

*UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
COMISSÃO DE GRADUAÇÃO DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL*

Vitor Cabral Mucillo

**DIMENSIONAMENTO AUTOMÁTICO DE
LAJES DE CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Porto Alegre
Novembro 2021

VITOR CABRAL MUCILLO

**DIMENSIONAMENTO AUTOMÁTICO DE
LAJES DE CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Civil
da Escola de Engenharia da Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Engenheiro Civil

Orientador: Jorge Luis Palomino Tamayo

Porto Alegre
Novembro 2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha mãe, Andréia Batista Cabral, por me incentivar a sempre superar meus limites e me ajudar nos momentos que duvidei da minha capacidade.

Agradeço ao meu pai, Marcos Vinício Mucillo Padilha, e a minha avó, Laura Venimar Mucillo Padilha, por me darem apoio para que eu conseguisse chegar aqui.

Agradeço aos meus avós, Jurany Gularte Cabral e Lúcia Helena Batista Cabral, pelos momentos de conversa que me tranquilizava e por sempre estarem presentes.

Agradeço ao meu orientador, Jorge Luis Palomino Tamayo, pela oportunidade de fazer iniciação científica e por estar sempre à disposição para me ensinar, contribuindo grandemente para o meu amadurecimento acadêmico.

E, finalmente, agradeço aos meus amigos que me aguentaram durante meus altos e baixos, especialmente ao Vinícius Barcella Lohmann, meu melhor amigo e parceiro de faculdade.

RESUMO

Neste trabalho se apresenta uma ferramenta numérica para a análise e dimensionamento de lajes de concreto armado. A ferramenta foi elaborada a partir da combinação do Excel e do SAP2000, softwares frequentemente utilizados na indústria da Engenharia Civil. Para tal propósito, a Interface de Programação Aplicada do software SAP 2000 é vinculada ao ambiente de Visual Basic para Aplicações embutido no Excel. Nesse sentido, a ferramenta desenvolvida apresenta uma interface amigável através de Planilhas de Excel que permite automatizar a geração de malhas de elementos finitos e o estudo de vários cenários de carga, material e geometria para a laje em questão, visto que esses parâmetros podem ser facilmente modificados. A ferramenta conta com três algoritmos comumente utilizados para o dimensionamento do reforço em lajes de concreto armado, no entanto a ênfase é dada ao algoritmo proposto por Lourenço e Figueiras (1993), o qual permite dar um tratamento acoplado aos diferentes tipos de esforços que podem atuar em uma laje. Quatro exemplos de aplicação são apresentados visando mostrar o correto funcionamento da ferramenta implementada.

Palavras-chave: Lajes, SAP 2000; Excel; VBA; Elementos Finitos.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Esforços de membrana em um elemento de placa | 12 |
| Figura 2-Contribuição da armadura e contribuição do concreto | 13 |
| Figura 3- Esforços de flexão e de membrana em um elemento de casca..... | 16 |
| Figura 4 - Distâncias das armaduras em relação ao plano central | 16 |
| Figura 5 -Ângulos de fissuras | 17 |
| Figura 6 - Visual basic do Excel | 23 |
| Figura 7 - Referência VBA | 24 |
| Figura 8 - Módulos..... | 24 |
| Figura 9 - Variáveis de conexão com o SAP2000 | 24 |
| Figura 10 – Interface do usuário | 25 |
| Figura 11 - Gráficos de área de aço nos planos de interesse..... | 26 |
| Figura 12- Fluxograma da planilha | 26 |
| Figura 13 - Laje simplesmente apoiada gerada no SAP2000 | 27 |
| Figura 14– Resultados obtidos do SAP2000..... | 27 |
| Figura 15 - Referencial do SAP2000 de um elemento de casca | 28 |
| Figura 16 - Laje simplesmente apoiada | 29 |
| Figura 17 – M_{xx} (kN.m/m)..... | 29 |
| Figura 18 – M_{yy} (kN.m/m)..... | 30 |
| Figura 19– M_{xy} (kN.m/m)..... | 30 |
| Figura 20 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em x..... | 31 |
| Figura 21 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em y..... | 31 |
| Figura 22- Áreas de reforço de aço (cm^2/m) segundo a direção x | 32 |
| Figura 23 - Áreas de reforço de aço (cm^2/m) segundo a direção y | 33 |
| Figura 24 - Corte paralelo ao eixo X: diagrama de aço no meio do vão (esquerda) e junto ao apoio (direita)..... | 34 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 25 - Corte paralelo ao eixo X (Lourenço e Figueiras [6]): diagrama de aço no meio do vão (esquerda) e junto ao apoio (direita). | 34 |
| Figura 26 - Laje engastada em 3 bordos e 1 livre | 35 |
| Figura 27 – Mxx (kN.m/m)..... | 35 |
| Figura 28 - Myy (kN.m/m)..... | 36 |
| Figura 29 – Mxy (kN.m/m)..... | 36 |
| Figura 30 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em x..... | 37 |
| Figura 31 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em y..... | 37 |
| Figura 32 – Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção x | 38 |
| Figura 33 - Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção y | 39 |
| Figura 34 – Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo y em x=0 | 40 |
| Figura 35 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo x em y=0..... | 40 |
| Figura 36 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo y em x= -2.5 m | 41 |
| Figura 37 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo x em y=-3.0 m | 41 |
| Figura 38 - Laje engastada nos 4 bordos..... | 42 |
| Figura 39 – Mxx (kN.m/m)..... | 42 |
| Figura 40 – Myy (kN.m/m)..... | 43 |
| Figura 41 – Mxy (kN.m/m)..... | 43 |
| Figura 42 - Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção x | 44 |
| Figura 43 - Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção y | 45 |
| Figura 44 - Laje engastada em 2 bordos e simplesmente apoiada nos outros bordos..... | 46 |
| Figura 45 – Mxx (kN.m/m)..... | 46 |
| Figura 46 – Myy (kN.m/m)..... | 47 |
| Figura 47 – Mxy (kN.m/m)..... | 47 |
| Figura 48 - Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção x | 48 |
| Figura 49 - Áreas de reforço de aço (cm ² /m) segundo a direção y | 49 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|------------------------------|----|
| Tabela 1 - Propriedades..... | 29 |
| Tabela 2 - Propriedades..... | 35 |
| Tabela 3 - Propriedades..... | 42 |
| Tabela 4 - Propriedades..... | 46 |

SUMÁRIO

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| RESUMO | 4 |
| 1 INTRODUÇÃO | 9 |
| 2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS GERAIS | 11 |
| 2.1 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO CONCRETO | 11 |
| 2.2 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DO AÇO..... | 11 |
| 3 ESFORÇOS DE MEMBRANA E DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO | 12 |
| 4 ESFORÇOS DE MEMBRANA ASSOCIADOS COM ESFORÇOS DE FLEXÃO E DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA EM LAJES E CASCAS..... | 16 |
| 4.1 MÉTODO GERAL RECORRENDO ÀS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO..... | 16 |
| 4.1.1 <i>Armadura necessária na camada superior e inferior</i> | 18 |
| 4.1.2 <i>Compressão bi-axial na camada superior</i> | 21 |
| 4.1.3 <i>Compressão bi-axial na camada inferior</i> | 22 |
| 4.1.4 <i>Compressão bi-axial nas camadas superior e inferior</i> | 22 |
| 5 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DIMENSIONAMENTO | 23 |
| 6 EXEMPLOS..... | 28 |
| 6.1 LAJE SIMPLEMENTE APOIADA | 28 |
| 6.2 LAJE ENGASTADA EM 3 BORDOS E 1 LIVRE | 35 |
| 6.3 LAJE ENGASTADA NOS 4 BORDOS | 42 |
| 6.4 LAJE ENGASTADA EM 2 BORDOS E 1 ABERTURA | 46 |
| 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES | 50 |
| REFERÊNCIAS | 50 |

1 INTRODUÇÃO

O advento dos processadores computacionais possibilitou solucionar longos cálculos e iterações que antes eram inviáveis manualmente em tempo hábil. Portanto, tornou-se possível a implementação de algoritmos que automatizam os processos de dimensionamento. Segundo Braga [1] e Souza Jr. [2], ferramentas computacionais de análise de estruturas utilizando técnicas numéricas baseada no Método dos Elementos Finitos contribuíram muito para o avanço dos métodos de otimização. Devido ao grande número de incógnitas com que estas ferramentas trabalham, poder-se-ia contentar apenas com a análise através de processos de "tentativa e erro" a fim de encontrar a solução mais ótima. Contudo, para diminuir o esforço computacional nos procedimentos de análise, inúmeros *softwares* comerciais foram equipados com linguagens de programação aberta, potencialidade conhecida na literatura inglesa como *Open Application Programming Interface* (OAPI), conforme se verifica hoje em dia nos programas comerciais de grande desempenho como o SAP 2000, NASTAN, ANSYS e GENESIS, entre outros. Essa potencialidade permite ao usuário acessar externamente os programas e customizar as tarefas de análise, dimensionamento e inclusive do processamento de resultados logrando se, portanto de um ganho significativo na realização de estudos paramétricos. Fato altamente relevante visto que a realização de ditos estudos permitirão explorar diferentes soluções a fim de selecionar aquela mais ótima em um período mais curto de tempo em relação a uma abordagem puramente manual.

Nesse contexto, o presente trabalho consistirá na elaboração de uma ferramenta numérica customizada para o dimensionamento de lajes de concreto armado baseado no acoplamento do Excel com o programa SAP 2000, sendo que esse último será manipulado com a programação em *Visual Basic para Aplicações* (VBA) do Excel. Através do SAP 2000, é possível obter, em planilhas de Excel, os esforços internos de flexão e de membrana da laje em estudo, para posteriormente aplicar os correspondentes algoritmos de dimensionamento do aço de reforço e analisar quais as camadas que compõem a laje estão necessitando deste reforço. A modelagem da laje no SAP 2000 é feita através de seu plano médio mediante elementos finitos de casca de quatro nós.

Os procedimentos de análise não linear com elementos finitos, usualmente, consideram a utilização de várias camadas ao longo da espessura do elemento de casca, a fim de capturar a não linearidade do material usando as condições de compatibilidade de deformação, equilíbrio de forças e critérios de resistência dos materiais. Adicionalmente como destacado em Craveiro et al. [3], o método multicamadas é um método de verificação e requer o conhecimento prévio da armadura.

No caso de análise linear, o procedimento de dimensionamento, usualmente empregado, consiste em determinar as dimensões de laje mediante procedimentos práticos de pré-dimensionamento baseados na experiência do projetista, sendo que as forças de seção são determinadas com a ajuda de uma análise linear. No seguinte passo, o dimensionamento não linear ao nível da seção transversal da peça é realizado e o reforço finalmente calculado. O método é usado comumente e tem a vantagem de fazer uso do princípio da superposição, fato altamente relevante visto que um número significativo de combinações de carga deve ser verificado. Propostas mais avançadas indicadas em Kollegger et al. [4], sugerem a utilização de procedimentos iterativos usando diretamente um algoritmo não linear em multicamadas, no qual a ideia é partir com uma armadura mínima e aplicar as cargas externas em etapas. Assim, com a armadura mínima, as cargas são aumentadas até que não haja mais equilíbrio. A armadura com a maior deformação é então reforçada considerando uma taxa de armadura maior, a carga associada com esse novo reforço é então calculada e o procedimento é repetido quantas vezes forem necessárias para equilibrar as cargas aplicadas, respeitando as deformações e tensões permitidas. Uma alternativa a esse método seria partir da armadura máxima e diminuir a armadura iterativamente até que o equilíbrio não seja mais possível ou até que as deformações superem os valores estabelecidos pelas normas.

Processos um pouco mais elaborados e ainda práticos, porém sem a necessidade de recorrer a um valor conhecido do reforço desde o início da análise para o dimensionamento de lajes, requerem a divisão da espessura da laje em três camadas representativas: duas camadas externas e uma camada central, onde as tensões atuantes, por estarem próximas da linha neutra nos casos de flexão pura, não seriam críticas. Precisamente, Gupta [5] formulou um método de três camadas que utiliza as equações de equilíbrio para os esforços de membrana e flexão agindo simultaneamente para o cálculo de reforço. De fato, o método é geral e adequado também para o dimensionamento de cascas de concreto armado, sendo que o dimensionamento de lajes é um caso particular. Essa metodologia foi logo generalizada por Lourenço e Figueiras [6] usando o modelo do código CEB 90 [7] para dar um tratamento mais geral, cobrindo situações de análise que inicialmente tinham sido desconsideradas no trabalho de Gupta [5]. Precisamente, nesse trabalho, a ênfase é dada ao método apresentado no trabalho de Lourenço e Figueiras [6], sendo que os autores disponibilizaram a rotina computacional de dimensionamento na linguagem de programação Fortran. Visto que os métodos de dimensionamento de três camadas estão baseados apenas nas equações de equilíbrio de forças, assim como na utilização da resistência máxima dos materiais, esses métodos desconsideram as equações de compatibilidade em deformações ao longo da espessura da laje. Além disso, em suas formulações originais esses métodos apenas consideram o dimensionamento do reforço em tração, desconsiderando, portanto, situações de armadura dupla. Visto que o método utiliza um processo iterativo para encontrar a altura do bloco equivalente do concreto em compressão, esse pode apresentar erros no caso que seja necessária armadura em compressão, pois o processo iterativo aumenta a espessura de cada camada para aumentar a contribuição do concreto para o equilíbrio, porém como o concreto por si só não é capaz de equilibrar as cargas compressivas aplicadas, devido às espessuras das camadas ultrapassarem a metade da espessura do elemento, resulta em uma alternativa sem solução. Isso ocorre

porque o método não é capaz de prever o reforço de compressão. Já o método multicamadas é capaz de verificar elementos com armadura de compressão. Sendo assim, é importante destacar que devido à natureza do método de três camadas, esse faz uso do Teorema Estático da Teoria de Análise Limite, definindo limites inferiores para as cargas de colapso.

Conforme o trabalho de Lourenço e Figueiras [6], quatro casos diferentes devem ser estudados conforme a necessidade de reforço em cada camada externa analisada. O código computacional a ser descrito assume inicialmente que é necessário reforço em ambas as camadas externas. Os resultados da primeira iteração do algoritmo irão determinar em qual dos seguintes casos o elemento em estudo se encaixa, como reforço em ambas as camadas externas, reforço apenas na camada inferior, reforço apenas na camada superior ou sem necessidade de reforço, dependendo tudo isso do nível de tensões instalado na iteração atual nas diversas camadas estudadas. Nesse trabalho se compara os resultados do algoritmo proposto por Lourenço e Figueiras [6] com outras abordagens disponíveis na literatura para demonstrar sua eficiência sobre outras metodologias.

Nesse sentido, implementou-se o modelo de dimensionamento padrão estabelecido na NBR6118 [9] para o dimensionamento de elementos submetidos à flexão. Nesse procedimento, o momento fletor em cada direção de análise é utilizado para determinar a área de reforço necessária nessa direção. Isso implica um tratamento desacoplado do problema, e inclusive levando na prática à omissão do momento de torção associado, que pode aparecer em algumas situações, principalmente, no entorno dos cantos das lajes.

A outra metodologia de análise considerada nesse estudo corresponde ao algoritmo utilizado pelo software SAP 2000 baseado no trabalho de Nielsen [10], embora se pudesse ter aplicado diretamente essa potencialidade do programa, decidiu-se implementar a metodologia baseada na referência citada.

Uma importante aplicação corresponde ao estudo de lajes com furos, onde a utilização de uma taxa da armadura adequada está intimamente associada à redução do nível de dano mecânico concentrado ao redor da abertura [8]. Devido à existência da abertura, o nível de resistência à punção da laje ao redor desta zona da laje é claramente reduzido. O exemplo de laje com abertura demonstra claramente a importância da correta quantificação dos esforços agindo em volta da abertura e à utilização de métodos de dimensionamento mais robustos ao invés de métodos simplificados, podendo se prever e reduzir o nível de fissuração nessa região. Precisamente, a última aplicação desse trabalho trata do caso de uma laje com furo.

É importante salientar que as considerações das taxas mínimas e máximas indicadas pelas normas não têm sido consideradas nos algoritmos implementados, a fim de realizar uma comparação mais clara entre as respostas dos algoritmos. Futuros estudos incluirão essa potencialidade.

2 CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS GERAIS

A seguir serão apresentadas as formulas utilizadas para estabelecer as resistências dos materiais usadas no algoritmo de Lourenço e Figueiras [6].

2.1 Definição das propriedades do concreto

O concreto é um material complexo e a sua descrição constitutiva completa exige um número elevado de parâmetros. No entanto, e no estudo agora efetuado, o concreto irá ser considerado como um material rígido-plástico e caracterizado unicamente por um parâmetro de resistência, chamado de tensão de ruptura efetiva, f_c^* .

Os estudos realizados por Vecchio e Collins[11] sugerem que a tensão efetiva depende da extensão transversal co-existente. O programa experimental desenvolvido na Universidade de Toronto consistiu em aplicar carregamentos simples e bem definidos em placas de concreto armado tornando possível efetuar o traçado do comportamento de um elemento desde o início do carregamento até ao seu valor final, conhecendo em cada incremento de carga o seu estado de tensão e deformação. No caso geral de dimensionamento de uma estrutura isso não acontece e, portanto, deve-se adotar valores seguros para a tensão efetiva f_c^* , principalmente, para dois casos distintos segundo as formulações estabelecidas pelo CEB [7],

- Zonas não fissuradas

$$f_{cd1} = 0.85 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (1)$$

- Zonas fissuradas onde a resistência à compressão pode ser reduzida pelo efeito da tensão transversal produzida pela armadura e pela necessidade de transmitir força através das fissuras

$$f_{cd2} = 0.60 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (2)$$

onde f_{ck} e f_{cd} em MPa são, respectivamente, a resistência característica e resistência de cálculo do concreto.

Para o concreto submetido a um estado de compressão bi-axial, a tensão máxima de ruptura vem aumentada (em valor absoluto) para $K \cdot f_{cd1}$ devido ao confinamento do concreto armado. De acordo com o CEB [7],

$$K = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2}, \text{ com } \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (3)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões principais máxima e mínima no ponto em consideração.

Na presente análise, e tal como é prática corrente em dimensionamento, a resistência do concreto armado à tração é desprezada. Adicionalmente também a engrenagem entre as faces de uma fissura conhecida na literatura inglesa como "aggregate interlock" é ignorada.

2.2 Definição das propriedades do aço

Para o aço admite-se que a tensão de ruptura é a tensão de escoamento (ou a tensão de proporcionalidade a 0.2% de deformação para aços duros).

Considera-se que o aço resiste unicamente a esforços axiais desprezando-se o efeito de pino nas armaduras longitudinais ("dowel action"). O efeito benéfico da compressão das barras é desprezado, já que, em geral e atendendo às baixas percentagens de armaduras utilizadas, é pequeno em comparação com a ação do concreto envolvente. Deste modo o aço será sempre dimensionado para esforços de tração.

Os problemas de adesão e de ancoragem das barras também são ignorados.

Admite-se que a armadura é constituída por um conjunto de barras distribuídos na seção. Essas barras deverão ser paralelas e colocadas suficientemente próximas entre si.

Para efeitos de dimensionamento a armadura será colocada de modo a formar uma malha ortogonal e a resistência de cálculo do aço à tração será representada por f_{syd} .

3 ESFORÇOS DE MEMBRANA E DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA PARA O ESTADO PLANO DE TENSÃO

A Figura 1 mostra um elemento plano sujeito a esforços de membrana por unidade de comprimento, designados por N_x , N_y e N_{xy} seguindo a convenção mostrada de acordo aos eixos do sistema xy .

Vamos admitir que a armadura é constituída por barras ortogonais orientados nas direções x e y . Seja então A_{sx} e A_{sy} a armadura existente por metro de laje nas referidas direções, dimensionada para os esforços N_x^* e N_y^* respectivamente como se apresenta na Figura 2.

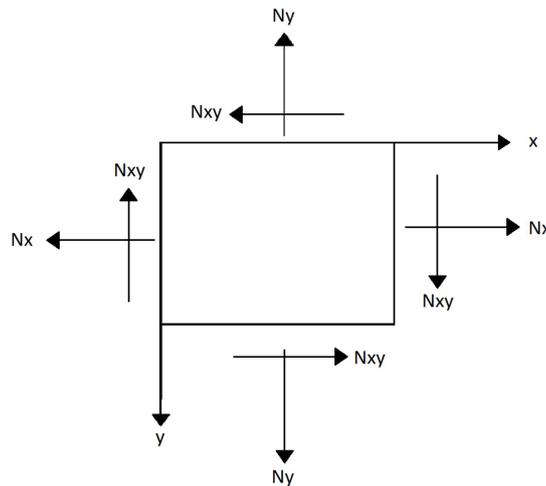


Figura 1 - Esforços de membrana em um elemento de placa

A solução para este problema é bem conhecida. A superfície de plastificação para armadura isotrópica foi obtida por Nielsen em 1964 [12]. De novo Nielsen, em 1971 [13], estende o conceito a armadura ortotrópica. Já Braestrup [14] alarga ainda mais o conceito para orientações múltiplas e quaisquer de armadura. Para estes autores as expressões de dimensionamento foram obtidas recorrendo a equações de equilíbrio. Também Gupta [15], [16] obtém o mesmo resultado usando o Princípio da Resistência Mínima, isto é, admitindo que a ruptura ocorra para uma direção θ tal que a razão entre a força resistente e a força aplicada é unitária. Fialkow [17] apresenta estas mesmas expressões, mas introduz uma parcela adicional devida à resistência ao corte do concreto.

Estas soluções, em que as condições de equilíbrio e resistência são verificadas correspondem a um dimensionamento seguro com base no Teorema do Limite Inferior da Análise Plástica.

Sendo assim, o problema em geral pode ser interpretado de duas maneiras, a primeira corresponde ao caso, onde a partir de uma configuração de reforço conhecida na laje, desejasse saber o valor da carga aplicada que consegue suportar a laje, enquanto no segundo caso, o processo é inverso no sentido de que para uma carga conhecida se deseja saber o reforço necessário para suportá-la. Precisamente, este último caso será tratado neste trabalho.

O problema será abordado neste trabalho recorrendo às equações de equilíbrio, já que esta formulação é a que mais facilmente se adapta a um elemento de laje (isto é, quando se introduzem esforços de flexão).

Se admitirmos que as tensões principais no concreto são σ_1 e σ_2 , e que θ é o ângulo que σ_1 faz com o eixo x ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), então as tensões no concreto referidas ao sistema de eixos x - y valem,

$$\sigma_x^c = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$\sigma_y^c = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta \quad (5)$$

$$\tau_{xy}^c = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta \quad (6)$$

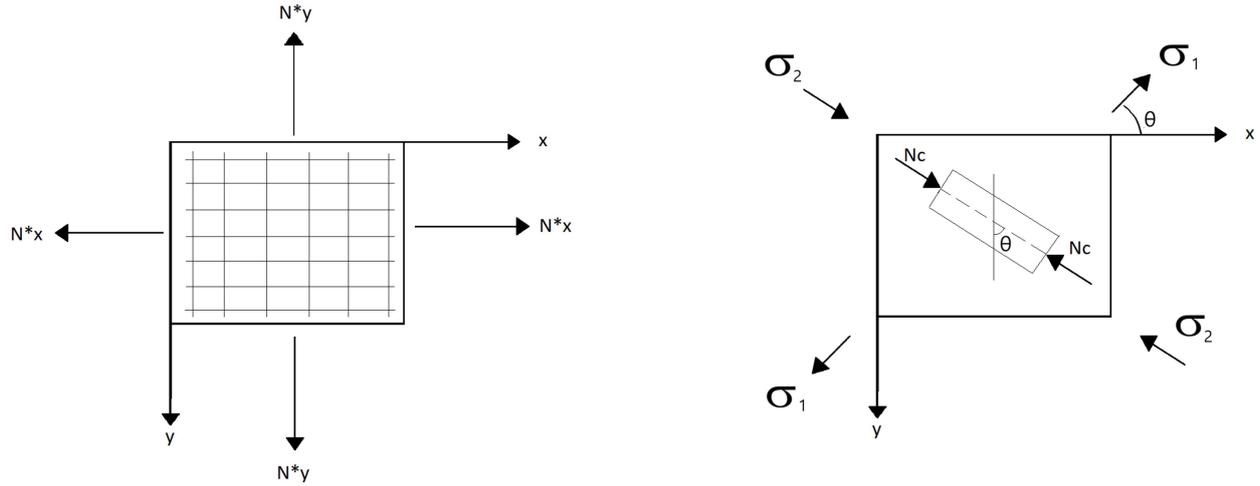


Figura 2 – Contribuição da armadura e contribuição do concreto

Nas condições referidas na seção 2 temos $\sigma_1 = 0$ (consideramos que a tensão principal é positiva de tração e, portanto, igual a zero dado que o material não resiste tensões de tração) e $\sigma_2 > -f_c^*$ (é a tensão principal compressiva negativa). Deste modo, podemos estabelecer as seguintes equações de equilíbrio em termos de esforços baseadas nas equações precedentes e considerando também a contribuição do reforço,

$$N_x = N_x^* + N_c \sin^2 \theta \quad (7)$$

$$N_y = N_y^* + N_c \cos^2 \theta \quad (8)$$

$$N_{xy} = -N_c \sin \theta \cos \theta \quad (9)$$

Em que,

$$N_c = -h f_c^* \quad (10)$$

e h representa a espessura da laje. É nesse ponto onde já se utiliza através de N_c toda a capacidade resistente do concreto, o que está de acordo com o Teorema de Análise Limite. Começando pela esquerda destas equações estão os esforços atuantes (solicitações) no elemento (N_x, N_y, N_{xy}). No lado direito das equações englobam duas parcelas distintas para a resistência do ponto de amostragem, sendo a primeira devida à contribuição da armadura (N_x^* e N_y^*) e a segunda devido à contribuição do concreto (ver Figura 2).

Os casos de $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ são triviais. Admitindo $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, resolvendo as Equações de 7 a 9 obtemos:

$$N_x^* = N_x + N_{xy} \operatorname{tg} \theta \quad (11)$$

$$N_y^* = N_y + N_{xy} \operatorname{cotg} \theta \quad (12)$$

$$N_c = \frac{-N_{xy}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (13)$$

O total de armadura pode ser obtido a partir de 11 e 12 e vale,

$$N_x^* + N_y^* = N_x + N_y + N_{xy}(\tan \theta + \operatorname{cotg} \theta) \quad (14)$$

Como o último termo terá de ser positivo para garantir necessariamente que a resultante do lado direito da equação seja positiva, N_{xy} e θ deverão ter os mesmos sinais. O valor mínimo do total de armadura corresponde a $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$. Para estes valores de θ e dado que $N_x^* \geq 0$ e $N_y^* \geq 0$, a Equação 11 conduz a $N_x \geq -|N_{xy}|$ e a Equação 12 a $N_y \geq -|N_{xy}|$. Se isso não se verificar então o valor de θ terá de ser alterado.

Deste modo, somos conduzidos a quatro casos distintos.

Caso 1 – A_{sx} e A_{sy} necessárias

$$\begin{aligned} N_x &\geq -|N_{xy}|, N_y \geq -|N_{xy}|; \\ N_x^* &= N_x + |N_{xy}|, N_y^* = N_y + |N_{xy}| \\ \theta &\geq \pm \frac{\pi}{4}, N_c \geq -2|N_{xy}|; \end{aligned}$$

Caso 2 – Apenas A_{sy} necessária

$$\begin{aligned} N_x &< -|N_{xy}| \rightarrow N_x^* = 0; \\ \text{eq(11)} &\rightarrow \tan \theta = -\frac{N_x}{N_{xy}}; \\ \text{eq(12)} &\rightarrow N_y^* = N_y - \frac{N_{xy}^2}{N_x}, N_y^* \geq 0 \rightarrow N_y \geq \frac{N_{xy}^2}{N_x}; \\ \text{eq(13)} &\rightarrow N_c = N_x + \frac{N_{xy}^2}{N_x}, \end{aligned}$$

Caso 3 – Apenas A_{sx} necessária

$$\begin{aligned} N_y &< -|N_{xy}| \rightarrow N_y^* = 0; \\ \text{eq(12)} &\rightarrow \tan \theta = -\frac{N_{xy}}{N_y}; \\ \text{eq(11)} &\rightarrow N_x^* = N_x - \frac{N_{xy}^2}{N_y}, N_x^* \geq 0 \rightarrow N_x \geq \frac{N_{xy}^2}{N_y}; \\ \text{eq(13)} &\rightarrow N_c = N_y + \frac{N_{xy}^2}{N_y}, \end{aligned}$$

Caso 4 – A_{sx} e A_{sy} desnecessárias devido à compressão bi-axial

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} N_x < -|N_{xy}| \\ N_y < \frac{N_{xy}^2}{N_x} \end{array} \right\} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} N_y < -|N_{xy}| \\ N_x < \frac{N_{xy}^2}{N_y} \end{array} \right\} \\ &\quad \downarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} N_x^* = 0 \\ N_y^* = 0 \\ N_{c1,c2} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Estas fórmulas correspondem à inclinação ótima da direção da compressão no concreto, isto é, o valor de θ que conduz à menor quantidade de armadura. Fato que é relevante, pois se procura um dimensionamento econômico. Para um valor dado de θ , as forças na armadura podem ser obtidas das Equações 11 e 12, se a armadura numa direção é conhecida, então estas equações permitem obter θ e a força na armadura na outra direção.

Dimensionamento da armadura:

O dimensionamento da armadura, por unidade de comprimento, é obtido de:

$$A_{sx} = \frac{N_x^*}{f_{syd}} \text{ e } A_{sy} = \frac{N_y^*}{f_{syd}} \quad (15)$$

Verificação da ruptura do concreto:

$$f_c = \frac{N_c}{h} \quad (16)$$

- Disposições do CEB [7]:

$$f_c \leq f_{cd2} - \text{nos Casos 1 a 3} \quad (17)$$

$$f_c \leq Kf_{cd1} - \text{no Caso 4} \quad (18)$$

onde f_{cd1} , f_{cd2} e K são obtidos das Equações 1, 2 e 3, respectivamente, da seção 1 segundo o nível de fissuração ou compressão instalado. É de salientar que não parece razoável considerar uma diferença de resistência tão substancial e com variação não contínua entre os casos 3 e 4 ou entre os casos 2 e 4, tanto mais que a Equação 17 pretende ser um mínimo quase absoluto para as zonas fissuradas. No entanto esse parece ser o preço a pagar numa perspectiva simplificada de dimensionamento.

Adicionalmente, o CEB [7] recomenda que o ângulo entre a direção de compressão no concreto e a orientação de qualquer das armaduras seja pelo menos 15° . Como é evidente, tal condição só deverá ser verificada em relação às armaduras consideradas necessárias pelo cálculo e não em relação à armadura de montagem ou armadura mínima por imposições regulamentares.

É importante destacar que a formulação apresentada corresponde ao método que chamaremos nesse trabalho de Método de Lourenço e Figueiras na sua formulação original.

Exemplo numérico:

$$N_x = -150 \text{ kN/m}, N_y = 200 \text{ kN/m}, N_{xy} = 100 \text{ kN/m}$$

$$h = 0.10 \text{ m}, f_{cd} = 13.3 \text{ MPa}, f_{syd} = 348 \text{ MPa};$$

- Caso 2

$$N_x^* = 0$$

$$N_y^* = 200 - \frac{100^2}{-150} = 267 \text{ kN/m}$$

$$N_c = -150 + \frac{100^2}{-150} = -217 \text{ kN/m}$$

Cálculo da armadura:

$$A_{sx} = 0$$

$$A_{sy} = \frac{267}{34.8} = 7.66 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Verificação da ruptura do concreto de acordo com o CEB [7]:

$$f_{cd2} = 0.6 \left(1 - \frac{1.5 \times 13.3}{250} \right) \times 13.3 = 7.3 \text{ MPa}$$

$$f_c = \frac{0.217}{0.10} = 2.2 \text{ MPa} \leq f_{cd2}$$

4 ESFORÇOS DE MEMBRANA ASSOCIADOS COM ESFORÇOS DE FLEXÃO E DIMENSIONAMENTO DE ARMADURA EM LAJES E CASCAS

O problema a analisar é o de um elemento de laje ou casca sujeito simultaneamente a esforços de membrana e flexão (ver Figura 3). As direções principais dos esforços de membrana e de flexão, em geral, não coincidem.

Os esforços atuantes terão de estar em equilíbrio com as forças de tração na armadura e forças de compressão no concreto. Esta armadura será constituída por barras que formam uma malha ortogonal disposta paralelamente aos eixos x e y como já foi comentando na seção anterior.

A formulação do problema será em tudo idêntica à da seção 3, em termos puramente físicos, a resistência total do elemento é obtida adicionando a contribuição do concreto com a contribuição da armadura.

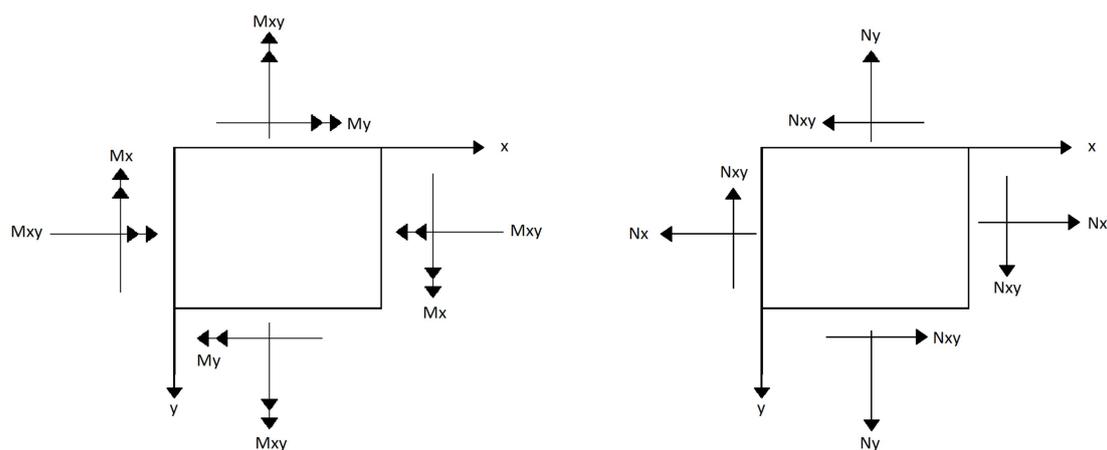


Figura 3 - Esforços de flexão e de membrana em um elemento de casca

4.1 Método geral recorrendo às equações de equilíbrio

Nesta seção é apresentado um processo que permite, de um modo simples e preciso, e a partir do equilíbrio das forças aplicadas a um elemento de casca, obter as armaduras necessárias e minimizar o seu total.

O processo indicado pode ser utilizado diretamente para dimensionamento. No caso de ausência de esforços de flexão o método degenera em duas camadas iguais, conduzindo às fórmulas obtidas na seção 3.

A Figura 5 mostra um elemento de casca com a armadura orientada na direção x e y . A capacidade resistente da armadura é designada por N_{xt}^* , N_{yt}^* , N_{xb}^* , N_{yb}^* , em que o subscrito x e y está associado à respectiva direção, e o subscrito t e b está associado à camada superior ("top") e inferior ("bottom") respectivamente.

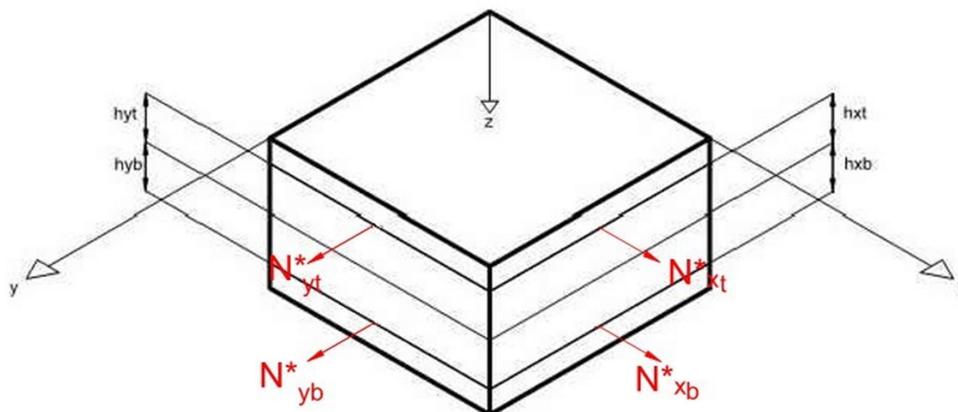


Figura 4 - Distâncias das armaduras em relação ao plano central

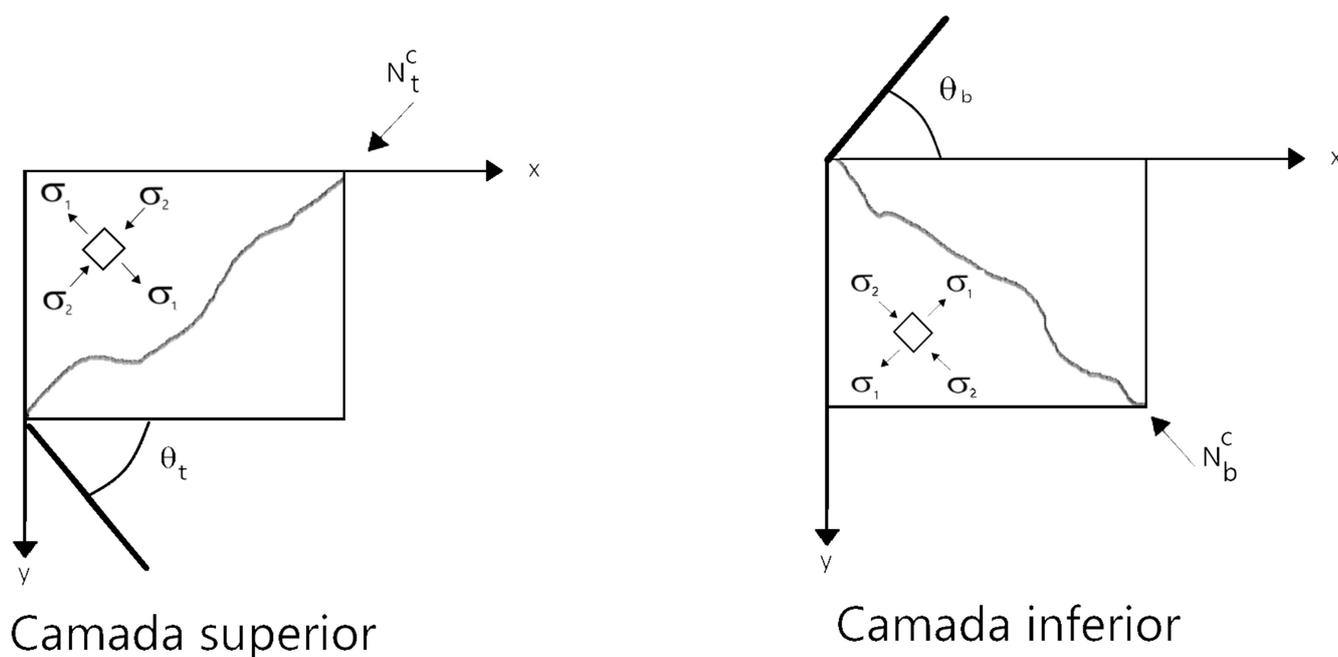


Figura 5 - Ângulos de fissuras

De maneira geral, considera-se as situações apresentadas na Figura 5 onde um plano vertical de ruptura, cuja normal faz um ângulo θ_t com o eixo x , no plano xy , desenvolve-se na camada superior. O concreto está sujeito a uma compressão paralela a este plano. A espessura da camada superior do concreto comprimido é a_t , admitindo-se o material sujeito ao bloco retangular de tensões.

De mesmo modo, e para a camada inferior, à normal ao plano de ruptura está associado θ_b e à espessura do bloco de tensões retangular no concreto a_b .

Serão agora estudados quatro casos distintos de acordo com a necessidade de armadura em cada uma das camadas exteriores. O método computacional que irá ser descrito começa por admitir que existe necessidade de armadura nas duas camadas exteriores. Os resultados da 1ª iteração permitem determinar em qual dos quatro casos seguintes o elemento de amostragem se encontra,

- Armadura necessária na camada superior e inferior
- Armadura necessária só na camada inferior
- Armadura necessária só na camada superior
- Armadura desnecessária

4.1.1 Armadura necessária na camada superior e inferior

As forças e momentos a que a armadura resiste na direção x e y são dadas por,

$$\begin{aligned} N_x^* &= N_{xt}^* + N_{xb}^* \\ N_y^* &= N_{yt}^* + N_{yb}^* \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_x^* &= -N_{xt}^* h_{xt} + N_{xb}^* h_{xb} \\ M_y^* &= -N_{yt}^* h_{yt} + N_{yb}^* h_{yb} \end{aligned} \quad (20)$$

Se a tensão média de compressão no concreto é f_{cd2} (ver seção 2), a força no concreto na camada superior e o respectivo momento produzido são dadas por,

$$\begin{aligned} N_t^c &= -a_t f_{cd2}; \\ M_t^c &= -\frac{1}{2}(h - a_t)N_t^c \end{aligned} \quad (21)$$

e na camada inferior são dadas por,

$$\begin{aligned} N_b^c &= -a_b f_{cd2}; \\ M_b^c &= \frac{1}{2}(h - a_b)N_b^c \end{aligned} \quad (22)$$

As Equações 19 a 22 fornecem as forças e momentos resistentes. Estes terão de estar em equilíbrio com as forças e momentos atuantes. Deste modo,

$$N_x = N_x^* + N_t^c \sin^2 \theta_t + N_b^c \sin^2 \theta_b \quad (23)$$

$$N_y = N_y^* + N_t^c \cos^2 \theta_t + N_b^c \cos^2 \theta_b \quad (24)$$

$$N_{xy} = -N_t^c \sin \theta_t \cos \theta_t - N_b^c \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (25)$$

$$M_x = M_x^* + M_t^c \sin^2 \theta_t + M_b^c \sin^2 \theta_b \quad (26)$$

$$M_y = M_y^* + M_t^c \cos^2 \theta_t + M_b^c \cos^2 \theta_b \quad (27)$$

$$M_{xy} = -M_t^c \sin \theta_t \cos \theta_t - M_b^c \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (28)$$

Se $\theta_t \neq 0, \frac{\pi}{2}$ e $\theta_b \neq 0, \frac{\pi}{2}$, com as Equações 21, 22, 25, 28 obtêm-se,

$$-N_t^c = \frac{(h - a_b)N_{xy} - 2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_t} \quad (29)$$

$$-N_b^c = \frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{h_c \sin 2\theta_b} \quad (30)$$

em que,

$$h_c = h - \frac{(a_t + a_b)}{2} \quad (31)$$

As Equações 19 a 31 conduzem a

$$\begin{aligned} N_{xt}^* &= N_{xt} + N_{xyt} C_{xtt} \tan \theta_t + N_{xyb} C_{xtb} \tan \theta_b \\ N_{yt}^* &= N_{yt} + N_{xyt} C_{ytt} \cotg \theta_t + N_{xyb} C_{ytb} \cotg \theta_b \\ N_{xb}^* &= N_{xb} + N_{xyt} C_{xbt} \tan \theta_t + N_{xyb} C_{xbb} \tan \theta_b \\ N_{yb}^* &= N_{yb} + N_{xyt} C_{ybt} \cotg \theta_t + N_{xyb} C_{ybb} \cotg \theta_b \end{aligned} \quad (32)$$

em que

$$\begin{aligned} N_{xt} &= \frac{h_{xb}}{h_x} N_x - \frac{M_x}{h_x} \\ N_{yt} &= \frac{h_{yb}}{h_y} N_y - \frac{M_y}{h_y} \\ N_{xb} &= \frac{h_{xt}}{h_x} N_x + \frac{M_x}{h_x} \\ N_{yb} &= \frac{h_{yt}}{h_y} N_y + \frac{M_y}{h_y} \end{aligned} \quad (33)$$

$$N_{xyt} = \frac{(h - a_b)N_{xy} - 2M_{xy}}{2h_c}$$

$$N_{xyb} = \frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{2h_c}$$

E

$$C_{xtt} = \frac{h_{xb} + 1/2(h - a_t)}{h_x} \quad (34)$$

$$C_{xtb} = \frac{h_{xb} - 1/2(h - a_b)}{h_x}$$

$$C_{ytt} = \frac{h_{yb} + 1/2(h - a_t)}{h_y}$$

$$C_{ytb} = \frac{h_{yb} - 1/2(h - a_b)}{h_y}$$

$$C_{xbt} = \frac{h_{xt} - 1/2(h - a_t)}{h_x}$$

$$C_{xbb} = \frac{h_{xt} + 1/2(h - a_b)}{h_x}$$

$$C_{ybt} = \frac{h_{yt} - 1/2(h - a_t)}{h_y}$$

$$C_{ybb} = \frac{h_{yt} + 1/2(h - a_b)}{h_y}$$

$$h_x = h_{xt} + h_{xb}$$

$$h_y = h_{yt} + h_{yb}$$

As expressões da Equação 32 são devidas a Gupta [18] e mostram que o modelo das três camadas do CEB [7] é simplificado. Os coeficientes cruzados C_{xtb} , C_{ytb} , C_{xbt} e C_{ybt} não nulos são devidos às armaduras não se localizarem ao mesmo nível e a resultante do bloco de tensões no concreto se localizar ainda a outro nível.

A combinação das Equações 29, 30 e 33 conduz a forças de compressão no concreto dadas por,

$$N_t^c = -\frac{2N_{xyt}}{\sin 2\theta_t} \quad (35)$$

$$N_b^c = -\frac{2N_{xyb}}{\sin 2\theta_b}$$

As expressões da Equação 35 são triviais e podem ser obtidas diretamente do círculo de Mohr, se admitirmos os valores de esforços principais no concreto, por unidade de comprimento, iguais a N_{tb}^c e 0. Apesar deste conjunto de equações se apresentar com um aspecto complexo, o seu significado físico é evidente. As expressões da equação 35 correspondem a distribuir os esforços atuantes pelas várias armaduras mediante transformações estáticas elementares (tal como o CEB [7]). Deste modo:

(1) O esforço axial em cada direção reparte-se pela armadura superior e inferior na mesma direção num sistema equivalente (inversamente proporcional à distância da armadura ao plano médio);

(2) O esforço de corte reparte-se pela camada superior e inferior de concreto num sistema equivalente (inversamente proporcional à distância da resultante do bloco retangular de tensões ao plano médio). Convém relembrar que a armadura tem resistência nula ao corte no sistema de eixos considerado;

(3) O momento fletor em cada direção conduz a um binário que será equivalente a forças na armadura superior e inferior na direção respectiva;

(4) O momento torsor conduz a um binário que será equivalente a forças de corte na camada superior e inferior de concreto. As expressões da Equação 34 traduzem a influência dos momentos de interação entre as camadas de concreto e as diferentes armaduras pelo fato de todas estas forças se encontrarem localizadas a diferentes níveis, o que leva ao aparecimento de momentos adicionais nas equações de equilíbrio. As expressões da Equação 32 são análogas as obtidas na seção 3 (Ver Eqs. 11 e 12). De fato, se considerarmos os coeficientes cruzados C_{xtb} , C_{ytb} , C_{xbt} e C_{ybt} nulos e os coeficientes diretos C_{xtt} , C_{ytt} , C_{xbb} , e C_{ybb} unitários obtemos exatamente as expressões de dimensionamento na camada superior e inferior sujeitas a esforços de membrana agindo de maneira independente:

$$N_{xt}^* = N_{xt} + N_{xyt} \tan \theta_t$$

$$N_{yt}^* = N_{yt} + N_{xyt} \cotg \theta_t$$

$$N_{xb}^* = N_{xb} + N_{xyb} \tan \theta_b$$

$$N_{yb}^* = N_{yb} + N_{xyb} \cotg \theta_b$$

As grandezas que pretendemos conhecer são as quantidades N_{xt}^* , N_{yt}^* , N_{xb}^* e N_{yb}^* . As outras incógnitas são a_t , a_b e θ_t , θ_b .

Deste modo temos 8 incógnitas para as 6 equações de equilíbrio. As quantidades θ_t , θ_b deverão ser escolhidas de modo a minimizar o total de armadura.

As expressões da equação 32 podem ser usadas para dimensionamento, abaixo um exemplo da utilização destas expressões:

Método iterativo

1. Admitir $a_t = a_b = 0.2h$

$$\theta_t = \theta_b = \pm \frac{\pi}{4}$$

2. Caso geral – $\theta_t \neq 0$; $\theta_t \neq \frac{\pi}{2}$; $\theta_b \neq 0$; $\theta_b \neq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \text{Equação 29} \\ \text{Equação 30} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_t^c \\ N_b^c \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \text{Equação 21} \\ \text{Equação 22} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_t^c \\ M_b^c \end{cases}$

4. $\begin{cases} \text{Equação 23} \\ \text{Equação 26} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{xt}^* \\ N_{xb}^* \end{cases}$

5. $\begin{cases} \text{Equação 24} \\ \text{Equação 27} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{yt}^* \\ N_{yb}^* \end{cases}$

6. $N_{xb}^*, N_{yb}^*, N_{xt}^*, N_{yt}^* < 0 \rightarrow$ Compressão biaxial na camada superior e inferior, ver seção 4.1.4

Só $N_{xt}^*, N_{yt}^* < 0 \rightarrow$ Compressão biaxial na camada superior

Só $N_{xb}^*, N_{yb}^* < 0 \rightarrow$ Compressão biaxial na camada inferior

Só $N_{xt}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{xt}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_t e voltar ao ponto 2

Só $N_{xb}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{xb}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_b e voltar ao ponto 2

Só $N_{yt}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{yt}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_t e voltar ao ponto 2

Só $N_{yb}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{yb}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_b e voltar ao ponto 2

Nota:

Se $|\theta_t| < \text{toler}$ então $\theta_b = 0$

Se $|\theta_b| < \text{toler}$ então $\theta_t = 0$

Se $|\theta_t| > (\frac{\pi}{2} - \text{toler})$ então $\theta_b = \frac{\pi}{2}$

Se $|\theta_b| > (\frac{\pi}{2} - \text{toler})$ então $\theta_t = \frac{\pi}{2}$

A variável toler foi arbitrada igual a 10°

7. Equação 21 $\rightarrow a_t$

Equação 22 $\rightarrow a_b$

8. Verificação da ruptura por compressão $\rightarrow a_t + a_b \leq h$

9. Verificação de convergência $\begin{cases} |a_{t,i} - a_{t,i-1}| > \text{tolerância} \\ |a_{b,i} - a_{b,i-1}| > \text{tolerância} \end{cases} \rightarrow$ volta ao ponto 2

A tolerância utilizada foi de $10^{-4}h$

10. Cálculo da armadura com, $As = \frac{N^*}{f_{syd}}$

4.1.2 Compressão bi-axial na camada superior

Neste caso a armadura superior não é necessária. Vamos admitir que as forças na camada superior de concreto são N_{xt}^c , N_{yt}^c respectivamente na direção x e y e a força de corte N_{xyt}^c .

As forças e momentos que a armadura resiste na direção x e y para este caso são dadas por,

$$N_x^* = N_{xb}^*; N_y^* = N_{yb}^* \quad (36)$$

$$M_x^* = N_{xb}^* h_{xb}; M_y^* = N_{yb}^* h_{yb} \quad (37)$$

De modo semelhante à seção 4.1.1, a força na camada inferior do concreto e o respectivo momento produzido são dadas por,

$$N_b^c = -a_t f_{cd2}; M_b^c = \frac{1}{2}(h-a_b)N_b^c \quad (38)$$

As equações de equilíbrio nestas condições assumem a forma,

$$N_x = N_x^* + N_{xt}^c + N_b^c \sin^2 \theta_b \quad (39)$$

$$N_y = N_y^* + N_{yt}^c + N_b^c \cos^2 \theta_b \quad (40)$$

$$N_{xy} = N_{xyt}^c - N_b^c \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (41)$$

$$M_x = M_x^* + M_{xt}^c + M_b^c \sin^2 \theta_b \quad (42)$$

$$M_y = M_y^* + M_{yt}^c + M_b^c \cos^2 \theta_b \quad (43)$$

$$M_{xy} = M_{xyt}^c - M_b^c \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (44)$$

Em que,

$$M_{xt}^c = -\frac{1}{2}(h-a_t)N_{xt}^c;$$

$$M_{yt}^c = -\frac{1}{2}(h-a_t)N_{yt}^c;$$

$$M_{xyt}^c = -\frac{1}{2}(h-a_t)N_{xyt}^c$$

As forças de compressão no concreto, admitindo $\theta_b \neq 0, \frac{\pi}{2}$, assumem agora os seguintes valores,

$$N_t^{c1,c2} = \frac{N_{xt}^c + N_{yt}^c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{N_{xt}^c - N_{yt}^c}{2}\right)^2 + N_{xyt}^c{}^2} \quad (45)$$

$$N_b^c = -\frac{2N_{xyb}}{\sin 2\theta_b}$$

A espessura da camada superior, de acordo com o CEB [7], deve ser obtida de,

$$a_t = -\frac{N_{t,máx}^c}{Kf_{cd1}h} \quad (46)$$

As grandezas que pretendemos conhecer são as quantidades N_{xb}^* e N_{yb}^* . As outras incógnitas são a_t , a_b , θ_b e N_{xt}^c , N_{yt}^c e N_{xyt}^c .

Deste modo temos 8 incógnitas e 7 equações (6 equações de equilíbrio e 1 de verificação de tensão máxima de compressão instalada na camada). A quantidade θ_b deverá ser escolhida de modo a minimizar o total de armadura.

Método iterativo

1. Admitir $a_t = a_b = 0.2h$

$$\theta_b = \pm \frac{\pi}{4}$$

2. Caso geral - $\theta_b \neq 0; \theta_b \neq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \text{Equação 41} \\ \text{Equação 44} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{xyt}^c \\ N_b^c \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \text{Equação 39} \\ \text{Equação 42} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{xt}^c \\ N_{xb}^* \end{cases}$
4. $\begin{cases} \text{Equação 40} \\ \text{Equação 43} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{yt}^c \\ N_{yb}^* \end{cases}$
5. $N_{xb}^*, N_{yb}^* < 0 \rightarrow$ Compressão biaxial na camada superior e inferior, ver seção 4.1.4
 Só $N_{xb}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{xb}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_b e voltar ao ponto 2
 Só $N_{yb}^* < 0 \rightarrow$ Com $N_{yb}^* = 0 \rightarrow$ Obter θ_b e voltar ao ponto 2
 Nota: Se $|\theta_b| < \text{toler}$ então $\theta_b = 0$
 Se $|\theta_b| > (\frac{\pi}{2} - \text{toler})$ então $\theta_b = \frac{\pi}{2}$
 A variável toler foi arbitrada igual a 10°
6. $\begin{cases} \text{Equação 45} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{t,max}^c \\ N_{t,min}^c \end{cases}$
7. Equação 46 $\rightarrow a_t$
Equação 38 $\rightarrow a_b$
8. Verificação da ruptura por compressão $\rightarrow a_t + a_b \leq h$
9. Verificação de convergência $\begin{cases} |a_{t,i} - a_{t,i-1}| > \text{tolerância} \\ |a_{b,i} - a_{b,i-1}| > \text{tolerância} \end{cases} \rightarrow$ volta ao ponto 2
A tolerância utilizada foi de $10^{-4}h$
10. Cálculo da armadura com, $As = \frac{N^*}{f_{syd}}$

4.1.3 Compressão bi-axial na camada inferior

Este caso é similar ao anterior pelo que entendemos não ser necessária qualquer explicação adicional.

4.1.4 Compressão bi-axial nas camadas superior e inferior

Neste caso não é necessário qualquer armadura e a solução é única. Vamos admitir que as forças na camada superior de concreto são N_{xt}^c, N_{yt}^c e N_{xyt}^c , respectivamente na direção x, y e força de corte, e as forças na camada inferior do concreto são N_{xb}^c, N_{yb}^c e N_{xyb}^c , com significado análogo.

As equações de equilíbrio nestas condições assumem a forma,

$$N_x = N_{xt}^c + N_{xb}^c \quad (47)$$

$$N_y = N_{yt}^c + N_{yb}^c \quad (48)$$

$$N_{xy} = N_{xyt}^c + N_{xyb}^c \quad (49)$$

$$M_x = M_{xt}^c + M_{xb}^c \quad (50)$$

$$M_y = M_{yt}^c + M_{yb}^c \quad (51)$$

$$M_{xy} = M_{xyt}^c + M_{xyb}^c \quad (52)$$

em que,

$$M_{xt}^c = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{xt}^c;$$

$$M_{yt}^c = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{yt}^c;$$

$$M_{xyt}^c = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{xyt}^c$$

$$M_{xb}^c = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{xb}^c;$$

$$M_{yb}^c = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{yb}^c;$$

$$M_{xyb}^c = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{xyb}^c$$

As forças de compressão no concreto em ambas as camadas podem ser calculadas de acordo com a Equação 45. O cálculo da espessura da camada deverá ser efetuado de acordo com a Equação 47.

Deste modo temos 8 incógnitas e 8 equações (6 equações de equilíbrio e 2 de verificação da tensão máxima instalada).

Método iterativo

1. Admitir $a_t = a_b = 0.2h$
2. $\begin{cases} \text{Equação 49} \\ \text{Equação 52} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{xyt}^c \\ N_{xyb}^c \end{cases}$
3. $\begin{cases} \text{Equação 47} \\ \text{Equação 50} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{xt}^c \\ N_{xb}^c \end{cases}$
4. $\begin{cases} \text{Equação 48} \\ \text{Equação 51} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{yt}^c \\ N_{yb}^c \end{cases}$
5. $\begin{cases} \text{Equação 45} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_{t,max}^c \\ N_{b,max}^c \end{cases} \text{ e } \begin{cases} N_{t,min}^c \\ N_{b,min}^c \end{cases}$
6. $\begin{cases} \text{Equação 46} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_t \\ a_b \end{cases}$
7. Verificação da ruptura por compressão $\rightarrow a_t + a_b \leq h$
8. Verificação de convergência $\begin{cases} |a_{t,i} - a_{t,i-1}| > \text{tolerância} \\ |a_{b,i} - a_{b,i-1}| > \text{tolerância} \end{cases} \rightarrow \text{volta ao ponto 2}$
A tolerância utilizada foi de $10^{-4}h$

5 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO DE DIMENSIONAMENTO

Para iniciar o desenvolvimento da ferramenta alguns passos básicos são necessários, com o Visual Basic aberto é preciso ir a ferramentas e em seguida referências para que o Excel se conecte com o SAP2000, conforme Figura 6.

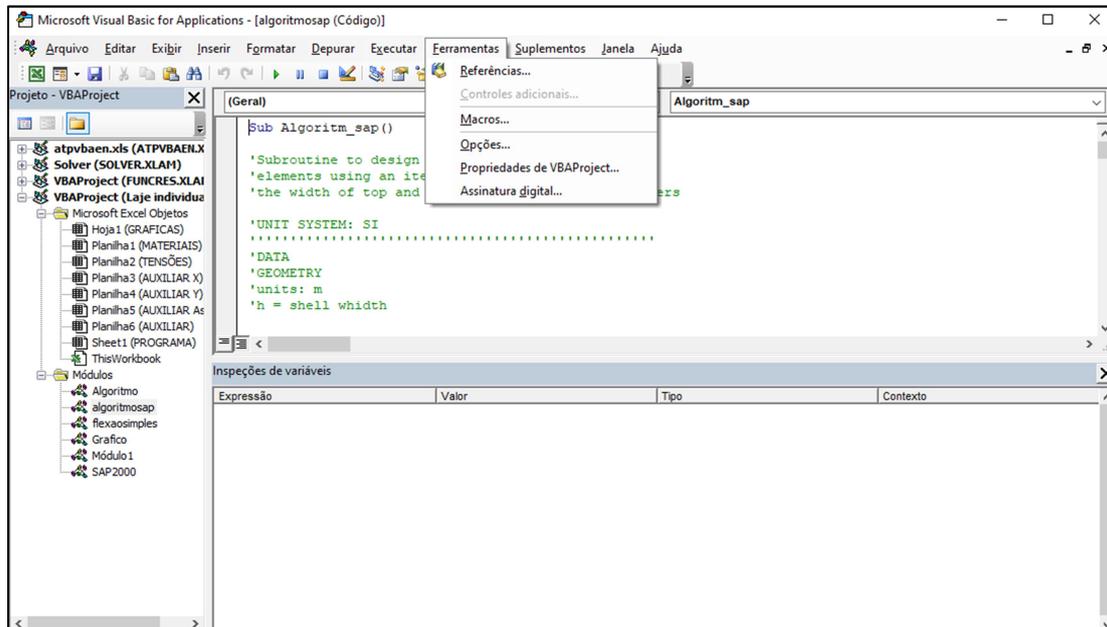


Figura 6 - Visual basic do Excel

E selecionar o “SAP2000 Application Programming Interface (API) v1” na lista.

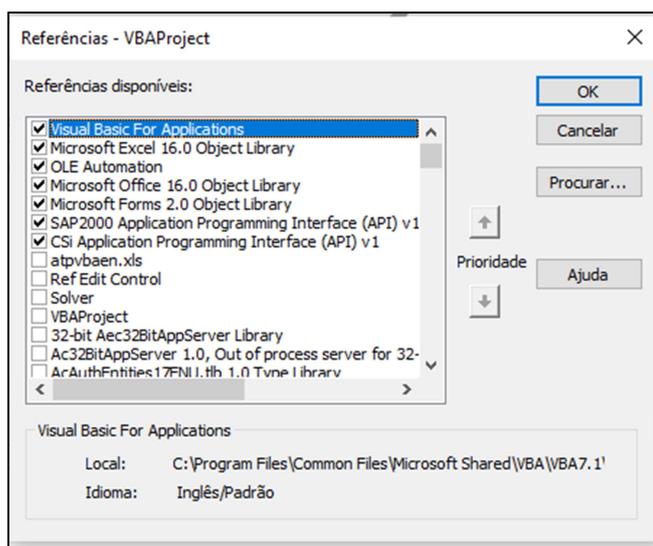


Figura 7 - Referência VBA

O módulo SAP2000 gera a inserção dos dados da planilha e controla o programa enquanto os módulos chamados de “Algoritmo”, “algoritmosap” e “flexão simples” apresentam as rotinas para o dimensionamento da laje, entretanto será abordado apenas o módulo Algoritmo por ser o objeto de estudo para o dimensionamento por esforços à flexão e membrana.

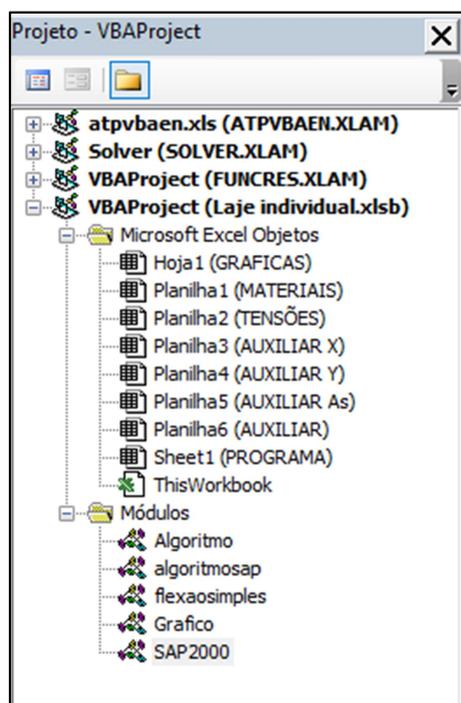


Figura 8 - Módulos

No módulo “SAP2000” cria-se as variáveis públicas para conectar o Excel com o SAP2000 como se apresenta na Figura 9. Para manipular SAP desde VBA se utiliza a linguagem de programação orientada a objetos para chamar os métodos correspondentes ao controle das diversas funções de SAP 2000.

'Declaração de variáveis públicas:

PublicmySapObject As SAP2000v1.cOAPI

Public myHelper As SAP2000v1.Helper

Public mySapModelAscSapModel

Publicret As Long

Figura 9 - Variáveis de conexão com o SAP2000

O algoritmo disponibilizado por Lourenço e Figueiras [19], representado nas seções anteriores foi construído na linguagem Fortran e para que seja um programa de fácil acesso, optou-se pelo uso do VBA de Excel com interface para entrada de dados através de planilhas de Excel, o qual é um programa intuitivo e amplamente conhecido por realizar diversos cálculos e bastante

utilizado na educação e engenharia. Através da linguagem Visual Basic implementou-se o algoritmo usando os esforços internos obtidos do programa de análise estrutural SAP2000 versão 22.

A interface criada para o usuário dimensionar a laje foi estabelecida para que fique intuitiva. Conforme a Figura 10, pode-se ver a planilha de entrada de dados, preenchida com um exemplo.

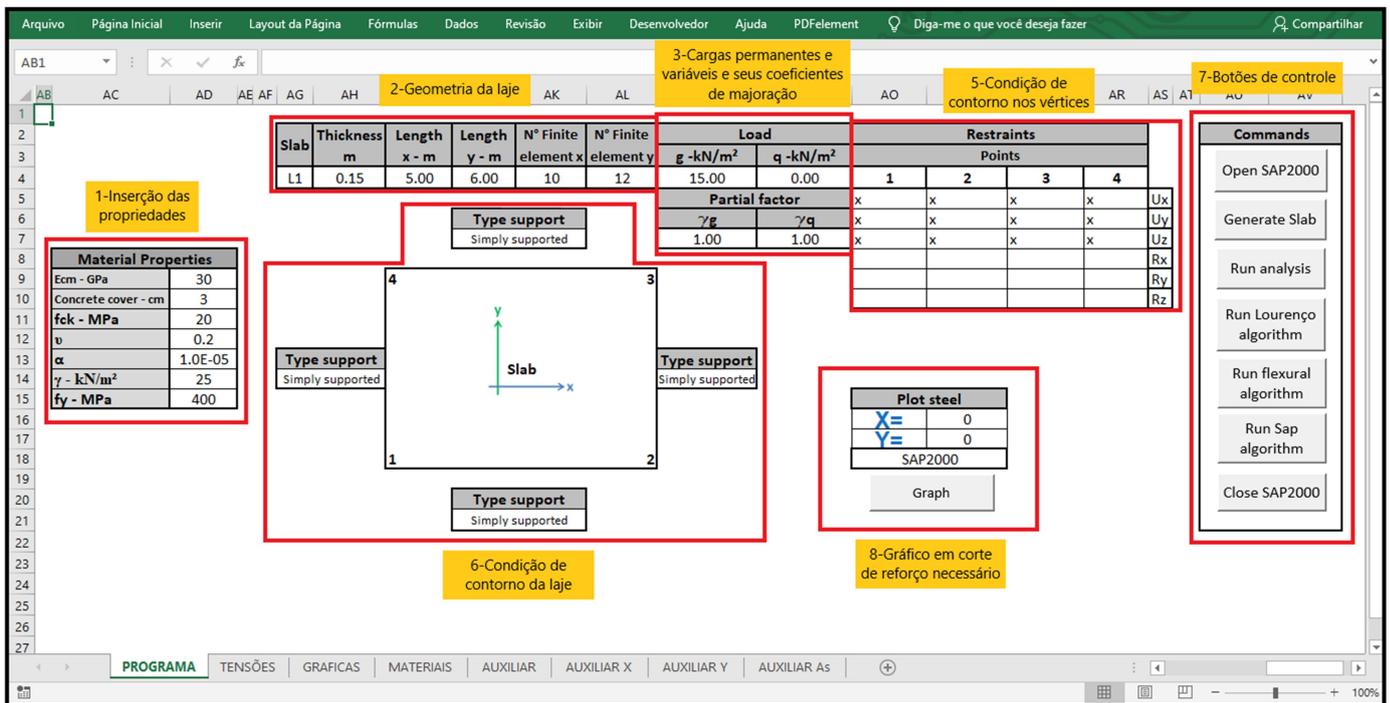


Figura 10 – Interface do usuário

A coluna à esquerda se refere às propriedades do concreto e do aço utilizado no dimensionamento da laje, na parte superior serve para definir as condições geométricas, de carregamentos e as restrições nos nós da laje. A opção de restringir a laje, pelas bordas e separadamente os cantos, permite que o projetista defina qual caso de restrição se sobrepõe, evitando possível subdimensionamento. No final do dimensionamento é possível plotar a área de aço em dois planos de interesse, conforme Figura 11, e escolher os dimensionamentos.

Os botões de controle da coluna direita manipulam a sequência de execução da ferramenta, automaticamente, seguindo o fluxograma da Figura 12, após gerar a laje (Figura 13) e rodar a análise da estrutura no SAP2000 é possível selecionar o algoritmo para calcular o aço de reforço baseado em três possibilidades: 1) O algoritmo chamado de “Lourenço Algorithm” baseado nas formulações apresentadas na seção 3 e 4, os quais utilizam ambos os esforços à flexão e de membrana, caso existam; 2) O algoritmo chamado de “flexural algorithm” que envolve apenas a utilização dos esforços de flexão de maneira desacoplada em cada direção x e y, desconsiderando o efeito do esforço de torção, dimensionando-o como viga; e 3) O algoritmo chamado de “Sap algorithm” é baseado no manual do programa SAP2000. É importante salientar que o plano médio da laje foi modelado com elementos finitos do tipo casca de quatro nós. A precisão e convergência dos resultados está baseado na discretização adotada conforme indicado nas células de número de elementos finitos em x e y.

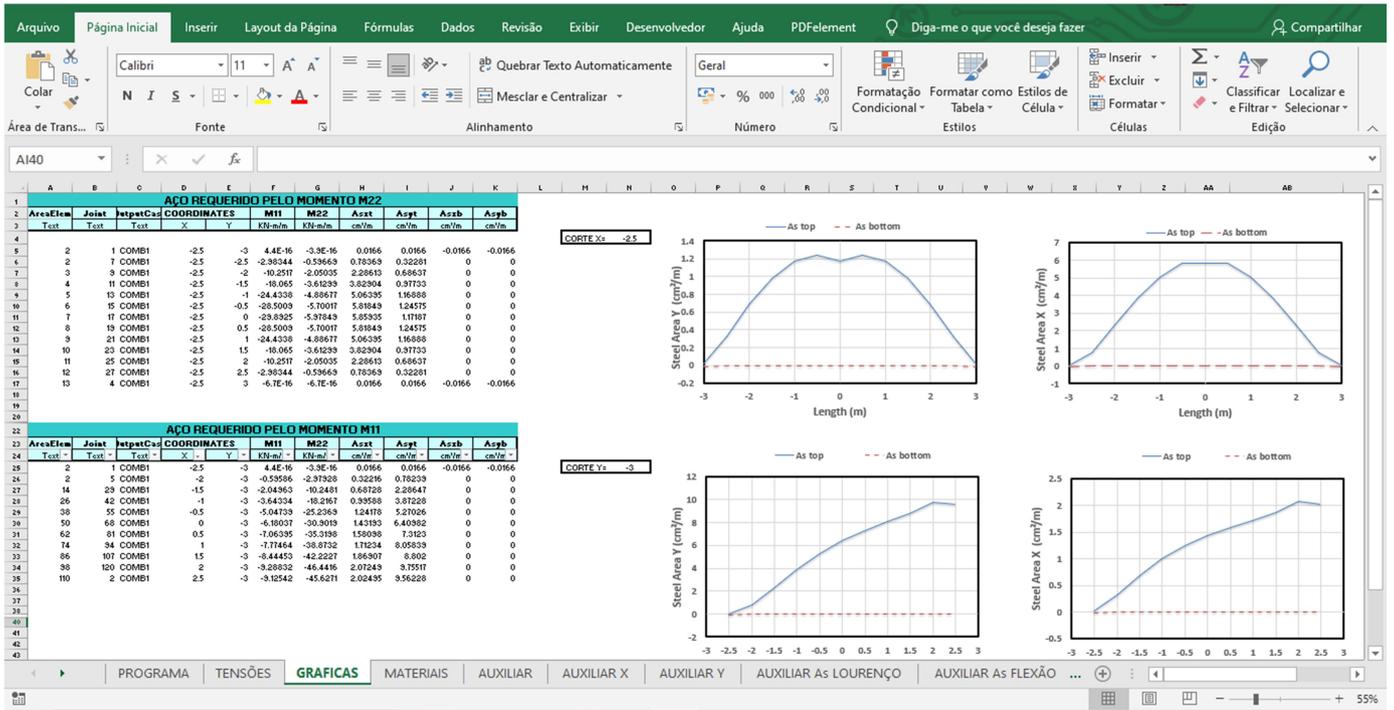


Figura 11 - Gráficos de área de aço nos planos de interesse

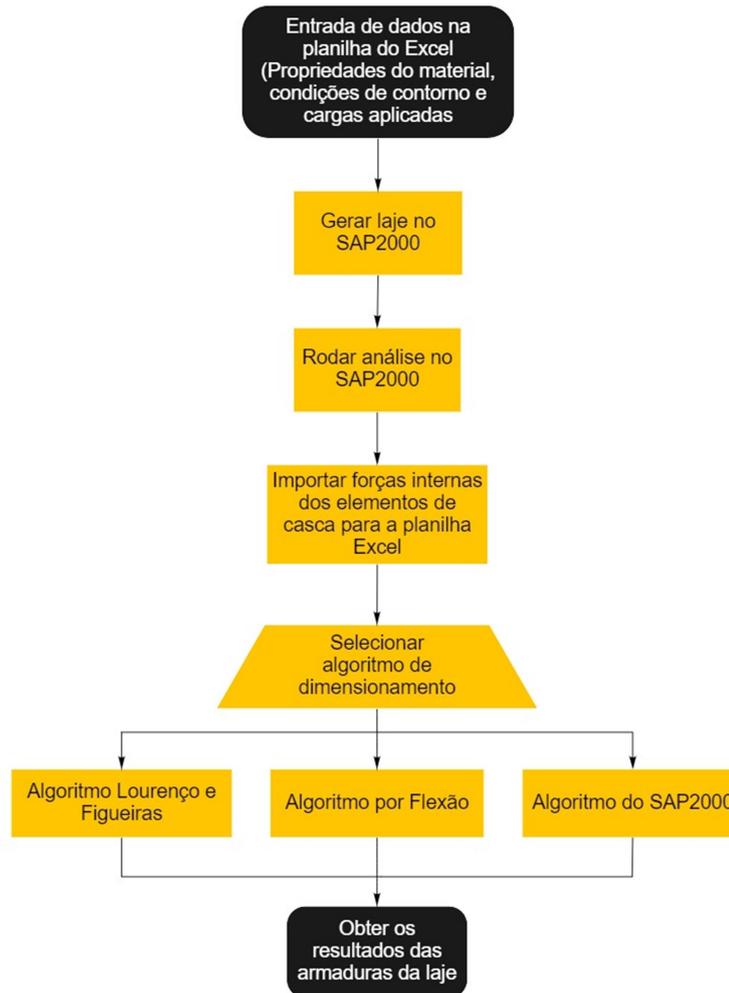


Figura 12 - Fluxograma da planilha

6 EXEMPLOS

Para verificar o correto funcionamento da ferramenta numérica, realizou-se exemplos diferentes. Os exemplos 6.1 e 6.2 foram feitos conforme o trabalho realizado por Lourenço e Figueiras [6] para demonstrar que os resultados estão corretos, enquanto os exemplos 6.3 e 6.4 foram exemplos propostos neste trabalho.

Optou-se por plotar os gráficos de área de reforço de aço através da interface gráfica disponibilizada pelo Matlab para fins de estudo, no entanto a planilha criada possibilita apenas cortes, conforme as coordenadas das malhas dos elementos finitos, devido à limitação do Excel em obter gráficos tridimensionais.

O elemento de casca é usado para modelar lajes no SAP2000, cada eixo referencial do elemento tridimensional é numerado conforme a Figura 5 cada vetor aponta para as faces positivas do elemento, no entanto para uniformizar os elementos com as equações do trabalho definiu-se o eixo 1, 2 e 3 como sendo x, y e z nos exemplos, com o eixo z positivo indicando a camada superior da laje. Os ajustes correspondentes em termos de sinais foram considerados a fim de compatibilizar a convenção usada por Lourenço e Figueiras e aquela de SAP 2000.

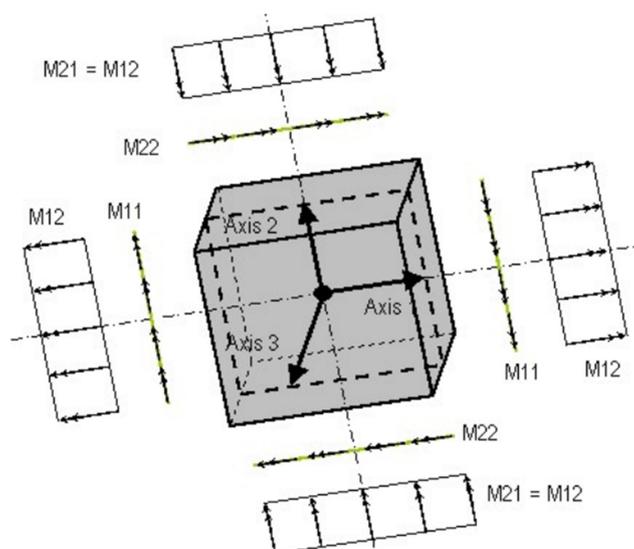


Figura 15 - Referencial do SAP2000 de um elemento de casca

Nos exemplos a serem apresentados a seguir, as áreas de reforço obtidas com o algoritmo de Lourenço e Figueiras (presente estudo) serão comparadas com aquelas obtidas usando outras duas abordagens de dimensionamento como segue:

- Algoritmo chamado de “Flexão”, onde o reforço é calculado de maneira convencional considerando apenas os valores dos momentos fletores M_{xx} e M_{yy} , omitindo a contribuição de M_{xy} (momento de torção). Sendo que o dimensionamento em cada direção é feita de maneira desacoplada.
- Algoritmo chamado de “SAP”, seguindo as diretrizes estabelecidas no trabalho de Nielsen [10], a qual é base para o dimensionamento interno usado pelo *software* SAP 2000. No entanto, dito algoritmo foi escrito dentro da ferramenta desenvolvida.

Deve-se entender também que nas figuras a seguir o sinal negativo em frente de uma área de aço se refere à colocação do aço nas camadas inferiores, enquanto o sinal positivo se refere ao aço a ser colocado nas camadas superiores.

6.1 Laje simplesmente apoiada

Como primeiro exemplo será estudada uma laje simplesmente apoiada de 15cm de espessura e dimensões de 5m por 6m, a qual está sendo submetida por uma carga permanente de 15kN/m^2 , sendo dividida em 120 elementos finitos de dimensões 0.5m por 0.5m. As propriedades da laje e da armadura encontram-se na Tabela 1. O sistema coordenado de referência xy se localiza no centro da laje.

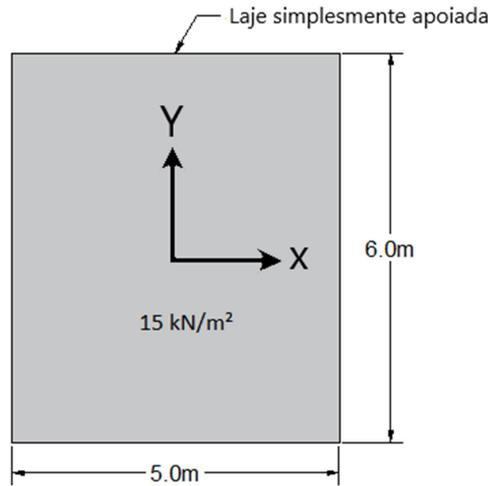


Figura 16 - Laje simplesmente apoiada

| Propriedades | |
|-----------------------------|---------|
| Ecm - GPa | 30 |
| Cobrimento do Concreto - cm | 3 |
| fck - MPa | 20 |
| v | 0.2 |
| α | 1.0E-05 |
| γ - kN/m ² | 25 |
| fy - MPa | 400 |

Tabela 1 - Propriedades

Com auxílio do SAP2000 através da ferramenta implementada, obtivemos os momentos por metro linear M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} (momento volvente ou de torção) no domínio da laje como se apresenta na Figura 5, Figura 18 e Figura 19, respectivamente. Como esperado os maiores momentos M_{xx} e M_{yy} de flexão ocorrem no centro da laje, enquanto no contorno os valores seriam praticamente nulos. Já no caso do momento M_{xy} , os maiores valores se concentram nos cantos da laje.

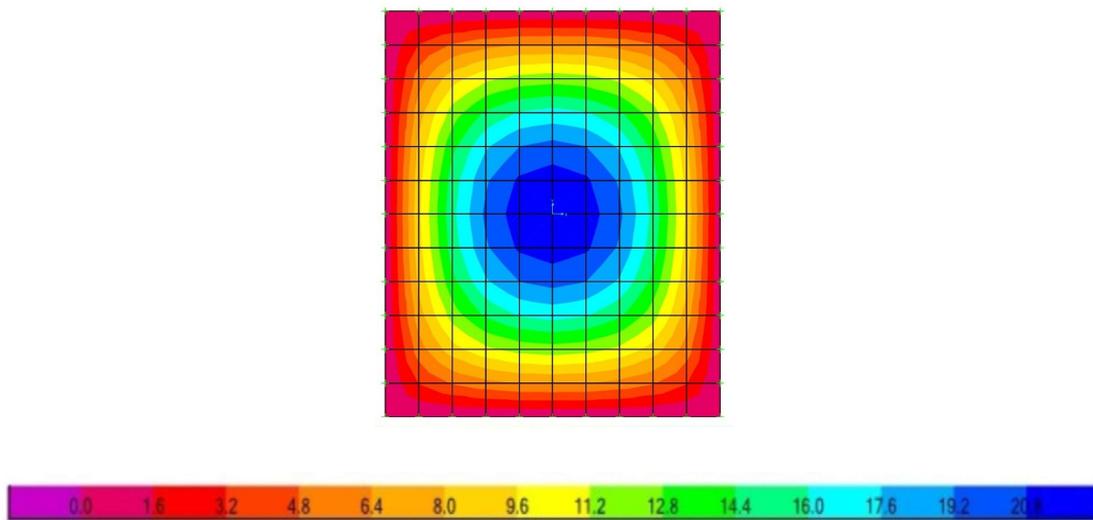


Figura 17 – M_{xx} (kN.m/m)

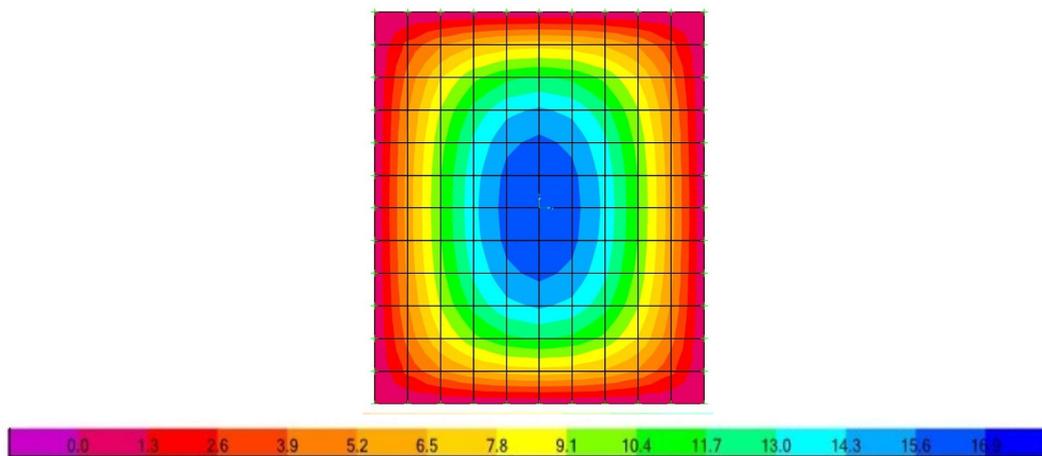


Figura 18 – M_{yy} (kN.m/m)

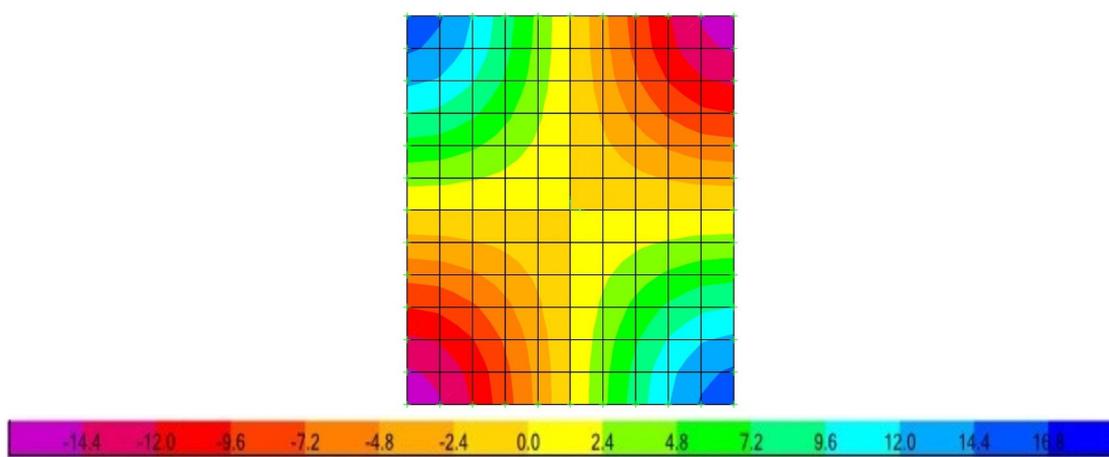


Figura 19 – M_{xy} (kN.m/m)

Na Figura 20 se apresentam as áreas de reforço por metro de laje ao longo da direção x tanto para a camada de reforço superior (A_{sxt}) quanto para a camada inferior (A_{sxb}) no domínio da laje de acordo com a formulação proposta por Lourenço e Figueiras [6]. A parte superior mostra a distribuição obtida originalmente pelos referidos autores, enquanto os valores coloridos representam os resultados obtidos no presente trabalho. Infelizmente as figuras apresentadas pelos autores não apresentam uma boa qualidade, no entanto se pode perceber a semelhança no formato das distribuições obtidas. Nas figuras seguintes onde se mostram planos de corte, pode se perceber melhor a semelhança numérica entre os resultados.

Na Figura 21 se apresentam de maneira similar os resultados referentes ao aço na direção y , nota-se também a semelhança entre os valores obtidos no presente estudo com aqueles da referência. De acordo aos resultados obtidos para a camada superior, essa não precisaria de reforço no centro da laje (zona em azul com valores de área nulos), apenas seria necessário colocar reforço nas zonas próxima dos cantos (zona em vermelho). Já para a camada inferior, como esperado vista a predominância do momento fletor positivo, o reforço é maior na zona do centro.

Na Figura 22 e Figura 23 se comparam as áreas de aço obtidas neste trabalho baseados no algoritmo de Lourenço e Figueiras e aquelas de “Flexão” e do “SAP”. Nota-se que a distribuição entre o algoritmo de Lourenço e Figueiras fornece distribuições de áreas de aço similares àquelas obtidas com o algoritmo de SAP, sendo que esse último define uma área de aço maior. Já como esperado as distribuições obtidas como o algoritmo de “Flexão” fornecem distribuições bastante diferentes, tal como maior concentração de reforço no centro e na parte inferior da laje.

Na Figura 24 e Figura 25 se apresentam as variações das áreas de aço para cortes feitos paralelos ao eixo x passando pelo centro da laje (meio do vão segundo a outra direção y) e para a zona do apoio obtidas no presente estudo e aquelas publicadas em [6], respectivamente. Nota-se a boa concordância entre os resultados obtidos tanto para o reforço superior quanto inferior. Isto reforça, os padrões de distribuição previamente apresentados na Figura 20 e Figura 21.

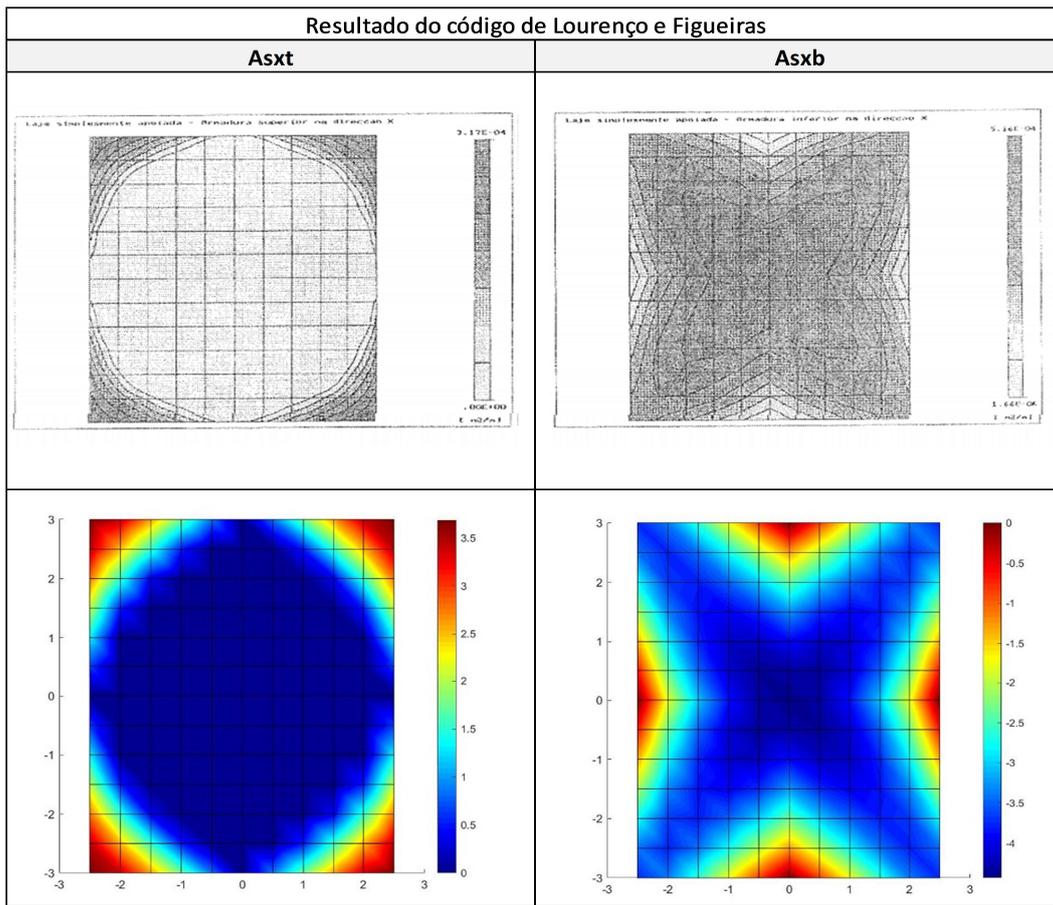


Figura 20 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em x

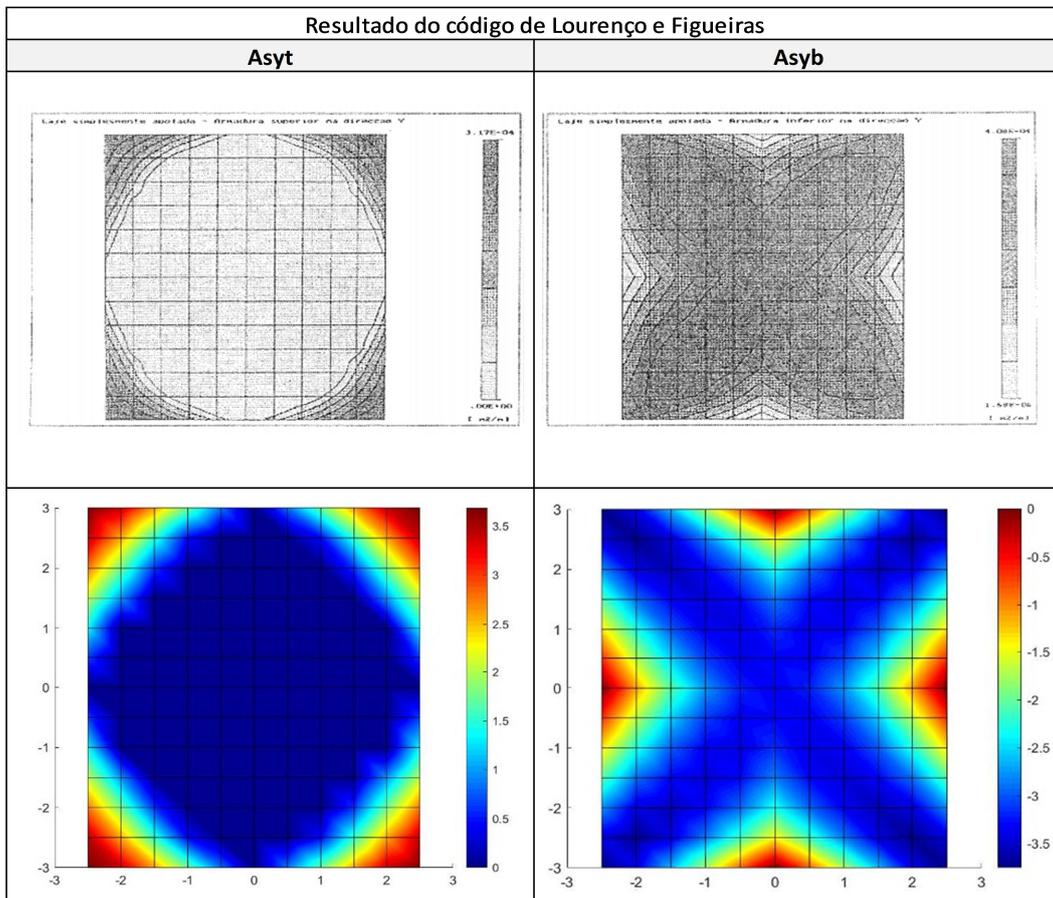


Figura 21 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em y

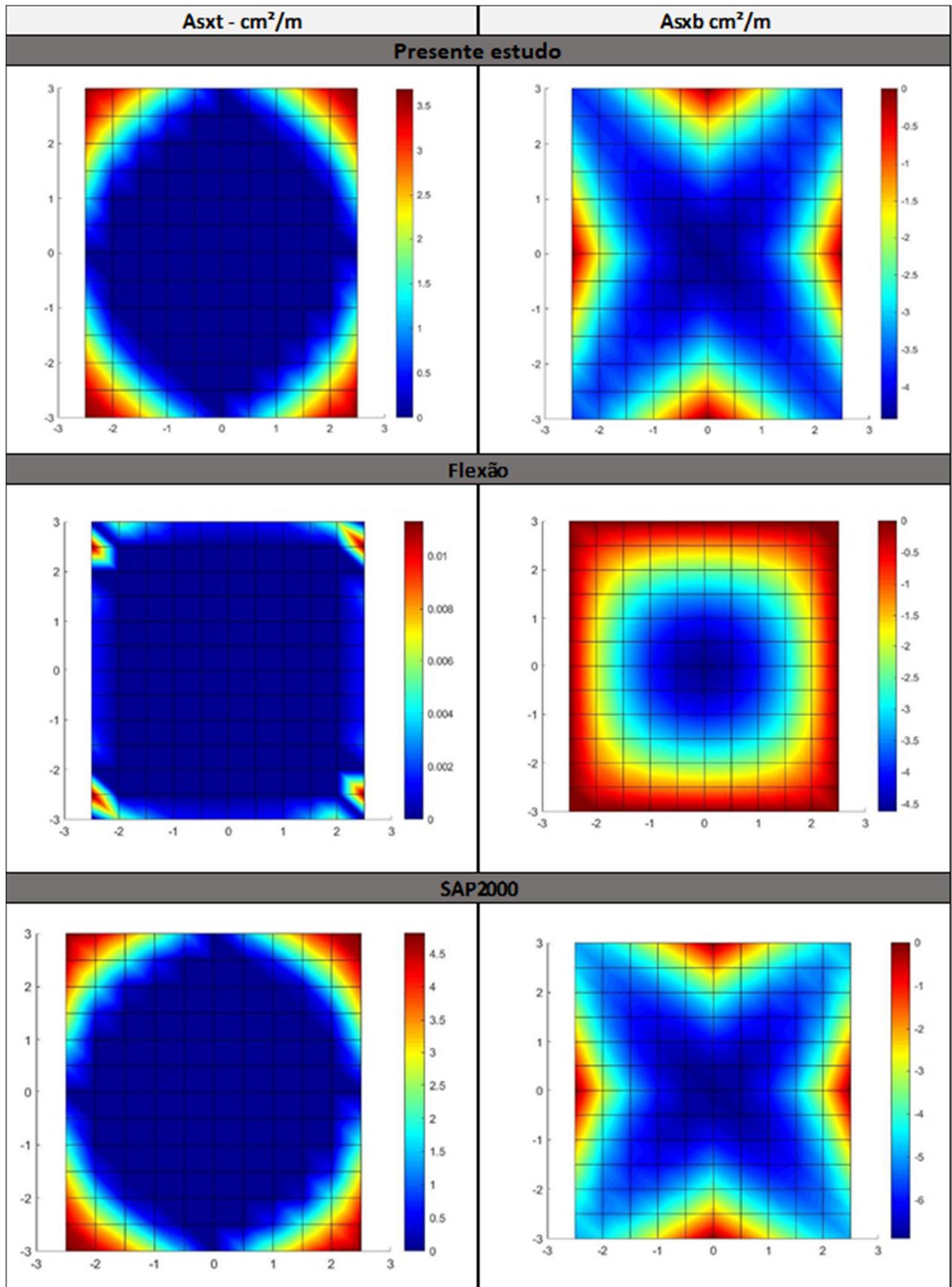


Figura 22 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção x

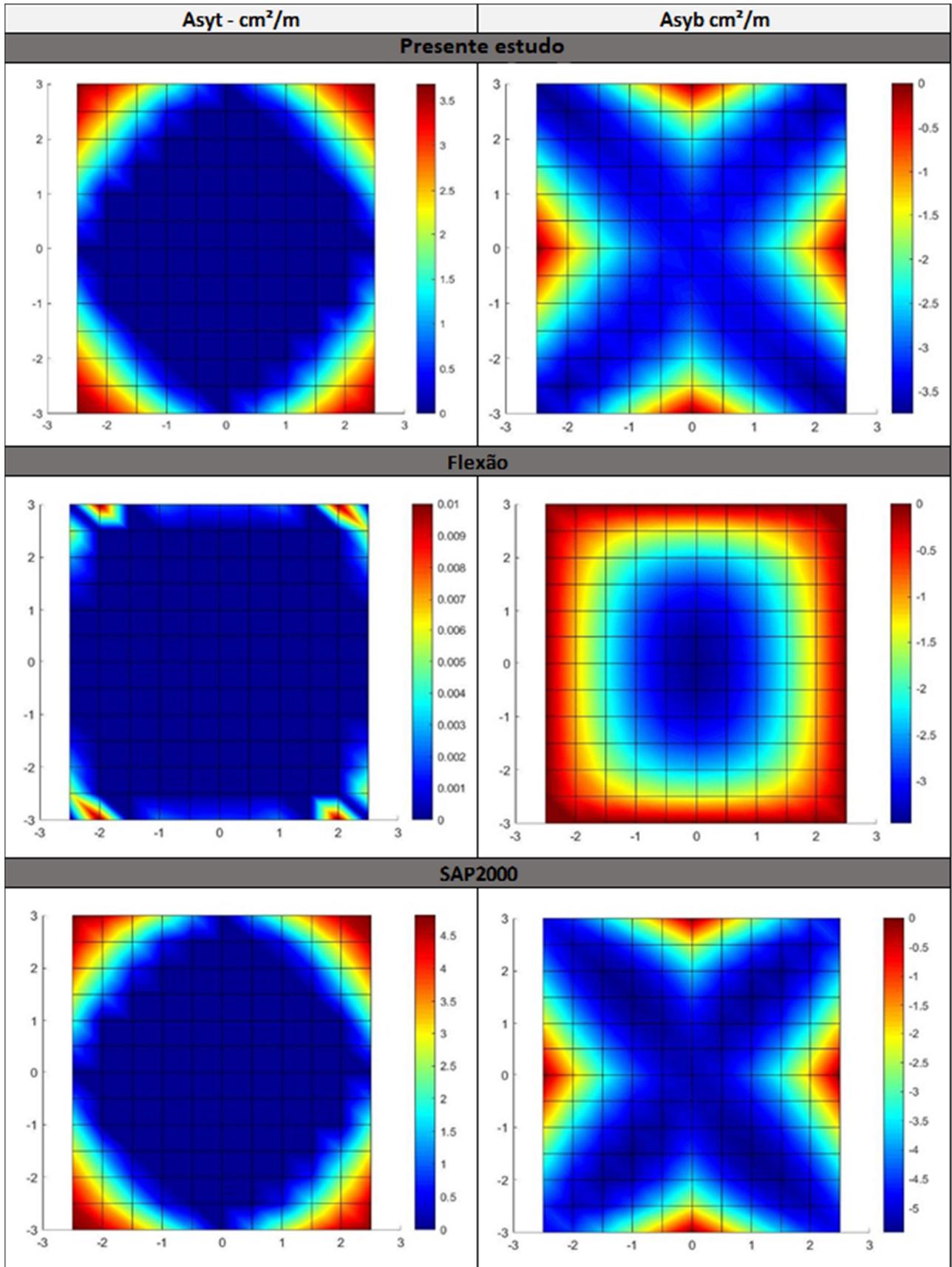


Figura 23 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção y

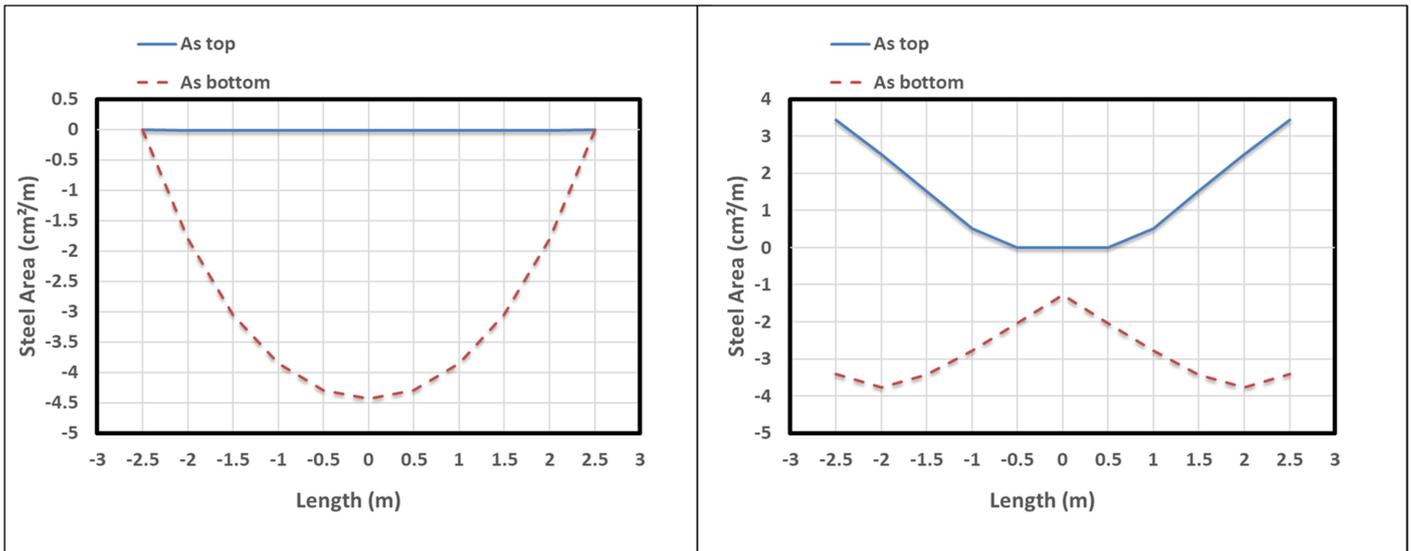


Figura 24 - Corte paralelo ao eixo X: diagrama de aço no meio do vão (esquerda) e junto ao apoio (direita).

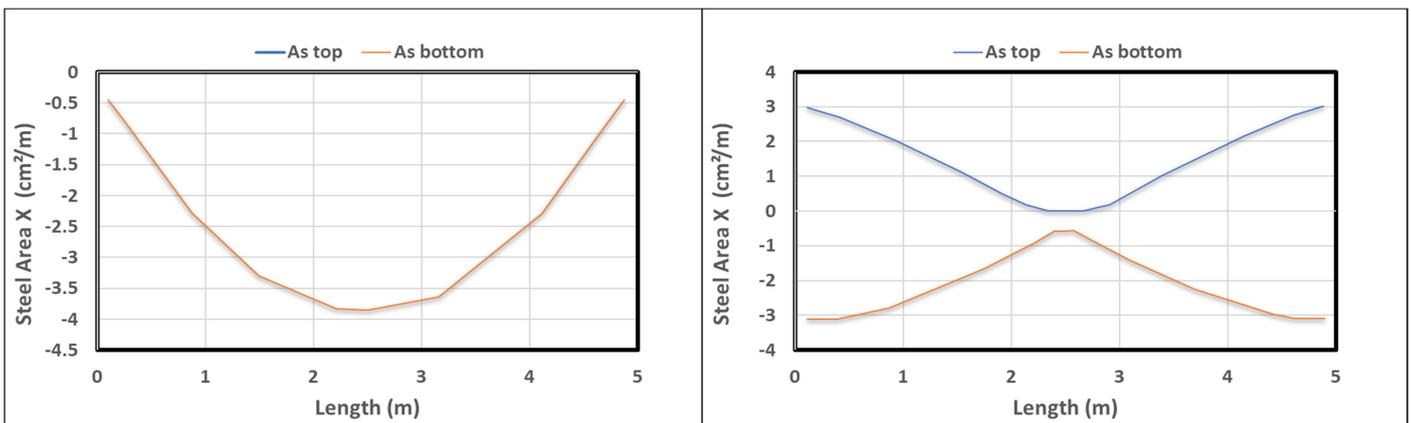


Figura 25 - Corte paralelo ao eixo X (Lourenço e Figueiras [6]): diagrama de aço no meio do vão (esquerda) e junto ao apoio (direita).

6.2 Laje engastada em 3 bordos e 1 livre

Uma laje engastada em 3 bordos e 1 livre de 15cm de espessura e dimensões de 5m por 6m está sendo submetida por uma carga permanente de 15kN/m^2 , sendo dividida em 120 elementos finitos de dimensões 0.5m por 0.5m. As propriedades da laje e da armadura encontram-se na Tabela 2. O sistema coordenado de referência xy se localiza no centro da laje.

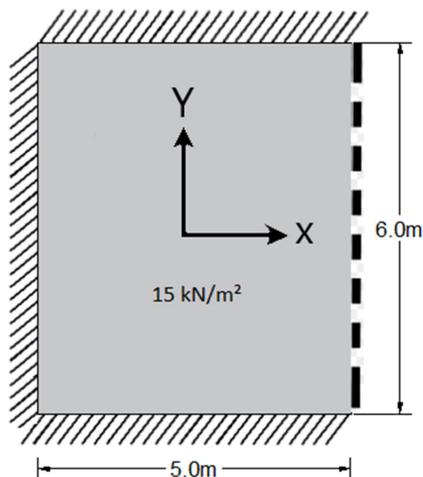


Figura 26 - Laje engastada em 3 bordos e 1 livre

| Propriedades | |
|------------------------------|---------|
| Ecm - GPa | 30 |
| Cobrimento do Concreto - cm | 3 |
| fck - MPa | 20 |
| v | 0.2 |
| α | 1.0E-05 |
| γ - kN/m ² | 25 |
| fy - MPa | 400 |

Tabela 2 - Propriedades

Com auxílio do SAP2000, obtivemos os esforços M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} da laje mostrados através das Figura 27, Figura 28 e Figura 29, respectivamente. É evidente que é necessário colocar reforço no centro da laje nas duas direções, assim como reforço superior nos bordos engastados.

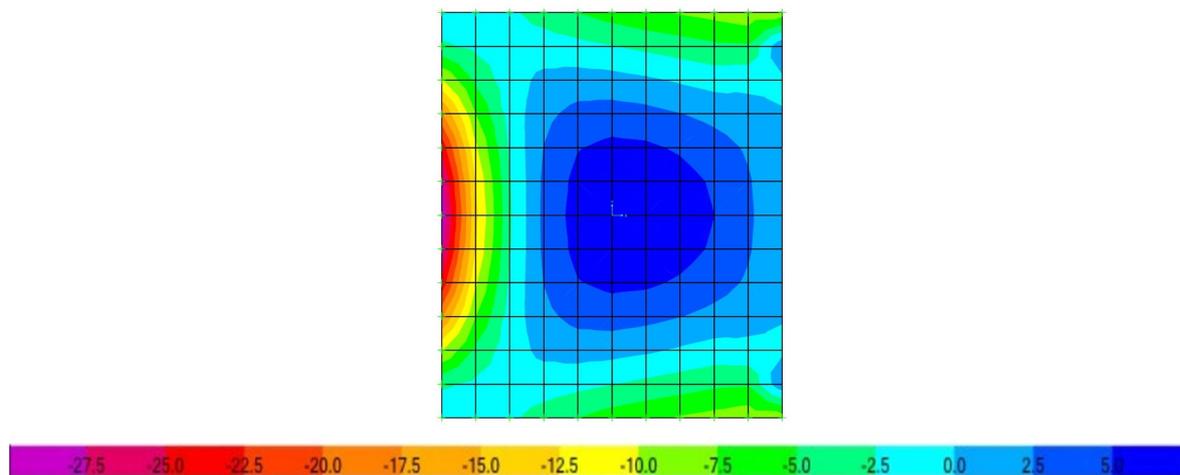


Figura 27 – M_{xx} (kN.m/m)

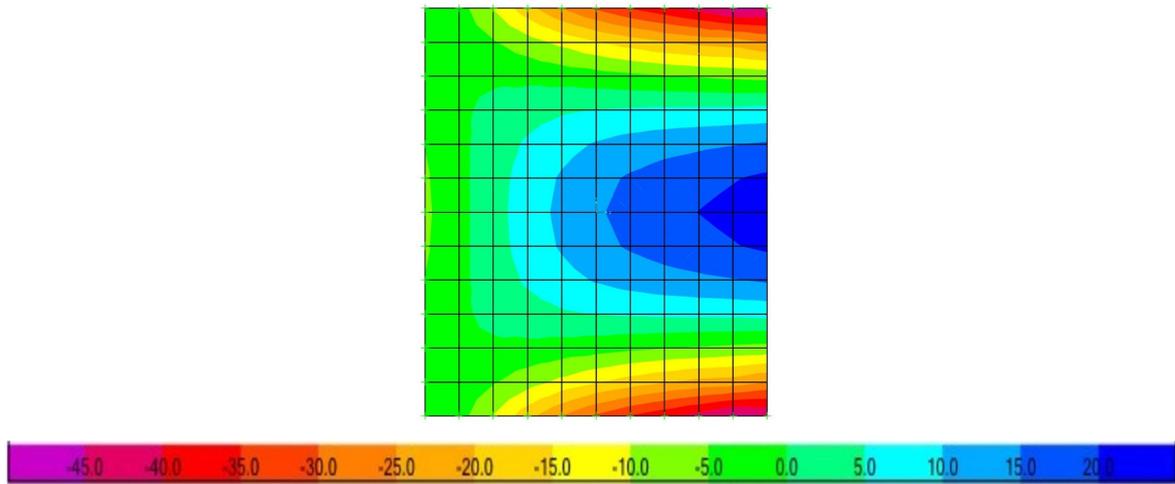


Figura 28 - M_{yy} ($\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)

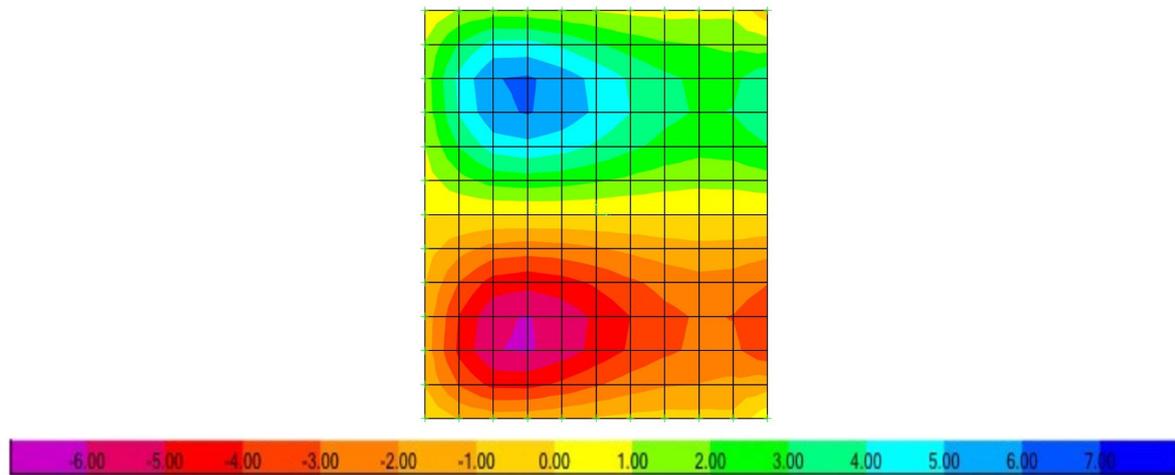


Figura 29 - M_{xy} ($\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)

Seguindo com a metodologia anterior para a apresentação de resultados. Na Figura 30 e Figura 31 se apresentam as áreas de reforço para as direções x e y , respectivamente, obtidas com o algoritmo Lourenço e Figueiras. Já na Figura 32 e Figura 33 são mostradas as áreas de reforço obtidas com os algoritmos implementados, tanto para a direção x quanto na direção y , respectivamente. A Figura 34 e Figura 35 apresentam a variação da área de aço nos planos $x=0$ e $y=0$, respectivamente. Nota-se, que a concordância é boa em geral com os resultados publicados na literatura [6]. Outros cortes de área de aço para $x=-2,5$ m e $y=-3,0$ m são apresentados na Figura 36 e Figura 37, respectivamente. Em geral, a concordância entre resultados é aceitável.

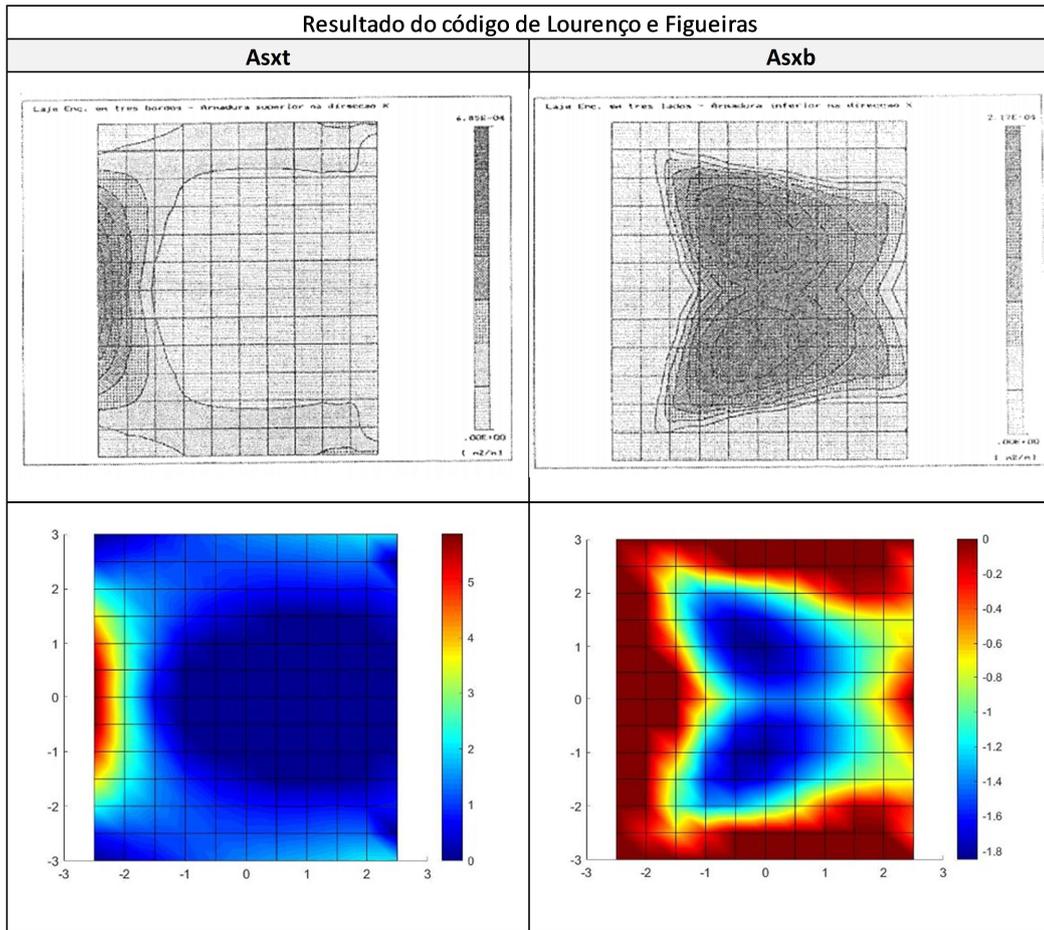


Figura 30 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em x

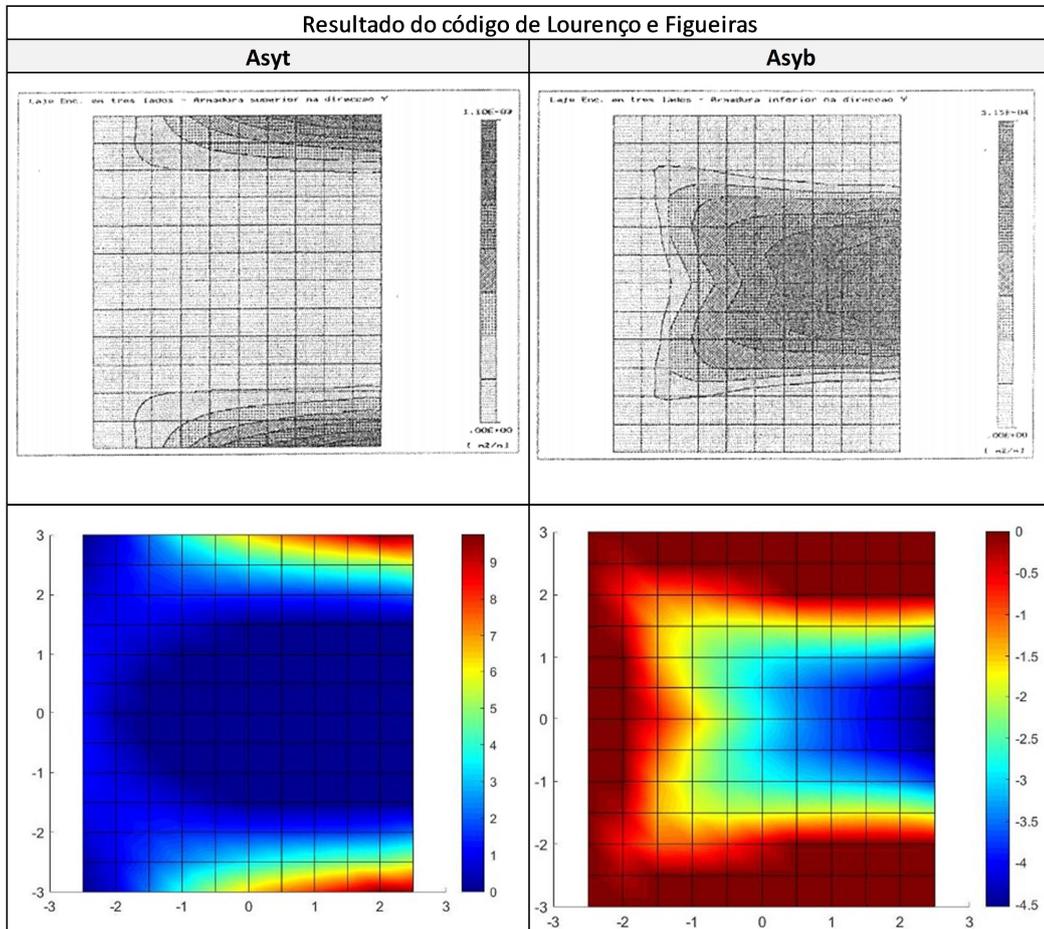


Figura 31 - Comparação dos resultados dos autores (preto e branco) com o presente estudo (colorido) de área de aço em y

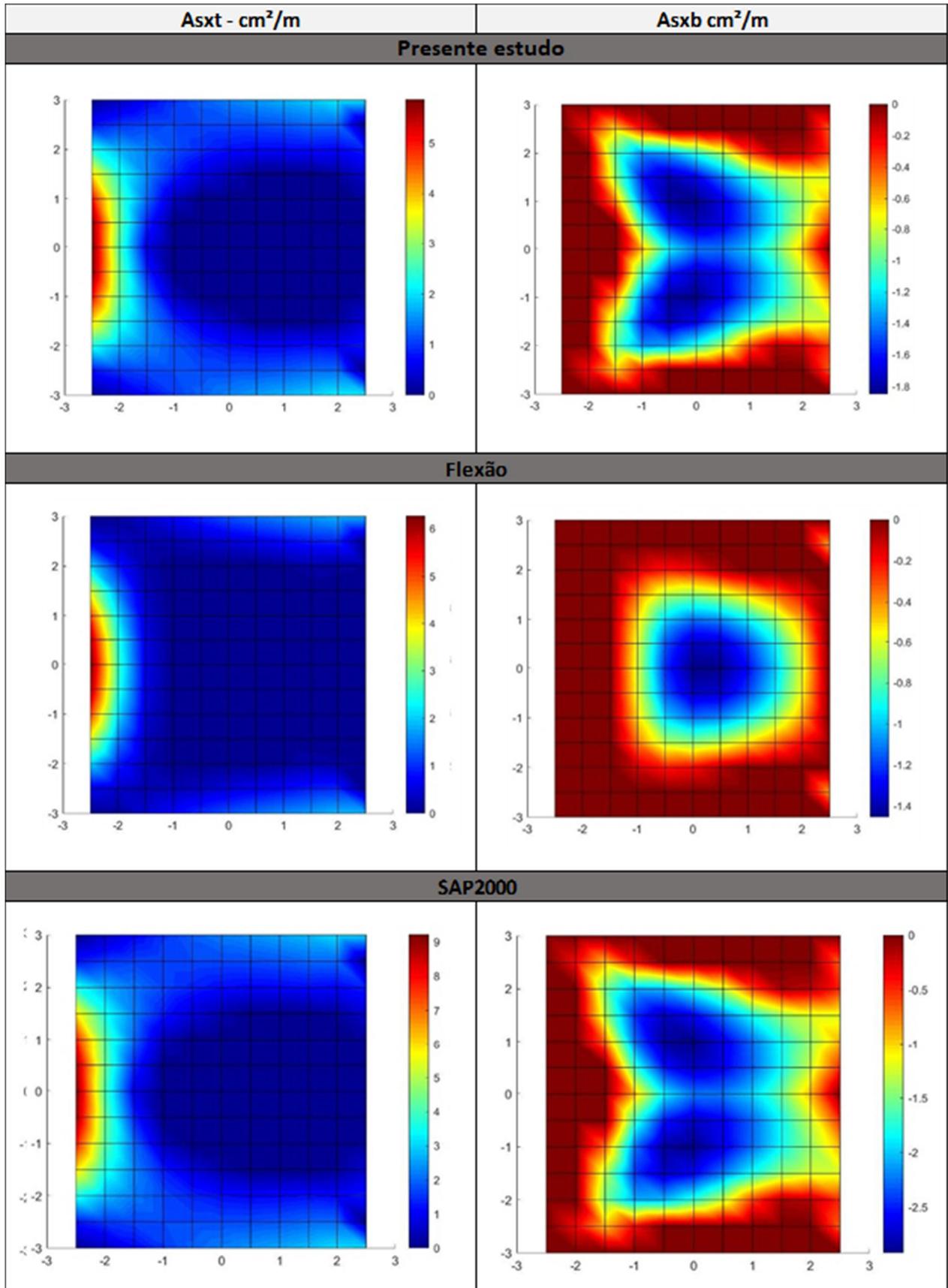


Figura 32 – Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção x

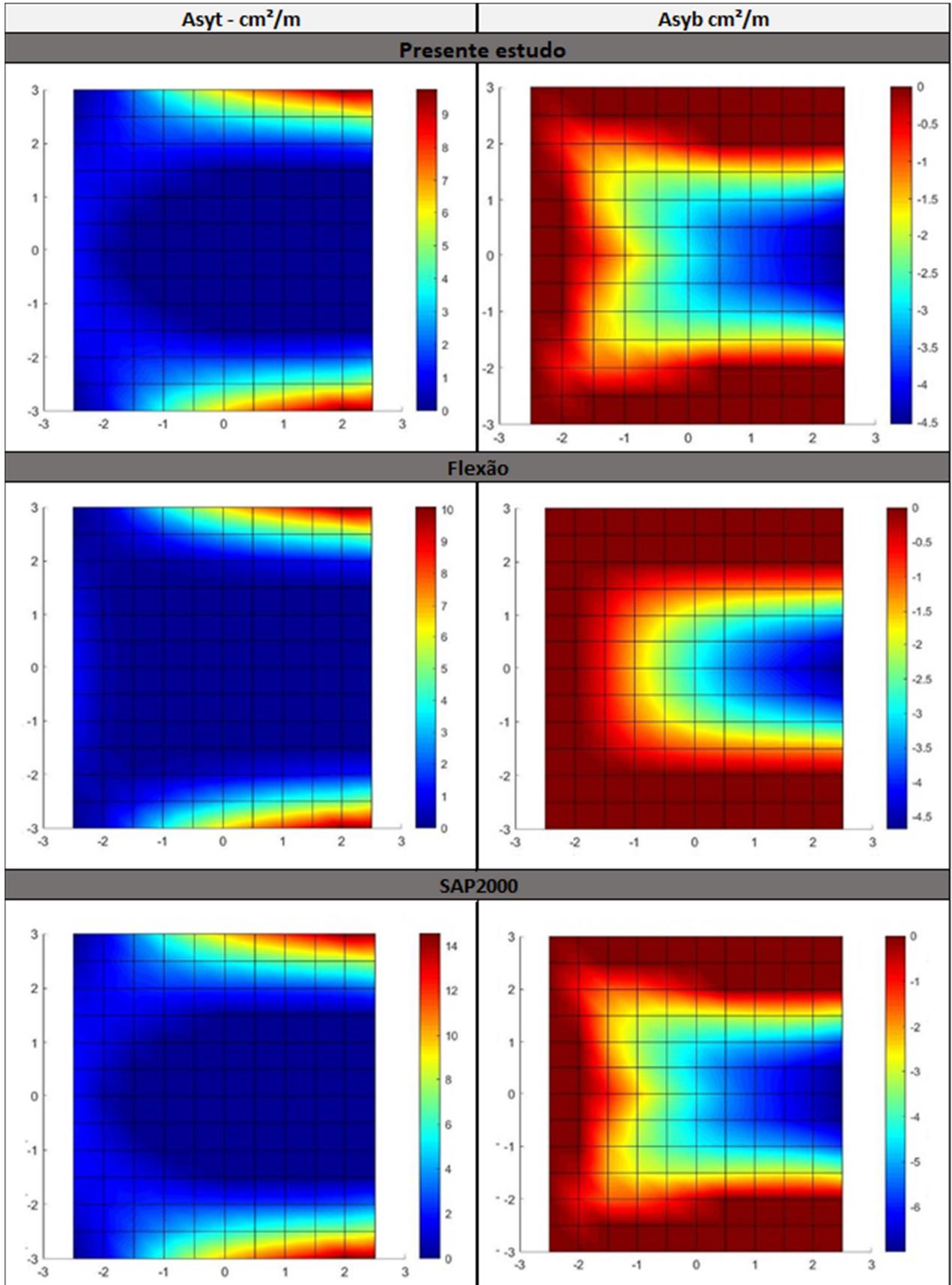


Figura 33 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção y

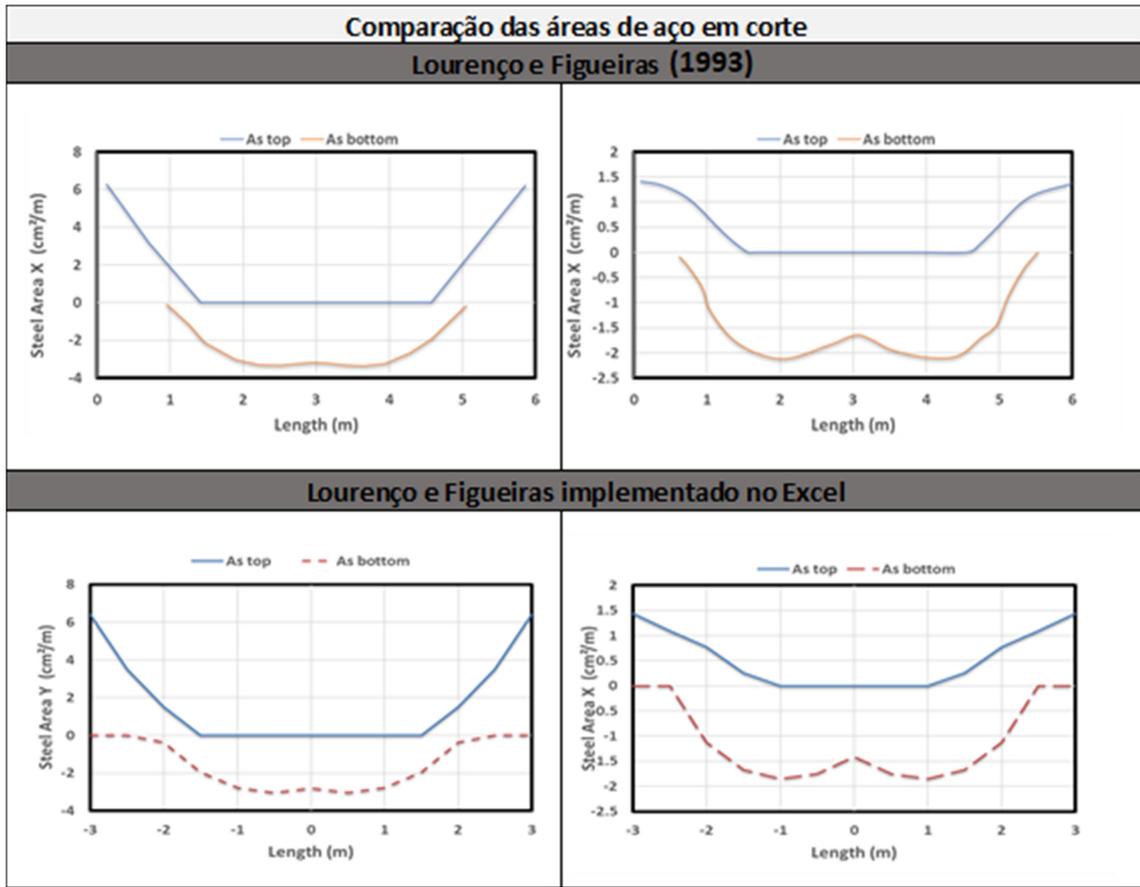


Figura 34 – Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo y em x=0

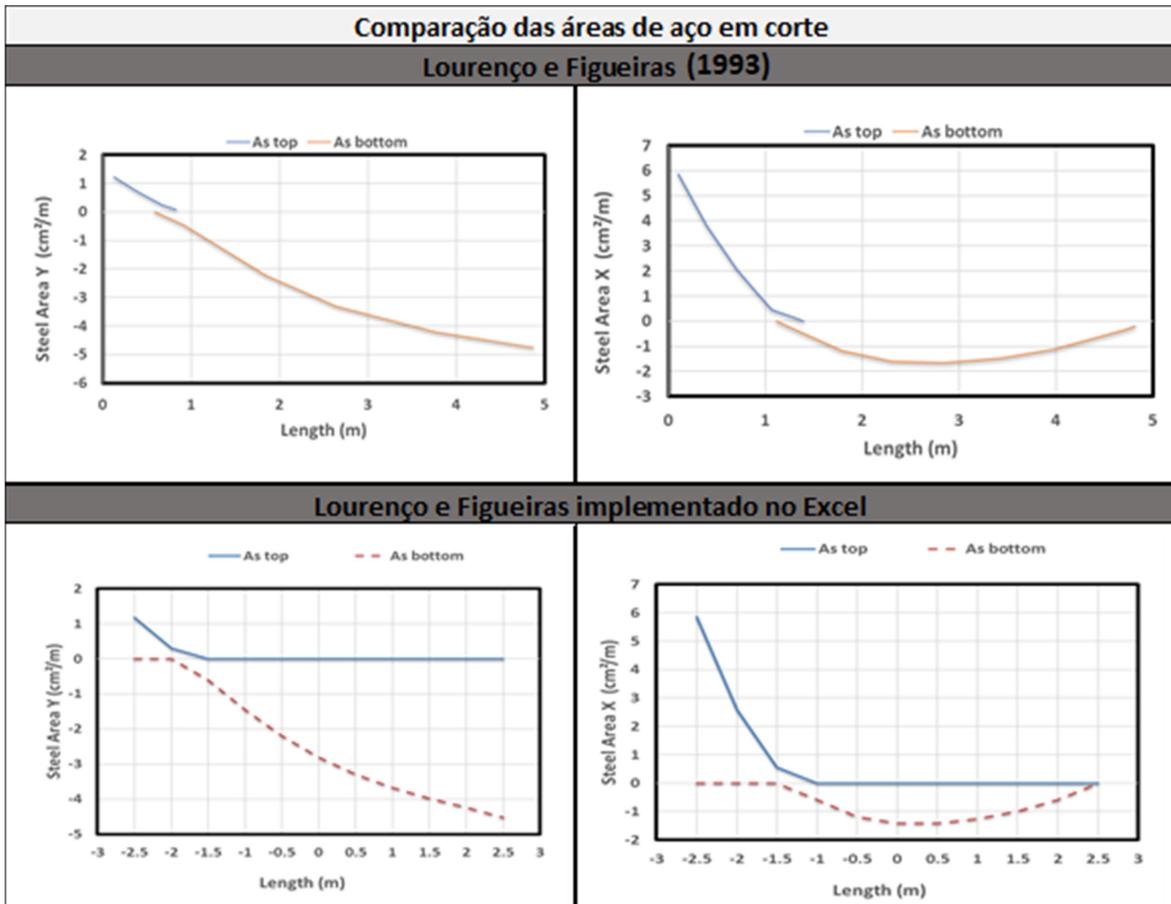


Figura 35 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo x em y=0

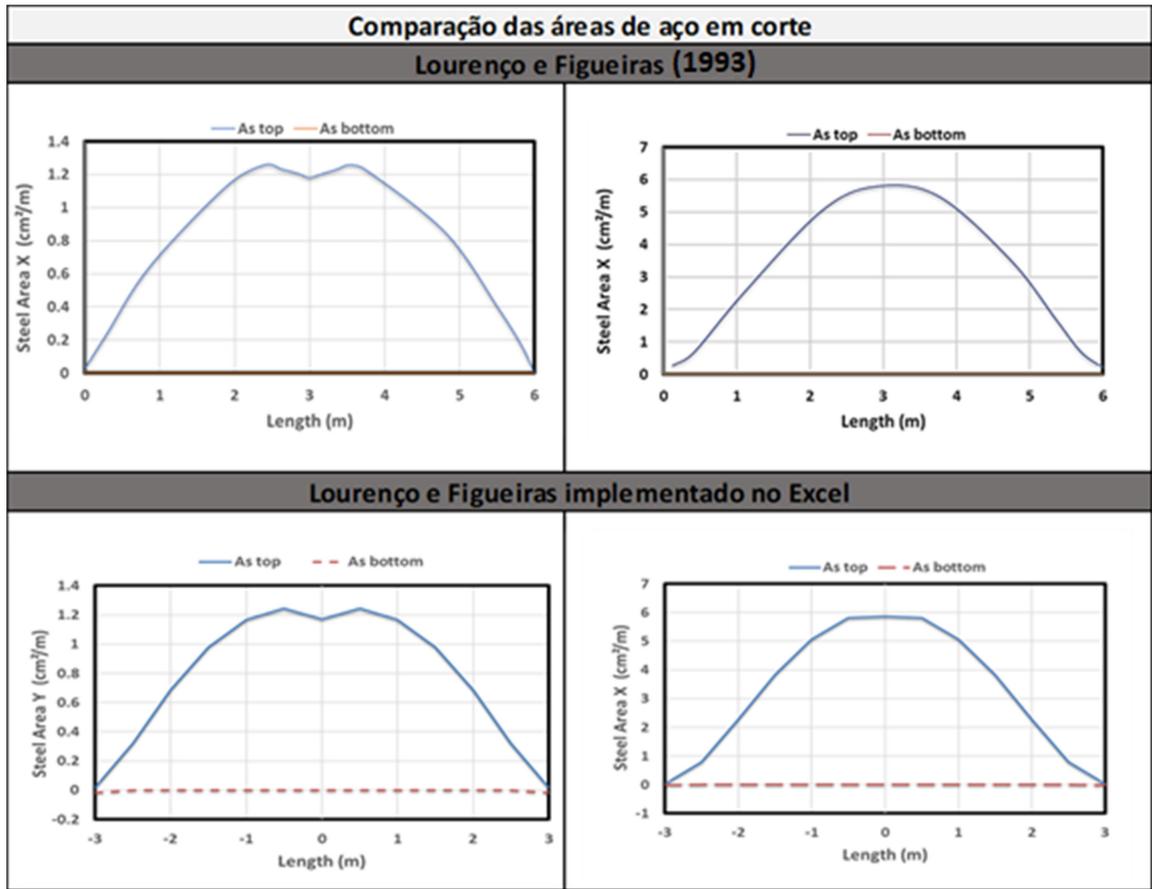


Figura 36 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo y em $x = -2.5$ m

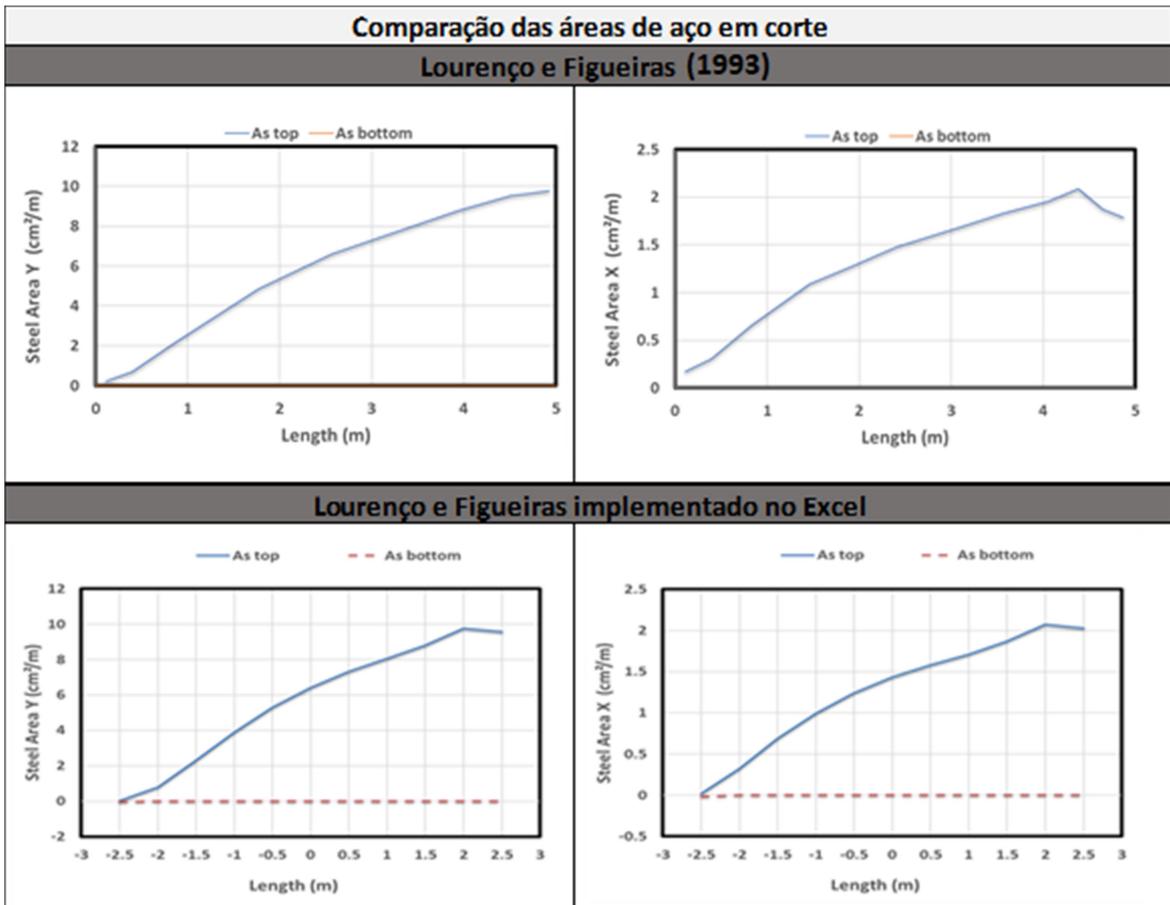


Figura 37 - Área de reforço de aço: corte paralelo ao eixo x em $y = -3.0$ m

6.3 Laje engastada nos 4 bordos

Uma laje engastada nos 4 bordos 15cm de espessura e dimensões de 5m por 5m está sendo submetida por uma carga permanente de 15kN/m^2 , sendo dividida em 100 elementos de dimensões 0.5m por 0.5m. As propriedades da laje e da armadura encontram-se na Tabela 3. O sistema coordenado de referência xy se localiza no centro da laje.

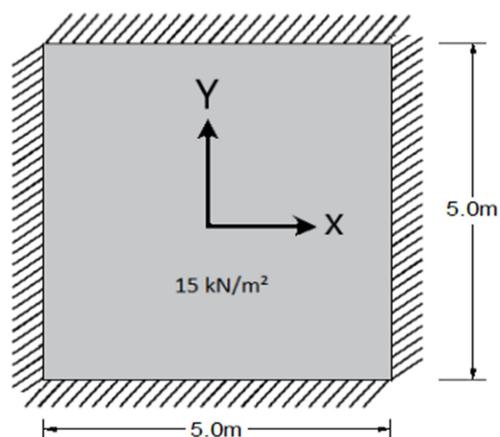


Figura 38 - Laje engastada nos 4 bordos

| Propriedades | |
|------------------------------|---------|
| Ecm - GPa | 30 |
| Cobrimento do Concreto - cm | 3 |
| fck - MPa | 20 |
| ν | 0.2 |
| α | 1.0E-05 |
| γ - kN/m ² | 25 |
| fy - MPa | 400 |

Tabela 3 - Propriedades

Com auxílio do SAP2000, obtivemos os esforços M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} da laje mostrados através das Figura 39, Figura 40 e Figura 41, respectivamente. É evidente que é necessário colocar reforço no centro da laje nas duas direções, assim como reforço superior nos quatro bordos engastados.

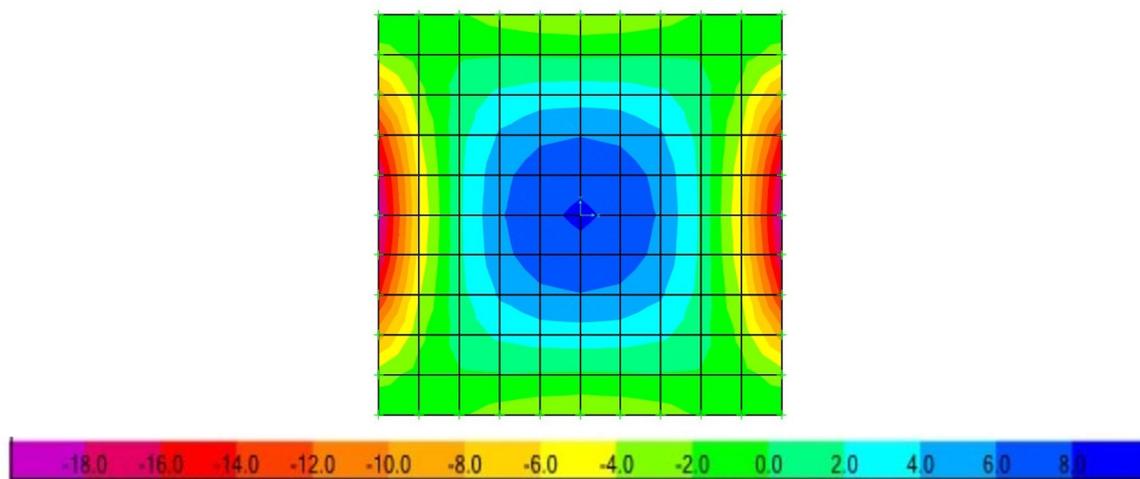


Figura 39 – M_{xx} (kN.m/m)

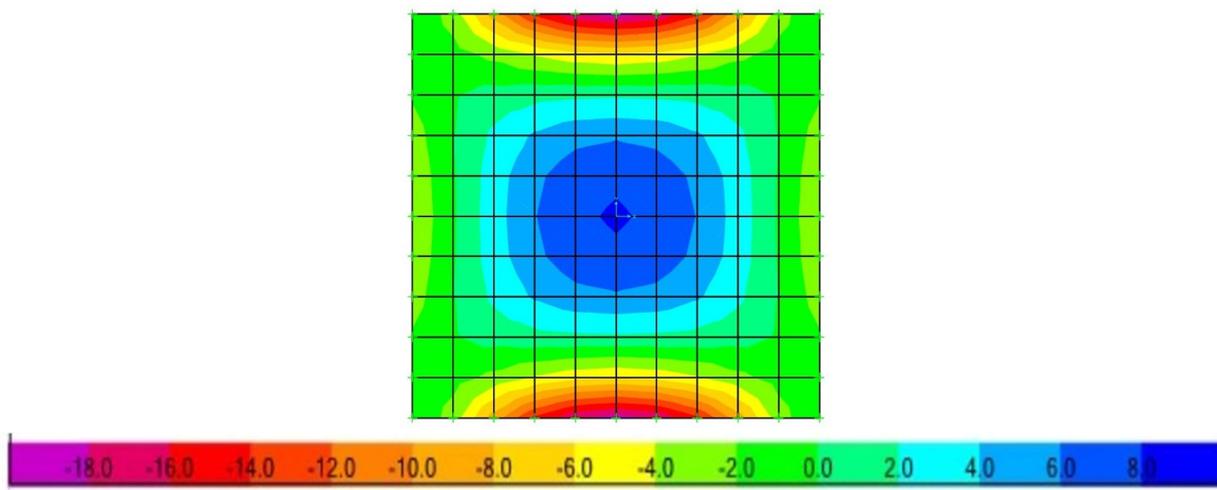


Figura 40 – M_{yy} (kN.m/m)

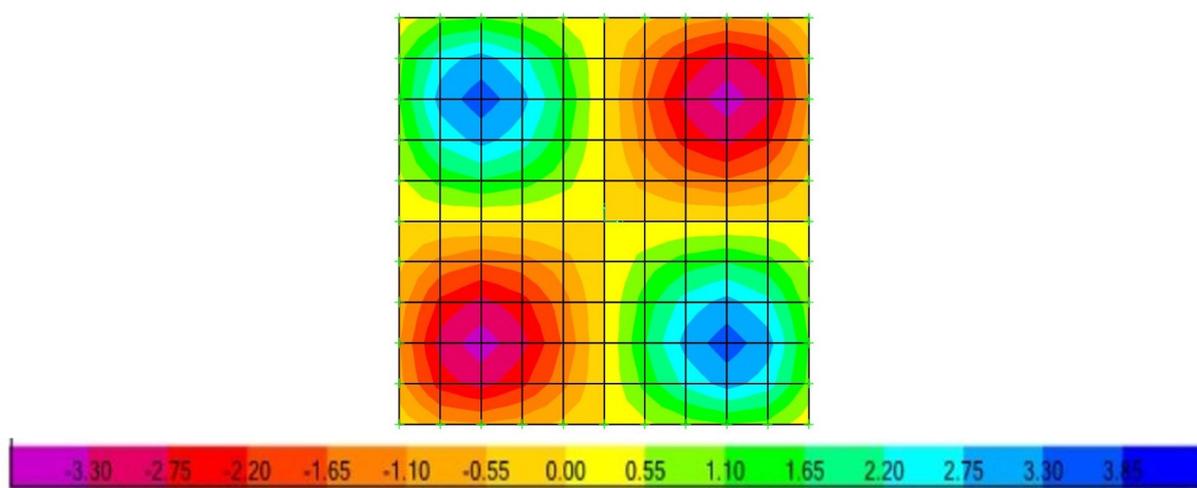


Figura 41 – M_{xy} (kN.m/m)

Seguindo com a metodologia anterior para a apresentação de resultados. Na Figura 42 e Figura 43 se comparam as áreas de reforço para as direções x e y , respectivamente, obtidas com os algoritmos implementados para as camadas de reforço superior e inferior. Neste exemplo em particular devido à dupla simetria da laje em torno dos eixos x e y , os resultados entre os três algoritmos são próximos entre si. Também, nota-se que os algoritmos fornecem valores de área de reforço simétricos em torno dos eixos x e y .

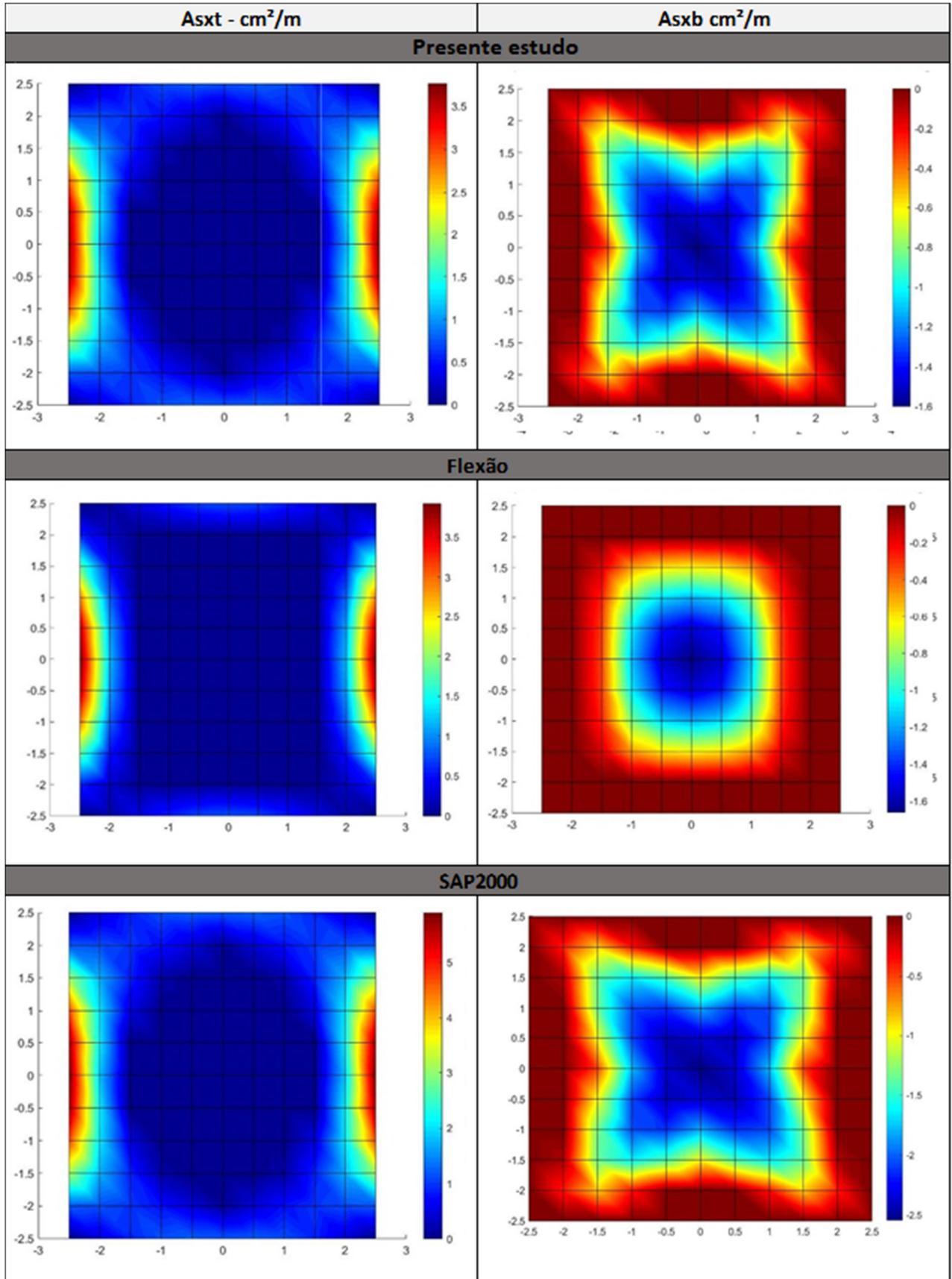


Figura 42 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção x

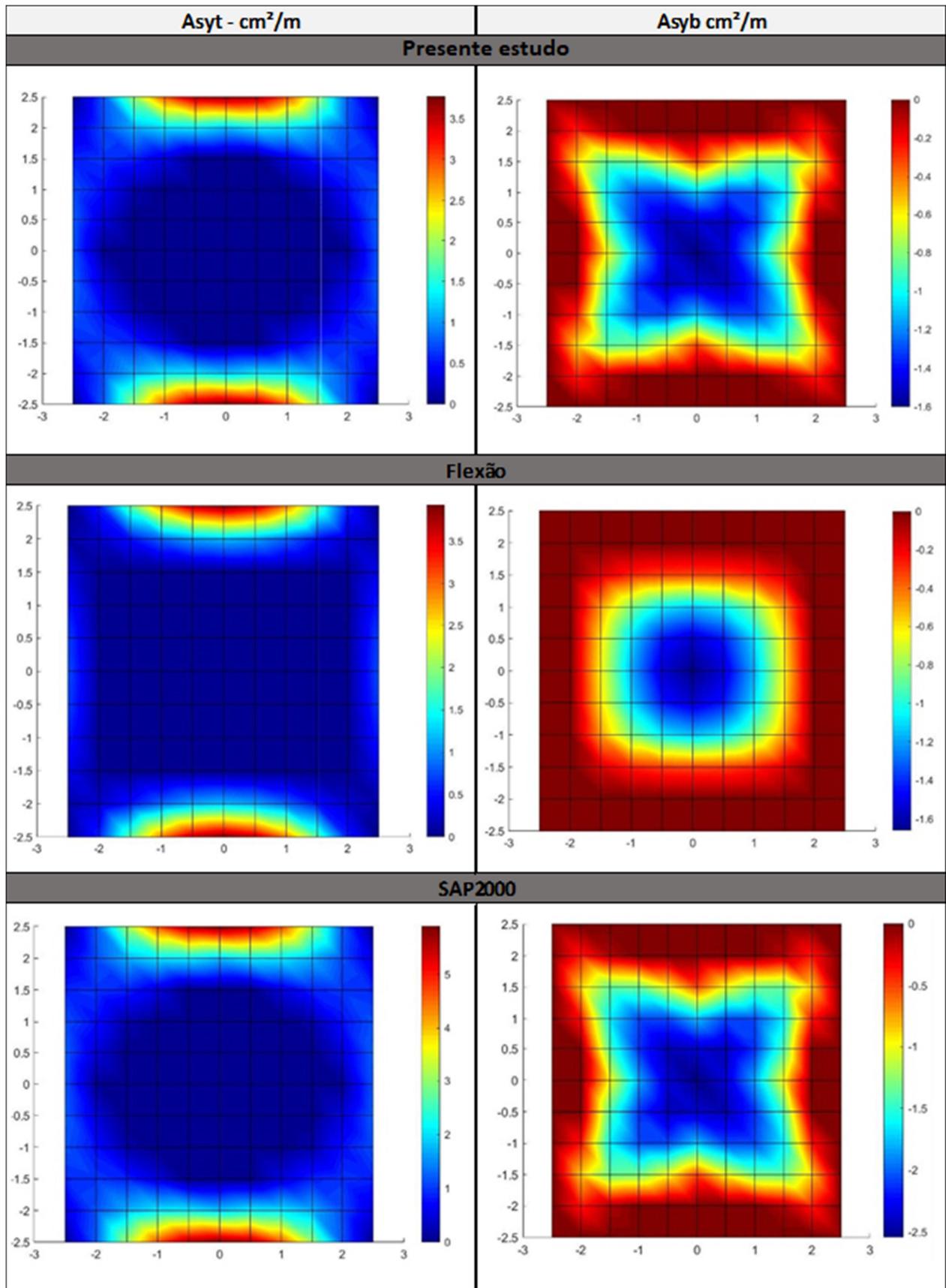


Figura 43 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção y

6.4 Laje engastada em 2 bordos e 1 abertura

Uma laje engastada em 2 bordos e simplesmente apoiada nos bordos restantes, com 25cm de espessura e dimensões de 8m por 8m, está sendo submetida por uma carga permanente de 15kN/m^2 , as propriedades da laje e da armadura encontram-se na Tabela 4. A laje possui uma abertura de 4m por 2m.

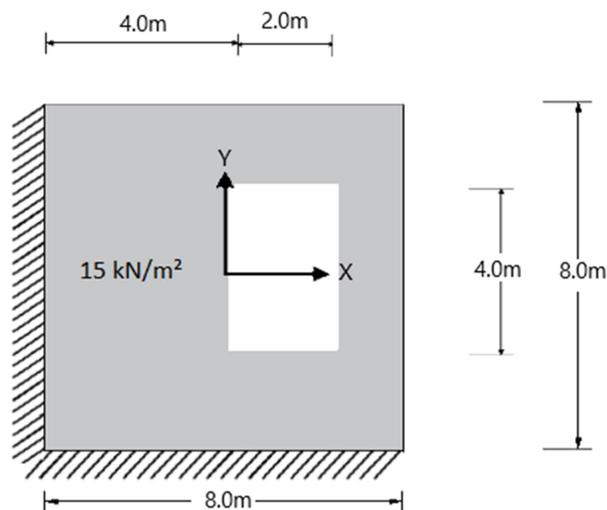


Figura 44 - Laje engastada em 2 bordos e simplesmente apoiada nos outros bordos

| Propriedades | |
|------------------------------|---------|
| Ecm - GPa | 30 |
| Cobrimento do Concreto - cm | 3 |
| fck - MPa | 20 |
| v | 0.2 |
| A | 1.0E-05 |
| γ - kN/m ² | 25 |
| fy - MPa | 400 |

Tabela 4 - Propriedades

Com auxílio do SAP2000, obtivemos os esforços M_{xx} , M_{yy} e M_{xy} da laje mostrados através das Figura 45, Figura 46 e Figura 47, respectivamente. Nota-se a concentração de momentos nos cantos e lados da abertura.

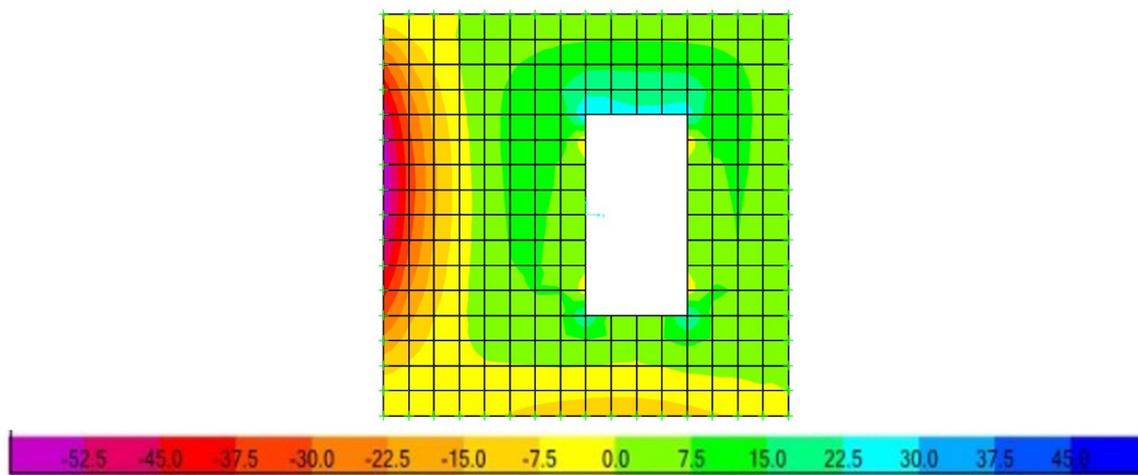


Figura 45 – M_{xx} (kN.m/m)

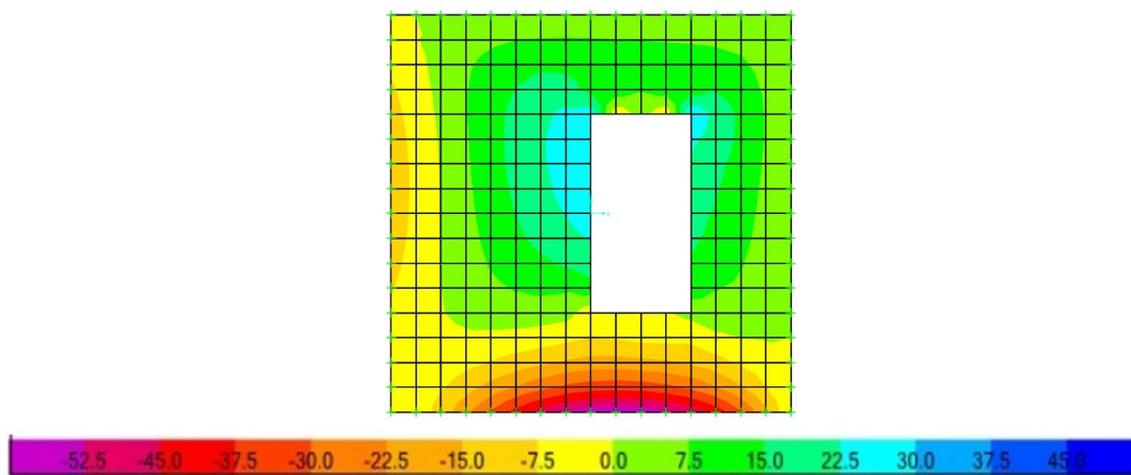


Figura 46 – M_{yy} (kN.m/m)

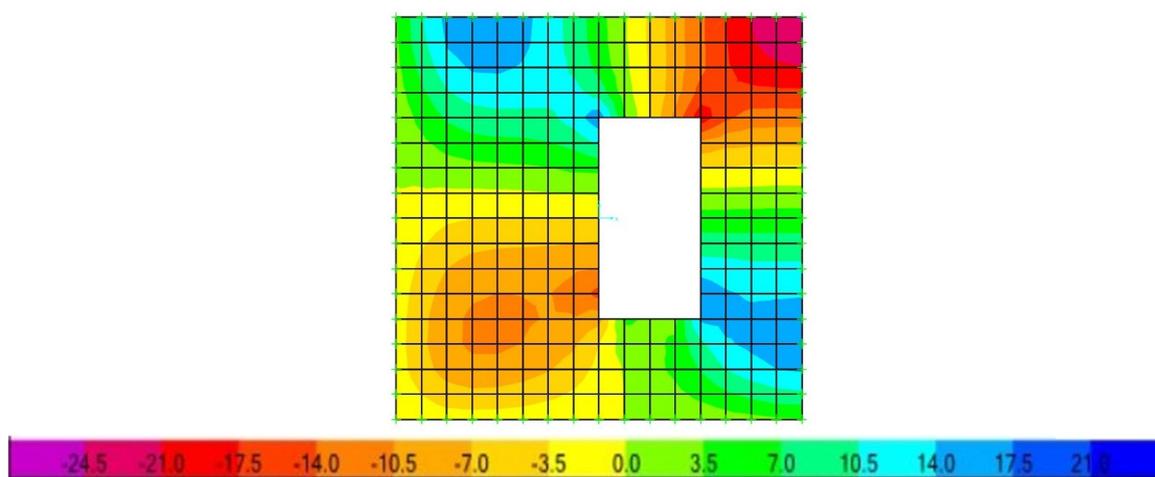


Figura 47 – M_{xy} (kN.m/m)

Na Figura 48 e Figura 49 são apresentadas as áreas de reforço para a direção x e y, respectivamente para ambas as camadas superior e inferior devido aos três algoritmos estudados. Nota-se a concentração de reforço que acontece ao redor da abertura principalmente nos cantos superiores. A NBR6118 [9] precisamente sugere a utilização de detalhes especiais para o reforço das zonas das lajes maciças junto às aberturas mediante a utilização de aço transversal e longitudinal.

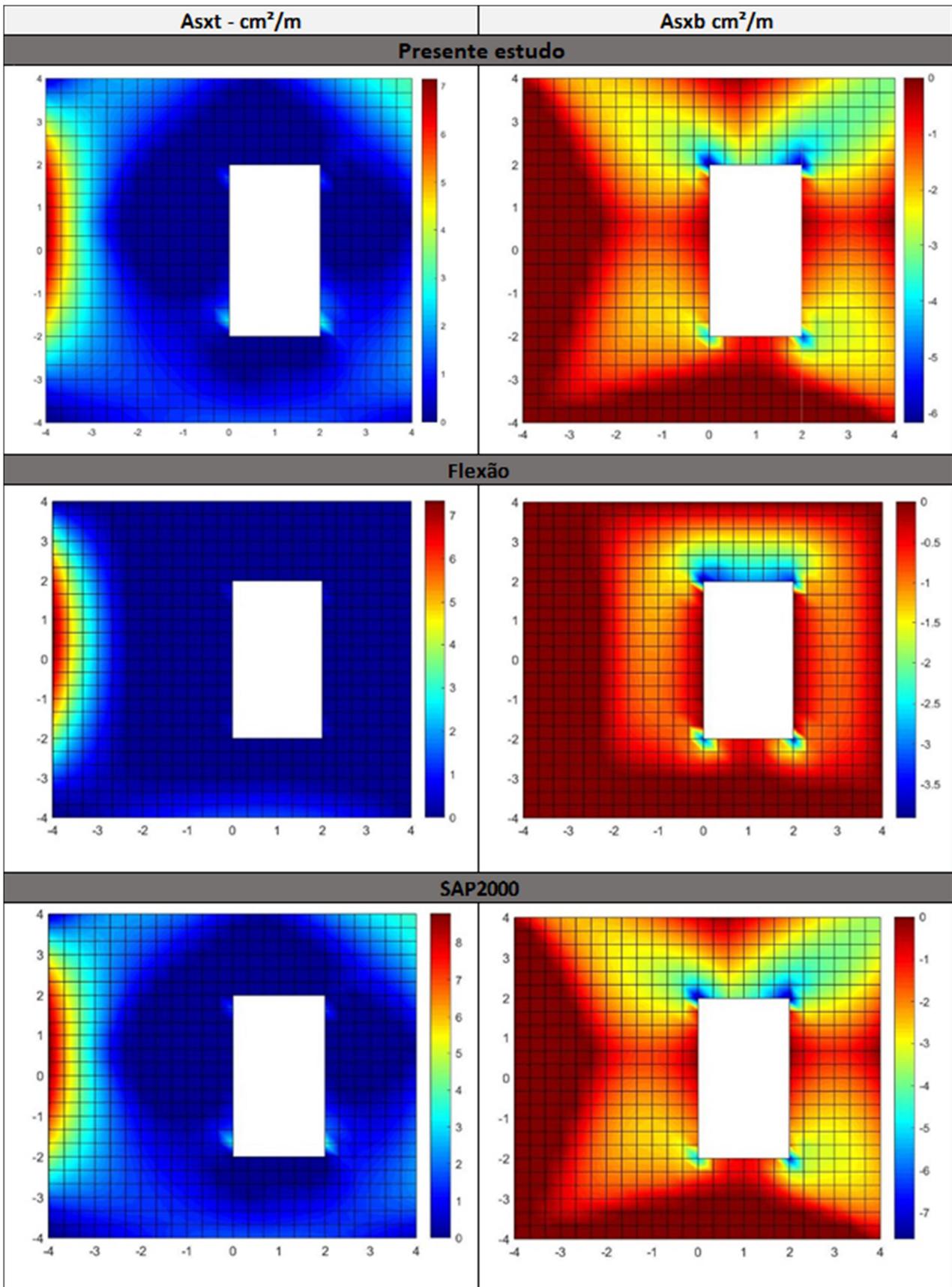


Figura 48 - Áreas de reforço de aço (cm²/m) segundo a direção x

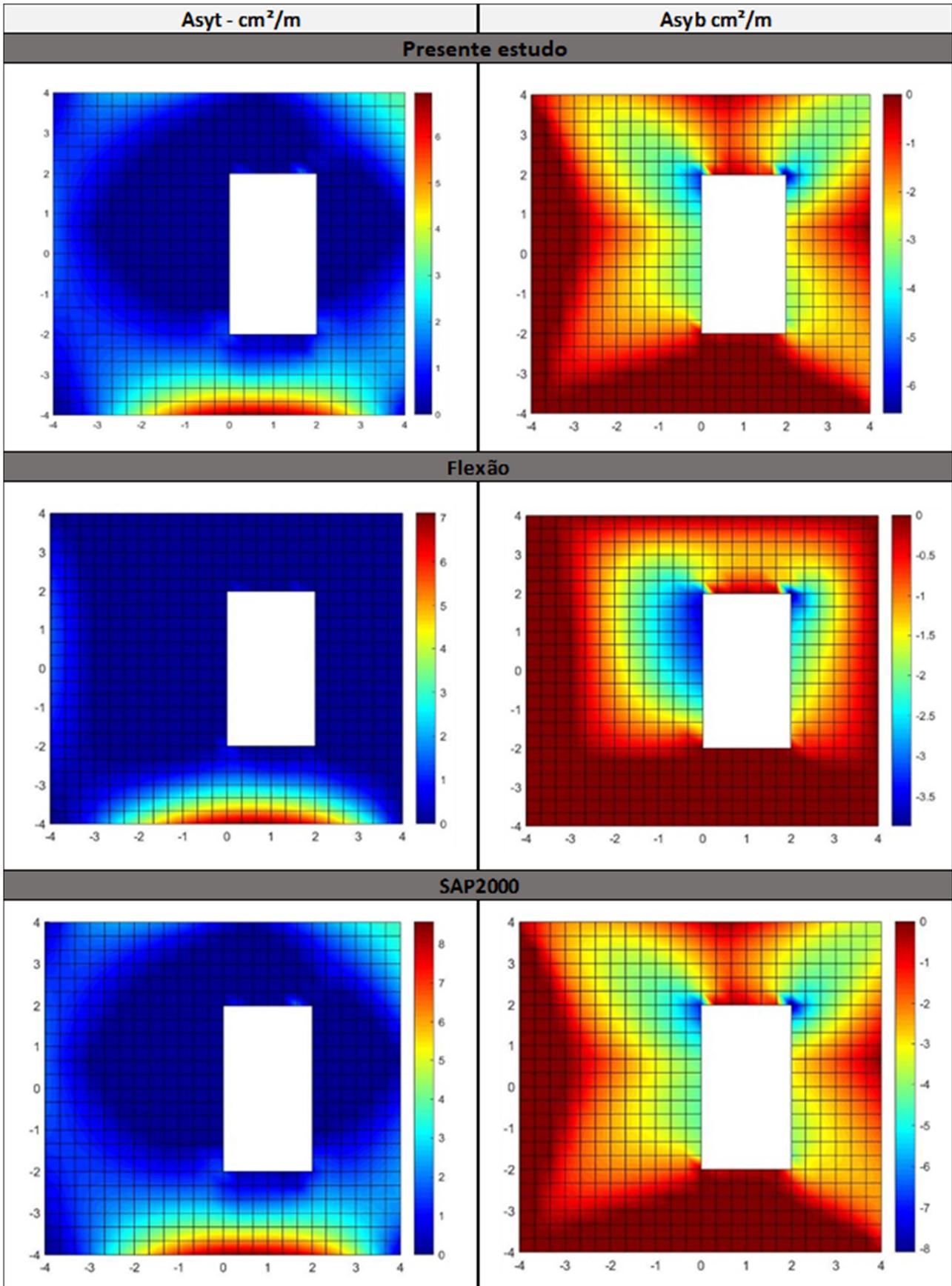


Figura 49 - Áreas de reforço de aço (cm^2/m) segundo a direção y

7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os resultados obtidos, considerando os esforços de membrana e flexão, mostraram-se coerentes e otimizados ao comparar com as outras metodologias. No cálculo do algoritmo que considera um tratamento desacoplado para o dimensionamento à flexão, observou-se que nos locais em que há grandes esforços de torção ocorrem subdimensionamento, enquanto que o dimensionamento do SAP2000 apresenta reforço maior criando diferenças na economia de aço considerada significativa em relação ao método de Lourenço e Figueiras [6].

Visualizar os gráficos de esforços e área de aço com elementos finitos auxilia o projetista a ter mais sensibilidade ao criar um modelo estrutural. A rapidez em demonstrar os resultados e modificar as propriedades permite que o programa seja inserido na aula para possibilitar maior entendimento e interesse dos estudantes pela área estrutural.

O programa tem a possibilidade de ser adaptado para projetar vigas, radier, paredes estruturais por se tratarem de concreto armado e utilizar o SAP2000 para calcular os esforços.

Para desenvolvimentos futuros, prevê-se a implementação de um método iterativo que, a partir de valores iniciais de armadura, mínimo ou máximo, encontre as armaduras de tração e compressão de elementos de casca de concreto armado, obedecendo aos modelos constitutivos dos materiais e às limitações de deformação prescritas pelas normas.

REFERÊNCIAS

- [1] Braga, C. G., “O uso de algoritmos genéticos para aplicações em problemas de otimização de sistemas mecânicos”. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, 73 páginas. 1998.
- [2] Souza jr., D.A., “Otimização pelo método dos algoritmos genéticos e dimensionamento de estruturas tubulares metálicas espaciais com barras cruzadas para coberturas”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Uberlândia, 145 páginas. 2005.
- [3] Craveiro, Marina Vendl, Bittencourt, Túlio Nogueira and Bella, João Carlos Della. “Design and verification of reinforced concrete shell elements”. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais [online]. 2021, v. 14, n. 3 [Acessado em 9 de novembro de 2021], e14305. Available from: <<https://doi.org/10.1590/S1983-41952021000300005>>. Epub 02 Apr 2021.
- [4] J. Kollegger, M. Azevedo, P. Kinzler, and A. Schirp, “Automated design procedure for reinforced concrete plates and shells,” in Proc. Comput. Model. Concr. Struct., 1998, pp. 959–967.
- [5] Gupta, A.K., “Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shells”, ASCE 112(3), Journal of the Struct. Div., pp. 550-557, 1986
- [6] P.B. Lourenço, and J.A. Figueiras, “Automatic design of reinforcement in concrete plates and shells”, Engineering Computations, 10 519-541,1993.
- [7] Comité Euro-Internacional du Béton, CEB-FIP Model Code, Final Draft, Bull. d'Inform., 203, 204, 205 (1991)
- [8] D. S. Lourenço, E. A. P. Liberati, M. G. Marques, L. C. Almeida, and L. M. Trautwein, “Reinforced concrete flat slabs with openings at different distances from the column,” Rev. IBRACON Estrut. Mater., vol. 14, no. 1, e14111, 2021, <https://doi.org/10.1590/S1983-41952021000100011>
- [9] Associação Brasileira de Normas Técnicas, NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto — Procedimento. Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [10] Brondum-Nielsen, T. (1974). Optimum Design of Reinforced Concrete Shells and Slabs, *Report NR.R 44*, Technical University of Denmark, Copenhagen, Denmark.
- [11] Vecchio, F.J. e Collins, M.P. “The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses” ,Universidade de Toronto, Pub. 82-03, Canadá, 1982.
- [12] Nielsen, M.P. “Yield conditions for reinforced concrete shells in the membrane state, Non-classical shell problems”, North-Holland, Amsterdam, Países Baixos, pp. 1030-1040, 1964.
- [13] Nielsen, M.P. “On the strength of reinforced concrete disks”, Acta Poly tech. Scand., Civ. Eng. Bldg. Const. Serv., N° 70, Dinamarca, 1971.
- [14] Braestrup, M.W. “Dome effect in RC slabs: Rigid plastic analysis”, ASCE 106(6), Journal of Struct. Div., pp. 1237-1253, 1980.
- [15] Gupta, A.K. “Discussion on proposed addition to proposed ACI standard: Code requirements for nuclear safety related concrete structures”, ACI Journal, Vol. 37(7), pp. 431-432, 1976.
- [16] Gupta, A.K. “Membrane reinforcement in shells”, ASCE 107(1), Journal of the Struct. Div., pp. 41-56, 1981.
- [17] Fialkow, M.N. “Strength design of shell membrane reinforcement”, ASCE 109(4), Journal of the Struct. Div., pp. 891-908, 1983.

- [18] Gupta, A.K., “Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shells”, ASCE 112(3), Journal of the Struct. Div., pp. 550-557, 1986
- [19] B. Lourenço, Paulo; A. Figueiras, Joaquim. “Automatic design of reinforcement in concrete plates and shells”. Artigo em Engineering Computations, 2005. doi: [10.1108/eb023923](https://doi.org/10.1108/eb023923).
- [20] MICROSOFT. Microsoft, 2019. Introdução ao VBA no Office. Disponível em: Introdução ao VBA no Office | Microsoft Docs, available at <https://docs.microsoft.com/pt-br/office/vba/library-reference/concepts/getting-started-With-vba-in-office>.