1, 2005.
- FERMANIAN, J.-D.; SCAILLET, O. *Some statistical pitfalls in copula modelling for financial applications*. [S.l.], 2004.

- FILHO, O. C. S.; ZIEGELMANN, F. A. Assessing dependence between financial market indexes using conditional time-varying copulas: Applications to value at risk (var). In: *Fourth Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*. São Paulo-Rio de Janeiro: [s.n.], 2009.
- GALLAGHER, L.; KIELY, D. Volume and garch effects for dual-listed equities: Evidence from irish equities. *The Irish Accounting Review*, v. 12, p. 63–82, 2005.
- GARCIA, R.; TSAFAK, G. Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets. *CIRANO Scientific series*, May 2009.
- GERLACH, R. et al. Asymmetric responses of international stock markets to trading volume. *Physica A*, v. 360, p. 422–444, 2006.
- GERVAIS, S.; KANIEL, R.; MINGELGRIN, D. The high volume-return premium. *The Journal of Finance*, LVI, p. 877–918, 2001.
- GODAMBE, V. P. An optimal property of regular maximum likelihood estimation. *Ann. Math. Statist.*, v. 31, p. 1208–1211, 1960.
- GUMBEL, E. J. Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1960.
- HANSEN, B. Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, n. 35, p. 705–730, 1994.
- HANSEN, P. R.; LUNDE, A. Realized variance and market microstructure noise. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 12, p. 371–417, 2006.
- HÄRDLE, W.; HOROWITZ, J.; KREISS, J.-P. Bootstrap methods for time series. *Working Paper*, 2001.
- HU, L. Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach. *Applied Financial Economics*, v. 10, p. 717–729, 2006.
- HURD, M.; SALMON, M.; SCHLEICHER, C. *Using copulas to construct bivariate foreign exchange distributions with an application to the sterling exchange rate index*. [S.l.], 2005.
- HWANG, S.; PEREIRA, P. L. V. Small sample properties of garch estimates and persistence. *The European Journal of Finance*, v. 12, p. 473–494, 2006.
- IGNATIEVA, E. *Adaptive estimation of time varying copulae*. Dissertação (Mestrado) — Humboldt University, Berlin, Germany, 2005.
- JOE, H. *Multivariate models and dependence concepts*. London: Chapman & Hall, 1997.
- JOE, H.; XU, J. *The estimation method of inference functions for margins for multivariate models*. [S.l.], 1996.
- JONDEAU, E.; ROCKINGER, M. The copula-garch model of conditional dependencies: an international stock market application. *Journal of International Money and Finance*, n. 25, p. 827–853, 2006.
- KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. *Finite markov chains*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1960.

- KIM, C.-J.; NELSON, C. *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*. [S.l.]: MIT press, 1999.
- KUPIEC, P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, v. 2, 1995.
- LIUA, Y.; LUGER, R. Efficient estimation of copula-garch models. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 53, p. 2284–2297, 2009.
- MALEVERGNE, Y.; SORNETTE, D. *Extreme financial risks: from dependence to risk management*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- MANGANELLI, S. Duration, volume and volatility impact of trades. *Journal of Financial Markets*, v. 8, p. 377–399, 2005.
- MARDIA, K. V.; KENT, J. T.; BIBBY, J. M. *Multivariate Analysis*. New York: Academic Press, 1979.
- MARSHAL, R.; ZEEVI, A. *Beyond correlation: extreme co-movements between financial assets*. [S.l.], 2002.
- MARSHALL, A. Distributions with fixed marginals and related topics. In: \_\_\_\_\_. Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics, 1996. cap. Copulas, marginals and joint distributions.
- MENDES, B. V. d. M. Computing conditional var using time-varying copulas. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 3, n. 2, 2005.
- MENDES, B. V. M.; MORETTI, A. Improving financial risk assessment through dependency. *Statistical Modelling*, v. 2, n. 2, 2002.
- MYKLAND, P. A.; ZHANG, L. *The Econometrics of High Frequency Data*. [S.l.], 2009.
- NELSEN, R. *An introduction to copulas*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- NIKOLOULOPOULOS, A. K.; KARLIS, D. Copula model evaluation based on parametric bootstrap. *Computational Statistics and Data Analysis*, n. 52, p. 3342–3353, 2008.
- NINGA, C.; XU, D.; WIRJANTO, T. S. Modeling the leverage effect with copulas and realized volatility. *Finance Research Letters*, v. 5, p. 221–227, 2008.
- OMRAM, M. F.; MACKENZIE, E. Heteroscedasticity in stock returns data revisited: volume versus garch effects. *Applied Financial Economics*, v. 10, p. 553–560, 2000.
- PATTON, A. J. On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, v. 2, n. 1, 2004.
- PATTON, A. J. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review*, v. 2, n. 47, p. 527–556, 2006.
- PATTON, A. J. Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths. *Journal of Applied Econometrics*, v. 21, p. 147–173, 2006a.
- PELLETIER, D. Regime-switching for dynamic correlation. *Journal of Econometrics*, n. 131, p. 445–473, 2006.

- POLITIS, D. N. The impact of bootstrap methods on time series analysis. *Statist. Science*, v. 18, p. 219–230, 2003.
- POLITIS, D. N.; WHITE, H. Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Econometric Reviews*, v. 23, n. 1, p. 53–70, 2004.
- POLITIS, D. N.; WHITE, H.; PATTON, A. J. Correction: Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Working Paper*, 2007.
- POON, S.-H.; GRANGER, C. Forecasting volatility in financial markets: a review. *Journal of Economic Literature*, v. 41, 2003.
- PROTTER, P. *Stochastic Integration and Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 2005.
- RODRIGUEZ, J. Measuring financial contagion: a copula approach. *Journal of Empirical Finance*, n. 14, p. 401–423, 2007.
- SANCETTA, A.; SATCHELL, S. E. *Bernstein approximations to the copula function and portfolio optimization*. Cambridge, 2001.
- SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Probabilistic metric spaces. *Elsevier Science*, 1983.
- SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, v. 8, p. 229–231, 1959.
- WANG, C.; CHIN, S. Profitability of return and volume-based investment strategies in china's stock market. *Pacific-Basin Finance Journal*, v. 12, p. 541–564, 2004.
- WANG, P.; LIU, A. Stock return volatility and trading volume: Evidence from the chinese stock market. *Journal of Chinese Economic and Business Studies*, v. 3, p. 39–54, 2005.
- WU, G. The determinants of asymmetric volatility. *Review of Financial Studies*, v. 14, 2001.
- XU, X. E.; CHEN, P.; WU, C. Time and dynamic volume-volatility relation. *Journal of Banking and Finance*, v. 30, p. 1535–1558, 2006.
- ZHONG, M.; DARRAT, A.; ANDERSON, D. Do u.s. stock prices deviate from their fundamental values?: Some new evidence. *Journal of Banking and Finance*, v. 27, p. 673–697, 2003.